UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relaciones entre argumentos que construyen los estudiantes con el pensamiento algebraico

Gabriela Galeano Castro

Angie Susana Rivera Zapata

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciadas en Matemáticas

Asesores

Sandra Milena Zapata, Doctora (PhD) en Educación

John Henry Durango Urrego, Doctor (PhD) en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2024

Cita	(Galeano-Castro y Rivera-Zapata, 2024)
Referencia **Estilo APA 7 (2020)**	Galeano-Castro, G., & Rivera-Zapata, S. (2024). *Relaciones entre argumentos que construyen los estudiantes con el pensamiento algebraico*. [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Dedicatoria

A mi hermano Emerson, testigo del proceso. A Maribel y Robinson, que me dieron la vida. A mis amigas y amigos: Duvan, Susana, Angie y Juan, porque en ustedes encontré confidencia, alegría y, ante todo, amor. A mi gatita, que ya camina con las estrellas. A la música, porque ha sido refugio y calma. Y por supuesto, a Bangtan.

Gabriela Galeano Castro

En el viaje hacia la culminación de este trabajo, me acompañaron noches largas, el incesante bullicio de mi entorno, desafíos inesperados, interrupciones digitales y el eco de la ausencia de momentos compartidos con seres queridos. Cada una de estas experiencias se entrelazó en la esencia de este logro y en la persona que me he convertido y aún aspiro ser. Recuerdo haber expresado, ante la curiosidad académica, mi deseo de enseñar no como un mero acto de transferencia de conocimiento, sino como una misión de salvar y transformar vidas, incluida la mía. La docencia, en su nobleza, es un puente hacia la transformación y un faro de esperanza.

Dedico este trabajo a la noche, testiga silenciosa de mis desvelos y crisis, que en su manto estrellado me recordó que tras la oscuridad siempre amanece. A María Andrea Nieto, mi faro de ánimo y coraje en las noches de duda, que con su presencia iluminó mi camino cuando más lo necesitaba. A mis padres, pilares de mi existencia, por brindarme la oportunidad de perseguir mis sueños y enseñarme a nunca rendirme; a mi madre, cuya cocina era un bálsamo para el alma en momentos de desánimo. A mis amigos, por su paciencia infinita y sus consejos, verdaderos tesoros en mi travesía. A mis asesores, cuya guía y sabiduría forjaron el sendero que hoy recorro con confianza; y a Yuber Tapias, maestro de ideas y generosidad, siempre dispuesto a extender su mano.

Mi gratitud hacia cada uno de ustedes es inmensurable, pues sin su apoyo, comprensión y amor, la batalla contra los monstruos de la duda y el miedo habría sido insuperable. ¡Gracias por ser parte de esto, por creer en mí y por ayudarme a creer en lo imposible! Este logro es nuestro, un testimonio de que juntos podemos enfrentar y superar cualquier adversidad.

Angie Susana Rivera Zapata

Agradecimientos

A la profesora Sandra Milena Zapata, asesora y guía que nos mostró el camino cuando este era confuso, al asesor John Henry Durango, por sus comentarios y las reflexiones evocadas. A la Institución Educativa José Celestino Mutis, por abrir sus puertas para desarrollar esta propuesta. A la Universidad de Antioquia, porque me permitió habitarla y descubrir personas maravillosas. A mi compañera Susana, porque más que compañera es amiga y es con quien decidí transitar este proceso. A Duvan, Juan, el profe Diego y el profe Yuber, por escuchar mis incertidumbres y penas. A todas las personas que de alguna manera aportaron a este trabajo con sus comentarios.

Gabriela Galeano Castro

En el tapiz de mi vida, la Universidad de Antioquia no ha sido solo un escenario, sino un hogar, un refugio donde he navegado por un mar de emociones a lo largo de estos años. Este lugar, que fue cuna de mis primeros pasos académicos, se transformó en la escuela de mis sueños y ambiciones, y se vestirá pronto con la toga de mis logros. Anhelo que mi esencia y la suya se entrelacen eternamente, formando un lazo indisoluble que perdure más allá de mi paso por sus aulas.

A Henry Durango, mi agradecimiento por expandir los horizontes de nuestra curiosidad investigativa, por enseñarnos la importancia de soñar en grande y de atesorar los detalles, pequeñas piedras angulares en la búsqueda de la excelencia. A la profesora Sandra Zapata, luz y serenidad en nuestro camino, quien supo ser paracaídas en caída libre, su apoyo fue faro en la tormenta, guiándonos con seguridad hacia la orilla.

Extiendo mi gratitud a cada docente que cruzó mi sendero, aquellos con quienes resoné y también con quienes no, pues cada enseñanza, cada desafío, ha sido una piedra preciosa incrustada en el mosaico de mi formación personal y profesional. A Gabriela Galeano Castro, compañera de alma y de innumerables jornadas académicas, por ser el eco de mis risas y el consuelo en mis lágrimas, por compartir la riqueza de la vida más allá de los muros de la universidad, gracias por ser refugio y pilar en el torbellino de cada día.

A la institución educativa, templo de sabiduría que generosamente abrió sus puertas para acoger nuestras prácticas, extendemos nuestra más sincera gratitud. Al profesor Olmar Gómez, maestro y mentor, por iluminar el noble camino de la docencia con el resplandor de su sabiduría y humanidad. Nos enseñó el valor incalculable del diálogo y la comprensión hacia nuestros estudiantes, mostrándonos cómo cada palabra y cada gesto pueden ser faros de guía en su formación. A los participantes, valiosas voces de este estudio, gracias por su generosidad al compartir sus experiencias y percepciones, enriqueciendo así la esencia de nuestro trabajo.

Mis padres, artífices de mi existencia, a ustedes mi amor y gratitud infinita por el aliento de vida y el abrazo que sostiene mi ser. En esta travesía, cada paso, cada obstáculo superado, se convierte en un homenaje a su amor incondicional.

A todos, mi corazón desborda gratitud. Este viaje, marcado por el aprendizaje y el crecimiento, lleva impreso el nombre de cada uno de ustedes. Gracias por ser parte de este capítulo, por tejer conmigo esta historia, por hacer que cada desafío valga la pena. ¡Gracias, una y mil veces, gracias!

Angie Susana Rivera Zapata

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de figuras

Resumen

En la investigación se analizó la relación de argumentos construidos por estudiantes de décimo grado con el pensamiento algebraico. El problema investigativo se centró en examinar cómo se relaciona la argumentación, a través del modelo de Toulmin, y el pensamiento algebraico, conforme a Radford, en estudiantes de décimo grado; se justificó ante la escasez de investigaciones previas que entrelazan estas dos teorías. Se identificaron y categorizaron los argumentos de los estudiantes a través del uso del modelo de Toulmin y se analizaron en función de los tres estratos del pensamiento algebraico propuestos por Radford. Los hallazgos mostraron que los estudiantes que participaban activamente en argumentaciones matemáticas transitaban de manera activa en los estratos factual, contextual y simbólico. Este trabajo evidenció una conexión entre la argumentación y el pensamiento algebraico al resaltar que la argumentación puede influir positivamente en la comprensión y aplicación de conceptos algebraicos. Se reflexiona sobre la posibilidad de integrar la argumentación en la enseñanza del álgebra al subrayar la importancia de la creación de estrategias de argumentación en la enseñanza de las matemáticas que abarque las dimensiones teóricas y prácticas del pensamiento algebraico, de manera que aporte significativamente a la práctica educativa y a la investigación en educación matemática.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, argumentación, modelo de Toulmin, estratos del pensamiento algebraico.

Abstract

The research analyzed the relationship between arguments constructed by tenth-grade students and algebraic thinking. The investigative problem focused on examining how argumentation, through the Toulmin model, and algebraic thinking, according to Radford, relate to tenth-grade students; this was justified due to the lack of previous research intertwining these two theories. This work demonstrated a significant connection between argumentation and algebraic thinking by highlighting how argumentation can positively influence the understanding and application of algebraic concepts. The student's arguments were identified and categorized using the Toulmin model and analyzed based on the three algebraic thinking layers proposed by Radford. The findings showed students that participate actively in mathematical argumentations navigated through the factual, contextual, and symbolic layers. Reflection is made on the possibility of integrating argumentation in algebra teaching by emphasizing the importance of creating argumentation strategies in mathematics teaching that encompasses both the theoretical and practical dimensions of algebraic thinking so that it significantly contributes to educational practice and research in mathematics education.

Keywords: Algebraic thinking, argumentation, Toulmin's model, layers of generality.

Introducción

La investigación se centra en analizar la relación de argumentos construidos por estudiantes de décimo grado con el pensamiento algebraico. La relevancia de la investigación reside en su capacidad para enriquecer la comprensión actual del rol que desempeña la argumentación matemática en el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes de secundaria. Al identificar, caracterizar y analizar los argumentos matemáticos de los alumnos y su vinculación con el pensamiento algebraico, el estudio proporciona una perspectiva valiosa sobre cómo los estudiantes interpretan y abordan los conceptos algebraicos a través de su razonamiento. Este enfoque metodológico y analítico puede servir de base para futuras investigaciones, al considerar que existe una escasez de estudios que exploren la conexión entre los dos aspectos dentro del contexto educativo. A continuación, se ofrece una visión general de la estructura de este trabajo de grado, donde se presenta cada capítulo que permite establecer un marco claro de los hallazgos y discusiones contenidos en la investigación.

El primer capítulo establece el planteamiento del problema y ofrece un panorama general del enfoque de la Institución Educativa José Celestino Mutis, donde se destaca el papel de la argumentación en el aprendizaje matemático. El segundo capítulo presenta el marco teórico que subyace al estudio y delinea los fundamentos de la argumentación y el pensamiento algebraico. Aquí, se introducen conceptos claves y se proporciona una estructura conceptual para el análisis subsiguiente.

El tercer capítulo detalla el marco metodológico, explica cómo se recopiló la información a través de la observación participante y otros métodos cualitativos. Se discuten también las consideraciones éticas y la demografía de los participantes. En el cuarto capítulo, se presenta el análisis de los datos recolectados y se exponen los resultados parciales, se exploran las categorías de análisis y la ruta seguida para la interpretación de la información.

El quinto capítulo contempla finalmente las conclusiones derivadas del análisis, las reflexiones sobre la práctica pedagógica profesional y los aportes a la práctica educativa. También se discuten las limitaciones del estudio y se sugieren futuras direcciones de investigación. Las referencias y anexos complementarios se presentan al final, de manera que permiten dar cierre a la investigación con la presentación de los recursos utilizados.

1 Planteamiento del problema

La Institución Educativa José Celestino Mutis cuenta con un enfoque sociocognitivo constructivista que promueve el aprendizaje a través de situaciones problemáticas mediadas por el trabajo colaborativo y cooperativo, la coevaluación, el aprendizaje por discursos y por debates, donde se destaca el rol de la argumentación. Durante la práctica realizada con el grado décimo, se identificó que las situaciones que atienden al aprendizaje del álgebra y del pensamiento variacional son cercanas y habituales en este grado.

Es necesario reconocer algunos autores que han aportado en el campo de la investigación sobre argumentación (Cervantes-Barraza, 2019; Chico, 2014; Conner et al., 2014; 2017; Erduran, 2004; Krummheuer, 1995; 2007; 2012; Toulmin, 2007) cuando mencionan que la argumentación es un proceso en el que los sujetos construyen, presentan y defienden sus ideas, opiniones o puntos de vista e involucra el uso de datos, evidencia y razonamiento para respaldar una afirmación o conclusión, considerar diferentes perspectivas y refutar o contraargumentar. La argumentación no solo implica la presentación de ideas, sino también la habilidad para estructurar discursos de manera lógica y persuasiva.

En consonancia con la visión de la Institución Educativa José Celestino Mutis, según su Plan de Área de Matemáticas (2021), "El trabajo colaborativo como proceso de interacción entre pares y el profesor para el desarrollo de habilidades y competencias como la toma de decisiones, confrontación y argumentación de ideas y generar la capacidad de justificación" (p. 17). Estos aspectos se entrelazan con la definición de la argumentación colectiva que no es simplemente un elemento opcional o adicional en el entorno educativo de las matemáticas, sino que es un proceso intrínseco y natural en la manera en que estudiantes y profesores interactúan diariamente en el aula de matemáticas.

Después de identificar que la institución fomenta la argumentación como una propuesta para llevar al aula de clase, se pretende relacionar los argumentos con el pensamiento algebraico al considerar que Radford (2006a; 2006b; 2010; 2014; 2021) menciona que está caracterizado por tres condiciones: indeterminancia, denotación y analiticidad y que, además, es una forma particular de *reflexionar matemáticamente*. En la misma línea, Garzón y Vergel (2013) señalan que es necesario que el profesor sea consciente de la posibilidad de desarrollar y potenciar formas del pensamiento algebraico por medio de la creación y ejecución de actividades y tareas.

Establecer conversación entre la teoría de la argumentación propuesta por Toulmin (2007) con la teoría del pensamiento algebraico y su estratificación, es una tarea exigente pero pertinente debido a la poca literatura reportada hasta la fecha que relacione ambas posturas teóricas. En consecuencia, puede ser una oportunidad investigativa para explorar los puntos de convergencia o divergencia entre ambas teorías.

1.1 Contextualización

La práctica pedagógica se realizó en la Institución Educativa José Celestino Mutis ubicada la comuna ocho del barrio Villa Hermosa de la ciudad de Medellín-Colombia. Atiende una población estudiantil cuyos estratos socioeconómicos corresponden a los niveles dos y tres.

La misión de la institución es brindar una educación integral e inclusiva, mientras que la visión es ser líder en la formación integral, académica y técnica de sus estudiantes. La práctica pedagógica se realizó en el grado décimo, con estudiantes entre 15 y 17 años, donde se hizo inicialmente observación participante y se acompañó a los estudiantes durante los encuentros. Se obtuvieron registros tanto a través de bitácoras en formato de documento virtual como evidencia de las visitas con información recolectada que sirvió para identificar y construir la propuesta de investigación, (Ver **Anexo *1***). Morawicki y Huergo (2009) señalan que una bitácora permite que el profesor en formación:

> vaya registrando los entretelones subjetivos y reflexivos, relatando momentos que devienen trascendentes para el proceso, trayendo –o no– a colación modos de pensar, experiencias y posicionamientos de tradiciones pedagógicas o de compañeros de caminos; y hacerlo con cierta autonomía y sin quedar atrapado en la rutina de escribir lo dicho por otros. (como se citó en Morawicki y Comas, 2015, p. 5)

Los registros obtenidos de las observaciones en clase permitieron identificar desafíos a los que se enfrentan estudiantes y profesores en el aula de clase, dificultades en el aprendizaje de conceptos y procesos, además de identificar elementos y preguntas que pueden o no problematizar el entorno de enseñanza y aprendizaje.

1.2 Experiencias en la práctica

La práctica realizada inicialmente se basó en encuentros mediados por diálogos con el profesor cooperador, asistencia a reuniones institucionales, lectura de documentos institucionales, tales como: Proyecto Educativo Institucional PEI, Sistema Institucional de Evaluación SIEE, planes de área, modelo pedagógico, horizontes institucionales como misión, visión y la política de calidad, observación de las clases, del contexto de vida institucional y reflexiones que derivaron de los encuentros y las situaciones acontecidas.

Se concedió la oportunidad de calificar talleres realizados por estudiantes de décimo grado donde se proponía resolver situaciones referentes a los temas tratados en el primer período del año escolar: ecuaciones y teorema del seno y coseno. El taller diseñado para décimo, sobre el teorema del seno y del coseno proponía hallar los lados y ángulos que satisfacían triángulos, modelar situaciones de prosa a lenguaje matemático y dar solución a las situaciones.

En talleres calificados se constató la multiplicidad de respuestas, formas de llegar a resultados, procedimientos desarrollados e inconvenientes que presentan los estudiantes para resolver situaciones problema donde están involucradas las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) durante la realización de problemas junto a la ausencia de herramientas específicas para llevar a cabo las operaciones. Las dificultades mencionadas inciden en el problema principal debido a que afectan el desarrollo de las sesiones de clase.

1.3 Búsqueda de antecedentes

Para la búsqueda de los antecedentes se determinaron categorías a través de palabras clave en diferentes bases de datos y repositorios. La información encontrada se filtró a través de la **Tabla *1*** que presenta la temática principal de la investigación, las categorías, las fuentes de búsqueda utilizadas y la franja temporal delimitada según los autores encontrados.

Tabla 1

Criterios para la revisión de antecedentes

Temática	Categoría	Búsqueda	Franja temporal
Relaciones entre argumentos que construyen los estudiantes y pensamiento algebraico	Fundamentos teóricos sobre argumentación Pensamiento algebraico y estratos del pensamiento	Revistas nacionales e internacionales y repositorios de tesis de maestría y doctorado en educación matemática.	Entre el año 2000 y el 2023, con excepciones como Krummheuer (1995)

Para proponer la cimentación inicial de los antecedentes se determinaron palabras clave que relacionaran temáticas desarrolladas en la investigación, luego se establecieron categorías que abarcan a las palabras clave; estas contienen ejes centrales investigativos como la argumentación y el pensamiento algebraico. La selección de literatura se clasificó para extraer elementos principales como autor, intervalo de tiempo, palabras clave y su respectiva referencia. Tras analizar la selección de literatura, se presentan ideas sobre los hallazgos y las reflexiones suscitadas frente a los aportes, pertinencia de los autores y sus trabajos en la investigación.

1.3.1 Fundamentos teóricos sobre argumentación

Toulmin (2007) propone un modelo de argumentación que busca capturar la estructura argumentativa de los sujetos en la vida cotidiana y en diversos campos del conocimiento. Propone un enfoque práctico para comprender cómo se construyen y evalúan los argumentos en situaciones reales, alejándose de los enfoques formales y abstractos de la lógica tradicional. Destaca seis elementos que constituyen un argumento y proporciona una estructura flexible y contextual para analizarlos.

Solar y Deulofeu (2016) toman como punto de partida la exposición que hoy día ha comprendido al enfoque por competencias, que busca formar ciudadanos capaces de reflexionar, comprometidos y que construyan, pues traspasa la barrera de la obtención única del aprendizaje de un contenido. Presentan el modelo de Toulmin (2007) que valida el proceso de argumentación ocurrido en el aula de matemáticas. Se llevó a cabo el objetivo propuesto mediante un estudio de casos múltiples con enfoque cualitativo interpretativo, dicho enfoque potenció el entendimiento y significación de fenómenos sociales a través de la descripción e interpretación.

Para la metodología, los autores Solar y Deulofeu (2016) propusieron la inmersión de profesores en el aula que se acercaron al desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas y analizaron cinco temas que atienden al significado, existencia, estructura, rol del profesor y oportunidades de participación en argumentación. Por último, se destacan las tareas abiertas en matemáticas, planificaciones especializadas en argumentación y tres estrategias comunicativas que sirvieron para la promoción de la argumentación: oportunidades de participación, tipos de preguntas y gestión del error.

Cervantes-Barraza (2019) presenta la argumentación matemática en el aula con una propuesta teórico-metodológica para evidenciar que la refutación de aserciones permite que surjan otras situaciones en las discusiones matemáticas en el aula de clase. La fundamentación teórica de la investigación se basa principalmente en los usos de la argumentación de Toulmin, este último junto con Balacheff son referentes en su trabajo cuando se habla de contraejemplos y refutación. Abarca las posturas de argumentación colectiva referida a autores como Krummheuer (1995) y Wagner et al. (2014) y propone conclusiones que atiendan a los razonamientos que realizan los estudiantes y las maneras en que refutan. Se resalta que usa el término argumento como una secuencia de razonamiento que está conectada a elementos como las aserciones y las razones. El conjunto de ellas determina la fuerza con que se argumenta.

El Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN) (2006) refiere a la argumentación para sustentar o refutar conjeturas y generalizaciones que derivan en situaciones de aprendizaje para fomentar el pensamiento variacional, ya que como menciona, es un pensamiento complejo pero indispensable por su posibilidad de indagar en aspectos de variación y cambio.

Los argumentos que los estudiantes pudiesen presentar en medio del aula, la forma en que pueden aparecer y el tipo o la clasificación que se les podría asignar, Valbuena-Duarte et al. (2022) presentan una investigación donde prima la caracterización de patrones evidenciados por profesores en medio de la argumentación colectiva para promover la argumentación como competencia matemática. El método se llevó a cabo a través del enfoque cualitativo y se toma como referencia a Toulmin (2007) para analizar los argumentos evidenciados en el aula, se realizó observación no participante sobre contenidos multimedia obtenidos de clases de profesores de matemáticas.

Para traer un caso en específico, surge una problemática en torno al bajo porcentaje de preguntas acertadas de estudiantes en una institución educativa oriunda del Chocó, Ríos-Cuesta

(2019) a través de la observación constata las dificultades que les genera a los estudiantes argumentar los resultados o respuestas que obtienen cuando efectúan procedimientos matemáticos y que además de eso, les resulta confuso determinar caminos que creen un puente hacia la resolución de las situaciones propuestas, Ríos-Cuesta (2019) atiende a contextos ajenos a los propios, hipotéticos y desfasados. El autor indica su intención de proporcionar un camino supuesto de aprendizaje a partir de elementos como la argumentación y la modelación matemática para el aprendizaje de la variación cuadrática. Con ese fin se utiliza un estudio de casos longitudinal y un enfoque cualitativo con diseño empírico-experimental.

Es pertinente preguntar ¿cómo se construye la argumentación colectiva en el aula de clase de matemáticas en secundaria desde la interacción en grupo? al respecto Chico (2014) sugiere que la argumentación colectiva es una práctica que otorga valor y fortalece la negociación, la construcción del conocimiento compartido y propicia colaboración. Se menciona que la investigación surge a partir de las evidencias en el aula de clase, se destacan las implicaciones en la construcción y socialización de argumentos en matemáticas y también surge el interés por indagar posibles relaciones entre interacción de los estudiantes y argumentaciones colectivas en el aula de matemáticas. La investigación que realiza Chico (2014) emplea un enfoque cualitativo e interpretativo con métodos de comparación que permiten un análisis de datos constante con pautas inductivas, con un apartado de conclusiones donde se considera la pertinencia del diseño propuesto con la construcción y confrontación de narrativas que impulsen el florecimiento de argumentos empíricos donde se reconocen otros discursos que satisfacen las respuestas a las tareas.

El profesor juega un papel crucial en la argumentación y los tipos de preguntas y acciones que realiza. Conner et al. (2014) proponen un estudio con dos situaciones de argumentación colectiva acontecidas en el aula de un profesor, para enfocar la mirada en cómo puede aportarla desde el espacio del aula en secundaria. Para sustentar sus ideas plantean un marco teórico donde conversan Toulmin (2007), Krummheuer (1995) y Hufferd-Ackles et al. (2004) quienes han apuntado hacia el debate y la argumentación como posibilidad para el aprendizaje de las matemáticas y sobre la argumentación colectiva como un medio en el cual, un conjunto de sujetos puede llegar a una conclusión por medio de un consenso, en este caso aplicado a afirmaciones referidas a las matemáticas. Proponen un marco o esquema de trabajo que a partir de configuraciones es un instrumento de apoyo para profesores con los que fue realizada la investigación. En este caso, se consideró en torno a tres aspectos: contribución directa con los elementos del argumento, realización de preguntas que evocan argumentos y otras acciones de apoyo.

Conner et al. (2014) usaron videos y contenido multimedia para recolectar información con base en observaciones durante dos semanas en aulas dirigidas por estudiantes de maestría, se evidenció materiales como planeaciones, tareas o talleres elaborados por el profesor. Para el análisis de la información recolectada se hicieron transcripciones de audios y videos y se identificaron gestos particulares, además se basaron en el modelo de Toulmin para revisar las transcripciones de los acontecimientos de las sesiones. Como conclusiones, los autores reflexionan sobre la dificultad que puede ocurrir al proponer discusiones matemáticas productivas y explorar prácticas que ayudan a los profesores a plantear este tipo de debates al observar y mirar las soluciones de los estudiantes.

Wagner et al. (2014) indagan cómo puede utilizarse el modelo de Toulmin para desarrollar las concepciones de argumentación colectiva de los futuros profesores de matemáticas de secundaria. Los autores utilizan este modelo para examinar cómo puede utilizarse la argumentación en el aula para desarrollar capacidades argumentativas en los estudiantes. Examinan el papel del profesor en este proceso y cómo puede facilitar el desarrollo de concepciones colectivas de argumentación. Exploran cómo un grupo de profesores en formación inicial de matemáticas utilizó la argumentación colectiva y las prácticas discursivas para desarrollar su propia comprensión matemática y la capacidad de sus estudiantes para argumentar.

Los autores sostienen que la argumentación colectiva puede promover el aprendizaje de matemáticas y el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico en los estudiantes, y destacan la importancia de fomentar la discusión y el intercambio de ideas en el aula. Los autores proporcionan ejemplos específicos de cómo los profesores utilizaron la argumentación colectiva para mejorar tanto su propia enseñanza como la comprensión de las matemáticas por parte de sus estudiantes.

Krummheuer (1995) examina cómo los estudiantes participan en la argumentación colectiva durante el trabajo en grupo en clase de matemáticas. Analiza interacciones entre los estudiantes, contenido de los argumentos y aprendizajes. El estudio proporciona una comprensión de cómo la argumentación colectiva puede influir en el pensamiento crítico y en la construcción de conocimiento matemático.

Krummheuer (2007) analiza cómo se lleva a cabo la argumentación en situaciones de interacción colectiva entre estudiantes y profesores. Examina dos episodios específicos entre estudiantes que participan en actividades matemáticas y argumentan sobre sus ideas. A través de estos episodios, el autor realiza abducciones teóricas para comprender la argumentación colectiva en el aula y destaca la importancia de la participación de los estudiantes en la construcción y justificación de argumentos matemáticos. Informa que la argumentación colectiva promueve el intercambio de ideas, la negociación de significados y el desarrollo de habilidades de razonamiento matemático. Por último, identifica distintos roles que los estudiantes desempeñan durante la argumentación colectiva, como el proponente, el oponente y el mediador. Los roles reflejan la interacción dinámica entre los participantes y su capacidad para presentar argumentos, refutar ideas y apoyar puntos de vista.

Henao y Ramírez (2018) usan el paradigma cualitativo al evaluar la implementación de una secuencia didáctica pensada para el mejoramiento y acercamiento del estudiante a experiencias sobre argumentaciones orales por medio de textos y contextos usados en el aula. Las autoras exponen escritos y declaraciones, registro de voz de intervenciones y observación en clase. Ellas concluyen que el aparente gusto que presentan los participantes al verse en medio de actividades les permite exponer sus ideas, hacer uso del lenguaje oral, etc. De manera que se puede destacar la construcción de conocimiento y que a su vez fortalece la apropiación y el uso de la palabra. La argumentación dialógica es una herramienta que ayuda al desarrollo del pensamiento y de la escritura argumentativa.

Kuhn et al. (2015) investigan la importancia de la argumentación dialógica como una herramienta para el desarrollo de la argumentación y han llegado a la conclusión de que es una forma eficaz de enseñar a los estudiantes a pensar y escribir argumentos. Esta investigación muestra que la argumentación dialógica puede ayudar a los estudiantes a desarrollar habilidades argumentativas esenciales como la construcción de estructuras coherentes, el análisis de la evidencia y la comprensión de los argumentos de otros.

Crespo (2005) investiga la aplicación de la argumentación matemática en el aula. Concluye que la argumentación matemática es eficaz para ayudar a los estudiantes a desarrollar pensamiento crítico y argumentativo. La investigación ofrece ejemplos de cómo los educadores pueden usar actividades de argumentación matemática para ayudar a sus estudiantes a desarrollar habilidades argumentativas mediante el uso de la argumentación dialógica en el aula. Se evidenció que los profesores que utilizaban la argumentación dialógica en el aula tenían más probabilidades de fomentar el pensamiento crítico y el aprendizaje reflexivo en sus estudiantes.

Toro (2020) reporta acerca de la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase. Se destaca el interés por proporcionar una mirada que trascienda la logicidad con que se suele tratar la argumentación y el análisis de argumentos, que da paso a la posibilidad de presentar una postura donde se propone la argumentación como un procedimiento, donde interacciones entre profesores y estudiantes en el aula son valiosas. Por medio del enfoque interpretativo de corte cualitativo a partir de la observación de dos profesores en secundaria, se busca responder: ¿cómo es la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase?

Conner (2017) examina cómo las acciones del profesor pueden considerarse racionales desde una perspectiva habermasiana. Se centra en dos aulas, un aula de un colegio privado y otra aula de un colegio público, y analiza la argumentación en cada entorno. Utiliza la teoría de la racionalidad comunicativa de Habermas para analizar la argumentación en ambas aulas, además, examina cómo las acciones del profesor han influido en la argumentación

La argumentación en el aula de matemáticas tiene una serie de implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje. Solar (2018) discute las implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas, al justificar que esta debe ser apoyada como una parte importante de la enseñanza y el aprendizaje. Señala que la argumentación ayuda a los estudiantes a ser activos en su aprendizaje y los anima a desarrollar sus ideas de una manera reflexiva y crítica. También señala que la argumentación ayuda a aumentar la confianza de los estudiantes en sus ideas, una parte importante del aprendizaje. Centrándose al igual, en la necesidad de que los profesores creen un entorno de aprendizaje significativo que anime a los estudiantes a participar en la argumentación. En particular, el profesor debe fomentar una cultura de argumentación en el aula en donde proporcione a los estudiantes la oportunidad de evaluar críticamente opiniones propias y de otros.

Planas y Morera (2012) traen reflexiones teórico-prácticas por medio de un marco de tres entradas: la matemática, la matemática escolar y la matemática en uso. Todas ellas dadas por la noción de argumentación y argumentación en el aula de matemáticas de secundaria. Planas y Morera (2012) destacan la interacción social en el aprendizaje de estudiantes y en la exploración de prácticas y situaciones interactivas en argumentación.

Planas y Morera (2012) en cambio toma como punto de partida una investigación realizada en su trabajo doctoral donde implementa una secuencia didáctica en geometría, en este trabajo da prioridad a la competencia argumentativa en matemáticas. Su marco teórico recoge ideas de investigadores como Sardá (2003), que entiende la argumentación como una actividad social para justificar o refutar afirmaciones, donde se considera al receptor y el motivo de ello para emitir una declaración. Se considera el modelo de Toulmin a partir de cuatro elementos: datos, conclusión, garantía y refutador. Por argumentación como competencia, mencionan fases discursivas de aproximación como describir, narrar, explicar, argumentar y justificar, donde las últimas tres mencionadas poseen tendencia a presentar un nivel de mayor dificultad.

Para contribuir a la formación de profesores se presentan las situaciones de otras sesiones de clase, en esas situaciones se indica la argumentación matemática que espera el profesor de sus estudiantes, la competencia argumentativa evidenciada en profesores y estudiantes. Como conclusión, las investigadoras destacan la generalización que parece presentarse en la base de la argumentación, también mencionan que las prácticas de argumentación matemática surgen desde las descripciones de elementos que caracterizan situaciones problemáticas.

1.3.2 Pensamiento algebraico y estratos del pensamiento

Garzón y Vergel (2013) exponen dificultades en el aprendizaje del álgebra ligadas a las nuevas formas de trabajar y el distanciamiento de procesos asociados a la aritmética y que en el álgebra tienen nuevos significados como la concatenación de símbolos, el uso del paréntesis y del signo igual. Los autores mencionan la necesidad de transformar las concepciones sobre el álgebra escolar que han perpetuado ideas que ponen de manifiesto al álgebra como procedimientos o técnicas para resolver, manipular, factorizar ecuaciones y efectuar ecuaciones, además se alude a la posibilidad de desarrollar el pensamiento algebraico desde temprana edad y antes de la inclusión de letras y signos. Finalmente, Garzón y Vergel (2013) discuten acerca del pensamiento variacional donde se concibe como “una forma específica de pensar matemáticamente, orientada a la construcción de estructuras conceptuales que fundamentan el estudio de la variación y el cambio” (p. 7). Mientras que el pensamiento algebraico es considerado como el “conjunto de procesos, procedimientos y esquemas que dan forma y sentido al pensamiento variacional” (p. 7).

Butto y Rojano (2014) presentan un estudio de corte cualitativo basado entre el paso de la aritmética al álgebra con una muestra poblacional de dos niños de 10 y 11 años, realizado en una institución educativa de carácter privado. Al principio discuten problemáticas como que la transición al álgebra está condicionada por el dominio numérico, donde se deja atrás otros dominios como el geométrico y exponen ideas sobre la introducción tardía del álgebra escolar, mencionan que es factible introducir desde temprana edad al desarrollo del pensamiento algebraico si es un proceso largo donde los estudiantes deberán atravesar dificultades en matemáticas como la aritmética y el álgebra.

Cabe señalar que Butto y Rojano (2014) resaltan la diferencia entre formalización algebraica y pensamiento algebraico puesto que la primera requiere “un proceso más largo y complejo” (p. 8). Pero acceder al pensamiento algebraico desde temprana edad a través de diversas estrategias “otorga indicios empíricos y teóricos para analizar esta actividad matemática con una perspectiva epistemológica y didáctica” (p. 8). Los instrumentos de medición y recolección de datos fueron cuestionarios sobre razonamiento proporcional y procesos de generalización y actividades con secuencias didácticas. Como conclusiones, las autoras hacen alusión a la posibilidad de llegar al álgebra por medio del razonamiento proporcional y de los procesos de generalización en un camino donde los estudiantes encontrarán obstáculos que deben superar como la transición de términos aditivos a multiplicativos, además recomiendan conectar el dominio aritmético con el geométrico y algebraico.

Wettergren (2022) considera el pensamiento algebraico parte del pensamiento matemático y alude al álgebra para resaltar su importancia en las matemáticas puesto que se puede encontrar en las demás áreas de las matemáticas. El estudio fue realizado en dos instituciones educativas donde realizaron ocho sesiones grabadas en videos. Se analizan las acciones comunicativas de los estudiantes, se identifican indicadores de pensamiento algebraico temprano y se discute qué partes de la teoría de actividad de aprendizaje de Davydov (1990, 2008) promueven posibilidades para tratar expresiones algebraicas. También se consideraron los gestos y señas detectadas en las filmaciones, ya que, como indica la investigación, estas manifestaciones eran parte de la argumentación de los estudiantes, y se usó el modelo de argumentación de Toulmin para analizar los debates y establecer relaciones con indicadores del pensamiento algebraico de los estudiantes.

Radford (2010) estudia la dificultad que supone tratar el pensamiento algebraico puesto que poco se conoce sobre pensar, basado en estas ideas menciona formas de pensamiento algebraico a través de los niveles de generalización. El autor introduce una perspectiva semiótica que brinda nuevas posibilidades de entender los signos como gestos y palabras y los signos y fórmulas algebraicas que han sido vistos generalmente desde una mirada representativa, así pues, Radford (2010) menciona que, desde un punto de vista semiótico, ambas manifestaciones son genuinas, no equivalentes o sustituibles, pero sí válidas puesto que “hay cosas que podemos significar e intencionar a través de ciertos signos, y cosas que no" (p. 3). Que existen más formas además de la simbólica de expresar ideas algebraicas relacionadas con el cuerpo, la oralidad y los signos, enunciado por Radford:

> El pensamiento está ligado al contexto y a la cultura en la que tiene lugar. Por eso es más exacto decir que el pensamiento en general, y el pensamiento algebraico en particular, es una praxis histórica cognitiva mediada por el cuerpo, los signos y las herramientas. (p. 5)

Radford (2010) invita a repensar sobre pensamiento algebraico, al proponer una perspectiva semiótica que amplía su comprensión más allá de la representación simbólica convencional. Al destacar la autenticidad de diversas manifestaciones, desde gestos hasta expresiones orales, el autor subraya la riqueza del pensamiento algebraico. Concluye que este proceso cognitivo es una praxis histórica, íntimamente ligada al cuerpo, los signos y las herramientas, para proporcionar así una visión completa y contextualizada en donde la cultura y la historia, forjan nuestro pensamiento.

Radford (2010) expresa que el pensamiento algebraico tiene tres características determinísticas: sentido de indeterminancia, analiticidad y designación simbólica, pues se trata de pensar de manera analítica sobre cantidades indeterminadas. De esta forma, Radford presenta una propuesta de estratificación de las formas pensamiento algebraico a partir de una investigación llevada a cabo en un aula de clases de secundaria. El autor propone la estratificación con base en los resultados y las evidencias obtenidas donde aclara que los tres estratos no tienen dependencia uno del otro ni se determinan de manera secuencial.

Pensamiento algebraico factual: la indeterminación no alcanza un nivel discursivo, se presentan acciones y percepciones, pero no se considera una forma simple de reflexión matemática pues, de hecho, se presentan miradas, gestos, palabras y símbolos.

Pensamiento algebraico contextual: la indeterminación se pretende explicitar en el discurso, el estudiante recurre a medios lingüísticos, términos descriptivos y/o gestos. Se busca generalizar ideas.

Pensamiento algebraico estándar o simbólico: se pretende llegar a fórmulas dentro del simbolismo propio del álgebra. Los símbolos reemplazan los términos descriptivos y las generalizaciones de ideas mediante caracteres alfanuméricos. Según Radford (2010) las fórmulas como narrativas describen los cálculos que se deben realizar.

La revisión de literatura expuesta da cuenta de los avances en el campo de la educación matemática y de los temas emergentes o las preocupaciones por investigar en torno a argumentación y pensamiento algebraico. Algunas de las investigaciones presentan marcos metodológicos con enfoque cualitativo, sustentos teóricos que fundamentan las investigaciones y análisis que recurren a perspectivas sociales. Los hallazgos de manera general atienden a situaciones problema, discusiones, debates, talleres, vídeos, entrevistas, cuestionarios y análisis de datos que parecen favorecer los propósitos de las investigaciones.

Los antecedentes exponen problemáticas y contextos no ajenos. En esta investigación, de hecho, visibilizan posibles líneas de trabajo como la creación de situaciones que potencien la argumentación y que permitan develar formas de pensamiento algebraico, revisión de literatura sistemática acerca de la emergencia del pensamiento algebraico en este siglo, argumentación de profesores y argumentación en el aula de clases.

Los autores destacados en los antecedentes proporcionan una sólida base para la argumentación en el aula de clase y la relación con la estratificación del pensamiento algebraico. Los trabajos de (Cervantes-Barraza, 2019; Solar, 2018; Toulmin, 2007) brindan valiosas perspectivas sobre cómo comprender y fomentar la argumentación en el contexto matemático. Toulmin (2007) ofrece un enfoque práctico para analizar argumentos en situaciones reales, mientras que Solar (2018) destaca la importancia de la argumentación colectiva y su relación con la formación de competencias matemáticas.

Los estudios de Butto y Rojano (2014), Garzón y Vergel (2013) y Wettergren (2022) tratan aspectos sobre el desarrollo del pensamiento algebraico. Resaltan la necesidad de estudiar esta área desde edades tempranas y superar las dificultades en la transición de la aritmética al álgebra. Radford (2010), por su parte, estratifica el pensamiento algebraico, que permite evidenciar cómo los estudiantes avanzan en la comprensión algebraica.

Los antecedentes teóricos permiten diseñar conjuntamente estrategias pedagógicas que promuevan la argumentación como parte integral del aprendizaje en el aula de matemáticas y el pensamiento algebraico en diferentes estratos. Estas investigaciones también subrayan la importancia de considerar el contexto, las interacciones sociales y la comunicación en la enseñanza de las matemáticas.

1.4 Pregunta de investigación

La argumentación según Toulmin (2007) es esencial para el razonamiento matemático, ya que permite justificar, respaldar afirmaciones y presentar pruebas. En la Institución Educativa José Celestino Mutis, se destaca la importancia de la argumentación como vehículo para el aprendizaje en el ámbito matemático. No obstante, a pesar de reconocer la vitalidad de la argumentación en la construcción del conocimiento, se plantea una inquietud: ¿cómo se relacionan argumentos construidos por estudiantes de décimo grado con el pensamiento algebraico?

Ese interrogante se erige como un desafío en el contexto educativo, donde la complejidad inherente a la argumentación se entrelaza con las peculiaridades del pensamiento algebraico. La necesidad de comprender cómo se fusionan estos dos dominios teóricos, hasta ahora explorados de manera independiente, se presenta como una oportunidad para desentrañar las conexiones y tensiones entre la teoría de la argumentación de Toulmin y la estratificación del pensamiento algebraico propuesta por Radford. Es en este cruce de caminos donde se vislumbra un terreno fértil para la investigación, que permita explorar las intersecciones y disonancias entre dos fundamentos teóricos aparentemente divergentes, pero que convergen en el ámbito del aprendizaje matemático.

1.5 Objetivo General

Analizar la relación de argumentos construidos por estudiantes de décimo grado con el pensamiento algebraico.

1.5.1 Objetivos específicos

- Identificar argumentos construidos por los estudiantes de décimo grado a través del Modelo de Argumentación propuesto por Toulmin.
- Categorizar argumentos construidos por estudiantes mediante los tres estratos del pensamiento algebraico propuestos por Radford.

2 Marco teórico

En este apartado se presentan los elementos teóricos que convergen en la investigación y que se consideraron necesarios para sustentar la pregunta investigativa. Dada esta claridad, se desarrollaron dos ejes: Fundamentos de Argumentación y Fundamentos del Pensamiento Algebraico, en los que se trataran temáticas como: definición de argumento, argumentar y argumentación, definición de razonar y razonamiento, componentes de un argumento, niveles de la calidad de los argumentos, pensamiento algebraico, estratos del pensamiento algebraico y medios semióticos.

2.1 Fundamentos de argumentación

La reflexión teórica sobre la naturaleza de la argumentación tiene sus raíces en la antigüedad, pero la conceptualización contemporánea ha evolucionado gracias a las contribuciones de filósofos como, Aristóteles, quien en su obra "Retórica", sentó las bases al distinguir la lógica demostrativa de la dialéctica y retórica, considerándolas como artes de lo posible, es decir, del ámbito de la argumentación (Aristóteles, siglo IV a.C./1998). Adicionalmente, marcó una distinción entre tres cosas: la lógica demostrativa (que se enfoca en demostrar hechos y verdades), la dialéctica (que involucra el debate y la discusión para llegar a conclusiones) y la retórica (que se centra en la persuasión). Él las consideró como artes de lo posible, que significa que están relacionadas con la habilidad de argumentar. Reconoció que la argumentación y la persuasión son herramientas poderosas que pueden influir en la gente, incluso si no se trata necesariamente de verdades absolutas o lógicas irrefutables.

Perelman (2012) influenciado por Aristóteles, rescató la retórica y la dialéctica como componentes inseparables de la argumentación, propuso la "Neorretórica" para expresar su enfoque filosófico, centrado en la persuasión y no en certezas absolutas. Argumentar, según él, no es solo presentar hechos, sino también persuadir y dialogar, por ende, su propio enfoque filosófico se centró en la persuasión más que en afirmaciones absolutas y definitivas. En lugar de buscar verdades irrefutables, se enfocó en cómo los sujetos pueden persuadir de manera efectiva y se destaca que la fuerza de la argumentación no reside necesariamente en establecer verdades innegables, sino en la capacidad de persuadir y ganar la adhesión de los sujetos.

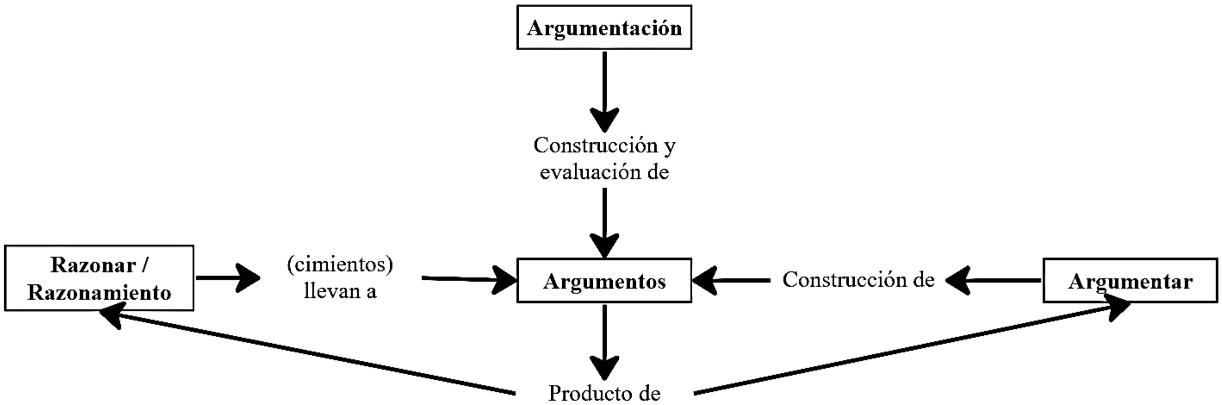
Toulmin por su parte presentó en 1958 su Modelo Argumentativo, un esquema formal que se centra en cómo los argumentos están organizados de manera lógica y razonada, el modelo destaca la racionalidad inherente a la estructura del discurso argumentativo. Para generar una reflexión inicial en cuanto a los sustentos teóricos del estudio, se considera pertinente exponer los entendimientos referentes al argumento, de modo que este puede ser una forma de razonar, que se compone por elementos que se hallan relacionados entre sí tales como conclusiones, datos, garantías, respaldos, cualificadores modales y refutaciones (Toulmin, 2007). Los argumentos surgen a partir de proposiciones o enunciados expresados. Según Toulmin (2007) "los argumentos se elaboran y se manifiestan en apoyo de una afirmación inicial" (p. 34). De esta manera, se explicitan las comprensiones que se asumen en la investigación para argumento, argumentar y argumentación.

En la presente investigación se usa como referente a Toulmin (2007) para entender que argumentar es una acción donde se presenta o desarrolla un argumento con la intención de persuadir a una audiencia o interlocutor. También, da cuenta de la argumentación como el proceso de construir y evaluar argumentos, se destaca la importancia del contexto en el que se presenta un argumento y se consolidan espacios para analizar la estructura, solidez y la logicidad del argumento.

El enfoque de Toulmin (1984) ofrece una perspectiva valiosa sobre las diferencias y relaciones intrínsecas entre razonar, razonamiento, argumentar y argumento. Según Toulmin, razonar implica el establecimiento de conexiones lógicas y la identificación de patrones y relaciones entre afirmaciones y datos. Este proceso de razonamiento actúa como el cimiento sobre el cual se construyen los argumentos. Los argumentos, en contraste, representan estructuras completas y formales que emergen del proceso de razonamiento.

Un argumento se compone de una conclusión que está apoyada por datos, garantías, respaldos, cualificadores modales y la refutación. En otras palabras, el razonamiento sienta las bases para la construcción de argumentos sólidos, y los argumentos, a su vez, representan la formalización y exposición de las pruebas que se generaron a través del razonamiento. Esta relación entre razonar y argumentar revela cómo la lógica interna del razonamiento se externaliza en forma de argumentos coherentes y persuasivos que buscan convencer a una audiencia. En la **Figura *1*** se pueden evidenciar estas relaciones. (Ver **Anexo *2***) para ampliar la información.

Figura 1
Relación de conceptos



Nota 1. Construcción propia basada en Toulmin (2007).

El MEN (2006) menciona la argumentación como una competencia recurrente en la actividad matemática y un medio para sustentar, validar o refutar conjeturas y generalizaciones que devienen en situaciones de aprendizaje que fomentan el pensamiento variacional, ya que como mencionan, es un pensamiento complejo pero indispensable por su posibilidad de indagar en aspectos de variación y cambio. El desarrollo de dicha competencia implica “saber dar y pedir razones, probar y refutar” (p. 56). Se rescata la mención a la argumentación como medio que permita proveer situaciones de aprendizaje en el marco del pensamiento variacional, puesto que, la presente investigación, no descarta la posibilidad de establecer conexiones entre la argumentación y este pensamiento el cual está ligado al álgebra.

Toulmin (2007) afirma que la composición de un argumento se basa en una serie de declaraciones que pueden ser premisas, proposiciones o afirmaciones consideradas verdaderas, y a partir de ellas se llega a una conclusión. La conclusión es la afirmación final que se busca sostener o demostrar a través de las premisas. El argumento es entonces un proceso por el que se busca justificar o respaldar una afirmación o conclusión a través de premisas y respaldos adecuados. Para ello, el autor expone en su libro seis componentes característicos de los argumentos y por medio de la **Tabla *2*** se dará a conocer desde la perspectiva y las definiciones de Toulmin (2007) el significado de los elementos de un argumento.

Tabla 2

Significado de los elementos que componen el argumento

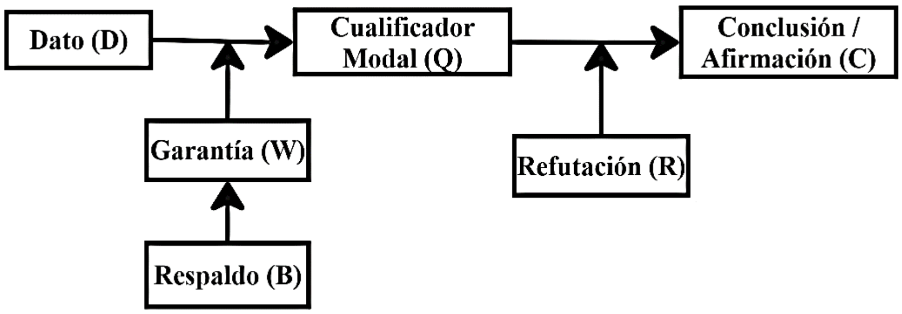
Componente	Descripción del autor	Ejemplo propio	Ejemplo contextualizado
Conclusiones	Afirmación que defiende de manera escrita u oral. Representa la posición respaldada por datos y garantías. Se refiere a una temática en particular y a la opinión del defensor	Adoptar una dieta vegetariana puede ser beneficioso para la salud	El sistema de ecuaciones tiene una solución única
Cualificador Modal	Elementos que añaden matices a la conclusión, establecen el grado de certeza de la afirmación. Indican las condiciones en las que se aplica la conclusión, se expresan términos como "probablemente", “definitivamente”, “posiblemente”, “en ocasiones”, “quizás", "en general", “necesario”, “en la mayoría de los casos"	Generalmente	Generalmente, los sistemas de ecuaciones lineales con diferentes pendientes tienen una solución única.
Datos	Hechos, evidencias o información específica que respaldan la conclusión. Brindan fundamentos concretos para sostener la posición afirmada.	Muchas investigaciones muestran que los sujetos que siguen dietas vegetarianas tienen niveles bajos de enfermedades cardíacas y presión arterial alta	$2x + y = 5$ $3x - 2y = 1$
Garantías	Inferencias o suposiciones que conectan los datos con la conclusión. Justifica por qué los datos respaldan la conclusión propuesta. Ayudan a establecer la validez y coherencia del argumento	Ya que una dieta basada en vegetales puede ser rica en nutrientes, fibra y antioxidantes que promueven la salud en general	Los principios matemáticos que permiten resolver sistemas de ecuaciones, como el método de sustitución, igualación o el método de eliminación
Respaldos	Evidencias adicionales o argumentos secundarios que respaldan las garantías, fortalecen la validez de la argumentación. Pueden ser ejemplos, estadísticas, citas de expertos u otras formas de evidencia que refuerce las inferencias lógicas de las garantías	Testimonios de sujetos que han experimentado mejoras en su bienestar después de cambiar a una dieta vegetariana	Detalles paso a paso sobre cómo se aplica el método de sustitución, igualación o eliminación a las ecuaciones para encontrar los valores de x y y
Refutaciones	Objeciones que se presentan para cuestionar la conclusión principal. Reconocen y abordan posibles críticas o puntos de vista opuestos, que fortalecen la argumentación al demostrar una consideración y respuesta a posibles objeciones	No obstante, es importante recordar que cada persona es diferente, y los resultados pueden variar según las condiciones de salud individuales	Situaciones donde el sistema no tendría una solución única, como cuando las ecuaciones son paralelas y nunca se cruzan

Nota 2. Elaboración propia basada en el modelo argumentativo de Toulmin (2007).

Toulmin (2007) diseñó un esquema argumentativo para identificar la relación entre los elementos que componen un argumento, que se puede apreciar en **Figura *2***

Figura 2

Esquema argumentativo



Nota 3. Esquema argumentativo propuesto por Toulmin (2007).

Es imperante reconocer la postura que tiene Toulmin frente a la argumentación, en esa misma línea, Durango-Urrego (2017) menciona cómo Toulmin crítica la argumentación deductiva y toma distancia de ella para proponer una estructura que recoge al conocimiento, las refutaciones y los cualificadores modales, para dar validez a los argumentos. Por ello, plasmado por el autor, Toulmin no se limita al enfoque analítico que parte desde la lógica formal asociada a la objetividad, sino que toma esos elementos de la lógica y los aplica en contextos específicos para dar argumentos sustanciales mediante puntos de vista de cada persona dependiente de experiencias en un contexto determinado.

Toulmin (2007) menciona que los argumentos analíticos, se centran en el análisis y evaluación lógica de las relaciones entre conceptos o ideas y se basan en premisas que definen o describen los términos clave utilizados en el razonamiento. Por ello, en este tipo de argumentos se examina la coherencia interna de las ideas y se evalúa la validez de las inferencias lógicas que se derivan de ellas. Por su parte, Durango-Urrego (2017) menciona que “los argumentos analíticos se inscriben en una epistemología de la lógica formal, enmarcados en la logicidad” (p. 60).

Toulmin no pretende evitar los argumentos analíticos, más bien usa a los argumentos sustanciales como elemento primario para acentuar bases necesarias que permitan llegar a una constitución argumentativa analítica. Toulmin (2007) también menciona que “si admitimos que en la práctica existe una clase de argumentos a la vez analíticos y sustanciales, reconoceremos también entonces que hay una categoría de argumentos analíticos cuyas conclusiones son provisionales o están sujetas a constricciones" (p. 184). El autor también presenta una distinción fundamental entre dos tipos de argumentos: los analíticos y los sustanciales. En el caso de los argumentos sustanciales, se caracterizan por centrarse en afirmaciones situadas en un contexto histórico y están sujetos a diversas interpretaciones. Toulmin (cómo se citó en Matienzo y Bitonte, 2010) para diferenciar los argumentos analíticos de sustanciales, expone:

> Dos señoras reciben en su casa la visita de un conde. Este les cuenta un secreto de confesionario. Dice: "Señoras, puedo decirles que fui el primer penitente del abad". Luego se marcha y llega el abad. En la conversación, el abad, sin violar el secreto de confesión, dice: "mi primer penitente fue un asesino". (p. 7)

Se concluye que "el conde era un asesino". Este tipo de argumento puede ser analizado desde una perspectiva formal o sustancial, depende de si se enfoca en la estructura lógica o en las circunstancias humanas. Por otro lado, los argumentos analíticos son excepcionales y se caracterizan por ser tautológicos, ya que la información de la conclusión está implícita o incluida explícitamente en las premisas. Toulmin aboga por un equilibrio entre los argumentos sustanciales, que reflejan la complejidad de la experiencia humana, y los analíticos, que son menos comunes en el uso cotidiano debido a su naturaleza tautológica. En última instancia, reconoce que la mayoría de los argumentos diarios son sustanciales, basados en predicciones, afirmaciones de sentimientos o juicios morales y destaca la importancia de comprender y apreciar la diversidad en la argumentación.

La relevancia de Toulmin radica en su capacidad para capturar la riqueza y complejidad de la argumentación en situaciones prácticas, como las que se encuentran en el aula de matemáticas. Su enfoque no solo considera la estructura lógica de los argumentos, sino también cómo se utilizan las evidencias, cómo se respaldan las afirmaciones y cómo se establece la validez en un contexto específico. Fundamental en un entorno educativo donde se busca promover la comprensión profunda de conceptos matemáticos y el desarrollo de habilidades argumentativas.

Después de definir algunos conceptos es necesario preguntar por la colectividad dentro del aula de clase, los beneficios que puede traer para cada estudiante y el aprendizaje con respecto al álgebra; es así como se retomaron otros autores que ponen en práctica el modelo antes expuesto, pero ajustan su composición. Krummheuer (1995) es uno de los autores que parte del modelo argumentativo de Toulmin para presentar una propuesta donde recoge cuatro de los seis elementos de un argumento: datos, conclusiones, garantías y respaldos; sin embargo, es necesario conocer o identificar la postura del autor, sobre su percepción de la argumentación. Según Krummheuer (2012):

> La argumentación no es sólo un objetivo de enseñanza en el sentido de tener que diseñar la instrucción matemática de un modo que garantice, hasta donde sea posible, que el alumnado alcance dicho objetivo y sea capaz de argumentar a un nivel matemáticamente sofisticado. Ésta sería más bien la noción de «aprender a argumentar». Si pensamos en términos de escenarios interaccionales propios de las situaciones cotidianas del aula de matemáticas, la argumentación también debe ser vista como una característica principal de estos escenarios, aunque desde una perspectiva algo distinta. (p. 62)

Se considera entonces la argumentación como un medio y no una finalidad para el aprendizaje, pero ¿qué ocurre con la argumentación colectiva?, ¿qué elementos se deben tener en cuenta? para responder los interrogantes, Krummheuer (2012) define la argumentación colectiva como un proceso comunicativo en el que los sujetos intercambian argumentos, puntos de vista y evidencias con el objetivo de llegar a una conclusión o tomar una decisión en el contexto de un grupo. El autor destaca, que este tipo de argumentación se caracteriza por la interacción e influencia mutua entre los participantes, quienes colaboran en la construcción de argumentos y la evaluación de las ideas planteadas. En lugar de considerar la argumentación colectiva como la simple suma de argumentos individuales, Krummheuer enfatiza su naturaleza dinámica y colaborativa.

Según Krummheuer (2012), una característica de la argumentación colectiva es la importancia de la participación de los miembros del grupo. En su investigación, resalta la necesidad de fomentar un clima de apertura y respeto, donde cada sujeto tenga la oportunidad de expresar sus puntos de vista y argumentos. Además, señala que la diversidad de perspectivas enriquece la argumentación colectiva al proporcionar una mayor variedad de ideas y enfoques; también, Krummheuer (2012) examina cómo los mecanismos de influencia mutua, como el debate, la negociación y la persuasión, influyen en la argumentación colectiva. Destaca que los participantes se ven influenciados tanto por los argumentos presentados como por las actitudes y opiniones de los demás miembros del grupo. Estas dinámicas pueden llevar a cambios en las posiciones iniciales y a la construcción conjunta de nuevos argumentos.

Otros autores destacan los debates en el marco de las matemáticas como formas de argumentación colectiva puesto que involucra a un conjunto de sujetos que participan para llegar a conclusiones y toma de decisiones por aprobación y consenso. Conner et al. (2014), mencionan que en ese conjunto de sujetos está el profesor, que además de participar en esos debates también los propone e incentiva. En ese sentido, los investigadores reconocen al profesor como un sujeto con un rol elemental en la dirección y coordinación de las tareas derivadas en discusiones e intercambio de opiniones e ideas.

En el aula de clase durante una relación entre el profesor, el estudiante, el conocimiento y la argumentación en medio de todos, es necesario analizar el discurso y evidenciar el proceso y progreso argumentativo de cada estudiante y para esto se toma como referencia los niveles de calidad de los argumentos propuestos por Rodríguez Ortiz et al. (2020) quién a su vez, hace una adaptación de Tamayo (2012), Erduran et al. (2004) y Erduran (2008) que se puede evidenciar en la **Tabla *3***.

Tabla 3

Niveles de los argumentos

Nivel Argumentativo	Características
Nivel 1	Elabora argumentos que son una descripción simple de la vivencia; es decir, en este nivel el estudiante no hace ningún tipo de análisis, sino que se limita a utilizar sus herramientas lingüísticas para narrar lo que capta con sus sentidos
Nivel 2	Elabora argumentos en los que se identifican con claridad los **datos** y una **conclusión**. En esta etapa, el estudiante concibe la totalidad de los datos y los analiza para emitir una conclusión
Nivel 3	Elabora argumentos en los cuales se identifican con claridad los **datos, conclusiones** y **garantías**. No solo perciben los datos y emiten varias conclusiones, sino que estas están soportadas o justificadas
Nivel 4	Elabora argumentos constituidos por **datos, conclusiones** y **garantías,** hace uso de **cualificadores modales** y **respaldos** teóricos. En este punto, el estudiante tiene claros los datos, emite conclusiones con sus respectivas garantías y usa respaldos. Esto significa que amplía su conocimiento al de otras personas que hablan del tema y esto genera fundamentos o garantías sobre sus propias deducciones
Nivel 5	Elabora argumentos en los que se identifican **datos, conclusión(es), garantías, respaldo(s) y refutación(s)**. Este es el nivel máximo de argumentación, pues reconoce a la perfección las etapas dadas en los niveles argumentativos y, además, conoce cuáles son las posibles posturas contrarias a la posición de él

Nota 4. Adaptación de Ortiz et al. (2020) a los niveles de argumentación propuestos por Tamayo (2012), Erduran et al. (2004) y Erduran (2008).

Tamayo (2012) establece que un argumento de calidad se caracteriza por la presencia y articulación efectiva de elementos como datos, garantías, respaldos, cualificadores modales y refutaciones. Erduran (2004) agrega que la calidad de un argumento también se relaciona con la claridad y solidez de la conexión entre cada uno de estos elementos. Los niveles de calidad se pueden identificar a través de la coherencia lógica, la pertinencia y la fuerza persuasiva del argumento en su conjunto.

Al adoptar el modelo de Toulmin en el marco teórico, se busca proporcionar una herramienta analítica sólida para desentrañar la argumentación presente en el aula de matemáticas y comprender cómo los estudiantes y profesores construyen y evalúan argumentos en este contexto. Esta elección teórica permite tratar la complejidad de la argumentación matemática desde una perspectiva realista y contextual, además de que resulta esencial para el propósito de esta investigación de explorar la relación entre la estructura de los argumentos y la estratificación del pensamiento algebraico en el aula de matemáticas.

2.2 Fundamentos del pensamiento algebraico

El pensamiento algebraico se ha asociado a la capacidad de resolver ecuaciones y símbolos algebraicos ligados a situaciones o tareas propuestas, incluso a números, letras y caracteres que componen la representación de objetos matemáticos, pero asumir que este carácter es en sí mismo el que denota el desarrollo del pensamiento algebraico es problemático en medio de investigaciones que parecen indicar que el lenguaje alfanumérico empleado en el álgebra es solo otro medio que da cuenta de ello (Gómez y Mojica, 2014). En medio de la problematización por la emergencia y naturaleza del pensamiento algebraico, investigadores en el campo como Kieran (1989) hicieron un llamado con la intención de centrar la mirada investigativa en el pensamiento algebraico. Aun así, definir conceptualmente el pensamiento algebraico no ha sido posible debido a la diversidad de investigadores, posturas teóricas y objetos algebraicos que convergen y dificultan la posibilidad de establecer precisiones conceptuales (Radford, 2006a).

Desde el punto de vista de la presente investigación, el pensamiento algebraico será entendido como “una forma particular de reflexionar matemáticamente” (Radford, 2006a, p. 2). Donde no se trata solo de manipular símbolos para solucionar problemas, hay que asignar significados, comprender las relaciones entre los símbolos en torno a las situaciones propuestas y reconocer que el pensamiento algebraico implica razonamiento y generalización. Así pues, se reconocen tres condiciones o características fundamentales descritas por Radford (2021): indeterminación, denotación y analiticidad.

La indeterminación: también conocida como sentido de indeterminancia. Reconoce que cuando se razona existen objetos y magnitudes indeterminadas como las variables, las incógnitas y los parámetros.

La denotación: conocida como la designación simbólica. Cuando se razona, la indeterminación debe nombrarse o se debe hacer referencia a ella de alguna manera, ya sea mediante símbolos, signos, caracteres alfanuméricos, gestos, lenguaje, entre otros. Se dice también que la denotación es una expresión semiótica, Vergel (2014).

La analiticidad: opera deductivamente, de manera que, por ejemplo, de unas premisas se puede llegar a unos resultados (Vergel et al., 2022). Se reconoce el carácter operatorio de las magnitudes indeterminadas cuando se aplican propiedades de las operaciones como la suma, la resta, la multiplicación, la división, etc.

Para el desarrollo del presente estudio y en coherencia con la postura teórica de Radford (2021) se declaran elementos que constituyen el marco teórico de la investigación; es así como se presenta un nuevo elemento, el medio semiótico, que cobra sentido en la investigación debido a que destaca las formas de comunicarse y transmitir ideas por los seres humanos, ya sea a través de símbolos, gestos, lenguaje, etc. Para Pierce (s.f.), conocido como el padre de la semiótica y fundador de la disciplina, la semiótica es la ciencia de los signos, donde, según Eco (2000), se establece una relación tríadica entre objeto, signo e interprete. Según Almeida (1989), etimológicamente para Pierce, la semiótica hace referencia a signo y no a un medio.

Eco (1988) menciona que la semiótica o semiología es “la disciplina que estudia todas las posibles variedades de signos” (p. 12) “estudia las relaciones entre el código y el mensaje, y entre el signo y el discurso” (p. 19). Además, define una unidad elemental para que la semiótica exista: el signo. De acuerdo con Eco (1988), el signo es utilizado por el ser humano y por la sociedad para expresar ideas, informar, mentir, engañar, dominar, etc., El signo es un sistema que comunica y que significa, que funciona en la mente humana para representar y expresar ideas y está caracterizado por tres conceptos clave: significante, significado y referente.

Cuando se enuncia que el pensamiento algebraico implica otras acciones como razonar, generalizar, construir significados y simbolizar, estos dos protagonizan un significativo papel en el desarrollo del pensamiento algebraico, pues se reconoce que hacer matemáticas es también un acto simbólico y discursivo (Radford, 2006b). Así pues, los medios semióticos toman relevancia en esta investigación en tanto que se reconoce que emergen y están presentes en comunicaciones e ideas matemáticas que manifiestan los estudiantes, los gestos, las percepciones, el lenguaje, los símbolos, etc., son signos y sistemas de representación (Radford, 2014) que podrían ser signos algebraicos, así como las letras (Radford, 2010). Como menciona Vergel (2016), se debe evitar deslegitimar y no reconocer las acciones que atienden al discurso de manera oral y escrita, además de las acciones gestuales presentes en estudiantes cuando realizan tareas matemáticas pues estas representan los "esfuerzos de construir explicaciones y argumentos sobre estructuras generales y modos de pensar." (p. 2).

2.2.1 Estratificación del pensamiento algebraico

En este estudio se consideraron al mismo tiempo las formas de pensamiento algebraico o estratos propuestos por Radford (2010; 2021). Vale la pena aclarar que los estratos no son secuenciales y pueden coexistir entre sí o transitar de uno a otro y que reciben el nombre de pensamiento algebraico factual, pensamiento algebraico contextual y pensamiento algebraico estándar o simbólico, los cuales serán explicitados a continuación:

Una forma de pensamiento algebraico es factual. Esta se caracteriza por ser concreta puesto que transita entre números o hechos, donde existe una indeterminación que no alcanza el nivel discursivo, además, una de las particularidades de esta forma de pensamiento es que se manifiesta con gestos, palabras y símbolos.

Otra forma de pensamiento es contextual, que requiere ir desde algo particular al general, donde la indeterminación debe hallarse en el discurso explícito y los gestos ya no forman parte de los mecanismos de comunicación. La escritura comienza a tomar relevancia, por ejemplo, la presencia de términos descriptivos pertenecientes al contexto. Radford (2010; 2021), destaca que en este nivel de generalidad los estudiantes pueden mostrar comodidad, comprender cómo utilizar conceptos o procedimientos algebraicos en situaciones concretas y que, en comparación con el factual, los medios semióticos que emergen y la forma en que se trata la indeterminación han tenido un cambio.

Otra forma de pensamiento algebraico recibe el nombre de pensamiento algebraico simbólico o estándar. La forma de designar los objetos tiene un cambio, donde no hay elementos semióticos como gestos, señales, términos descriptivos, etc. Quienes designan y distinguen a este estrato son los signos, paréntesis y caracteres alfanuméricos, el significado abstracto se comprende a partir de las relaciones matemáticas que se gestan, además de que las expresiones se pueden transformar o manipular al usar reglas o propiedades. Según Radford (2010), las fórmulas como narrativas describen los cálculos que se deben realizar, pero a su vez, las fórmulas por medio de la simbología propia del álgebra dificultan el alcance de este estrato, Radford (2010), menciona que:

> En la nueva forma de significar, hay un cambio de enfoque: la atención debe dirigirse ahora a las diferencias morfológicas, es decir, a las diferencias en términos de letras frente a números. En resumen, el significado debe convertirse en relacional. (p. 12)

A partir de los tres estratos del pensamiento algebraico propuestos por Radford (2010; 2021) se construyó la **Tabla *4*** con algunos ejemplos para tener información acerca de cada estrato:

Tabla 4

Ejemplificación de los estratos del pensamiento algebraico

Estrato	Ejemplos
Factual	Supongamos que se han declarado algunas de las propiedades del álgebra, en este caso, la distributiva donde: $a(b+c)=ab+ac$. Entonces, se propone que los estudiantes den una respuesta a la siguiente expresión: $3(2+5)$. En este estrato, se espera que los estudiantes se centren en algo concreto de la expresión, o sea, aplicar una propiedad mediante un proceso donde no se conectan las situaciones presentadas con situaciones reales, problemas generales u otro tipo de interpretaciones amplias. $3(2+5)=3\times 2+3\times 5=6+15=21$
Contextual	David planea celebrar su cumpleaños con una gran fiesta, así que desea comprar gaseosas para sus invitados, su presupuesto es de 92.500 pesos colombianos y se da cuenta que en una tienda cada gaseosa cuesta 3.700 pesos. ¿Cuántas gaseosas puede comprar David con su presupuesto? Ahora bien, se pretende que los estudiantes puedan identificar relaciones entre el costo de cada gaseosa, el presupuesto y la cantidad que puede comprar. Los estudiantes pueden **identificar variables** (el número de botellas que se pueden comprar), **establecer relaciones** (precio de gaseosa y cantidad de gaseosas sin sobrepasar el presupuesto), llevar a cabo **procedimientos** (hallar el valor de la variable) y la **interpretación** del resultado donde se cree que dan cuenta del entendimiento acerca del valor de la variable en el contexto del problema pues representa la cantidad de gaseosas que se pueden comprar con el presupuesto de David.
Simbólico	Supongamos que se explicó el tema “ecuaciones cuadráticas”, parte de abordarlo sugiere proponer situaciones donde los estudiantes puedan resolver ecuaciones cuadráticas. $3x^2-4x-2=0$ Ahora bien, el estudiante podría: identificar la ecuación cuadrática y reconocer que está dada de la forma $ax^2+bx+c=0$, en este caso, $a=3$, $b=-4$ y $c=-2$ A continuación, reconocer que puede hacer uso de la fórmula general para resolver la ecuación dada y obtener dos soluciones donde $x=\frac{2-\sqrt{10}}{3}$ y $x=\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ Finalmente, los estudiantes deben interpretar las soluciones en el contexto de la situación, o sea, de la ecuación cuadrática e identificar que las raíces o el resultado de ellas representan los dos puntos donde la función toca al eje x.

Nota 5. Construcción propia a partir de los estratos del pensamiento propuestos por Radford (2010).

La elección de fundamentar el marco teórico desde el enfoque de Radford se basa en las contribuciones al campo de la educación matemática y, en particular, en su comprensión de cómo los estudiantes desarrollan el pensamiento algebraico. Radford propone un enfoque en la interacción entre los estudiantes, el contenido matemático y el entorno educativo como un todo. Su enfoque considera que el aprendizaje de las matemáticas no es un proceso individual o aislado, sino una actividad social y culturalmente situada. Radford también reconoce la importancia de los procesos cognitivos en la construcción de conocimiento y argumenta que los estudiantes adquieren el conocimiento matemático mediante la exposición a conceptos y reglas, y también la interacción con sus pares, los materiales didácticos y las actividades diseñadas por el profesor.

3 Marco metodológico

El tercer capítulo presenta la descripción demográfica, el enfoque principal de la investigación y algunas características como el objeto de investigación, el tipo de estudio seleccionado para los participantes, el trabajo de campo, el papel de las investigadoras antes, durante y después de la implementación, las estrategias seleccionadas para recolectar la información, la triangulación para el manejo de datos y las consideraciones éticas.

3.1 Demografía de los participantes

Los participantes de la investigación son estudiantes del grado décimo que viven generalmente en la zona urbana o sectores aledaños de la comuna ocho de Medellín. La institución cuenta con dos grupos por cada grado y la jornada escolar se divide en dos: de 6:15 a. m. a 12:15 m., asisten 12 grupos de secundaria y un preescolar y de 12:30 m. a 5:30 p. m. asisten 10 grupos de primaria y otro de preescolar. Para la selección de los participantes se hicieron modificaciones que atienden a Hernández et al. (2014), quienes mencionan que la muestra se entiende como el conjunto de personas en torno a las que se va a recolectar datos. Por ende, se usa el término "participantes" en lugar de "muestra", ya que la investigación considera varios factores clave que evidencian una perspectiva ética, respetuosa y centrada en la participación de los involucrados en el estudio. A continuación, se proporcionan algunas justificaciones para esta elección:

Respeto por la dignidad y autonomía: Llamar a los sujetos "participantes" enfatiza su papel activo en la investigación y reconoce su dignidad y autonomía al elegir colaborar con las investigadoras. Este término “muestra” a veces puede sugerir una mera representación estadística.

Énfasis en la interacción humana: Cada sujeto en estudio no es solo un dato, sino una persona con experiencias, perspectivas y voces únicas que enriquecen la comprensión del objeto de estudio.

Compromiso con la ética de la investigación: Usar el término "participantes" refuerza el compromiso con los principios éticos de la investigación, incluido el consentimiento informado, la confidencialidad y el respeto por los derechos de los sujetos. Esta elección de lenguaje subraya el enfoque en la protección de los derechos y el bienestar de quienes contribuyen a nuestro estudio.

Promoción de la colaboración: Llamar a los estudiantes de esta manera sugiere una colaboración bilateral entre investigadoras y participantes que puede fomentar un ambiente de confianza y apertura, que a su vez puede llevar a una mayor disposición de los participantes para compartir sus experiencias y perspectivas de manera genuina.

Los participantes del grupo inicial pertenecen al grado décimo dos, comprendido por 28 estudiantes en donde 16 son hombres y 12 son mujeres. Los estudiantes se encuentran en un intervalo de edad entre 15 y 17 años, 10 tienen 15 años, que representan al 37% de la totalidad, 13 estudiantes 16 años, un 48% y el 15% restante corresponde a cuatro estudiantes de 17 años. En cuanto al grupo final de participantes, está compuesto por ocho estudiantes donde cuatro de ellos son mujeres y cuatro hombres que se encuentran entre los 15 y 16 años. Se crearon seudónimos para cada uno, con la intención de proteger la identidad de los participantes y mantener sus aportes bajo el anonimato.

Se consideraron inicialmente dos grupos del grado décimo, sin embargo, a partir de la observación realizada, se determinó que uno de los grupos participaba de manera activa y expresaban sus ideas constantemente. En la investigación, la comunicación se entiende según Espinosa y Bohórquez (2013) como un *proceso de interacción social* que tiene un papel determinístico en la clase de matemáticas, pues articula la comprensión y la argumentación. Como mencionan los autores, la comunicación, es *la columna vertebral* de la argumentación. Por ende, se eligió decimo dos en lugar de decimo uno y se tomaron 8 participantes en lugar de los 28 inicialmente, al considerar los aportes relevantes y de calidad que según Bisquerra (2004), permiten generar conocimientos desde una perspectiva inductiva pero no necesariamente representan a toda la población.

La participación de los estudiantes deriva de una serie de criterios: 1) participación voluntaria, 2) permanencia en el proceso, 3) firma de documentos del asentimiento y consentimiento informado y 4) asistencia a las sesiones de clase. En torno a la participación voluntaria, Hernández et al. (2014), describen que esta se ajusta a contextos en los que los sujetos acceden voluntariamente a participar en una investigación. La elección de participantes dependerá de las circunstancias específicas, donde los estudiantes pueden decidir libremente si desean participar en el estudio. Los criterios permiten evidenciar la disposición de los participantes para involucrarse en la investigación, y puede ser especialmente relevante para explorar sus experiencias y perspectivas en profundidad.

Morrow y Smith (1995) mencionan que, si bien los participantes voluntarios a menudo se asocian con estudios experimentales de laboratorio, también se usan en investigaciones cualitativas. En este caso, por ejemplo, la elección de participantes permite acceder a la riqueza de las experiencias y de los argumentos de los estudiantes de décimo grado de manera directa y reflexiva, ya que aquellos que participan deciden hacerlo por voluntad propia y pueden aportar una perspectiva auténtica a la investigación.

3.2 Enfoque Investigativo

El estudio se trató a partir de la problematización que surgió al realizar observación participante en la Institución Educativa José Celestino Mutis, de manera que la investigación fue fiel al contexto. En la misma línea, Hernández et al. (2014) hablan de la investigación cualitativa como aquella que se centra en explorar y comprender fenómenos siempre y cuando se analicen desde el punto de vista de los participantes y que sean fenómenos propios del contexto de los participantes.

Posterior a la identificación del problema se definió el objetivo general y los específicos que trazaron una ruta de trabajo que conlleva a una respuesta. Para dar cumplimiento a los objetivos específicos se diseñaron seis sesiones de trabajo de campo que promovieran la argumentación en álgebra en los estudiantes. Las sesiones se rediseñaron y se ajustaron según la aparición de situaciones imprevistas como cambios de tiempos, las intenciones, disponibilidad y pertinencia.

Respecto al diseño e inmersión en el trabajo de campo, Creswell (2013) hace referencia a que es el investigador quién identifica qué tipo de datos va a recolectar, a partir de quiénes (selección de la muestra), en qué espacios y con qué tiempos. Así, se cree que las adaptaciones y ajustes coinciden con la propuesta anterior, la información a recolectar, los ajustes temporales y el rol que desarrollaron las investigadoras.

3.3 Objeto de investigación y estudio cualitativo

Referente a los participantes de la investigación, fue importante considerar que la cantidad varía y puede determinarse durante el desarrollo y recolección de datos, en donde se consideraron factores que pueden delimitar la elección de los casos posibles y/o necesarios propuestos por Hernández et al. (2014):

> 1. Capacidad operativa de recolección y análisis (el número de casos que podemos manejar de manera realista y de acuerdo con los recursos que tenemos).
> 2. El entendimiento del fenómeno (el número de casos que nos permitan responder a las preguntas de investigación).
> 3. La naturaleza del fenómeno en análisis (si los casos o unidades son frecuentes y accesibles o no, si recolectar la información correspondiente lleva poco o mucho tiempo). (p. 384)

Al considerar los factores mencionados, se presenta el objeto de la investigación, el cual hace referencia a los argumentos y la posible relación con la estratificación del pensamiento algebraico. Fue necesario delimitar y considerar el número de situaciones propuestas y de estudiantes que hicieron parte de la investigación para la recolección de los datos y el análisis de estos. En un principio, 28 estudiantes del grupo de décimo grado se eligieron para participar en el estudio, pero esta elección cambió debido a los nuevos estudiantes que ingresaron a la institución durante el tercer periodo escolar, a la no autorización de los tutores legales de los estudiantes y a la delimitación de corte cualitativo que permitió realizar un análisis sustancial de ciertos casos. Según Neuman (como se citó en Hernández et al., 2014):

> En la indagación cualitativa el tamaño de muestra no se fija a priori (antes de la recolección de los datos), sino que se establece un tipo de unidad de análisis y a veces se perfila un número aproximado de casos, pero la muestra final se conoce cuando las nuevas unidades que se añaden ya no aportan información o datos novedosos ("saturación de categorías"), aun cuando agreguemos casos extremos (p. 385)

Según el autor, precisar el tamaño final de la muestra es ambicioso, por ende, se tomaron ocho casos para el tipo de estudio enmarcado en la investigación cualitativa, donde la estructura de análisis de los datos fue mediante categorías y subcategorías, que comenzaron a tomar forma conforme se desarrollaron.

3.4 Trabajo de campo

Se diseñaron seis sesiones de clase con diversas propuestas para los estudiantes, con el objetivo de analizar los argumentos construidos por estudiantes de décimo grado en la clase de matemáticas y la relación con el pensamiento algebraico a partir de algunos de los contenidos propuestos por los Derechos Básicos de Aprendizaje, los Estándares Básicos de Competencias y el Plan de Área de décimo grado de la institución educativa. Las situaciones se aplicaron en períodos de una hora de clase, máximo dos.

La primera sesión se diseñó a partir de un "Cuestionario de Entrada" que permitiera obtener evidencias de los argumentos que generaron los participantes frente a distintos escenarios matemáticos y a identificar de manera inicial qué entienden por "argumentación" (Ver **Anexo *5***). El cuestionario posee tres situaciones en los cuales los estudiantes respondieron de manera individual a partir de sus conocimientos y opiniones, a cada persona se le hizo entrega de una copia con las situaciones presentadas y el espacio para desarrollarlo. La sesión se realizó el miércoles 06 de septiembre del año 2023 con una duración de dos horas.

La segunda sesión se orientó a la propuesta de "La Espiral del Residuo" según Oleas y Acosta (2016). Este juego busca que los participantes utilicen el algoritmo de la división y elementos propios de la división, como el dividendo, el divisor, el cociente y el residuo. A partir del residuo obtenido entre la división de dos números, se determina la cantidad de posiciones o lugares que el participante podrá avanzar en cada turno, es decir, desde la casilla de salida, que pertenece al número seis, allí realizará un lanzamiento de dado y la cantidad obtenida será el divisor de la posición. Al efectuar la división determinará el residuo obtenido para avanzar, es necesario precisar que no siempre se avanza en cada turno. (Ver **Anexo *6***)

El juego la espiral del residuo contiene reglas y comodines, tres formas posibles de ganar puntos, premios u obtener castigos. Respecto al juego, se plantearon preguntas para suponer la estancia en una casilla o posición y la posibilidad de avanzar o realizar movimientos hacia otras posiciones, así pues, los estudiantes debían argumentar las formas o posibilidades de alcanzar la posición mencionada. El tiempo destinado para esta sesión fue de un bloque de clase, en la que se llevó el material necesario para que los estudiantes pudieran jugar con el tablero de La Espiral del

Residuo y el reglamento del juego que les permitió comprender la dinámica del juego. La fecha en que se llevó a cabo la sesión fue el miércoles 13 de septiembre del año 2023.

La tercera sesión se llamó “Distancia entre puntos”. El propósito de la situación fue identificar las características de localización para establecer la distancia entre dos puntos en una cuadrícula similar al plano cartesiano para determinar la distancia recorrida entre dos puntos (Ver **Anexo *8***), la situación permitía hacer uso de propiedades o teoremas de triángulos rectángulos como el Teorema de Pitágoras y la suma de segmentos. La sesión se llevó a cabo el miércoles 20 de septiembre del 2023.

La cuarta sesión, “¡Vamos a medir!” propone la utilización de un teodolito casero hecho con materiales como un transportador, un hilo, una tuerca y un pitillo (Ver **Anexo *11***). La situación se dividió en dos momentos, primero los teodolitos se construyeron en la institución entre estudiantes e investigadoras y en el proceso de construcción se les explicó a los estudiantes el uso y la importancia del instrumento, cómo funciona, para qué sirve, en qué contextos puede usarse, etc. Se realizaron posteriormente ejemplos en el aula de clase que permitieron evidenciar la utilidad del teodolito como por ejemplo al medir el ángulo de elevación desde una mesa hasta el punto más alto del tablero y la distancia que hay entre el tablero y la mesa para con estos datos hallar la altura a la que se encuentra el tablero.

Tras realizar algunos ejemplos para comprobar la utilidad del teodolito, se entregó un taller con diferentes situaciones con el fin de realizar cálculos para obtener la altura de la puerta del salón, hallar la altura del arco de fútbol, calcular la altura del aro de baloncesto, la de un/a compañera/o, entre otros. Para la segunda parte de la sesión, fue necesario salir a explorar otros espacios de la institución como patios, cancha y segundo piso. Las situaciones propuestas también pretendían que los estudiantes respondieran a preguntas en torno a la dificultad para hallar la altura de los objetos, los pasos y procesos realizados para la obtención de las alturas y la viabilidad en otros contextos. La sesión fue planeada con una duración de dos horas o el bloque de clase y la fecha en la que se realizó fue el 29 de septiembre del año 2023.

La quinta sesión “Recordemos los cuerpos geométricos” se diseñó con la intención de tratar nuevamente cuerpos geométricos como el cilindro, la pirámide, el prisma, el cubo, y el cono para reconocer que son cuerpos compuestos de tres dimensiones: altura, largo y ancho. Esta sesión permitió el desarrollo del concepto de cuerpos geométricos y explicó características como los vértices y las aristas de las figuras, además se trató el cálculo de áreas a través de ejemplos cotidianos, (Ver **Anexo *12***).

Posterior a la explicación y la parte teórica de la sesión, se comentó brevemente acerca de la técnica Cubeecraft, qué es, su origen y algunas características de la técnica. Seguidamente, se hizo entrega de hojas de opalina impresas con personajes elegidos por cada estudiante, con la intención de armar los Cubeecrafts a través de dobleces. En las figuras dieron evidenciar conceptos abordados anteriormente como vértices, aristas, altura, figuras geométricas, numero de caras y área del cuerpo. Se destaca la creación de una guía digital con breves características de cuerpos geométricos con imágenes de referencia y fórmulas para obtener el área de cada figura, propuesta para proveer a los estudiantes el recurso que permite complementar la información brindada y acceder rápidamente a ella. El tiempo estimado para la sesión fue de dos horas y la fecha en que se realizó fue el 04 de octubre del año 2023.

La última sesión es la continuación de “Recordemos los cuerpos geométricos”, la cual consistió en que cada estudiante diligenciara una tabla con datos referentes a las características encontradas en cada parte del cuerpo construido, (Ver **Anexo *14***). Luego, se solicitó que cada estudiante remplazara la cabeza y las manos de su personaje por otro cuerpo geométrico.

La construcción de las figuras debía respetar la proporción del resto del cuerpo del personaje, de manera que esta se adapte. Para finalizar se propusieron preguntas que atendieron al proceso de construcción de los cuerpos nuevos: ¿Cuál es el nombre del cuerpo geométrico construido para la cabeza?, ¿cuál es el nombre del cuerpo geométrico construido para las manos?, ¿qué elementos se consideraron para la construcción? y la descripción de los pasos realizados para construir los nuevos cuerpos geométricos. El tiempo estimado para el desarrollo de la sesión es de dos horas y se llevó a cabo el día 18 de octubre del año 2023.

3.5 Rol de las investigadoras

Se eligió la observación participante durante el proceso de implementación y recolección de datos ya que según Hernández et al. (2014) “Un buen observador cualitativo necesita saber escuchar y utilizar todos los sentidos, poner atención a los detalles, poseer habilidades para descifrar y comprender conductas, ser reflexivo y flexible para cambiar el centro de atención, si es necesario.” (p. 403). Por esta razón, la observación participante implica un compromiso constante y reflexivo con el contexto y los participantes de la investigación.

El observador no se limita a ser un mero espectador, sino que interactúa y se involucra de manera cercana con el entorno de estudio. Esta observación participante puede tomar diversas formas, como la observación participante y el establecimiento de relaciones de confianza con los participantes. Al ser observadoras cualitativas, se busca comprender las perspectivas, las experiencias y los significados subyacentes detrás de los eventos observados, y utilizar la presencia en el campo para obtener una comprensión profunda y rica del fenómeno de estudio. La observación participante es esencial para lograr una investigación enriquecedora y contextualmente significativa en el ámbito cualitativo.

Bajo el mismo rol de investigadora, se tomaron decisiones metodológicas donde fue necesario tener en consideración tres factores. El primero hace referencia a los requerimientos exigidos por la institución educativa en cuanto al Plan de Área Institucional. En segundo lugar, las temáticas que el profesor cooperador propuso para el año escolar, a partir de los Derechos Básicos de Aprendizaje, y necesario dar cumplimiento a estos y por último, basado en la experiencia dentro del aula durante el periodo escolar, la implementación de temáticas y situaciones que permitieran subsanar y retroalimentar dificultades de los participantes con el fin de llevar a cabo las propuestas de la institución, del profesor cooperador y que a su vez permitirá recoger la información necesaria para la investigación.

La labor como investigadoras consistió en ser un medio para llegar a la información, sin interferir en el proceso de razonamiento de cada estudiante para la construcción de sus propios argumentos. Pues se cree que es necesario crear un espacio de confianza y empatía para que los estudiantes se sientan seguros de participar durante las sesiones.

3.6 Recolección de la información

En la recolección de información para esta investigación, se usaron múltiples fuentes y técnicas para una comprensión completa y profunda de los sucesos de estudio. Una parte de la metodología de recolección de datos fue la utilización de bitácoras, elaboradas para registrar detalladamente los acontecimientos y eventos relevantes en el contexto de la investigación. Los registros se complementaron con medios audiovisuales como videos, y fotografías que capturaron momentos clave en cada sesión.

Un elemento crucial de la estrategia de recolección de datos fue la adopción de una observación participante caracterizada por la interacción continua y reflexiva con los participantes del estudio, donde se formularon preguntas abiertas que fomentaban la reflexión y el diálogo. Cada respuesta proporcionada por los participantes se registró de manera meticulosa, con la intención de reconstruir un panorama completo de las experiencias y perspectivas de los sujetos involucradas.

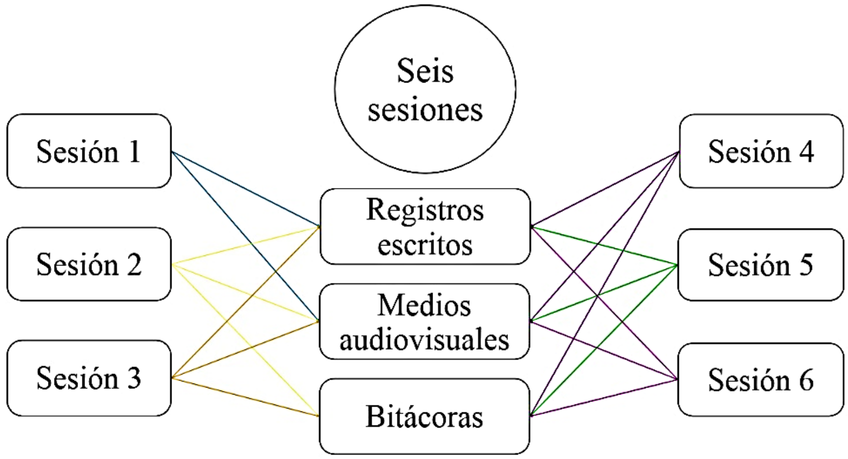
Las fotografías tuvieron un papel significativo al servir de medio visual para llevar un registro de la asistencia y documentar las creaciones y elaboraciones de los estudiantes durante la investigación. Este enfoque multimodal de la recolección de datos, que combina registros escritos, interacción participante y registros visuales y orales, permitió obtener una riqueza de información que se alinea con los objetivos de este estudio y garantiza la validez y confiabilidad de los hallazgos.

3.7 Triangulación de la información en el análisis

Para la realización del trabajo de campo se usó la triangulación de datos, es decir, "diferentes fuentes y métodos de recolección de datos" (Hernández et al. 2014, p. 418). En ese sentido, las seis sesiones tienen recursos para obtener información. En la primera sesión correspondiente al Cuestionario de Entrada se obtuvieron fotografías y registros escritos de los participantes, en la segunda sesión, correspondiente a La Espiral del Residuo se obtuvieron fotografías, registros escritos de las sesiones realizadas por los estudiantes, grabaciones de momentos particulares y bitácoras que documentan experiencias.

La tercera sesión "Distancia entre puntos" también dispone de grabaciones de voz y videos, bitácoras, fotografías y registros escritos. De la cuarta sesión, ¡Vamos a medir! Se obtuvieron registros escritos, bitácoras, fotografías de los teodolitos construidos y de las respuestas que conjeturaron los estudiantes. Y de la quinta y sexta sesión, estrechamente conectadas, se capturaron fotografías de los cuerpos construidos, transcripciones de las respuestas que los participantes desarrollaron frente a preguntas propuestas, bitácoras que describen el proceso elaborado y videos de momentos considerados fundamentales, **Figura *3***.

Figura 3
Recolección de la información



Okuda y Gómez (2005) destacan la necesidad de contemplar y hacer uso de varios métodos como entrevistas, talleres, tareas en grupo, etc., de manera que permitan estudiar desde varias perspectivas un mismo fenómeno y que brinden la oportunidad de ampliar las reflexiones y puntos de convergencia o divergencia hallados en la investigación, pues como mencionan los autores, “la triangulación ofrece la alternativa de poder visualizar un problema desde diferentes ángulos […] y de esta manera aumentar la validez y consistencia de los hallazgos.” (p. 3).

Hernández et al. (2014) recomiendan disponer de varias fuentes de información y maneras de recolectar datos, como ha sido relatado anteriormente, el proceso de recolección de la información en la investigación ha surgido a partir del trabajo de campo y de los diferentes métodos o fuentes de información que se han dispuesto como bitácoras que relatan momentos clave, situaciones puntuales y vivencias a destacar, videos que capturan momentos, gestos y relatos orales, percepciones de los participantes, posturas y reflexiones, audios y fotografías con extractos de las sesiones que se consideran fundamentales, transcripción de respuestas evidenciadas en las sesiones realizadas, registros escritos y orales, etc. Y que evidencia la presencia de triangulación de datos.

Al mismo tiempo se menciona la presencia de triangulación de las investigadoras, que, a la luz de la investigación, se entenderá como la participación de investigadoras o evaluadoras distintas con perspectivas y experiencias no necesariamente iguales (Denzin, 1978). Que permitan dilucidar consistencia en los hallazgos, proveer a la investigación de otras estrategias, reducción de posturas parciales y la posibilidad de que cada investigadora pueda realizar el análisis de datos y que estos puedan ser puestos en comparación (Janesick, 2000; Okuda y Gómez, 2005). Como se ha descrito, la presencia y triangulación de ambas investigadoras fue recibida de forma amena en la investigación de manera en que las situaciones presenciadas, relatadas, vividas y halladas en la recolección de datos se prestó para particularizar y resaltar nuevos hallazgos, puntos de vista que no se tuvieron en cuenta inicialmente y consideraciones sobre las que se puede discutir para establecer puntos medio.

3.8 Consideraciones éticas

Antes de implementar las situaciones, fue necesario solicitar mediante documentos formales, la autorización por parte de los padres de familia para que los estudiantes menores de edad pudieran participar de la investigación. En este documento que puede verse en el **Anexo *1***, se plasmaron aspectos informativos en cuanto a las investigadoras donde, a partir de una breve explicación del trabajo a realizar, no se deja de lado el respeto que se tendrá durante cada sesión para que las situaciones propuestas y los datos obtenidos, sean tratados bajo la legalidad y así evitar riesgos como cargas discriminatorias y actos injustos. En cuanto a las garantías, se asegura la protección de la identidad de cada participante y el tratamiento privado y confidencial de la información recopilada, se evita el uso de nombres propios, publicación de videos, grabación de audios y fotografías que puedan revelar la identidad del participante y poner en riesgo su integridad.

Se necesitaron asentimientos para los estudiantes, ya que cada persona pudo decidir su participación de manera voluntaria. o si por el contrario se desliga de esta. Como se puede ver en **Anexo *15*** y **Anexo *16***, los estudiantes y sus padres de familia pudieron determinar su participación. Además, los actores académicos (rector, profesor cooperador de matemáticas, asesores de prácticas e investigadoras) conocen la información brindada a los acudientes y estudiantes puesto que cada documento se entregó con la firma de cada actor y algunos datos personales para asegurar una comunicación durante el proceso realizado. En cuanto a la entrega de la documentación, se firmaron asentamientos en la jornada escolar y franja horaria de matemáticas el miércoles 06 de septiembre del 2023 y se envió con los estudiantes el consentimiento para cada acudiente y/o padre de familia a cargo.

4 Análisis

4.1 Categorías de análisis

En el proceso de esclarecer la complejidad de la información recabada en la investigación resulta crucial adoptar un enfoque estructurado que permita una interpretación clara y concisa de la información. El marco de análisis propuesto por López Ortega (2018) ofrece esa estructura, puesto que presenta un sistema de categorías y subcategorías que facilitan la organización de la información y su comprensión en el contexto de los objetivos específicos. La **Tabla *5*** que se presenta a continuación encapsula este marco de análisis y brinda una representación visual de las categorías y subcategorías definidas. Esta visualización sirve como instrumento para clasificar la información y como un medio para ilustrar la interconexión entre los niveles de argumentación y estratos del pensamiento algebraico, elementos centrales del estudio.

Tabla 5

Categorías y subcategorías de análisis

Pregunta	Objetivos	Categoría	Subcategoría	Descriptor
¿Cómo los argumentos construidos por estudiantes de décimo grado se relacionan con la estratificación del pensamiento algebraico?	Identificar argumentos construidos por los estudiantes de décimo grado a través del modelo de Toulmin	Niveles de argumentación. Adaptación de Rodríguez Ortiz et al. (2020) a los niveles de argumentación propuestos por Tamayo (2012), Erduran et al. (2004) y Erduran (2008).	**Nivel 1**	Elabora argumentos que describen una vivencia de manera simple. El estudiante no hace análisis, sino que utiliza sus herramientas lingüísticas para narrar lo que capta con sus sentidos.
			Nivel 2	Elabora argumentos en los que se identifican datos y una conclusión. El estudiante concibe la totalidad de los datos y los analiza para emitir una conclusión.
			Nivel 3	Elabora argumentos donde se identifican con claridad los datos, conclusiones y garantías. Percibe datos y emite varias conclusiones que están soportadas o justificadas.
			Nivel 4	Elabora argumentos constituidos por datos, conclusiones y garantías, usa cualificadores modales y respaldos teóricos. El estudiante tiene claros los datos, emite conclusiones con garantías y usa respaldos.
			Nivel 5	Elabora argumentos en los que se identifican datos, conclusión(es), garantías, respaldo(s) y refutación(s). Reconoce a la perfección las etapas dadas en los niveles argumentativos y conoce cuáles son las posibles posturas contrarias a la posición por él.
	Categorizar argumentos construidos por estudiantes mediante los tres estratos del pensamiento algebraico propuestos por Radford.	Estratificación del pensamiento algebraico (Radford, 2006a; 2006b; 2010; 2014; 2021)	**Factual**	La indeterminación no alcanza un nivel discursivo, se presentan acciones y percepciones, se presentan miradas, gestos, palabras y símbolos. (Radford, 2010)
			Contextual	La indeterminación se pretende explicitar en el discurso, el estudiante recurre a medios lingüísticos, términos descriptivos y/o gestos. Se busca generalizar ideas. (Radford, 2010)
			Simbólico	Los símbolos reemplazan los términos descriptivos, se busca llegar a fórmulas a partir del simbolismo algebraico. Según Radford (2010) las fórmulas como narrativas describen los cálculos que se deben realizar.

Nota 6. Adaptación de la estructura de las categorías y subcategorías de análisis propuestas por López Ortega (2018).

La implementación de las categorías y subcategorías de análisis, visualizada en la figura precedente, ha sido instrumental para denotar los aspectos significativos de la información recopilada, alineándolos con los objetivos trazados en esta investigación. La claridad obtenida a través de este análisis refuerza la importancia de adoptar marcos estructurados en la investigación que faciliten el proceso interpretación de los datos.

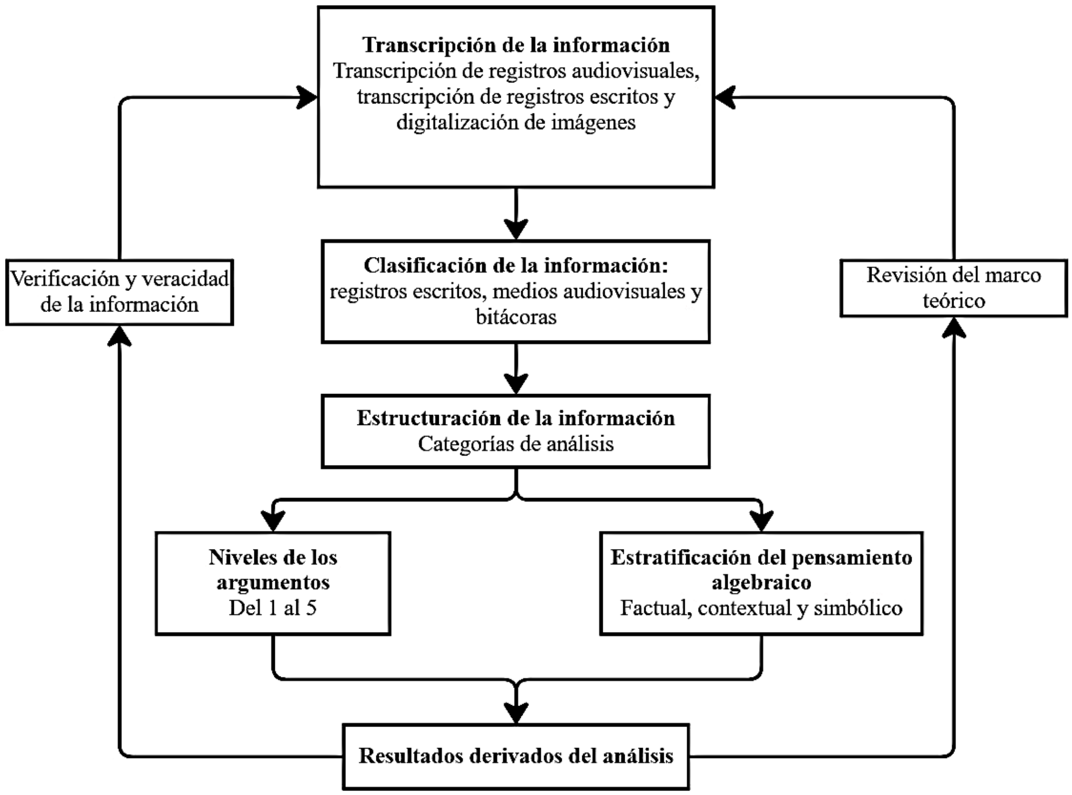
4.2 Ruta de análisis

La ruta de análisis comenzó con la recopilación exhaustiva de datos a través de seis sesiones con estudiantes de décimo grado, cuyas interacciones han sido meticulosamente transcritas, tanto en sus manifestaciones orales como escritas, complementadas con la digitalización de material gráfico. Esta laboriosa etapa prepara el terreno para una clasificación detallada del material recolectado, que incluye fotografías, registros escritos, material audiovisual y bitácoras de campo.

El análisis se enfocó en la estructuración y categorización de la información. Este procedimiento avanzó hacia la clarificación de las categorías analíticas establecidas. Los argumentos de los participantes se evaluaron en una escala de uno a cinco y los estratos del pensamiento algebraico en sus aspectos factuales, contextuales y simbólicos, crucial para captar la esencia de los argumentos examinados.

La revisión del marco teórico se realizó de manera sistemática, con el propósito enriquecer y afinar cada fase del análisis. Esto aseguró que la interpretación de los datos permaneciera vinculada a los fundamentos académicos pertinentes. La autenticación de la información consolidó todo el proceso, que garantizó que los resultados derivados fueran significativos y representativos de las experiencias y conocimientos de los estudiantes.

Figura 4
Ruta de análisis



Nota 7. Construcción propia guiada por la propuesta de (López Ortega, 2018).

La **Figura *4*** sintetiza la ruta de análisis adoptada en esta investigación y permite evidenciar un enfoque estructurado y sistemático. Cada etapa, desde la transcripción de la información hasta los resultados derivados del análisis, ha sido crucial. La constante verificación y la veracidad de la información, junto con la revisión del marco teórico, aseguran que las conclusiones alcanzadas se basen en fundamentos sólidos y reflejen con precisión los objetivos de la investigación. Esta figura detallada no solo refuerza la validez de los hallazgos, sino que también destaca la importancia de una ruta de análisis bien definida para la interpretación y la comunicación de los resultados investigativos.

4.3 Codificación de la información

Para preservar la confidencialidad de los participantes de la investigación, cada estudiante fue nombrado bajo un seudónimo asignado que no guarda relación alguna con su identidad. En cuanto al proceso de análisis se hizo uso de la codificación, que permitió simplificar y organizar la información recabada para facilitar su interpretación. Con la codificación establecida, se simplificó la información recogida, de manera que se transformaron los elementos complejos de los argumentos en términos concisos y manejables. Este proceso permitió un análisis ágil y una interpretación efectiva de los datos. La **Tabla *6*** y **Tabla *7*** resumen la codificación empleada, pues reflejan cómo se traducen los componentes de los argumentos a un sistema de símbolos claros, que facilitan la navegación a través del análisis y las conclusiones de este estudio junto con los seudónimos utilizados para los estudiantes.

Tabla 6

Componentes de un argumento

Componentes	Codificación
Conclusión	C
Dato	D
Garantía	G
Respaldo	B
Cualificador Modal	Q
Refutación	R

Tabla 7

Seudónimo de los participantes

Participantes	
Camila	
Manuel	
Martín	
Josefa	
Arturo	
Javier	
Silvia	
Teresa	
Investigadoras	
Angie Susana Rivera Zapata	Profesora 1
Gabriela Galeano Castro	Profesora 2

4.4 Niveles de los argumentos

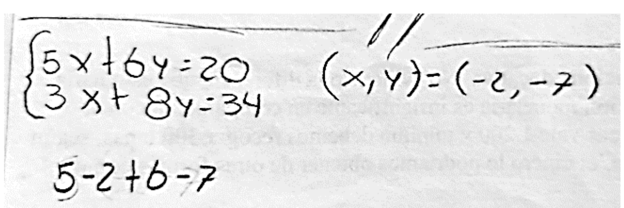
Estos se denotan con el propósito de apuntar a la consecución del primer objetivo específico descrito en la presente investigación, identificar los argumentos construidos por los estudiantes, ahora bien, en el marco teórico de la investigación se expuso que los niveles de los argumentos son una adaptación de Rodríguez Ortiz et al. (2020) a los niveles de argumentación propuestos por Tamayo (2012), Erduran et al. (2004) y Erduran (2008) con base en la teoría de argumentación propuesta por Toulmin (2007) y que como bien dice, existen unas características que permiten determinar en qué nivel se puede encontrar un argumento según los elementos expuestos.

4.4.1 Nivel argumentativo 1

Los argumentos generados por los estudiantes en este nivel revelan no solo su comprensión inicial de los conceptos matemáticos sino también la manera en que articulan y comunican sus pensamientos. Al evaluar estas primeras expresiones argumentativas, emergen particularidades individuales de cada participante. En la primera sesión, denominada "Cuestionario de entrada" (Ver **Anexo *5***) la información recolectada, particularmente con el estudiante Martín, ofrece un reflejo distintivo del Nivel argumentativo 1. La segunda pregunta en donde se propone un sistema de ecuaciones, Martín demuestra una etapa inicial de argumentación, limitándose a reiterar las ecuaciones (D) sin completar su resolución. Su intento de sustitución de valores, aunque incompleto, refleja el enfoque característico de este nivel (Ver **Figura *5***).

Figura 5

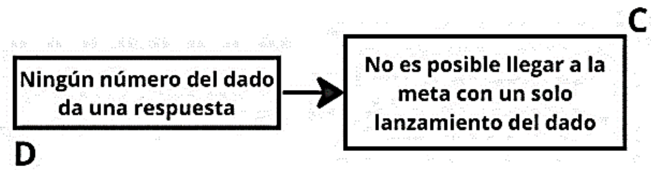
Argumento de Martín en la sesión 1



En la primera sesión se evidencia el Nivel argumentativo 1 en un estudiante, es de esperarse al considerar que son alumnos de décimo grado, de quienes se anticiparía un manejo elaborado de elementos argumentativos y algebraicos.

En la segunda sesión, titulada "La espiral del residuo", (Ver **Anexo *6***), se llevó a cabo un análisis de las estrategias argumentativas de los participantes, basándose en la información recolectada. El estudiante Manuel, en la primera interrogante (Ver **Figura *6***), ofrece una conclusión y presenta un dato, señala que "ningún número del dado da una respuesta", e indica que ningún número de las caras del dado genera un residuo de tres en la casilla 17. Manuel infiere que las posibilidades ofrecidas por el dado son insuficientes para alcanzar el resultado deseado en el juego propuesto. Sin embargo, aunque reflexiona sobre el residuo, no proporciona garantías ni respaldos que solidifiquen sus observaciones o su conclusión.

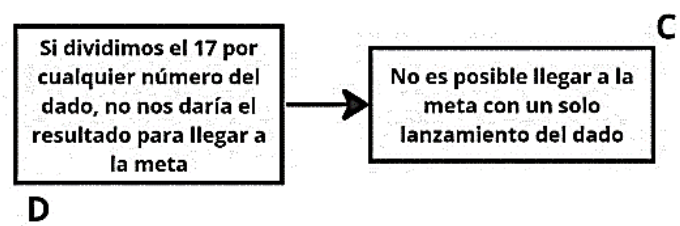
Figura 6
Esquema del argumento de Manuel y su grupo en la sesión 2



Este análisis revela que Manuel, al fundamentar su afirmación en una negación, no profundiza en el razonamiento matemático que sustenta su postura, limitándose a una constatación directa sin explorar o explicar las razones matemáticas que la validen.

En el argumento presentado por Martín (Ver **Figura *7***), se observa que concluye la imposibilidad de alcanzar la meta con un solo lanzamiento del dado al dividir el número 17. Esta afirmación sugiere que Martín ha identificado la división como la operación relevante y, tras considerar los posibles resultados de dividir 17 entre los números del dado, ha llegado a la conclusión de que no se puede obtener un resultado que cumpla con las condiciones necesarias para lograr la meta propuesta en el juego. Martín comunica un razonamiento deductivo basado en la exploración de los resultados de la división, aunque no se exponen los procesos matemáticos específicos ni las evidencias para apoyar su afirmación.

Figura 7
Esquema del argumento de Martín y su grupo en la sesión 2



En la evaluación del Nivel argumentativo 1, se evidencia razonamiento y una comprensión elemental de la problemática matemática. Los estudiantes Martín y Manuel presentan sus argumentos con base en una negación directa y una percepción inmediata de las limitaciones del dado respecto al número 17, refleja una aplicación básica de operaciones y una deducción simple sin un desarrollo profundo de respaldos o garantías. La ausencia de datos, garantías detalladas y de un análisis riguroso matemático es característica de este nivel, donde las conclusiones se basan mayormente en la observación directa. A pesar de esto, los intentos de argumentación representan un punto de partida valioso para fomentar un pensamiento algebraico elaborado y una argumentación estructurada, aspectos que son esenciales para el avance hacia niveles argumentativos superiores.

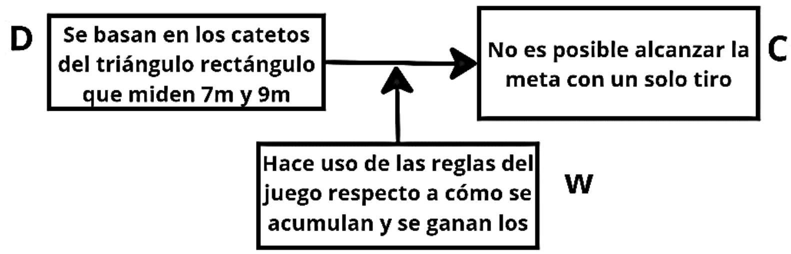
4.4.2 Nivel argumentativo 2

En este nivel los estudiantes avanzan más allá de la descripción hacia la explicación simple, se utilizan datos y definiciones básicas para respaldar argumentos. La conclusión se sostiene con garantías aún incipientes y respaldos que, si bien presentes, aún carecen de la profundidad necesaria para una justificación integral. Los cualificadores modales y las refutaciones comienzan a aparecer, pero no se exploran ni se desarrollan completamente. Esta fase representa un paso crucial para fomentar el pensamiento crítico y analítico, ya que los estudiantes empiezan a conectar los datos con las conclusiones, que preparan el terreno para una argumentación elaborada y sólida en niveles subsecuentes.

Camila, durante la sesión 2 pregunta 1, al integrar las reglas del juego y el proceso de acumulación de puntos en su razonamiento para dar respuesta al interrogante propuesto, evidenció un progreso significativo con características del Nivel argumentativo 2. Ella no solo señala la imposibilidad de alcanzar la meta con un solo lanzamiento del dado, sino que, razona sobre puntos adicionales obtenidos al recorrer las casillas 7, 11 y 13 (Ver **Figura *8***). Esta mención de casillas específicas introduce datos y definiciones básicas como parte de su razonamiento, que evidencia un avance de la mera descripción a la explicación.

Figura 8

Esquema del argumento de Camila y su grupo en la sesión 2



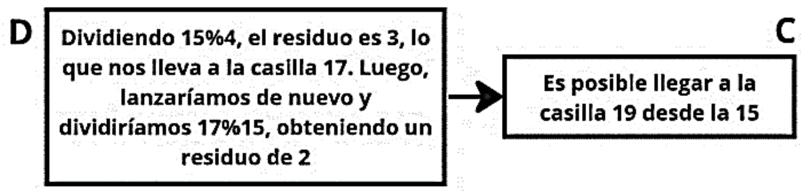
Camila articuló una conclusión que reposaba sobre una garantía implícita relacionada con las reglas del juego; esto se refleja en su comprensión de cómo se acumulan los puntos y cómo estos afectan la probabilidad de alcanzar la meta. Su argumento sugiere que incluso si se reclaman puntos en otras casillas, permanece un escenario en el que no se alcanza la meta, respaldando su posición con la lógica inherente al juego. Aunque no detalla las garantías matemáticas subyacentes ni proporciona respaldos explícitos, su uso de la regla del juego como una garantía muestra un intento de justificación.

Los cualificadores modales también hacen su aparición; la palabra “posiblemente” indica que está considerando la variabilidad y la incertidumbre en su razonamiento. La refutación, aunque no completamente explorada, se intuye en la consideración de que existen condiciones específicas bajo las cuales se podría obtener un residuo y, por ende, no llegar a la meta. Este nivel de argumentación es crucial para el desarrollo del pensamiento crítico y matemático.

Camila, en otro de sus argumentos presentados en la sesión dos, segunda pregunta, aplica conocimientos de división para predecir el resultado de moverse por el tablero y que muestra un desarrollo en su capacidad para utilizar datos numéricos en el contexto de una actividad matemática. Hace uso de operaciones matemáticas, empleando residuos de divisiones para justificar su conclusión de que es posible llegar de la casilla 15 a la 19. El uso del símbolo de porcentaje (%) en la división (Ver **Figura 9**), sugiere que ella puede estar considerando las operaciones en términos de porcentajes, que cual podría implicar una interpretación de los residuos como partes de un todo, posiblemente reflejando un entendimiento de que el juego se basa en una serie de movimientos que dependen de porcentajes o proporciones.

Figura 9

Esquema del argumento de Camila y su grupo en la sesión 2, segunda pregunta



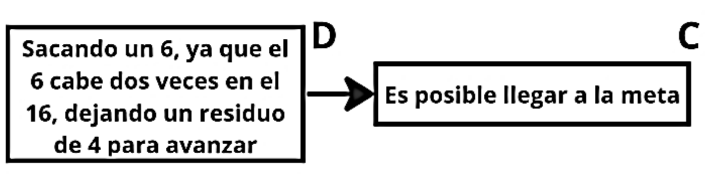
La ausencia de cualificadores modales en su argumento muestra una afirmación directa y segura sobre los resultados posibles del juego. Esto indica que, aunque Camila está utilizando datos y operaciones matemáticas para construir su argumento, todavía no está avanzando hacia una argumentación más compleja. Su argumento también refleja una estructura de argumentación en la que la conclusión (C) se deriva de un dato (D) específico. No obstante, la garantía (W) que debería vincular el dato con la conclusión de manera más explícita, está implícita en su razonamiento y no está expresada directamente en su declaración. Esto es característico del nivel dos, donde los estudiantes están en proceso de comprender cómo articular las garantías de manera que establezcan la conexión entre los datos y las conclusiones más explícitas y sólidas.

Manuel, al tratar la pregunta en la sesión dos sobre si es posible llegar a la meta desde la casilla 16 con un solo lanzamiento de dado, proporciona una respuesta directa que utiliza datos concretos: al sacar un 6, este número encaja dos veces en 16, resultando en un residuo de 4 para avanzar. Esto indica que se sitúa en el Nivel argumentativo 2 porque, aunque maneja datos matemáticos para sostener su afirmación, realiza la acción sin proporcionar una garantía completa o un respaldo explícito que enlace su razonamiento con las reglas del juego.

La respuesta de Manuel refleja una comprensión operacional del problema, identificando una acción específica (sacar un 6) y sus consecuencias inmediatas (un residuo de 4), como se puede ver en la **Figura *10*** y que sugiere una aplicación práctica de la división y la capacidad de utilizar resultados de operaciones matemáticas para argumentar. Sin embargo, su argumento no va más allá de la descripción de la operación y su resultado: no ofrece una explicación matemática detallada o una justificación basada en principios algebraicos, ni considera posibilidades alternativas o las probabilidades involucradas en el lanzamiento del dado.

Figura 10

Esquema del argumento de Manuel y su grupo en la sesión 2, tercera pregunta



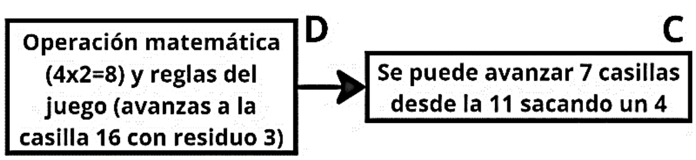
La ausencia de cualificadores modales y la falta de respaldos detallados señalan que, aunque Manuel está comenzando a utilizar elementos de la argumentación matemática, aún necesita desarrollar una comprensión profunda de cómo estructurar argumentos matemáticos robustos y cómo emplear el razonamiento matemático para ofrecer garantías sólidas y completas.

Martín presenta un argumento que refleja un uso concreto de la aritmética para fundamentar sus afirmaciones dentro del contexto del juego (Ver **Figura *11***). Al indicar que multiplicando 4 por 2 se obtiene un avance a la casilla 16 con un residuo de 3, está realizando una interpretación directa de las reglas del juego en términos de una operación matemática, para determinar la cantidad de avance en el tablero.

Este razonamiento destaca su habilidad para aplicar la aritmética de manera funcional en el juego, utilizando la multiplicación para predecir un movimiento. Aunque su conclusión señala que es posible avanzar 7 casillas desde la 11 sacando un 4, razonamiento que se basa en un cálculo directo, Martín no articula las garantías que vinculan su operación matemática con las reglas del juego de manera detallada. Si bien menciona las reglas del juego, no desarrolla una justificación que profundice en el porqué de la selección de esa operación en particular ni considera otros posibles resultados o estrategias dentro del juego.

Figura 11

Esquema del argumento de Martín y su grupo en la sesión 2, quinta pregunta



En lugar de emplear simplemente la operación matemática como un medio para llegar a una conclusión, Martín podría fortalecer su argumento con una reflexión amplia sobre cómo la elección del número 4 es significativa en este contexto y qué implicaciones tiene para el juego en general. Esto incluiría explorar por qué este es el movimiento óptimo y si hay otras consideraciones que podrían afectar esta decisión, como la probabilidad de sacar diferentes números en el dado. La comprensión de estas dimensiones de manera ampliada eventualmente llevaría su argumento a un nivel avanzado.

En el análisis del Nivel argumentativo 2 realizado en este trabajo, se registró un avance importante en el proceso de argumentación de los estudiantes. Camila, Manuel y Martín, mostraron un progreso al pasar de la mera descripción a la explicación, empleando datos numéricos para fundamentar sus razonamientos. Se manifestó una tendencia a utilizar las operaciones algebraicas, específicamente la obtención de residuos y la aplicación de estas operaciones dentro del marco de las reglas del juego, para justificar las afirmaciones.

Durante las sesiones analizadas, las contribuciones de Camila y Manuel reflejaron una aplicación de estrategias algebraicas al razonar sobre la progresión en el juego, aunque sus argumentos no alcanzaron a detallar justificaciones completas que conectaran operaciones algebraicas y principios matemáticos más amplios con las reglas del juego. Por su parte, Martín mostró un entendimiento de la aplicación práctica de las operaciones, aunque se centró en un nivel operacional del álgebra sin expandir su análisis a un razonamiento más abstracto o general.

El tratamiento de la información por parte de los estudiantes subrayó una etapa de aprendizaje en la cual la capacidad para articular argumentos matemáticos completos y robustos estaba todavía en formación. Pese a esto, se evidenció un desarrollo significativo en su capacidad para conectar los datos con las conclusiones que sugiere un potencial crecimiento hacia un pensamiento algebraico sofisticado. Estos hallazgos señalaron que, aunque los estudiantes estaban empleando conceptos algebraicos, el camino hacia una argumentación algebraica de nivel superior aún requería de un esfuerzo continuado para alcanzar una mayor profundidad y reflexión en sus razonamientos.

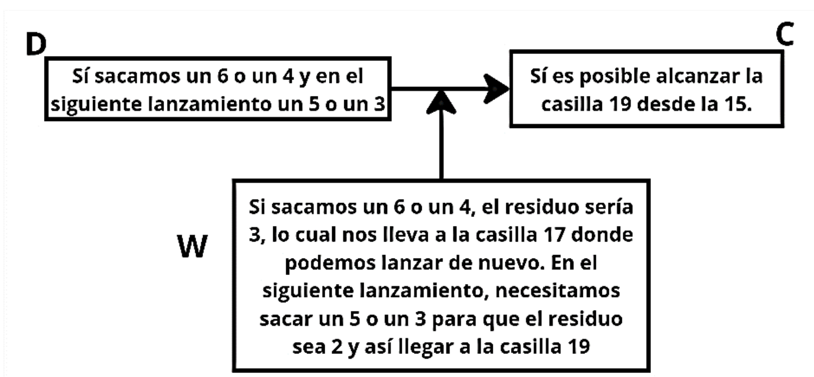
4.4.3 Nivel argumentativo 3

En este nivel se observa una evolución significativa en la argumentación de los estudiantes, se exhibe una mayor elaboración ya que presentan razonamientos que articulan datos y conclusiones con garantías lógicas y robustas. Estos razonamientos muestran una comprensión que va más allá de la simple enumeración de hechos, al emplear razonamiento deductivo que demuestra un conocimiento matemático profundo y una aplicación crítica y reflexiva de los conceptos aprendidos. Javier presenta un argumento matemático que refleja un proceso de razonamiento claro y estructurado.

La situación implica un juego que requiere realizar cálculos para progresar de una casilla a otra, y Javier utiliza su conocimiento de las reglas del juego para anticipar los resultados de los lanzamientos de dados. En su argumento, (Ver **Figura *12***), se identifican los datos, que son los posibles resultados de los dados que permitirían avanzar en el juego. Luego, ofrece una garantía que conecta lógicamente estos datos con la conclusión de que alcanzar la casilla 19 desde la 15 es posible. Javier se apoya en el conocimiento específico de las reglas del juego y en cálculos matemáticos concretos para justificar su afirmación y que demuestra una capacidad para usar el razonamiento matemático de manera aplicada y contextual.

Figura 12

Esquema del argumento de Javier y su grupo en la sesión 2, segunda pregunta

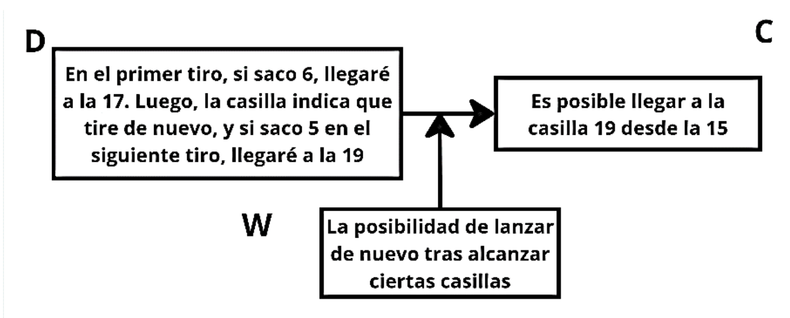


La capacidad de Javier para formular un argumento que incluye datos, una garantía que conecta dichos datos con una conclusión viable, y la ausencia de cualificadores modales o refutaciones, sugiere su ubicación en el Nivel argumentativo 3. Su argumento se sustenta en conocimientos específicos y la aplicación de cálculos matemáticos, evidenciando un razonamiento matemático desarrollado y un entendimiento significativo del juego en cuestión. Javier no solo muestra la habilidad para conectar los resultados de los lanzamientos con los movimientos en el juego, sino que también demuestra una comprensión de la secuencialidad y la causalidad matemática. Esta competencia es indicativa de un nivel de pensamiento algebraico contextual, en el cual Javier está aplicando su conocimiento matemático a una situación práctica, un reflejo del tipo de habilidades argumentativas y analíticas que se espera fomentar en la educación matemática actual.

En la argumentación de Manuel (**Figura *13***) se identifica una secuencia de acciones que demuestra su habilidad para aplicar las reglas del juego y realizar cálculos matemáticos con el fin de alcanzar un objetivo específico. Sus datos (D) inician con una suposición clara: al sacar un 6 en el primer tiro, se llega a la casilla 17. Este es el primer paso en una serie que, según su razonamiento, podría culminar en alcanzar la casilla 19. La garantía (W) que proporciona, basada en las reglas del juego, indica que es posible hacer un segundo lanzamiento después de alcanzar ciertas casillas. Manuel interpreta que, con esta segunda oportunidad, un 5 le permitiría avanzar las posiciones necesarias para llegar a su destino final, la casilla 19. Su conclusión (C) es una afirmación directa de la posibilidad: desde la casilla 15 es viable llegar a la 19 bajo las condiciones dadas.

Figura 13

Esquema del argumento de Manuel y su grupo en la sesión 2, segunda pregunta

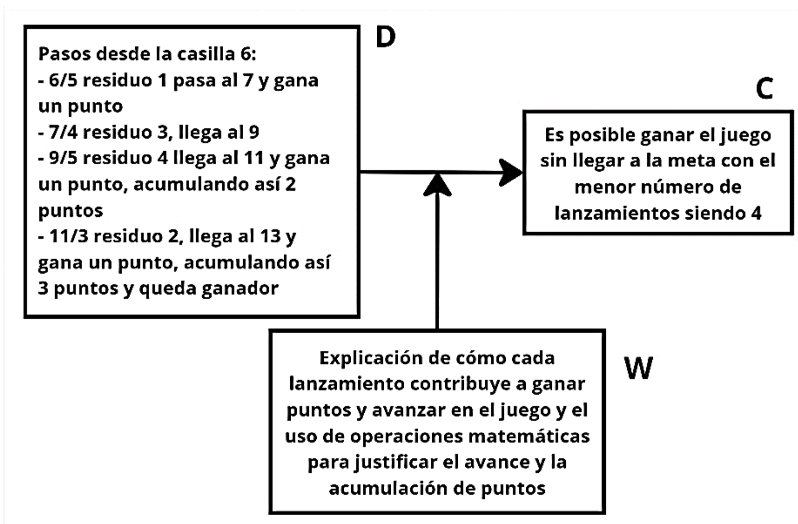


La lógica que Manuel emplea para enlazar los componentes de su argumento revela una comprensión sólida de las reglas y una habilidad para planificar estratégicamente los pasos a seguir. Esta capacidad para utilizar el conocimiento adquirido y aplicarlo en la toma de decisiones es un reflejo del pensamiento algebraico en acción, donde la matemática se convierte en una herramienta para resolver problemas y predecir resultados en situaciones de la vida real.

Silvia construye su argumento con precisión y claridad, enfocándose en la estrategia para ganar el juego a partir de la casilla 6 (Ver **Figura *14***). Sus datos (D) son secuencias numéricas específicas que indican movimientos posibles y los puntos obtenidos en cada uno, demuestra una comprensión detallada de las jugadas y sus resultados. Con operaciones matemáticas simples pero efectivas, Silvia proporciona una garantía (W) que vincula estos movimientos con la posibilidad de ganar el juego, al argumentar que el número óptimo de lanzamientos necesarios para la victoria es cuatro.

Figura 14

Esquema del argumento de Silvia en la sesión 2, sexta pregunta



La conclusión (C) de Silvia, que afirma la posibilidad de ganar el juego sin necesidad de llegar a la última casilla, resalta una visión estratégica que sobrepasa el entendimiento básico del juego. El análisis del argumento de Silvia revela una aplicación intuitiva de conceptos relacionados con el pensamiento algebraico. La forma en que detalla la secuencia de movimientos y su impacto en la puntuación sugiere una comprensión de las relaciones numéricas y su acumulación, reflejo de una habilidad para manejar variables, fundamental del pensamiento algebraico. Además, el proceso de Silvia para alcanzar una conclusión optimizada respecto a la cantidad de lanzamientos necesarios para ganar el juego implica una forma de razonamiento que es inherente al álgebra: el análisis de cómo las variaciones en una cantidad afectan a otra.

El razonamiento de Martín y su equipo (**Figura *15*** y **Figura *16***), aplicado a la pregunta de calcular la distancia más corta de la casita a la fábrica en la sesión 3, es un ejemplo claro del uso eficaz del pensamiento algebraico en un contexto geométrico. Ellos proporcionan datos (D) específicos sobre las dimensiones del problema: los catetos de un triángulo rectángulo que miden $7m$ y $9m$. Estos datos no son arbitrarios; son la piedra angular de su razonamiento y el punto de partida de sus cálculos. Utilizando el Teorema de Pitágoras, una garantía (W) matemáticamente sólida, justifican su proceso para encontrar la hipotenusa, que en este caso representa la distancia más corta. El teorema, que relaciona los lados de un triángulo rectángulo, se aplica perfectamente al problema, permitiéndoles calcular la longitud de la diagonal y, por ende, la distancia más corta.

Figura 15

Esquema del argumento de Martín y su grupo en la sesión 3

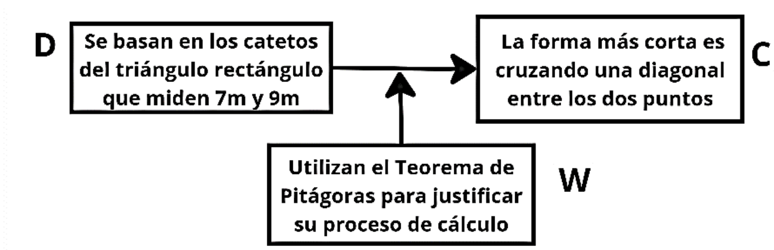
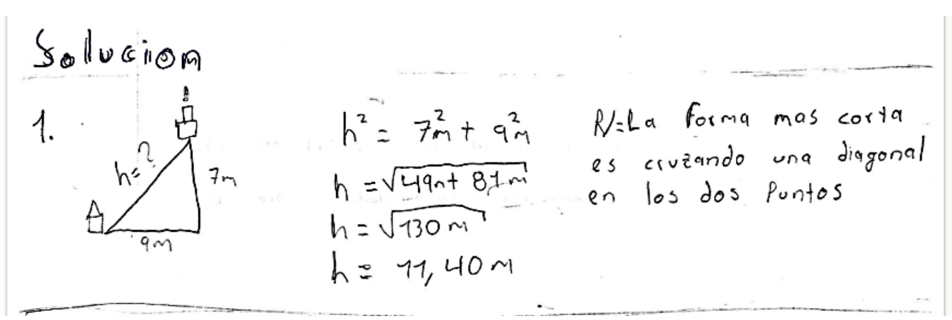


Figura 16

Argumento de Martín y su grupo en la sesión 3

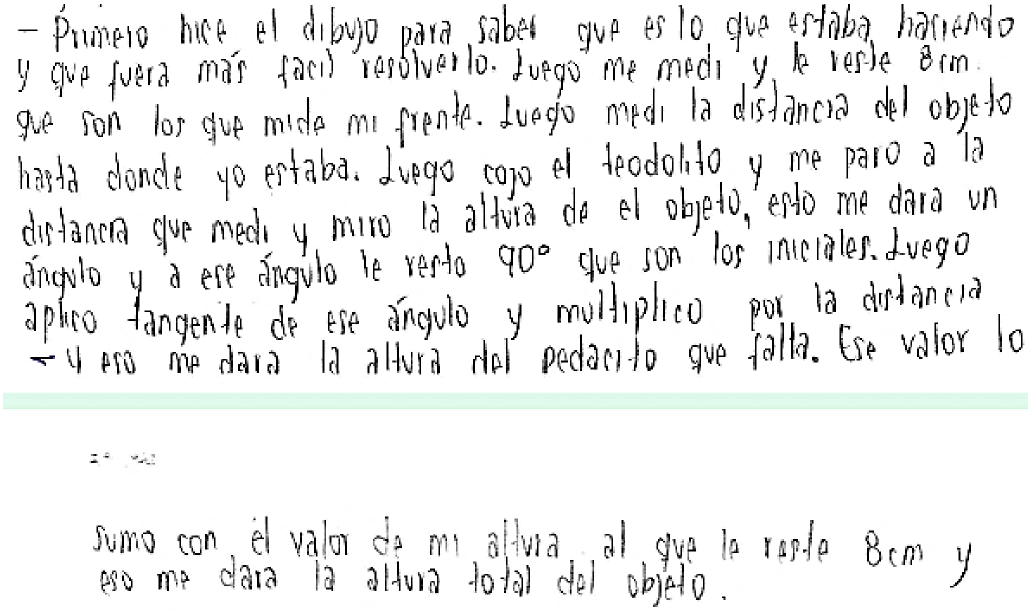


Su conclusión (C) de que la ruta más directa es a través de la diagonal entre dos puntos refleja una comprensión de los principios geométricos fundamentales, que dictan que la distancia más corta entre dos puntos en un plano es la línea recta que los une. Al comunicar claramente su proceso y los resultados, demuestran no solo una habilidad para resolver problemas matemáticos, sino también para relacionar estos problemas con situaciones de la vida real. Esta habilidad para formular un argumento coherente que conecta la teoría con la práctica destaca su competencia en construir razonamientos matemáticos sólidos y relevantes para resolver problemas concretos.

Para la cuarta sesión, la explicación de Silvia acerca de cómo determinar la altura de un objeto a través del uso de un teodolito casero refleja un nivel un poco más alto de argumentación, que se alinea con las características del Nivel Argumentativo 3. En su narrativa, no solo describe los pasos seguidos para la medición, sino que también evidencia una comprensión profunda de los conceptos geométricos y trigonométricos involucrados (**Figura *17***).

Figura 17

Argumento de Silvia en la sesión 4


– Primero hice el dibujo para saber que es lo que estaba haciendo
y que fuera más facil resolverlo. Luego me medi y le reste 8cm.
que son los que mide mi frente. Luego medi la distancia del objeto
hasta donde yo estaba. Luego cojo el teodolito y me paro a la
distancia que medi y miro la altura de el objeto, esto me dara un
ángulo y a ese ángulo le resto 90° que son los iniciales. Luego
aplico tangente de ese ángulo y multiplico por la distancia
y eso me dara la altura del pedacito que falta. Ese valor lo

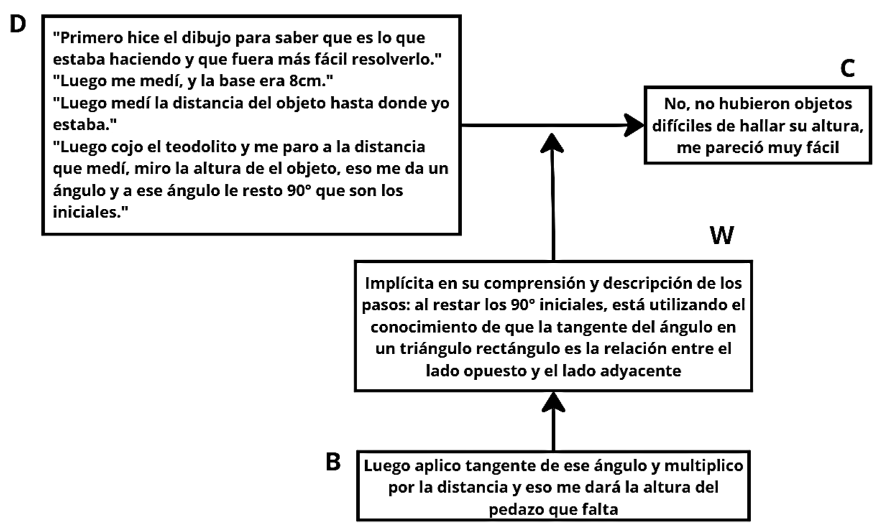
sumo con el valor de mi altura al que le reste 8cm y
eso me dara la altura total del objeto.

Los datos (D) que Silvia proporciona incluyen las medidas iniciales y la descripción de cómo posicionarse con el teodolito. Su garantía (W) se basa en el conocimiento del uso de la tangente en triángulos rectángulos, un concepto matemático esencial que aplica para deducir la altura del objeto. Al restar los 90° iniciales y usar la tangente para el cálculo final, muestra un razonamiento deductivo y una aplicación de la trigonometría para resolver problemas reales, (Ver **Figura *18***).

La conclusión (C) de Silvia es directa y muestra confianza: encontrar la altura no presentó dificultades, esto se cree que implica familiaridad con los métodos matemáticos empleados. Este nivel de comprensión y la habilidad para aplicarla de manera efectiva en la práctica son precisamente características que definen al Nivel Argumentativo 3. La claridad de su proceso y la exactitud de su aplicación práctica demuestran que Silvia ha internalizado los conceptos matemáticos hasta el punto de poder utilizarlos intuitivamente para resolver problemas del mundo real, un claro indicador del tipo de habilidades argumentativas y matemáticas avanzadas que se esperan en este nivel.

Figura 18

Esquema del argumento de Silvia en la sesión 4



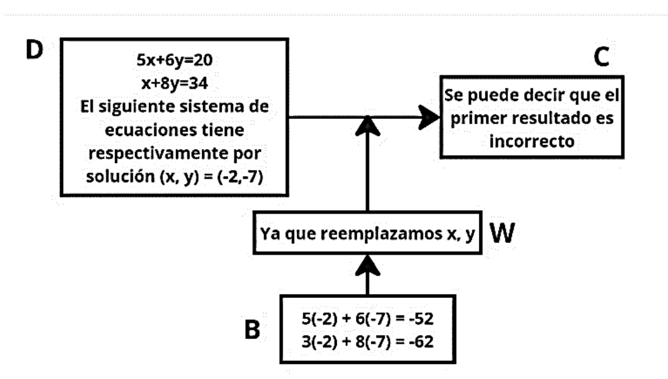
En este nivel se ha observado una evolución en la capacidad de argumentación de los estudiantes, reflejada en una elaboración que integra datos, conclusiones y garantías de manera cohesiva. A través de ejemplos como los de Javier y Manuel, se ve una aplicación consciente de conocimientos matemáticos y habilidades de razonamiento que resultan en argumentos estructurados y contextualizados. Estos estudiantes han demostrado la capacidad no sólo de comprender las operaciones matemáticas y las reglas del juego implicadas, sino de aplicar estos conceptos de manera reflexiva para predecir y justificar resultados dentro de situaciones prácticas. Este nivel de argumentación indica una madurez en el pensamiento algebraico, en la que los estudiantes son capaces de utilizar sus habilidades matemáticas para argumentar, elementos cruciales para la solución de problemas complejos.

4.4.4 Nivel argumentativo 4

Este nivel se centra en un dominio donde la capacidad argumentativa de los estudiantes alcanza un notable nivel de madurez y refinamiento. Este nivel se caracteriza por la integración y aplicación de conocimientos avanzados que permiten no solo resolver problemas complejos, sino también reflexionar sobre el proceso, dar garantías de los pasos tomados con profundidad y ofrecer una crítica constructiva de los resultados. La argumentación en este estadio va más allá de aplicar fórmulas y procedimientos; implica una comprensión conceptual que se entrelaza con la habilidad para evaluar, sintetizar y expandir sobre la información dada. A través de esto, los estudiantes exhiben una sofisticación en su pensamiento que demuestra un alto grado de competencia matemática y una poderosa capacidad para comunicar sus razonamientos de forma efectiva. En las siguientes secciones, se explorarán ejemplos de cómo los estudiantes articulan esta complejidad argumentativa y la aplican en contextos matemáticos.

Camila demuestra una capacidad argumentativa de Nivel 4 al abordar críticamente la solución de un sistema de ecuaciones lineales. Sus datos (D) presentan el sistema y la solución propuesta inicialmente, mientras que el respaldo (B) de su argumentación involucra la sustitución directa de estos valores en las ecuaciones dadas para verificar su validez. Su garantía (W) se sostiene en la lógica algebraica, utilizando operaciones matemáticas para demostrar que la solución propuesta no satisface las ecuaciones, (Ver **Figura 19**).

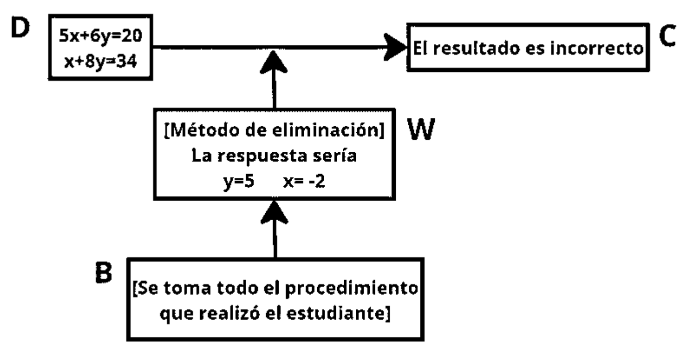
Figura 19
Argumento de Camila en la sesión 1



La conclusión (C) a la que llega Camila es una refutación basada en evidencia concreta: las ecuaciones no se cumplen al reemplazar la solución dada, y, por ende, declara que el resultado inicial es incorrecto. La estructura de su argumento, aunque se desvía ligeramente de la forma estándar de Toulmin, debido a la ausencia de cualificadores modales, sigue siendo rigurosa y efectiva, evidenciando un alto nivel de competencia matemática y argumentativa. Ella no solo calcula y verifica, sino que también comunica sus hallazgos con claridad, contribuyendo así a un nivel de argumentación que encarna el análisis crítico y la autorreflexión.

Arturo presenta una argumentación en su abordaje del sistema de ecuaciones lineales. Con un uso meticuloso del método de eliminación como respaldo (B), Arturo no solo muestra el proceso que siguió, sino que también valida su razonamiento con un método algebraico reconocido. Los datos (D) proporcionados describen el sistema de ecuaciones inicial, y la conclusión (C) a la que llega es que la solución ofrecida es incorrecta (Ver **Figura 20**).

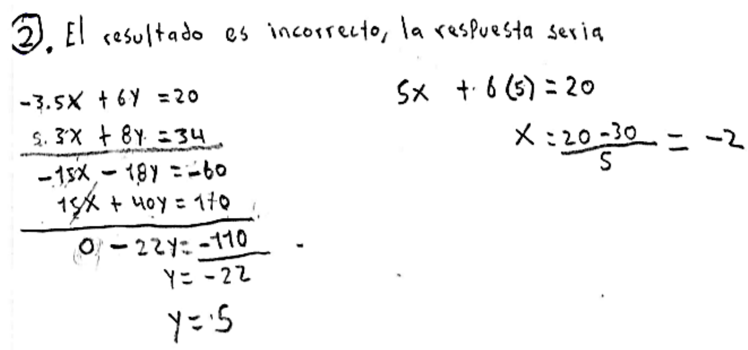
Figura 20
Argumento de Arturo en la sesión 1, segunda pregunta



Arturo se apoya en la garantía (W) de su conocimiento sobre el método de eliminación para evaluar la validez de la solución propuesta, llegando a la conclusión de que los valores de x y y que ha calculado, indican un error en el resultado inicial, (Ver **Figura *21***). Al documentar cada paso y presentar un argumento lógico y bien fundamentado, Arturo valida su competencia en resolver problemas complejos y su habilidad para comunicar efectivamente el razonamiento detrás de sus conclusiones. Este nivel de detalle y claridad en la explicación de su proceso y resultados es emblemático del pensamiento crítico y de la aplicación de conocimientos avanzados característicos del Nivel argumentativo 4.

Figura 21

Argumento de Arturo en la sesión 1, segunda pregunta



Los análisis realizados por los estudiantes en el Nivel argumentativo 4 revelan una madurez intelectual que trasciende el simple cálculo numérico, evidenciando un pensamiento crítico y una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Arturo, por ejemplo, ejemplifica esta habilidad al utilizar el método de eliminación para desentrañar y corregir errores en un sistema de ecuaciones lineales, demostrando no solo precisión numérica sino también un proceso de pensamiento lógico y sistemático. Los estudiantes de este nivel no solo llegan a conclusiones matemáticamente sólidas, sino que también justifican sus respuestas de manera convincente, subrayando su habilidad para aplicar conocimientos teóricos a problemas prácticos. Estas capacidades reflejan un alto grado de competencia argumentativa, preparando a los estudiantes para enfrentar desafíos matemáticos avanzados y reafirmando la importancia de la argumentación como herramienta esencial en el aprendizaje matemático.

4.4.5 Nivel argumentativo 5

En este nivel argumentativo prevalece la una notoria ausencia de argumentos de estudiantes que se ajustan completamente a este nivel de sofisticación argumentativa, como se detalla en la investigación. Esta situación pone de manifiesto dos aspectos cruciales en el desarrollo de la capacidad argumentativa en el contexto educativo: primero, que alcanzar un nivel de argumentación que incorpore con plenitud todos los elementos de la estructura de Toulmin, especialmente cualificadores modales y refutaciones, es un desafío considerable para los estudiantes; y segundo, que es esencial reconocer las oportunidades de crecimiento en este ámbito. La falta de ejemplos en este nivel puede deberse a varios factores, como la necesidad de mayor exposición y práctica en el uso de cualificadores modales, una profundización en la habilidad para identificar y articular refutaciones pertinentes y la consolidación de un pensamiento crítico avanzado que permita una evaluación y síntesis detallada de los argumentos.

Este hallazgo abre un campo de reflexión y acción para los profesores, subrayando la importancia de implementar estrategias que fomenten la argumentación en los estudiantes. Adicionalmente, este apartado sirve de transición hacia el análisis del pensamiento algebraico, que permite sugerir una interrelación entre la profundidad del razonamiento argumentativo y la madurez en el pensamiento algebraico, que se cree merece una exploración detallada en futuras investigaciones.

4.5 Pensamiento algebraico

Para dar cumplimiento al segundo objetivo específico, se categorizaron los argumentos que los participantes del grado décimo construyeron. Esta categorización se ampara en la teoría de la estratificación de los estratos del pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico propuestos por Radford (2010; 2021) y expuestos en el marco teórico de la investigación. La **Tabla *8*** presenta un plano general de los resultados obtenidos referentes a las categorías, así pues, se exponen los estratos por los cuales transitaron los participantes.

Tabla 8

Resultados generales de los datos

Participantes	Factual	Contextual	Simbólico
Manuel			✓✓
Martin	✓		✓
Josefa			✓
Arturo			✓✓
Javier			✓
Silvia	✓	✓	
Teresa	✓		✓
Camila		✓✓	✓✓

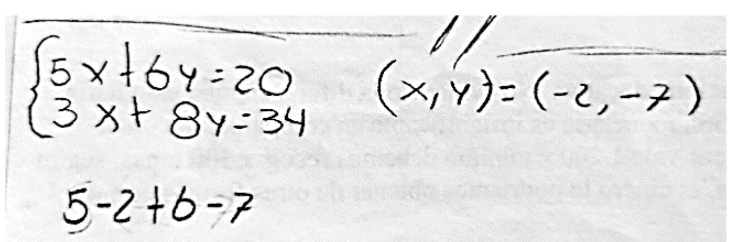
4.5.1 Estrato factual

En esta primera subcategoría de análisis se presentan los datos obtenidos de las sesiones que evidencian características del estrato de pensamiento factual, a nivel general, tres de los ocho participantes manifestaron características que permiten hablar de la emergencia del estrato factual en las sesiones. A continuación, se exponen los hallazgos:

En la primera sesión se encontró que Martín, uno de los participantes, suministró argumentos para la situación expuesta y que está en correspondencia con características ligadas al estrato factual. Como se puede ver en la **Figura *22***, Martín reemplaza los valores correspondientes a x y y en la primera expresión del sistema de ecuaciones. Parece que el participante comprende que en este caso -2 es el valor supuesto de x y que -7 es el valor supuesto de y, de la misma manera que parece comprender que las variables x, y representan cantidades dadas. Sin embargo, al reemplazar, también se evidencia que Martín describe la nueva expresión a través de sumas y restas, por ende, no parece comprender que la expresión *5x* significa que es el numero 5 multiplicado por la cantidad que represente la *x*. Los elementos descritos permiten inferir que a pesar de que hay nociones claras como el entendimiento del uso de variables e incógnitas, el manejo de operaciones y de propiedades aun no es claro. Además, Martín no dio continuidad al procedimiento que comenzó, ni respuesta a la situación propuesta, por ende, se determina que el participante manifiesta algunas características que permiten hablar sobre el estrato del pensamiento factual.

Figura 22

Respuesta suministrada por Martín



En la quinta sesión, a partir de la transcripción de un video donde se evidencia el dialogo entre una participante y una de las investigadoras, se da a conocer un hecho acontecido con Silvia, quien mientras daba solución a la situación propuesta en la sesión (Ver **Anexo *14***), le solicita ayuda a una de las profesoras debido a que no recuerda el nombre de una de las figuras geométricas que quiere describir.

Silvia: *la figura que es así como esto [señala la hoja rectangular que tiene en sus manos], que es larguito... es que no recuerdo el nombre, no sé.*
Profesora 2: *Si yo te pido que me digas cuáles figuras identificas acá [en el cuerpo geométrico], ¿cuáles mencionas?*
Silvia: *el cuadrado, el rombo, eh, el así [abre y cierra sus dedos que abarcan la longitud del cuerpo geométrico para hacer referencia al rectángulo], pero ese no recuerdo como se llama.*
Profesora 2: *¿el rectángulo de pronto es al que te estás refiriendo?*
Silvia: *epaaaa, el rectángulo, eso*
Profesora2: *¿Ese mismo que dibujamos ahorita en el tablero? [señala hacia al frente donde está dibujada la figura]*
Silvia: *ay, no profe, qué pena. Yo no lo había visto [risas]... Profe y entonces ahora le tengo que sacar [hallar] el área al rectángulo, ¿el cuadrado y el rombo...? Pues, así como está en el tablero...*
Profesora 2: *Pues no "así como está en el tablero", porque debes hallar el área de los cuerpos, no de las figuras.*
Silvia: *ay, no, ¿cómo así?, ¿o sea que yo con las fórmulas solo debo reemplazar con los datos?*
Profesora 2: *¿cuáles datos? [intentando comprobar qué elementos va a usar para obtener el área de los cuerpos]*
Silvia: Pues... *[toma la cabeza del personaje] así como lo hicimos ahorita, primero miramos la fórmula y luego cogemos esto [señala con sus dedos una de las aristas inferiores] lo medimos y lo que nos dé, lo multiplicamos por esto [señala las aristas laterales], bueno, por lo que mida esto.* (Ver **Figura *23 y*** **Figura *24***).

Profesora 2*:* *Pero primero debemos estar seguras del cuerpo geométrico al que le vamos a hallar el área y luego miramos que nos pide la fórmula de ese cuerpo [...]*

Nota 8. Transcripción del video del 18 de octubre del 2023.

A partir de la transcripción del video, se hallan elementos que llaman la atención. El primero, la manifestación de gestos y palabras con las que Silvia intenta representar la figura geométrica que no recuerda, el gesto de apertura de los dedos que representa a la figura a la que referencia y que tiene un par de lados con mayor longitud, y la palabra "larguito" que nuevamente describe una cualidad de la figura, la cual es tener un par de lados más grandes. Según Radford (2006a; 2006b; 2010), se puede hablar de que a partir de la situación transcrita emergen medios semióticos con los cuales Silvia comunica eso que desconoce y que en este caso no recuerda. Pero también es el gesto el que nuevamente le permite hacer referencia a la base y la altura del cuerpo geométrico cuando se le pregunta cómo va a obtener los datos para hallar el área del cuerpo. Se posiciona en el estrato factual debido a la emergencia de uno de los elementos característicos de este estrato, el medio semiótico, que como se mencionó anteriormente, le permite a Silvia mencionar características y propiedades pertenecientes al cuerpo geométrico que quiere describir.

Figura 23

Silvia señala las aristas del cuerpo geométrico, captura de video

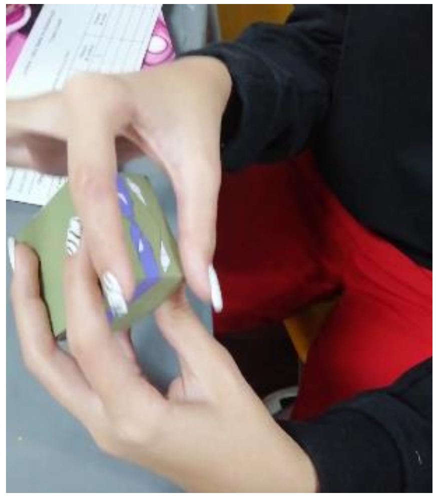


Figura 24

Silvia señala los vértices del cuerpo geométrico, captura de video

En la sexta sesión, Teresa identificó los cuerpos geométricos que componen a su personaje, pudo determinar el número de aristas y mencionó los vértices y las figuras que reconoce en las caras de los cuerpos geométricos, sin embargo, no calculó el área de ninguno de los cuerpos, por ende, no fue mencionada en la quinta sesión (Ver **Figura *25***). Pero las situaciones que realiza anteriormente complementan su trabajo en la sexta sesión, donde transformó el personaje inicial a partir de la construcción de una pirámide rectangular.

Teresa menciona que para hacer la pirámide rectangular primero midió la base de la cabeza original y a partir de esa medida se guío para la construcción de la base de la pirámide, es decir, Teresa logró hacer el cuerpo geométrico final a partir del cuerpo inicial. Utilizó la base de la figura que era apta para el personaje para asegurarse de que su nueva figura también cumpliera con las condiciones iniciales, ya que, como menciona posteriormente, en una ocasión midió mal, e hizo que su figura adquiriera un tamaño que no era correcto, (Ver **Figura *26*** y **Figura *27***).

Se evidencia que el razonamiento de Teresa parte de la necesidad de crear un cuerpo geométrico "perfecto" de manera que no quede pequeño o grande en proporción al resto del cuerpo. Para llevar a cabo esa idea, Teresa usa el cuerpo geométrico perteneciente a la cabeza de la figura inicial, que le permite asegurarse de que su pirámide rectangular tenga la misma medida de la base y, por ende, encaje de manera correcta. Así pues, el procedimiento de Teresa depende principalmente del mismo cuerpo geométrico del personaje sin tener en cuenta otros razonamientos que le permitan crear cuerpos geométricos con bases distintas y proporcionales como por ejemplo a través del cálculo de áreas de la figura inicial que le permitan prolongar o reducir un nuevo cuerpo o el reconocimiento de características propias de cuerpos geométricos como prismas, cilindros, pirámides.

Figura 25

Respuesta de Teresa

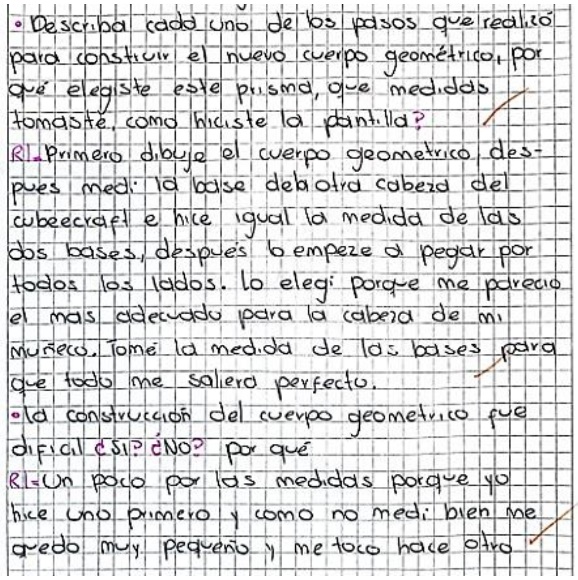
Objeto	Nombre del cuerpo geométrico	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras	Nombre de la figura de una de las caras	Área del cuerpo geométrico
Cabeza	Cubo	12	8	6	Rectangulo	
Tronco	Cubo min	12	8	6	Cuadrado	
Un brazo	Prisma	12	6	6	Rectangulo mini	
Una pierna	Prisma rectangular	12	8	4	Rectangulo	

Figura 26

Transformación del cuerpo geométrico de la sesión 6

Figura 27

Respuestas de Teresa en la sesión 6


• Describa cada uno de los pasos que realizó para construir el nuevo cuerpo geométrico, por qué elegiste este prisma, que medidas tomaste, como hiciste la plantilla?
R/. Primero dibuje el cuerpo geometrico, despues medi la base de la otra cabeza del cubeecraft e hice igual la medida de las dos bases, después lo empeze a pegar por todos los lados. lo elegi porque me parecio el mas adecuado para la cabeza de mi muñeco. Tome la medida de las bases para que todo me saliera perfecto.
• la construcción del cuerpo geometrico fue dificil ¿SI? ¿NO? por qué
R/= Un poco por las medidas porque yo hice uno primero y como no medi bien me quedo muy pequeño y me toco hace otro

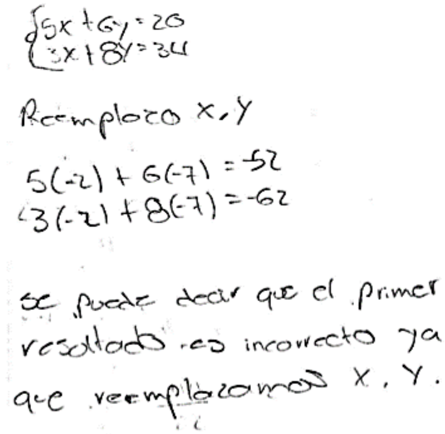
4.5.2 Estrato contextual

La segunda subcategoría propuesta para el análisis de resultados se enmarca según Radford (2010; 2021) en la posibilidad de nombrar la indeterminación e incluso realizar operaciones con la indeterminación. Ahora bien, se identificaron características de los argumentos que los estudiantes de décimo grado construyeron para responder a las actividades planeadas en cada sesión. A nivel general, dos de los ocho participantes se ubicaron en esta subcategoría en algunas de las sesiones.

En la primera sesión (Ver **Anexo *5***), se encontró a Camila que indica que “el primer resultado” (con esto se cree que menciona la respuesta propuesta en el enunciado de la situación) es incorrecto. Y justifica su respuesta reemplazando los valores asignados para x y y $(-2, -7)$ en el sistema de ecuaciones. Al reemplazar los valores, Camila también realiza las operaciones que indica la expresión y finalmente determina que el valor de las ecuaciones es -52 y -62 respectivamente. Con los valores obtenidos puede afirmar que el valor de x y y no es el que se enuncia inicialmente ya que los valores que ella obtuvo no son iguales a los que se presentan en el sistema de ecuaciones inicial. Ahora bien, aunque Camila afirma que el resultado es incorrecto, no enuncia otro resultado.

Figura 28

Respuesta de Camila en la sesión 1

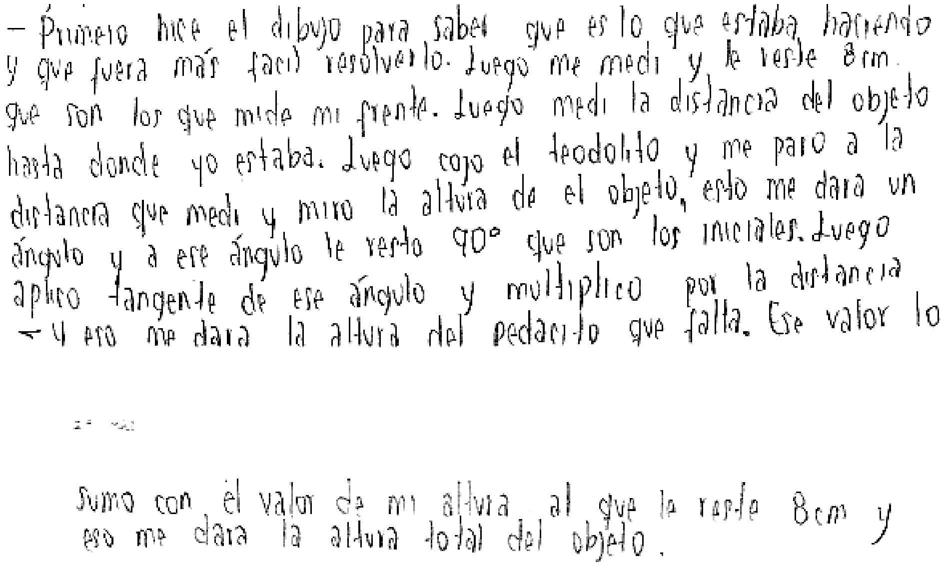


En la **Figura *28*** se puede inferir que Camila comprende y asocia directamente las relaciones entre las incógnitas x y y con el resultado dado inicialmente $(-2, -7)$, entiende que, si evalúa los valores en el sistema de ecuaciones y obtiene resultados iguales a los enunciados en el sistema de ecuaciones inicial, pues se cumple a igualdad. Pero Camila evaluó los valores y demuestra comprender que, por ejemplo, *5x* significa que la cantidad a la que equivalga *x* debe ser multiplicada por 5, también se evidencia que la participante manipula las ecuaciones correctamente, pues realiza las operaciones y utiliza propiedades que emergen al reemplazar los valores. Respecto al estrato contextual, se encuentran características que permiten establecer relaciones en la medida en que la participante comprende cómo usar conceptos, propiedades u operaciones en una situación concreta, entiende las relaciones que se gestan y como estas cambian en diferentes contextos, por ejemplo, comprende que el resultado proporcionado en el enunciado puede ser reemplazado en el sistema de ecuaciones para verificar la igualdad del sistema, y es a partir de esta relación que Camila argumenta que la respuesta inicial es incorrecta, realiza procedimientos para comprobar la igualdad del sistema de ecuaciones y demuestra comprender la noción de ecuación.

En la cuarta sesión, ¡Vamos a medir! (Ver **Anexo *11***), Silvia responde a la pregunta 8, de manera que indica los procedimientos que realizó para poder dar una respuesta a cada una de las situaciones, (Ver **Figura *29***).

Figura 29

Respuesta de Silvia en la sesión 4, pregunta 8



- Primero hice el dibujo para saber que es lo que estaba haciendo y que fuera más facil resolverlo. Luego me medi y le reste 8cm. que son los que mide mi frente. Luego medi la distancia del objeto hasta donde yo estaba. Luego cojo el teodolito y me paro a la distancia que medi y miro la altura de el objeto, esto me dara un ángulo y a ese ángulo le resto 90° que son los iniciales. Luego aplico tangente de ese ángulo y multiplico por la distancia - y eso me dara la altura del pedacito que falta. Ese valor lo

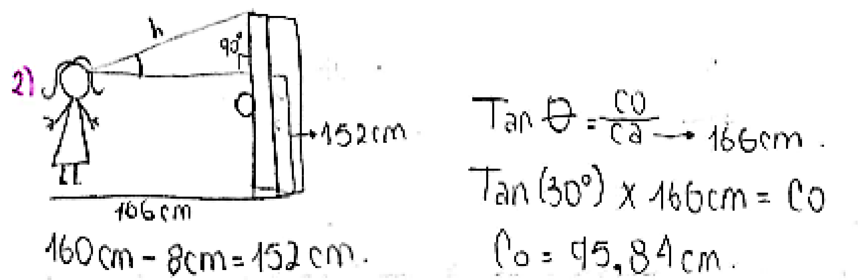
sumo con el valor de mi altura al que le reste 8cm y eso me dara la altura total del objeto.

Silvia resalta la importancia de dibujar para “saber qué es lo que estaba haciendo”, algo que se podría enmarcar en una característica del pensamiento factual, pero además de eso, Silvia comienza a describir que para obtener la altura final del objeto que calcula es necesario restar $8cm$ que corresponden a la medida de su frente y que hacen que la medida sea más precisa. La participante también menciona que cuando ha obtenido el ángulo por medio del teodolito debe “aplicarle” la tangente a ese ángulo y multiplicar por la distancia (usar la razón de $\tan\theta$ y multiplicar por la distancia a la que ella se encuentra del objeto) para obtener la altura del “pedacito que le falta”; Silvia emplea la palabra “pedacito” para hacer mención a una parte de la altura total del objeto y que, cuando representa de manera geométrica (Ver **Figura *30***), pertenece a un segmento del cateto opuesto de un triángulo rectángulo. “pedacito” es el medio semiótico con el cual Silvia representa una parte del procedimiento que realiza y que quizá en el momento no ha identificado. Las acciones descritas refieren a características pertenecientes al estrato factual en el que parece encontrarse Silvia.

Pero cuando se observa la **Figura *30***, donde Silvia da respuesta a la pregunta 8 (Ver **Anexo *11***), se evidencia que además del dibujo que describió anteriormente, también estableció relaciones entre los valores obtenidos. Ella reconoce que debe emplear la tangente de un ángulo que en este caso representa como (θ) y que es el ángulo que obtuvo después de usar el teodolito. Además, utilizó su calculadora para multiplicar la tangente de ese ángulo por la distancia entre ella y el objeto. Según el procedimiento realizado, el valor del cateto opuesto es de $95.84cm$, pero como se ve en la **Figura *30***, Silvia solo encuentra el valor del cateto opuesto, pero no suma el valor junto con la altura que indica, de manera que, la respuesta que suministra se encuentra incompleta. Silvia demuestra saber algunos de los procedimientos que debe realizar y los vincula con propiedades o conceptos que le permiten representar la situación propuesta y que le permitan obtener el valor del cateto que desconoce, pero no termina el procedimiento, de manera que no enuncia una respuesta, así pues, se identifica que hay emergencia del estrato factual inicialmente y este trasciende al estrato contextual.

Figura 30

Representación gráfica de la situación hecha por Silvia en la sesión 4



En la sexta sesión la subcategoría se identificó cuando Camila ensambló el personaje y a partir de este respondió a la situación propuesta, (Ver **Figura *31***). La participante menciona que la cabeza del personaje es un “prisma trapezoidal”, cosa que no es cierta, también menciona que los brazos y piernas del personaje son un rectángulo y un cuadrado respectivamente (Ver **Figura *32***), pues asume que estos dos están en un plano 2d y que son figuras y no cuerpos geométricos (paralelepípedos rectos). Esto parece indicar que Camila confunde las dimensiones con las que está trabajando, figuras o cuerpos, de manera que no tiene en cuenta una de las principales diferencias entre estos dos, solo el cuerpo geométrico tiene volumen y profundidad. Por otra parte, Camila muestra en la **Figura *33*** que calculó el área de la cabeza de su personaje, al parecer a través de una formula, pero la fórmula que parece usar no corresponde a la del área del cuerpo geométrico que mencionó anteriormente, por ende, no se logra determinar a qué cuerpo realmente le calculó el área.

Pero si observamos el procedimiento que la participante realizó, se evidencia que reconoce la jerarquía u orden de las operaciones, donde primero debe resolver las operaciones que se encuentran dentro del paréntesis para luego poder multiplicar el resultado con otra cantidad. Se usan de manera correcta las operaciones para llegar a un resultado, de igual manera para obtener el área del brazo y de la pierna. Vale aclarar que el inconveniente en este último se debe a que no determina el área del cuerpo geométrico sino de la figura geométrica, en este caso ella ha elegido al cuadrado y al rectángulo.

Figura 31

Respuesta de Camila en la sesión 6

Objeto	Nombre del cuerpo geométrico	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras	Nombre de la figura de una de las caras	Área del cuerpo geométrico
Cabeza	Prisma Trapezoidal	12	8	6	Cuadrado	26.125 cm²
Tronco	Cubo	12	8	6	Cuadrado	73.5 cm²
Un brazo	Rectangulo	12	8	6	Cuadrado	3.75 cm²
Una pierna	Cuadrado	4	4	4	Rectangulo	6 25 cm²

Figura 32

Cuerpo geométrico ensamblado por Camila

Figura 33

Procedimientos realizados por Camila para calcular áreas

Area cabeza

$A = \frac{(5.5cm + 4cm) \times 5.5cm}{2}$ $A = \frac{9.5cm \times 5.5cm}{2}$

$A = \frac{52.25cm^2}{2}$ $A = 26.125 cm^2$

Area brazo

$A = 2.5cm \times 1.5cm$

$A = 3.75 cm^2$

Area pierna

$A = 2.5cm \times 2.5cm$

$A = 6.25 cm^2$

4.5.3 Estrato simbólico

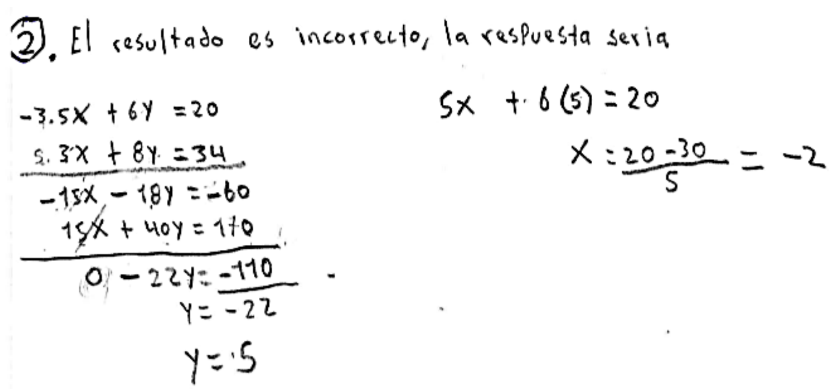
Radford (2010; 2021) nombra la tercera y última subcategoría como pensamiento simbólico o estándar, que, como se ha descrito en la teoría de esta investigación, se caracteriza por ser un estrato donde la persona maneja expresiones algebraicas, reconoce las relaciones entre los símbolos, aplica propiedades y manipula variables.

En la primera sesión propuesta, se halló a un participante que uso métodos de solución para sistemas de ecuaciones. Arturo demuestra comprender como emplear procedimientos como el método de eliminación para sistemas de ecuaciones en la

Figura *34*. Otra característica de este estrato manifestada en los registros escritos es que el participante evidencia el manejo y uso de variables e incógnitas presentes en el sistema, Arturo, por ejemplo, elimina la variable x para poder conocer el valor de la incógnita y, entiende y manipula expresiones algebraicas que usa para reemplazar el resultado obtenido en y y así poder conocer el valor de x. Usa caracteres alfanuméricos que le permiten realizar cálculos y estimaciones para proporcionar una nueva respuesta, reconoce el método de solución de ecuaciones por eliminación y reducción e identifica los valores por los que debe multiplicar cada ecuación para facilitar la reducción de la expresión y conocer el verdadero valor de x y y.

Figura 34

Respuesta de Arturo en la sesión 1

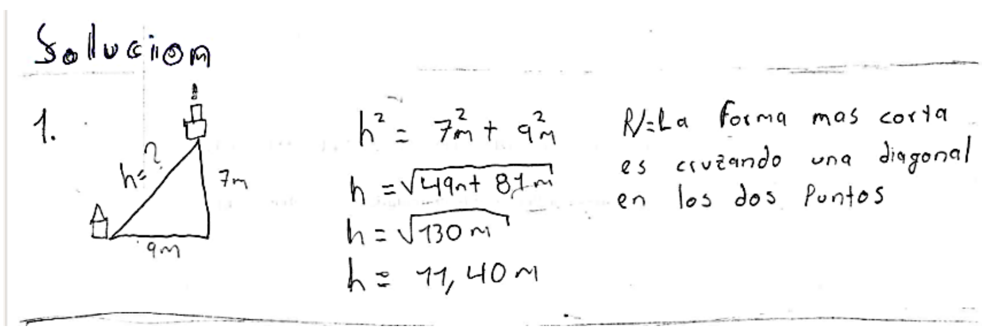


En la sesión tres las actividades fueron realizadas por los estudiantes en grupos conformados entre sí (Ver **Anexo *8***), por ende, algunos registros escritos, aunque hagan mención de uno de los participantes se encuentra escrito con otro tipo de letra. El grupo conformado por Martín, Arturo y otros compañeros usaron el Teorema de Pitágoras para hallar la distancia entre dos puntos/lugares y representaron la situación mediante un triángulo rectángulo. A partir del Teorema de Pitágoras, el grupo de Martín y Arturo elevaron al cuadrado el valor de la distancia entre los dos catetos conocidos, sumaron las dos potencias que obtuvieron y a esa suma la convirtieron en un radicando para obtener su raíz (Ver **Figura *35***). Además del resultado que exponen, llama la atención el enunciado con el que concluyen su respuesta: “la forma más corta es cruzando una diagonal en los dos puntos” puesto que es cierto en el contexto bidimensional y a veces en el tridimensional, que la distancia más corta entre dos puntos se pueda determinar a través de una línea recta (que en este caso es una diagonal).

La respuesta que suministran permite evidenciar que, más que aplicar el Teorema de Pitágoras y realizar las operaciones y cálculos que la situación propone, manifiestan comprender que la hipotenusa que obtienen es a su vez una diagonal y una línea recta que les permite obtener la distancia entre dos puntos y en este caso, la distancia mínima. Son características que permiten hablar de la presencia del estrato simbólico.

Figura 35

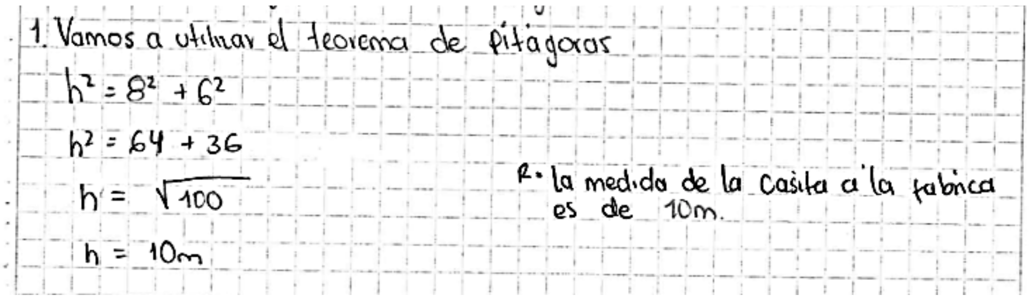
Respuesta del grupo de Martín y Arturo en la sesión 3



Teresa y Camila también conformaron equipo con otros compañeros de clase y por medio de la **Figura *36***, se presenta la solución brindada por este grupo. Como otros participantes, el equipo Teresa y Camila empleó el Teorema de Pitágoras para hallar una “medida” que en el caso puntual de la situación es la distancia a la que se encuentra un punto/sitio del otro. A través de la medida de los catetos que el grupo de las participantes determinó, se realizaron las operaciones que permitieron establecer un resultado el cual enuncian como “medida”. Se destaca que haya claridad en el proceso realizado, manipulación de variables e incógnitas, aplicación de operaciones y apropiación del lenguaje alfanumérico.

Figura 36

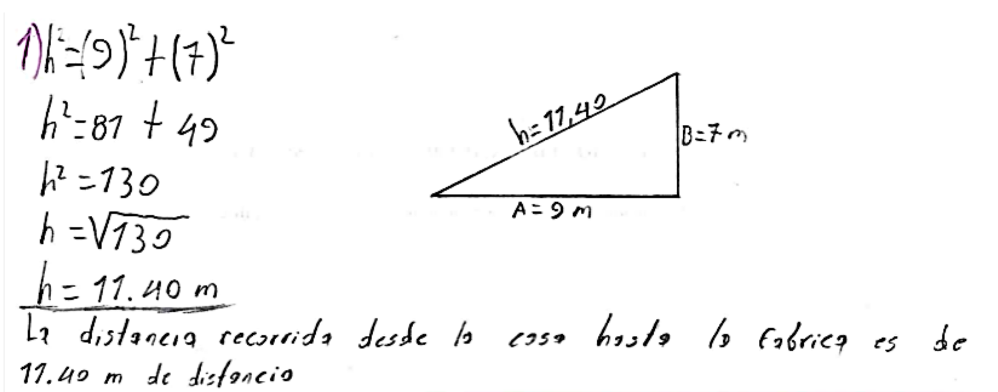
Respuesta del grupo de Teresa y Camila en la sesión 3



Manuel también conformó un grupo de trabajo con otros compañeros del salón donde usaron el teorema de Pitágoras para obtener la distancia que se debe recorrer de un punto a otro, Manuel y su grupo manifiestan que la distancia es de 11,40m que ha sido obtenida a partir de la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados o catetos del triángulo rectángulo que se observa en la **Figura *37***. Manuel y su grupo evidencian comprensión y manejo de los símbolos algebraicos que se presentan y que representan la situación propuesta, entienden las relaciones que entre los símbolos y sus significados o los objetos que estos representan, además, manipulan y resuelven ecuaciones algebraicas para obtener una respuesta que satisfaga la situación.

Figura 37

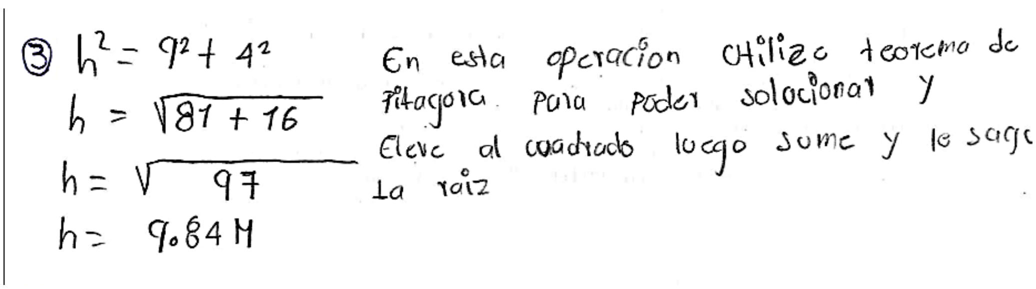
Respuesta de Manuel y su grupo en la sesión 3



Javier y su grupo también usaron el Teorema de Pitágoras y enuncian que emplean el teorema “para poder solucionar” (Ver **Figura *38***), a su vez mencionan que elevan al cuadrado la medida de los catetos que conocen en la situación para posteriormente sumarlos y obtener la raíz. El grupo donde se encuentra Javier demuestra estar en un estrato simbólico en la medida en que son capaces de operar con la simbología propia de este estrato referida a los caracteres alfanuméricos, comprenden que están despejando una incógnita que en este caso es h y que se refiere a la hipotenusa en el contexto de la situación planteada, por ende, hay comprensión del uso del álgebra para representar y dar solución a situaciones puntuales. Se evidencia reconocimiento de propiedades y teoremas que dan cuenta de nociones pertenecientes al álgebra, y enuncian que para "utilizar" el Teorema de Pitágoras hubo que elevar al cuadrado unas cantidades (que se evidencian al lado izquierdo donde aplicó el teorema), tuvieron que sumar ese resultado después de elevar al cuadrado para finalmente obtener la raíz cuadrada de esa cantidad.

Figura 38

Respuesta de Javier y su grupo en la sesión 3



En la cuarta sesión Manuel también responde a la pregunta "¿Cuál es la medida de la altura de la puerta del salón?" (Ver **Anexo *11***) a través de la trigonometría y algunas relaciones que establece con objetos cotidianos como una escoba. Manuel reconoce inicialmente que el cateto adyacente del triángulo que representa la situación tiene una medida de $215cm$ (medida que obtuvo al medir la distancia entre la puerta y su persona), pero también menciona que la altura total de la puerta es igual a y, le asigna una letra a la medida de la puerta que es aún desconocida y a la medida de la escoba que menciona que es x. Se menciona la emergencia del estrato simbólico en razón de la capacidad de Manuel para manipular expresiones alfanuméricas y comprender las relaciones entre los símbolos, además de manipular expresiones a las que les ha asignado letras para poder generalizar.

Al mismo tiempo, llama la atención la designación de variables que realiza el participante (Ver **Figura *39*** y **Figura *40***), pues nombra como "y" al cateto opuesto de la representación de la situación (a través de un triángulo rectángulo), pero también menciona que y es la altura total de la puerta. Por ende, cuando anuncia que $y - x$, esta relación se puede entender de dos formas: $y - x$ es igual a la medida de la escoba, donde si $y = 69.85cm$, su expresión es incorrecta puesto que $69.85 - 135 = -65.15$, pero si $y = 204.85cm$, entonces $204.85 - 135 = 69.85$, valor que corresponde a la medida del cateto opuesto pero que no es la altura total. Se reconoce la importancia de la creación de expresiones algebraicas que evidencien relaciones a partir de la situación propuesta, pues es una característica propia de este estrato y permite comprender y gestar otras relaciones en la misma situación además de reflexionar críticamente.

Figura 39

Respuesta de Manuel en la sesión 4

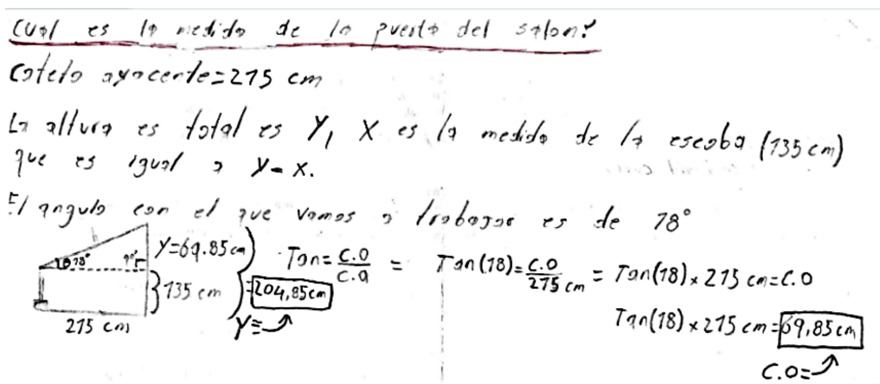


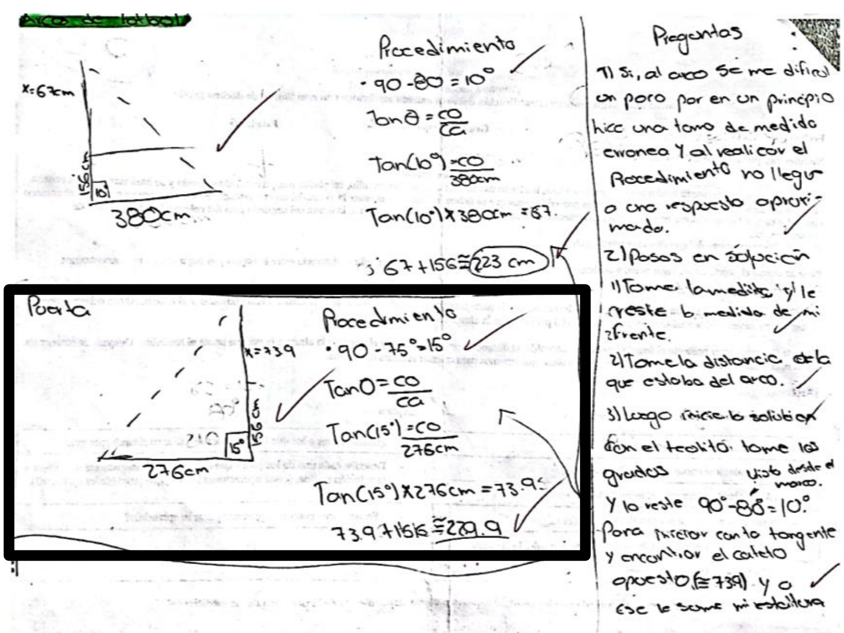
Figura 40

Medidas para obtener el cateto adyacente de la situación, sesión 4

Camila también emplea la trigonometría para obtener la altura de una puerta (Ver **Figura *41***), vale aclarar que no todas las puertas que los demás participantes han medido son de alturas iguales puesto que pudieron recorrer la institución educativa y seleccionar la que quisieran. Camila parece comprender que el ángulo que marca su teodolito es en realidad de $10°$ grados puesto que debe restar $80°$ a $90°$ que es el ángulo de base (puesto que el ángulo que se busca en realidad es un ángulo complementario) a partir de esto emplea entonces la razón trigonométrica de $\tan(\theta)$ y despeja de esta el cateto opuesto para poder conocer su valor. Se evidencia que la estudiante comprende qué procedimientos ha realizado en la medida en que efectúa operaciones de manera clara y que la llevan a un resultado coherente para el problema.

Camila reconoce que la altura final de la puerta no es el resultado que acaba de obtener, sino que debe sumarla con la altura inicial a la que tomó el ángulo con el teodolito. Pero en la representación con el triángulo rectángulo Camila dibuja el ángulo obtenido como si su mirada hubiese estado puesta desde la superficie del suelo, cosa que no es correcta ya que reconoció que el ángulo obtenido es complementario, por ende, los procedimientos que lleva a cabo tienen sentido, la llevan a una respuesta válida, pero la representación de la situación no es correcta. Sin embargo, el manejo de ecuaciones, el reconocimiento de la utilidad de la razón trigonométrica y el empleo de propiedades y operaciones básicas son satisfactorias y pertenecientes a la subcategoría.

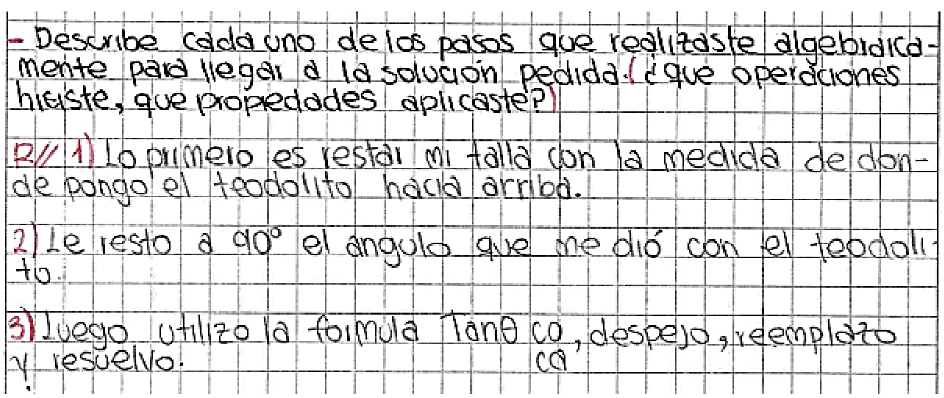
Figura 41
Respuesta de Camila en la sesión 4



Josefa describe como realizó cada procedimiento para llegar a una solución y menciona, (Ver **Figura *42***), que tuvo en cuenta su talla (hace referencia a su altura) con el segmento que se encuentra entre sus ojos (el punto de referencia para el teodolito) y la parte superior de su cabeza, menciona que al ángulo de 90° grados le resta el ángulo que marca el teodolito porque parece comprender que la base o punto de referencia del instrumento es el ángulo de 90° y enuncia que utiliza una fórmula que hace referencia a la razón trigonométrica de $\tan(\theta)$ la cual debe despejar, reemplazar y posteriormente resolver. Como se nota, Josefa parece tener claro los procedimientos que realiza puesto que reconoce que al utilizar una fórmula como la razón de $\tan(\theta)$, es necesario despejar uno de los catetos y reemplazar en la información que ya conoce para posteriormente resolver. De la misma manera presenta un procedimiento que representa la situación que está solucionando a través de triángulos rectángulos y del uso de la trigonometría. En la **Figura *43*** Josefa realiza todos los elementos que describió anteriormente, pero es disonante que después de poner una llave que toma dos valores ($49.13cm$ y $152cm$) exprese que el resultado de esta suma es $201.13cm$ que si bien, es verdad que la suma de estos dos elementos da como resultado $201.13cm$, ella expresó que la altura total de la persona es de $175.30cm$ que es un valor apropiado al contexto.

Figura 42

Respuestas de Josefa en la sesión 4



- Describe cada uno de los pasos que realizaste algebraicamente para llegar a la solución pedida (¿que operaciones hiciste, que propiedades aplicaste?)

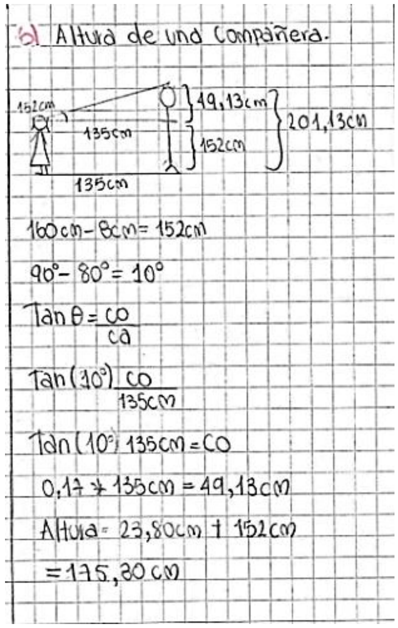
R// 1) Lo primero es restar mi talla con la medida de donde pongo el teodolito hacia arriba.

2) Le resto a 90° el angulo que me dió con el teodolito.

3) Luego utilizo la formula Tanθ $\frac{co}{ca}$, despejo, reemplazo y resuelvo.

Figura 43

Representación de la situación hecha por Josefa en la sesión 2



A través del análisis de los datos realizados en la segunda categoría de la investigación: pensamiento algebraico, se pudo evidenciar que a partir de las sesiones de clases propuestas y llevadas a cabo por los estudiantes, se hallaron distintas características que se asocian con los estratos del pensamiento algebraico factual, contextual y simbólico, donde se evidenció que los estudiantes avanzaron por ellos en distintas sesiones o que incluso hubo situaciones donde se pudo hacer mención al tránsito entre diferentes estratos en un mismo dato. Ahora bien, estos resultados obtenidos a partir del análisis de datos están relacionados directamente con el grado en el que se encuentran los participantes, puesto que es un grado donde el álgebra no es un campo desconocido para los estudiantes y que, en este caso, les ha permitido enunciar el reconocimiento de situaciones relacionadas con el campo, aunque no se disponga de los medios para dar solución.

Los hallazgos demuestran que el razonamiento de los participantes está estrechamente ligado con el conocimiento a priori de cada estudiante, puesto que como se expuso, en algunos de los datos, los argumentos que los estudiantes utilizan hacen referencia a significados y comprensiones que han construido hacer de un objeto. Debido a esto, el análisis de la categoría se ha centrado, en su mayoría, en los elementos subyacentes al razonamiento que cada participante emplea para proponer soluciones, más que si estas soluciones son las propicias para la situación.

4.6 A modo de cierre

Se encontraron puntos de convergencia entre los argumentos proporcionados y el pensamiento algebraico donde se evidenció a través del análisis de las sesiones de clase que la argumentación también facilitó la identificación de los diferentes estratos del pensamiento algebraico entre los estudiantes y que los estudiantes que participaron activamente en procesos de argumentación y que utilizaron datos y evidencias para apoyar sus afirmaciones, demostraron mayores capacidades para manipular conceptos algebraicos. Por ejemplo, en sesiones donde los estudiantes debatieron sobre la solución de ecuaciones lineales, aquellos que argumentaron sus procesos de solución por medio del uso de propiedades y la aplicación de operaciones tendieron a alcanzar el estrato contextual del pensamiento algebraico.

Mientras que los estudiantes que articularon argumentos complejos y que incorporaron no solo datos y conclusiones sino también garantías y respaldos, se ubicaron en el estrato simbólico del pensamiento algebraico puesto que hicieron uso de fórmulas, teoremas, propiedades, demostraron el entendimiento de las relaciones entre símbolos y la manipulación de estos, además del uso de operaciones que les permitieron establecer generalizaciones. Esta correlación sugiere que la profundidad de la argumentación puede influir directamente en la habilidad de los estudiantes para operar dentro del ámbito del pensamiento algebraico simbólico.

Las limitaciones observadas en la capacidad de argumentación de algunos estudiantes se reflejaron en su dificultad para dar solución a las situaciones propuestas y para llevar a cabo procedimiento de manera completa, además de que la falta de habilidades argumentativas robustas, como la generación de garantías y respaldos sólidos, limitó su capacidad para abordar y resolver problemas algebraicos de manera abstracta y simbólica. Estos resultados subrayan la importancia de integrar la argumentación como una estrategia clave en la enseñanza del álgebra. De manera que fomente la argumentación en el aula no solo con el fin de promover las habilidades de comunicación y razonamiento crítico de los estudiantes, sino que también del fortalecimiento y la emergencia pensamiento algebraico, desde sus características incipientes hasta rasgos abstractos.

5 Consideraciones finales

5.1 Conclusiones

Al identificar los argumentos construidos por los estudiantes de décimo grado, se evidenció que los estudiantes muestran una comprensión básica de la estructura argumentativa, reflejada en la capacidad para formular afirmaciones apoyadas en datos concretos. Sin embargo, la mayoría de los argumentos carecían de garantías y respaldos sólidos y que sugieren una oportunidad para fortalecer su entendimiento y aplicación del modelo de Toulmin en contextos matemáticos. Además, se observó una tendencia hacia el uso de argumentos sustanciales en lugar de analíticos entre los estudiantes. Se cree que esto se debe, en parte, a la naturaleza de las actividades y el contenido abordado, que enfatiza la aplicación práctica de conceptos matemáticos y la resolución de problemas basada en la experiencia real y el contexto, en lugar del análisis formal y abstracto que caracteriza a los argumentos analíticos.

Una característica evidenciada en la argumentación de los estudiantes fue la escasa utilización de cualificadores modales y la casi inexistencia de refutaciones. Esto indica una visión limitada de la argumentación como proceso y una oportunidad para enseñarles a anticipar y refutar posibles objeciones. A su vez, a pesar de las características observadas, los estudiantes mostraron potencial para el desarrollo de habilidades argumentativas avanzadas. Las interacciones en clase y el trabajo colaborativo emergieron como estrategias efectivas para mejorar su capacidad de argumentación, sugiriendo que el aprendizaje activo y la discusión crítica deberían ser componentes centrales en la educación matemática.

Los participantes que proporcionaron argumentos enmarcados dentro de los niveles 3 y 4 develaron mayor apropiación de los conceptos y/o contenidos algebraicos, que se demuestran al dar cumplimiento al segundo objetivo específico donde se categorizaron los argumentos de los estudiantes a través de los estratos del pensamiento algebraico propuestos por Radford (2010; 2021) donde se evidenció que los estudiantes se ubicaron principalmente en el estrato simbólico del pensamiento, con características como el manejo de cantidades indeterminadas, la identificación y uso de propiedades y operaciones que les permitieron obtener resultados, el entendimiento y manipulación de las relaciones entre los símbolos y el manejo de las expresiones algebraicas en contextos específicos.

Si bien, el estrato simbólico fue el más identificado, también emergieron características que permitieron determinar la presencia del estrato factual y contextual e incluso el tránsito entre estratos en una misma situación a través de la aparición de características como la capacidad de vincular propiedades u operaciones y el reconocimiento de variables, así pues, los argumentos que los estudiantes proporcionaron permitieron establecer conexión con el pensamiento algebraico a través de su análisis. Un ejemplo de esto se evidenció a través del uso de propiedades y teoremas como el de Pitágoras que fueron utilizados varias veces por los participantes, y qué en el análisis se reflejan como una garantía y a su vez como una característica del estrato simbólico.

Otra característica identificada se relaciona con el uso del medio semiótico, contracciones, gestos y palabras clave que emergieron en algunas de las situaciones y que en relación con la argumentación se pudieron establecer puntos de encuentro con el uso de argumentos sustanciales, donde el contexto, la experiencia y los conocimientos previos emergen para significar y dar sentido a las ideas que se expresan. De esta manera, y con la intención de dar respuesta a la pregunta de investigación, los argumentos por estudiantes de décimo grado se relacionan de manera bidireccional con el pensamiento algebraico, puesto que los argumentos son un reflejo del entendimiento o razonamiento algebraico en los participantes y a su vez, el pensamiento algebraico pone de manifiesto el uso de argumentos que permiten expresar la comprensión, establecer conclusiones y dar soluciones a las situaciones propuestas en álgebra.

Los argumentos que construyen los estudiantes de décimo grado están vinculados con la forma en que los participantes resuelven, entienden y razonan situaciones algebraicas. Los argumentos que proveen son un reflejo del estrato del pensamiento algebraico en el que se encuentran a partir de las situaciones propuestas, es decir, algunas veces los estudiantes dependen más de estrategias concretas, uso de palabras, signos, gestos y garantías, mientras que en otros momentos los estudiantes presentan argumentos elaborados que permiten evidenciar un lenguaje algebraico avanzado donde se visibiliza el dominio de simbología, entendimiento de situaciones indeterminadas, manejo de variables e incógnitas, entre otros. que le permiten obtener soluciones.

El análisis subraya la importancia de integrar explícitamente la enseñanza de la argumentación en el currículo de matemáticas. Los profesores pueden fomentar un ambiente de aula que priorice el debate, la crítica y la defensa de ideas con evidencias sólidas, que potencie en los estudiantes habilidades comunicativas y orales, no solo para el aprendizaje del álgebra sino también para la construcción de observación participante y crítica. En la misma línea, fomentar el uso de la argumentación y el pensamiento algebraico, se recomienda integrar tareas y problemas que requieran reflexiones que trasciendan a la aplicación de fórmulas y procedimientos, esto incluye el diseño de situaciones problemáticas que promuevan la exploración de conceptos matemáticos desde múltiples perspectivas y la utilización de argumentos analíticos sofisticados.

5.2 Reflexiones frente a la práctica pedagógica profesional

A través de la práctica se reconoce la importancia de la argumentación en el aula ya que promueve la comunicación entre estudiantes y profesores, esencial para el desarrollo del pensamiento algebraico. Esta práctica fomenta un ambiente de aprendizaje interactivo donde las ideas pueden ser cuestionadas y defendidas, además de permitir a los estudiantes no solo adquirir conocimientos sino también aprender a comunicarlos. La argumentación se revela como un pilar en la construcción del conocimiento matemático que propicia un espacio para que el pensamiento algebraico pueda ser explorado, debatido y profundizado.

Los argumentos de los participantes evidencian dificultades conceptuales en el álgebra que emerge desde la diversidad en los estratos de pensamiento algebraico y los niveles de argumentación, donde se observa que la falta de comunicación puede obstaculizar el proceso de aprendizaje matemático.

Establecer un diálogo entre los requerimientos institucionales, el profesor cooperador, los intereses personales como investigadoras y las exigencias de la investigación, representan un desafío complejo. La negociación es fundamental para alinear los objetivos de la investigación con los marcos educativos y las expectativas del entorno académico, sin perder de vista la relevancia y originalidad de la investigación. La interacción entre los intereses demanda una adaptabilidad y flexibilidad constante, así como una comunicación efectiva para asegurar que la investigación contribuya significativamente al campo académico.

Asumir el rol de investigadoras implica compromiso, predisposición al cambio y mejora continua, no solo en términos de metodologías y estrategias de enseñanza, sino también en la adaptación a las necesidades que se presentan. La investigación en el aula se convierte en una herramienta poderosa para reflexionar críticamente sobre la práctica docente.

5.3 Aportes a la práctica educativa y a la investigación en el campo de la Educación Matemática

Para la realización de la investigación se indagó en antecedentes teóricos relacionados con la argumentación y el pensamiento algebraico. La búsqueda determinó la poca existencia de literatura que relacione ambas temáticas, de manera que esta investigación aporta referentes teóricos al campo de la Educación Matemática. Además, se reconoce a la argumentación como un proceso que se puede potenciar en clase de matemáticas y a su vez fomenta el pensamiento algebraico.

5.4 Limitaciones de la investigación

Desde el planteamiento del problema se mencionaron dificultades que se evidenciaron desde la observación participante relacionadas con el manejo de operaciones, propiedades y conceptos abordados en grados inferiores que podrían estar ligadas a los vestigios derivados de la pandemia provocada por el COVID-19. Como se proyectó, tuvieron impacto en el diseño y aplicación del trabajo de campo puesto que conllevaron cambios constantes y reestructuración de cada una de las situaciones propuestas.

5.5 Perspectivas futuras de investigación

En la clase de matemáticas, es crucial reconocer la diversidad de argumentos que los estudiantes pueden desarrollar. En medio de la investigación, se observó que los participantes de décimo grado empleaban argumentos sustanciales, y enriquecían sus razonamientos con experiencias personales o relevantes para fortalecer sus puntos de vista. La base de estos argumentos trasciende la lógica formal, apoyándose en la significación individual de cada participante en el aula. Este enfoque permite preguntarse ¿cómo los argumentos sustanciales interactúan con los medios semióticos? Sin dejar de reconocer que los medios semióticos permiten establecer significados los cuales están ligados a cada participante.

Como se evidenció en las conclusiones, la relación entre los argumentos y el pensamiento algebraico se estableció de manera bidireccional, así pues, se proponen futuras líneas de investigación para que diseñen proyectos que integren la comunicación, la argumentación y el pensamiento algebraico en el aula de clase o que exploren las relaciones entre la argumentación individual y la argumentación colectiva.

6 Referencias

Almeida, I. (1989). Semiótica e interpretación (Pierce-Greimas-Ricoeur). *Centro de Investigaciones Lingüístico Literarias de la Universidad Veracruzana. 22*(23), 183-212

Bezmalinovic, H., y Piquet, J. (2015, marzo). Estrategias comunicativas para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *En XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*, Chiapas, México.

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa* (Vol. 1). Editorial La Muralla.

Bitonte, M. y Matienzo, T (2010). La razonabilidad como garantía en la teoría de Stephen Toulmin. En R Marafioti y C. Santibáñez (Ed. 2010), *La teoría de la argumentación a 50 años de Perelman y Toulmin.* Editorial Biblos.

Butto, C. y Rojano, T. (2004). Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la geometría. *Educación Matemática*, *16*(1), 113-148.

Cervantes-Barraza, J., Cabañas-Sánchez, G., & Ordoñez-Cuastumal, J. (2017). El Poder Persuasivo de la Refutación en Argumentaciones Colectivas. *Boletim de Educação Matemática, 31*(59), 861-879. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n59a01

Cervantes-Barraza, J. (2020). Concepciones de futuros profesores de matemáticas en el contexto de la argumentación. *Academia Y Virtualidad*, *13*(1), 10–22. https://doi.org/10.18359/ravi.4337

Cervantes-Barraza, J. (2019). Las refutaciones, el modelo de Toulmin y las argumentaciones colectivas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 4, 401-403.

Chico, J. (2014). *Impacto de la interacción en grupo en la construcción de argumentación colectiva en clase de matemáticas*. [Tesis doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona] Repositorio Institucional Universitat Autònoma de Barcelona.

Comas, K., & Morawicki, M. K. (2015). El cuaderno de bitácora como proceso educativo. *Actas de Periodismo y Comunicación*, *1*.

Conner, A., Singletary, L, Smith, R, Wagner, P., & Francisco, R. (2014) Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educ Stud Math* 86, 401–429. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8

Conner, A. (2017). An application of Habermas' rationality to the teacher's actions: Analysis of argumentation in two classrooms. *10° Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Dublin, Irlanda.

Crespo, C. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el aula. *Premisa*, *24*, 23-29.

Creswell, J. (2013). Steps in Conducting a Scholarly Mixed Methods Study. *DBER Speaker Series*. 48.

Davydov, V. (1990). *Soviet Studies in Mathematics Education. Volume 2: Types of Generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula.* (J. Teller, Trad.). National Council of Teachers of Mathematics. (Original work published 1990).

Davydov, V. (2008). *Problems of developmental instruction: A theoretical and experimental psychological study*. Nova Science Publishers.

Denzin, N. (1978). *The ResearchAct: A Theoretical Introduction to Sociological Methods* (2a. ed.). McGrawHill.

Durango-Urrego, J. H. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso* [Tesis de doctorado, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia

Eco, U. (1988). *Signo* (F. Serra, Trad., 2.ª ed.). Labor. (Trabajo original publicado en 1973).

Eco, U. (2000). Tratado de semiótica general (C. Manzano, Trad., 5ta ed.). Lumen. (Trabajo original publicado en 1976).

Erduran, S., Simon, S., & Osborne, J. (2004). Tapping into argumentation: Developments in the application of Toulmin's argument pattern for studying science discourse. *Science Education. 6*(88), 915- 933.

Erdurán, S. (2008). Methodological foundations in the study of argumentation in science classroom. In: Jiménez-Alexandre y Erduran (Eds.) *Argumentation in Science Education. Perspectives from classroom-based research.* (pp 47-69). USA: Springer.

Espinosa, J., y Bohórquez, L. (2013). Comunicación y argumentación en clase de matemáticas. *Educación y Ciencia*, *16*, 101-116.

Garzón, P., y Vergel, R. (2013). Procesos de generalización y pensamiento algebraico. *Revista científica*, *17*(2), 137. https://doi.org/10.14483/23448350.7753

Gómez, J., y Mojica, J. (2014). Una mirada sociocultural del pensamiento algebraico desde la teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(2), 81-99.

Henao, M., y Ramírez, S. (2018). *La Argumentación Oral: desde textos y contextos a partir de la implementación de una secuencia didáctica*. [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta edición). McGraw-Hill Interamericana.

Institución Educativa José Celestino Mutis. (2019). *Proyecto Educativo Institucional.*

Institución Educativa José Celestino Mutis. (2021). *Plan de área matemáticas.*

Janesick, V. (2000). La danza del diseño de la investigación cualitativa: metáfora, metodolatría y significado. *Por los rincones-Antología de métodos cualitativos en la investigación social*, 227-251.

Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In P. Cobb, H. Bauersfeld. (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom* cultures (pp. 229-269). Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom two episodes and related theoretical abductions. *The Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 60-82.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas. (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-78). Graó.

Kuhn, D., Hemberger, L., & Khait, V. (2016). Dialogic argumentation as a bridge to argumentative thinking and writing. *Journal for the Study of Education and Development*, *39*(1), 25-48. https://doi.org/10.1080/02103702.2015.1111608

López Ortega, M. (2018). *Niveles de argumentación y su relación con los modelos explicativos de los estudiantes de grado décimo en la descripción del movimiento de los cuerpos en función del tiempo*. [Tesis de Maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. Repositorio Institucional Universidad Autónoma de Manizales.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Ciudadanas.*

Morrow, S., & Smith, M. (1995). Constructions of survival and coping by women who have survived childhood sexual abuse. *Journal of Counseling Psychology*, *42*(1), 24–33. https://doi.org/10.1037/0022-0167.42.1.24

Okuda, M., y Gómez, C. (2005). Métodos en investigación cualitativa: triangulación. *Rev. colomb. psiquiatr*, 118-124.

Oleas, G., y Acosta, J. (2016). La espiral del residuo. *Encuentros de experiencias significativas*, El Carmen de Viboral, Colombia.

Planas, N., y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. *El desarrollo de competencias en las clases deficiencias y matemáticas*, 275-300.

Plantin, C. (2012). La argumentación: historia, teorías, perspectivas. *Anclajes*, 16(2), 102-104.

Radford, L. (2006a). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 2-21).

Radford, L. (2006b). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa [RELIME]*, *1*(Extraordinario 1), 7-21.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, *12*(1), 1-19. https://doi.org/10.1080/14794800903569741

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*, 257-277. https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2

Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da ágebra na teoria da objetivação. In V. Moretti & L. Radford (Eds.), *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural* (pp. 171-195). Livraria da Física.

Ríos-Cuesta, W. (2019). Argumentación colectiva y modelación matemática como mediador del aprendizaje de situaciones de variación cuadrática. *XV Encuentro Internacional de Matemáticas Eimat*, Barranquilla, Colombia.

Ortiz, A., Cardona, D., y Ducuara, I. (2019). Desarrollo de niveles argumentativos a partir de una unidad didáctica basada en la discusión de problemas socialmente vivos. *Academia y Virtualidad*, *12*(2), 5-21. https://doi.org/10.18359/ravi.4282

Sardá, A. (2003). Argumentar: propasar i validar models. En N. Sanmartí (coord.), *Aprendre ciències tot aprenent a escriure ciència*, pp. 121-148. Barcelona: Edicions 62.

Solar, H., y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*, 1092-1112. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a13

Solar-Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, (*74*), 155-176.

Tamayo, O. (2012). La argumentación como constituyente del pensamiento crítico en niños. *Hallazgos, 9*(17). 211- 233. https://doi.org/10.15332/s17943841.2012.0017.10

Toro, J. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase* [Tesis de doctorado, Universidad de Antioquia]. Repositorio Institucional Universidad de Antioquia.

Toulmin, S., Rieke, R., & Janik, A. (1984). *An Introduction to Reasoning*. Macmillan Publishing Company. (Original publicado en 1978)

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Ediciones Península. (Original publicado en 1958)

Valbuena-Duarte, S., Cervantes-Barraza, J., Herrera-Contreras, L. (2022). Patrones de argumentación colectiva en clase de matemáticas. *Eco Matemático, 12*(2), 6-17. https://doi.org/10.22463/17948231.3362

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años)* [Tesis de doctorado, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Repositorio Institucional Universidad Distrital.

Vergel, R. (2016). El gesto y el ritmo en la generalización de patrones. *UNO: Revista de Didáctica de la Matemática*, *73*, 23-31.

Vergel, R., Radford, L., y Rojas, P. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36, 1174-1192.

Wagner P, Ryan, C., Smith, R, Conner, A, Singletary, & Francisco, R. (2014). Using Toulmin's Model to Develop Prospective Secondary Mathematics Teachers' Conceptions of Collective Argumentation. *Mathematics Teacher Educator*, *3*(1), 8–26. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.3.1.0008

Wettergren, S. (2022). Identifying and promoting young students' early algebraic thinking. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, *10*(2), 190-214.

7 Anexos

Anexo 1

Formato de las bitácoras

Nombre del centro de practica:	
Nombre de los Asesores:	
Nombre del estudiante:	**C.C.**
Nombre del estudiante:	**C.C.**
Fecha:	
Participantes:	
LO PROPUESTO	
LO LOGRADO	
LO ACONTECIDO/ LO QUE NOS INQUIETA Y SUGERIMOS	
DESCRIPCIÓN DE LO ACONTECIDO	
REFLEXIONES	
COMPROMISOS Y RETOS	
ANEXOS	

Anexo 2

Relaciones entre conceptos

<table>
<tr><th>Concepto</th><th>Definición</th><th>Relaciones</th></tr>
<tr><td>Razonar</td><td>Proceso de establecer conexiones lógicas y relaciones entre datos o ideas</td><td rowspan="2">Proceso que lleva a la construcción de argumentos</td></tr>
<tr><td>Razonamiento</td><td>El razonamiento se refiere al proceso cognitivo y lógico mediante el cual se construyen argumentos. Es el proceso que da lugar a la construcción de un argumento sólido</td></tr>
<tr><td>Argumento</td><td>Es una estructura más completa y formal que se construye a partir del razonamiento. Consiste en afirmaciones respaldadas por datos, garantías, respaldos y cualificadores</td><td>Producto resultante de argumentar y razonar. Presentado pruebas y razones</td></tr>
<tr><td>Argumentar</td><td>Implica presentar razones, pruebas y justificaciones para respaldar una afirmación o posición específica</td><td>Proceso activo de construcción de argumentos basados en razonamientos y datos</td></tr>
<tr><td>Argumentación</td><td>Proceso de construcción y evaluación de argumentos</td><td>Implica la selección y presentación efectiva de elementos de argumentos para persuadir a una audiencia</td></tr>
</table>

Anexo 3

Planeación de las sesiones del trabajo de campo

<table>
<tr><th colspan="3">Planeación de las sesiones para el trabajo de campo
Institución Educativa José Celestino Mutis</th></tr>
<tr><td>Investigadoras: Gabriela Galeano Castro y Angie Susana Rivera Zapata</td><td>Grado y grupo</td><td>Décimo dos</td></tr>
<tr><td>Sesiones</td><td>Herramientas investigativas</td><td>Herramientas tecnológicas</td></tr>
<tr><td>1. Cuestionario de entrada</td><td rowspan="6">Bitácoras, registros escritos, registros audiovisuales y material fotográfico</td><td rowspan="6">Cámaras, dispositivos para capturar la voz, teléfonos celulares</td></tr>
<tr><td>2. La espiral del residuo</td></tr>
<tr><td>3. Distancia entre puntos</td></tr>
<tr><td>4. ¡Vamos a medir!</td></tr>
<tr><td>5. Recordemos los cuerpos geométricos</td></tr>
<tr><td>6. Cubeecraft</td></tr>
</table>

Anexo 4

Cuestionario de entrada - Guía docente

Institución Educativa José Celestino Mutis Cuestionario de entrada - Guía Docente	
Fecha: 06 de septiembre de 2023	**Grado y grupo:** décimo dos

Disposición del grupo: Cada estudiante deberá permanecer en su puesto habitual para desarrollar la actividad de manera individual y escrita, haciendo uso de sus conocimientos previos y algunos materiales básicos.

Materiales: hojas, lápices o lapiceros, borrador, sacapuntas y guía estudiante.

Descripción de la actividad: Se le hará entrega a cada estudiante una fotocopia de la guía, en la cual se evidencian 3 enunciados que deberán ser resueltos con la intención de poder identificar conocimientos previos y las estrategias de solución utilizadas. Para esta solución se brindará una **"Tabla de apoyo para la solución de las actividades"** la cual consiste en rellenar una tabla de tres columnas donde se evidencia la solución algebraica, la descripción de pasos y propiedades utilizadas y la solución descrita con sus propias palabras. Esta estrategia no será obligatoria, se suministra en pro de organizar los procesos de solución utilizados para dar respuesta a la actividad.

Nota: Para la siguiente clase se les va a pedir a los estudiantes traer un ficho y un dado de parqués cada uno.

Anexo 5

Cuestionario de entrada (Guía estudiante)

Institución Educativa José Celestino Mutis **Cuestionario de entrada (Guía estudiante)**		
Fecha:	**Grado y grupo:**	**Edad:**

1. **Lee atentamente el siguiente escenario ficticio**

En una reunión de estudiantes, se está discutiendo si debería implementarse un programa de reciclaje en la escuela. Dos amigos, Carlos y María, tienen opiniones diferentes al respecto.

María: "Un programa de reciclaje sería beneficioso para la institución educativa. En un estudio realizado por la Secretaría de Medio Ambiente de Medellín, se ha demostrado que aproximadamente el 35% de los residuos que son enviados a los vertederos de basura son aprovechados, sin dejar de lado la conservación a largo plazo de los recursos naturales. Además, otras instituciones educativas han tenido éxito con programas similares ya que se puede comercializar el reciclaje para obtener ganancias que pueden ser invertidas en su infraestructura."
Carlos: "Discrepo contigo, María. Creo que es innecesario implementar un programa de reciclaje en la institución educativa. No evidencio la diferencia que esto haría. Todos sabemos que los materiales reciclados terminan mezclándose con los demás desechos, y que la retribución monetaria es insignificante en comparación con el esfuerzo que debemos hacer para recolectar los residuos, por ejemplo, el kilo de pasta gruesa o de tapas plásticas vale 1.200 y mínimo debemos recoger 300 tapas, según lo anterior ¿Cuántas tapas vamos a tener que recoger para poder comprar insumos para la institución? Además, el dinero lo podríamos obtener de otras formas como haciendo bazares, jean days o ventas de alimentos”.

De acuerdo con el escenario anterior responde las siguientes preguntas de forma consciente y sincera posible. Recuerda que no hay respuestas buenas ni malas, solo opiniones que serán respetadas.

- ¿Quién crees qué tiene la razón?
- ¿Qué elementos hacen que la opinión seleccionada sea más convincente que la otra?
- ¿Con cuál de los dos estudiantes te identificas?, ¿por qué?
- ¿Cuál opinión crees que está más fundamentada? Explica tus razones
- ¿Cuál argumento consideras más sólido?, ¿por qué?

2. **El siguiente sistema de ecuaciones tiene respectivamente por solución $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (-\mathbf{2}, -\mathbf{7})$**

$$\begin{cases} 5x + 6y = 20 \\ 3x + 8y = 34 \end{cases}$$

Argumenta si el resultado anterior es correcto, de ser incorrecto resuelve el sistema de ecuaciones y enuncia el resultado correcto.

3. **Explica con tus propias palabras qué entiendes por argumentación**

Anexo 6

Guía Estudiante - Reglamento del juego: La Espiral del Residuo

Reglamento del juego

1. Una vez que el dado lanzado se detenga, el jugador en turno tendrá cinco (5) segundos, para enunciar, en voz alta, el residuo. **Si no lo hace en ese tiempo**, o enuncia un residuo incorrecto, entonces **perderá el derecho a avanzar**. Pero, si el residuo correcto, no enunciado por él, **lo lleva a una posición de castigo, éste se hará efectivo.**
2. Si un jugador, como resultado de un lanzamiento suyo del dado, llega a una casilla ocupada, el jugador que esté en ella deberá **retroceder** a la casilla numerada más próxima.
3. **Seguros.** Hay dos lugares seguros: las casillas **13** y **16**. El jugador que se encuentre en uno de ellos, no podrá ser obligado a retroceder por el hecho de que otro jugador lo alcance
4. **Castigo.** En el tablero hay un lugar que castiga al jugador que lo alcance. Se trata de la casilla situada entre **8** y **9**. El jugador que llegue a ella, deberá regresar a la salida (el 6).
5. **Premios**. Hay tres (3) lugares que premian:
    - El situado entre **9** y **10**. Quien lo alcance, avanza automáticamente a la casilla **11**.
    - El que se encuentra entre **13** y **14**. El jugador que llegue a él, avanzará a la casilla **16**.
    - El numerado **17**. El jugador que lo alcance tendrá derecho a un único lanzamiento adicional en el mismo turno.
6. **Premios y castigos**: Hay tres casillas que premian y castigan a la vez:
    - La que está entre **10** y **11**. El jugador que la alcance, deberá retroceder una casilla, pero gana un comodín.
    - La numerada **12**. El jugador que llegue a ella perderá un punto, pero lanza de nuevo en el mismo turno.
7. La situada entre **15** y **16**. El jugador que la alcanza, gana un punto, pero retrocede una casilla **Puntos.** En el tablero hay cinco (5) casillas, marcadas con **números primos: 7, 11, 13, 17, 19.** Se establece:
    - Por cada **llegada por primera vez a un número primo**, como resultado de un lanzamiento suyo del dado, el jugador recibe, en premio, **un punto**
    - Para recibir el punto, el jugador debe **reclamarlo al llegar a la casilla que lo otorga**. Si no lo hace antes de que el jugador que le sigue en turno lance el dado, perderá el derecho al punto
8. **Comodín.** Cada uno de los dos primeros jugadores que lleguen a la casilla **10**, recibirá un comodín
9. **Ganador.** El juego puede ganarlo un jugador, de una de tres formas:
    - **Llegando a la meta**, como de un lanzamiento suyo del dado. Para ello, el residuo debe ser exactamente el número de casillas que le hace falta para llegar a la meta desde el numero en el que se encuentra.
    - **Acumulando tres (3) puntos**, sin importar en cual casilla se encuentre
    - **Haciendo uso del comodín:** si un jugador ha llegado a la casilla 18 o a la 19, y en el primer turno posterior a esto, no logra llegar a la META, deberá esperar el siguiente turno, para ganar automáticamente, utilizando el comodín

Anexo 7

Tablero del juego: La Espiral del Residuo

TABLERO PARA LA ESPIRAL DEL RESIDUO

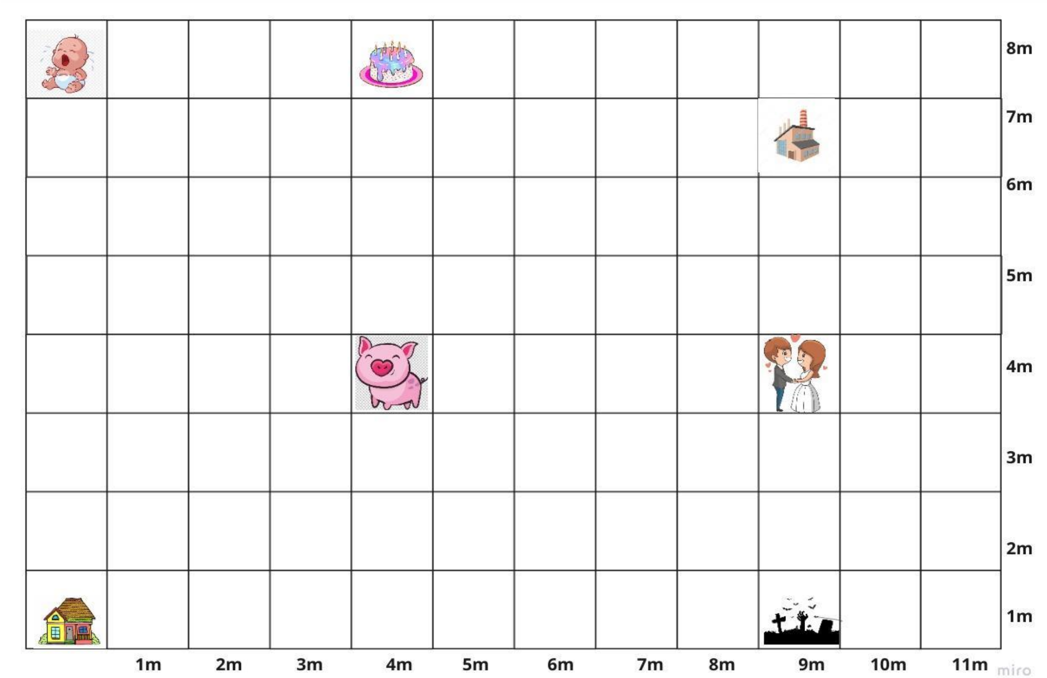
AVANZA a 16	14	15	6 SALIDA ⇩
13 SEGURO		Gana 1 Punto y Regresa a 15	7
12 Pierde 1 Punto y Lanza de Nuevo	19	16 SEGURO	8
11	18	17 Lanza de Nuevo	Regresa a la Salida
Regresa a 10	10 COMODIN	Avanza a 11	9

Anexo 8

Distancia entre puntos (Guía estudiante)

Institución Educativa José Celestino Mutis Distancia entre puntos (Guía estudiante)		
Fecha:	**Grado y grupo:**	**Edad:**

Observa el siguiente plano, dibuja y responde:



- Calcula la distancia que una persona debe recorrer si parte desde la casita y debe llegar a la fábrica ¿Hay alguna forma de encontrar el camino donde la distancia recorrida sea la más corta? Explica
- Si el punto de partida es la fábrica, y cierta persona debe desplazarse hasta la carnicería pasando por el lugar donde se encuentra la pareja de enamorados ¿Qué distancia ha recorrido esa persona?
- Tomando como punto de partida a la pareja de enamorados y sabiendo que debemos llegar a la casita ¿Qué distancia tendremos que recorrer para llegar al lugar indicado? ¿Hay una forma de reducir la distancia recorrida?
- Supongamos que el punto de partida es la casita y que debemos llegar a la carnicería ¿Cuál es la medida de la distancia recorrida para llegar a la carnicería?

Anexo 9

Distancia entre puntos - Guía docente

Institución Educativa José Celestino Mutis **Distancia entre puntos - Guía Docente**	
Fecha: 20 de septiembre de 2023	**Grado y grupo:** décimo dos
Materiales: Guía estudiante	

Sesión 1: distancia entre dos puntos

Propósito: Identificar características de localización de la recta que permitan establecer la distancia entre dos puntos.

Descripción: Se conversará con los estudiantes acerca de la noción de distancia y distancia entre dos puntos a partir de ejemplos sencillos y cercanos a su contexto, por ejemplo, la distancia entre uno de los estudiantes y el tablero de clase, la distancia entre un pupitre y otro, la distancia entre el televisor y la puerta del salón, la distancia entre la tienda del colegio y el baño de mujeres, etc. Con el fin de explorar las nociones que manifiestan los estudiantes y vincular estas nociones con el contexto matemático.

Posteriormente se van a orientar algunos ejemplos que serán realizados haciendo uso del plano cartesiano para determinar la distancia recorrida en el vuelo de una cometa y la distancia recorrida en una situación donde una persona se desplaza desde su casa hasta la tienda de abarrotes. Se va a relacionar el concepto de distancia con el plano cartesiano y se harán preguntas en torno a la posibilidad de calcular las distancias recorridas ¿Cómo se puede determinar la distancia desde un punto a otro? ¿Es posible hallar la mínima distancia recorrida de un lugar a otro?, ¿Cómo?

Los procedimientos que se van a efectuar, en su mayoría, harán uso de propiedades y teoremas de los triángulos rectángulos como el teorema de Pitágoras, sumas de segmentos, etc.

Para el siguiente momento es pertinente volver a aclarar que la forma en que se puede reducir a la menor cantidad de distancia entre un lugar y otro es a partir de recorridos que asemejan una línea recta. Recordar que las distancias nunca pueden ser negativas, puesto que no caminas -5 metros, el desplazamiento (dirección) puede ser negativo (por reducción o aumento de distancia) o positivo, pero la distancia no.

Ejercicios propuestos para su solución y evaluación

Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos y punto medio:

- $A = (-2, 4)$ y $B = (2, 1)$
- $C = (-5, -3)$ y $D = (-2, -3)$
- $E = (-2, 0)$ y $F = (0, -2)$
- $G = (0, 0)$ y $H = (-4, 6)$
- $I = (-2, 1)$ y $J = (8, 7)$

Anexo 10

¡Vamos a medir! - Guía docente

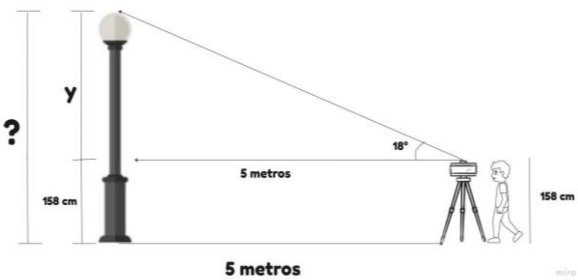
Institución Educativa José Celestino Mutis ¡Vamos a medir! - Guía Docente		
Fecha: 29 de septiembre de 2023	**Grado y grupo:** décimo dos	**Duración:** Dos horas

Materiales: Un tornillo, un pitillo o palito de chuzo, cinta métrica o regla, transportador y calculadora

¡Vamos a medir!

Vamos inicialmente a construir teodolitos en el aula de clase, haciendo uso de un transportador, un hilo, un pitillo, un tornillo o algo pesado y se hará una primera prueba en clase donde los estudiantes podrán identificar los procedimientos que se deben realizar para obtener la altura del objeto deseado. Nos vamos a trasladar posteriormente fuera del aula, con el fin de que los estudiantes puedan medir diferentes objetos como la altura del techo de la cancha, la altura del segundo piso del colegio, la altura del aro de baloncesto, etc.

Pasos
Paso 1: Elegir un objeto del que desconocemos su altura
Paso 2: Ubicar el objeto en un lugar plano y posicionarnos a una distancia conocida del objeto (medir la distancia entre el objeto y el lugar donde nos encontramos posicionados)
Paso 3: Utilizar el teodolito para medir el ángulo de elevación entre la parte superior del objeto y la distancia horizontal entre nosotras y el objeto. Ahora debemos marcar el ángulo que muestra el teodolito puesto que nos servirá para calcular la altura del objeto
Paso 4: Tener presente el ángulo que hemos obtenido, la distancia entre el teodolito y el objeto y la altura a la que fue usada el teodolito



Después de obtener los datos necesarios debemos construir relaciones con los datos que tenemos. Así pues, podemos deducir que $y + 158\ cm$ es la altura total del faro, por ende, debemos hallar a y a través de los datos que tenemos. Podemos usar razones trigonométricas y reemplazar los datos en $tan(18) = \frac{co}{ca}$ donde $co = y$ **y** $ca = 500\ cm$. Despejamos $co = tan(18) * 500 = 162.45\ cm$ y al resultado obtenido le sumamos $158\ cm$. Finalmente, la altura total del poste es $320.45\ cm$

- Calcula la altura de un compañero y explica detalladamente ¿Qué hiciste para obtener la medida?
- Describe cada uno de los pasos que realizaste algebraicamente para llegar a la solución pedida. (¿qué operaciones hiciste, qué propiedades aplicaste?

¡Recuerda que los resultados pueden variar dependiendo de la precisión de las mediciones!

Nota: Para la siguiente clase los estudiantes deben llevar tijeras, colbón, lápiz y borrador.

Anexo 11

¡Vamos a medir! (Guía estudiante)

Institución Educativa José Celestino Mutis ¡Vamos a medir! (Guía estudiante)		
Fecha:	**Grado y grupo:**	**Edad:**
Nombre completo:		

¡Vamos a medir!

Inicialmente vamos a construir teodolitos en el aula de clase, haciendo uso de un transportador, un hilo, un pitillo, una piedra o algo pesado y se hará una primera prueba en clase donde los estudiantes podrán identificar los procedimientos que se deben realizar para obtener la altura del objeto deseado. Posteriormente se cambiará el entorno con el fin de que los estudiantes puedan medir diferentes objetos como la altura del techo de la cancha, la altura del segundo piso del colegio, la altura del aro de baloncesto, etc.

Paso 1: Elegir un objeto del que desconocemos su altura
Paso 2: ubicar el objeto en un lugar plano y posicionarnos a una distancia conocida del objeto (medir la distancia entre el objeto y el lugar donde nos encontramos posicionados)
Paso 3: Utiliza el teodolito para medir el ángulo de elevación entre la parte superior del objeto y la distancia horizontal entre nosotras y el objeto. Ahora debemos marcar el ángulo que muestra el teodolito puesto que nos servirá para calcular la altura del objeto
Paso 4: Debemos tener presente el ángulo que hemos obtenido, la distancia entre el teodolito y el objeto y la altura a la que fue usada el teodolito. Después de obtener los datos necesarios debemos construir relaciones con los datos que tenemos para calcular la altura del objeto

¡Atrévete!

Vamos a explorar algunos lugares de la escuela. **Explica**

1	¿Qué altura tiene el arco de fútbol?	**7**	¿Hubo objetos a los que fue complicado hallar su altura? ¿por qué?
2	¿A qué altura se encuentra el aro de basquetbol?	**8**	Describe cada uno de los pasos que realizaste algebraicamente para llegar a la solución pedida. (¿qué operaciones hiciste, qué propiedades aplicaste?)
3	¿A qué altura se encuentra el techo de la escuela?		
4	¿Cuál es la medida de la altura de la puerta del salón?	**9**	¿En qué otros contextos podrías aplicar lo aprendido?
5	Halla la medida de la altura de un objeto que te resulte interesante		
6	Halla la altura de una compañera		

¡Recuerda que los resultados pueden variar dependiendo de la precisión de las mediciones!

Anexo 12

Recordemos los cuerpos geométricos - Guía estudiante

Institución Educativa José Celestino Mutis **Recordemos los cuerpos geométricos - Guía Docente**		
Fecha: 04 de octubre de 2023	**Grado y grupo:** décimo dos	**Duración:** Dos horas
Materiales: Un tornillo, un pitillo o palito de chuzo, cinta métrica o regla, transportador y calculadora		

Se dará a conocer la definición de los prismas rectangulares, que tipos existen, cuáles son sus componentes y que significan al igual que el área de algunas figuras en 3d. Para ello utilizaremos una guía (ver guía 1) que será entregada a los estudiantes con el propósito de complementar la información brindada.
Posteriormente se estructurará el diseño de la maqueta. Comenzaremos dando una introducción sobre Cubeecraft, ¿Qué es? ¿Cuál es su significado? ¿Dónde nace y por qué? también ¿Qué nos aporta en este proceso y cómo lo haremos? Acto seguido se construye la maqueta (figura de papel mediante la técnica Cubeecraft) y para ello vamos a solicitar unos materiales:

- Plantillas Cubeecraft (Imprimir la plantilla deseada desde la página (https://www.cubeecraft.com/)
- Tijeras
- Colbón
- Lápiz y borrador
- Colores

Luego de tenerlos en mano, reuniremos a los estudiantes en grupos mínimo de 5 integrantes y comenzaremos a construir la maqueta de un personaje de preferencia, con el objetivo de promover el trabajo cooperativo.

Por grupos los estudiantes deben completar una información pedida en una tabla y responder unas preguntas, cuya intención es que ellos puedan relacionar e identificar los objetos bidimensionales y tridimensionales, sus propiedades, las características de los prismas (toda la teoría vista) y los identifique en la figura o maqueta realizada en primer momento. Este método evaluativo va a permitir al maestro analizar el proceso de aprendizaje obtenido por parte de los estudiantes, sus falencias, sus habilidades comunicativas, argumentativas y analíticas.

Luego de que los estudiantes terminen de armar el diseño elegido de Cubeecraft, se propondrá realizar transformaciones en el cuerpo, así pues, la cabeza y los brazos deberán ser reemplazados con las figuras deseadas de manera que el nuevo cuerpo geométrico se ajuste al cuerpo inicial. En ese sentido, es indispensable que los estudiantes lleven cartulina del color que quieran, tijeras, colbón, regla, compás, lápiz, borrador y sacapuntas.

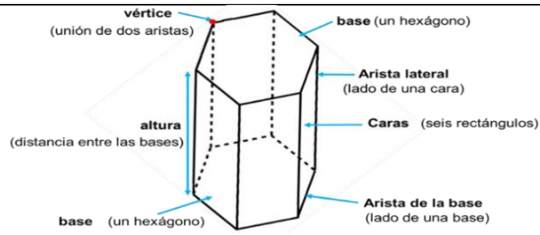
Cuando la figura esté construida, los estudiantes en una hoja deberán responder:
- ¿Cuál es el nombre del cuerpo geométrico construido para la cabeza?
- ¿Cuál es el nombre del cuerpo geométrico construido para las manos?
- Describa cada uno de los pasos que realizó para construir cada uno de los nuevos cuerpos geométricos (plantilla).
- ¿Qué elementos tuvo en cuenta para la construcción?

La construcción del cuerpo geométrico fue difícil ¿sí? ¿no? ¿por qué?

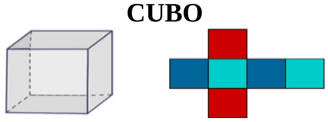
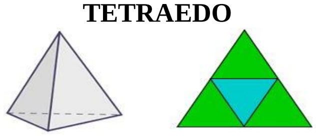
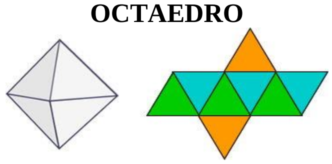
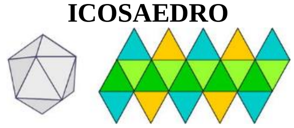
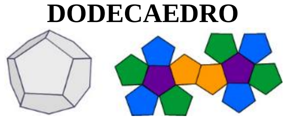
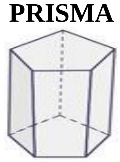
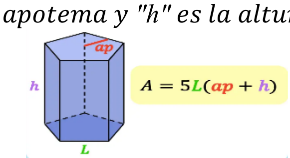
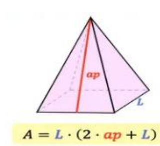
Nota: Para la siguiente clase los estudiantes deben llevar tijeras, colbón, lápiz y borrador.

Anexo 13

Recordemos los cuerpos geométricos - Guía estudiante



Recordemos los cuerpos geométricos - Guía estudiante

Algunos poliedros regulares		Área
CUBO 	Está compuesto por seis caras cuadradas; motivo por el cual se le conoce también con el nombre de hexaedro regular, (hexaedro = cuerpo con 6 caras). Tiene 8 vértices y 12 aristas	$A = 6 * L^2$ $Donde\ "L"\ es\ la\ medida\ de\ un\ lado\ del\ cubo$
TETRAEDO 	Compuesto por cuatro caras con forma de triángulos equiláteros. Tiene cuatro vértices y seis aristas	$A = \sqrt{3} * a^2$ $Donde\ "a"\ es\ la\ medida\ de\ una\ arista$
OCTAEDRO 	Compuesto por ocho caras con forma de triángulos equiláteros, en forma de dos pirámides unidas por sus bases. Tiene 6 vértices y 12 aristas	$A = 2\sqrt{3} * a^2$ $Donde\ "a"\ es\ la\ medida\ de\ una\ arista$
ICOSAEDRO 	Compuesto por veinte caras con forma de triángulos equiláteros, que tiene un eje plano hexagonal. Tiene 12 vértices y 30 aristas	$A = 5 * \sqrt{3} * a^2$ $Donde\ "a"\ es\ la\ medida\ de\ una\ arista.$
DODECAEDRO 	Compuesto por doce caras con forma de pentágono. Tiene 20 vértices y 30 aristas	$A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} * a^2$ $Donde\ "a"\ es\ la\ medida\ de\ una\ arista$
PRISMA 	Que está compuesto por caras laterales rectangulares (que pueden ser cuadradas); y bases con forma de triángulo, cuadrado (salvo cuando las caras también lo son, en cuyo caso es un cubo), pentágono, hexágono u otro polígono regular	$Donde\ L\ es\ un\ lado\ de\ la\ base,\ "ap"\ es\ el\ apotema\ y\ "h"\ es\ la\ altura$ 
PIRÁMIDE CUADRANGULAR	Compuesto por una base con forma de polígono regular, y lados triangulares cuya base son los lados del polígono.	

Algunos cuerpos redondos	
CILINDRO 	Está compuesto por dos bases circulares y una superficie curva continua, equivalente a un rectángulo
EL CONO 	Compuesto por una base circular, y una superficie curva que la rodea y se une en un vértice que se encuentra sobre la perpendicular a la base que pasa por su centro
LA ESFERA 	Es circular en todos sus planos centrales

Anexo 14

¡Vamos a describir el personaje! - Guía estudiante

¡VAMOS A DESCRIBIR EL PERSONAJE!		
Fecha:	**Grado y grupo:**	**Edad:**
Nombre completo:		
Llenar cada uno de los espacios que se encuentran dentro de la tabla		

Objeto	Nombre del cuerpo geométrico	Número de aristas	Número de vértices	Número de caras	Nombre de la figura de una de las caras	Área del cuerpo geométrico
Cabeza						
Tronco						
Un brazo						
Una pierna						

Anexo 15

Consentimiento informado

CONSENTIMIENTO INFORMADO (Padres de Familia)

Consentimiento informado para la participación en el Proyecto de Investigación: **Argumentos de estudiantes de décimo grado y su relación con la estratificación del pensamiento algebraico.**

Estimado padre de familia. Le estamos invitando a leer con cuidado este documento en el que le solicitamos su consentimiento para que su hijo(a) participe de esta investigación que realizamos en la **Institución Educativa José Celestino Mutis**. Es necesario informarle y solicitar su aprobación en tanto su hijo(a) es menor de 18 años, y de acuerdo con la legislación colombiana respecto a los derechos de niños, niñas y adolescentes, es necesario que los padres firmen el consentimiento informado, a la par que los niños(as) firmen el asentimiento informado respectivo. Es importante que esté bien informado sobre todo lo relacionado con el desarrollo de la investigación, en caso de que decida permitir que su hijo(a) sea parte de esta, lo cual, en todo caso, es una decisión personal y libre de cualquier presión externa.

El Rector César Augusto Berrío Lara y el docente de matemáticas Olmar Arley Gómez nos han brindado el espacio para recopilar los datos necesarios que van a nutrir la investigación, la cuál es necesaria para obtener el título de licenciadas en matemáticas en la Universidad de Antioquia.

Sitio y tiempos en los que se llevará a cabo el estudio

El estudio se desarrollará en la ciudad de Medellín (Antioquia). Particularmente, en la Institución Educativa José Celestino Mutis**,** en la cual se encuentra matriculado el estudiante. El registro de la información se realizará en el espacio y jornada escolar, específicamente en su grupo, en los horarios y espacios regulares dispuestos en la Institución para la asignatura de matemáticas.

Información para el participante

En esta investigación, nos proponemos indagar por aspectos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas por medio de la argumentación, en donde los estudiantes pueden aprender a definir, expresar, comprender y analizar conceptos matemáticos y de la vida cotidiana mediante configuraciones formales e informales para dar explicaciones suficientes ante fenómenos y/o sucesos.

Identificación de los riesgos o molestias y plan para minimizarlos

Esta Investigación pertenece al campo de las ciencias humanas, y no se realizan procesos o actividades que expongan al estudiante a riesgos biológicos, físicos o psicológicos (depresión, angustia, culpa, ira, estrés –entre otros). Por el contrario, las actividades podrán redundar en beneficios para el desarrollo de prácticas educativas, y procesos de aprendizaje. Por lo tanto, durante el desarrollo de las actividades relacionadas con el Proyecto no se realizan acciones que impliquen riesgo físico alguno ni para el estudiante, ni para las personas cercanas, de su familia o del entorno escolar.

Garantías y claridades ante posibles riesgos:

- **Protección de identidad:** la participación del estudiante requiere el cumplimiento de normas relacionadas con la protección de la identidad (personal e institucional), salvaguardar el buen nombre, el buen uso de los datos y la información utilizada en el proceso.
- **Procesos evaluativos:** los resultados de la investigación pueden en algunos casos ser utilizados para realizar procesos evaluativos conducentes a notas o valoraciones. Para lo anterior, se delimitarán claramente los momentos de la evaluación de los aprendizajes,

que realizan los profesores, del resto de actividades de aprendizaje, y que pueden ser objeto de análisis en la investigación.

- **Costos:** ningún estudiante tendrá que hacer inversión alguna para las actividades del proyecto, con lo cual no hay ningún riesgo de que los participantes puedan sufrir afectación legal económica alguna por participar en la investigación.

Participación en el proyecto

El principal compromiso para el estudiante es participar de las clases con responsabilidad y respeto por sus maestros, compañeros e investigadores. Su participación será valorada en términos del reconocimiento personal, el valor del trabajo socialmente útil y la participación en actividades colectivas de reconocimiento social.

Adicionalmente, sobre la participación en el Proyecto se le informa que:

1. La participación es libre y voluntaria.
2. Un participante se puede retirar de la Investigación en cualquier momento por medio de notificación verbal, sin que eso represente un perjuicio para él
3. Los participantes no tendrán incentivos económicos, no recibirán pagos o retribución económica alguna por su participación en el Proyecto.
4. Como las actividades del proyecto se realizan dentro de la jornada escolar regular, no es necesaria la presencia de los tutores legales o padres de los estudiantes. Cuando se estime necesaria la participación de los padres o tutores legales en alguna actividad, se informará oportunamente, y en todo caso, la participación será voluntaria.

Uso de las producciones de los participantes

Los datos recopilados son videos, grabaciones de audio de las clases, registro de las experiencias de aula, los registros escritos del trabajo en el aula (copias de los cuadernos u hojas de trabajo) y fotografías de momentos específicos del proceso. Se siguen todos los protocolos que exige la legislación colombiana en materia de almacenamiento y tratamiento de información sensible de los participantes, y se busca minimizar el riesgo social o el perjuicio económico derivado del mal uso de la información. La información producida será salvaguardada en medios físicos y electrónicos (computadores y discos duros del equipo de investigación, almacenamiento en la nube), en los lugares que disponga el equipo de investigación y bajo la custodia de los investigadores. Se cumplirá la norma colombiana al respecto (decreto 1377 de 2013). La información no será vendida o cedida a terceras personas o entidades. Se preservará la identidad de los participantes en el estudio a través de seudónimos y no se realizará ningún tipo de divulgación de la información recolectada que ponga en evidencia la identidad de los participantes. Cualquier transcripción de trabajos, audio o video serán tomados con absoluta confidencialidad. Las producciones serán usadas solo con fines académicos e investigativos y se evitarán sesgos y juicios de valor que afecten a los participantes.

Obligaciones del investigador

Los investigadores pueden orientar pedagógicamente los cursos en los que se realiza la recolección de la información y realizar seguimiento de la participación y proceso educativo de los estudiantes para atender cualquier novedad que surja con relación al desarrollo del Proyecto. De igual forma, se brindarán todas las garantías posibles para el normal desarrollo y cumplimiento de los compromisos adquiridos con los centros educativos dónde se desarrolla el Proyecto. Los investigadores se comprometen a informar oportunamente cualquier hallazgo que pueda significar problemas o beneficios en la formación de los participantes del proceso.

Devolución de la información en la investigación.

El desarrollo del proceso de investigación contempla la difusión de resultados finales a través de artículos de investigación en revistas científicas y presentación de ponencias en eventos nacionales e internacionales. Además de esto, contempla procesos de difusión e interacción con la comunidad nacional donde se discuta el Proyecto; para esto se estipula la publicación de boletines de divulgación virtual, a los que usted podrá tener acceso por medio del correo electrónico de las practicantes y sus asesores.

Firmas de las practicantes y sus asesores de investigación

Firma de la practicante
Nombre: Gabriela Galeano Castro
Número de identificación: 1.007.242.181
Correo electrónico:
gabriela.galeano@udea.edu.co
Tel: 3206812784

Firma de la practicante
Nombre: Angie Susana Rivera Zapata
Número de identificación: 1.017.267.150
Correo electrónico:
susana.rivera@udea.edu.co
Tel: 3245890526

Firma del asesor interno de práctica
Nombre: John Henry Durango Urrego
Número de identificación: 98.643.263
Correo electrónico:
john.durango@udea.edu.co
Tel: 3122753139

Firma de la asesora interna de práctica
Nombre: Sandra Milena Zapata
Número de identificación: 32.140.410
Correo electrónico:
sandra.zapata@udea.edu.co
Tel: 3206725819

Firma del profesor cooperador
Nombre: Olmar Arley Gómez
Correo electrónico:
olmararley@gmail.com

Firma del Rector de la Institución
Nombre: César Augusto Lara
Correo electrónico:
cesaraugust80@gmail.com
Tel: (604) 2540988

Procedimientos del estudio

La actividad colaborativa es una de las estrategias para promover y estudiar la participación de los estudiantes en la investigación. En ese sentido, solicitamos su ayuda y respaldo mediante la autorización para que la actividad escolar del estudiante sea registrada a través de los medios que se presentan a continuación, para ser analizada:

Marque con una X en SI, si autoriza el registro de la participación del estudiante en los formatos que se indican.

SI ☐ NO ☐	1. Videos que registran cada una de las sesiones de clase.

SI ☐ NO ☐	2. Informes de las acciones realizadas y los contenidos desarrollados en el curso.
SI ☐ NO ☐	3. Diálogos, documentos y diversos recursos dispuestos que se utilicen en el curso.
SI ☐ NO ☐	4. Audios de entrevistas.
SI ☐ NO ☐	5. Videograbaciones de entrevistas.
SI ☐ NO ☐	6. Fotografías.

Aceptación de la participación

Manifiesto que no he recibido presiones verbales, escritas o mímicas para participar en el estudio; que tomó dicha decisión consciente y libre, en pleno uso de mis facultades mentales, sin encontrarse bajo efectos de medicamentos, drogas o bebidas alcohólicas.

He leído y escuchado satisfactoriamente las explicaciones sobre la participación en esta investigación; así mismo, se me brindó copia del consentimiento informado y he tenido la oportunidad de hacer preguntas a las cuales se me han respondido satisfactoriamente, por lo que estoy de acuerdo en que el estudiante participe en ella y autorizo el uso de la información obtenida para los propósitos planteados en el apartado introductorio del presente consentimiento.

____

Firma de consentimiento
Nombre del Padre de familia o acudiente:
Número de identificación:
Correo electrónico:
Tel:
Nombre del estudiante:
Número de identificación del estudiante:
Grado:
Fecha:

Anexo 16

Asentimiento informado

ASENTIMIENTO INFORMADO

Estimado estudiante, somos Gabriela Galeano Castro y Susana Rivera Zapata, practicantes de la Universidad de Antioquia. Hemos solicitado permiso a tus padres y a tu profesor para invitarlas/los a participar activamente de una investigación que vamos a comenzar en este grupo.

Te vamos a explicar varias cosas importantes de este proceso: los beneficios, los riesgos potenciales, las responsabilidades, los deberes y los derechos que cada uno de ustedes tendrá si desea participar. Si tienes preguntas, no entiendes alguna palabra o deseas que explique de forma más clara, no tengas temor de levantar la mano y pedirlo. Al final de esta conversación podrás decidir si aceptas participar. Si no estás interesado, no pasará nada.

Objetivos de la investigación

Como requisito para obtener un título profesional en la Universidad de Antioquia, debemos como practicantes desarrollar una investigación dentro de una institución educativa de la ciudad; por ello, en la Institución Educativa José Celestino Mutis deseamos conocer cómo se realizan tus clases, participar de ellas, observar todo lo que ustedes hacen en el salón y así pensar de qué maneras podemos mejorar lo que se enseña en la escuela, para que se puedan utilizar otras metodologías y recursos en un futuro y les permita crecer a ustedes académicamente y como seres humanos.

Con esta investigación queremos saber de qué manera la argumentación tiene implicaciones en el aprendizaje del álgebra a partir de actividades que van a ser propuestas durante el resto del año escolar.

Procedimiento del estudio

Para conocer mucho sobre tu trabajo en el aula, participaremos en las clases con tu profesor Olmar Gómez. Es decir, no planeamos realizar actividades en otros horarios o en otros lugares diferentes a los que estipula la institución educativa; pero, quizás en algunas ocasiones les invitemos a realizar trabajos individuales o en grupos en un espacio diferente al aula de clase, y por supuesto, si alguno de ustedes tiene inconvenientes en asistir o no desea participar en ese espacio puede no hacerlo y aun así seguir vinculado con todo el proceso de investigación.

Para recordar todas las actividades que ustedes realizan, registraremos algunas clases con grabadoras o cámaras de video y tomaremos copia de tus cuadernos y hojas de trabajo. De todas maneras, es posible que a alguno de ustedes no les gusten que les tomen fotografías o los graben durante las clases. En la siguiente tabla nos podrás manifestar específicamente qué no te gustaría que se registrara. Tienen todo el derecho a elegir sobre esto y a proponer otras alternativas si así lo consideran importante.

Confidencialidad de la información

La confidencialidad significa que no le diremos a otras personas tu nombre, ni les mostraremos tu rostro. Cuando estemos recuperando la información (por ejemplo, cuando observemos los videos de las clases) tu nombre será reemplazado por otro para que las personas no sepan que eres tú. Tu identidad sólo será reconocida por tu docente, nosotras las investigadoras y algunos docentes de la Universidad de

Antioquia que nos ayudan en la investigación. Pero, no tienes por qué preocuparte, ninguno de nosotros revelará ningún detalle que permita tu identificación (como fotos, nombres, trabajos escritos, etc.).

La información producida será guardada y protegida en medios físicos y electrónicos (computadores y discos duros del equipo de investigación, almacenamiento en la nube). Se cumplirá la norma colombiana al respecto (decreto 1377 de 2013). La información no será vendida o entregada a terceras personas o entidades.

Identificación de los riesgos o molestias y plan para minimizarlos.

Durante el desarrollo de las actividades relacionadas con el Proyecto no se realizan acciones que impliquen riesgo físico alguno para ti, ni para las personas cercanas, de tu familia o del entorno escolar.

A continuación, te describimos otros riesgos potenciales y el plan para minimizarlos**:**

Posible riesgo	Acciones para su minimización
Afectar tu privacidad	Cumpliremos con las normas para proteger tu identidad y la de tu colegio. Además, cuidaremos y haremos un buen uso de tu información. No se considerarán en la investigación contenidos como videos y fotografías por fuera del salón de clase, a menos que se trate de una actividad que se realice al aire libre o en una salida pedagógica y que forme parte del proceso de investigación.
Afectar tus calificaciones	Los resultados de la investigación en algunas situaciones se usarán para asignarte una nota. Por lo tanto, siempre que tengas una actividad evaluativa, serás informado.
Afectar tu economía	No tendrás que preocuparte por comprar ningún material para hacer las actividades. El proyecto les dará todos los recursos que necesitemos. Esto no quiere decir que tú o cualquiera de tus compañeros vayan a recibir dinero por participar en el proyecto.

Compromiso de los participantes

Participar de sus clases con responsabilidad, respeto por sus docentes, compañeros e investigadores.

Derecho a elegir participar o retirarse cuando lo desee

Tu participación es libre y voluntaria. Si en algún momento no deseas participar se lo puedes comunicar a tu docente, a tu acudiente o directamente a alguna de nosotras. Eres libre de tomar esa decisión.

Identificación de los investigadores.

Firma de quien gestiona el consentimiento informado Nombre: Gabriela Galeano Castro Número de identificación: 1.007.242.181 Correo electrónico: gabriela.galeano@udea.edu.co Tel: 3206812784	Firma de quien gestiona el consentimiento informado Nombre: Angie Susana Rivera Zapata Número de identificación: 1.017.267.150 Correo electrónico: susana.rivera@udea.edu.co Tel: 3245890526

*Marca con una **X** en **SÍ** si estás de acuerdo con que tu información sea registrada por cada uno de los medios o colocas una X al lado de **NO** para indicar que estás en desacuerdo.*

1. Videos que registran cada una de las sesiones de clase.	**2.** Informe de las acciones realizadas y los contenidos desarrollados en el curso.
SI ☐ **NO** ☐	**SI** ☐ **NO** ☐
3. Audios y videograbaciones de entrevistas.	**4.** Registro de diálogos, documentos y diversos recursos dispuestos en el grupo.
SI ☐ **NO** ☐	**SI** ☐ **NO** ☐
5. Fotografías.	
SI ☐ **NO** ☐	

Aceptación de la participación

Fecha (día, mes y año): _________________________________

YO: ______________________________________ tengo ______ años.
Quiero decir que me han explicado sobre el proyecto de investigación y decidí
Participar ☐ **No participar** ☐

____

Mi firma Mi huella