Pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología

Valentina Salgado Sánchez
Jhoana Torres Aguirre

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Asesores
John Henry Durango Urrego, Doctor (PhD) en Educación
Sandra Milena Zapata, Doctora (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Matemáticas
Medellín, Antioquia, Colombia
2024

Grupo de Investigación Matemática, Educación y Sociedad (MES).

Grupo de Investigación Educación Matemática e Historia (Edumath).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).

Dedicatoria

A los estudiantes con quienes realizamos las prácticas pedagógicas, sus aportes hicieron posible este trabajo investigativo.

Valentina Salgado Sánchez y Jhoana Torres Aguirre

Agradecimientos

Agradezco a las personas que me ayudaron, guiaron y estuvieron interesadas por el progreso del presente trabajo investigativo. De manera especial, agradezco a mi mamá y mi abuela por estar siempre presentes, entender mis ausencias, por sus palabras y gestos de aliento. En adición, extiendo mis sinceros agradecimientos a mi amiga Jhoana, por ser la compañera incondicional de esta travesía académica. Para finalizar, le agradezco a mis asesores por sus sabios consejos, por refinar mi escritura académica y guiarme en la ardua labor de investigar.

Valentina Salgado Sánchez

Mi sincero agradecimiento a Dios y a sus ángeles, quienes han convertido mi experiencia de vida en una aventura llena de magia. A mi familia, por su amor y apoyo incondicional. A la Universidad de Antioquia, a mis profesores y compañeros, por su contribución a mi formación. A mis asesores, Dra. Sandra Milena Zapata y Dr. John Henry Durango Urrego, por su guía llena de afecto, sabiduría y rigurosidad. A Valentina, mi hermana del alma, por su amistad, por sus enseñanzas y por emprender conmigo este trabajo de investigación.

Jhoana Torres Aguirre

Tabla de contenido

Resumen 11
Abstract 12
Introducción 13
1 Planteamiento del problema 14
1.1 Contexto institucional 14
1.2 Antecedentes 16
1.2.1 Pensamiento algebraico 17
1.2.2 Pensamiento algebraico y tecnología 22
1.3 Pregunta investigativa 28
1.4 Objetivos 28
1.4.1 Objetivo general 29
1.4.2 Objetivos específicos 29
2 Marco teórico 30
2.1 Álgebra temprana 30
2.1.1 Pensamiento algebraico: caracterización 31
2.1.2 Pensamiento algebraico: estratificación 32
2.1.3 Medios semióticos de objetivación 34
2.2 Tecnología en educación matemática: humanos-con-medios 34
2.3 Medios semióticos de objetivación y humanos-con-medios: posibilidades de articulación 36
2.4 Promoción de pensamiento algebraico 37
2.4.1 Tareas 38
3 Marco metodológico 40
3.1 Enfoque investigativo 40
3.2 Diseño metodológico 41

3.3 Participantes 42

3.4 Trabajo de campo 43

3.5 Métodos de recolección de información 45

3.6 Triangulación de información 46

3.7 Criterios de rigurosidad 47

3.8 Consideraciones éticas 47

4 Análisis y resultados 49

4.1 Secuencias con videojuegos 50

4.1.1 Secuencias con videojuegos: Circus Charlie 50

4.1.1.1 Pensamiento algebraico factual 51

4.1.1.2 Pensamiento algebraico contextual 53

4.1.2 Secuencias con videojuegos: Super Mario World 54

4.1.2.1 Pensamiento algebraico contextual 55

4.1.2.2 Pensamiento algebraico simbólico 57

4.1.3 Secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies 58

4.1.3.1 Pensamiento algebraico factual 59

4.1.3.2 Pensamiento algebraico contextual 60

4.1.3.3 Pensamiento algebraico simbólico 62

4.2 Secuencias con calculadora 63

4.2.1 Pensamiento algebraico factual 63

4.2.2 Pensamiento algebraico simbólico 64

4.3 Secuencias con Scratch 66

4.3.1 Pensamiento algebraico contextual 67

4.3.2 Pensamiento algebraico simbólico 68

4.4 Carrusel algebraico 69

4.4.1 Pensamiento algebraico factual....70

4.4.2 Pensamiento algebraico contextual....71

4.4.3 Pensamiento algebraico simbólico....72

5 Conclusiones y recomendaciones....75

5.1 Respuesta a la pregunta de investigación....75

5.2 Aportes de la investigación....76

5.3 Posibles preguntas y recomendaciones para futuras investigaciones....77

Referencias....79

Anexos....83

Lista de tablas

Tabla 1 Ejemplo de manifestación de estratos de pensamiento algebraico propuestos por Radford 33

Tabla 2 Trabajo de campo 44

Tabla 3 Formato de anotaciones para la recolección de información 45

Tabla 4 Triangulación de información 46

Tabla 5 Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 53

Tabla 6 Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 53

Tabla 7 Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 54

Tabla 8 Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World 56

Tabla 9 Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World 56

Tabla 10 Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World 56

Tabla 11 Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Super Mario World 57

Tabla 12 Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies 60

Tabla 13 Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies 61

Tabla 14 Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies 62

Tabla 15 Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con calculadora 65

Tabla 16 Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con calculadora 65

Tabla 17 Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con Scratch 68

Tabla 18 Evidencias de la preparación de los grupos para la fase de carrusel algebraico 70

Tabla 19 Dato 1 de pensamiento algebraico factual en el carrusel algebraico............................70

Tabla 20 Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en el carrusel algebraico........................71

Tabla 21 Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en el carrusel algebraico.........................73

Lista de figuras

Figura 1 Fragmento 1 de diario de campo, Valentina 15

Figura 2 Fragmento 1 de diario de campo, Jhoana 15

Figura 3 Fragmento 2 de diario de campo, Valentina 16

Figura 4 Fragmento 2 de diario de campo, Jhoana 16

Figura 5 Interpretación de la noción de pensamiento algebraico propuesta por Radford....39

Figura 6 Diálogo entre Pensamiento algebraico y Humanos-con-medios 39

Figura 7 Diseño de la investigación 41

Figura 8 Participantes de la investigación....43

Figura 9 Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 52

Figura 10 Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 52

Figura 11 Dato 3 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 52

Figura 12 Dato 4 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie 52

Figura 13 Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Super Mario World....58

Figura 14 Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies....59

Figura 15 Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies....60

Figura 16 Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies....61

Figura 17 Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con calculadora 64

Figura 18 Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con calculadora 64

Figura 19 Visualización en Scratch de la ejecución progresiva del mandala geométrico 66

Figura 20 Tabla para características del mandala geométrico ejecutado en Scratch 67

Figura 21 Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con Scratch....................68

Figura 22 Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con Scratch 68

Figura 23 Visualización en Scratch de la animación creada por el grupo 1 71

Figura 24 Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en el carrusel algebraico 72

Resumen

La enseñanza tradicional del álgebra escolar se vincula con tareas aisladas de la realidad de los estudiantes. La presente investigación propone *analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas*. El marco teórico articula el pensamiento algebraico propuesto por Radford con la concepción de tecnología de Borba y Villarreal. El diseño metodológico es cualitativo en el que se adaptan cuatro etapas de una investigación longitudinal propuesta por Radford: (1) Diseño de tareas para el aula, (2) Implementación de tareas, (3) Interpretación de información y (4) Generación de conclusiones. Se analizan tareas realizadas por 18 estudiantes distribuidos en 4 grupos de trabajo. Los resultados evidencian que los estudiantes manifiestan pensamiento algebraico de forma factual, contextual y simbólica. Así mismo, que la tecnología constituye un medio semiótico de objetivación de pensamiento algebraico.

Palabras clave: Pensamiento Algebraico, Tecnología, Tareas, Generalización de Patrones.

Abstract

The traditional teaching of school algebra is linked to tasks isolated from the students' reality. The present research proposes to analyze Algebraic Thinking when it is promoted through technology-mediated tasks with seventh-grade students of the Diego Echavarría Misas Educational Institution. The theoretical framework articulates the algebraic thinking proposed by Radford with the conception of the technology of Borba and Villarreal. The methodological design is qualitative in which four stages of longitudinal research proposed by Radford are adopted: (1) Design of tasks for the classroom, (2) Implementation of tasks, (3) Interpretation of information, and (4) Generation of conclusions. Tasks performed by 18 students distributed in 4 work groups are analyzed. The results show that algebraic thinking manifests by students in a factual, contextual, and symbolic way. Likewise, that technology constitutes a semiotic means of objectification of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic Thinking, Technology, Tasks, Generalizations of Patterns.

Introducción

La presente investigación se deriva de las Prácticas Pedagógicas finales del programa Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Tales prácticas fueron realizadas con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas, ubicada en Medellín, Antioquia. En la investigación, se cuestiona la enseñanza tradicional del álgebra escolar, la cual se vincula a tareas aisladas de la realidad de los estudiantes. En consecuencia, se plantea la necesidad de tratar la enseñanza del álgebra escolar desde un enfoque diferente, mediante el cual se propongan tareas vinculadas a la realidad de los estudiantes y se reconozcan en estos últimos, diversas formas de evidenciar su comprensión del álgebra. En relación con tales tareas, se identifica un contexto propicio para llevarlas a cabo: la tecnología. En ese sentido, la investigación propone *analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas.*

En el primer capítulo se presenta el planteamiento del problema a partir de dos aspectos: una observación del contexto institucional y una revisión de antecedentes. En el segundo capítulo, se presenta la caracterización y estratificación del pensamiento algebraico propuesto por Radford (2000, 2006, 2010a, 2014) y el marco teórico humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005; Villarreal, 2013) que permite entender la tecnología como medio semiótico de objetivación para promover pensamiento algebraico. Además, se brindan claridades sobre las nociones de Álgebra temprana, medios semióticos, promoción de pensamiento algebraico y tarea. En el tercer capítulo, se describe el marco metodológico de la investigación, se detalla que el diseño es cualitativo y se adaptan cuatro etapas de una investigación longitudinal propuesta por Radford: (1) diseño de tareas para el aula, (2) implementación de tareas, (3) interpretación de información y (4) generación de conclusiones.

Se documenta luego el análisis de tareas realizadas por 18 estudiantes distribuidos en 4 grupos de trabajo y los resultados de la investigación por medio de tres categorías, a saber, pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Tales categorías permiten describir cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología. Para finalizar, se resaltan los aportes de la investigación, así como posibles preguntas y recomendaciones para futuras investigaciones.

1 Planteamiento del problema

En el marco del programa Licenciatura en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, se realizaron las Prácticas Pedagógicas finales en la Institución Educativa Diego Echavarría Misas, ubicada en Medellín, Antioquia. Según las experiencias en la institución, se desarrolló la investigación, que se adscribe a la línea de pensamiento algebraico. A continuación, se presenta el planteamiento del problema a partir de dos aspectos: una observación del contexto institucional y una revisión de los antecedentes que se emplearon para fundamentar la investigación.

1.1 Contexto institucional

La Institución Educativa Diego Echavarría Misas se encuentra ubicada en el barrio Florencia, Medellín, Antioquia. El establecimiento fue constituido por la ordenanza 018 de 1967 bajo el nombre de Liceo Departamental Florencia y su construcción se inició en el año 1968. La institución pasó a llamarse Diego Echavarría Misas en honor al empresario con el mismo nombre, quien era reconocido en Medellín por destinar su fortuna a obras sociales. La institución educativa es de carácter oficial, laico y mixto, cuenta con educación inicial, primaria, básica secundaria y media, con técnicas tales como: (1) monitoreo ambiental, (2) organización de eventos turísticos, (3) soporte, mantenimiento y visualización de bases de datos, (4) desarrollo de software, (5) muestras químicas, (6) operaciones agrícolas y (7) dibujo arquitectónico.

El modelo pedagógico de la institución se enmarca en el paradigma de Desarrollo Humano Integral, al respecto, la institución plantea, “este paradigma propone un clima escolar humanista, democrático y científico. Promueve la formación de actitudes productivas, participativas, reflexivas, críticas y tolerantes. Busca la identidad individual, local, nacional y universal del hombre para la formación de una mejor sociedad” (Institución Educativa Diego Echavarría Misas, 2023, p. 21). De manera adicional, la filosofía de la institución educativa obedece al lema “Honestidad, Ciencia y Solidaridad”, principios sobre los cuales se construye una mejor sociedad (Institución Educativa Diego Echavarría Misas, 2023).

En el transcurso de la investigación, se acompañaron clases de matemáticas con estudiantes de grado séptimo. Durante el acompañamiento, se emplearon diarios de campo para registrar observaciones realizadas en las aulas de clases. En la información recolectada en los diarios de campo se comunica que, en el plan de clase, se propone que los estudiantes de grado séptimo transiten del pensamiento numérico al pensamiento variacional (ver **Figura *1***). En cuanto al pensamiento variacional, la ruta definida en el plan curricular comienza con la familiarización de los estudiantes con el lenguaje algebraico y con la resolución de ecuaciones de primer grado (ver **Figura *2***).

Figura 1

Fragmento 1 de diario de campo, Valentina

En el plan de clase de matemáticas se propone que los estudiantes de grado séptimo realicen un "tránsito" del pensamiento numérico al pensamiento variacional. Se parte de la premisa que, durante los grados anteriores, los estudiantes se familiarizaron con temas sobre pensamiento numérico. En este año escolar, se busca que los estudiantes traten temáticas vinculadas al pensamiento variacional.

Nota. Anotación de diario de campo realizada el 16 de mayo de 2023.

Figura 2

Fragmento 1 de diario de campo, Jhoana

Para tratar el pensamiento variacional, en el plan de clase se propone presentarle a los estudiantes ejercicios como: "Traducir a lenguaje algebraico la siguiente expresión: el doble de un número disminuido en 4" "Escribir una ecuación para esta situación: Ana tiene \$3000 más que Lucía, si Lucía tiene \$4000, ¿cuánto dinero tiene Ana?"

Nota. Anotación de diario de campo realizada el 11 de mayo de 2023.

La propuesta del plan curricular de matemáticas de la institución educativa evidencia una concepción tradicional de la enseñanza del álgebra escolar cuestionada en múltiples investigaciones (Kaput, 2000a; Kaput, 2000b; Agudelo-Valderrama, 2000; Agudelo-Valderrama, 2002; Kieran, 2004; Molina, 2009; Radford, 2010a; Radford, 2014; Vergel y Rojas, 2018). Tal concepción se caracteriza por una enseñanza del álgebra que se imparte de manera aislada de la realidad de los estudiantes. En consecuencia, se plantea la necesidad de tratar la enseñanza del álgebra desde un enfoque diferente, mediante el cual se propongan tareas vinculadas a la realidad de los estudiantes y se reconozcan en estos últimos, diversas formas de evidenciar su comprensión del álgebra. En relación con tales tareas, los diarios de campo permitieron identificar un contexto propicio para llevarlas a cabo: la tecnología (ver **Figura *3*** y **Figura *4***).

Figura 3

Fragmento 2 de diario de campo, Valentina

Algunos estudiantes de grado séptimo emplean de forma constante sus celulares durante las clases de matemáticas y muestran desinterés por realizar las tareas propuestas en la asignatura. Esto sucede a pesar de que no se contemple el uso de este artefacto dentro del aula. ¿Cómo vincular el uso de tecnología en el aula?, esto con el propósito de que en las clases de matemáticas se considere la realidad de los estudiantes.

Nota. Anotación de diario de campo realizada el 28 de marzo de 2023.

Figura 4

Fragmento 2 de diario de campo, Jhoana

Durante un examen, los estudiantes que no debían hacer la recuperación recibieron autorización de emplear sus celulares. Al conversar con ellos, pude reconocer que algunos de sus pasatiempos favoritos consisten en jugar videojuegos con sus celulares.

Nota. Anotación de diario de campo realizada el 18 de abril de 2023.

1.2 Antecedentes

Se identificó como objeto de estudio investigativo el pensamiento algebraico. Cabe resaltar que, en el plan de clase de matemáticas descrito previamente no se menciona el pensamiento algebraico, en su lugar, se alude al pensamiento variacional. Este último es entendido en los Estándares Básicos de Competencias como un tipo de pensamiento matemático asociado al reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y del cambio en diferentes contextos (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006). El pensamiento algebraico “refiere al conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional" (Rojas y Vergel, 2013, p. 694). En este orden de ideas, es necesario atender inicialmente al pensamiento algebraico, entendiendo este como aquel que da sentido al pensamiento variacional.

Se informan a continuación algunos antecedentes investigativos. Se mencionan primero investigaciones donde el pensamiento algebraico es el tema central. Más adelante, se reportan investigaciones donde este tipo de pensamiento se relaciona con el uso de tecnología en clases de matemáticas.

1.2.1 Pensamiento algebraico

Desde hace más de dos décadas, se han desarrollado nacional e internacionalmente, investigaciones que responden a una propuesta de cambio curricular denominada Álgebra temprana, la cual busca integrar el álgebra en el currículo de los niveles educativos (Kaput, 2000a; Kaput, 2000b; Radford, 2000; Kieran, 2004). A la luz de esta propuesta, han surgido investigaciones que refieren tanto al “razonamiento algebraico” como al “pensamiento algebraico”. En la siguiente revisión, se presenta la perspectiva de los autores y el término que emplean, sin embargo, el interés de la investigación se sitúa en el pensamiento algebraico.

Kaput (2000a) problematiza la forma en la que se enseña álgebra en las escuelas, pues, se transmite como un área desconectada, tanto de otros conocimientos matemáticos como de la realidad de los estudiantes. En ese sentido, sugiere integrar el razonamiento algebraico en los grados y temas de las matemáticas escolares. Para justificar su propuesta, provee ejemplos de investigaciones que ilustran formas de enseñar álgebra, incluso desde los primeros grados, que incluyen metodologías socioculturales apoyadas en material manipulativo y tecnología. Así, concluye que se puede enseñar álgebra en la escuela, asociándose con la aritmética, geometría, entre otras áreas del saber, y sin limitarse a la manipulación de símbolos.

Kaput (2000b) denomina su propuesta anterior (Kaput, 2000a) como la “algebrización del currículo”. Su marco teórico sostiene que el razonamiento algebraico es una combinación de cinco formas de razonamiento interrelacionadas: (1) generalización de patrones, (2) manipulación de formalismos, (3) abstracción de cálculos, (4) estudio de funciones, relaciones y variación conjunta, y (5) modelado. El autor trata las formas de razonamiento referidas considerando cinco actividades desarrolladas por profesores de educación elemental en aulas diferentes. Estas actividades consideran la posibilidad que tienen los estudiantes de conceder sentido a situaciones complejas mientras construyen ideas algebraicas. Por último, el autor concluye que debemos transformar el álgebra tradicional en un motor de poder matemático, accesible y entendible para los estudiantes.

En consideración con aquellas propuestas que favorecen la enseñanza del álgebra en los niveles educativos, como la de Kaput (2000a, 2000b), Kieran (2004) ofrece una definición de pensamiento algebraico en los primeros grados escolares, que integra marcos para asumir el álgebra en grados posteriores y reúne algunas de las aproximaciones realizadas a tal pensamiento.

Kieran (2004) emplea como marco teórico una caracterización de pensamiento algebraico (Kieran, 1996, como se citó en Kieran, 2004) donde este se define conforme a actividades que suelen realizar los estudiantes: actividades generacionales (basadas en formación de expresiones y ecuaciones), actividades transformacionales (basadas en reglas: recopilar términos semejantes, factorizar, sustituir, etc.) y actividades globales de meta-nivel (basadas en el uso del álgebra como herramienta para actividades que no son exclusivas del álgebra: resolución de problemas, modelado, etc.). La metodología usada es cualitativa y hace un símil entre las descripciones de pensamiento algebraico propuestas en planes de estudio de diferentes lugares del mundo. En esta investigación se concluye que las similitudes de estos planes se enmarcan en las actividades globales de meta-nivel, las cuales dotan de contexto el uso del álgebra y son precursoras de las actividades generacionales y transformacionales.

Radford (2000) investiga la actividad algebraica de estudiantes en la interacción de la subjetividad del individuo y los medios sociales de la objetivación semiótica. Emplea como marco teórico la Teoría del discurso de Bakhtin y Voloshinov, y la Teoría semiótico-cultural propuesta por él. En esta investigación, el autor propone dos objetivos: (1) investigar la forma en que estudiantes usan signos y los dotan de significado en su primer encuentro con la generalización algebraica de patrones y (2) caracterizar la naturaleza del pensamiento algebraico emergente en los estudiantes. La metodología empleada es etnográfica cualitativa, respaldada por una investigación histórica y epistemológica, que asegura el diseño y la interpretación de un conjunto de actividades realizadas con estudiantes de grado octavo. En esta investigación se concluye que los lenguajes algebraicos permiten a los estudiantes interactuar entre ellos y elaborar nuevos significados matemáticos.

Radford (2006) realiza una investigación sobre pensamiento algebraico en estudiantes de secundaria al realizar actividades de generalización de patrones. El pensamiento algebraico es entendido como una forma particular de reflexionar matemáticamente que involucra tres elementos interrelacionados: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica. La metodología empleada es cualitativa, se implementan actividades durante seis años a grupos de estudiantes que avanzan en la escuela secundaria. El autor concluye que: (1) la generalización algebraica implica evidenciar algo general en elementos particulares y expresar aquello generalizado a través de un esquema, (2) existen tres niveles de generalización algebraica: factual (acciones realizadas sobre elementos concretos), contextual (verbalización de aquello común a través de descripciones corporeizadas) y simbólica (construcción de esquemas a través de símbolos alfanuméricos) y (3) las actividades de generalización algebraica deben ser mediadas por situaciones didácticas que permitan el intercambio de ideas entre estudiantes.

Cabe resaltar que, la investigación anterior se relaciona con la Teoría de la objetivación (Radford, 2006), la cual contribuye a entender los niveles de generalización algebraica como estratos de pensamiento que se relacionan con medios semióticos de objetivación a los que recurren los estudiantes para hacer sus generalizaciones.

Radford (2010a) significa el pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótico-cultural. Para ello, alude a los niveles de generalización algebraica (Radford, 2006). Explica esta tipificación basándose en eventos reales, fruto de un estudio longitudinal que realiza con estudiantes que pasan de grado octavo a noveno. En este estudio, se concluye que trabajar con el pensamiento algebraico requiere tomar una postura frente a qué es el pensamiento, el cual, según el autor, deriva de la mediación entre sentidos, cuerpo y artefactos culturales. Asimismo, se aclara que la transición entre el pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico no es lineal, sino que depende del contexto en el que se desarrollen las actividades de andamiaje propuestas por el profesor para promover tal pensamiento.

Radford (2014) caracteriza el pensamiento algebraico corporeizado y no simbólico. Para esto, responde a dos preguntas de investigación: ¿cómo las formas corporeizadas de pensamiento algebraico en jóvenes de secundaria se evidencian en jóvenes estudiantes de primaria? y ¿cómo podemos evidenciar el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes de primaria? Su estudio tarda cinco años y utiliza un método experimental con estudiantes de segundo, tercero, cuarto y noveno grado. La recolección de datos se realiza mediante grabaciones de las clases en donde hace sus intervenciones. El investigador concluye que en los estudiantes de primaria surgen manifestaciones de pensamiento algebraico corporeizado que se refinan progresivamente en formas de pensamiento algebraico sofisticado, entendiendo este último, como una multiplicidad de componentes interrelacionados que incluye palabras, gestos y símbolos.

Según el marco teórico propuesto por Radford (2006), Zaldívar y Alonso (2017) analizan la interpretación y los medios semióticos que usan estudiantes de secundaria para referirse a aquello que está indeterminado. En su investigación, ellos proponen a 6 estudiantes responder preguntas sobre una situación que involucra una relación funcional entre dos variables (el estiramiento de un resorte al proporcionarle diferentes pesos). La recolección de datos se realiza mediante la grabación de audios y vídeos. El análisis consiste en la descripción del surgimiento de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico en los estudiantes al resolver tal situación, además, de los medios semióticos empleados en el proceso. En esta investigación se concluye que los estudiantes transitan por los estratos de pensamiento algebraico, a través de diferentes medios semióticos, al realizar actividades que involucran relaciones funcionales.

Rojas y Vergel (2013) reflexionan sobre propuestas didácticas para posibilitar el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. Ellos manifiestan el desafío que tienen los profesores de matemáticas de tomar conciencia sobre la posibilidad de implementar tales propuestas, tanto en educación primaria como secundaria. Para justificar su postura, los autores realizan un estudio comparativo entre los currículos de matemáticas de Estados Unidos y de Colombia. Los autores concluyen que, en ambos currículos, se propone el estudio de procesos de algebrización a partir de la educación primaria, y se priorizan actividades de secuencias de patrones para preparar a los estudiantes con álgebra en educación media. De manera adicional, en la investigación se aclara que, si bien en el currículo colombiano se habla de pensamiento variacional, es el pensamiento algebraico quien da sentido a este último pensamiento.

Vergel (2015) señala que la generalización de patrones es considerada como una forma de introducir el álgebra en la escuela. En consecuencia, el autor aborda la emergencia de formas de pensamiento algebraico temprano en estudiantes de 9 y 10 años al intentar generalizar una secuencia figural y una secuencia numérica. El marco teórico de esta investigación es la Teoría de la Objetivación. La recolección de datos está precedida por el diseño de tareas y su análisis consiste en la revisión de videos de clase y de las hojas de trabajo de los estudiantes. En esta investigación se concluye que el pensamiento algebraico factual y contextual emergen como posibilidades que los estudiantes especifican en las actividades propuestas y que recursos semióticos como los gestos, el movimiento, la ritmicidad y la actividad perceptual, son inherentes a la manifestación y constitución del pensamiento algebraico temprano.

Vergel et al. (2022) se interesan en analizar la actividad semiótica de una estudiante de 10 años y una profesora de primaria, cuando se les propone generalizar una secuencia de números y una secuencia de patrones, de manera respectiva. En esta investigación, la generalización es entendida como la identificación de una comunalidad local que sirve para construir expresiones de los elementos de una secuencia que están fuera del campo perceptivo (Radford, 2006). Al analizar las respuestas de la estudiante y profesora, los investigadores identifican que ambas expresan la comunalidad de sus secuencias a través de procedimientos aritméticos, pero ninguna logra construir una designación semiótica de las variables en juego. En ese sentido, la investigación plantea la existencia de una zona conceptual en la que las formas sofisticadas de generalización aritmética estarían cerca de proto-formas de pensamiento algebraico.

Molina (2009) problematiza la tradicional separación entre el estudio del pensamiento aritmético con el algebraico. En ese sentido, la autora examina el uso del pensamiento relacional por parte de un grupo de 26 estudiantes de tercer grado, al solucionar algunas sentencias numéricas sin hacer uso de operaciones aritméticas. En esta investigación, el pensamiento relacional representa un cambio de un foco aritmético (procedimental, centrado en el cálculo de respuestas) a un foco algebraico (estructural, centrado en examinar relaciones). Por otra parte, las sentencias numéricas son descritas como expresiones aritméticas que contienen el signo igual y constituyen un enunciado declarativo. Luego de discutir las respuestas de los alumnos, la autora concluye que algunos estudiantes manifiestan el pensamiento relacional. En la investigación se señala que conviene seguir profundizando en el uso de este tipo de pensamiento en contextos algebraicos, para mediar la integración entre la aritmética y el álgebra.

Töman y Gökburun (2022) reportan sobre niveles de comprensión de expresiones algebraicas. Tal estudio tiene como objetivo determinar los niveles de pensamiento algebraico, los conceptos erróneos y los niveles de comprensión de las expresiones algebraicas en estudiantes de sexto, séptimo y octavo grado. Esta investigación es de tipo descriptiva y se desarrolla en una escuela ubicada en Turquía. Como herramienta de recolección de datos se emplea un formulario de determinación de niveles de pensamiento algebraico y unas entrevistas semiestructuradas. En este estudio se concluye que el nivel de pensamiento algebraico de los estudiantes es bajo, en consecuencia, se sugiere que la conexión entre la aritmética y el álgebra se instaure durante la enseñanza de las matemáticas y que futuras investigaciones aborden esta dirección.

En aras de establecer un panorama general, Sibgatullin et al. (2022) desarrollan una revisión de literatura acerca del pensamiento algebraico. En su revisión, seleccionan 36 estudios publicados entre los años 2013 y 2021 e identifican algunos elementos: participantes, metodologías empleadas, objetivos de estudio, herramientas de recopilación de datos y enfoques analíticos. Algunos resultados a los que llegan los investigadores son: menos de la mitad de los estudios revisados se realizaron con estudiantes de secundaria, el instrumento de recopilación de datos usado frecuentemente fueron las pruebas de pensamiento algebraico y en los estudios prevalece el análisis cualitativo (asociado a las preguntas abiertas que se incluyen en las pruebas). En definitiva, los autores indican que es importante la formación docente para atender el pensamiento algebraico y la aplicación de actividades no rutinarias en el aula que promuevan en los estudiantes este pensamiento.

Hodgen et al. (2018) realizan una revisión documental sobre las investigaciones de pensamiento algebraico desarrolladas por el CERME (Congreso Europeo de Investigación en Matemática Educativa). Su estudio está orientado por la pregunta propuesta por Radford en el CERME 6: ¿Hay realmente algo nuevo que decir sobre el pensamiento algebraico? Luego de su revisión documental de 146 trabajos de autores de 29 países, los investigadores responden afirmativamente a la pregunta propuesta. Asimismo, proponen futuras vías de investigación: estudios longitudinales sobre pensamiento algebraico, revisiones de literatura que posibiliten consensos frente cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra, entre otras.

Se considera en efecto que aún queda algo que decir acerca del pensamiento algebraico, en el caso de la presente investigación, algo sobre su promoción a través de tareas mediadas por tecnología. A continuación, se comparten antecedentes que relacionan ambos temas, a saber, pensamiento algebraico y tecnología.

1.2.2 Pensamiento algebraico y tecnología

Mustaffa et al. (2017) determinan ventajas y desventajas del uso de tecnología en la escuela al tratar el pensamiento algebraico. Los autores revisan literatura al respecto publicada en las bases de datos: SpringerLink, Google Scholar, Taylor & Francis, SAGE Journals y JSTOR. Como resultado, encuentran que es común el uso de tecnología para la enseñanza del álgebra, así, prevalece el empleo de herramientas como: hojas de cálculo, GeoGebra, Group Explorer, Pearsons

MyMathLab, SimCarl y Digital Mathematics Environments. Los investigadores concluyen que, en ocasiones, el uso de estas herramientas genera dificultades en los estudiantes, entre ellas, la falta de sentido otorgada a los símbolos o la ausencia de significado para el uso de variables. Sin embargo, en términos generales, los autores indican que la tecnología tiene impactos positivos tanto en el rendimiento académico como en la actitud de los estudiantes, y sus usos deben seguir estudiándose para vincularse al pensamiento algebraico.

Ferrara et al. (2006) sugieren que la tecnología configura la forma en la que se percibe el álgebra. En este orden de ideas, los autores indagan cómo investigadores del Psychology of Mathematics Education (PME) han estudiado el uso de la tecnología para la enseñanza del álgebra. En su revisión, encuentran diferentes usos de tecnología para tal fin. Algunos de estos usos implican lenguajes de programación (Logos, Pascal, Basic, LSE), calculadoras simbólicas y gráficas, hojas de cálculo, micro mundos y programas especiales de computadora. En esta investigación se concluye que la forma en la que se usa tecnología depende inevitablemente de la tarea algebraica que se propone. El uso de tecnología en clases de matemáticas exige una transformación, a veces en las matemáticas, aunque, a menudo, en la postura del profesor, cuyo papel como mediador en este tipo de actividades es fundamental.

Mok et al. (2000) hacen una revisión de estudios de Hong Kong y proponen que las dificultades que enfrentan los estudiantes durante el aprendizaje del álgebra se deben al énfasis procedimental con el que se trata esta área. En ese sentido, los autores indagan estudios en Occidente relacionados con la problemática anterior y encuentran que la introducción de tecnología en las clases de matemáticas podría dar paso al desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes. En consecuencia, los investigadores realizan una intervención en una escuela de Hong Kong, en donde piden a 25 estudiantes de 15 años buscar patrones en gráficos a través de calculadoras gráficas. En esta investigación, se concluye que, si bien el uso de tecnología para la enseñanza del álgebra impone demandas a los profesores, en la tecnología existe un potencial para apoyar construcciones estudiantiles dinámicas.

Graham y Michael (2000) estudian un módulo de trabajo basado en el uso de calculadoras gráficas para comprender variables algebraicas. Emplean un diseño experimental para comparar la enseñanza de la variable en álgebra con y sin el uso de calculadora gráfica. En el estudio participan 147 estudiantes experimentales y 42 de control, con edades de 13 a 14 años. Para recolectar los datos aplican pruebas que constan de 68 preguntas y realizan entrevistas a los profesores y estudiantes participantes. En esta investigación se afirma que la calculadora gráfica demuestra ser un instrumento para lograr una mejora significativa en la comprensión de los estudiantes sobre la variable como incógnita específica o número generalizado, algo que a menudo suele ser complicado.

Neurath y Stephens (2006) reportan sobre el efecto de integrar Microsoft Excel en una clase de álgebra. La investigación es descriptiva y participan 27 estudiantes de primer año de escuela secundaria. El grupo experimental está conformado por 13 estudiantes, y el grupo de control por 14. El grupo experimental es llevado a un laboratorio de computación cada dos semanas durante un semestre (nueve veces en total). Durante cada día de laboratorio, se muestra a los estudiantes varios problemas y cómo resolverlos con Microsoft Excel. Para la recolección de los datos se aplican tres pruebas. Los resultados indican un ligero aumento en el rendimiento de los estudiantes cuando se utiliza Excel, aunque un aumento considerable del interés en el curso gracias al uso del software.

Goulding y Kyriacou (2008) hacen una revisión de literatura que se sitúa en el contexto de las Estrategias Nacionales para la Educación Primaria y Secundaria en Inglaterra y Gales. Esta revisión responde a la pregunta ¿Cómo han contribuido las diferentes tecnologías de la información y la comunicación al desarrollo de la comprensión del álgebra de estudiantes de hasta 16 años? Después de encontrar estudios y categorizarlos, la pregunta se reduce a la comprensión de las funciones en el contexto algebraico. Como resultado de la investigación, se señala que diferentes tecnologías (lenguajes de programación, hojas de cálculo, sistemas de aprendizaje independientes, pizarras interactivas, computadoras, calculadoras gráficas, etc.) desempeñan un papel importante para la comprensión de las funciones. De manera general, en cuanto al álgebra, se concluye que las tecnologías tienen un papel importante para su enseñanza, aunque se debe considerar el rol del profesor, pues, el simple uso de estas no garantiza que los estudiantes obtengan logros en su aprendizaje.

Zeller y Barzel (2010) afirman que varios estudios han investigado el papel de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, no se tienen claridades del papel específico que podrían jugar los sistemas de álgebra computacional y las calculadoras gráficas en el marco del álgebra temprana. En ese orden de ideas, los investigadores realizan intervenciones en clases de matemáticas de un curso de séptimo grado, donde se incorpora el uso de sistemas de álgebra computacional y las calculadoras gráficas, mientras se adquieren competencias algebraicas elementales. Los resultados evidencian que el pensamiento algebraico puede relacionarse con la adopción de sistemas de álgebra computacional en el proceso de su aprendizaje, así mismo, que las opiniones de los alumnos acerca del álgebra, así como sus concepciones de los objetos algebraicos, parecen verse afectados por la disponibilidad de sistemas de álgebra computacional en el aula.

Butto (2011) reporta los resultados de un proyecto de investigación sobre la introducción temprana al pensamiento algebraico en entornos tecnológicos de aprendizaje. El proyecto se desarrolla con estudiantes de grado quinto y sexto de una escuela mexicana. La investigación es de corte cualitativo y el marco teórico y metodológico empleado se fundamenta en el Modelo teórico local (Filloy y Rojano, 1999; Rojano y Puig, 2008, como se citó en Butto, 2011). En esta investigación se consideran dos rutas de acceso al estudio del álgebra: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización. Las actividades propuestas a los estudiantes para acceder a tales rutas involucran el uso de un micromundo Logo y el software eXpresser. Por último, se concluye que, en tales intervenciones, los alumnos logran comprender ideas básicas de variación proporcional, describir patrones y formular reglas en términos pre algebraicos.

Bokhove y Drijvers (2012) investigan el efecto de la retroalimentación en el diseño y resultados de una intervención digital para enseñar álgebra. Los autores proponen la siguiente pregunta de investigación: ¿de qué manera se puede utilizar la retroalimentación en el diseño de una intervención y cuáles son sus efectos? El estudio sigue un enfoque de investigación de diseño y tiene como objetivo mejorar la experiencia de los estudiantes con el álgebra. La investigación se implementa en 15 clases de matemáticas de grado doce en nueve escuelas secundarias. Los datos se recolectan por medio de pruebas previas y posteriores a la intervención. Los resultados muestran que la retroalimentación fomenta el aprendizaje de álgebra al disminuir la cantidad de intentos necesarios para desarrollar una tarea.

Drijvers y Barzel (2012) reportan sobre diferentes herramientas tecnológicas para resolver ecuaciones. Ellos buscan responder a las siguientes preguntas: ¿qué herramientas digitales están disponibles para enseñar la noción de ecuación en la educación matemática secundaria? y ¿cómo estas herramientas y las tareas correspondientes afectan las habilidades y la comprensión de los estudiantes? Se investigan cuatro herramientas tecnológicas: dos applets, una calculadora gráfica y sistemas de álgebra computacional. Los autores concluyen que cualquier tipo de herramienta digital, coordinada con el tipo de tareas, resalta aspectos conceptuales específicos de la resolución de ecuaciones, como una visión de equilibrio, de equivalencia, de sustitución global y funcional.

Por tal motivo, el reto del profesor es decidir si el uso de una herramienta, con sus tareas y técnicas específicas, invita al desarrollo conceptual dirigido.

Hewitt (2012) realiza un estudio con 21 estudiantes de quinto grado de primaria usando el software informático Grid Algebra. Los objetivos de esta investigación son: indagar si los estudiantes pueden participar de una actividad que incluye una notación algebraica formal sin haber tenido un contacto previo con estas expresiones y observar cómo la naturaleza dinámica del software ayuda o crea dificultades para aprender acerca de la resolución de ecuaciones lineales. El estudio consta de tres sesiones de clase, las cuales son videograbadas, además, se recolectan datos de las actividades realizadas por los estudiantes en hojas de trabajo. El autor concluye que los estudiantes demuestran una notable confianza trabajando con expresiones algebraicas lineales escritas en notación formal y que el software juega un papel clave al proporcionar una retroalimentación neutral que permite a los estudiantes fortalecer su interpretación de la notación.

Jupri et al. (2015) investigan la influencia de una intervención rica en tecnologías de la información y la comunicación en el rendimiento de algunos estudiantes al explorar ecuaciones de una variable. Los autores responden a la pregunta: ¿el rendimiento de los estudiantes en álgebra inicial mejora a través de una intervención con tecnología digital? El marco teórico refiere tanto a las dificultades en el álgebra inicial como al papel de las tecnologías de la información y la comunicación en la enseñanza del álgebra. La metodología empleada es mixta y participan 266 estudiantes de séptimo grado. El entorno de aprendizaje consiste en el uso de cuatro applets. Para recolectar los datos se graban las clases y se aplica una prueba previa y posterior a la intervención. Los investigadores concluyen que tanto el análisis cuantitativo, como cualitativo, confirman la eficacia de este tipo de intervención para mejorar el rendimiento de los estudiantes en el álgebra inicial.

Cortés et al. (2016) tratan el pensamiento algebraico, vinculado al pensamiento aritmético, en un ambiente de enseñanza que involucra el uso de papel, lápiz y tecnología. Su investigación se desarrolla bajo el marco teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) y el método de enseñanza seleccionado es el ACODESA (trabajo individual, trabajo en equipo, debate en el aula, autorreflexión e institucionalización de saberes). En su estudio, realizan dos experimentaciones, una en Canadá y otra en México, en el artículo seleccionado, se detallan los resultados de la intervención realizada en México. Se propone a un grupo de estudiantes de 14 a 15 años una actividad de generalización algebraica con números triangulares. La tecnología empleada refiere a una hoja de cálculo de Excel (para realizar cálculos) y el software POLY (que permite validar la generalización). Se concluye que la articulación de procesos de visualización, producción y validación mediados por el uso de tecnología, proporcionan un soporte para el desarrollo de un pensamiento aritmético-algebraico.

Hitt et al. (2016) estudian el desarrollo de pensamiento aritmético-algebraico por medio de actividades culturales y tecnológicas relacionadas con los números poligonales. Emplean como marco teórico la Teoría de objetivación y la Teoría sociocultural (Vygotsky). La investigación es cualitativa, utilizan el enfoque metodológico ACODESA y se hace uso de lápiz, papel y tecnología (Excel y POLY). Participan 13 estudiantes de primer año de secundaria. Para la recolección de datos se filman las secciones y se recogen los registros escritos. Al concluir, los autores destacan la importancia de crear un pensamiento aritmético-algebraico como antesala para el desarrollo del pensamiento algebraico.

Kieran (2018) realiza un estudio con estudiantes de 12 años que hacen uso de la calculadora para buscar estructuras dentro de una actividad que involucra factores, múltiplos y divisores. Tal trabajo tiene como propósito producir una mayor atención a la estructura y elaborar ampliamente su significado con respecto al número y las operaciones numéricas en el desarrollo del pensamiento algebraico temprano. La autora explora la noción de estructura y actividad estructural desde varias perspectivas, luego vincula tales aspectos teóricos con el estudio mencionado. Con esto concluye que el álgebra en secundaria requiere la capacidad de identificar las estructuras dentro de formas generalizadas, por esta razón, se debe propiciar un "ojo estructural" en los estudiantes que les permita establecer relaciones entre objetos matemáticos. En esta investigación, se menciona que las herramientas tecnológicas y el trabajo colaborativo contribuyen a construir actividades compartidas que permiten a los estudiantes dar forma a la concepción sobre estructuras.

De los antecedentes expuestos, se destaca que, existen investigaciones que apuntan hacia la génesis del Álgebra Temprana como propuesta curricular (Kaput 2000a, 2000b). Otros estudios proporcionan generalidades sobre la investigación del pensamiento algebraico (Sibgatullin et al., 2022; Hodgen et al., 2018). Algunos artículos consultados vinculan pensamiento algebraico con pensamiento aritmético (Molina, 2009; Töman y Gökburun, 2022). En las investigaciones referidas, dos autores proponen sus propios marcos teóricos sobre pensamiento algebraico: Kieran (2004) y Radford (2000, 2006, 2010a, 2014). En particular, varios estudios se desarrollan según el marco teórico propuesto por Radford (Zaldívar y Alonso, 2017; Vergel y Rojas, 2013; Vergel, 2015; Vergel et al., 2022).

En algunas investigaciones se realizan revisiones de literatura que relacionan pensamiento algebraico y tecnología (Ferrara et al., 2006, Mustaffa et al., 2017). Otras investigaciones indagan por el uso de una(s) tecnología(s) asociada(s) a un tópico en particular de pensamiento algebraico (Graham y Michael, 2000; Mok et al., 2000; Neurath y Stephens, 2006; Goulding y Kyriacou, 2008; Zeller y Barzel, 2010; Drijvers y Barzel, B, 2012; Hewitt, 2012; Jupri et al., 2015; Kieran, 2016). Por último, algunos autores se interesan en investigar el uso de alguna tecnología para promover pensamiento algebraico en general (Butto, 2011; Bokhove y Drijvers, 2012; Cortés et al., 2016; Hitt et al., 2016).

Los antecedentes revisados contribuyen a la presente investigación por varias razones. En primer lugar, respaldan la viabilidad de enseñar álgebra en todos los niveles escolares y a través de tareas mediadas por tecnología. En segundo lugar, destacan la importancia de considerar el diseño adecuado de tareas para garantizar que la tecnología constituya un andamiaje para los estudiantes durante el aprendizaje del álgebra. Por último, proporcionan un panorama de las investigaciones previas sobre pensamiento algebraico y tecnología, señalando, por ejemplo, la pertinencia de implementar tareas no convencionales en las aulas para promover tal pensamiento. Las razones mencionadas de manera previa se articulan con la necesidad de tratar la enseñanza del álgebra escolar desde un enfoque diferente, en este caso, a través de tareas mediadas por tecnología. En este sentido, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas?

1.3 Pregunta investigativa

¿Cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas?

1.4 Objetivos

Según el planteamiento hasta ahora expuesto y la pregunta de investigación, se comparten los objetivos que dirigen el presente estudio.

1.4.1 Objetivo general

Analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas.

1.4.2 Objetivos específicos

- Identificar aspectos del pensamiento algebraico con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas al realizar tareas mediadas por tecnología.
- Describir formas del pensamiento algebraico con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas al realizar tareas mediadas por tecnología.

2 Marco teórico

En este apartado se presenta la propuesta curricular de Álgebra Temprana, desde la cual se busca desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de los niveles escolares. Se enfatiza en la caracterización y estratificación del pensamiento algebraico propuesto por Radford (2000, 2006, 2010a, 2014). En adición, se describen los medios semióticos de objetivación como elementos que se vinculan al pensamiento algebraico. Luego, se presenta el marco teórico humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005; Villarreal, 2013) que permite entender la tecnología como medio semiótico de objetivación para promover pensamiento algebraico. Por último, se distingue la noción de promoción de pensamiento algebraico sugerida por Agudelo-Valderrama (2000) y se expone la noción de tarea propuesta por Vergel y Rojas (2018).

2.1 Álgebra temprana

Early Algebra o Álgebra Temprana corresponde a una propuesta de cambio curricular que busca la integración del álgebra en el currículo de los grados escolares. Dentro de esta propuesta se sugiere cultivar, en las aulas de clase, hábitos de pensamiento que fomenten un aprendizaje con comprensión de las matemáticas y, en especial, faciliten el aprendizaje del álgebra (Molina, 2009). El Álgebra Temprana considera el estudio de esta área desde una concepción amplia, al respecto, Vergel y Rojas (2018) plantean que tal concepción abarca: "el estudio y generalización de patrones, la identificación de relaciones numéricas, la caracterización de relaciones funcionales, el desarrollo y la manipulación, con sentido, del simbolismo, el estudio y comprensión de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y la modelización" (p. 42).

En términos de Kaput (2000b), tal propuesta de cambio curricular se traduce en la posibilidad de "algebrizar el currículo", esto es, integrar el estudio del álgebra en los grados y temas de las matemáticas escolares. Esta integración resuelve tres problemas, a saber: abre un espacio curricular para las matemáticas del siglo XXI que se necesitan en el nivel secundario; agrega coherencia y profundidad a las matemáticas escolares (como currículo y como hábito mental); y elimina características tradicionales de las matemáticas escolares: cursos de álgebra de secundaria tardíos, aislados y superficiales. De ahí que esta reforma del álgebra tenga que ver, también, con el desafío de hacer del estudio del álgebra un espacio accesible, que no actúe como motor de inequidad, sino, como motor de democratización matemática.

Vergel y Rojas (2018) señalan que el aprendizaje temprano del álgebra desarrolla nuevas formas de pensar matemáticamente. En particular, la propuesta Álgebra Temprana plantea la introducción del pensamiento algebraico en la matemática escolar. Algunos autores caracterizan tal pensamiento, entre ellos, Kieran (2004) y Radford (2000, 2006, 2010a, 2014). Kieran (2004) plantea que el pensamiento algebraico implica el desarrollo de formas de pensar dentro de actividades como: analizar relaciones entre cantidades, notar estructuras, estudiar cambios, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar y predecir. Por su parte, Radford (2000, 2006, 2010a, 2014) caracteriza el pensamiento algebraico a la luz de tres elementos interrelacionados: sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica; y señala tres estratos de pensamiento que se transitan durante su desarrollo: factual, contextual y simbólico. Ahora bien, el objetivo general de esta investigación se relaciona con el análisis de pensamiento algebraico, mientras Kieran (2004) propone actividades para desarrollar tal pensamiento, Radford (2000, 2006, 2010a, 2014) propone una caracterización y estratificación de este pensamiento, en ese sentido, las ideas expuestas por tal autor brindan elementos para configurar el análisis propuesto. Así pues, a continuación, se profundiza en el marco presentado por el autor.

2.1.1 Pensamiento algebraico: caracterización

Proponer una caracterización de pensamiento algebraico implica definir qué es pensamiento, pues el pensamiento algebraico es una forma particular de este. Radford (2000) relaciona el pensamiento con las prácticas sociales en las que surge, concibiéndolo como una praxis cognitiva mediada por signos sociales. En esta caracterización, los signos abarcan términos lingüísticos, escritos, orales, símbolos matemáticos, entre otros (Radford, 2010a). De manera adicional, Radford (2010a, 2014) señala que pensar constituye una actividad reflexiva y sensorial mediada por acciones, gestos y artefactos culturales. En este sentido, el pensamiento está formado por componentes cognitivos y materiales.

El pensamiento obtiene su carácter algebraico por la práctica matemática de la que emerge. Al respecto, Radford (2006, 2014) propone que el pensamiento algebraico es una forma particular de reflexionar matemáticamente, la cual se distingue por tres elementos interrelacionados: sentido de la indeterminancia o indeterminación, analiticidad y designación simbólica. El primer elemento refiere a la característica propia de los objetos algebraicos e implica el uso de números desconocidos (incógnitas, variables y parámetros). El segundo elemento requiere que el tratamiento de las cantidades indeterminadas se efectúe como si estos fueran números conocidos. El último elemento señala la necesidad de que los números desconocidos sean nombrados o simbolizados, el autor destaca que se puede hacer tanto con símbolos alfanuméricos o a través del lenguaje natural, los gestos, los signos no convencionales o, incluso, una mezcla de estos.

2.1.2 Pensamiento algebraico: estratificación

Radford (2010a) sugiere una tipología de tres estratos de pensamiento algebraico: factual, contextual y simbólico. A continuación, se explica cada estrato a partir de los planteamientos del autor.

Pensamiento algebraico factual: refiere a una forma situada y concreta del pensamiento algebraico. En este estrato, se opera a nivel de números o hechos particulares. Cabe resaltar que, a pesar de su naturaleza aparentemente concreta, el pensamiento algebraico factual se relaciona con mecanismos de percepción evolucionados y con la coordinación de gestos, palabras y símbolos que permiten al individuo significar aquello que percibe.

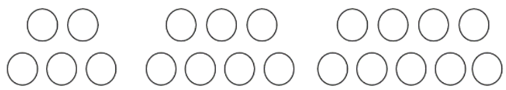
Pensamiento algebraico contextual: estrato de pensamiento que va de hechos particulares a hechos generales. Dentro de este estrato, la indeterminancia, propia de las actividades algebraicas, debe expresarse a través del discurso y así trascender la mera acción y percepción. El pensamiento algebraico contextual se caracteriza por expresar relaciones y generalidades algebraicas a partir de términos descriptivos clave.

Pensamiento algebraico simbólico: este estrato de pensamiento se vincula con la expresión de fórmulas a través de símbolos alfanuméricos. Transita de una distinción mediante gestos y palabras clave, a una distinción mediada por símbolos alfanuméricos, y configura el desprendimiento de un contexto para significar indeterminancias de forma abstracta.

El autor precisa que la tipología anterior puede identificarse en los estudiantes durante la realización de actividades en contextos algebraicos, sin embargo, los estratos del pensamiento algebraico no deben ser entendidos de una forma jerárquica. Es decir, según el contexto y la actividad en cuestión, los estudiantes transitarán por estas formas de pensamiento. En la **Tabla *1*** se ejemplifica la estratificación del pensamiento algebraico propuesta por Radford. Ahora bien, Radford (2006) observa la emergencia del acto perceptivo de *notar* en actividades con estudiantes que transitan por tales estratos de pensamiento. Este acto se encuentra mediado por palabras, gestos, dibujos, fórmulas, etc. y es denominado por el autor como proceso de objetivación. En el próximo apartado se describe tal proceso y se enfatiza en la existencia de medios semióticos de objetivación, entendidos estos como aquellos medios que permiten objetivar conocimiento.

Tabla 1

Ejemplo de manifestación de estratos de pensamiento algebraico propuestos por Radford

Tarea de generalización de patrones	 Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 a. Dibujar la figura 4 y 5 de la secuencia. b. Determinar el número de círculos de la figura 10 y 100. c. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase indicando cómo determinar el número de círculos de cualquier figura. d. Escribir una fórmula algebraica para calcular el número de círculos de la figura n.
¿Cómo se pueden manifestar los estratos de pensamiento algebraico en los estudiantes al realizar tal tarea?	
Estrato de pensamiento algebraico factual	Los estudiantes comienzan a contar el número de círculos en las figuras 1, 2 y 3. Ellos conciben las figuras divididas en dos filas y se dan cuenta de una regularidad: relación entre el número de las figuras y el número de círculos en sus filas. La percepción de tal regularidad permite a los estudiantes responder al inciso ***a*** de la tarea, sin embargo, no resulta práctica para indagar por el número de círculos de figuras como la 100.
Estrato de pensamiento algebraico contextual	Los incisos ***b*** y ***c*** favorecen la aparición de este estrato de pensamiento algebraico. Los estudiantes van más allá de las figuras particulares y analizan una figura general. La indeterminancia se convierte ahora en parte del discurso explícito. Por ejemplo, los estudiantes pueden decir: “en la fila superior, hay que sumar un círculo más que el número de la figura y en la fila inferior, hay que sumar un círculo más que en la fila superior”.
Estrato de pensamiento algebraico simbólico	El inciso ***d*** favorece la aparición de este estrato de pensamiento algebraico. Los estudiantes designan indeterminancias a través de símbolos alfanuméricos. La indeterminancia que antes se distinguía mediante gestos y términos descriptivos clave, ahora se distingue mediante el efecto de símbolos y paréntesis. Por ejemplo, los estudiantes pueden proponer la siguiente regla de formación en donde se utilizan paréntesis para distinguir las filas de la figura n: $(n+1)+(n+2)$

Nota. Ejemplo realizado a partir de las ideas expuestas en Radford (2010a).

2.1.3 Medios semióticos de objetivación

El término objetivación es entendido por Radford (2006) como aquellas acciones orientadas a hacer aparente algo, por ejemplo, un aspecto de un objeto concreto, como su color, tamaño o una propiedad matemática. Radford (2010a) teoriza los procesos de objetivación como aquellos procesos sociales por medio de los cuales los estudiantes hacen evidente la lógica cultural con la que se ha dotado los objetos de conocimiento y, además, se relacionan con las formas constituidas históricamente de acción y pensamiento.

Radford (2006) señala que para hacer evidente algo, estudiantes y profesores acuden a signos y artefactos (símbolos matemáticos, gráficos, palabras, gestos, calculadoras, etc.). Estos recursos utilizados para objetivar conocimiento son llamados por el autor como medios semióticos de objetivación. Así pues, el proceso dinámico de adquisición del conocimiento está mediado por la tensión entre el individuo y la gama de medios semióticos de objetivación que le brinda el dominio constituido históricamente por su cultura (Radford, 2000).

Con base a la conceptualización de medios semióticos de objetivación propuesta por Radford (2000, 2006, 2010a) se evidencia que, en las investigaciones consultadas en los antecedentes (*1.2.2 Pensamiento Algebraico y Tecnología*), los autores aluden a un entramado de artefactos (calculadoras gráficas, applets, software, etc.) que pueden entenderse como medios semióticos que permiten objetivar conocimientos referentes al álgebra. Sin embargo, en aquellas investigaciones no aparece explícito un marco teórico que conceptualice el uso de tecnología en educación matemática. Así, se presenta a continuación un referente teórico que enfatiza en el papel de la tecnología en la producción de conocimiento matemático.

2.2 Tecnología en educación matemática: humanos-con-medios

La tecnología en educación matemática ha sido tratada por diversos autores, entre ellos, Borba y Villarreal (2005), quienes proponen un marco teórico denominado humanos-con-medios. Este marco enfatiza en el papel de los medios en la producción del conocimiento. Cabe resaltar que, al referirse a medios, los autores aluden a cualquier tipo de tecnología. Desde esta perspectiva, la tecnología no solo se vincula a desarrollos de equipos sofisticados, va más allá y engloba la totalidad de construcciones que el ingenio humano ha creado en todas las épocas, sus formas de uso y sus aplicaciones (Villarreal, 2013). La perspectiva expuesta sugiere que los humanos están constituidos por tecnologías que transforman sus formas de pensar y, al mismo tiempo, estos humanos transforman constantemente estas tecnologías.

Desde el punto de vista expuesto anteriormente, el conocimiento es producido por un colectivo compuesto por humanos-con-medios o humanos-con-tecnologías. Borba y Villarreal (2005) consideran que humanos-con-medios es una metáfora que sintetiza una visión de la cognición y de la historia de la tecnología, que analiza la participación de la tecnología en la construcción de colectivos de pensamiento. Borba y Villarreal (2005) señalan que los procesos cognitivos de los individuos están sujetos a la interacción con las tecnologías, por ello, afirman que la noción humanos-con-medios debe ser la unidad básica del pensamiento. En ese sentido, la atención se debe centrar en cómo las personas conocen las cosas de diferentes maneras con la introducción de diferentes tecnologías. Por último, los autores añaden que si se asume que el sujeto epistémico es un colectivo de humanos-con-medios y si se afirma que el conocimiento que se produce es diferente, entonces es necesario repensar las prácticas educativas.

Sobre las prácticas en educación matemática, Villarreal (2013) sugiere que la tecnología impregna el pensamiento de quien hace y aprende matemáticas. No obstante, en entornos educativos, tal impregnación solo logra trascender cuando la tecnología no es usada de forma *domesticada*, esto es, sin que esta altere el statu quo, ni transforme la forma en la que se enseña y aprende matemáticas (Borba y Villarreal, 2005). Al trascender el uso de la tecnología en el aula de clases de matemáticas, estos medios pueden influir en: (1) la resolución de problemas basados en la posibilidad de representaciones múltiples y la generación de conjeturas, (2) la visualización y la experimentación, y (3) el cuestionamiento por la hegemonía de aspectos algorítmicos y el mero simbolismo algebraico que caracteriza la enseñanza tradicional de las matemáticas (Villarreal, 2013).

Sobre el marco expuesto por Borba y Villarreal (2005), resulta pertinente precisar algunos aspectos. Primero, los autores consideran que, en los últimos años, las tecnologías de la información y la comunicación, como medio empleado en las clases de matemáticas, han producido posiciones dicotómicas. Al respecto, ellos señalan que el acceso a estas tecnologías debe ser entendido como un derecho, es necesario entonces, que los estudiantes se alfabeticen en su uso y las integren en sus actividades escolares. Segundo, la visión de la tecnología como medio para construir conocimiento propuesta por los autores, no se relaciona directamente con oportunidades de “mejora”, por su parte, se entiende como clave de transformación de las prácticas educativas.

En conclusión, la noción de humanos-con-medios que presentan Borba y Villarreal (2005) señala que el conocimiento se construye en conjunto (lo que los autores llaman empresa social) y la cognición incluye medios para construir tal conocimiento. En este orden de ideas, los medios son un componente del sujeto epistémico que no deben ser entendidos como auxiliares, sino esenciales, pues son constitutivos del conocimiento, así que, si estuvieran ausentes, el conocimiento construido sería otro.

2.3 Medios semióticos de objetivación y humanos-con-medios: posibilidades de articulación

Borba y Villarreal (2005) señalan la necesidad de superar la idea de que la cognición es únicamente interna en los seres humanos, pues los medios son constitutivos del conocimiento. Tal visión se relaciona con los planteamientos de Radford (2010a; 2014) quien señala que, pensar constituye una actividad reflexiva y sensorial mediada por acciones, gestos y artefactos culturales; en ese sentido, el pensamiento está formado por componentes tanto cognitivos como materiales. Por otra parte, desde la perspectiva teórica de Borba y Villarreal (2005), la producción de conocimiento se ve condicionada por los medios utilizados para ello. Tales medios o tecnología definen las prácticas, los contenidos y las formas de conocer. Esta postura se relaciona con el proceso dinámico de adquisición de conocimiento expuesto por Radford (2000), en el cual prevalece la relación entre el individuo y el conjunto de medios semióticos de objetivación históricos y culturalmente construidos que permiten que ocurra esta experiencia. Los autores (Borba y Villarreal, 2005; Radford, 2000; Radford, 2006; Radford, 2010a) comparten la idea de que el pensamiento del sujeto está constituido por unos medios que brinda la cultura y condicionan la experiencia que se tiene con el acceso al conocimiento. En cuanto al pensamiento algebraico, Radford (2000, 2006, 2010a) señala una multiplicidad de medios semióticos de objetivación que pueden aparecer durante el desarrollo de este pensamiento.

Si bien Borba y Villarreal (2005) no refieren al pensamiento algebraico, en el campo de la educación matemática, los autores reconocen que la forma en la que los estudiantes construyen y expresan sus conocimientos se vincula con la introducción de medios o tecnología en las prácticas educativas. Es oportuno indicar que, tanto Borba y Villarreal (2005) como Radford (2000, 2006, 2010a), aluden a la coordinación que se da entre diferentes representaciones del conocimiento al utilizar diversos medios para su producción. Mientras que, de una manera global, Borba y Villarreal (2005) señalan la posibilidad de coordinar representaciones producidas por diferentes medios (como las tecnologías de la información y la comunicación y la conciencia corporal del movimiento); Radford (2000, 2006, 2010a) particulariza en la coordinación que surge entre gestos, palabras clave y símbolos alfanuméricos mientras se transita por los estratos del pensamiento algebraico.

La presente investigación atiende la conversación establecida entre ambos marcos teóricos: el de pensamiento algebraico (Radford, 2000; 2006; 2010a) y el de humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005); e indaga la posibilidad de analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas que adoptan las ideas de ambas teorías. A saber, tareas que: (1) incluyen las condiciones para que se promueva pensamiento algebraico (sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica), (2) evocan los estratos bajo los cuales se puede analizar tal pensamiento (factual, contextual y simbólico), y (3) están mediadas por tecnología, entendida esta como medio semiótico de objetivación de pensamiento algebraico. A continuación, se brindan claridades acerca de la forma en las que son entendidas las nociones de promoción y tarea dentro de esta investigación.

2.4 Promoción de pensamiento algebraico

Agudelo-Valderrama (2000) sugiere que el álgebra es una dimensión clave de toda actividad matemática y que se encuentra asociada a la resolución de problemas. En ese sentido, la autora sostiene que la promoción de pensamiento algebraico puede tener lugar de dos maneras. Primero, al ayudar a los estudiantes a tomar consciencia del método que usan cuando solucionan problemas en las clases de matemáticas. La consideración del método empleado para solucionar un problema puede favorecer la comprensión del tipo de solución que requiere cierta clase de problemas. Segundo, al desarrollar actividades en el aula de clase que ayuden a los estudiantes a reconocer y expresar, en diferentes formas, relaciones entre objetos o entre cantidades. Acerca de la segunda forma de promover pensamiento algebraico, que implica actividades de reconocimiento y expresión de relaciones entre objetos, Agudelo-Valderrama (2000) indica que esta se da a partir de la generalización algebraica, la cual surge de la identificación de regularidades en patrones que bien pueden ser numéricos o geométricos. En esta línea, Vergel y Rojas (2018) exponen la noción de tarea como un escenario para la generalización algebraica.

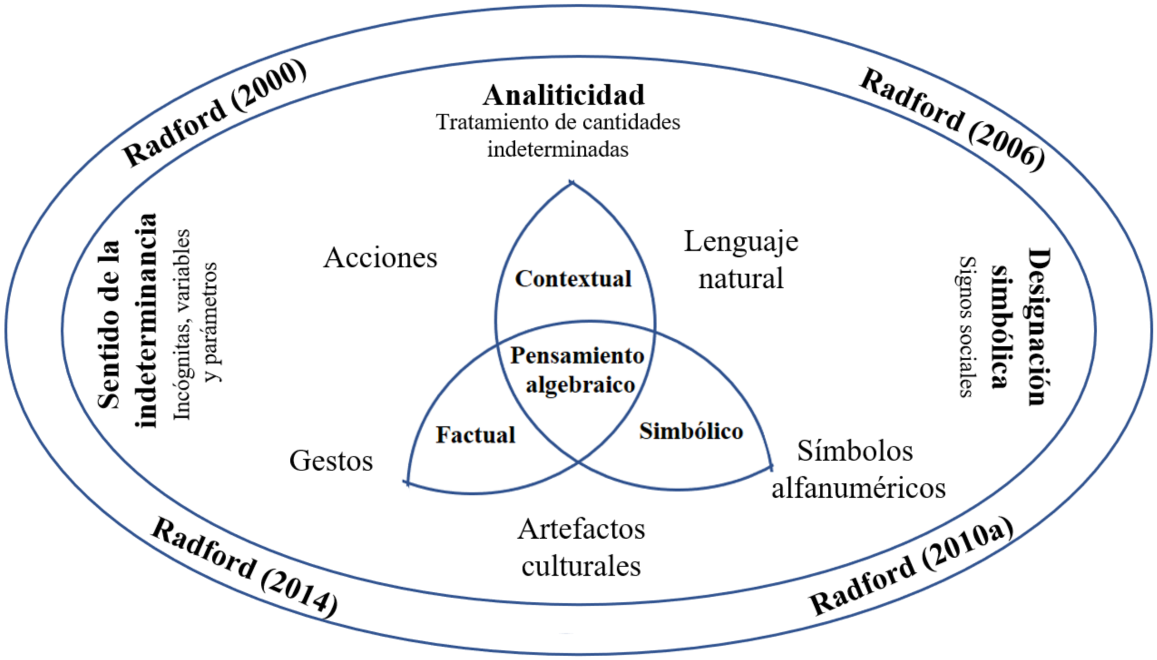
2.4.1 Tareas

Vergel y Rojas (2018) señalan que las actividades en el aula de clase de matemáticas son suscitadas por tareas, indican que una tarea puede ser entendida como "una categoría didáctica, y parte integral del proceso de instrucción, en tanto situación enmarcada en un contexto -intramatemático o extramatemático- que, a partir de su abordaje por parte de un sujeto, pretende desarrollar en él pensamiento matemático" (p. 75). Dentro de esta propuesta conceptual, la idea de instrucción refiere a toda actividad de interacción en la cual se hallan implicadas enseñanza y aprendizaje. En consecuencia, la actividad puede entenderse como labor conjunta en la que los estudiantes encuentran formas culturales de ser y se expresan a través de ellas, por medio de formas de interacción humana, suscitadas en el aula de clase. Vergel y Rojas (2018) añaden que las tareas imponen retos, entre ellos, crear condiciones para que ocurra un cierto fenómeno (por ejemplo, crear condiciones para promover pensamiento algebraico) y así, constituirse en unidades de análisis para interpretar la actividad matemática de los estudiantes. En el próximo apartado (*3 Marco metodológico*) se detalla cómo se asume este reto en la investigación.

Para finalizar, se comparten dos figuras que ilustran información sobre el marco teórico de la investigación (**Figura 5** y **Figura 6**). La **Figura 5** presenta ideas referentes a la teoría de pensamiento algebraico propuesta por Radford (2000, 2006, 2010a, 2014), la forma de la figura sugiere que la teoría del autor no es jerárquica y las ideas que la constituyen se relacionan entre sí. Alrededor del óvalo, en negrita, se ubican los elementos que caracterizan el pensamiento algebraico. En el centro de la figura se ubica la noción "pensamiento algebraico" como intersección entre los estratos de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico. Luego, en torno a tal intersección, se mencionan medios semióticos que suelen ser utilizados durante la transición por estos estratos de pensamiento. Por otra parte, en la **Figura 6**, se sintetiza la conversación propuesta entre los marcos de pensamiento algebraico (Radford, 2000; 2006; 2010a) y de humanos-con-medios (Borba y Villarreal, 2005); así como los intereses investigativos que orientan el presente trabajo.

Figura 5

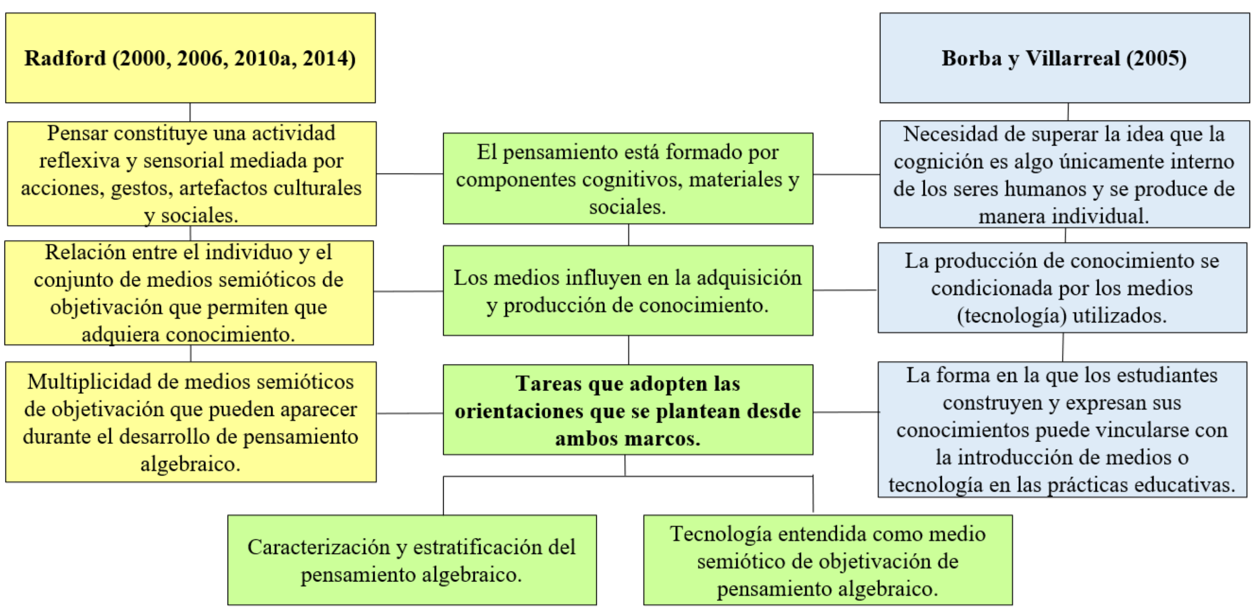
Interpretación de la noción de pensamiento algebraico propuesta por Radford



Nota. Elaboración propia.

Figura 6

Diálogo entre Pensamiento algebraico y Humanos-con-medios



Nota. Se presentan de color amarillo elementos del marco teórico de pensamiento algebraico (Radford, 2000; 2006; 2010a), de color azul, elementos del marco teórico de humanos-con-medios (Borba y Villareal, 2005) y de color verde, las ideas que orientan la presente investigación y que resultan de la conversación establecida entre los dos marcos teóricos mencionados. Elaboración propia.

3 Marco metodológico

En este apartado se presenta el marco metodológico de la investigación. En primer lugar, se clasifica esta investigación como un estudio de enfoque cualitativo, se detalla este enfoque y se justifica su elección. Después, se describe el diseño de investigación seleccionado, el cual consiste en una adaptación a la metodología propuesta por Radford (2010b). Luego, se caracterizan los participantes del estudio, se explica el trabajo estipulado para ingresar al campo, se especifica el rol atribuido a las investigadoras y se informan los métodos utilizados para la recolección de información. Por último, se comparte la manera en la que se trianguló la información, y se presentan los criterios de rigor y ética bajo los cuales se realizó la investigación.

3.1 Enfoque investigativo

La presente investigación se enmarca en un enfoque metodológico cualitativo, el cual fue seleccionado en consonancia con la pregunta y el objetivo general del estudio. Acerca de tal enfoque, Hernández et al. (2014) plantean:

> El enfoque cualitativo puede concebirse como un conjunto de prácticas interpretativas que hacen al mundo "visible", lo transforman y convierten en una serie de representaciones en forma de observaciones, anotaciones, grabaciones y documentos. Es *naturalista* (porque estudia los fenómenos y seres vivos en su contexto o ambientes naturales y en su cotidianidad) e *interpretativo* (pues intenta encontrar sentido a los fenómenos en función de los significados que las personas les otorguen). (p. 9)

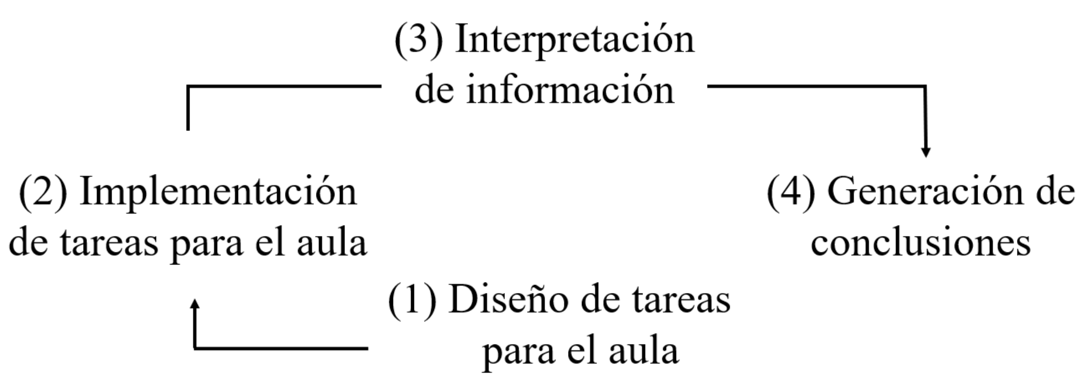
En esta investigación, el enfoque cualitativo favorece la interpretación de representaciones de estudiantes de grado séptimo al realizar tareas mediadas por tecnología. Siguiendo los planteamientos de Hernández et al. (2014) se asume que cada sujeto, en este caso, estudiante, posee una forma única de ver el mundo y durante la investigación esta se debe comprender en su contexto. Cabe destacar que el enfoque cualitativo brinda a los estudios una lógica inductiva que implica explorar y describir antes de generar perspectivas teóricas. Esta flexibilidad permite que las investigaciones se desplacen entre las respuestas encontradas y el desarrollo de la teoría (Hernández et al., 2014). De esta manera, el enfoque elegido se vincula con la naturaleza exploratoria y descriptiva de esta investigación, y ofrece posibilidades de generar perspectivas teóricas sobre las formas que asume el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo.

3.2 Diseño metodológico

El objeto de estudio de esta investigación cualitativa es el pensamiento algebraico, aspecto que se justificó en el apartado *1.2 Antecedentes* y que se caracterizó en el apartado *2 Marco teórico*. Para estudiar tal objeto, se propuso el diseño, implementación y análisis de tareas mediadas por tecnología. Las tareas que se proponen en esta investigación se enmarcan en la caracterización y estratificación de pensamiento algebraico (Radford, 2006; 2010a; 2014) y en la concepción de tecnología propuesta por Borba y Villarreal (2005).

En el diseño de la investigación se adapta la metodología propuesta por Radford (2010b). Esta consiste en un ciclo iterativo de cuatro etapas: diseño de actividades para el aula, implementación de actividades para el aula, interpretación de datos y generación de teoría. Es preciso afirmar que la metodología mencionada alude al diseño e implementación de *actividades* y se orienta a investigaciones longitudinales de las que emergen nuevas teorías. Así pues, en la presente investigación se realizan las siguientes adaptaciones: (1) se diseñan e implementan *tareas* para el aula, (2) las etapas son tratadas en un solo ciclo y, debido al carácter de la investigación, (3) no se genera teoría, sino que se generan conclusiones a la luz del marco teórico propuesto para el estudio. En la **Figura *7***, se ilustra el diseño de la investigación.

Figura 7
Diseño de la investigación



Nota. Adaptación de Radford (2010b).

3.3 Participantes

La presente investigación se llevó a cabo en la Institución Educativa Diego Echavarría Misas, ubicada en el barrio Florencia, Medellín, Antioquia. De manera inicial, bajo las directrices del establecimiento educativo, se acompañaron clases de matemáticas de grado séptimo, las cuales involucraban a un total de 98 estudiantes. Ahora bien, conforme avanzaba la investigación, el número de estudiantes a los que se les brindaba acompañamiento se fue reduciendo, tal decisión se justifica a continuación.

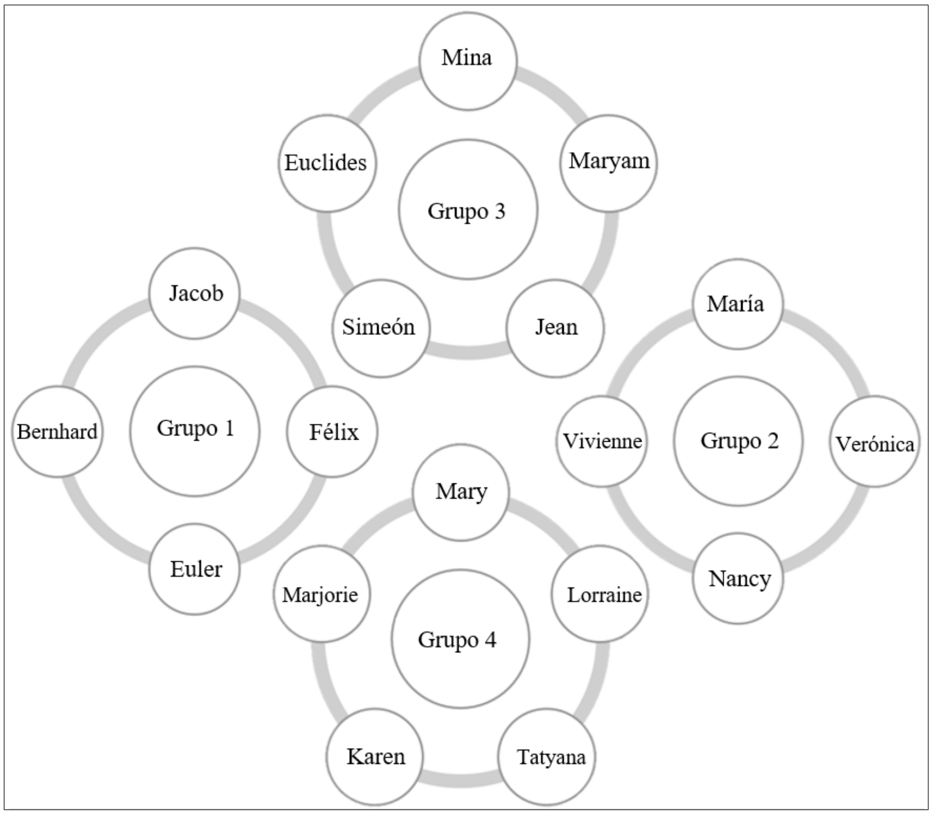
En una investigación cualitativa se busca profundidad, así, conciernen unidades que ayudan a entender el objeto de estudio y a responder las preguntas de investigación (Hernández et al., 2014). En consonancia con este principio, se optó por realizar el trabajo de campo con un grupo de grado séptimo, conformado por 38 estudiantes. Se seleccionó a los estudiantes mediante una muestra por conveniencia, la cual, en la investigación cualitativa, se define como un conjunto de casos disponibles a los que se tiene acceso (Hernández et al., 2014). Así, la elección de los 38 estudiantes obedeció a las condiciones de tiempo que tenían las investigadoras para asistir a la institución y al grupo que se encontraba disponible para ese momento. Acerca de la información demográfica de los estudiantes, 27 eran mujeres y 11 hombres, todos ellos entre los 12 y 15 años. Teniendo en cuenta que la investigación contemplaba el uso de tecnología, después de un sondeo, se confirmó que los participantes disponían de al menos un computador o celular con acceso a internet. Los estudiantes se distribuyeron en grupos de trabajo. Cabe resaltar que, en el capítulo *4 Análisis y resultados*, se consideran las producciones de cuatro de estos grupos, es decir, las respuestas de cada grupo a las tareas propuestas (ver **Figura *8***).

La decisión de limitar el número de grupos cuyas producciones se analizan se tomó con el propósito de ampliar el entendimiento del objeto de estudio y llevar a cabalidad el objetivo de la investigación, es decir, analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología. En cuanto a la decisión de propiciar el trabajo grupal, se destaca que este tipo de trabajo posibilita que los estudiantes interactúen y comuniquen sus alternativas de solución a una tarea. Al respecto, Vergel y Rojas (2018) afirman que el trabajo grupal:

> Pretende promover formas de reflexión y de posicionamiento crítico en el aula a través de debates y discusiones que posibiliten valorizar la contribución de los estudiantes a la vez

que se comparten y discuten los límites y posibilidades de las formas de pensar un problema y sus posibles soluciones. (p. 98)

Figura 8
Participantes de la investigación



Nota. Los participantes se presentan con pseudónimos establecidos por las autoras del estudio. Elaboración propia.

3.4 Trabajo de campo

El trabajo de campo se realizó a partir del diseño y de la implementación de tareas de generalización de patrones mediadas por el uso de tecnología. La generalización de patrones ha sido señalada por Agudelo-Valderrama (2000), Radford (2010b) y, Vergel y Rojas (2018) como un medio para promover pensamiento algebraico en los estudiantes. En particular, Radford (2010b) considera la generalización de patrones como una de las rutas para introducir a los estudiantes en el álgebra escolar y sugiere que generalizar un patrón algebraicamente se basa en la capacidad de captar un punto en común en algunos elementos de una secuencia, siendo consciente de que este punto en común se aplica a todos los términos de la secuencia y siendo capaz de usarlo para proporcionar una expresión directa de cualquier término de tal secuencia. Es decir, la generalización algebraica de un patrón consiste en la observación de una comunalidad local que luego se generaliza a todos los términos de una secuencia y que sirve como garantía para construir expresiones de elementos de la secuencia que permanecen más allá del campo perceptivo[1].

Para tratar con los estudiantes de grado séptimo tales tareas, se consideraron cuatro fases: secuencias con videojuegos, secuencias con calculadora, secuencias con Scratch y carrusel algebraico. Estas fases contemplaron el uso de tres tecnologías: videojuegos, calculadora clásica y Scratch, las cuales fueron seleccionadas por ser de fácil acceso para los estudiantes de grado séptimo y ofrecer oportunidades para que los estudiantes identifiquen y generalicen patrones algebraicos. Para cada sesión se configuró una guía para investigadoras y otra para estudiantes. La guía para investigadoras orientaba el trabajo en el aula y la guía para estudiantes, presentaba las tareas como tal. En la **Tabla *2*** se sistematiza la propuesta de trabajo de campo y en los **Anexos** (seguir vínculos) se presentan las guías que fueron creadas para cada sesión.

Tabla 2
Trabajo de campo

Sesión	Fase	Acción	Guías
1	Secuencias con videojuegos	Proponer una serie de tareas derivadas de un recorrido histórico, por décadas, de videojuegos populares entre los años 1980 y 2010.	**Anexo 1 y Anexo 2**
2			
3			**Anexo 3** y **Anexo 4.**
4			**Anexo 5** y **Anexo 6.**
5	Secuencias con calculadora	Proponer una serie de tareas vinculadas al efecto del signo igual en la calculadora "clásica".	**Anexo 7** y **Anexo 8**
6			
7	Secuencias con Scratch	Proponer una serie de tareas relacionadas con la ejecución de códigos para la creación de un mandala geométrico en Scratch.	**Anexo 9** y **Anexo 10**
8			
9			
10			
11	Carrusel algebraico	Proponer a los estudiantes la tarea de reconocer patrones en videojuegos o crearlos usando Scratch y la calculadora "clásica", para luego presentar sus hallazgos mediante un carrusel algebraico.	**Anexo 11** y **Anexo 12**
12			
13			**Anexo 13**
14			

[1] En Radford (2010b) se amplía información sobre la generalización algebraica. Es importante aclarar que, en la presente investigación se retoman solo algunas de estas ideas, ya que las tecnologías seleccionadas para mediar las tareas transformaron la manera en la que las secuencias de patrones suelen presentarse a los estudiantes para su posterior generalización.

3.5 Métodos de recolección de información

En el ámbito de las investigaciones cualitativas, los propios investigadores desempeñan el rol de instrumentos de recolección de información. Son los investigadores quienes, a través de diversos métodos, recogen la información; no solo la analizan, sino que son el medio de su obtención (Hernández et al., 2014). En este estudio, las investigadoras asumieron el rol de recolectar información mediante los siguientes métodos de recolección: observación participante, documentos y anotaciones.

La observación participante, se entiende como un método de recogida de información que requiere de la implicación del observador en el contexto observado (Rodríguez et al., 1996). En este tipo de observación el investigador desarrolla experiencias directas con los participantes y sus ambientes (Hernández et al., 2014). En este estudio, las investigadoras asumieron el rol de observadoras participantes porque se involucraron en el contexto de los estudiantes para recolectar y analizar información referente al pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología.

Los documentos, refieren a transcripciones de audio y vídeo, documental fotográfico y escritos que pueden revisarse en cualquier momento de la investigación (Hernández et al., 2014). En este caso, los documentos contemplaron las guías realizadas por los estudiantes, así como las conversaciones establecidas con ellos durante cada sesión del trabajo de campo.

Las anotaciones se conciben como herramientas donde el investigador escribe aquello que observa, escucha y percibe a través de sus sentidos, "no hay un modelo de descripción, sino que cada uno capta los elementos que le llamen más la atención de acuerdo con el planteamiento del problema" (Hernández et al., 2014, p. 370). En esta investigación, se consideraron anotaciones de tipo interpretativas y temáticas, en las cuales se documentaron comentarios e ideas sobre aquello que se percibió en el campo y conclusiones derivadas de la observación (Hernández et al., 2014). Para el registro de tales anotaciones, se destinó el formato que se presenta en la **Tabla *3***.

Tabla 3
Formato de anotaciones para la recolección de información

Sesión	Número.	**Fase**	Texto.
Comentarios / Ideas		• Texto.	
Conclusiones preliminares		• Texto.	

3.6 Triangulación de información

La triangulación de información, según Hernández et al. (2014), implica la utilización de diversas fuentes y métodos durante una investigación. En este estudio, se trianguló información proveniente de guías realizadas por 18 estudiantes de grado séptimo, distribuidos en cuatro grupos de trabajo (ver **Figura *8***). Además, se consideraron audios y vídeos grabados durante la realización de tales guías. La información se trianguló por medio del formato que se específica en la **Tabla *4***. A partir de tal formato, se relacionó la información recolectada con tres categorías de análisis, correspondientes a los estratos de pensamiento algebraico propuestos por Radford (2000, 2006, 2010a): pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Además, se consideraron cada una de las tareas y métodos propuestos para la recolección de información, así como la distribución de los participantes para el desarrollo de la investigación. Cabe resaltar que, el formato fue utilizado para triangular información proveniente de cada fase del trabajo de campo, a saber: secuencias con videojuegos, secuencias con calculadora, secuencias con Scratch y carrusel algebraico. La información registrada para cada fase se puede consultar haciendo clic aquí.

Tabla 4
Triangulación de información

Categoría	Grupo	Método	Tarea 1	Tarea 2	…
Pensamiento algebraico factual	1	**Guía**			
		Audios			
	2	**Guía**			
		Audios			
	3	**Guía**			
		Audios			
	4	**Guía**			
		Audios			
Pensamiento algebraico contextual	. . .	. . .			
Pensamiento algebraico simbólico	. . .	. . .			

3.7 Criterios de rigurosidad

Las investigaciones cualitativas exigen rigurosidad. En el presente estudio, se consideraron los siguientes criterios propuestos por Hernández et al. (2014) para brindar rigor a la investigación: dependencia, credibilidad y transferencia.

En relación con la dependencia, que implica coherencia y consistencia en el proceso de investigación, se implementaron las siguientes acciones: (1) detallar la perspectiva teórica asumida dentro de la investigación y el diseño metodológico, (2) explicar los criterios de selección de los participantes y los métodos de recolección de datos, y (3) describir los roles desempeñados por las investigadoras durante el trabajo de campo y los métodos de análisis utilizados.

En cuanto a la credibilidad, que refiere a la precisión del diseño metodológico, así como a una presentación y análisis de resultados que garanticen la autenticidad de las conclusiones, se consideraron las siguientes recomendaciones: (1) revisión de documentos por colegas calificados, a saber, bitácoras y anotaciones, guías para profesores y estudiantes, y formatos de triangulación de información, (2) aplicar la triangulación de información mediante diferentes métodos de recolección, tales como audios, guías resueltas por los estudiantes y anotaciones realizadas por las investigadoras, y (3) comparar la información recopilada con el marco teórico de la investigación.

Por último, con respecto al criterio de transferencia, Hernández et al. (2014) señalan que este alude a la posibilidad de transferir la investigación a otros contextos. Aunque sea desafiante en estudios cualitativos, en este estudio se pretende proporcionar orientaciones y preguntas abiertas que puedan ser retomadas en futuras investigaciones.

3.8 Consideraciones éticas

En una investigación cualitativa es preciso asumir el principio de confidencialidad. A partir de tal principio, los investigadores deben garantizar la protección de los derechos de los participantes y su privacidad, de manera especial, durante la divulgación de resultados (Hernández et al., 2014). Por tal motivo, antes de iniciar el trabajo de campo, se llevó a cabo una reunión con los padres de familia y estudiantes participantes. Durante esta reunión, se brindó una explicación detallada sobre el estudio, sus objetivos y alcances. Cabe destacar que se enfatizó en que la participación era voluntaria y tenía fines académicos.

Aquellos estudiantes que acordaron participar diligenciaron un consentimiento informado (Ver **Anexo *14***), el cual incluía su firma y la de su tutor legal (pues se trataba de estudiantes menores de edad). En adición, conforme al consentimiento informado, las transcripciones de audio y video, así como la codificación de información recolectada durante el trabajo de campo, se realizó bajo seudónimos para preservar la privacidad de los participantes.

4 Análisis y resultados

En el apartado *3 Marco metodológico* se presentó el diseño de la investigación. Las etapas (1) diseño de tareas para el aula y (2) implementación de tareas para el aula, se llevaron a cabo durante el trabajo de campo. Las etapas (3) interpretación de información y (4) generación de conclusiones, se documentan en el presente capítulo. Para llevar a cabo estas etapas se estudió y trianguló información recolectada en el trabajo de campo. Así, se consideraron datos de las tareas realizadas por los estudiantes que dieran cuenta de cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología. En estos datos se encontraron las siguientes unidades de análisis:

- Representaciones con material concreto, dibujos, algoritmos y continuación de secuencias, resultantes de la interacción de los estudiantes con la tecnología en busca de hechos particulares y en las cuales el sentido de la indeterminancia permanece implícito.
- Escritos y diálogos con términos descriptivos claves derivados del análisis y generalización de los estudiantes de aquello indeterminado que se observa con la tecnología.
- Reglas de formación con símbolos alfanuméricos en las que los estudiantes significan indeterminancias de manera abstracta.

En virtud de la afinidad de las unidades de análisis con el marco teórico de la investigación, se establecieron tres categorías de análisis: pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Como las tareas presentadas a los estudiantes fueron mediadas por tecnología, las categorías de análisis retoman elementos de la estratificación de pensamiento algebraico propuesta por Radford (2000, 2006, 2010a) y la concepción de tecnología expuesta por Borba y Villareal (2005), de manera que en estas categorías se brindan nuevas formas en las que los estudiantes ponen de manifiesto tales estratos de pensamiento.

En los próximos apartados, se comparten los análisis y resultados para cada una de las fases del trabajo de campo (secuencias con videojuegos, secuencias con calculadora, secuencias con Scratch y carrusel algebraico). En cada fase, se consideran las tres categorías de análisis propuestas y se brindan evidencias[2] de su aparición durante el trabajo de campo. En coherencia con los objetivos específicos de esta investigación, se identifican aspectos del pensamiento algebraico

[2] Si bien se hace referencia a datos de los grupos de trabajo, en cada categoría de análisis solo se incluyen aquellas evidencias que son claras y relevantes para la categoría en cuestión.

factual, contextual y simbólico, y se describen formas en las que estos estratos se ponen de manifiesto en estudiantes de grado séptimo al realizar tareas mediadas por tecnología. Cabe resaltar que los estratos de pensamiento algebraico son inherentes a la caracterización de pensamiento algebraico propuesta por Radford (2006, 2014). En ese sentido, en los análisis también se alude a los tres elementos de tal caracterización, esto es, sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica. A modo de cierre, para cada fase, se responde cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por videojuegos, calculadora clásica o Scratch. Estas respuestas permiten construir la respuesta a la pregunta de investigación que se presenta en el apartado *5 Conclusiones y recomendaciones*.

4.1 Secuencias con videojuegos

En la primera fase del trabajo de campo se propuso a los estudiantes una serie de tareas derivadas de un recorrido histórico, por décadas, de videojuegos populares entre los años 1980 y 2010. Los videojuegos seleccionados para esta fase fueron: Circus Charlie (1980 a 1990), Super Mario World (1990 a 2000) y Plants vs Zombies (2000 a 2010). En el transcurso de esta fase, los estudiantes realizaron tres guías, cada una correspondiente a uno de los videojuegos mencionados. Para la ejecución de cada guía, se proyectó el videojuego respectivo en un televisor del aula de clase, además, se les permitió a los estudiantes utilizar sus celulares para interactuar con los videojuegos. A continuación, se exponen los resultados obtenidos para cada uno de los videojuegos propuestos.

4.1.1 Secuencias con videojuegos: Circus Charlie

En las sesiones 1 y 2 del trabajo de campo se presentó a los estudiantes el videojuego Circus Charlie, el cual fue publicado en el año 1984. En Circus Charlie, el jugador asume el papel del personaje homónimo y debe guiarlo a través de seis eventos típicos de un circo. El primer evento consiste en montar un león y realizar saltos precisos a través de aros de fuego. A lo largo del primer nivel del videojuego se observan patrones recurrentes, entre ellos, la aparición de un aro de fuego acompañado de una bolsa de dinero cada vez que el jugador supera exitosamente cinco aros de fuego.

De manera previa a la realización de la guía vinculada con Circus Charlie, se sugirió a los estudiantes explorar el videojuego en sus casas. Al iniciar la sesión 1 del trabajo de campo, la mayoría de los estudiantes expresó no haberlo explorado antes. En consecuencia, se proyectó el videojuego en el televisor del aula de clase y se brindó un espacio para que algunos estudiantes jugaran, otros observaran, y entre todos se familiarizaran con el videojuego. Durante este espacio, se realizaron preguntas que dirigieron la atención de los estudiantes hacia determinaciones sensibles asociadas a los aros del videojuego, en particular, hacia la aparición repetitiva de una bolsa de dinero en ellos. Por último, los estudiantes procedieron a realizar sus guías en los grupos de trabajo.

En las siguientes secciones se detallan los resultados para dos categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico factual y pensamiento algebraico contextual. Se omite el pensamiento algebraico simbólico, ya que en las respuestas de los estudiantes no se encontró información referente a esta categoría.

4.1.1.1 Pensamiento algebraico factual

Durante el trabajo con Circus Charlie, se evidenció que el pensamiento algebraico factual se pone de manifiesto en elaboraciones de los estudiantes que involucran dibujos, material concreto y algoritmos. En cuanto a los dibujos y el material concreto, las representaciones que los involucran describen un patrón inherente al campo perceptivo que ofrece la tecnología utilizada, es decir, un nivel del videojuego. Así pues, en algunas respuestas de los estudiantes a las tareas 1 y 4 de la guía, que implicaban recrear los aros que atraviesa Circus Charlie en el primer nivel del videojuego (aros que podían ser vistos por los estudiantes), se evidenciaron representaciones que daban cuenta de un hecho particular del videojuego: la aparición repetitiva de una bolsa de dinero cada 6 aros (ver **Figura *9***, **Figura *10*** y **Figura *11***). Por su parte, las representaciones que involucran algoritmos, si bien pueden aludir a elementos que se encuentran por fuera del campo perceptivo de los estudiantes (aros que no pueden ser vistos en el primer nivel del videojuego), reposan, en este caso, sobre un hecho particular que aún no ha sido generalizado (ver **Figura *12***). Estas formas en las que se pone de manifiesto el pensamiento algebraico refieren a un estrato factual ya que se relacionan con la coordinación de medios semióticos[3] para significar hechos particulares (Radford, 2010a).

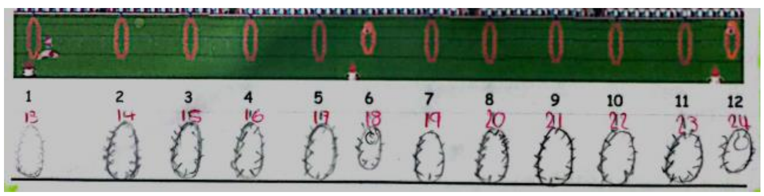
Figura 9

Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie

Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea “representa a través de un dibujo las características de los primeros 12 aros que debe atravesar Circus Charlie en el primer nivel del videojuego”.

Figura 10

Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie



Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea “continúen dibujando los aros del videojuego hasta llegar al aro número 24”.

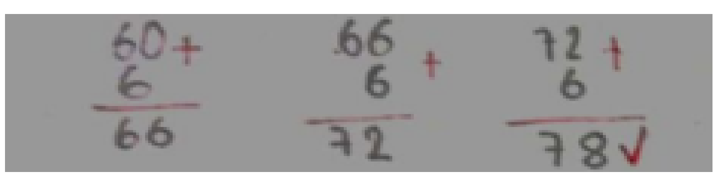
Figura 11

Dato 3 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie

Nota. Respuesta del grupo 3 a la tarea “representa con las chaquiras y el hilo las características de los primeros 12 aros que debe atravesar Circus Charlie en el primer nivel del videojuego”.

Figura 12

Dato 4 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie



Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea “¿creen que el aro número 78 tendrá una bolsa de dinero?, ¿por qué?”.

[3] En adelante, solo medios. Los medios a los que se hace referencia en los análisis no solo aluden a tecnologías, si no a aquellos recursos utilizados por los estudiantes para objetivar uno u otro estrato de pensamiento algebraico.

4.1.1.2 Pensamiento algebraico contextual

En cuanto al estrato de pensamiento algebraico contextual, su manifestación se observó en las respuestas proporcionadas por los estudiantes a través de escritos que contenían descriptores claves o algoritmos. Aquellos estudiantes que utilizaron descriptores clave transitaron de hechos particulares a hechos generales (Radford, 2010a), a través de expresiones como "cada 5 aros", "por cada 6 aros" o "una secuencia de 6 en 6", omitieron referirse a los aros percibidos en el primer nivel del videojuego y señalaron un patrón que podía generalizarse a cualquier número de aros que aparecieran en el videojuego (ver **Tabla *5***).

Tabla 5

Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie

Dato cualitativo	Transcripción
cas es que cada 5 aros hay uno que se reduce y estos contienen una bolsa de dinero	"(…) es que cada 5 aros hay uno que se reduce y estos contienen una bolsa de dinero"

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "relata en un escrito las características de los primeros 12 aros que debe atravesar Circus Charlie en el primer nivel del videojuego".

Con respecto a los algoritmos utilizados en el estrato de pensamiento algebraico contextual, a diferencia de aquellos empleados en el estrato de pensamiento algebraico factual, estos siguen una lógica que obedece a hechos generales y no particulares. Nótese entonces que representaciones como la presentada en la **Tabla 6** obedecen a la siguiente lógica: si encuentro cualquier número (sentido de la indeterminancia) que multiplicado por 6 me de 78, entonces el aro 78 tendrá una bolsa de dinero.

Tabla 6

Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie

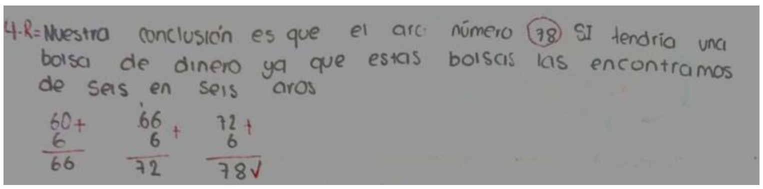
Dato cualitativo	Transcripción
7R/=Que se tiene que multiplicar 1 bolsa por cada 6 aros.	"Que se tiene que multiplicar 1 bolsa por cada 6 aros"

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, que explique cómo se relaciona el número de cada bolsa de dinero con el número del aro en el que se encuentra esta bolsa".

Cabe resaltar que, en ocasiones, el pensamiento algebraico presenta formas tanto del estrato de pensamiento algebraico factual, como del estrato de pensamiento algebraico contextual. Así pues, los estudiantes proponen representaciones que involucran descriptores claves que generalizan un patrón y medios (en este caso, algoritmos) que particularizan el patrón percibido (ver **Tabla 7**).

Tabla 7

Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Circus Charlie

Dato cualitativo	Transcripción
	“Nuestra conclusión es que el aro número 78 sí tendrá una bolsa de dinero ya que estas bolsas las encontramos de seis en seis aros”

Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea “¿creen que el aro número 78 tendrá una bolsa de dinero?, ¿por qué?”.

4.1.2 Secuencias con videojuegos: Super Mario World

En la sesión 3 del trabajo de campo se presentó a los estudiantes “Super Mario World”, videojuego publicado en el año 1991. En Super Mario World, el jugador asume el papel de Mario y guía al personaje a través de diversos mundos. El primer mundo contempla la aparición de personajes que irrumpen el camino de Mario, así como la aparición de monedas que debe recolectar este personaje. En el videojuego se observan patrones recurrentes con relación a las puntuaciones que se le otorgan al jugador: (1) cuando el jugador supera la aparición de un personaje que irrumpe el camino de Mario, obtiene 200 puntos, (2) cuando el jugador recolecta monedas pequeñas, obtiene 10 puntos, (3) al recolectar monedas grandes, la puntuación del jugador comienza a variar de la siguiente forma: la primera moneda que recolecta le otorga 1000 puntos, la segunda moneda 2000 puntos, la tercera 3000 puntos y así sucesivamente.

De manera previa a la realización de la guía vinculada con Super Mario World, se sugirió a los estudiantes explorar el videojuego en sus casas. Al iniciar la sesión 3 del trabajo de campo, se evidenció un aumento en el número de estudiantes que se habían familiarizado con el videojuego seleccionado para el desarrollo de la clase, en comparación con el videojuego presentado en las sesiones anteriores. En esta ocasión, los estudiantes se acercaron al videojuego con una mirada informada, identificaron regularidades y durante la clase mencionaron las siguientes: paisajes de la interfaz y la aparición constante de bloques que permitían a Mario adquirir habilidades especiales.

En esta sesión también se proyectó el videojuego en el televisor del aula de clase y se brindó un espacio para que los estudiantes volvieran a jugarlo. Mientras los estudiantes jugaban, se les realizaron preguntas que orientaron su atención hacia determinaciones sensibles asociadas a los personajes y tipos de monedas presentes en el videojuego. Por último, los estudiantes procedieron a realizar sus guías en los grupos de trabajo. Contrario a la experiencia con Circus Charlie, la mayoría de los estudiantes manifestaron que era necesario volver sobre el videojuego para responder a las tareas propuestas en la guía. Es decir, debían volver a jugarlo para saber con exactitud cuánto puntaje obtenía Mario al superar un personaje o al recolectar una moneda.

En las siguientes secciones se detallan los resultados para dos categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Se omite el pensamiento algebraico factual, ya que en las respuestas de los estudiantes no se encontró información referente a esta categoría.

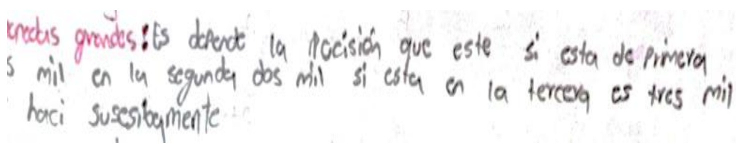
4.1.2.1 Pensamiento algebraico contextual

En el transcurso de esta sesión, el pensamiento algebraico contextual se evidenció en los estudiantes a través de escritos que implicaban el uso de descriptores claves. A diferencia del videojuego anterior (Circus Charlie), el videojuego de esta sesión (Super Mario World) favoreció en los estudiantes el uso de descriptores claves que aludían a una mayor generalidad. Mientras que con el videojuego anterior los estudiantes utilizaron descriptores como “cada 5 aros”, con este videojuego, recurrieron a descriptores como: “sucesivamente” y “etc.”. Estos descriptores fueron utilizados por los estudiantes para señalar un patrón que se generaliza en términos de una secuencia que no son percibidos en la interfaz del videojuego (ver **Tabla 8** y **Tabla 9**).

Se evidenció en los estudiantes el uso de la expresión “un ejemplo sería” para aludir a un tratamiento analítico realizado sobre cantidades indeterminadas a partir de un patrón generalizado de manera previa. Es decir, después de haber generalizado un patrón, algunos estudiantes tomaron un ejemplo hipotético para expresar tal generalización, este ejemplo incluyó elementos que se encontraban fuera de su campo perceptivo, es decir, fuera de la interfaz del videojuego (ver **Tabla 10**).

Tabla 8

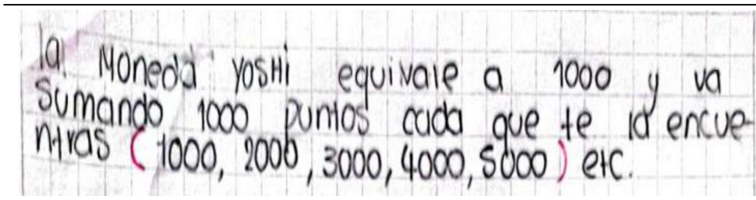
Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World

Dato cualitativo	Transcripción
	"Monedas grandes: Es [eso] depende la posición que este [esté] si esta [está] de primera es mil en la segunda dos mil si esta [está] en la tercera es tres mil y haci [así] sucesivamente [secesivamente]"

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "¿cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super Mario World a partir de cualquier cantidad de monedas que recolecten?".

Tabla 9

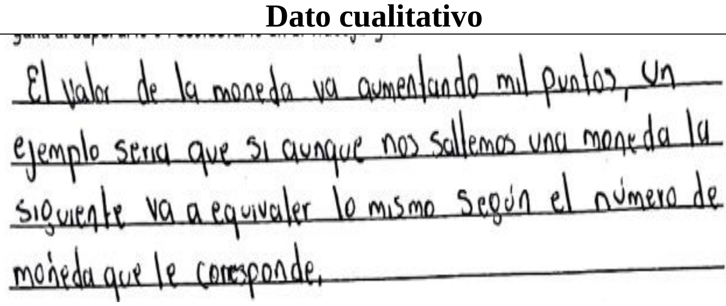
Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World

Dato cualitativo	Transcripción
	"La moneda Yoshi [moneda grande del videojuego] equivale a 1000 y va sumando 1000 puntos cada que te la encuentras (1000, 2000, 3000, 4000, 5000) etc."

Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea "¿qué relación existe entre las monedas que obtiene Mario al recolectarlas y el puntaje?".

Tabla 10

Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Super Mario World

Dato cualitativo	Transcripción
	"El valor de la moneda va aumentando mil puntos, un ejemplo sería que si aunque nos saltemos una moneda la siguiente equivale lo mismo según el número de moneda que le corresponde"

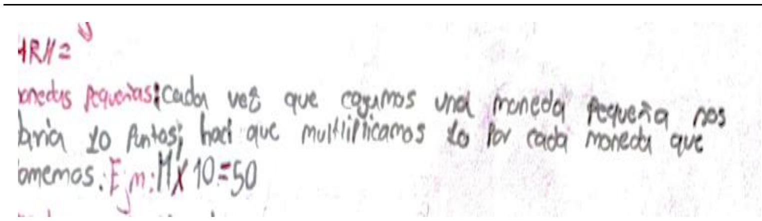
Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea "¿qué relación existe entre las monedas que obtiene Mario al recolectarlas y el puntaje?". En esta respuesta, el grupo de estudiantes hace referencia a que, según la posición en el videojuego, las monedas grandes siempre incrementarán su puntaje en incrementos de 1000, incluso en situaciones en las que el jugador omita recoger una moneda.

4.1.2.2 Pensamiento algebraico simbólico

Según Radford (2010a), el pensamiento algebraico simbólico transita desde una distinción mediada por gestos y palabras clave hacia una distinción mediada por símbolos alfanuméricos. Tal estrato de pensamiento implica el desprendimiento de un contexto para expresar indeterminancias de forma abstracta. En las respuestas de los estudiantes a las tareas vinculadas con el videojuego Super Mario World, el pensamiento algebraico simbólico se evidenció a través de lenguaje natural y símbolos alfanuméricos. Estos medios configuraron reglas de formación y ecuaciones que describían un patrón generalizado. No obstante, los estudiantes enfrentaron dificultades al expresar indeterminancias de manera abstracta. Durante la investigación, se observó que, de manera recurrente, aquello que se presentaba indeterminado en una regla de formación, pasaba casi de inmediato a ser determinado por los estudiantes mediante una ecuación. Esta acción respondía a la búsqueda de los estudiantes por dotar de sentido aquello que estaba indeterminado (ver **Tabla 11**).

Tabla 11

Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Super Mario World

Dato cualitativo	Transcripción
	"Monedas pequeñas: cada vez que cojamos una moneda pequeña nos daría 10 puntos; haci [así] que multiplicamos 10 por cada moneda que tomemos. Ejm [Ejemplo]: M x 10 = 50"

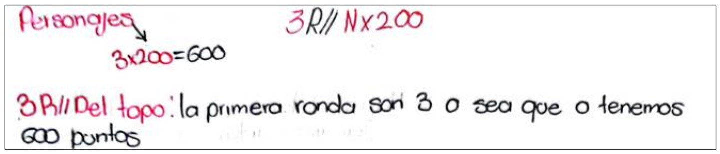
Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "¿cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super Mario World a partir de cualquier cantidad de monedas que recolecten?". En esta respuesta, se observa que, M (variable seleccionada para representar la indeterminancia) ha sido implícitamente determinada por el número 5.

La dificultad mencionada en el apartado anterior podría relacionarse con la tecnología que media las tareas, es decir, los videojuegos. En algunas respuestas de los estudiantes, como la que se presenta en la **Figura 13**, se observan reglas de formación en las cuales se reconoce una característica del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminancia (N x 200). Sin embargo, aquello que está indeterminado pasa a ser determinado por los estudiantes a partir de su experiencia con el nivel del videojuego (3 x 200 = 600). De manera que, en la respuesta presentada por los estudiantes a la tarea ¿cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super

Mario World a partir de cualquier número de personajes que superen? (ver **Figura 13**), se evidencia la existencia de una indeterminación (N) que ha sido determinada por la experiencia de los estudiantes con el videojuego (el grupo superó 3 personajes en el primer nivel del videojuego, “la primera ronda son 3 o sea que tenemos 600 puntos”).

Figura 13

Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Super Mario World



Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea “¿cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super Mario World a partir de cualquier cantidad de monedas que recolecten?”.

4.1.3 Secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies

En un tercer momento se presentó a los estudiantes “Plants vs Zombies” (en español, “Plantas vs Zombies”), videojuego publicado en el año 2009. En Plants vs Zombies el jugador debe defender su hogar de un grupo de zombies utilizando plantas con habilidades especiales, estas plantas son adquiridas a través de soles que recolecta el jugador durante cada nivel del videojuego. En el videojuego puede observarse un patrón relacionado con el intervalo de tiempo que tarda en aparecer cada sol proveniente de un girasol.

De manera previa a la realización de la guía vinculada con Plants vs Zombies, se recomendó a los estudiantes explorar el videojuego en sus casas. Al iniciar la sesión 4 del trabajo de campo, los estudiantes expresaron haber avanzado varios niveles del videojuego en busca de “regularidades”. En especial, desatacaron el aumento en la cantidad de plantas y zombies disponibles en cada nivel, el aumento proporcional de terreno para sembrar plantas en cada nivel y el intervalo de tiempo en el que los soles “caían del cielo”.

Aunque la mayoría de los estudiantes exploraron el videojuego con anticipación, en esta sesión también se proyectó el videojuego en el televisor del aula de clase y se brindó un espacio para que los estudiantes volvieran a jugarlo. Mientras jugaban, se realizaron preguntas para dirigir su atención hacia el intervalo de tiempo que tardaban los girasoles en producir soles en el videojuego. Los estudiantes utilizaron sus celulares para cronometrar el tiempo en que aparecían estos soles y evidenciaron que su aparición variaba según el nivel. De manera específica, los estudiantes observaron que para el nivel dos, el tiempo promedio de aparición de soles provenientes de un girasol era de 24 segundos. Por último, los estudiantes procedieron a realizar sus guías en los grupos de trabajo.

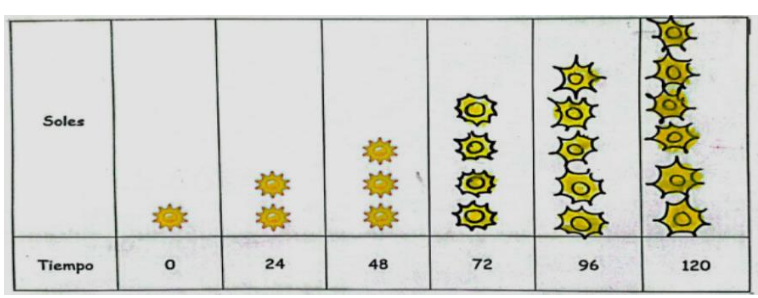
En las siguientes secciones se detallan los resultados para las tres categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico.

4.1.3.1 Pensamiento algebraico factual

En la guía para estudiantes de Plants vs Zombies, la tarea 1 favoreció que se manifestara el pensamiento algebraico factual, pues se les solicitó a los estudiantes utilizar dibujos para relacionar la cantidad de soles producidos por un girasol y el tiempo (en segundos) en que estos aparecían en el videojuego. Así pues, en estos dibujos se generalizaba un hecho particular que se evidencia en el segundo nivel del videojuego: cada 24 segundos, un girasol produce un sol (ver **Figura 14**). Con respecto a la tabla presentada en tal tarea, se observó que este medio semiótico fue ampliado por los estudiantes para analizar elementos que no son percibidos en la interfaz del videojuego (ver **Figura 15**). Si bien el acto de analizar elementos de una secuencia que se encuentran por fuera del campo perceptivo alude a un estrato de pensamiento algebraico contextual, en este caso, la acción continúa situada en un estrato factual porque se pone de manifiesto a través de dibujos y la generalidad no alcanza a ser enunciada a través de términos descriptivos clave.

Figura 14

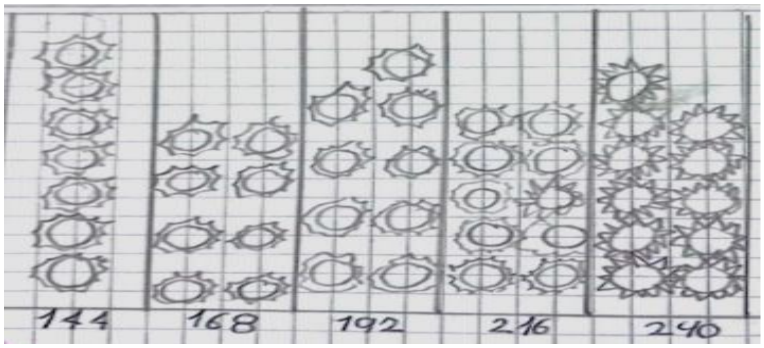
Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies



Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea "avancen hasta el segundo nivel del videojuego Plants vs Zombies y planten un girasol. Una vez obtengan el primer sol de este girasol, continúen la siguiente secuencia que relaciona la cantidad de soles producidos por el girasol y el tiempo (en segundos) en los que estos aparecen".

Figura 15

Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies



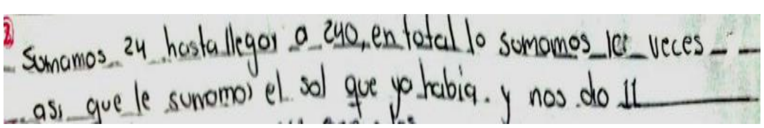
Nota. Respuesta del grupo 3 a la tarea "¿cuántos soles habrá producido el girasol a los 240 segundos de haber salido el primer sol?".

4.1.3.2 Pensamiento algebraico contextual

En el transcurso de esta sesión, el pensamiento algebraico contextual se evidenció en escritos y diálogos de los estudiantes que expresaban generalizaciones algebraicas a través de términos descriptivos clave (Radford, 2010a). En cuanto a los escritos, estos respondieron a tareas que involucraban elementos fuera de la interfaz del segundo nivel del videojuego. En respuestas como la que se presenta en la **Tabla 12**, los estudiantes explican la forma en que lograron calcular aquello que no percibían en el segundo nivel del videojuego (soles que habrá producido el girasol en un tiempo mayor a 120 segundos, que es el tiempo de duración total de este nivel).

Tabla 12

Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies

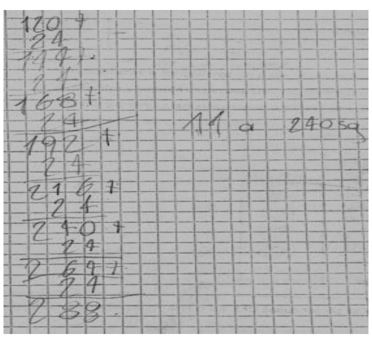
Dato cualitativo	Transcripción
	"Sumamos 24 hasta llegar a 240, en total lo sumamos 10 veces así que le sumamos el sol que ya había y nos dio 11"

Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea "¿cuántos soles habrá producido el girasol a los 240 segundos de haber salido el primer sol?".

Los diálogos aparecieron como medio semiótico que otorgaba significado a aquellas generalizaciones realizadas a través de símbolos alfanuméricos. Este medio se observó en respuestas como la que se presenta en la **Tabla 13,** donde los estudiantes utilizaron números y operadores para calcular la producción de soles de un girasol en el videojuego Plants vs Zombies. En el diálogo que acompañó tal representación (ver **Tabla 13**), se enunciaron descriptores clave que revelaron la generalización del patrón identificado: "le sumé 24 y después *así sucesivamente* hasta llegar a 240" y "*acá otro* sol, *otro* sol y *otro* sol y *así*". Es importante señalar que, en algunas representaciones de los estudiantes se encontraron generalizaciones expresadas con operadores que tenían significados distintos a los convencionales. Por ejemplo, en la **Figura 16**, la expresión "120 = 6" no refiere a una equivalencia, sino que establece la relación entre el tiempo y la cantidad de soles producidos.

Tabla 13

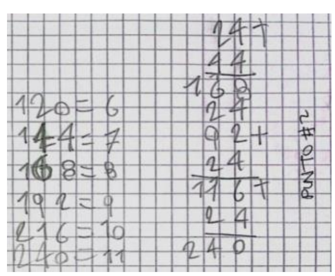
Dato 2 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies

Representación a través de símbolos alfanuméricos	Diálogo
	*Jacob:* Sumé desde los 120, que fue el último segundo que mostró (el videojuego) y le sumé 24 y después así sucesivamente hasta llegar a 240, y el resultado eran 11 soles. *Jhoana:* Entonces, después de cada 24 segundos, ¿notaron que se incrementaba un sol? *Jacob:* Sí. O sea, la suma de este 24 es un sol. *Jhoana:* ¿Otro sol? *Jacob:* Ajá, acá otro sol, otro sol y otro sol y así (señalando cada vez que se sumó 24 a 120).

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "teniendo en cuenta la secuencia completada en el primer punto, ¿Para qué tiempo tendrás que dibujar 13 soles?". En esta respuesta, los estudiantes sugieren que a los 288 segundos tendrán 13 soles, pues habrán sumado siete veces 24(un sol) a los seis soles que tenían en el tiempo 240.

Figura 16

Dato 3 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies



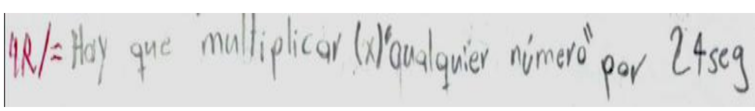
Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea "¿cuántos soles habrá producido el girasol a los 240 segundos de haber salido el primer sol?".

4.1.3.3 Pensamiento algebraico simbólico

El pensamiento algebraico simbólico se evidenció en la respuesta de un grupo de estudiantes a la tarea 4 de la guía, que involucraba calcular la cantidad de soles que produce un girasol en cualquier tiempo del videojuego. Durante esta tarea, los estudiantes propusieron una regla de formación que contemplaba el uso de símbolos alfanuméricos (ver **Tabla 14**). Sin embargo, la regla propuesta no fue validada y no generalizaba la secuencia de patrones presente en el videojuego[4]. Es importante destacar que otro grupo de estudiantes narró una forma de generalizar la secuencia de patrones (ver **Tabla 12**). La narración propuesta por este grupo daba cuenta de dos aspectos clave que responden a la secuencia propuesta: el intervalo de aparición de cada sol y la consideración de un sol que aparece en el tiempo inicial (0 segundos). No obstante, la propuesta del grupo se vincula a un contexto particular (la producción de soles a los 240 segundos de haber salido el primer sol), así que su respuesta a la tarea parece dar cuenta de una amalgama entre dos estratos de pensamiento algebraico: contextual y simbólico.

Tabla 14

Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con videojuegos: Plants vs Zombies

Dato cualitativo	Transcripción
	"Hay que multiplicar (x) "cualquier número" por 24 seg [segundos]"

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, en donde les expliquen cómo calcular la cantidad de soles que habrá producido el girasol en cualquier tiempo".

El pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por videojuegos es factual, contextual y simbólico. Cuando es factual, se presenta de las siguientes formas: dibujos, representaciones con material concreto, continuación de secuencias y algoritmos inherentes a lo que se puede percibir en un nivel del videojuego. Al ser contextual, se pone de manifiesto a través de escritos y diálogos con términos descriptivos clave que dan cuenta de la

[4] Una de las formas de generalizar la secuencia de patrones podría ser (n/24) + 1, siendo n "cualquier tiempo". Es decir, tomando en consideración el sol inicial.

generalización de un patrón. Cuando es simbólico, se presenta por medio de reglas de formación que se construyen a partir de lenguaje natural y símbolos alfanuméricos.

Es preciso señalar que los videojuegos por sí solos no constituyen un medio semiótico para la promoción del pensamiento algebraico. La generalización de patrones algebraicos se vincula a las tareas mediadas por esta tecnología. Ahora bien, el diseño de tareas influye también en los estratos de pensamiento algebraico que se promueven. Las maneras en las que el sentido de la indeterminancia, la analiticidad y la designación simbólica sean involucradas en las tareas, inciden en el tránsito de los estudiantes por los estratos de pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico. Se destaca que el tránsito de los estudiantes por los estratos de pensamiento algebraico no es lineal y, en ocasiones, sus respuestas a tareas de carácter algebraico dan cuenta de una amalgama entre dos estratos de pensamiento.

4.2 Secuencias con calculadora

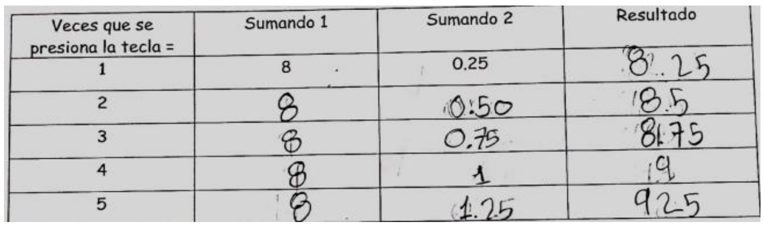
En la segunda fase del trabajo de campo se propuso a los estudiantes una serie de tareas vinculadas al efecto del signo igual en la calculadora "clásica". Durante esta fase, cada grupo de trabajo dispuso de una calculadora para realizar las tareas de la guía para estudiantes. En las siguientes secciones se detallan los resultados para dos categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico factual y pensamiento algebraico simbólico. Se omite el pensamiento algebraico contextual, ya que en las respuestas de los estudiantes no se encontró información referente a esta categoría.

4.2.1 Pensamiento algebraico factual

Las respuestas a la tarea 1 de la guía para estudiantes, derivaron en manifestaciones del estrato de pensamiento algebraico factual por parte de los grupos de trabajo. Tal tarea consistía en ingresar la operación 8 + 0.25 en una calculadora clásica y presionar de manera repetitiva la tecla igual para observar las variaciones en el sumando 1, considerado por la calculadora, con cada pulsación de tal tecla. Cabe resaltar que, a diferencia de las respuestas encontradas en otras guías, con tareas que involucraban seguir dibujando una secuencia figural, esta vez, la tarea de completar una secuencia numérica generó respuestas con notables diferencias. A saber, en las respuestas proporcionadas por tres de los cuatro grupos participantes, se observó una secuencia en la que el sumando 1 permanecía constante mientras variaba el sumando 2 (ver **Figura 17**). Por otra parte, el grupo restante, identificó que quien varía en esta secuencia es el sumando 1 y quien permanece constante es el sumando 2 (ver **Figura 18**).

Figura 17

Dato 1 de pensamiento algebraico factual en secuencias con calculadora

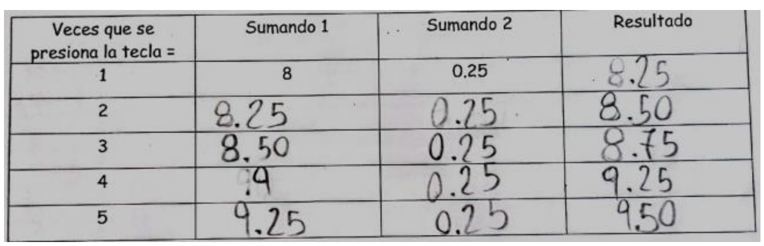


Veces que se presiona la tecla =	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	8	0.25	8.25
2	8	0:50	8.5
3	8	0.75	8.75
4	8	1	9
5	8	1.25	9.25

Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea "reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase. Ingresen a su calculadora la operación 8 + 0.25, presionen la tecla igual (=) para visualizar el resultado de la operación. Sigan presionando la tecla = y con base a los resultados que vayan obteniendo, completen la siguiente tabla".

Figura 18

Dato 2 de pensamiento algebraico factual en secuencias con calculadora



Veces que se presiona la tecla =	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	8	0.25	8.25
2	8.25	0.25	8.50
3	8.50	0.25	8.75
4	9	0.25	9.25
5	9.25	0.25	9.50

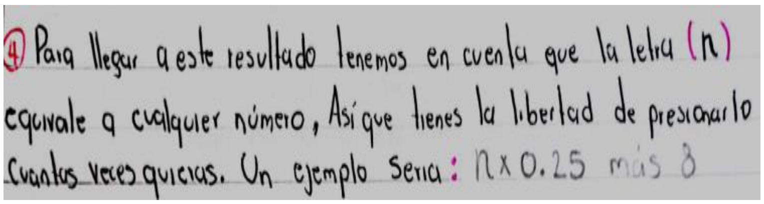
Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase. Ingresen a su calculadora la operación 8 + 0.25, presionen la tecla igual (=) para visualizar el resultado de la operación. Sigan presionando la tecla = y con base a los resultados que vayan obteniendo, completen la siguiente tabla".

4.2.2 Pensamiento algebraico simbólico

En la fase de secuencias con calculadora, el pensamiento algebraico simbólico se evidenció en narraciones de los estudiantes que involucraban símbolos alfanuméricos. En tales narraciones, los estudiantes dieron cuenta de reglas de formación en las que la indeterminancia se presentaba desde un plano abstracto y no particularizado (ver **Tabla 15** y **Tabla 16**). Esta forma de pensamiento algebraico confirma que las fórmulas o reglas de formación no son un artefacto de cálculo símbolo abstracto, sino historias que narran, de manera muy condensada, las experiencias matemáticas de los estudiantes (Radford, 2010a).

Tabla 15

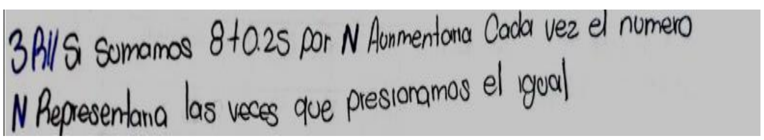
Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con calculadora

Dato cualitativo	Transcripción
	“Para llegar a este resultado tenemos en cuenta que la letra (n) equivale a cualquier número. Así que tienes la libertad de presionarlo cuantas veces sería. Un ejemplo sería: n x 0.25 más 8”

Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea “escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, que explique cómo llegaron al resultado del punto 3 (Respondan: ¿qué resultados obtendrán si presionan n veces la tecla =?)”.

Tabla 16

Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con calculadora

Dato cualitativo	Transcripción
	“Si sumamos 8 + 0.25 por N aumentamos cada vez, el número N representaría las veces que presionamos el igual”

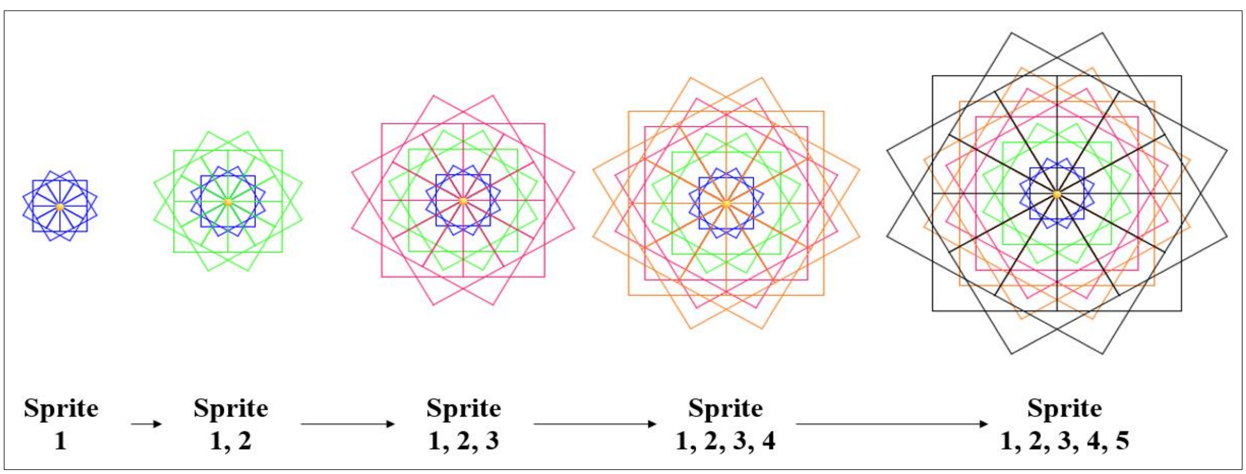
Nota. Respuesta del grupo 3 a la tarea “respondan: ¿qué resultados obtendrán si presionan n veces la tecla =?”.

El pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por una calculadora clásica puede ser factual y simbólico. Cuando es factual, se evidencia a través de la continuación de secuencias que implican interactuar con las teclas de la calculadora. Cuando es simbólico, se presenta mediante narraciones que involucran el uso de símbolos alfanuméricos y el desprendimiento de aquello que se puede observar y calcular con la calculadora, para significar indeterminancias de manera abstracta. Así como sucede con los videojuegos, el descubrimiento de patrones algebraicos mediante el uso de esta tecnología se vincula a las tareas para las cuales se utiliza la calculadora. Además, la experiencia previa de los estudiantes con este tipo de tareas influye en la manera en la que transitan por los estratos de pensamiento algebraico. En algunas tareas de esta fase, los estudiantes podrían haber transitado por un estrato de pensamiento *algebraico contextual, sin embargo, su experiencia previa con tareas mediadas por videojuegos favoreció que recurrieran de manera inmediata a símbolos alfanuméricos y reglas de formación.*

4.3 Secuencias con Scratch

En la tercera fase del trabajo de campo se propuso a los estudiantes una serie de tareas relacionadas con la ejecución de códigos para la creación de un mandala geométrico en Scratch. Para tal fin, se destinaron dos sesiones: la primera estuvo orientada a la familiarización de los estudiantes con la lógica de la programación y el uso de Scratch; la segunda, con la ejecución de códigos para la creación de un mandala geométrico en Scratch mediante el cual se podían generalizar patrones. Durante esta fase cada grupo de trabajo dispuso de un computador para realizar las tareas de la guía para estudiantes. Con respecto a la guía, en los dos primeros puntos de esta se pretendía que los estudiantes se familiarizaran con la interfaz de Scratch y con el código propuesto para el mandala geométrico. Por tal motivo, estos puntos no se consideraron como tareas para el análisis de la investigación. Así pues, se consideraron como tareas los dos puntos restantes. En el primero, los estudiantes debían ejecutar, de manera progresiva, códigos asociados a 5 sprites (objetos programables en Scratch), observar en sus pantallas el efecto de cada código (ver **Figura 19**) y completar una tabla referente a las características (cuadrados, puntas, lados de los polígonos "centrales") que se iban estableciendo en cada ejecución (ver **Figura 20**).

Figura 19
Visualización en Scratch de la ejecución progresiva del mandala geométrico



Nota. Elaboración propia.

Figura 20

Tabla para características del mandala geométrico ejecutado en Scratch

Sprite	Cuadrados	Puntas	Lados de los polígonos "centrales"
1			
1, 2			
1, 2, 3			
1, 2, 3, 4			
1, 2, 3, 4, 5			
1, 2, 3, ..., n			

Nota. Elaboración propia.

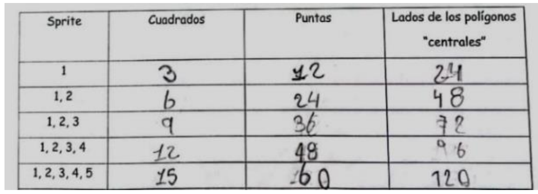
En las siguientes secciones se detallan los resultados para dos categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Se omite el pensamiento algebraico factual, ya que en las respuestas de los estudiantes no se encontró información referente a esta categoría.

4.3.1 Pensamiento algebraico contextual

Los estudiantes dieron cuenta del estrato de pensamiento algebraico contextual al completar las primeras cinco filas de la tabla propuesta en la guía para estudiantes (ver **Figura 21**). Si bien los datos asociados a estas filas podrían haberse completado a través de un conteo de los elementos que iban apareciendo en la pantalla del computador al ejecutar cada sprite (pensamiento algebraico factual), los estudiantes identificaron patrones con la ejecución de los primeros 2 sprites y los generalizaron para las filas restantes (cada que se ejecuta un sprite, aparecen 3 cuadrados más; cada que se ejecuta un sprite, la figura resultante tiene 12 puntas más y cada que se ejecuta un sprite, el polígono que se forma en el centro de la figura tiene 24 lados más). Ahora bien, las respuestas de los estudiantes no alcanzan a ubicarse en un estrato de pensamiento algebraico simbólico, ya que continúan sujetas a un contexto, y no se observa en ellas la expresión de indeterminancias de manera abstracta (Radford, 2010a).

Figura 21

Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en secuencias con Scratch



Sprite	Cuadrados	Puntas	Lados de los polígonos "centrales"
1	3	12	24
1, 2	6	24	48
1, 2, 3	9	36	72
1, 2, 3, 4	12	48	96
1, 2, 3, 4, 5	15	60	120

Nota. Respuesta del grupo 1 a la tarea "ejecuten progresivamente los códigos vinculados a cada sprite, luego completen la tabla".

4.3.2 Pensamiento algebraico simbólico

Los estudiantes dieron cuenta del estrato de pensamiento algebraico simbólico al completar la última fila de la tabla propuesta en su guía (ver **Figura 22**). En sus respuestas, se observaron reglas de formación con símbolos alfanuméricos que expresaban los patrones encontrados en cada fila de la tabla. Asimismo, en sus explicaciones a estas reglas de formación, los estudiantes enfatizaron que la variable n hacía referencia a un "número indefinido" (Ver **Tabla 17**), en ese sentido, construyeron estas reglas a partir de un tratamiento realizado sobre elementos indeterminados, en este caso, sprites que no podían ejecutar en Scratch.

Figura 22

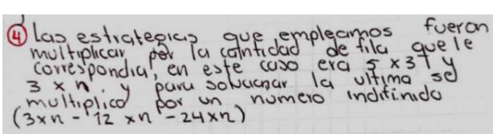
Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con Scratch

1, 2, 3, ..., n	3x n	12 x n	24x n

Nota. Respuesta del grupo 4 a la tarea "ejecuten progresivamente los códigos vinculados a cada sprite, luego completen la tabla".

Tabla 17

Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en secuencias con Scratch

Dato cualitativo	Transcripción
	"Las estrategias que empleamos fueron multiplicar por la cantidad de fila que le correspondía, en este caso era 5 x 3 [haciendo referencia a la quinta fila que debían llenar en la tabla] y 3 x n [haciendo referencia a la sexta fila que debían llenar en la tabla] y para solucionar la última se multiplicó por un número indefinido (3 x n – 12 x n – 24 x n)"

Nota. Respuesta del grupo 2 a la tarea "Describan detalladamente las estrategias que emplearon para completar las últimas dos filas de la tabla".

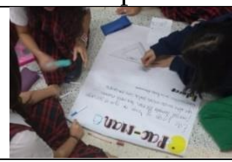
El pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por Scratch puede ser contextual y simbólico. Cuando es contextual, implica el análisis de animaciones interactivas a partir de las cuales se pueden generalizar patrones, tal análisis está sujeto a lo que se percibe en la interfaz de Scratch. Cuando es simbólico, este análisis se expresa mediante reglas de formación que involucran el uso de símbolos alfanuméricos. La manifestación de los estratos de pensamiento algebraico contextual y simbólico responden a dos aspectos: (1) el diseño de tareas y (2) el trabajo de campo realizado con los estudiantes durante las fases anteriores, el cual contribuye a que estos respondan a nuevas tareas desde un plano abstracto (propio de los estratos de pensamiento algebraico contextual y simbólico).

4.4 Carrusel algebraico

En la cuarta fase del trabajo de campo se propuso a los estudiantes la tarea de reconocer patrones en videojuegos o crearlos usando Scratch y la calculadora "clásica", para luego presentar sus hallazgos mediante un carrusel algebraico. Para tal fin, se designaron cuatro sesiones de clase, en las primeras dos, los estudiantes realizaron la tarea y en las otras, se desarrolló el carrusel algebraico. En esta tarea, el grupo 1 propuso la generalización de un patrón encontrado en una animación de Scratch, tal animación fue creada a partir de la modificación del código presentado a los estudiantes en la fase 3 del trabajo de campo. Los grupos restantes se interesaron por generalizar patrones relacionados con el sistema de puntajes de dos videojuegos: Pacman (grupo 2) y Tiles Hop (grupo 3). En la **Tabla 18** se presentan evidencias del trabajo realizado por los estudiantes durante la preparación del carrusel algebraico. En las siguientes secciones se detallan los resultados para las tres categorías de análisis, a saber: pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico simbólico. Cabe resaltar que no se hace referencia al grupo 4, ya que en sus respuestas no se encontró información referente a las categorías de análisis.

Tabla 18

Evidencias de la preparación de los grupos para la fase de carrusel algebraico

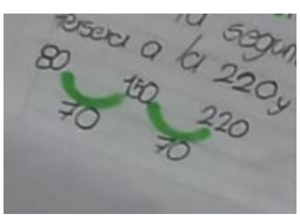
Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
		

4.4.1 Pensamiento algebraico factual

Durante el carrusel algebraico, el grupo 3 describió un patrón encontrado en el videojuego Tiles Hop, en este videojuego el jugador debe transportar una bola pequeña sobre plataformas suspendidas en el aire y recolectar estrellas mientras se reproduce una canción. El patrón descrito por el grupo 3 hacía referencia a la relación encontrada entre el tiempo de duración de una canción y la aparición de estrellas en el videojuego. Al expresar tal patrón, los estudiantes pusieron de manifiesto un estrato de pensamiento algebraico factual. Tal pensamiento se evidenció por medio de una descripción y representación del patrón (Ver **Tabla *19***) donde se consideraba un hecho particular observado en el nivel del videojuego y se omitían aquellos elementos por fuera de su campo perceptivo (nivel del videojuego). Los estudiantes manifestaron encontrar dificultades para expresar su patrón a través de "una fórmula", pues se trataba de un "patrón complejo" (ver intervención de Maryam en **Tabla *19***). Estas formas de manifestación del pensamiento algebraico refieren a un estrato factual, ya que la indeterminancia permanece implícita y se realiza un tratamiento analítico sobre elementos concretos (Radford, 2010a).

Tabla 19

Dato 1 de pensamiento algebraico factual en el carrusel algebraico

Representación	**Diálogo**
	*Euclides:* El patrón del juego está en que cada 80 escalones [cada escalón equivale a 1 segundo] hay una estrella, en cada 150 escalones está la segunda estrella y en los 220 escalones hay 3 estrellas. *Maryam:* El patrón es algo complejo porque al principio no empieza con 70 sino que después del 80 [tiempo en segundos] empieza 70, 70. Ya después de 220 se acaba el juego y ya también varía mucho la canción que uno escoja.

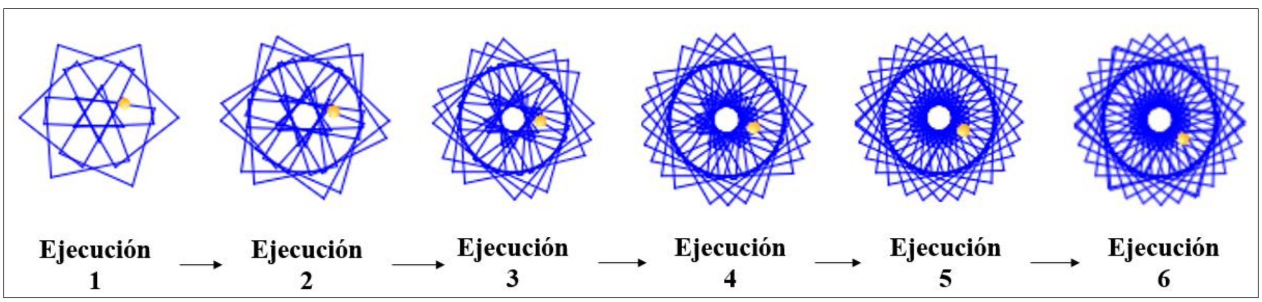
Nota. En el diálogo, la estudiante Maryam explica que en el videojuego la primera estrella aparece a los 80 primeros segundos de haber transcurrido la canción, mientras que las otras estrellas aparecen cada 70 segundos.

4.4.2 Pensamiento algebraico contextual

En el transcurso del carrusel algebraico el estrato de pensamiento algebraico contextual se evidenció en la presentación del grupo 1. Los estudiantes modificaron el código que les fue presentado en la fase Secuencias con Scratch y crearon una nueva animación (ver **Figura 23**) en la cual encontraron un patrón asociado a las puntas que se iban formando de manera progresiva en una figura al ejecutar tal animación. Los estudiantes representaron este patrón a través de un escrito (ver **Tabla 20**) en el que hacían uso de descriptores clave, tales como, “cada vez”, “la segunda vez”, “y así hasta…”. En este escrito se evidencia que la indeterminación es una característica explícita del discurso (Radford, 2010a). Se destaca que, en el grupo 1, el discurso asociado a un estrato de pensamiento algebraico contextual fue un apoyo para dotar de sentido una regla de formación asociada a un estrato de pensamiento algebraico simbólico que se explicará en las siguientes líneas.

Figura 23

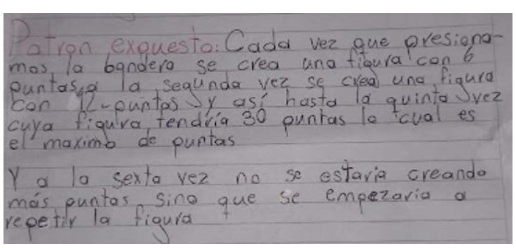
Visualización en Scratch de la animación creada por el grupo 1



Nota. Elaboración propia.

Tabla 20

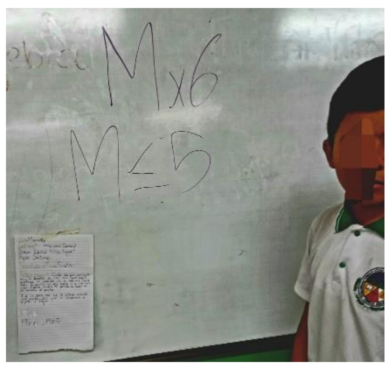
Dato 1 de pensamiento algebraico contextual en el carrusel algebraico

Dato cualitativo	Transcripción
	“Patron [Patrón] expuesto: cada vez que presionamos la bandera se crea una figura con 6 puntas, a la segunda vez se crea una figura con 12 puntas y así hasta la quinta vez cuya figura tendría 30 puntas lo cual es el maximo [máximo] de puntas. Y a la sexta vez no se estaría creando más puntas sino que se empezaría a repetir la figura.”

4.4.3 Pensamiento algebraico simbólico

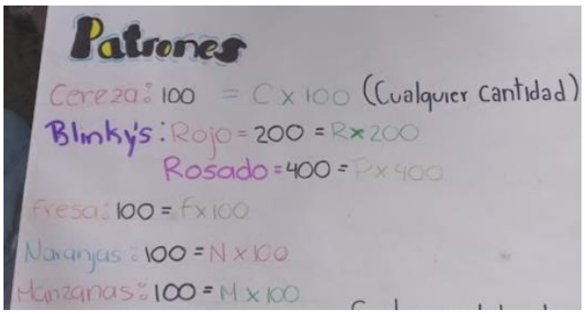
El grupo 1 construyó la siguiente regla de formación: M x 6, M $\leq$ 6 (Ver **Figura 24**) para representar aquel patrón que fue expresado por medio de un escrito (ver **Tabla 20**). Nótese que la primera parte de la regla de formación (M x 6) responde a la siguiente descripción: “cada vez que presionamos la bandera se crea una figura con 6 puntas, la segunda vez se crea una figura con 12 puntas (...)”, mientras que la segunda parte de esta regla (M $\leq$ 6), alude al reconocimiento que hacen los estudiantes de una restricción presente en este patrón, a partir de la sexta vez que se reproduce animación en Scratch, las puntas de la figura no aumentan, si no que se sobreponen de manera progresiva.

Figura 24
Dato 1 de pensamiento algebraico simbólico en el carrusel algebraico



Durante el carrusel algebraico, el grupo 2 presentó patrones encontrados en el videojuego Pacman, en este videojuego el jugador debe conducir al personaje homónimo a través de laberintos con el fin de obtener puntos y esquivar fantasmas. En algunas ocasiones, aparecen frutas en los laberintos que aumentan el puntaje del jugador. Los patrones descritos por el grupo 2 hacían referencia a relaciones encontradas entre el puntaje otorgado en el videojuego y la obtención de frutas o el número de fantasmas esquivados por el jugador en una partida. Para expresar tales patrones los estudiantes construyeron y describieron reglas de formación que permitían calcular el puntaje que puede alcanzar un jugador al obtener cualquier número de frutas y al esquivar cualquier número de fantasmas en el videojuego. Cabe destacar que, en la descripción de tales reglas, los estudiantes reconocen que al final de una partida, deben sumar los resultados que se obtengan de cada regla para determinar el puntaje total obtenido por el jugador (ver **Tabla *21***).

Tabla 21
Dato 2 de pensamiento algebraico simbólico en el carrusel algebraico

Representación	Diálogo
	*María:* Pusimos C para representar cualquier cantidad de cerezas y multiplicamos por 100 que es la cantidad de puntos que obtengo. *Verónica:* En el juego hay ciertos personajes que el muñeco Pacman tiene que capturar para que le den más puntos, se llaman Blinky´s y son un montón de fantasmas, pero escogimos nada más dos. Eh... escogimos el rojo y el rosado. Como acaba de decir María, escogimos letras para representar cualquier número [...]. *María:* Pasa lo mismo con las demás frutas, ¿qué pasa?, para cada una de estas escogimos una letra que representa cualquier cantidad si no nos dan una cantidad exacta de cuántas fresas, cuántas naranjas... *Vivienne:* Por ejemplo, las fresas equivalen a 100 puntos, ehh, nosotras lo que hicimos fue poner una letra que significa cualquier cantidad de fresas y eso lo multiplicamos por 100. *María:* Para saber el puntaje [puntaje total que obtendría un jugador en una partida] sumamos cuantas fresas tomamos, cuantos Blinky´s capturamos y ya...

Las presentaciones de los grupos 1 y 2 dan cuenta de un tratamiento sobre cantidades indeterminadas, aspecto inherente al estrato de pensamiento algebraico simbólico. En las reglas de formación presentadas por ambos grupos se evidencia la capacidad de los estudiantes para designar de manera simbólica relaciones que se establecen entre elementos, como el número de veces que se ejecuta una animación en Scratch o la obtención de puntaje en un videojuego. Es así como, la generalidad expresada mediante términos descriptivos clave, se distingue ahora mediante el efecto de signos. Esto constituye precisamente la fuerza del álgebra escolar, el desprendimiento del contexto para significar las cosas de manera abstracta (Radford 2010a).

Hasta ahora se ha descrito cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por videojuegos, calculadora clásica y Scratch. En el próximo capítulo se responde a la pregunta: *¿Cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología?* En adición, se brindan los aportes de la investigación y se plantean posibles preguntas y recomendaciones para futuras investigaciones.

5 Conclusiones y recomendaciones

En el presente apartado se responde a la pregunta de investigación, es decir, se describe cómo es el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología, así pues, se evidencia la consecución del objetivo principal de este estudio. Asimismo, se resaltan los aportes que brinda esta investigación. Por último, se indican posibles preguntas y recomendaciones para futuras investigaciones.

5.1 Respuesta a la pregunta de investigación

En el capítulo anterior, *4 Análisis y resultados*, se analizó el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas. Para ello, en consonancia con el primer objetivo específico, se identificaron aspectos del pensamiento algebraico en las respuestas de los estudiantes a las tareas de las guías. Estos aspectos hacían referencia a la caracterización (sentido de la indeterminancia, analiticidad y designación simbólica) y estratificación (factual, contextual y simbólico) del pensamiento algebraico propuesta por Radford. Luego, tomando en consideración el segundo objetivo específico, se describieron nuevas formas en las que este pensamiento se pone de manifiesto en los estudiantes al realizar tareas mediadas por tecnología (Borba y Villareal, 2005). En consecuencia, los análisis presentados ampliaron las formas en las que el pensamiento algebraico se pone de manifiesto en los estudiantes, en particular, cuando la tecnología es el medio semiótico seleccionado para objetivar tal pensamiento. La ruta anterior, permitió dar respuesta a la pregunta de investigación, la cual se presenta en las próximas líneas.

El pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología es factual, contextual y simbólico. Cuando es factual, se evidencia en elaboraciones de los estudiantes que involucran dibujos, representaciones con material concreto, continuación de secuencias y algoritmos. En estas elaboraciones, la indeterminancia permanece implícita, es decir, no es enunciada por los estudiantes, sin embargo, se expresa en acciones concretas que resultan de la interacción de los estudiantes con la tecnología. Esta interacción puede tener lugar de diversas maneras, como el juego con un videojuego, la realización de operaciones en una calculadora clásica y la observación de sus efectos al presionar la tecla igual, o la revisión iterativa de una animación de Scratch en busca de hechos particulares. Cuando es contextual, implica el análisis por parte de los estudiantes de aquello indeterminado que se observa con la tecnología, con el propósito de generalizarlo y enunciarlo por medio de diálogos o escritos que involucran términos descriptivos clave. Cuando es simbólico, los estudiantes encuentran en los símbolos alfanuméricos un medio para expresar indeterminancias y análisis derivados de su interacción con la tecnología. Por consiguiente, dan cuenta del desprendimiento de aquello que se puede percibir con un videojuego, una calculadora clásica o una animación de Scratch, para significar indeterminancias de manera abstracta.

Cabe resaltar que, el pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología también puede presentarse como una amalgama entre dos estratos de pensamiento. En particular, en la investigación se encontró una amalgama entre el estrato de pensamiento algebraico contextual y simbólico, esta se evidenció cuando los estudiantes recurrían a un contexto para significar reglas de formación. Esto evidencia que, el pensamiento algebraico en los estudiantes no se presenta de manera jerárquica. Además, se resalta que el tránsito por uno u otro estrato de pensamiento algebraico se relaciona con las tareas que se les sean propuestas a los estudiantes. Así pues, las tareas que indagan por hechos que se pueden percibir con la tecnología y ser representados con dibujos, material concreto y continuaciones de secuencias favorecen la manifestación del estrato de pensamiento algebraico factual. Mientras que, las tareas que pretenden generalizar los hechos percibidos con la tecnología pueden favorecer la manifestación tanto del estrato de pensamiento algebraico contextual como del simbólico. Es preciso advertir que, las tareas no siempre influyen de manera directa en el estrato de pensamiento algebraico que se manifiesta; la particularidad con la que cada estudiante resuelva la tarea también juega un papel importante.

5.2 Aportes de la investigación

La presente investigación expone una posibilidad de tratar la enseñanza del álgebra escolar de manera diferente, sus aportes se configuran en: (1) el diseño de tareas que vinculan el álgebra con aspectos de la realidad de los estudiantes y (2) el reconocimiento de otras formas en las que se pone de manifiesto el pensamiento algebraico, sin reducir tal manifestación al uso de símbolos alfanuméricos. De manera específica, la investigación brinda guías para profesores y estudiantes con tareas mediadas por tecnología que pueden ser utilizadas para promover pensamiento algebraico con estudiantes de grado séptimo, o incluso, con grados inferiores. Cabe destacar que, la implementación de tales guías y su modificación, según sea el contexto, sugiere la disposición de profesores y estudiantes para transformar la forma en la que se enseña y aprende álgebra escolar, y las relaciones que establecen con la tecnología, de manera que esta no sea domesticada, sino que se convierta en un medio constitutivo del conocimiento.

En la investigación se reconoce la multiplicidad de medios semióticos que pueden ser utilizados para objetivar pensamiento algebraico, en particular, se hace énfasis en la tecnología como medio semiótico. Por tal motivo, se vincula la teoría de humanos-con-medios con la teoría seleccionada de pensamiento algebraico. La conversación establecida entre ambas teorías constituye un aporte de la investigación en la medida en que: (1) amplía el entendimiento que se tiene de medios semióticos al indicar que estos deben transformar la manera en la que se aprende y enseña álgebra escolar, y (2) sugiere que en futuras investigaciones se indague por los medios semióticos que sean seleccionados para mediar tareas que promuevan pensamiento algebraico, esto, a partir de una revisión de teorías que problematicen tales medios. Como se evidenció en la presente investigación, estas teorías no deben ser necesariamente sobre pensamiento algebraico. No obstante, la teoría seleccionada tendrá que ponerse en conversación con la teoría que se tenga sobre el pensamiento algebraico.

En lo que refiere a la formación docente, tanto las prácticas pedagógicas como el trabajo investigativo, configuraron experiencias en un escenario educativo que permitieron a las practicantes identificar algunas realidades en las que están inmersos los estudiantes, para así, proponer alternativas en la enseñanza del álgebra escolar. Tales alternativas invitan a la comunidad educativa a explorar otras maneras de enseñar y aprender matemáticas, en ese sentido, constituyen un punto de partida para la transformación de su realidad educativa pues, para los sujetos involucrados, implica un reto dar continuidad a este tipo de propuestas.

5.3 Posibles preguntas y recomendaciones para futuras investigaciones

En el transcurso de la investigación, en particular, durante el carrusel algebraico realizado en el trabajo de campo, se evidenció que la mayoría de los grupos de trabajo seleccionaron videojuegos para encontrar patrones y generalizarlos. En este orden de ideas, se favoreció la disposición de los estudiantes hacia el aprendizaje del álgebra escolar cuando esta se relacionaba con una tecnología cercana a su cotidianidad, en contraste con la calculadora clásica y Scratch. En este sentido, se sugiere que las tecnologías que se vinculen al aula de clase de matemáticas para promover pensamiento algebraico, puedan ser propuestas por los mismos estudiantes a partir de sus intereses. Ahora bien, en atención a aquellos patrones señalados por los estudiantes durante el trabajo de campo, que diferían a los que se trabajaron en las guías, se propone que las tareas que se traten en el aula de clase posibiliten a los estudiantes analizar otros patrones, diferentes a aquellos predefinidos por parte de los profesores.

Un aspecto por mejorar que se encontró durante el trabajo de campo fue la limitación de tiempo para retroalimentar las reglas de formación propuestas por los estudiantes. De esa manera, se sugiere que en próximas investigaciones se reduzca el número de tareas y se amplíe el tiempo para indagar con los estudiantes la validación que realizan de tales reglas, para que se puedan enriquecer los análisis investigativos. De igual manera, se propone que futuras investigaciones sobre promoción de pensamiento algebraico a través de tareas mediadas por tecnología, consideren tareas que involucren formas de promover pensamiento algebraico diferentes a la generalización de patrones.

Sobre la generalización de patrones, se destaca el rol que juega la tecnología en la transformación y cambio de naturaleza con la que estos patrones pueden ser presentados. En las tareas propuestas durante el trabajo de campo, tales patrones son generalizados por los estudiantes a través de su interacción con la tecnología, en lugar de ser presentados de manera “estática” y descontextualizada. Es oportuno entonces, preguntarse: ¿cómo otras tecnologías podrían transformar las tareas con las cuales se promueve pensamiento algebraico?

Referencias

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2002). Promoción del pensamiento algebraico en la escuela primaria: una propuesta que cobra sentido de acuerdo con nuestras concepciones sobre el conocimiento matemático. *Aula Urbana*, *37*, 18-19. https://www.researchgate.net/publication/279199591_Promocion_del_Pensamiento_Algebraico_en_la_Escuela_PrimariaUna_Propuesta_que_Cobra_Sentido_de_Acuerdo_con_Nuestras_Concepciones_sobre_el_Conocimiento_Matematico_p_18

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2012). Effects of Feedback in an Online Algebra Intervention. *Tech Know Learn, 17*, 43–59. https://doi.org/10.1007/s10758-012-9191-8

Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. Springer. https://link.springer.com/book/10.1007/b105001

Butto, C. (26-30 de junio de 2011). Introducción temprana al pensamiento algebraico con el uso de tecnologías digitales: un estudio teórico-experimental en el nivel básico [conferencia]. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Recife, Brasil. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2358/882

Cortés, J., Hitt, F. y Saboya, M. (2016). Pensamiento Aritmético-Algebraico a través de un Espacio de Trabajo Matemático en un Ambiente de Papel, Lápiz y Tecnología en la Escuela Secundaria. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(54), 240-264. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a12

Drijvers, P., & Barzel, B. (2012). Equations with Technology: Different Tools, Different Views. *Mathematics Teaching*, *228*, 14-19. https://eric.ed.gov/?id=EJ988418

Ferrara, F., Pratt D., & Robutti, O. (2006). The Role and Uses of Technologies for the Teaching of Algebra and Calculus: Ideas Discussed at PME over the Last 30 Years. In A. Gutiérrez y P. Boero. (Ed.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 237-2466). Sense Publisher. https://doi.org/10.1163/9789087901127_010

Goulding, M., & Kyriacou, C. (2008). A systematic review of the use of ICTs in developing pupils' understanding of algebraic ideas. Report. In: *Research Evidence in Education Library*. London: EPPI-Centre, Social Science Research Unit, Institute of Education, University of London. https://eppi.ioe.ac.uk/cms/Portals/0/PDF%20reviews%20and%20summaries/ICT3%20Report.pdf?ver=2008-05-28-120841-663

Graham, A., & Thomas, M. (2000). Building a Versatile Understanding of Algebraic Variables with a Graphic Calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*(3), 265–282. http://www.jstor.org/stable/3483123

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación (6.a ed.)*. McGraw Hill Education.

Hewitt, D. (2012). Young students learning formal algebraic notation and solving linear equations: are commonly experienced difficulties avoidable? *Educ Stud* Math, *81*, 139–159. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9394-x

Hitt, F., Saboya, M., Cortés, C., & GRUTEAM. (2016). Rupture or continuity: The arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educ Stud Math*, *94*, 97–116. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9717-4

Hodgen, J., Oldenburg, R., & Strømskag, H. (2018). Algebraic thinking. In T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger, & K. Ruthven. (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp.32–45). Routledge. http://hdl.handle.net/11250/2497060

Institución Educativa Diego Echavarría Misas. (2023). *Manual de convivencia escolar*. https://www.iediegoechavarriamisasmedellin.edu.co/#

Jupri, A., Drijvers, P., & van den Heuvel-Panhuizen, M. (2015). Improving Grade 7 Students' Achievement in Initial Algebra Through a Technology-Based Intervention. *Digit Exp Math Educ*, *1*, 28–58 https://doi.org/10.1007/s40751-015-0004-2

Kaput, J. (2000a). *Teaching and Learning a New Algebra with Understanding.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. https://eric.ed.gov/?id=ED441662

Kaput, J. (2000b*). Transforming Algebra from an Engine of Inequity to an Engine of Mathematical Power by "Algebrafying" the K-12 Curriculum*. National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA. https://eric.ed.gov/?id=ED441664

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it. *The Mathematics Educator*, *8*(1), 139-151. https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it

Kieran, C. (2018). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In C. Kieran. (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year-Olds. ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_4

Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006). *Estándares Básicos de Matemáticas*. Bogotá, Colombia. https://www.mineducacion.gov.co/1621/article-116042.html

Mok, I., Johnson, D., Cheung, J., & Lee, A. (2000). Introducing technology in algebra in Hong Kong: addressing issues in learning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(4), 553-567. https://doi.org/10.1080/002073900412660

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, *3*(3), 135-156. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2887578

Mustaffa, N., Ismail, Z., Said, M. & Tasir, Z. (2017). A Review on the Development of Algebraic Thinking Through Technology. *Advanced Science Letters*, *23*(4), 151-155. https://doi.org/10.1166/asl.2017.7615

Neurath, R., & Stephens, L. (2006). The effect of using Microsoft Excel in a high school algebra class. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(6), 721-726. https://doi.org/10.1080/00207390600989251

Radford, L. (2000). Signs and Meanings in Students' Emergent Algebraic Thinking: A Semiotic Analysis. *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237–268. http://www.jstor.org/stable/3483043

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter* (pp. 2-21). Universidad Pedagógica Nacional. https://www.luisradford.ca/pub/60_pmena06.pdf

Radford, L. (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2010b). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, *4*(2), 37-62. https://www.luisradford.ca/pub/23_PNA2010Layersgenerality.pdf

Radford, L. (2014). The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257–277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Rodríguez, G., Gil, J. y García, E. (1996). *Metodología de investigación cualitativa*. España: Aljibe.

Rojas, P. y Vergel, R. (2013). Procesos de Generalización y Pensamiento Algebraico. *Revista Científica*, *17*(2), 688–694. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Sibgatullin, I., Korzhuev, A., Khairullina, E., Sadykova, A., Baturina, R., & Chauzova, V. (2022). A Systematic Review on Algebraic Thinking in Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(1), 1-15. https://doi.org/10.29333/ejmste/11486

Töman, U., & Gökburun, Ö. (2022). What Was and Is Algebraic Thinking Skills at Different Education Levels? *World Journal of Education*, *12*(4), 8-20. https://doi.org/10.5430/wje.v12n4p8

Vergel, R. (2015). Generalización de patrones y formas de pensamiento algebraico temprano. *PNA*, *9*(3), 193-215. https://doi.org/10.30827/pna.v9i3.6220

Vergel, R. y Rojas, P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

https://die.udistrital.edu.co/publicaciones/algebra_escolar_pensamiento_algebraico_aportes_para_trabajo_aula

Vergel, R., Radford, L. y Rojas, P. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *36*(74), 1174-1192. https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11

Villarreal, M. (2013). Humanos-con-medios: un marco para comprender la producción matemática y repensar prácticas educativas. En E. Miranda y N. Paciulli. (Coords.), *Formación de profesores, Currıculum, Sujetos y Prácticas Educativas. La perspectiva de la investigación en Argentina y Brasil* (pp. 85-122). Universidad Nacional de Córdoba. https://www.researchgate.net/publication/263654532_Humanos-con-medios-_un_marco_para_comprender_la_produccion_matematica_y_repensar_practicas_educativas

Zaldívar, J y Alonso, I. (2017). Formas de pensamiento algebraico asociadas a situaciones funcionales con estudiantes de nivel secundaria. En L. Serna. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 236-244). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/12145/

Zeller, M., & Barzel, B. (2010). Influences of CAS and GC in early algebra. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 775-788. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0287-0

Anexos

En este apartado se incluye material que apoya la documentación investigativa, a saber: las guías construidas para el trabajo de campo y el formato de consentimiento informado.

Anexo 1.

Fase	Secuencias con videojuegos	Guía para investigadoras
Sesión	1, 2	

El objetivo de la fase "Secuencias con videojuegos" es proponer a los estudiantes una serie de tareas derivadas de un recorrido histórico, por décadas, de videojuegos populares entre los años 1980 y 2010.

En el contexto de la década de 1980 a 1990, se propone una aproximación a "Circus Charlie", videojuego publicado en el año 1984. En Circus Charlie, el jugador asume el papel del personaje homónimo y debe guiarlo a través de seis eventos típicos de un circo. El primer evento consiste en montar un león y realizar saltos precisos a través de aros de fuego. A lo largo del primer nivel del videojuego se observan patrones recurrentes, entre ellos, la aparición de un aro de fuego acompañado de una bolsa de dinero cada vez que el jugador supera exitosamente cinco aros de fuego.

De manera previa a la realización de esta guía, se sugiere solicitar a los estudiantes que se familiaricen con el videojuego Circus Charlie. Tal videojuego está disponible para su descarga en la tienda de aplicaciones Play Store o mediante el siguiente enlace: https://www.1001juegos.com/juego/circus-charlie

Momento	Acciones
Exploración	Iniciar la clase discutiendo con los estudiantes acerca del videojuego Circus Charlie. De ser necesario, proyectar el videojuego en el televisor del aula y permitir que algunos estudiantes lo jueguen, en especial, aquellos que no se hayan familiarizado previamente con este. Fomentar la discusión en torno al videojuego a través de las preguntas: • ¿Qué opinan sobre el videojuego? • ¿Cuál es el objetivo del primer nivel del videojuego? • ¿Qué estrategias emplearon para superar el primer nivel del videojuego? • ¿Cuáles son los objetos principales del primer nivel del videojuego? Con esta última pregunta, se pretende orientar la atención de los estudiantes hacia determinaciones sensibles presentes en el videojuego Circus Charlie, como el patrón que rige la aparición de las bolsas de dinero en los aros de fuego.
Práctica	Solicitar a los estudiantes que realicen la guía destinada para ellos. Hacer las precisiones que se requieran sobre las tareas presentes en la guía y volver a proyectar el videojuego en la medida en que esta acción se considere necesaria.
Cierre	Fomentar una discusión grupal entorno a las respuestas proporcionadas por cada grupo de estudiantes a las tareas presentadas en la guía. Dirigir la discusión hacia los patrones identificables en el videojuego Circus Charlie y hacia las formas en las que estos hayan sido puestos de manifiesto por parte de los estudiantes.

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 2.

Secuencias con videojuegos
Guía para estudiantes
Nombres: ____

1. Reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase y recreen los aros que debe atravesar Circus Charlie en el videojuego. Sigan las orientaciones de las tarjetas que les ofrecerán las profesoras.

2. Comunicar con el resto del salón de clase la recreación que hicieron de los aros que debe atravesar Circus Charlie en el videojuego. Luego, respondan la siguiente pregunta: ¿qué similitudes y diferencias encuentran entre las representaciones que hicieron sus compañeros y la representación de su grupo?

3. Continúen dibujando los aros del videojuego hasta llegar al aro número 24.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

4. ¿Creen que el aro número 78 tendrá una bolsa de dinero?, ¿por qué?

5. Escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, que explique alguna forma de comprobar si un aro tendrá una bolsa de dinero o no.

6. ¿En cuál número de aro estará la séptima bolsa de dinero que se encuentren?, ¿por qué?

7. Escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, que explique cómo se relaciona el número de cada bolsa de dinero con el número del aro en el que se encuentra esta bolsa.

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 3.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Secuencias con videojuegos</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase “Secuencias con videojuegos” es proponer a los estudiantes una serie de tareas derivadas de un recorrido histórico, por décadas, de videojuegos populares entre los años 1980 y 2010.

En el contexto de la década de 1990 a 2000, se propone una aproximación a “Super Mario World”, videojuego publicado en el año 1991. En Super Mario World, el jugador asume el papel de Mario y guía al personaje a través de diversos “mundos”. El primer mundo contempla la aparición de personajes que irrumpen el camino de Mario; así como la aparición de monedas que debe recolectar Mario. A lo largo del videojuego se observan patrones recurrentes con relación a las puntuaciones que se le otorgan al jugador: (1) cuando el jugador supera la aparición de un personaje que irrumpe el camino de Mario, obtiene 200 puntos, (2) cuando el jugador recolecta monedas pequeñas, obtiene 10 puntos, (3) al recolectar monedas grandes, la puntuación del jugador comienza a variar de la siguiente forma: la primera moneda que recolecta le otorga 1000 puntos, la segunda moneda 2000 puntos, la tercera 3000 puntos y así sucesivamente.

De manera previa a la realización de esta guía, se sugiere solicitar a los estudiantes que se familiaricen con el videojuego Super Mario World, el cual está disponible en el siguiente enlace: https://www.minijuegos.com/juego/super-mario-world-online</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">Iniciar la clase discutiendo con los estudiantes acerca del videojuego Super Mario World. Proyectar el videojuego en el televisor del aula y permitir que algunos estudiantes jueguen el primer mundo del videojuego, en especial, aquellos estudiantes que no se hayan familiarizado previamente con este.

Fomentar la discusión en torno al videojuego a través de las siguientes preguntas: ¿qué opinan sobre el videojuego? y ¿cuáles son los personajes y objetos principales que aparecen en el primer mundo del videojuego?

Con esta última pregunta, se pretende orientar la atención de los estudiantes hacia determinaciones sensibles presentes en el videojuego, como las puntuaciones que se le otorgan al jugador al superar la aparición de un personaje que irrumpe el camino de Mario o al recolectar alguna moneda.</td></tr>
<tr><td>Práctica</td><td colspan="2">Solicitar a los estudiantes que realicen la guía destinada para ellos. Hacer las precisiones que se requieran sobre las tareas presentes en la guía y volver a proyectar el videojuego en la medida en que esta acción se considere necesaria.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td colspan="2">Fomentar una discusión grupal entorno a las respuestas proporcionadas por cada grupo de estudiantes a las tareas presentadas en la guía. Dirigir la discusión hacia los patrones identificables en el videojuego Super Mario World y hacia las formas en las que estos hayan sido puestos de manifiesto por parte de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 4.

Secuencias con videojuegos
Guía para estudiantes
Nombres: ____

1. Reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase. Las profesoras les entregaran unas tarjetas con información sobre un personaje u objeto del videojuego Super Mario World. Describan cómo este personaje u objeto está relacionado con el puntaje que Mario gana al superarlo o recolectarlo en el videojuego.

____
____
____

2. Socialicen con el resto del salón de clase la descripción que realizaron de su personaje u objeto. Luego, respondan las siguientes preguntas: ¿Qué relación existe entre los personajes que aparecen en Super Mario World y el puntaje que obtiene Mario al superarlos? y ¿Qué relación existe entre las monedas que obtiene Mario al recolectarlas y el puntaje?

____
____
____

3. ¿Cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super Mario World a partir de cualquier número de personajes que superen?

4. ¿Cómo podrían calcular el puntaje que obtendrían en una partida de Super Mario World a partir de cualquier cantidad de monedas que recolecten?

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 5.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Secuencias con videojuegos</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase “Secuencias con videojuegos” es proponer a los estudiantes una serie de tareas derivadas de un recorrido histórico, por décadas, de videojuegos populares entre los años 1980 y 2010.

En el contexto de la década de 2000 a 2010, se propone una aproximación a “Plants vs Zombies” (en español, plantas contra zombis), videojuego publicado en el año 2009. En Plants vs Zombies, el jugador debe defender su hogar de un grupo de zombies utilizando plantas con habilidades especiales, estas plantas son adquiridas a través de soles que recolecta el jugador durante cada nivel del videojuego. En particular, en el nivel dos del videojuego, puede observarse un patrón relacionado con el intervalo de tiempo que tarda en aparecer cada sol proveniente de un girasol.

De manera previa a la realización de esta guía, se sugiere solicitar a los estudiantes que se familiaricen con el videojuego Plants vs zombies. Este videojuego está disponible para su descarga en la tienda de aplicaciones Play Store o mediante el siguiente enlace: https://www.minijuegos.com/juego/plants-vs-zombies</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">Iniciar la clase discutiendo con los estudiantes acerca del videojuego Plants vs Zombies. Proyectar el videojuego en el televisor del aula y permitir que algunos estudiantes lo jueguen, en especial, aquellos que no se hayan familiarizado previamente con este. Dedicar tiempo a la familiarización de los estudiantes con el nivel dos del videojuego.

Fomentar la discusión en torno al videojuego a través de las siguientes preguntas:

• ¿Qué opinan sobre el videojuego?
• ¿Qué rol cumplen los girasoles en Plants vs Zombies?,
• ¿Cada cuánto tiempo producen soles los girasoles?

Con las últimas preguntas, se pretende orientar la atención de los estudiantes hacia determinaciones sensibles relacionadas con el patrón que puede configurarse a partir de la relación entre la cantidad de soles producidos por los girasoles y el tiempo (en segundos) en los que estos tardan en aparecer.</td></tr>
<tr><td>Práctica</td><td colspan="2">Solicitar a los estudiantes que realicen la guía destinada para ellos. Hacer las precisiones que se requieran sobre las tareas presentes en la guía y volver a proyectar el videojuego en la medida en que esta acción se considere necesaria.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td colspan="2">Fomentar una discusión grupal entorno a las respuestas proporcionadas por cada grupo de estudiantes a las tareas presentadas en la guía. Dirigir la discusión hacia los patrones identificables en el videojuego Plants vs Zombies y hacia las formas en las que estos hayan sido puestos de manifiesto por parte de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 6.

Secuencias con videojuegos
Guía para estudiantes
Nombres: ____

1. Reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase. Avancen hasta el segundo nivel del videojuego Plants vs Zombies y planten un girasol. Una vez obtengan el primer sol de este girasol, continúen la siguiente secuencia que relaciona la cantidad de soles producidos por el girasol y el tiempo (en segundos) en los que estos aparecen.

Soles						
Tiempo	0	24	48	72	96	120

2. ¿Cuántos soles habrá producido el girasol a los 240 segundos de haber salido el primer sol?

3. Teniendo en cuenta la secuencia completada en el primer punto, ¿Para qué tiempo tendrás que dibujar 13 soles?

4. Escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, en donde les expliquen cómo calcular la cantidad de soles que habrá producido el girasol en cualquier tiempo.

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 7.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Secuencias con calculadora</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>5, 6</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase "Secuencias con calculadora" es proponer a los estudiantes una serie de tareas vinculadas al efecto del signo igual en la calculadora "clásica". Para tal fin, se propone la adaptación de algunas tareas propuestas por el Ministerio de Educación de Colombia en los Derechos Básicos de Aprendizaje.

De manera previa a la realización de esta guía, se sugiere solicitar a cada estudiante que lleve a la clase de matemáticas una calculadora "clásica" (también conocida como calculadora "simple" o calculadora "cuenta huevos").</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">Iniciar la clase discutiendo con los estudiantes acerca del uso que le conceden a la calculadora en su vida cotidiana.

Fomentar la discusión mediante preguntas como:

• ¿Es usual que utilicen la calculadora en sus clases de matemáticas?
• ¿Para qué fines usan la calculadora (calcular operaciones, verificar resultados…)?
• ¿Consideran que la calculadora puede tener otros fines además de los mencionados?

Con la última pregunta, se pretende orientar la discusión hacia el propósito de esta guía, que se enfoca en explorar otros usos de la calculadora vinculados a la generalización de patrones.</td></tr>
<tr><td>Práctica</td><td colspan="2">Solicitar a los estudiantes que realicen la guía destinada para ellos. Estar atentas a las inquietudes y dificultades que se puedan presentar para hacer las precisiones necesarias.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td colspan="2">Fomentar una discusión grupal entorno a las respuestas proporcionadas por cada grupo de estudiantes a las tareas presentadas en la guía. Dirigir la discusión hacia el patrón que se haya identificado en la guía y las formas en las que este haya sido puesto de manifiesto por parte de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 8.

Secuencias con videojuegos
Guía para estudiantes
Nombres: ____

1. Reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase. Ingresen a su calculadora la operación 8 + 0.25, presionen la tecla igual (=) para visualizar el resultado de la operación. Sigan presionando la tecla = y con base a los resultados que vayan obteniendo, completen la siguiente tabla:

Veces que se presiona la tecla =	Sumando 1	Sumando 2	Resultado
1	8	0.25	
2			
3			
4			
5			

2. Respondan: ¿qué resultados obtendrán si presionan 10 veces y 20 veces la tecla =?, ¿qué observan entre uno y otro resultado? y ¿cómo podrían llegar a esos resultados sin hacer uso de la calculadora?

3. Respondan: ¿qué resultados obtendrán si presionan n veces la tecla =?

4. Escriban un mensaje para otro grupo de compañeros de clase, que explique cómo llegaron al resultado del punto 3.

Volver a **Tabla 2.**

Anexo 9.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Secuencias con Scratch</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>7, 8, 9, 10</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase “Secuencias con Scratch” es proponer una serie de tareas relacionadas con la ejecución de códigos para la creación de un mandala geométrico en Scratch. Para tal fin, se destinan dos sesiones: la primera (exploración), está orientada a la familiarización de los estudiantes con la lógica de la programación y el uso de Scratch; la segunda (práctica y cierre), con la creación de un mandala geométrico en Scratch mediante el cual se pueden generalizar patrones.

Cabe resaltar que, Scratch (https://scratch.mit.edu/) es un lenguaje de programación interactivo y con un enfoque educativo, desarrollado por el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). Este lenguaje proporciona una interfaz amigable que facilita la comprensión de algoritmos, en este caso, asociados a la creación de un mandala geométrico.</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">1. Iniciar la clase indagando por las experiencias de los estudiantes con la programación. Realizar tal indagación a través de preguntas como:

• ¿Han empleado el computador en clases de matemáticas?
• ¿Han empleado algún programa digital durante sus clases de matemáticas?, de ser así, ¿qué actividades realizaron en estos programas?
• ¿Qué entiendes por “programar”?

A partir de las respuestas de los estudiantes, se espera construir nociones acerca de lo que se puede entender por programación. Como referencia, se tendrá en cuenta que Max Wainewright, autor de obras relacionadas con la programación informática para niños, plantea que:

Programar significa escribir una serie de palabras o “código” que le diga al ordenador qué debe hacer. Las palabras deben escribirse en un lenguaje especial que el ordenador entienda. (…) Todos los ordenadores necesitan un programa que les diga qué hacer. Portátiles, tabletas, teléfonos y ordenadores de sobremesa, todos necesitan programas para ser útiles.

Tomado de: Wainewright, M. (2015). Aprende a programar: Guía visual de programación (Raquel Solá, Trad.). QED Publishing.

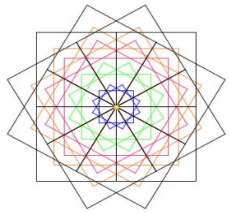
2. Solicitar a los estudiantes que realicen dos tareas para que se familiaricen con la lógica de la programación. Cabe resaltar que, tales tareas no son de carácter algebraico, si no que sirven como preámbulo para tratar la guía para estudiantes.

Tarea 1: “Simón dice”</td></tr>
</table>

	Solicitar a los estudiantes que se levanten de sus asientos. Proponerles jugar "Simón dice" y darles las siguientes instrucciones: • Simón dice trasladarse dos baldosas adelante • Simón dice trasladarse una baldosa hacia atrás • Simón dice rotar 90° a la derecha • Simón dice regresar al punto inicial • Simón dice rotar 180° a la izquierda • Simón dice rotar 270° a la derecha Tarea 2: "Programemos una figura geométrica" Proponer a los estudiantes que se reúnan en grupos de 4 integrantes y que construyan una figura geométrica en el plano cartesiano (con mínimo dos coordenadas que tengan números decimales). Luego, solicitarles que generen una lista de instrucciones de cómo construir la figura creada, para que otro grupo pueda generarla de nuevo a partir de tales instrucciones. Nota. Enfatizar a los estudiantes que sus instrucciones deben ser precisas y claras, tal y como las que se le dan a una computadora al programar. 3. Dialogar con los estudiantes sobre las ideas que lograron construir acerca de la programación. Después, proyectar en el televisor del aula la página web de Scratch, dar al grupo un recorrido por la plataforma y exponer algunas de sus funciones (como la programación de códigos a través de instrucciones que, en este caso, se digitan en un computador). Por último, entregar a cada estudiante una tarjeta con el enlace para ingresar a Scratch, su usuario y contraseña, con el propósito de que cada estudiante pueda explorar la página de manera previa.
Práctica	Retomar con los estudiantes las tareas realizadas en el momento anterior (exploración). En adición, indagar acerca de la exploración de Scratch realizada por ellos. Puntualizar en los aspectos de Scratch que se consideren necesarios antes de proponer a los estudiantes la realización de la guía (por ejemplo, el rol del sprite, bloque y código dentro de esta plataforma). Solicitar a los estudiantes que realicen la guía destinada para ellos. Estar atentas a las inquietudes y dificultades que se puedan presentar. Recomendaciones sobre la guía para estudiantes: • En el punto 1, invitar a los estudiantes a que describan con sus palabras el código presentado.

<table>
<tr><td></td><td>

- En el punto 3, enfatizar en que las características que se solicitan completar en la tabla (cuadrados, puntas, lados de los polígonos "centrales"), se van estableciendo, en cada fila, a partir de un conteo acumulativo de estos aspectos en cada figura que se forma en Scratch.



Por ejemplo, para la fila 2 (sprite 1 y 2) sumar los cuadrados que forma la figura de color azul y la figura de color verde.

Con estas tareas, se espera que los estudiantes puedan llegar a generalizaciones como las siguientes (ya sea a través de símbolos alfanuméricos o palabras clave, gestos u otro medio semiótico):

<table>
<tr><th>Sprite</th><th>Cuadrados</th><th>Puntas</th><th>Lados de los polígonos "centrales"</th></tr>
<tr><td>1</td><td>3</td><td>12</td><td>24</td></tr>
<tr><td>1, 2</td><td>6</td><td>24</td><td>48</td></tr>
<tr><td>1, 2, 3</td><td>9</td><td>36</td><td>72</td></tr>
<tr><td>1, 2, 3, 4</td><td>12</td><td>48</td><td>96</td></tr>
<tr><td>1, 2, 3, 4, 5</td><td>15</td><td>60</td><td>120</td></tr>
<tr><td>1, 2, 3, …, n</td><td>3n</td><td>4 (3n)</td><td>2(4(3n))</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td>Fomentar una discusión grupal entorno a las respuestas proporcionadas por cada grupo de estudiantes a las tareas presentadas en la guía. Dirigir la discusión hacia el patrón que se haya identificado en la guía y las formas en las que este haya sido puesto de manifiesto por parte de los estudiantes.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

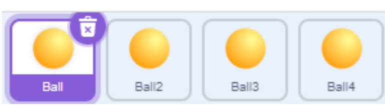
Anexo 10.

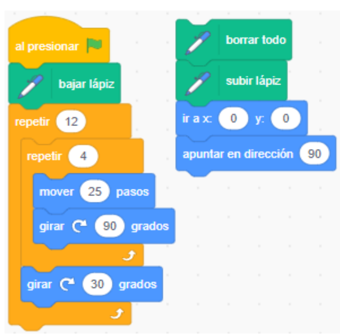
Secuencias con Scratch
Guía para estudiantes
Nombres: ____

1. Reúnete con tres (3) compañeros o compañeras de clase, y sigan las orientaciones que aparecen a continuación:

- Diríjanse a Google, busquen "Scratch" e ingresen a la primera opción que les aparece.
- Inicien sesión en Scratch con el usuario y contraseña de alguno de los integrantes del grupo.
- Diríjanse a la esquina superior derecha de la página web y seleccionen "Mis proyectos"
- Ingresen al proyecto titulado "Mandala geométrico".
- Una vez ingresen al proyecto "Mandala geométrico", observarán lo siguiente:

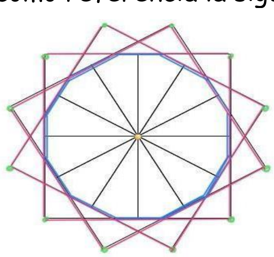
5 sprites (objetos programables en Scratch) y una programación para cada sprite similar a la que se muestra a continuación.





2. Respondan la siguiente pregunta: ¿en qué aspecto se diferencian el código de cada uno de los sprites?

3. Ejecuten progresivamente los códigos vinculados a cada sprite. Luego, completen la tabla, teniendo como referencia la siguiente información:



- Puntas
- Cuadrados
- Polígono central

Sprite	Cuadrados	Puntas	Lados de los polígonos “centrales”
1			
1, 2			
1, 2, 3			
1, 2, 3, 4			
1, 2, 3, 4, 5			
1, 2, 3, …, n			

4. Describan detalladamente las estrategias que emplearon para completar las últimas dos filas de la tabla anterior.

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 11.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Carrusel algebraico</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>11, 12</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase “Carrusel algebraico” es proponer a los estudiantes la tarea de reconocer patrones en videojuegos o crearlos usando Scratch o la calculadora “clásica”, para luego presentar sus hallazgos mediante un carrusel algebraico. Para tal fin, se proponen cuatro sesiones de clase, las primeras dos para realizar la tarea y las otras para efectuar el carrusel algebraico como tal.</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td colspan="2">Iniciar la clase discutiendo con los estudiantes acerca de las tareas que han realizado en las fases anteriores. Orientar la discusión hacia lo que se puede entender como un patrón. Emplear preguntas orientadoras como las siguientes:

• ¿Cuál creen que ha sido la intención con cada una de las guías que han realizado?
• ¿Qué debían hacer con los videojuegos, con Scratch y con la calculadora “clásica”?
• ¿Qué tenían en común los mensajes que escribieron en las guías de cada fase?

Se sugiere ser flexibles ante todos aquellos elementos que expongan los estudiantes y que permitan configurar alguna definición de patrón que sea entendible para ellos. Después de construir con los estudiantes una noción de patrón, proponerles la tarea de reconocer un patrón en algún videojuego, o, crear un patrón con Scratch o con la calculadora “clásica”.</td></tr>
<tr><td>Práctica</td><td colspan="2">Solicitar a los estudiantes que organicen la información referente a su tarea en la guía destinada para ello. En adición, comunicar a los estudiantes que la presentación de sus trabajos se llevará a cabo mediante un carrusel. A partir de esta dinámica, tendrán la oportunidad de exponer sus trabajos en un tiempo de 5 minutos. Durante esta presentación, podrán utilizar tanto su discurso como materiales visuales (carteleras, fotografías, dibujos, etc.).

Acompañar a los estudiantes durante la elaboración de su trabajo para el carrusel algebraico, brindar orientaciones y precisiones que se consideren necesarias.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 12.

Guía para estudiantes - Carrusel algebraico	
Título del trabajo	
Integrantes	
Resumen del trabajo	
Tecnología usada para el trabajo	
¿Cómo buscaron o crearon el patrón de su trabajo?	
Explicación del patrón encontrado o creado	
¿Qué desafíos encontraron a lo largo del trabajo?	

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 13.

<table>
<tr><td>Fase</td><td>Carrusel algebraico</td><td rowspan="2">Guía para investigadoras</td></tr>
<tr><td>Sesión</td><td>13, 14</td></tr>
<tr><td colspan="3">El objetivo de la fase “Carrusel algebraico” es proponer a los estudiantes la tarea de reconocer patrones en videojuegos o crearlos usando Scratch o la calculadora “clásica”, para luego presentar sus hallazgos mediante un carrusel algebraico. Para tal fin, se proponen cuatro sesiones de clase, las primeras dos para realizar la tarea y las otras para efectuar el carrusel algebraico como tal.</td></tr>
<tr><td>Momento</td><td colspan="2">Acciones</td></tr>
<tr><td>Presentación</td><td colspan="2">Informar a los estudiantes que el carrusel algebraico se llevará a cabo en dos etapas: en la primera etapa, la mitad de los grupos realizarán sus exposiciones, mientras que la otra mitad recorrerá uno por uno los grupos expositores. En la segunda etapa, el proceso se invertirá, con los grupos que no expusieron realizando sus presentaciones y los otros rotando para observar. La selección de qué grupos comienzan en cada etapa se realizará al azar.</td></tr>
<tr><td>Práctica</td><td colspan="2">Durante todo el proceso, gestionar los tiempos de rotación de los grupos y de las exposiciones. Así mismo, revisar que las exposiciones se realicen bajo los criterios acordados.

Se sugiere utilizar este momento como una oportunidad para formular preguntas a los estudiantes y recopilar información adicional que pueda enriquecer el análisis del trabajo investigativo.</td></tr>
<tr><td>Cierre</td><td colspan="2">Conversar con los estudiantes sobre sus apreciaciones del carrusel algebraico, y en general, del trabajo realizado con ellos durante todas las fases.</td></tr>
</table>

Volver a **Tabla 2**.

Anexo 14.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Formato de consentimiento informado para estudiantes menores de edad

Participación en la investigación "Pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología"

Querido padre de familia, los estudiantes del grado 7°6 han sido invitados a participar de la investigación titulada "Pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología". Tal investigación se deriva de la práctica pedagógica realizada en la Institución Educativa Diego Echavarría Misas por las profesoras en formación Valentina Salgado Sánchez y Jhoana Torres Aguirre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. El objetivo de la investigación es: Analizar pensamiento algebraico cuando se promueve a través de tareas mediadas por tecnología con estudiantes de grado séptimo de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas. Para ello se necesita su previa autorización y la de los estudiantes al momento de usar, publicar y difundir imágenes, audios y videos derivados del proceso de práctica. Sepa que sus datos y la información brindada no serán compartidos con personas externas a la investigación. Tanto la identidad del estudiante como la suya será protegida, se usarán códigos y nombres ficticios para la sistematización, el análisis e interpretación de los datos, así como para el reporte de resultados que estarán en la investigación una vez sea evaluada y aprobada como tesis de pregrado. Si acepta participar, le agradecemos de antemano su colaboración y le solicitamos diligenciar los siguientes datos.

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN, DIFUSIÓN Y USO DE MATERIAL.

Yo ____ identificado(a) con CC. _______________ de _______________________, en calidad de acudiente responsable por el (o la) estudiante _____________________________________, identificado(a) con __________________número ____________________ de ________________, autorizo usar, publicar, difundir el material derivado del proceso de la práctica pedagógica que se realiza en el grado 7°6 en el área de matemáticas de la Institución Educativa Diego Echavarría Misas. Lo anterior se realiza con el ánimo de apoyar los procesos académicos, bajo el derecho al honor, a la intimidad, al respeto de la privacidad y a la propia imagen del estudiante mencionado(a) con anterioridad.

Nombre completo del [de la] estudiante: ____
Documento de identidad: ____
Firma: ____

Nombre completo del acudiente:____
CC.____
Parentesco con el estudiante:____
Teléfono de contacto: ____
Firma: ____

Responsables de la práctica pedagógica

Por la Institución

César Augusto Ceballos González
Rector

Mariela Betancourt Ossa
Profesora titular

Por la Universidad

Gilberto de Jesús Obando Zapata
Coordinador de Práctica, LEBM

John Henry Durango Urrego
Asesor interno de práctica

Sandra Milena Zapata

Sandra Milena Zapata
Asesor interno de práctica

Valentina Salgado S

Valentina Salgado Sánchez
Profesora en formación

Jhoana tA.

Jhoana Torres Aguirre
Profesora en formación

Volver a **3.8 Consideraciones éticas**.