UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

TIC: UN INSTRUMENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS OPERATIVAS DE PRIMER SEMESTRE EN LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA SECCIONAL SUROESTE

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación

LUIS FERNANDO SUÁREZ RESTREPO

ASESOR

WALTER FERNANDO CASTRO GORDILLO

TIC: UN INSTRUMENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS OPERATIVAS DE PRIMER SEMESTRE EN LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA SECCIONAL SUROESTE

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación

PRESENTADO POR:
LUIS FERNANDO SUÁREZ RESTREPO

ASESOR
WALTER FERNANDO CASTRO GORDILLO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
SECCIONAL SUROESTE
2015

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

TIC: UN INSTRUMENTO EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS OPERATIVAS DE PRIMER SEMESTRE EN LA UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA SECCIONAL SUROESTE

Trabajo de grado para optar al título de Magister en Educación

LUIS FERNANDO SUAREZ RESTREPO

ASESOR: Walter Fernando Castro Gordillo

Notas de aceptación

____

____

____

____

____

Jurado 1

____

Jurado 2

____

Jurado 3

AGRADECIMIENTOS

A DIOS, por haberme dado las fuerzas, la voluntad y la inteligencia para desarrollar un trabajo tan exigente, y por configurar las circunstancias para que fuera posible adelantar mis estudios en la Región sin abandonar a mi familia.

A mi familia, por apoyar, soportar y entender los momentos de alejamiento que se requerían para dedicarle al estudio

A mi asesor, Walter Fernando Castro Gordillo, por brindarme su apoyo y su conocimiento en un proceso de formación exigente y que en momentos se tornaba difícil por la distancia que nos separa.

A mis compañeros de trabajo en la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste, por cubrirme en los momentos que debía ausentarme para atender los asuntos académicos y por el apoyo y motivación que me brindaron en todo el proceso

A mis profesores, porque con su conocimiento pude explorar opciones que no conocía y que fueron fundamentales en el proceso de formación.

A la Universidad de Antioquia y a la Facultad de Educación por descentralizar sus programas de formación y ofrecer nuevas oportunidades de superación académica.

A los integrantes del Grupo de Investigación, Matemática, Educación y Sociedad (MES) por sus aportes, realizados en las sustentaciones, que enriquecieron la experiencia.

A los estudiantes de Ingeniería Agropecuaria de primer semestre (2015-1) de la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste, por aplicarse con tesón a realizar las tareas y las actividades propuestas y por ser un pilar fundamental en esta investigación.

LISTA DE FIGURAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

LISTA DE TABLAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

TABLA DE CONTENIDO

ASPECTOS GENERALES

En la presente investigación se aborda a partir de la génesis instrumental (Rabardel, 1995) en el proceso de aprendizaje de las matemáticas con un grupo de Ingeniería Agropecuaria de la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste. Este proceso se enfoca en las maneras en las cuales los estudiantes incorporan las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) durante su proceso de aprendizaje de temas matemáticos enmarcados en un curso de primer semestre universitario.

Los recursos tecnológicos usados refieren al computador y a los software wxMaxima[1] y Geogebra[2]. Para lograr que los estudiantes utilicen tanto el computador como los software se han diseñado tareas que involucran los conceptos de función: función polinómica y función trigonométrica.

Este informe de tesis de maestría se divide en 5 capítulos: el Capítulo 1 presenta tanto la situación problemática, así como los software wxMaxima[3] y Geogebra. Se presentan las características que se usaron en esta investigación, además de presentar la pregunta y los objetivos de la investigación. En el Capítulo 2 se introducen algunos aspectos históricos sobre: función polinómica y función trigonométrica, además de presentar aspectos que han sido relevantes en el desarrollo de la tecnología en la educación. El Capítulo 3 se refiere a la teoría de la génesis instrumental, sus componentes y los aspectos operativos que nos permiten identificarla en este proceso de investigación. Se hace referencia a la Teoría de la Orquestación como un componente adicional de la génesis instrumental. El Capítulo 4 se presentan las 'guías de clase', así como los componentes que permitirán el análisis de la información, resaltando aspectos matemáticos y aspectos tecnológicos propios de los recursos tecnológicos utilizados, desarrollando un análisis de las actividades, relacionando los conocimientos de los estudiantes con las acciones desarrolladas, con motivo de las guías y tareas planteadas. El Capítulo 5 presenta las conclusiones sobre el proceso de aprendizaje y de génesis instrumental que se logró con motivo de esta investigación.

---

[1] Página de la aplicación: http://maxima.sourceforge.net/es/index.html
[2] Página de la aplicación: https://www.geogebra.org/
[3] El nombre Maxima hace referencia al nombre dado al software y por tal motivo no tiene tilde en su nombre.

CAPITULO 1 – SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

1.1. Antecedentes

La matemática es una ciencia compleja en la que se resalta la comunicación de ideas entre personas acerca de conceptos tales como: los números, el espacio, el tiempo y el entorno cultural. La comunicación sobre ideas matemáticas requiere de un ‘discurso matemático’. -Leer, escribir, escuchar y hablar, abstraer, generalizar, analizar, sintetizar- ; e involucra actividades y prácticas matemáticas que se realizan en un contexto cultural y social. El discurso matemático involucra todas las maneras en las que la matemática se hace: en el lenguaje, en los libros de textos, en las conversaciones matemáticas, en las clases de matemáticas y en la aplicación del conocimiento matemático (Wood & Perrett, 1997).

Casi todas las culturas son ‘matematizadas’, en tanto que las personas participantes de la cultura usan ideas matemáticas en su vida diaria (Socas & Camacho, 2003). Las matemáticas son parte de todas las sociedades, parte de muchas profesiones y parte de la vida diaria. En tanto que la educación como institución inicia a los niños en la cultura que les es propia (Mead, 1934), los estudiantes suelen ser introducidos al estudio de la matemática mediante problemas paradigmáticos históricamente en el desarrollo de habilidades, ideas, conceptos, propiedades y formas de argumentación (Godino, 2009).

Culturalmente se reconoce la importancia de las matemáticas y de su correcta aplicación. Los ejemplos de práctica del papiro de Ahmes y de algunas tabletas de cerámica babilónicas se asemejan a la manera como las matemáticas son enseñadas hoy en día (Fowler & Robson, 1998). Para Hoyrup (1994) la matemática es una disciplina que comenzó a organizarse sistemáticamente por la necesidad de enseñarla a los escribas alrededor del 3000 a.c.

Pese a la importancia de la matemática en nuestra cultura, para la mayoría de los estudiantes son difíciles, poco agradables y poco útiles; por lo cual manifiestan cierto desdén hacia ellas y hacia su estudio (Flores, Gozalez, & Rodriguez, 2013). Tal desdén se aprecia aún antes de ingresar a la Universidad cuando durante la promoción que se hace, a los futuros aspirantes, de los programas académicos de la Universidad de Antioquia en las Instituciones Educativas del Suroeste Antioqueño, estos preguntan: ¿Esa carrera tiene mucha matemática?, ¿Qué carrera no tiene matemáticas?.

El curso de matemáticas operativas (MO) del primer semestre tiene un bajo porcentaje de aprobación y un alto porcentaje de cancelación. En el semestre 2013-2, el 52% (12 de 23) de los estudiantes del programa académico "Regencia de Farmacia" no aprobaron el curso de matemáticas operativas. En el semestre 2014-1, el 41% (17 de 41) de los estudiantes de Administración de Empresas cancelaron el curso de Matemática I, equivalente en temática y contenido al curso matemáticas operativas.

Los bajos niveles de desempeño pueden afectar la permanencia de los estudiantes en la universidad (Meléndez, 2008), con lo cual se puede perturbar tanto el desarrollo personal de los estudiantes como el desarrollo económico de la región. Las consecuencias económicas y sociales derivadas de la deserción de los estudiantes es variada: marginación, perpetuación de la pobreza, limitación de recursos por parte del estado que contribuyen a incrementar el problema educativo (Quiroz, 2010). En Colombia existen documentos[4] que informan sobre el problema de la deserción y de los programas de retención en las universidades colombianas.

A partir de la experiencia realizada en la Universidad de Antioquia (MINEDUCACIÓN, 2015) se recomienda "Entender las deficiencias de la Educación Media y propuesta de programas para fortalecer las competencias al ingreso" (p. 135).

Una alternativa para motivar a los estudiantes para que aprendan matemáticas y para que cambien su actitud negativa hacia ellas, se suele identificar con el uso de la tecnología para su enseñanza. La motivación puede incrementar sus conocimientos y habilidades básicas (Ospina, 2010). Tradicionalmente se ha utilizado la calculadora como herramienta para agilizar los cálculos y obtener resultados precisos, sin embargo la computadora ofrece mayor capacidad computacional, además, existe software matemático comercial o con características libres (Geogebra, Cabri,

[4] http://www.epigrafe.com/preview/editoriales/unisabana/persistencia/index.htm

Derive, Maxima…) que pueden ser usados para abordar los contenidos matemáticos desde una perspectiva más participativa, sin desfavorecer el rigor matemático (Pizarro, 2009).

El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) favorecen el aprendizaje (Badia, 2006). Una de las ventajas atribuidas al uso de la tecnología es el fortalecimiento de la interacción con los objetos matemáticos, al permitir modificar variables, analizar cambios y visualizar los resultados, lo que puede favorecer tanto la comprensión de situaciones complejas como la participación de los estudiantes.

Dada la importancia que tiene el curso de matemática operativas de primer semestre, en la permanencia de los estudiantes en la carrera como las consecuencias económicas que tiene para la economía local, es pertinente indagar sobre maneras tanto para disminuir la pérdida y la cancelación del curso como para motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de las matemáticas. Se considera que la motivación a los estudiantes podría disminuir tanto la perdida como la cancelación, sin embargo ese aspecto no se estudia en esta investigación. Así mismo, se requiere indagar si el uso de las TIC puede ayudar a mejorar las experiencias de formación de los estudiantes. Si bien no se pretende determinar si el uso de las TIC puede incidir positivamente en la disminución de las tasas de pérdida y en la cancelación del curso, se desea investigar si la presencia de las TIC es ‘incorporada’ por los estudiantes como un instrumento que puede ayudar a su proceso de aprendizaje del curso de Matemática Operativa.

1.2. Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)

A la tecnología se le atribuye un gran potencial para mejorar la instrucción matemática (Montes & Zambrano, 2013), sin embargo su uso no se limita a su disponibilidad en el salón de clase. La tecnología suele asumirse como un artefacto cultural que "… predispone nuestra mente para percibir el mundo a través de los <<lentes>> de las capacidades de esa herramienta" (Brouwer, n.d.) facilitando o dificultando desarrollar ciertas actividades.

Muchos artefactos tecnológicos pueden ser usados –software, calculadoras, lenguajes y programas.- para mediar en el proceso de la enseñanza y el aprendizaje (Lajoie, 1993) con beneficios que pueden percibirse en el ambiente de desarrollo de las sesiones de clase o en la actitud con que los estudiantes asumen las tareas encomendadas. Lajoie (1993) describe los beneficios de utilizar el computador como recurso mediacional en la enseñanza.

Algunas de las ventaja enumeradas en el uso de las herramientas tecnológicas ventajas tales como: 1. Ayudar al proceso cognitivo, 2. Compartir la carga cognitiva, 3. Favorece que más estudiantes se involucren en las matemáticas, y 4. Ayuda a evaluar ideas y conjeturas.

Existen varias definiciones sobre las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). Podríamos afirmar que las TIC son tecnologías que giran en torno a tres medios básicos: "…la informática, la microelectrónica y las telecomunicaciones; pero giran, no sólo de forma aislada, sino lo que es más significativo de manera interactiva e interconexionadas [sic], lo que permite conseguir nuevas realidades comunicativas" (Cabero, 1998, p1).

Para Antonio Bartolomé (citado por: Bautista & Alba, 1997) la tecnología educativa

> "…encuentra su papel como una especialización dentro del ámbito de la Didáctica y de otras ciencias aplicadas de la Educación, refiriéndose especialmente al diseño, desarrollo y aplicación de recursos en procesos educativos, no únicamente en los procesos instructivos, sino también en aspectos relacionados con la Educación Social y otros campos educativos. Estos recursos se refieren, en general, especialmente a los recursos de carácter informático, audiovisual, tecnológicos, del tratamiento de la información y los que facilitan la comunicación". (p.2)

En este trabajo asumiremos las TIC como el ordenador y dos software específicos: wxMaxima y Geogebra, junto con las cualidades atribuidas a éstas (Vérillon & Rabardel, 1995). En el apartado correspondiente a la metodología, se explicitará el uso específico definido para los software, así como los temas, su relación con el currículo, los modos de representación, entre otros.

1.3. Justificación

En los últimos años se tienen avances tecnológicos que han modificado nuestra forma de comunicación y han provocado importantes cambios en la sociedad (Macias Ferrer, 2007).

Para el gobierno nacional era importante designar un responsable de controlar y administrar esta nueva forma de desarrollo que incursionaba en el país, y en 2009 el Ministerio de Comunicaciones cambia y se le otorga el nombre de Ministerio de las TIC, con el fin de "diseñar, adoptar y promover las políticas, planes, programas y proyectos del sector de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones" (MinTic, 2014).

En el marco de los múltiples proyectos implementados por el Ministerio de las Tic como "Mi PyMe Digital"[5], "Internet Sano"[6], "Gobierno en Línea"[7], entre otros, encontramos el programa "Computadores para Educar"[8] , cuyo objetivo es fomentar la calidad de la educación bajo un modelo sostenible, poniendo las TIC al alcance de las comunidades educativas, especialmente en las instituciones públicas, entregando equipos de cómputo y promoviendo la formación de los docentes para que implanten el uso de las TIC en las instituciones educativas (Educar, 2014).

Estas actividades han tenido acogida en el ámbito regional, la gobernación de Antioquia bajo su lema "Antioquia la más educada" y guiada por el programa "Antioquia Digital"[9] ha trabajado en proyectos, tales como los colegios digitales. En éste proyecto dota a las instituciones educativas con equipos de cómputo, conexión a internet, pizarras interactivas, además brinda programas de desarrollo profesional a los docentes y directivos para que promuevan el uso de tales recursos y motiven a los estudiantes a mejorar su experiencia de aprendizaje.

Para la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste es importante favorecer la conexión entre la actividad de aprendizaje y el mundo digital como una manera de contactar el desarrollo de

[5] (http://www.mintic.gov.co/portal/604/w3-propertyvalue-7235.html
[6] http://archivo.mintic.gov.co/mincom/faces/?id=2905
[7] https://www.gobiernoenlinea.gov.co/web/guest;jsessionid=16E19118554AFDD080AC979E7FA2231D
[8] http://www.computadoresparaeducar.gov.co/inicio/index.php
[9] http://www.antioquiadigital.edu.co/

experiencias locales con investigaciones internacionales, por ello ha realizado mejoras, al renovar, en el 2012, la sala de cómputo y extender la conexión a internet a las dos plantas físicas de la Institución ya que antes solo se tenía acceso en la sala de sistemas y en las aulas aledañas. Adicionalmente se dotó de equipos de cómputo y televisores a cada una de las aulas de clase.

Considerando tanto la disponibilidad de recursos computacionales, técnicos y de conexión a internet, como la propuesta de formación de profesionales para interactuar con su entorno, es pertinente la implementación de estrategias que vinculen el conocimiento disciplinar matemático con las TIC y que se aprovechen estas últimas para promover procesos de formación matemática, que serían difíciles de gestionar de otra forma, es así como la presente investigación se centra en el uso de las TIC para promover la integración del conocimiento matemático en las competencias profesionales de los estudiantes en formación.

Marqués (2001) y Moreno (2012) resaltan los efectos del uso de las TIC en el proceso de aprendizaje: son un eje motivador ya que los estudiantes dedican más tiempo a la realización de tareas buscando diferentes formas de solución, propiciando así su iniciativa al enfrentarse a la toma de decisiones ante los obstáculos de manejo o comprensión de las diferentes opciones que ofrezca una aplicación, un dispositivo o un objeto matemático. También se promueve el aprendizaje significativo, al vincular el conocimiento previo de los estudiantes con los desarrollos de actividades específicas, además de la alfabetización digital que se promueve mediante la interacción con los ordenadores, calculadoras o dispositivos electrónicos.

1.4. wxMaxima

Máxima es un programa capaz de manipular expresiones algebraicas, derivar e integrar funciones además de graficar en dos dimensiones (2D) y en tres dimensiones (3D), lo que favorece que sea útil para explorar algunos de los contenidos matemáticos que deben ser estudiados por un estudiante de Matemáticas Operativas de primer semestre de pregrado.

Actualmente existe en el mercado variedad de programas que tienen aplicaciones para incluir, en mayor o menor medida, los diferentes temas del curso de matemáticas: Mathematica (C Wolfram Research) o Maple (C Maplesoft). Se escogió Maxima, ya que es un software libre, distribuido bajo licencia GNU-GPL[10] y no requiere de especificaciones elevadas en los equipos de cómputo para su instalación, además ofrece la posibilidad de instalarse en diferentes sistemas operativos (Windows, Mac os, Linux) y en diferentes plataformas, como Android. Sus características matemáticas, permiten abordar diferentes contenidos del curso de Matemáticas Operativas, y brindan a los estudiantes la posibilidad de utilizarlo en el hogar, conservando los valores éticos de la legalidad.

Máxima es una aplicación que se ejecuta a través de consola, lo que significa que los comandos deben ser ingresados a través del teclado conservando la sintaxis definida para cada uno de ellos. Sin embargo, el equipo de desarrollo de Maxima implementó una interfaz gráfica que facilita el acceso a diferentes comandos usando el mouse. Este interface gráfica recibe el nombre de wxMaxima.

1.5. Geogebra

Geogebra es un software interactivo de matemática que favorece mostrar algunos elementos o proposiciones geométricas de manera dinámica, álgebra y cálculo para la construcción e interacción de puntos, figuras, segmentos, rectas, vectores, cónicas y gráficas de funciones, además de diversas representaciones -gráfica, algebraica, y tabular-.

El proyecto Geogebra inició en 2001 en un curso de matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria), donde Markus Hohenwarter quería crear una calculadora libre para álgebra y geometría. Actualmente se continúa con el desarrollo de la aplicación en la Universidad de Boca Raton, Florida Atlantic University (Estados Unidos). Geogebra está diseñado para trabajo colaborativo,

[10] GNU-GPL : General Public Licence, tipo de licencia que garantiza a los usuarios la libertad de usar, estudiar, compartir y modificar el software

y en la página oficial dispone de ayudas, recursos, foros y wikis que se actualizan permanentemente por usuarios de todo el mundo.

Geogebra es un software de código abierto (GNU-GPL) de tal suerte que puede utilizarse libremente para propósitos no comerciales, además puede instalarse en varios equipos de cómputo. Geogebra usa la multiplataforma de Java, lo que garantiza su portabilidad a sistemas de Windows, Linux, Solaris o Mac OS X, además tiene una versión para Smartphone.

La principal característica de Geogebra es la doble representación (gráfico y algebraico) de los objetos matemáticos, lo que favorece relacionar los símbolos algebraicos con las representaciones geométricas. Además, permite abordar diferentes conceptos matemáticos a través de la experimentación y de la manipulación. Adicionalmente se favorece la construcción y la deducción de propiedades a partir de la observación.

1.6. Pregunta de Investigación

Las TIC se suelen utilizar en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En la enseñanza es común observar el uso de computadores, presentaciones de PowerPoint, consultas basadas en páginas de internet o el uso de las aplicaciones ofimáticas (Word, Excel, PowerPoint) para el desarrollo de diversas actividades que orientan la enseñanza. La atención de los estudiantes se suele centrar más en el uso de redes sociales, dispositivos móviles, foros entre otros. Aplicaciones que han llegado a manejan de forma eficiente de acuerdo con su propósito. Por ello el uso de aplicaciones específicas para interactuar con conceptos matemáticos puede servir de estrategia para propiciar el conocimiento de los mismos, pues se reporta que los estudiantes tienen una destreza para aprender a utilizar una herramienta informática nueva.

Se plantea la siguiente pregunta:

¿ Cómo integran las TIC (software wxMaxima y Geogebra) en el proceso de aprendizaje de las matemáticas operativas, los estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste?

1.7. Objetivos

1.7.1. Objetivo General

Analizar la integración TIC (Software máxima y Geogebra) en el aprendizaje de las matemáticas operativas, desde la perspectiva teórica de la génesis instrumental, con los estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste.

1.7.2. Objetivos específicos

- Introducir las TIC a partir de actuaciones del docente en torno a instrumentalización, instrumentación y génesis instrumental específicas con base en los recursos de representación que ofrecen (gráfica, algebraica, y tabular).

- Analizar las maneras de expresión actuativa de la instrumentación en el curso de matemáticas operativas, por parte de los estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste

CAPITULO 2 – ASPECTOS HISTÓRICOS

El trabajo que aquí se presenta versará sobre dos conceptos matemáticos importantes: polinomio y función. Se trabajará específicamente funciones polinómicas y funciones trigonométricas. A continuación se hará un recorrido histórico sucinto de estos objetos matemáticos. Posteriormente se referenciarán algunas investigaciones que abordan las dificultades de aprendizaje de estudiantes de secundaria y de primeros semestres de universidad.

La palabra polinomio, según la Real Academia de la Lengua, refiere a: "Expresión compuesta de dos o más términos algebraicos unidos por los signos más o menos. Los polinomios de dos o tres términos reciben los nombres especiales de binomio y trinomio, respectivamente.". En este trabajo asumiremos el polinomio como una expresión compuesta por constantes numéricas (coeficientes) y variables con potencias numéricas naturales y con operaciones entre términos de sumas y restas.

Por su parte el concepto de función es uno de los más importantes en matemáticas. Evolucionó desde una entidad numérica (representada en tablas Babilónicas) hasta llegar a una ecuación (Leibniz y Euler); una correspondencia arbitraria entre intervalos numéricos (Dirichlet) y finalmente a una correspondencia entre pares numéricos o no numéricos (Apostol, 1973). La idea de incorporar el estudio de las funciones en la matemática escolar se debe a Felix Klein, quien en 1908 logró introducir la geometría analítica y el cálculo en los contenidos matemáticos de la secundaria, en Alemania (Kilpatrick, 1992).

Diversas investigaciones informan sobre las dificultades de los estudiantes con el objeto matemático de función (Sajka, 2003; Sierpinska, 1992). Durante el ejercicio docente, se puede apreciar que los estudiantes manifiestan dificultades en la comprensión y en el uso del objeto tanto de polinomio como de función, en particular las funciones trigonométricas. Adicionalmente estos objetos se usan en modelos matemáticos útiles para los estudiantes de Ingeniería Agropecuaria.

A continuación se hará una presentación sucinta de estos objetos matemáticos, tales como serán estudiados en el curso de Matemáticas Operativas, en la Seccional Suroeste, de la Universidad de Antioquia.

2.1. Función Polinómica

Ruiz Higueras (1994), afirma que el concepto de función usado actualmente en matemáticas, es el resultado varias generalizaciones que ha evolucionado por más 2000 años. Es difícil declarar un momento en la historia que describa el origen de un concepto, en especial si se trata de un concepto matemático, ya que muchos han sido los momentos de desarrollo y los matemáticos que aportaron. Sin embargo podemos examinar hechos históricos y estudiar los problemas y conceptos que son usados en los textos babilónicos (Papiro de Rhind), algunos de ellos corresponde a soluciones de problemas que versan sobre ecuaciones lineales. Aunque no estaba definido, esta cultura trabajaba con la idea matemática de función, pues se destacaron por buscar patrones de regularidad en la naturaleza para luego explicarlos de una forma aritmética, así, construyeron tablas que permiten obtener soluciones a ecuaciones de segundo grado, mediante un método que hoy es conocido como 'completar el cuadrado'. Sin embargo, existe significativa entre lo que percibimos como funcional y lo que podemos definir como función (Ruiz Higueras, 1998).

Los griegos utilizaron magnitudes geométricas para representar números, como por ejemplo

> "… el producto de dos números se convierte en el área del rectángulo cuyos lados tienen como longitudes esos dos números, el producto de tres segmentos es un volumen, la suma de dos números es igual a la prolongación de un segmento en longitud igual a la de otro, la resta es recortar de un segmento la longitud del segundo, la división se indica por la razón entre los segmentos que lo representan" (Kline, 1992, p 98)

Sin embargo los griegos enfrentaban problemas al tratar de representar expresiones como $x^3 + x^2 + x + 1$ ya que, de acuerdo con el sustrato geométrico sobre el que se representaban, se estarían sumando un volumen, una área y una longitud.

> "La homogeneidad que conducía a comparar siempre magnitudes de la misma naturaleza pudo ser un obstáculo al desarrollo de la noción de función puesto que impedía encontrar de forma significativa, dependencias entre variables de diferentes magnitudes, germen de toda relación funcional" (Cotret, 1985, p. 36).

En la edad media, Nicolás Oresme emplea gráficos para representar los cambios, trazando segmentos horizontales para representar tiempo y para cada tiempo, segmentos perpendiculares, representando la velocidad en ese tiempo y así podía describir y comparar fenómenos de variación.

Varios aportes sucesivos se dieron para la representación simbólica de las ecuaciones y funciones: En 1489, John Widmann ideo los signos (+) y (−), Christoff Rudolf (1525) comenzó a usar el signo √; Robert Recorde (1557) introdujo el signo =; William Oughtred (1631) uso el signo *x*; en ese mismo año, Thomas Harriot comenzó a usar los signos <>, René Descartes en 1637 adopto la letra *x* para designar la incógnita y comenzó a usar los números enteros para escribir los exponentes.

Fermat y Descartes, propician el inicio de la geometría analítica al relacionar el álgebra con la geometría y es así como se enuncia la idea de que una ecuación con variables en *x* e *y* son la forma para introducir una dependencia entre dos cantidades, calculando los valores de una de ellas en correspondencia con los valores dados de la otra (Youschkevitch, 1976).

Leibnitz usa por primera vez el término función, pero Bernoulli y Euler consideran la noción de función como una expresión analítica, proponiendo el primero de ellos, la letra *f* característica de una función, para escribirse como *f(x)*. En la definición Euleriana del concepto de función, se reemplaza el término cantidad por el de expresión analítica. Finalmente la función describe la relación entre dos o más magnitudes.

2.2. Funciones Trigonométricas

La trigonometría tuvo sus inicios en las prácticas antiguas de la astronomía matemática, especialmente en la modelación de los movimientos de objetos celestiales. En Grecia Hiparco (190 a.c. – 120 a.c.) y Tolomeo (100 a.c. – 170 a.c.) usaron longitudes de arco para medir distancias. En la India la Trigonometría fue más computacional y menos geométrica. Los astrónomos en la edad medieval, influenciados por el enfoque de Tolomeo, la utilizaron para hacer mediciones terrestres y celestes. En el siglo X se reformula la trigonometría esférica y es utilizada en el Islam para la medición del tiempo astronómico y para determinar la dirección hacia la Meca en el inicio del mes lunar.

Finalmente, el reto de calcular valores aproximados mediante funciones trigonométricas llego a su culmen con las tablas de Rheticus, Otho y Pitiscus a finales del siglo XVI. A principios del siglo XVII se produjo un gran avance en los cálculos trigonométricos gracias al matemático escocés John Napier (1550 – 1617). También encontró reglas mnemotécnicas para resolver triángulos esféricos, y algunas proporciones para resolver triángulos esféricos oblicuos, llamadas analogías de Napier. Medio siglo después, Isaac Newton (1643 – 1727), logro representar funciones mediante el uso de series infinitas de potencias de la variable *x*, y encontró la serie para el *seno(x)*, *coseno(x)* y la *tangente(x)*.

Por último, en el siglo XVIII, el matemático Leonhard Euler (1707 – 1783) fundó la trigonometría moderna, definiendo las funciones trigonométricas mediante expresiones con exponenciales de números complejos. Euler demostró que las propiedades básicas de la trigonometría eran simplemente producto de la aritmética de los números complejos.

Joseph Fourier (1768-1830) en su trabajo sobre la teoría del calor, demostró que toda función se puede expresar, aproximadamente, como una serie infinita de senos y cosenos.

Dada la relación de la trigonometría con los cálculos numéricos y con la geometría, y su uso para resolver problemas cotidianos, fue introducida en los programas de formación matemática mundialmente (NCTM, 2001).

Las matemáticas escolares en Colombia se rigen por las orientaciones dadas en los “Lineamientos Curriculares de Matemáticas” (MEN, 1998) y en los “Estándares Básicos de Matemáticas” (MEN, 2006) propuestos por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN). Sin embargo, los documentos anteriores no son explícitos frente al desarrollo de pensamiento matemático, vinculado al conocimiento de funciones trigonométricas.

En los Lineamientos Curriculares (1998), no se menciona específicamente la trigonometría, ni se dan sugerencias acerca de su enseñanza. En los Estándares Básicos de Matemáticas para los grados 10 y 11 (MEN, 2006) se propone, para el Pensamiento Espacial: "describir y modelar fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas" (p. 43) y, para el Pensamiento Variacional, "modelar situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas". (p. 44)

La trigonometría se suele enseñar siguiendo dos enfoques. Uno de estos enfoques estudia las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo, incluye identidades trigonométricas y se presentan y resuelven algunas ecuaciones trigonométricas vinculadas con problemas de aplicación. El otro enfoque presenta las funciones trigonométricas en el plano cartesiano, sus gráficas y algunas de sus propiedades. Se realizan las representaciones y análisis de sus gráficas incluyendo las funciones inversas. Posteriormente se estudian aplicaciones de las leyes del seno y del coseno.

El componente de trigonometría en el curso de matemáticas operativas considera que su estudio debe incluir: las razones trigonométricas y la trigonometría de las funciones trigonométricas en el plano cartesiano.

2.3. Tecnología en el aprendizaje de las matemáticas

Se suele motivar el aprendizaje de las matemáticas, justificando su importancia en la formación de los estudiantes dada su ubicuidad en carreras vinculadas con la ciencia, la ingeniería o la administración; sin embargo diversos informes proveen evidencia de la inefectividad de la justificación basada en la importancia, por lo tanto se requiere involucrar a los estudiantes en el estudio de las matemáticas durante los cursos escolares. Una propuesta para lograrlo considera:

a) La participación en proyectos colectivos (Harel & Papert, 1991)

b) Conocimiento profundo del contenido, con énfasis en la ayuda del estudiante y en su progreso (Jolly, Campbell, & Perlman, 2004)

c) El uso de micro-mundos interactivos que estimulen la modelación, la participación y la colaboración.

Entenderemos la "modelación" como un puente entre las matemáticas como herramienta para comprender mejor el mundo que nos rodea, y las matemáticas como una estructura abstracta (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007)

Este enfoque de modelación favorece el aprendizaje (Hoyles, 1993; Simpson, Hoyles, & Noss, 2005) de ideas importantes en matemáticas a través de su uso, de su contrastación y de su exploración con herramientas tecnológicas (wxMaxima y Geogebra).

La tecnología tiene con potencial para mejorar la instrucción matemática (Roschelle, Pea, Hoadley, Gordin, & Means, 2000) y se puede utilizar para mejorar el proceso de aprendizaje, ayudar al desarrollo de conceptos matemáticos e involucrar a los estudiantes.

El desarrollo tecnológico educativo y en especial el de los ordenadores y sus aplicaciones, ha estado motivado por necesidades de la sociedad, entre ellas la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El uso del computador en la enseñanza de las matemáticas haciendo uso de juegos, tenía por objetivo motivar a estudiante hacia el estudio de los conceptos matemáticos bajo un modelo de uso instrumental lúdico (Malone & Lepper, 1987).

Sin embargo el uso educativo del computador propone el diseño, la implementación y el uso de software para satisfacer diversos objetivos. El diseño aborda tanto la promoción de un razonamiento profundo en matemáticas como el desarrollo de competencias tecnológicas.

La implementación considera el uso de varios sistemas de representación vinculados, y el uso del software reconoce diversas características de los objetos matemáticos bajo estudios (entre ellas las conceptuales y las procedimentales). Las recursos provistos por el software son importantes para promover un "razonamiento visual" (Confrey & Maloney, 2007), pero las interfaces gráficas se diseñan deliberadamente para "esconder" las matemáticas, de tal suerte que el uso del software podría convertirse en una tarea para dibujar que de matemáticas.

El uso de software, y de computadores puede generar las condiciones necesarias para que los estudiantes usen, cuestionen e interpreten diferentes representaciones de un objeto matemático y para que interactúen críticamente con el software en su proceso de aprendizaje de las matemáticas (Barrera & Santos, 2001), de donde el uso de la tecnología puede ayudar a proponer 'ambientes de aprendizaje' - Condiciones físicas y sociales del aula de clase que promueve el aprendizaje- que se desarrollan por el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas. Se pretende que el uso favorezca que los estudiantes infieran, comuniquen y desarrollen diferentes ideas entorno a los conceptos matemáticos y a sus aplicaciones.

CAPITULO 3 – GÉNESIS INSTRUMENTAL

El aprendizaje de las matemáticas, ha experimentado la influencia de las nuevas tecnologías, manifestándose como herramientas, plataformas o conjunto de instrumentos que permiten la construcción del saber matemático. En este sentido Rabardel (1995) propone un enfoque en el que se describe la génesis del instrumento por el sujeto, resaltando la importancia de la actuación humana que construye un instrumento mediante estructuras cognitivas.

La génesis instrumental planteada por Rabardel-ibid- se ocupa de dos dimensiones: Instrumentalización e Instrumentación. Estas dimensiones se configuran en la interacción entre el sujeto y un artefacto, entendiendo este último como cualquier cosa susceptible de ser usada y que ha sido elaborada para inscribirse en actividades intencionales.

En la Instrumentalización se estudia la evolución, selección y funciones del artefacto, otorgándole características por medio de tareas y de esquemas, según Artigue (2002) la instrumentalización del artefacto ocurre cuando se le dota de potencialidades y se le transforma para aplicaciones específicas. Trouche (2004) la define como un proceso de diferenciación del artefacto mismo que puede pasar por diferentes etapas: descubrimiento, personalización y transformación (Almazan, 2009).

Mientras que en la Instrumentación se analiza la evolución de los esquemas de uso y su funcionamiento, para comprender las limitaciones y potencialidades del instrumento. Trouche (2004) la define como el proceso donde el instrumento afecta al sujeto, es decir permite que el sujeto desarrolle su actividad y que elabore esquemas de acción instrumentada que le permitan construir conocimiento matemático. Artigue (2002) la define como una acción dirigida hacia el sujeto, y que cada vez lo conduce al desarrollo o a la apropiación de esquemas de acción instrumentada que están orientados hacia la comprensión de las potencialidades y las limitaciones del artefacto para un desarrollo óptimo en la solución de una tarea específica (Almazan, 2009).

Es así que un instrumento es concebido “como una entidad mixta que comprende a la vez al sujeto y al artefacto, a través de dos componentes, uno artefactual que se identifica directamente con el artefacto o parte de él, y otro cognitivo, al que corresponden las técnicas y los esquemas mentales que el sujeto desarrolla y aplica mientras usa el artefacto" (Pérez, 2014)

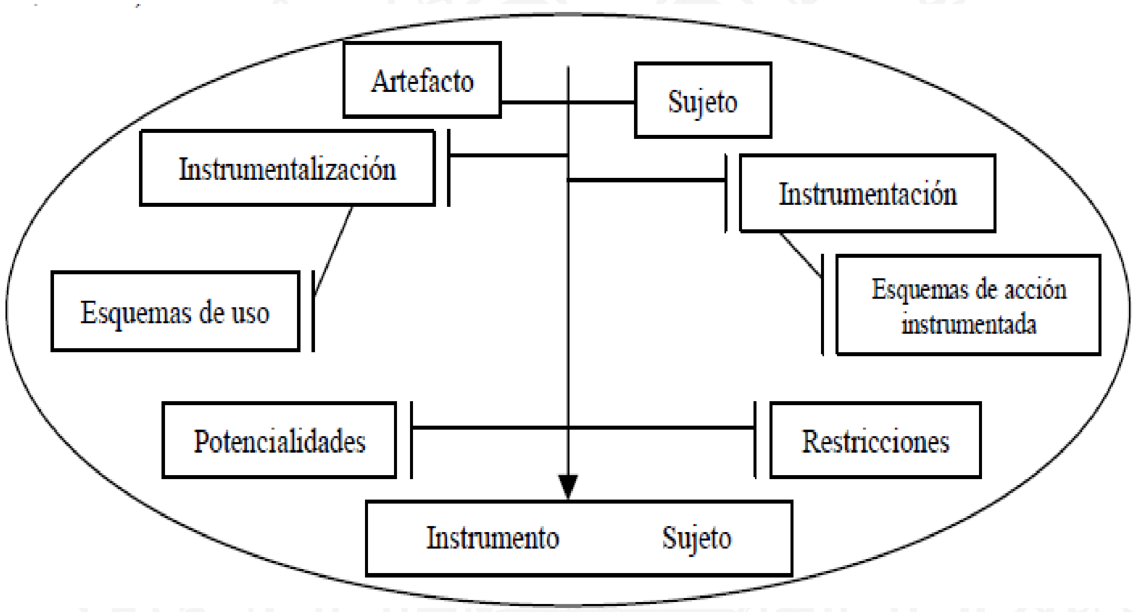


Figura 1 Construcción del artefacto al instrumento producto de la Génesis Instrumental

(Briseño, 2008)

La Figura 1, representa el proceso de génesis instrumental, sin embargo en esta investigación el proceso de génesis instrumental ha permitido identificar varios aspectos esenciales en la incorporación de las TIC al proceso de aprendizaje de los estudiantes. Inicialmente se identifica la presencia de un sujeto -docente-, quien iniciaría el proceso artefactual, es decir estudia y analiza diferentes artefactos disponibles, identificando sus características y potencialidades para planificar actividades o esquemas de uso, realizando así un proceso de instrumentalización. De otro lado, se encuentra otro sujeto –estudiantes- quien de acuerdo con los esquemas de uso planificados por el docente realiza acciones sobre el artefacto, explorando con base en su conocimiento el artefacto e identificando restricciones o bondades de este, configurándose así un proceso de instrumentación.

Un componente adicional que no ha sido tratado en el esquema de la Figura 1, se puede apreciar luego de realizada esta investigación. Este componente es la cooperación que se manifiesta cuando el estudiante identifica restricciones en el uso del artefacto y busca una forma de sortear estas restricciones o limitaciones para obtener soluciones a las cuestiones dadas.

Teniendo en cuenta estos nuevos elementos el esquema de la Génesis Instrumental, mostrado en la Figura 1, se modifica y se puede apreciar un nuevo esquema que se muestra en la Figura 2.

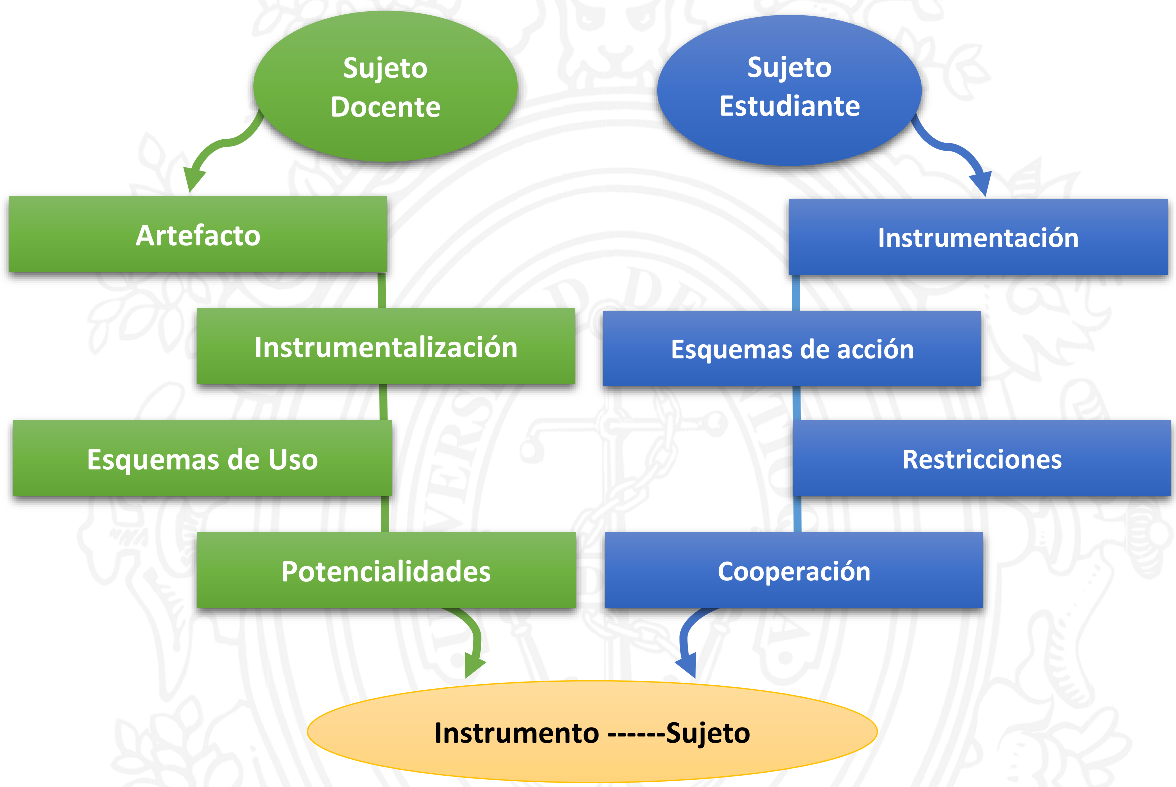


Figura 2 Esquema de Génesis Instrumental – nuevos elementos

El uso de los diferentes instrumentos debe ser coordinado y planificado, procurando que el propósito de su inclusión en el aula de matemáticas pueda alcanzarse. Trouche (2004) "usa la noción de Orquestación Instrumental para describir la gestión que hace el profesor de los instrumentos individuales para el aprendizaje colectivo en el sentido que las génesis instrumentales necesitan ser monitoreadas por el profesor a través de la orquestación de situaciones matemáticas" (Pérez, 2014). Esta noción permite que el profesor guie al estudiante con actividades previamente planificadas y realice cambios de acuerdo con la situación permitiendo que el estudiante pueda experimentar los procesos de génesis instrumental.

Trouche (2004) define dos elementos para la orquestación instrumental: configuración didáctica y un modo de explotación, sin embargo Drijvers, Kieran, & Mariotti (2010) suman un tercero, la actuación didáctica, para tener en cuenta que una orquestación instrumental se prepara parcialmente de antemano pero también creada en el lugar mientras se realiza la enseñanza (Pérez, 2014).

Estos tres elementos se definen asi:

El primer elemento: "Una configuración didáctica es un arreglo de artefactos en el ambiente, o en otras palabras, una configuración de la ambientación de la enseñanza y los artefactos involucrados en ella" (Pérez, 2014. pag. 15).

El segundo elemento: "Un modo de explotación de una configuración didáctica es la manera como el profesor decide explotarla para beneficio de sus intenciones didácticas. Incluye las decisiones sobre la forma en que una tarea es introducida y trabajada, sobre los posibles roles que juegan los artefactos y sobre los esquemas y técnicas a ser desarrollados y establecidos por los estudiantes" (Pérez, 2014. pag. 15).

El tercer elemento: "Una actuación didáctica involucra las decisiones ad hoc tomadas durante la enseñanza sobre cómo realizar realmente la enseñanza promulgada en la configuración didáctica además del modo de explotación elegidos" (Pérez, 2014. pag. 15).

La investigación se inicia con la selección de los artefactos, donde se analizaron las características y aspectos que podían ser usados con el contenido del curso de matemáticas operativas. Con base en las herramientas seleccionadas (wxMaxima y Geogebra) y el contenido del curso se plantean actividades que promueven la aplicación de conceptos matemáticos a través del uso del software, guiados por el docente en los aspectos que fueren necesarios en concordancia con los objetivos propuestos en cada actividad.

La selección e instalación de los software, la separación de la sala de sistemas, las actividades y la selección de objetos matemáticos conforman una 'configuración didáctica' que favorece la exploración del proceso de génesis instrumental por los estudiantes. La preparación de las actividades, la metodología (grupal, individual) para el desarrollo de estas, el uso de proyector y las explicaciones en tablero representan la forma en que el docente realiza la 'explotación' de las potencialidades del software y explorar las actuaciones de los estudiantes para relacionar los conocimientos previos, con los objetos matemáticos propuestos en cada una de las guías. La atención de dudas, respuesta a preguntas durante el desarrollo de las actividades, explicación de comandos nuevos y no explorados en los manuales se convierten en la 'actuación didáctica' que favorece que el docente reconfigure la orquestación instrumental, brindando sentido a los nuevos procesos emergentes en el desarrollo de estas actividades.

3.1. Metodología

La investigación se abordó desde un paradigma cualitativo. La muestra es incidental (León & Montero, 2003), ya que los estudiantes no son escogidos aleatoriamente y se trabaja con ellos en tanto que están matriculados en el curso. Los estudiantes fueron informados que participaban en una investigación y se les dio la oportunidad de negarse a que sus datos fueran tenidos en cuenta en la investigación, así mismo se les informo que podían negarse a conceder entrevistas y que tal negación no sería motivo de calificación por parte del docente ni serían discriminados por su no participación, esta información se hizo tanto al inicio del proceso como durante el mismo.

Se adoptó un enfoque fenomenológico (Maykut & Morehouse, 1994) que permitió analizar reacciones e interacciones durante el desarrollo de las actividades por parte de los estudiantes, así mismo se realizó un estudio de la producción colectiva como de la producción individual.

Los software elegidos son Maxima[11] y Geogebra[12]. Su elección fue determinada por las características de representación que cada uno tiene. Maxima es robusto en las representaciones algebraicas mientras que Geogebra lo es en las representaciones gráficas. Los comandos de Maxima son más fáciles de usar para los estudiantes. Esta fue una de la razones para elegirlo e iniciar la exploración de actividades matemáticas con este software. Con ambos software se podrá

[11] http://maxima.sourceforge.net/
[12] https://www.geogebra.org/

trabajar cálculos complejos a la vez que, potencialmente, se convierte en validadores de resultados cuando el docente no está presente.

Por otro lado, el 'grupo de trabajo' se asume como estrategia de colaboración donde se puede consultar dudas, o apoyar y compartir conceptos e interpretaciones con otros estudiantes; sin embargo es importante resaltar que la motivación y la participación no solo depende de la herramienta, sino de la articulación del proceso educativo diseñado por el docente. Este proceso de articulación será tenido en cuenta por el investigador como fuente de dificultades, beneficios o sesgos posibles.

3.2. Uso de la tecnología por el docente y por parte de los estudiantes

El profesor usará las TIC en un contexto ilustrativo (Castro, 2002), en donde utilizará los recursos representativos provistos por las TIC para ilustrar representaciones, conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos para resolver tareas (Godino, Rivas, Castro, & Konic, 2008). Por su parte los estudiantes utilizarán las TICS para desarrollar tareas[13] matemáticas. Las tareas serán planeadas por el docente, quien usará las TIC durante la clase y quien proporcionará una Guía para que los estudiantes la desarrollen y utilicen los medios (TIC) adecuados para el desarrollo de operaciones, procesamientos y análisis de información, tomando especial cuidado de las conjeturas, conclusiones y análisis que se desprendan de ello. Si bien el profesor propondrá actividades, estas y su desarrollo no serán motivo de estudio, las actividades enmarcadas dentro de los contenidos del curso, formarán parte de la evaluación del mismo y para la investigación se observará la actuación de los estudiantes frente al uso de los recursos tecnológicos para el desarrollo de las actividades. De acuerdo con el listado temático del curso de Matemáticas Operativas, se escogerán las funciones polinómicas y funciones trigonométricas para el diseño de las guías que orientarán las actividades de investigación. La Tabla 1 muestra el listado temático previsto para el curso de matemáticas operativas. Los temas escogidos se han señalado con un 'visto bueno' y la semana en la que se trabajará. Es de notar que el curso está programado para un

[13] Una tarea será la actividad de indagación realizada en el seno de un sistema didáctico (estudiantes, profesor, medio) para dar respuesta a una cuestión (Godino, 2013).

semestre de 16 semanas, asignando dos de éstas para la realización de prácticas o pruebas evaluativas requeridas.

Tabla 1 Contenido Temático del curso Matemáticas Operativas

Tema	Semana	Selección	
		Máxima	Geogebra
Razones y proporciones. Bases numéricas.	1		
Los números naturales. Factorial de un número. Divisibilidad.			
El conjunto de los números reales. Propiedades de campo y operaciones.	2 y 3		
Propiedades de orden. Valor absoluto y desigualdades.			
Polinomios en una y dos variables. El polinomio como sumatoria. Operaciones.	4 y 5		
Productos notables y factorización.		✓	
Fracciones. Simplificación.			
La ecuación cuadrática. Problemas que conducen a la solución de ecuaciones cuadráticas.	6		
Ecuaciones polinómicas, raíces de una ecuación polinómica. Interpretación gráfica.	7	✓	
Fracciones de polinomios. Ceros y polos de una fracción. Interpretación gráfica.	8	✓	
Fracción continuada y fracciones parciales.	9		
Expresiones con radicales. Racionalización.	10		
Ecuaciones con radicales y problemas que conducen a su solución.			
Exponenciación y logaritmación. Propiedades y problemas.	11		
Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.			
Funciones trigonométricas. Interpretación gráfica.	12		✓
Fórmulas de adición e identidades fundamentales.	13		✓

Teoremas del seno y del coseno. Resolución de triángulos. Problemas de aplicación.			
Números complejos.	14		

Las actividades hicieron énfasis en el uso de los diversos modos de representación (escrito, gráfico, numérico), el foco de atención fue el reconocimiento de los recursos computacionales disponibles en cada software utilizado. La dualidad Instrumentalización-Instrumentación se reconoce como una unidad, pero en esta investigación estudiamos el proceso de Instrumentación por parte de los estudiantes.

Las Guías se resolvieron previamente, y para cada una de ellas se propusieron dos Guías de Reconocimiento de Objetos y Significados-GROS- (Godino et al., 2008). Una para el aspecto matemático de las tareas incluidas en las Guías diseñadas para los estudiantes, GROS Matemática, y otra, GROS Computacional, para el aspecto computacional presente en la solución de las tareas. Estas Guías orientaron el proceso de análisis de las soluciones de los estudiantes.

La fuentes de datos son varias: las soluciones estudiantiles a las tareas, (los estudiantes las entregaron en documentos Word que incluían tomas de pantalla como respaldos para justificar las soluciones a las tareas; grabaciones en audio y video de algunos momentos de soluciones de las tareas por parte de los estudiantes, grabaciones en audio y video de entrevistas a los estudiantes.

El papel del investigador fue el de participante –observador. Si bien el doble papel docente-investigador que asume el autor de la propuesta de investigación puede ser cuestionado por los asuntos éticos comprometidos, en este trabajo, el maestro fue participante y el investigador fue el observador.

3.3. Análisis de datos

El grupo tiene matriculados un total de 33 estudiantes. De estos se consideraron 19 que aceptaron conceder entrevistas posteriores. Los datos tomados con estos participantes se analizaron considerando elementos tales como:

a. Contenidos matemáticos enumerados en el programa del curso.
b. Entidades primarias matemáticas (Godino, Batanero, & Font, 2007)
c. Entidades primarias computacionales.
d. Objetos matemáticos propuestos en las Guías (cinco de ellas) que se proponen a los estudiantes.
e. Respuestas de los estudiantes a las cinco Guías.
f. Entrevistas semiestructuradas realizadas a algunos estudiantes.
g. Contraste entre las respuestas dadas por 19 participantes a cada una de las Guías.
h. Contraste entre las respuestas dadas a las Guías y la GROS Matemática y la GROS Computacional.
i. Las acciones, usos, comandos, novedades, restricciones, errores manifestados por los estudiantes durante la realización de las Guías.

CAPITULO 4 – FASE DE EXPERIMENTACIÓN

Las actividades fueron planeadas para ser desarrolladas como tareas de clase, en el curso de matemáticas operativas del programa Ingeniería Agropecuaria en la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste, con el propósito de incluir las TIC y explorar cómo los estudiantes las incorporan a su proceso de aprendizaje. La planificación de las actividades se dio alrededor del objeto matemático función: función polinómica y función trigonométrica.

Se desarrollaron 5 guías: las cuatro primeras, exploran la función polinómica, orientando al estudiante para que haciendo uso de sus conocimientos previos, identifique las características que en su representación algebraica, permiten que sea clasificada como una función polinómica o un polinomio, además de asociar resultados aritméticos como la raíces del polinomio, con su representación gráfica y la identificación de estas características en ambas representaciones.

La Guía 5 presenta un procedimiento definido para construir la función trigonométrica del seno, partiendo de una circunferencia de radio 1 y dibujando las coordenadas de los puntos (x,y) al variar la ubicación de un punto sobre la circunferencia. Con este procedimiento se orienta al estudiante para que utilizando razonamientos similares construya la representación de la función coseno.

El desarrollo de las actividades propuestas en las guías formo parte de la evaluación del curso, sin embargo la investigación se centró en el uso que los estudiantes dieron a los artefactos dispuestos para el desarrollo de estas. A continuación se presentan los instrumentos usados y cumplimentados en el análisis de las actividades y los desarrollos propuestos por el docente y los realizados por los estudiantes. A continuación se presenta y discute cada guía en términos de los objetos matemáticos y computaciones puestos en juego.

4.1. Guía 1

La Tabla 2 muestra la Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados matemáticos (GROS) puestos en juego para la solución de la tarea cuyo enunciado reza “Encontrar los ceros de un polinomio de grado siete”. En ella se atribuyen significados para las representaciones, conceptos, procedimientos y propiedades. El argumento se asume como la respuesta dada al poner en consideración los significados atribuidos y sus relaciones. Si se falla en reconocer algunos significados de los objetos matemáticos bajo estudio, es posible que no se obtenga la respuesta. En Godino, Rivas, Castro, & Konic, (2008) se presenta un estudio de esta herramienta de análisis cognitivo.

Si bien la GROS puede ser cumplimentada de otras maneras, lo cierto es que manifiesta una posible configuración de objetos y significados que el estudiante, idealmente, debe poner en juego para dar respuesta a la tarea.

Tabla 2 GROS – Conceptos matemáticos – Guía 1

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Encontrar ceros	Encontrar los valores que reemplazados por la variable x, se obtenga el valor cero.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Cero de un polinomio o raíz de un polinomio.	Valor que anula al polinomio
Grado de un polinomio	Es el máximo exponente de la variable
Residuo	Valor que se obtiene cuando se reemplaza la variable por un número
Residuo	Valor que se obtiene cuando el polinomio de divide entre una expresión del tipo (x-a)
Multiplicidad	Número de veces que un mismo factor-monomio o polinomio-se repite.
Factor	Monomio o polinomio que multiplica.

Multiplicidad geométrica	Número de veces que la gráfica pasa por un mismo punto sobre el eje x.
Multiplicidad algebraica	Número de veces que un factor de la forma (x-a) se repite.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División sintética	Refiere al proceso de división entre un polinomio y un monomio de la forma x-a en el cual se escriben los coeficientes de los términos del polinomio en orden decreciente del grado del monomio y se efectúan multiplicaciones y restas, para determinar si un número es un cero del polinomio.
Teorema del Factor	Conocido un cero del polinomio conozco un factor, si el cero es “a” el factor será (x-a).
Teorema del residuo	Si el residuo de dividir el polinomio entre (x-a) es cero, entonces “a” es raíz del polinomio.
Teorema fundamental del álgebra	Conocidos los ceros de un polinomio puede determinar el mínimo grado que este tiene.
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Teorema del Factor	Si (x-a) es un factor si y solo si “a” es un cero del polinomio.
Teorema del Residuo	Si (x-a) es un factor de P(x) entonces P(a)=0
Teorema fundamental del álgebra	Un polinomio con coeficientes reales de grado “n” tiene exactamente “n” ceros complejos.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
Ejemplo de solución esperada por parte del profesor.	
Ejercicio:	

1. De las siguiente lista identifique cuáles son polinomios y cuáles no, justificando su respuesta

a) $x^2 + 3$

Justificación

Si porque: a) Los coeficientes de las incógnitas pertenecen a los reales, b) los exponentes de las incógnitas pertenecen a los naturales.

b) $\frac{1}{4}x^5 + 2x^6 + x^4 - \sqrt{5}\,x$

Justificación

Si porque: a) Los coeficientes de las incógnitas pertenecen a los reales, b) los exponentes de las incógnitas pertenecen a los naturales.

c) $-5x^3 + 2x^2 - \frac{1}{x}$

Justificación

No porque el término $-\frac{1}{x}$ es equivalente a $-x^{-1}$, este exponente -1 no pertenece a los naturales, que es una característica que debe cumplirse para poder ser polinomio.

d) $\sqrt{(x-2)^4}$

Justificación

Si porque al realizar la operación de la raíz cuadrada queda un binomio al cuadrado donde se cumple que: a) Los coeficientes de las incógnitas pertenecen a los reales, b) los exponentes de las incógnitas pertenecen a los naturales.

e) 5

Justificación

No, pues este término es un monomio.

2. Encontrar las raíces de un polinomio P(x) y escribir su forma factorizada.

$$P(x) = 2x^7 + 5x^6 + \frac{3x^5}{2} - \frac{17x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$$

Para solucionar este ejercicio es necesario encontrar los valores de x para los cuales el polinomio P(x) es igual a cero (raíces) y en caso de requerirse determinar la multiplicidad (cuántas veces se repite) de cada una de estas raíces.

Al analizar el polinomio observamos que es de grado 7 de acuerdo a esto

a) ¿Cuántas raíces debe presentar el polinomio y a qué conjunto numérico deben pertenecer?

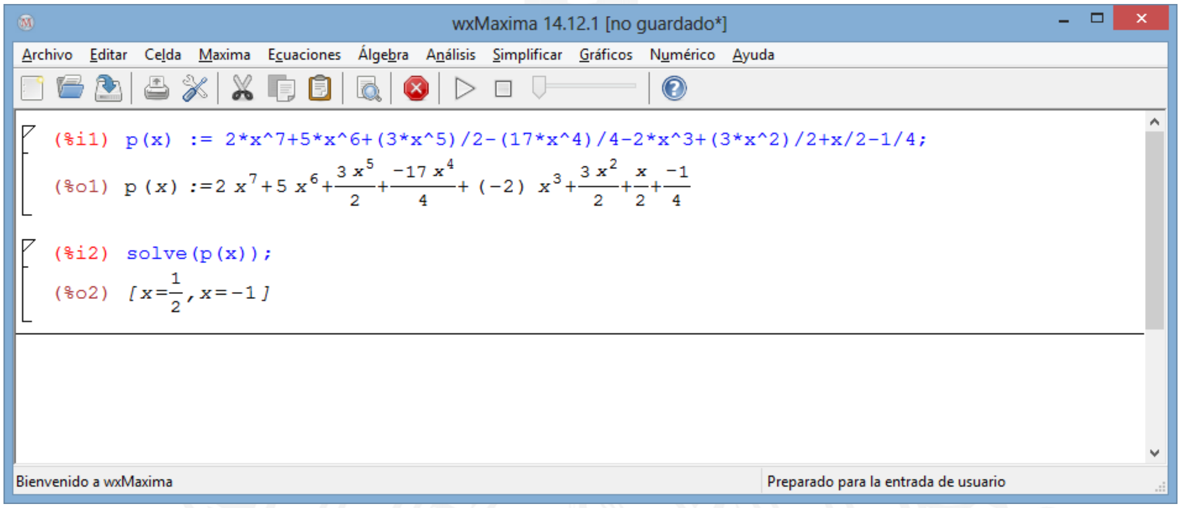
Debería tener 7 raíces que deben pertenecer al conjunto de los números complejos.

Usando wxMaxima ingresamos el polinomio P(x) y le damos el nombre de p. Para determinar las raíces del polinomio utilizaremos dos métodos diferentes, un método analítico y un método gráfico.

Método Analítico:

Para este método utilizaremos el comando “solve” haciendo que la variable creada “p” sea igual a cero

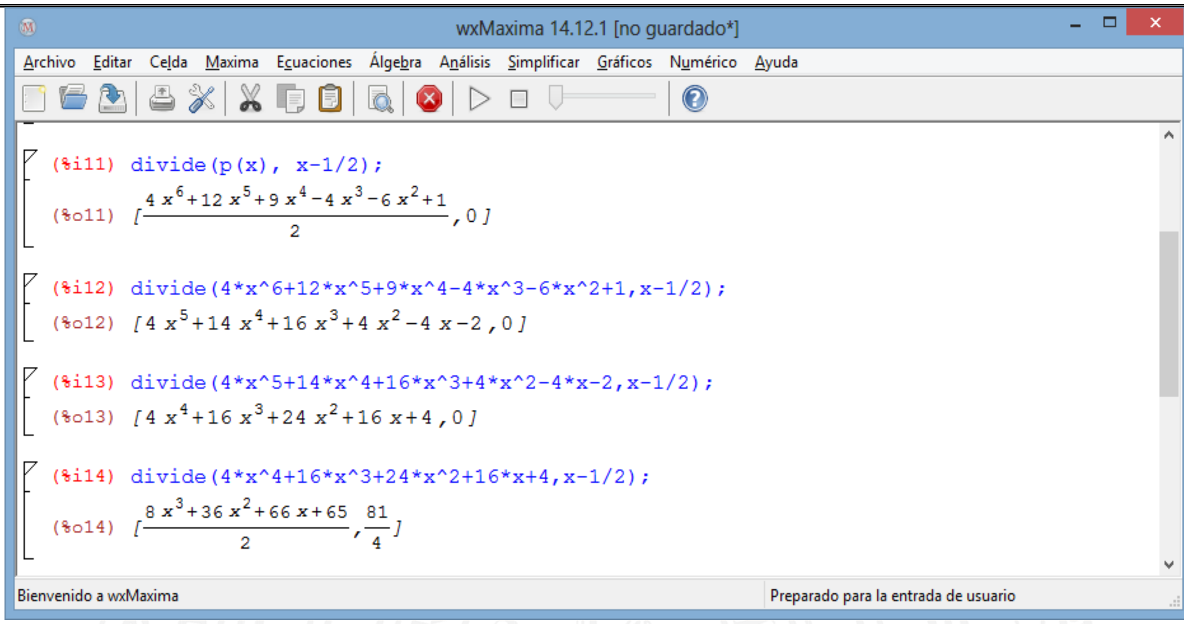
b) ¿Cuántas y cuáles raíces posee el polinomio? ¿Alguna de las raíces puede repetirse, es decir tener multiplicidad mayor a 1?



Tiene 2 raíces, la cuales deben tener multiplicidad para cumplir con teorema de polinomio de grado n debe tener n raíces. En nuestro caso 7 raíces.

Para determinar la multiplicidad de cada raíz vamos a utilizar la división de polinomios recordando que si un polinomio P(x) es dividido por un polinomio de la forma x – a es igual a cero, el valor a es una raíz del polinomio P(x)

c) Copie imágenes de los resultados de las visiones realizadas en wxMaxima.



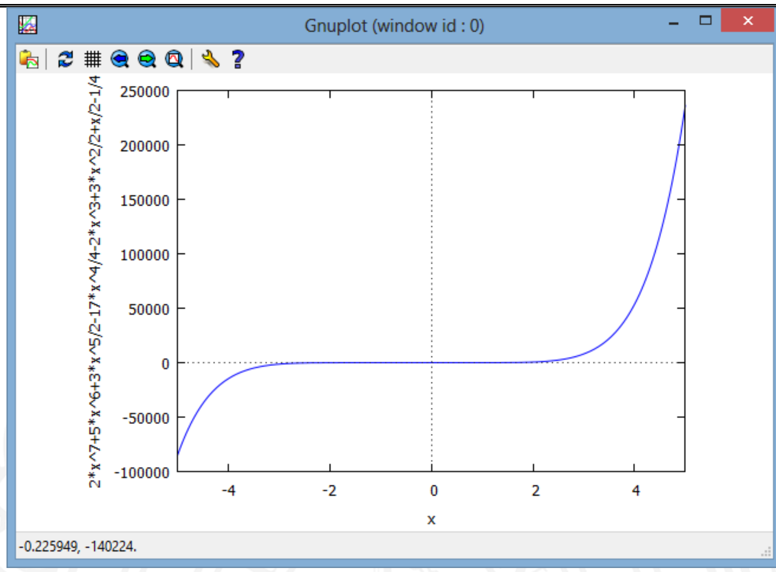
El valor ½ como raíz, tiene multiplicidad algebraica 3, el valor -1 tiene multiplicidad algebraica 1, obteniendo de esta forma las 7 raíces que debe tener el polinomio.

d) De acuerdo con los resultados obtenidos copie el polinomio factorizado

$$p(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^3 (x+1)^4}{4}$$

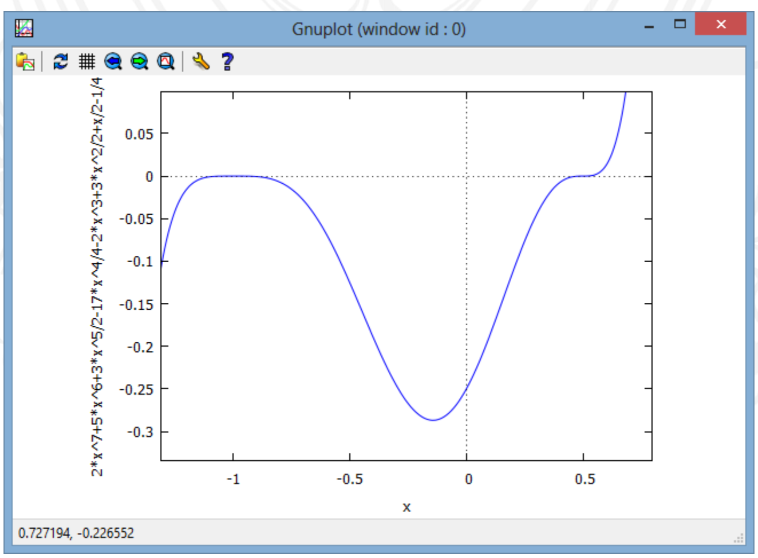
Método Gráfico: El primer paso es construir la representación gráfica del polinomio

e) Copie la imagen obtenida del software wxMaxima y de acuerdo a ella responda ¿Cuántas raíces pueden apreciarse en la gráfica?, ¿Cuántas debería mostrar?



En la gráfica se aprecia una un corte en el eje lo que indica una raíz, pero debería mostrar 2

f) Utilice la herramienta zoom para aumentar la escala de la región de la gráfica que contiene las raíces y responda ¿Cuántas raíces pueden apreciarse en la gráfica?, ¿Cuántas debería mostrar? ¿Cuáles son las raíces?



Luego de hacer zoom se aprecian los dos cortes del eje que indican las dos raíces, en -1 y ½ .

g) Determine de acuerdo a la forma de la gráfica en la región de las raíces cuál es su multiplicidad.

En -1 la multiplicidad debe ser de 4 y en ½ de 3

Dada la presencia del ordenador y del software se proponen algunas consignas nuevas, tales como graficar y obtener información a partir de la gráfica, o de modificaciones de la misma. Esto convoca no solo el uso de comandos del software sino el uso de objetos matemáticos nuevos, que no se requieren en la solución provista por la Tabla 2.

La Tabla favorece identificar la escogencia que los estudiantes hacen de los comandos ofrecidos por el software para responder a las consignas.

Tabla 3 GROS Nuevos procedimientos – Guía 1

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Encontrar los ceros	Encontrar los valores que reemplazados por la variable x, se obtenga el valor cero.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Cero de un polinomio o raíz de un polinomio.	Valor que anula al polinomio
Grado	Es el máximo exponente de la variable
Residuo	Es el número que se le ha de restar al dividendo para que sea igual a un determinado número de veces el divisor

Residuo	Valor que se obtiene cuando el polinomio de divide entre una expresión del tipo (x-a)
Multiplicidad	Número de veces que un mismo factor-monomio o polinomio-se repite.
Factor	Monomio o polinomio que multiplica.
Multiplicidad geométrica	Número de veces que la gráfica pasa por un mismo punto sobre el eje x.
Multiplicidad algebraica	Número de veces que un factor de la forma (x-a) se repite.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
Corte con el eje x	Refiere a un punto de coordenadas (x,0) que pertenezca a la gráfica del polinomio.
Comando	Instrucción que permite, a programa, realizar una acción predeterminada.
Zoom	Comando que permite cambiar la escala alrededor de un punto de elección.
Línea de comandos	Lugar donde se escribe los comandos para que el software desarrolle las acciones solicitadas.
Barra de menú	Lugar que permite acceso grafico a los comandos más utilizados.
Parámetro	Datos que reciben los comandos, y que deben ser provistos por el usuario. Cada comando recibe parámetros diferentes.
Representación	signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
División sintética	Refiere al proceso de división entre un polinomio y un monomio en el cual se utiliza el comando “divide” en Máxima.

Teorema del Factor	Si (x-a) es un factor si y solo si "a" es un cero del polinomio.
Teorema del residuo	Si (x-a) es un factor de P(x) entonces P(a)=0
Teorema fundamental del álgebra	Un polinomio con coeficientes reales de grado "n" tiene exactamente "n" ceros complejos.
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.
Zoom	Cambia la escala de la gráfica para apreciar la presencia de más raíces en la ventana de graficación.
Solve	Resuelve la ecuación propuesta

En la Tabla 3, se aprecia, mediante una comparación con la Tabla 2, que hay conceptos y procedimientos nuevos (señalados en cursiva) que surgen debido tanto por la presencia del computador y del software como por las consignas que el profesor propone. La intención del profesor es que los estudiantes utilicen los comandos para resolver las cuestiones y determinar cómo usan tales comandos y las secuencias de los mismos en función de las cuestiones planteadas.

A los estudiantes se les pidió trabajar en grupo, pero entregar las soluciones individualmente. Los estudiantes debían entregar un documento de Word que incluye pantallazos de su actividad. Una vez que todos los estudiantes entregaron sus trabajos se estudiaron las soluciones, se identificaron las soluciones individuales y se clasificaron en dos grupos: completas e incompletas.

En lo que sigue se muestra evidencia de algunas respuestas de los estudiantes a esta primera tarea. Se han escogido precisamente las soluciones que incluyeron evidencia de los pantallazos.

La Guía 1, motivo de estudio de la primera actividad, contempla dos preguntas. Cada pregunta tiene sub-preguntas. La nomenclatura que usaremos será la siguiente: G1-1 refiere a la primera pregunta de la Guía 1; G1-2 refiere a la segunda pregunta de la Guía 1.

La primera pregunta de la Guía 1 contiene cinco sub-preguntas, que indagan si diversas expresiones propuestas son o no polinomios. La segunda pregunta de la Guía 1 contiene siete sub-preguntas, en las que se requiere del uso del ordenador y del software wxMaxima.

Esta actividad fue resuelta por 19 estudiantes, sobre cuyas respuestas se informa.

Para la pregunta G1-1 se puede afirmar que todos los estudiantes discernieron entre expresiones polinómicas y expresiones no polinómicas.

Para la pregunta G1-2 utilizaremos la Tabla 4 que muestra tanto las características del programa Maxima como los objetos matemáticos puestos en juego para dar una solución a la tarea. Las equis minúsculas señalan que los comandos y los objetos matemáticos estaban presentes en las preguntas señaladas con letras minúsculas.

El cruce de información que se representa en la Tabla 4, permite enfocar la atención de la investigación en aspectos específicos de la actuación de los estudiantes en relación tanto con el software wxMaxima como con los conceptos vinculados con el objeto matemático (polinomio). La Tabla 2 y la Tabla 3, definen los conceptos que incluyen la Guía 1, además de presentar una respuesta esperada por parte de los estudiantes, sin embargo la Tabla 4, favorece que, la atención del investigador punto a punto esté focalizada en las acciones que desarrollan los estudiantes sobre una característica del software o sobre características del objeto matemático bajo estudio. De esta manera se propicia la identificación de características que indiquen que los estudiantes realizan un proceso de instrumentación que se relaciona tanto con el uso del software como con los conceptos puestos en juego durante el desarrollo de la actividad.

Tabla 4 Características y objetos matemáticos examinados en la Guía 1

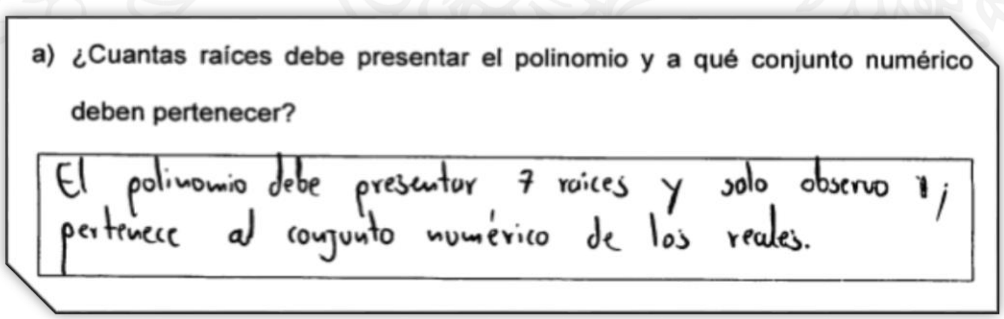
	Características a observar	1					2						
		A	B	c	D	e	a	b	c	d	e	f	g
wxMaxima	Línea de comandos							X		X	X		

	Barra de menú										X	X	
	Ingreso de información							X		X	X		
	Comandos utilizados							X		X	X		
	Representación gráfica										X	X	X
	Construcción de gráfica										X		
	Zoom											X	X
	Definición de variables							X					
Polinomio	Identificación	X	X	X	X	X	X	X					
	Grado						X			X	X	X	
	Raíces						X	X		X	X	X	X
	Representación algebraica	X	X	X	X	X	X	X		X			
	Representación gráfica										X	X	X
	Factorización									X		X	
	División									X			

A continuación se mostrarán respuestas que uno de los estudiantes -E1- presentó como solución a las actividades propuesta en la Guía 1.

Ante la pregunta ¿Cuántas raíces debe presentar el polinomio y a qué conjunto numérico deben pertenecer?, la respuesta está dada en la Figura 3.

La respuesta del estudiante se muestra en la Figura 3. El estudiante afirma que el polinomio debe tener siete raíces; preguntado por la razón, el estudiante afirma que "…como el polinomio tiene grado siete, debe tener siete raíces". Sin embargo se aprecia que la segunda parte de su respuesta "… y solo observo 1…" se puede responder después de haber graficado el polinomio. Es decir que el estudiante utilizó el software para explorar el polinomio.


a) ¿Cuantas raíces debe presentar el polinomio y a qué conjunto numérico deben pertenecer?

El polinomio debe presentar 7 raices y solo observo 1; pertenece al conjunto numérico de los reales.

Figura 3 Respuesta G1-2-a

La Figura 4 muestra el pantallazo obtenido por el estudiante. En el mismo se han identificado las entradas y salidas de información, mediante los conectores.

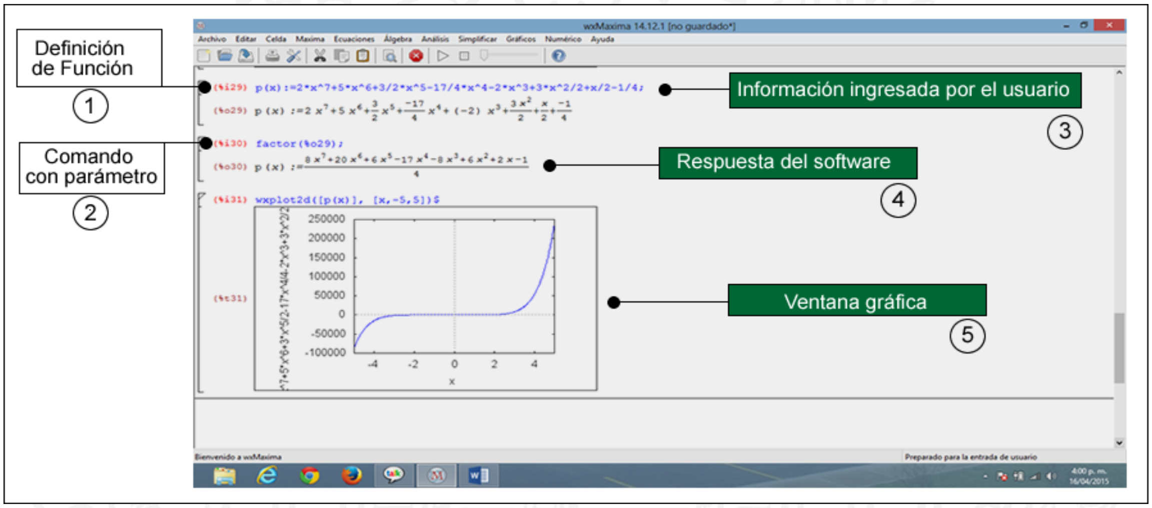


Figura 4 G1-2-a. Identificación de la ventana de wxMaxima

%i# representa la entrada del usuario, mientras que %o# muestra la respuesta o salida dada por el software.

La etiqueta (%i29) (1) [14]muestra que el estudiante define P(x) como un polinomio en la variable x. El programa le muestra, en (% o 29) como queda definido dicho polinomio.

La etiqueta (% i30) (2) muestra que el estudiante pidió "factorizar" pero el programa no factorizó, tan solo expresó el polinomio de manera equivalente (4).

La etiqueta (%i31) muestra que el estudiante mediante un comando, graficó el polinomio, y da el intervalo propuesto de graficación.

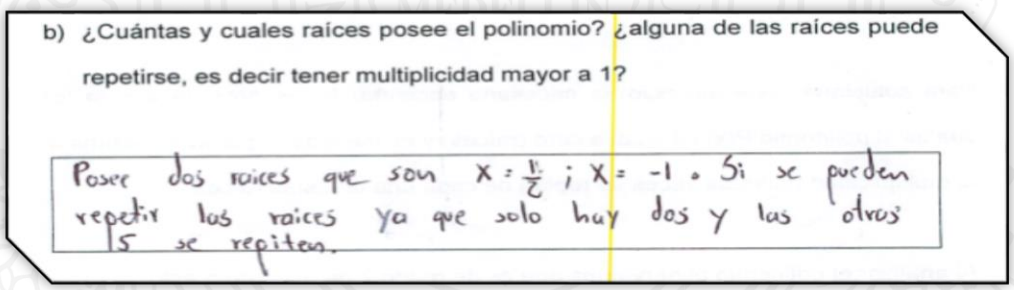
[14] Hace referencia a los numerales en las gráficas.

La etiqueta (%t31) (5) muestra la gráfica. Se aprecia que el software grafica el polinomio pero usa una escala diferente en los ejes de coordenadas, lo cual produce una -“deformación”- del polinomio, en esa ventana de graficación. Por esta deformación el usuario solo ve un cero. Se aprecia que la deformación es producida tanto por el usuario, al escoger una ventana de graficación, como por el software, que intenta mostrar la gráfica de manera estándar.

La gráfica realizada por el software no es manipulable en términos gráficos, por la elección del comando (wxplot2d). Para graficar también se puede utilizar el comando plot2d.

La Guía propone el uso del Método Analítico, y para ello se propone la pregunta “¿Cuántas y cuáles raíces posee el polinomio? ¿Alguna de las raíces puede repetirse, es decir, tener multiplicidad mayor que uno?

La respuesta del estudiante se muestra en la Figura 5


b) ¿Cuántas y cuales raíces posee el polinomio? ¿alguna de las raíces puede repetirse, es decir tener multiplicidad mayor a 1?

Posee dos raices que son $x = \frac{1}{2}$; $X = -1$. Si se pueden repetir las raices ya que solo hay dos y las otras 5 se repiten.

Figura 5 Respuesta G1-2-b

El estudiante afirma que -“posee dos raíces son x = ½; x = -1”- y además -“Si se pueden repetir las raíces ya que solo hay dos y las otras 5 se repiten”-.

El estudiante respalda su respuesta con el pantallazo que se muestra en la Figura 6.

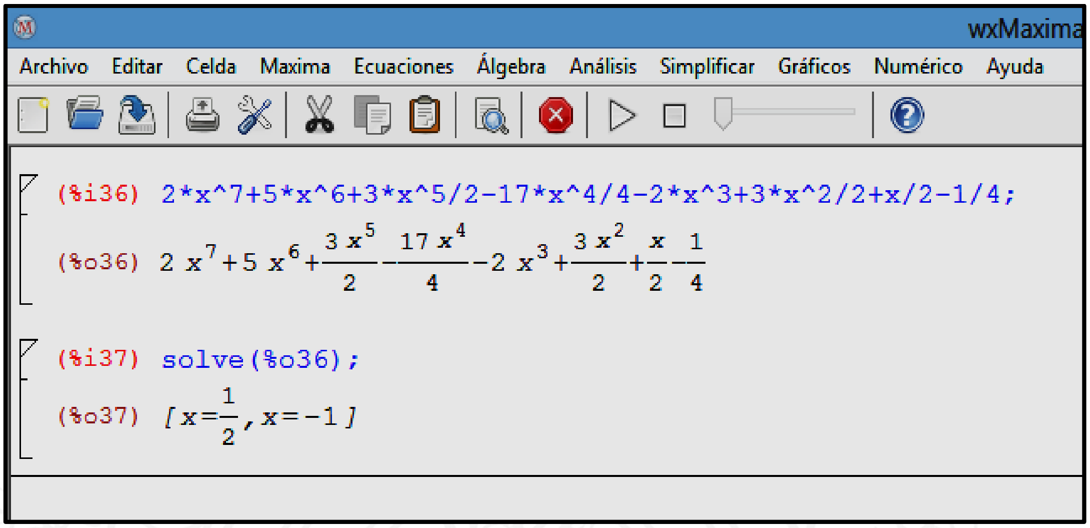


Figura 6 Respuesta G1 – 2-b con software wxMaxima

(%136) El estudiante vuelve a escribir el polinomio, pero sin definir a la función polinómica. Posteriormente (%i37) usa el comando -“solve”- y el ordenador arroja las dos soluciones que el estudiante reporta en la Figura 6.

Para obtener la misma respuesta se puede proceder como lo hizo el estudiante E2 (AR). El resultado se muestra en la Figura 7.

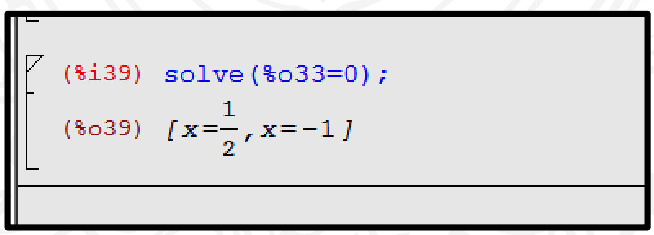


Figura 7 Forma Alternativa del comando solve

La estudiante digita (%i39) y obtiene (%o39) de donde se observan los dos valores buscados.

Las configuraciones de comandos usadas por los 19 estudiantes para responder a la cuestión se muestran en la Tabla 5.

Tabla 5 Configuración de comandos para encontrar raíces

Estudiante	Comandos	Estudiante	Comandos
Estudiante 1	(%i37) solve(%o36); (%o37) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$	Estudiante 11	(%i30) factor(%o29); (%o30) $p(x)=\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$
Estudiante 2	(%i39) solve(%o33=0); (%o39) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$	Estudiante 12	(%i2) factor(%o1); (%o2) $p(x):=\frac{8x^{7}+20x^{6}+6x^{5}-17x^{4}-4x^{3}+2x-1}{4}$
Estudiante 3	(%i30) factor(%o29); (%o30) $p(x)=\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$	Estudiante 13	(%i7) factor(%o4); (%o7) $p(x)=\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$
Estudiante 4	(%i11) solve(%i10); (%o11) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$	Estudiante 14	(%i6) factor(%o4); (%o6) $p(x):=\frac{20x^{6}+6x^{5}-17x^{4}-8x^{3}+6x^{2}+58x-1}{4}$
Estudiante 5	(%i20) factor(%o19); (%o20) $p(x)=\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$	Estudiante 15	(%i10) factor(p); (%o10) $\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$
Estudiante 6	(%i30) factor(%o29); (%o30) $p(x):=\frac{8x^{7}+20x^{6}+6x^{5}-17x^{4}-8x^{3}+6x^{2}+2x-1}{4}$	Estudiante 16	(%i31) factor(%o29); (%o31) $p(x):=\frac{8x^{7}+20x^{6}+6x^{5}-17x^{4}-8x^{3}+6x^{2}+2x-1}{4}$
Estudiante 7	(%i5) factor (p(x)), (%o5) $\frac{(x+1)^{4}\,(2x-1)^{3}}{4}$	Estudiante 17	(%i14) solve(p=0); (%o14) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$
Estudiante 8	(%i16) solve(%o13); (%o16) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$	Estudiante 18	(%i5) solve(p=0); (%o5) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$

Estudiante 9	(%i6) factor(p(x)); (%o6) $\frac{(x+1)^{4}\,(2\,x-1)^{3}}{4}$	Estudiante 19	(%i36) solve(p=0); (%o36) $[x=\frac{1}{2},x=-1]$
Estudiante 10	(%i30) factor(%o29); (%o30) $p(x)=\frac{(x+1)^{4}\,(2\,x-1)^{3}}{4}$		

Se aprecia que los comandos usados -solve, factor- por los estudiantes, y que en apariencia, resuelven los problemas, admiten diversas configuraciones correctas, que deben ser aprendidas por los estudiantes para dar respuesta a la cuestión matemática. El profesor discutió únicamente el procedimiento que utilizó la estudiante dos (E2). Se concluye entonces que los estudiantes no solo conocen los comandos, sino que saben usarlos para dar respuesta a las cuestiones matemáticas. Los estudiantes han explorado los comandos y han identificado su sintaxis que utilizan para responder a las preguntas.

Los estudiantes descubrieron por sí mismos otras maneras válidas (tabla 5) de usar los comandos para dar respuesta a sus preguntas. En algunas configuraciones se aprecia que usan ‘ensayo y error’, cuando el software les indica que hay errores de sintaxis.

La consigna c) pide ‘copiar las imágenes de los resultados de las visualizaciones realizadas en wxMaxima’. Para ello los estudiantes tomaron imágenes de la pantalla que pusieron en un informe escrito en el programa de gestión textual Word, el cual permite estudiar la información para el análisis del desarrollo de las actividades.

La consigna d) pide copiar el polinomio factorizado. Su respuesta se aprecia en la Figura 8 (%o30)

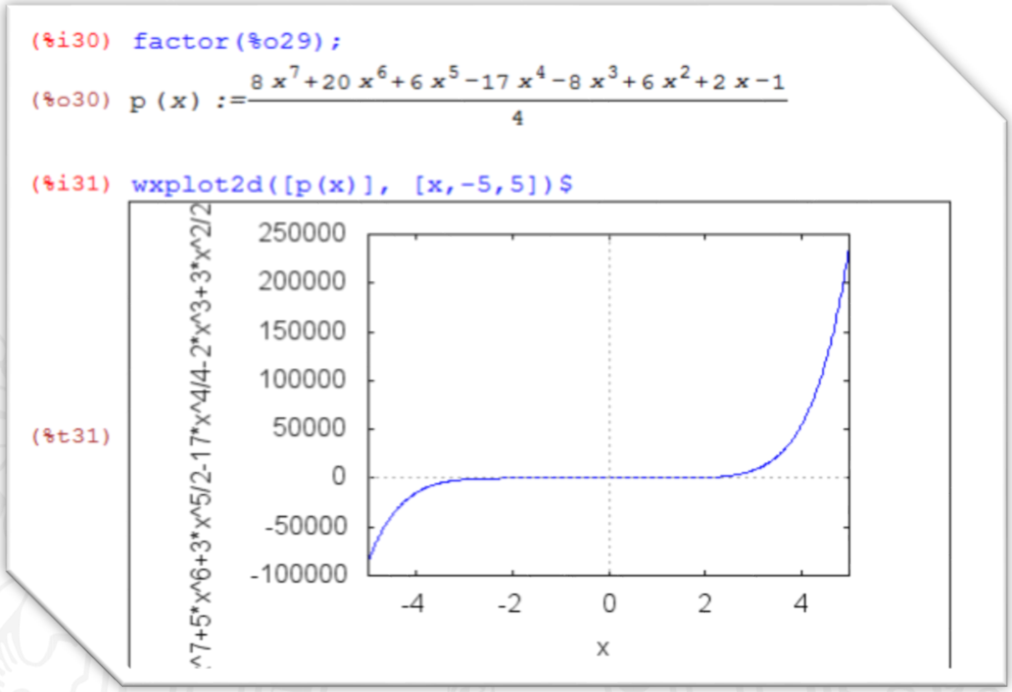


Figura 8 Respuesta G1-2-D

Claramente la respuesta dada por el estudiante no es correcta, dado que el polinomio no está factorizado. Los comandos usados por el estudiante se muestran en la Figura 9 (%i30 y %o30).

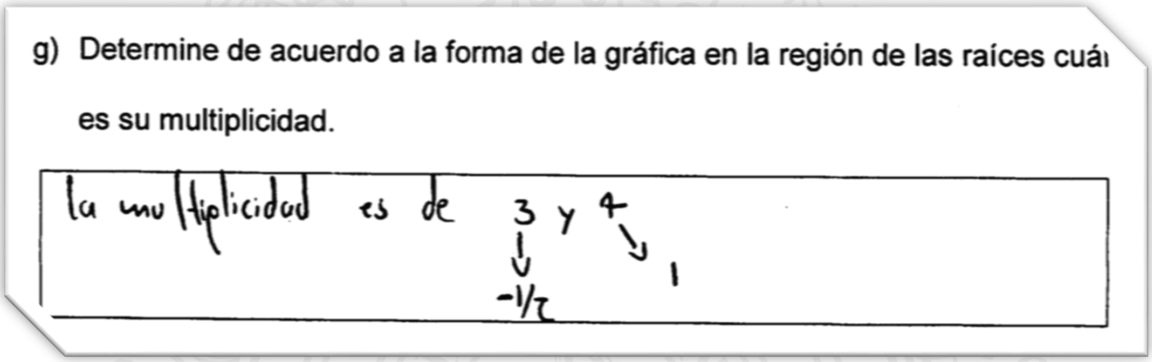
(%i30) factor(%o29);

(%o30) $p(x) := \frac{8x^7+20x^6+6x^5-17x^4-8x^3+6x^2+2x-1}{4}$

Figura 9 Comandos usados por E1 en G1-2-d

En este caso los comandos usados por el estudiante no dan respuesta a la cuestión matemática, sin embargo el estudiante parece no percatarse de ello. Aquí parece que la denominación del comando 'factor' hace creer al estudiante, que efectivamente factoriza toda expresión, con independencia de la sintaxis del comando y del concepto matemático que se estudia-la factorización-. El estudiante deposita en el software su confianza y no verifica que los resultados son coherentes con los objetos matemáticos que son tema de estudio en la actividad propuesta por el maestro. El computador debe ayudar al estudiante, pero el estudiante debe controlar y validar los resultados, asunto que no acontece en esta primera práctica.

La consigna g) pide ‘Determine de acuerdo con la forma de la gráfica en la región de las raíces cuál es su multiplicidad’. La respuesta dada por E1 se muestra en la Figura 10.


g) Determine de acuerdo a la forma de la gráfica en la región de las raíces cuál es su multiplicidad.

la multiplicidad es de 3 y 4
$-1/2$ 1

Figura 10 Respuesta de E1 a G1-2-g

Esta pregunta indaga por la relación entre la gráfica-arriba del eje x o debajo del eje x- con el signo del factor y con su eventual grado. La determinación precisa utiliza el teorema de los signos de Descartes (Descartes, 1637), mismo que no fue discutido por el profesor, pero quien decidió que era un buen tema para que los estudiantes exploraran con la ayuda del software y con los resultados básicos que el syllabus del curso Matemáticas Operativas propone.

Esta primera tarea que se propuso a los estudiantes, permite reconocer que los objetos matemáticos intervinientes propuestos en la GROS Tabla 2, si bien son suficientes para resolver las consignas incluidas en la Guía 1, son complementados por otros ‘objetos’ que entran en juego cuando se utiliza el software Maxima. Entre ellos se pueden enumerar los identificados en la GROS correspondiente a la Guía pero con ayuda de algunos comandos- Solve, factor, plot- que si bien tienen el potencial de resolver las cuestiones invocándolos, tienen ‘reglas’ de uso o una sintaxis específica que debe ser aprendida autónomamente por los estudiantes, en tanto que el profesor solo explicó la acepción estándar de tales comandos.

Adicionalmente se aprecia que algunos estudiantes, en esta primera Guía, confían que los comandos harán el trabajo matemático y no validan ni contrastan las ‘respuestas’ dadas por el software con los conceptos, propiedades y procedimientos matemáticos.

La variedad de configuraciones usadas por los estudiantes-correctas o incorrectas- informan sobre las interpretaciones que dan a los comandos. Los comandos son más que 'instrucciones informáticas' que operan inequívocamente sin la intervención consciente del usuario, asunto que debe ser experimentado por los estudiantes.

Un fenómeno que se puede identificar es el que podríamos denominar 'incremento de objetos', en tanto que el uso del ordenador y de los comandos propuestos por Maxima requiere que se usen nuevos conceptos y procedimientos computacionales, que deben ponerse en relación tanto con las respuestas dadas por el software como con los objetos matemáticos bajo estudio.

Artigue (1997) nombra dos fenómenos vinculados al proceso de uso que los estudiantes hacen y que se ha presentado en las páginas anteriores; el primero es el fenómeno de la pseudo-transparencia que refiere a la diferencia entre lo que el estudiante escribe y lo que aparece en pantalla. Esta pseudo-transparencia se acompaña de una carencia de validación de las respuestas. El ordenador hace una 'devolución' al usuario quien debe decidir si la misma se ajusta a las condiciones para la respuesta. El conocimiento matemático debe ser usado para validar, y esta actitud aún no es asumida por el estudiante. El otro fenómeno, la 'doble referencia' refiere a que el profesor usa el ordenador para discutir conceptos matemáticos, mientras que el estudiante usa el ordenador para dar respuesta a las preguntas matematicas.

La Guía pide construir gráficas del polinomio para responder a la pregunta ¿Cuántas raíces pueden apreciarse en la gráfica? Y ¿Cuántas debería mostrar?

La respuesta de E1 se muestra en la Figura 11 así como la gráfica en la Figura 12

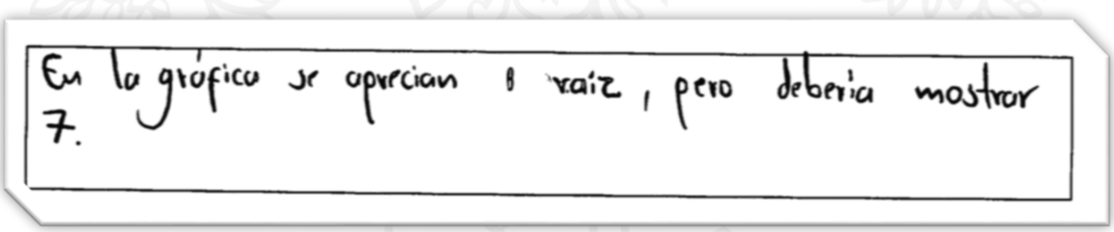


Figura 11 Respuesta E1 G1-2

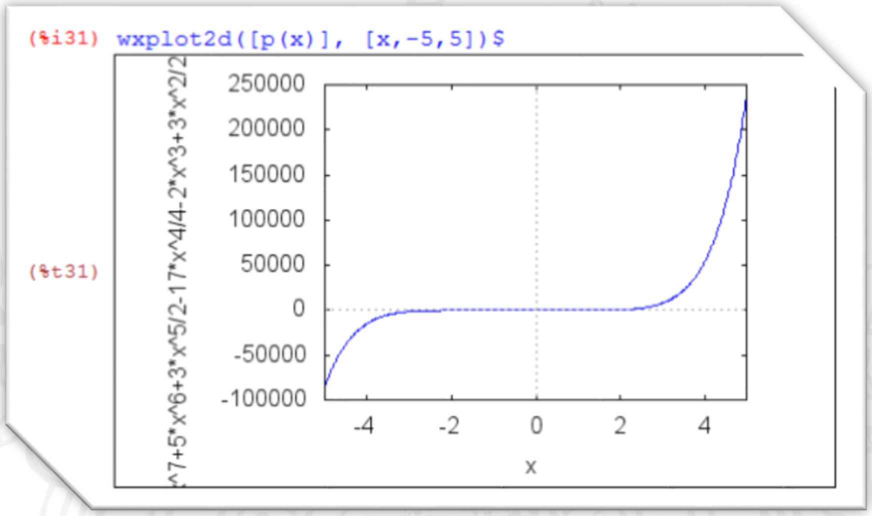


Figura 12 Respuesta de E1 a G1-2 – Representación Gráfica

Su elección del comando para graficar (wxplot2d) no le permite interactuar con la gráfica-hacer zoom-. Para graficar en wxMaxima existen varios comandos (wplot2d, plot2d y plot3d). El comando wplot2d permite trazar la gráfica de una función en un plano cartesiano (x,y) en la línea de comando, este aspecto impide que puedan realizarse acciones sobre la gráfica obtenida, lo que se traduce en una gráfica estática y no manipulable para un análisis más detallado de aspectos propios de la representación.

El comando plot2d abre una nueva ventana para representar gráficamente en un plano cartesiano (x,y) la función solicitada. En esta nueva ventana se presentan herramientas adicionales (zoom, rejilla, coordenadas,…) que permiten realizar un análisis más detallado de las propiedades de la función en su representación gráfica. Finalmente el comando wplot3d actúa de forma similar al comando wplot2d, pero la representación se realiza sobre un sistema tridimensional (x,y,z).

La consigna f) pide usar el comando zoom para aumentar la escala de la región donde se encuentran las raíces. La respuesta del estudiante se muestra en la Figura 13.

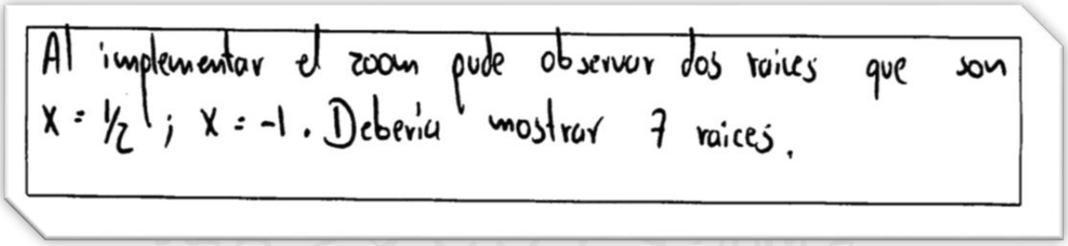

Al implementar el zoom pude observar dos raices que son x = 1/2 ; x = -1. Deberia mostrar 7 raices.

Figura 13 Respuesta de E1 a G1-2-f

Para obtener la gráfica se debe usar el comando plot2d, en tanto que el comando wxplot2d no permite interactuar con la gráfica obtenida. La Figura 14 muestra el efecto del comando zoom. No se muestra aquí la gráfica sobre la cual se operó con el comando. La escala usada por el comando zoom es diferente en cada eje.

Se aprecia que en la parte superior izquierda de la gráfica mostrada en la Figura 14, aparecen unos iconos, uno de los cuales ‘malla’ fue explicada por el profesor. La intención del profesor al formular la pregunta ‘Cuáles son las raíces’ era que los estudiantes utilizaran el icono ‘malla’ cuya función es generar subdivisiones de acuerdo con la escala, que permiten aproximar las coordenadas de un punto específico. Ninguno de los 19 estudiantes utilizó este recurso, y obtuvieron la respuesta con base en la gráfica ampliada sin efectuar más exploraciones o usos sucesivos del zoom.

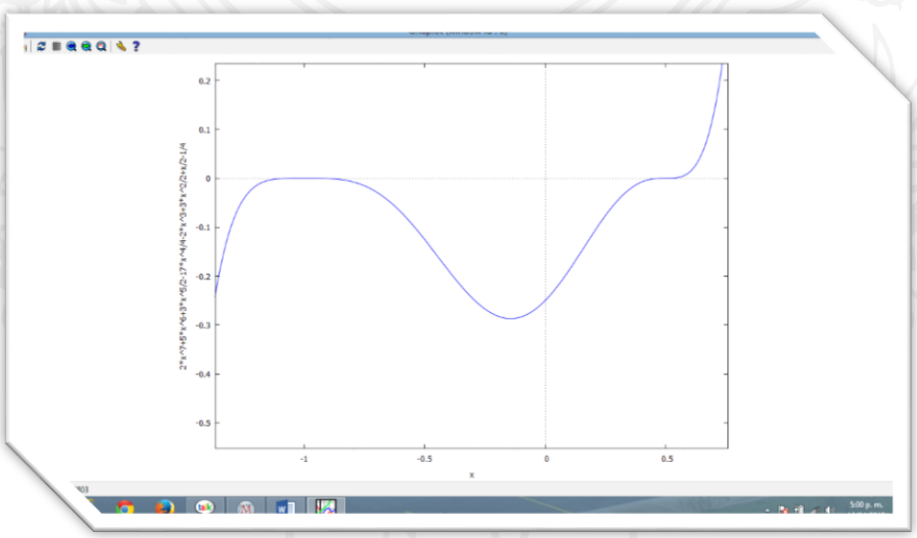


Figura 14 Respuesta de E1 a G1-2-F – Representación Gráfica

4.2. Guía 2

Para la Guía 2 se diseñó una actividad que permitiera replicar los conocimientos obtenidos durante el desarrollo de la actividad uno, en cuanto al uso del software, además de relacionar las representaciones gráfica y algebraica de una función polinómica. La Tabla 6 presenta los objetos matemáticos y los significados involucrados en la actividad. También se muestra una solución esperada de la actividad, mediante el uso de los comandos explicados en el manual de la aplicación, entregado a los estudiantes, y de los comandos explicados por el docente en la sesión de clase.

Tabla 6 GROS – Conceptos matemáticos – Guía 2

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Representación	Forma en que se simboliza o se presenta una función, esta representación puede ser algebraica, gráfica o tabular
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Cero de un polinomio o raíz de un polinomio.	Valor que anula al polinomio
Grado de un polinomio	Es el máximo exponente de la variable
Residuo	Es el número que se le ha de restar al dividendo para que sea igual a un determinado número de veces el divisor
Residuo	Valor que se obtiene cuando el polinomio de divide entre una expresión del tipo (x-a)
Multiplicidad	Número de veces que un mismo factor-monomio o polinomio-se repite.
Factor	Monomio o polinomio que multiplica.

Multiplicidad geométrica	Número de veces que la gráfica pasa por un mismo punto sobre el eje x.
Multiplicidad algebraica	Número de veces que un factor de la forma (x-a) se repite.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Teorema del Factor	Conocido un cero del polinomio conozco un factor, si el cero es “a” el factor será (x-a).
Teorema del residuo	Si el residuo de dividir el polinomio entre (x-a) es cero, entonces “a” es raíz del polinomio.
Teorema fundamental del álgebra	Conocidos los ceros de un polinomio puede determinar el mínimo grado que este tiene.
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Teorema del Factor	Si (x-a) es un factor si y solo si “a” es un cero del polinomio.
Teorema del Residuo	Si (x-a) es un factor de P(x) entonces P(a)=0
Teorema fundamental del álgebra	Un polinomio con coeficientes reales de grado “n” tiene exactamente “n” ceros complejos.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
Ejemplo de solución esperada por parte del profesor.	

Ejercicio:

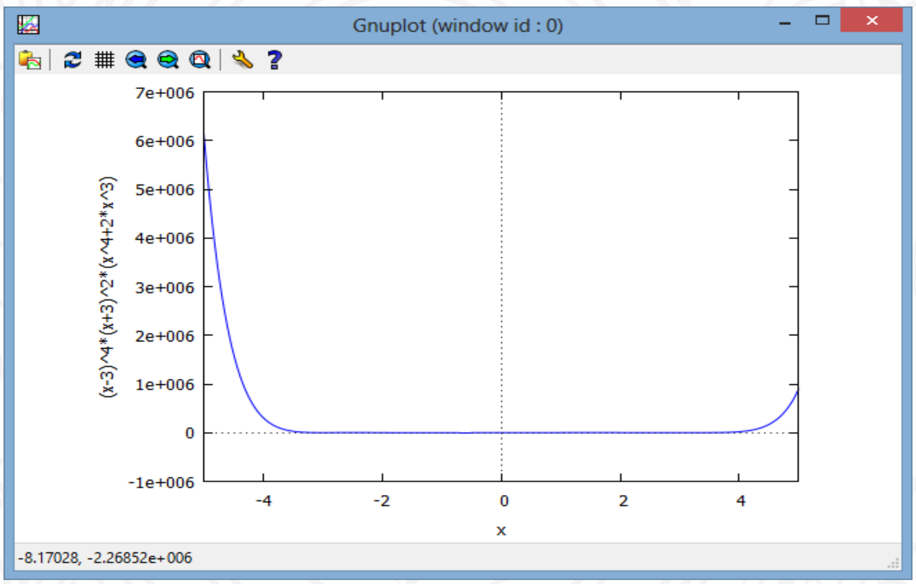
Usando la aplicación wxMaxima, trace la gráfica de la siguiente función polinómica y determine de acuerdo con ella, sus raíces y la multiplicidad algebraica de cada una de ellas.

$$f(x) = (x+3)^2(x^4+2x^3)(x-3)^4$$

a) Determine el grado de la función polinómica y de acuerdo con la teoría determine cuántas raíces debería tener.

El grado de la función es 10 y de acuerdo con la teoría el polinomio debe tener 10 raíces

Trace la gráfica en la aplicación



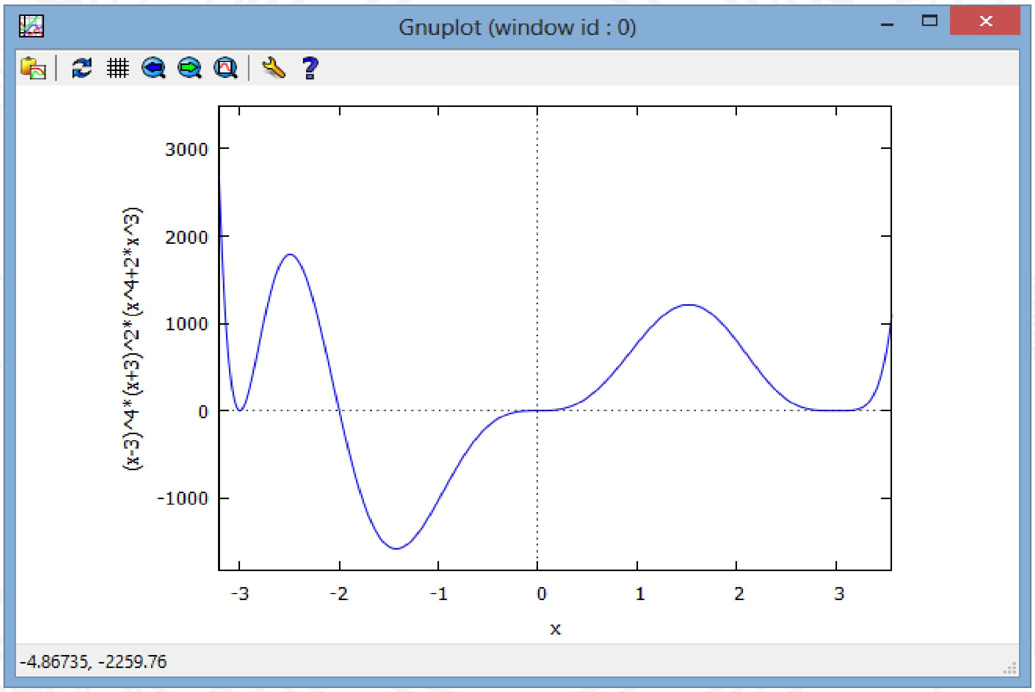
b) ¿Cuántas raíces se pueden apreciar en la primera vista de la gráfica?

Esta gráfica no se aprecia donde la función toca el eje x por tanto no se puede decir cuántas raíces tiene

c) ¿El número de raíces que se observa en la gráfica es igual a las calculadas el paso a)?

En el paso a) se dijo que debían ser 10 raíces en el paso b) no se puede determinar el número porque la gráfica no es clara en cuanto los puntos donde la gráfica toca el eje x.

d) Use la herramienta zoom para visualizar cada una de las raíces de la función polinómica



e) Determine de acuerdo con la forma en que la gráfica intercepta el eje x, la multiplicidad algebraica de cada una de las raíces apreciadas en la gráfica.

La función tiene 4 raíces -3, -2, 0, 3. Por la forma x= -3 tiene multiplicidad 1, x=-2 tiene multiplicidad 2, x= 0 tiene multiplicidad 3 y x= 3 tiene multiplicidad 4, que en total suman las 10 raíces que se mencionaron el numeral a).

En la Tabla 7 se presentan los objetos, y conceptos que surgen por la presencia del software en el desarrollo de la actividad

Tabla 7 GROS – Nuevos Procedimientos – Guía 2

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Representación	Forma en que se simboliza o se presenta una función, esta representación puede ser algebraica, gráfica o tabular
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Corte con el eje x	Refiere a un punto de coordenadas (x,0) que pertenezca a la gráfica del polinomio.
Comando	Instrucción que permite, a programa, realizar una acción predeterminada.
Zoom	Comando que permite cambiar la escala alrededor de un punto de elección.
Línea de comandos	Lugar donde se escribe los comandos para que el software desarrolle las acciones solicitadas.
Barra de menú	Lugar que permite acceso gráfico a los comandos más utilizados.
Parámetro	Datos que reciben los comandos, y que deben ser provistos por el usuario. Cada comando recibe parámetros diferentes.
Representación	Signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	

Variable	Elemento que se utiliza como referencia para escribir o representar ecuaciones con el software
Factor	Factoriza una expresión algebraica
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.
Zoom	Cambia la escala de la gráfica para apreciar la presencia de más raíces en la ventana de graficación.
Solve	Resuelve la ecuación propuesta

El desarrollo de esta tarea es individual, aunque no se prohíbe compartir opiniones o reunirse a comparar soluciones durante el transcurso de la actividad. Cada estudiante debe entregar al finalizar la actividad, un documento de Word en el que se aprecien las capturas de pantalla donde se muestre los comandos y resultados obtenidos con el software.

Para esta guía se toma como base de análisis al estudiante -E1-, igual que en la Guía 1, para realizar una comparación de su desempeño en ambas Guías. La actuación de este estudiante en el desarrollo de la actividad, generó situaciones interesantes que informan sobre el proceso de instrumentación de la actividad matemática.

La Guía 2, contiene 5 cuestiones que buscan relacionar la representación algebraica de una función

Tabla 8 Características y objetos matemáticos examinados en la Guía 2

	Características a observar	1				
		A	b	c	D	e
wxMaxima	Línea de comandos		X			
	Barra de menú		X		X	X
	Ingreso de información		X			
	Comandos utilizados		X			
	Representación gráfica		X		X	X
	Construcción de gráfica		X			X
	Zoom				X	
	Definición de variables		X			

Polinomio	Identificación		X			X
	Grado	X				
	Raíces	X	X	X	X	X
	Representación algebraica	X				
	Representación gráfica		X	X	X	X

La Tabla 8 permite que la atención del investigador se fije en aspectos específicos de la actuación del estudiantes en su relación con el objeto matemático (función polinómica) involucrado en la actividad. Este enfoque ayudará a que aspectos más relevantes del proceso de inclusión de las TIC, por parte de los estudiantes, al desarrollo de las tareas puedan ser fácilmente identificados, además de permitir actuaciones didácticas del docente frente a las inquietudes del uso del software o de los conceptos matemáticos requeridos para esta actividad.

Para el desarrollo de la actividad se presentó la siguiente función polinómica:

$$f(x) = (x+3)^2(x^4+2x^3)(x-3)^4$$

En el literal a) se pide: -"Determine el grado de la función polinómica y de acuerdo con la teoría determine cuantas raíces debería tener"-. La respuesta del E1 se aprecia en la Figura 15

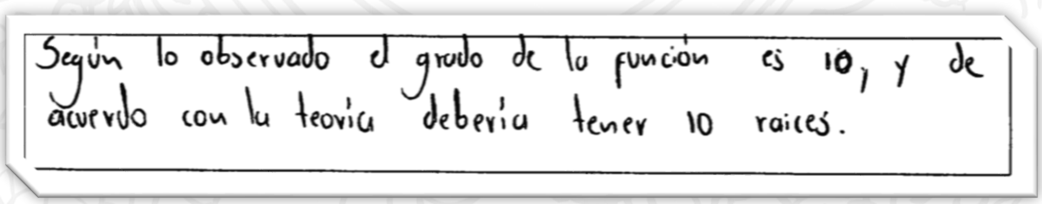


Figura 15 Respuesta de E1 a G2-a

Los 19 estudiantes respondieron de forma similar, asociando el grado de la función polinómica con el número de raíces que debe tener. Sin embargo no se especifica si estas raíces son reales o complejas[15].

[15] En esta investigación cuando nos referimos a raíces complejas, se asume que la parte imaginaria de estos números es diferente de cero.

La Guía solicita trazar la gráfica de la función y en su literal b) pregunta -"Cuántas raíces se pueden apreciar en la primera vista de la gráfica"-.

El primer intento de graficar se muestra en la Figura 16, donde se aprecia un error que arrojó el software al ingresar el comando de graficación wxplot2d.

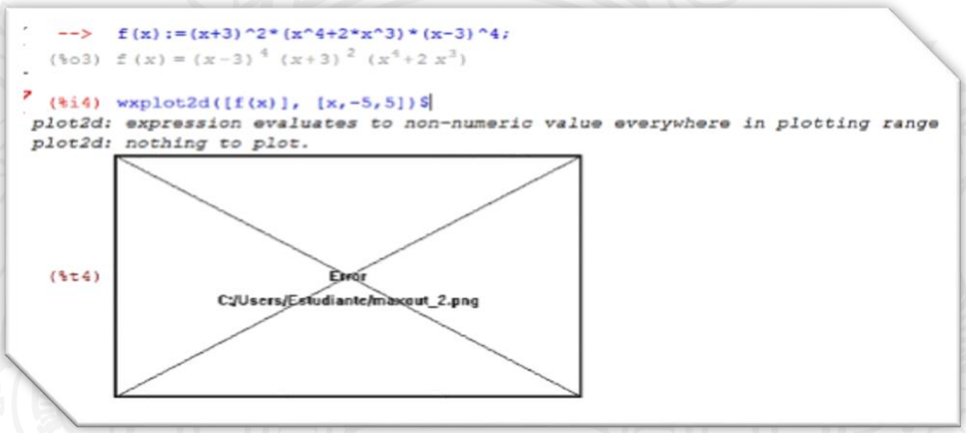


Figura 16 Respuesta E1a G2-b (primer intento)

El estudiante E1 manifiesta: 'En esta imagen el programa me mostro un error que no puede identificar, para desarrollar el ejercicio presione <<esc>> varias veces para que me dejara ingresar de nuevo el polinomio'. Este comentario indica que E1 trato de identificar la razón por la que el programa no pudo ejecutar el comando correctamente, al no encontrar una causa decidió reiniciar el proceso escribiendo el polinomio y trazando de nuevo la gráfica como se muestra en la Figura 17.

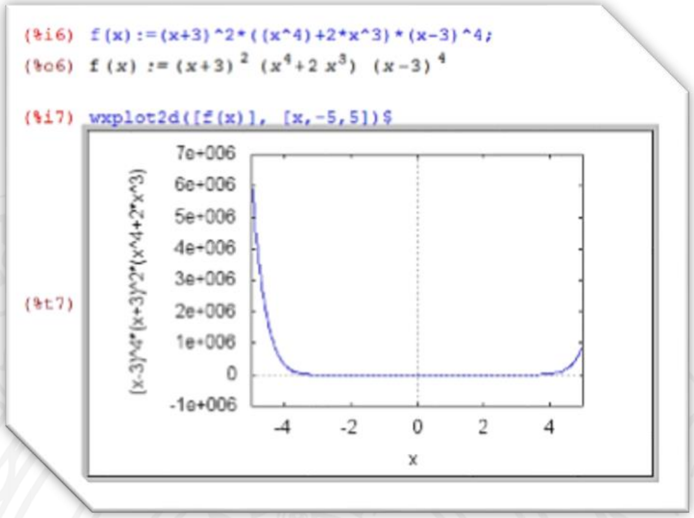


Figura 17 Respuesta E1 a G2-b (segundo intento)

Las respuestas a las cuestiones G2-b y G2-c se muestran en la Figura 18 donde E1 manifiesta que tiene 5 raíces y que son las mismas de la pregunta G2-a; esta respuesta presenta una contradicción en cuanto a sus repuestas, ya que en el ítem a) E1, respondió que por ser una función de grado 10, debería tener 10 raíces. Sin embargo aunque la Guía aún no lo ha solicitado, el estudiante usó el comando zoom para visualizar las raíces como se muestra en la Figura 19, pues en la Figura 17, por el ajuste que realiza la aplicación para trazar una gráfica estándar, se aprecian escalas diferentes en los ejes que no permiten apreciar claramente las raíces.

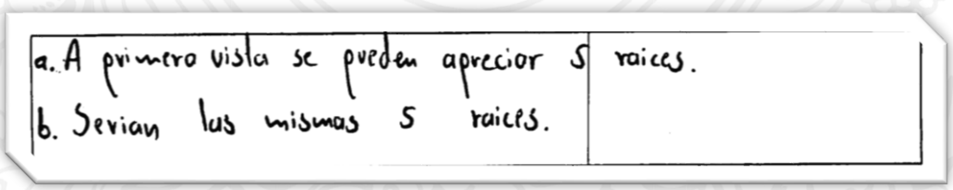

a. A primero vista se pueden apreciar 5 raices.
b. Serian las mismas 5 raices.

Figura 18 Respuestas E1 G2-b y G2-C

La gráfica de la Figura 17 se obtuvo con el comando wxplot2d, el cual traza la gráfica en la línea de comandos y no permite ser manipulada, este aspecto que se vio en la Guía 1, parece que fue la primera opción de E1 para graficar, sin embargo al tratar de manipular el gráfico, se percató de ello y manifiesta que 'Ingresé el polinomio definido como una función y tracé la gráfica en la línea de comando. Pero me di cuenta que no podía hacerle zoom, por lo tanto utilicé la otra opción de dibujo para que apareciera en una venta aparte'. El resultado del nuevo comando se muestra en la Figura 19.

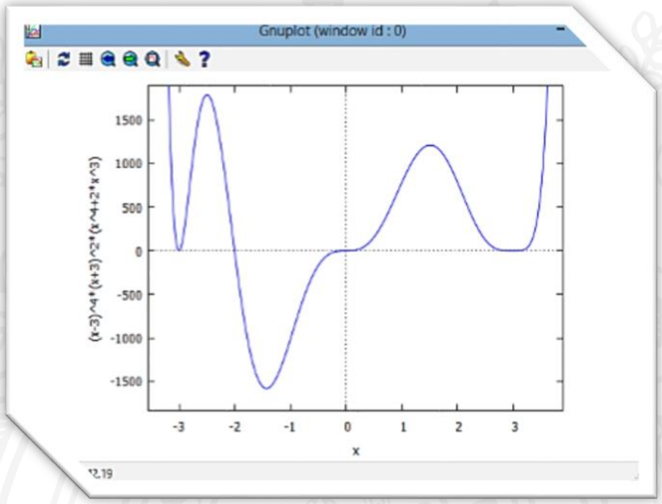


Figura 19 Respuesta E1 G2-d

El ítem e) solicita 'Determine de acuerdo con la forma en que la gráfica intercepta el eje x, la multiplicidad algebraica de cada una de las raíces apreciadas en la gráfica'.

La primera respuesta de E1 se dio respecto a la Figura 17 'Aquí ya se ven las raíces y aparentemente son 4, pero las curvas no se ve bien si tocan el eje'. El estudiante tiene una duda en la gráfica en cuanto si ésta intercepta el eje en los valores de x=-3 y x=3. Para resolver la duda, el estudiante realiza zoom sobre estos puntos. El uso de esta opción para verificar es evidencia de del proceso de instrumentación que experimenta el estudiante en el uso del software para dar respuestas a cuestiones matemáticas.

La Figura 20 muestra el resultado después de haber realizado varias veces zoom sobre el valor de x = -3.

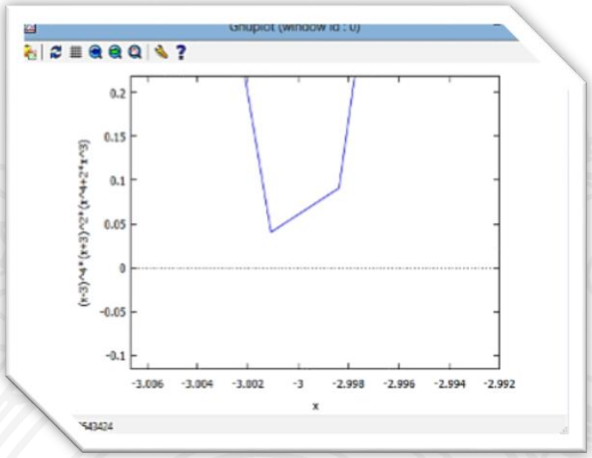


Figura 20 Respuesta G2-d zoom

En la Figura 20 podemos apreciar que la diferencia de escalas entre los ejes es muy alta, lo que genera una deformación de la gráfica, además de una imprecisión al graficar que inicialmente no fue percibida por el estudiante cuando dice ‘Al hacer zoom vemos que efectivamente la curva no toca el eje, por lo tanto no es una raíz’. Con esta respuesta se aprecia que el estudiante confía en la respuestas que le da el software, sin embargo aún manifiesta dudas y se cuestiona en relación con la veracidad de la información que obtiene ‘Debido a que tengo dudas verifico cuánto me da la función evaluada en esos puntos …’. Esta comprobación se observa en la Figura 21.

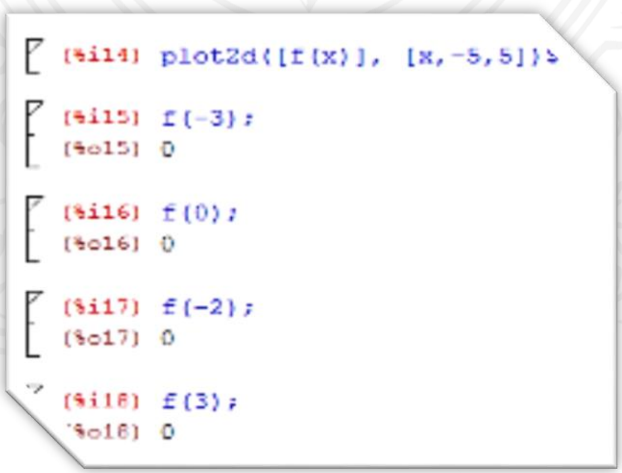


Figura 21 Comprobación Raíces G2-d

La Figura 21 muestra que E1 usa el software para comprobar si efectivamente existe una raíz en los valores en que se tiene dudas (-3, -2- 0, 3). Al evaluar la función en estos puntos obtiene como resultado cero, lo que E1 dijo ante este hecho fue: ‘en todos obtengo valor de cero, diciendo que son raíces, aunque la gráfica me muestra que no. Solo me queda decir que debe tener un error el programa en parte de la graficación, que no debe ser muy exacta’.

Como la Guía solicitaba una respuesta, el estudiante opta por los resultados mostrados en la representación gráfica omitiendo así la comprobación que realiza al evaluar la función. La respuesta dada por E1 se muestra en la Figura 22.

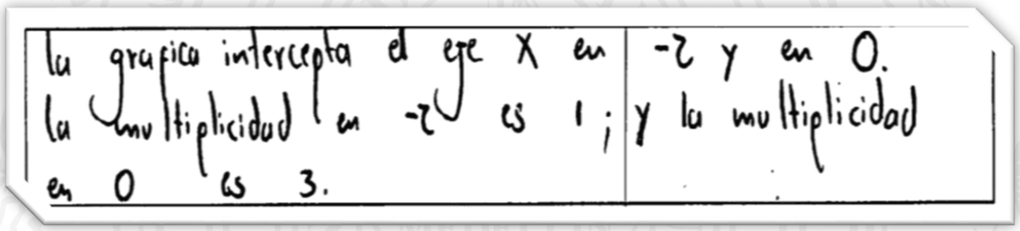

la grafica intercepta el eje X en -2 y en 0.
la multiplicidad en -2 es 1; y la multiplicidad
en 0 es 3.

Figura 22 Respuesta E1 a G2-e

4.3. Guía 3

Con esta Guía se pretende utilizar la aplicación para representar una función definida por tramos, para encerrar una región específica en el plano y de esta forma calcular su área. Para ello se espera que los estudiantes utilicen comandos para definir varias funciones en la aplicación y la gráfica conjunta de todas ellas, ya que en el manual sólo se explica cómo trazar la gráfica de una o dos funciones.

La Tabla 9 muestra los objetos y conceptos matemáticos involucrados en el desarrollo de la actividad propuesta por la Guía, así como la solución esperada de la misma.

Tabla 9 GROS – Conceptos Matemáticos Guía 3

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Definir funciones	Establecer una correlación matemática entre dos o más variables
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Grado de un polinomio	Es el máximo exponente de la variable
Perímetro	Conjunto de líneas que forman el contorno de una superficie
Area	Medida que define la extensión de una superficie
Función por tramos	Función que cambia de definición dependiendo del valor de la variable
Intervalo	Espacio comprendido entre dos valores
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Perímetro	Suma de las longitudes de todas las líneas que conforman o rodean un superficie
Ecuación de la recta (punto – punto)	Dados dos puntos, se puede determinar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Ecuación de la recta (punto – punto)	Dados dos puntos, se puede determinar la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	
Ejemplo de solución esperada por parte del profesor.	

Ejercicio:

Un granjero desea adquirir un terrero, que será pagado de acuerdo con el área total. Para calcular el área recorrió el perímetro del terreno tomando las siguientes medidas:

Tramo rectos

Distancia horizontal m	Distancia vertical M	Dirección vertical
3	6	↑
6	6	↑
5	15	↑
9	27	↓

Con las medidas descritas por el granjero, se debe construir el trazado del perímetro del terreno y calcular el área que este encierra. Para ello se sugiere determinar las funciones polinómicas que definen el perímetro y realizar divisiones en polígonos regulares para calcular el área como una suma de las áreas de cada uno de ellos.

Solución

Para iniciar nos ubicamos en el punto de coordenadas (0,0) para iniciar el trazo del recorrido hecho por el granjero.

En el primer tramo recorrió 3 metros hacia la derecha y 6 hacia arriba, partiendo desde el punto (0,0) el punto final está en (0+3,0+6)=(3,6). Con estos dos puntos determinamos la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-0}{6-0}=\frac{x-0}{3-0}$$

$$\frac{y}{6}=\frac{x}{3}$$

$y = 2x$ Que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0,0) y (3,6).

El segundo recorrido fue 6 hacia la derecha y 6 hacia arriba, partiendo del punto (3,6) el punto final está en (3+6,6+6) = (9,12). Con estos dos puntos determinamos la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 6}{12 - 6} = \frac{x - 3}{9 - 3}$$

$$\frac{y - 6}{6} = \frac{x - 3}{6}$$

$$y - 6 = x - 3$$

$y = x + 3$, Que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,6) y (9,12). El siguiente recorrido fue 5 hacia la derecha y 15 hacia arriba, partiendo desde el punto (9,12) el punto final está en (9+5,12+15) = (14,27). Con estos dos puntos determinamos la ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 12}{27 - 12} = \frac{x - 9}{14 - 9}$$

$$\frac{y - 12}{15} = \frac{x - 9}{5}$$

$$y - 12 = 3(x - 9)$$

$$y - 12 = 3x - 27$$

$y = 3x - 15$, Que corresponde a la ecuación de la recta que pasa por los puntos (9,12) y (14,27). El siguiente recorrido fue 9 hacia la derecha y 27 hacia abajo, partiendo del punto (14,27) el punto final está en (14 + 9, 27-27) = (23,0). Con estos dos puntos determinamos la ecuación de la recta que pasa por estos puntos.

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{y - 27}{0 - 27} = \frac{x - 14}{23 - 14}$$

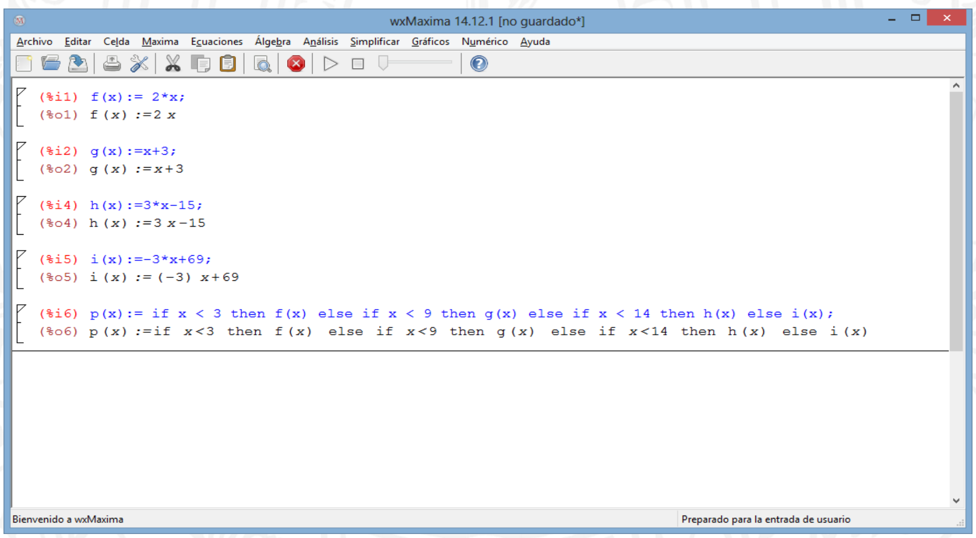
$$\frac{y-27}{-27}=\frac{x-14}{9}$$

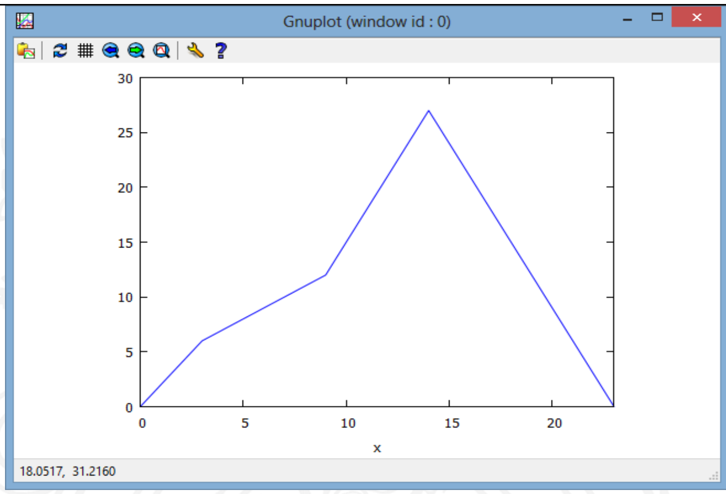
$$y-27=-3(x-14)$$

$$y-27=-3x+42$$

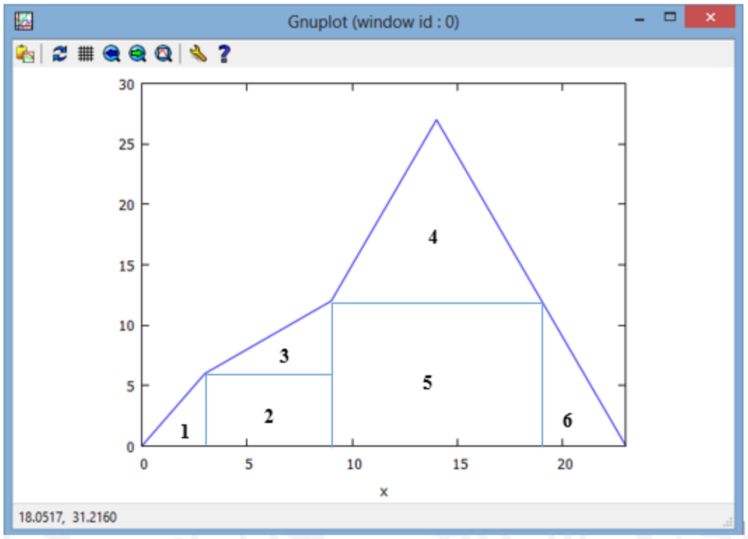
$y=-3x+69$, Que es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (14,27) y (23,0).

Con estas ecuaciones trazamos la gráfica para determinar la forma y la región que encierra. Utilizamos Maxima para hacer esto, como las ecuaciones son de varias rectas y lo que requerimos son segmentos de esas rectas, usamos el comando *si* para definir cada segmento. El comando *si*, nos permite definir una función a por tramos, indicando los intervalos en los que se debe trazar cada función encontrada en el paso anterior.





Para calcular el área se divide la región interior en polígonos regulares y se procede a calcular el área de cada uno para al final sumar todas las áreas en una sola.



Área 1 (triángulo): base = 3, altura = 6

$$Area\ 1 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{3x6}{2} = 9$$

Área 2 (rectángulo) : L1 = 6, L2=6

$$Area\ 2 = L1xL2 = 6x6 = 36$$

Área 3 (triángulo): base = 6, altura = 6

$$Area\ 3 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{6x6}{2} = 18$$

Área 4 (triángulo): base = 10, altura = 15

$$Area\ 4 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{10x15}{2} = 75$$

Área 5 (rectángulo): L1 = 10, L2 = 12

$$Area\ 5 = L1xL2 = 10x12 = 120$$

Área 6 (triángulo): base = 4, altura = 12

$$Area\ 1 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{4x12}{2} = 24$$

$$Area\ 1 + Area\ 2 + Area\ 3 + Area\ 4 + Area\ 5 + Area\ 6 = 9 + 36 + 18 + 75 + 120 + 24 = 282\ m^2$$

La Tabla 10 muestra los objetos y significados que se introducen por la presencia del software y el ordenador en el desarrollo de la actividad.

Tabla 10 GROS – Nuevos Procedimientos – Guía 3

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Definir funciones	Establecer una correlación matemática entre dos o más variables
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
Intervalo	Conjunto numérico comprendido entre dos valores

Comando	Instrucción que permite, al programa, realizar una acción predeterminada.
Línea de comandos	Lugar donde se escriben los comandos para que el software desarrolle las acciones solicitadas.
Barra de menú	Lugar que permite acceso gráfico a los comandos más utilizados.
Parámetro	Datos que reciben los comandos, y que deben ser provistos por el usuario. Cada comando recibe parámetros diferentes.
Representación	Signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Si	Condicional que permite limitar la definición de una función
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.

Para esta Guía se toma como base de análisis la estudiante E3, al ser una actividad para desarrollar de forma individual, está permitida la interacción entre los estudiantes para compartir tanto experiencias como métodos de solución.

La Guía contiene una sola pregunta que pide encontrar el área de una región de acuerdo con parámetros establecidos. En la primera parte se espera que los estudiantes la desarrollen de forma manual y posteriormente exploren los resultados obtenidos con la aplicación para obtener una gráfica como la mostrada en la solución propuesta.

Esta actividad fue resuelta por 19 estudiantes, sobre las cuales se informa.

La Tabla 11 muestra las características del programa Maxima y los objetos matemáticos puestos en juego para dar una solución a la tarea y sobre los cuales el investigador hará énfasis en su análisis de los resultaos obtenidos.

Tabla 11 Características y objetos matemáticos examinados en la Guía 3

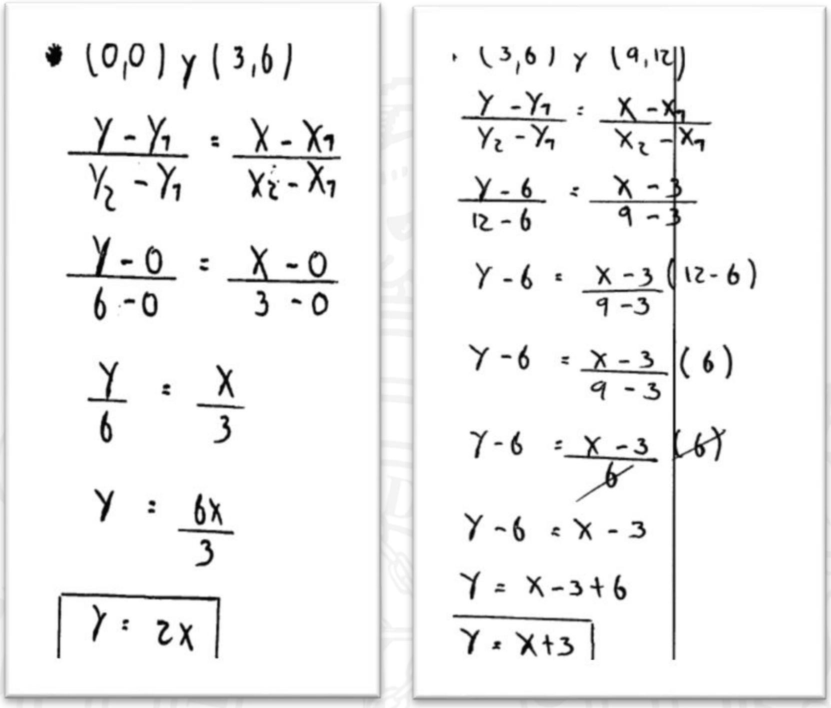
	Características a observar	1
		a
wxMaxima	Línea de comandos	X
	Barra de menú	X
	Ingreso de información	X
	Comandos utilizados	X
	Representación gráfica	X
	Construcción de gráfica	X
	Zoom	
	Definición de variables	X
Polinomio	Representación algebraica	X
	Grado	X
	Intervalos	X
	Representación gráfica	X

El desarrollo inicial de esta Guía se dio en un proceso manual, siguiendo los recorridos planteados en el enunciado, los estudiantes determinaron los puntos iniciales y finales de cada tramo y con ellos calcularon las ecuaciones de las rectas que pasaban por estos puntos, los cálculos se realizaron de acuerdo con los recorridos mostrados en la Tabla 12.

Tabla 12 Recorridos propuestos en la Guía 3

Distancia horizontal M	Distancia vertical M	Dirección vertical
3	6	↑
6	6	↑
5	15	↑
9	27	↓

El estudiante E3, calculó los puntos del primer recorrido y la ecuación de la recta como lo muestra la Figura 23.



* $(0,0)$ y $(3,6)$

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

$$\frac{Y-0}{6-0}=\frac{X-0}{3-0}$$

$$\frac{Y}{6}=\frac{X}{3}$$

$$Y=\frac{6X}{3}$$

$$\boxed{Y=2X}$$

* $(3,6)$ y $(9,12)$

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

$$\frac{Y-6}{12-6}=\frac{X-3}{9-3}$$

$$Y-6=\frac{X-3}{9-3}(12-6)$$

$$Y-6=\frac{X-3}{9-3}(6)$$

$$Y-6=\frac{X-3}{\cancel{6}}\cancel{(6)}$$

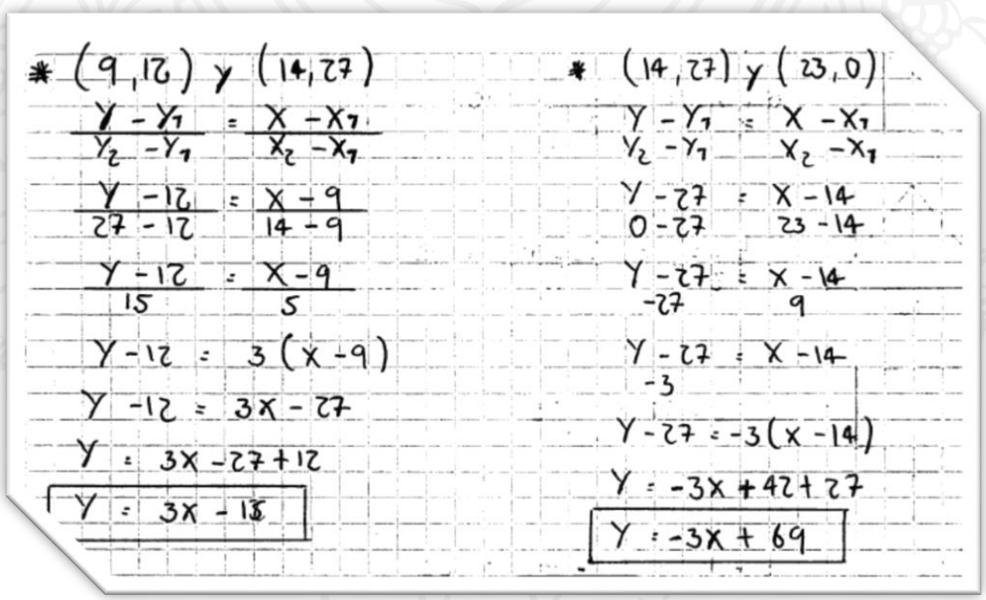
$$Y-6=X-3$$

$$Y=X-3+6$$

$$\boxed{Y=X+3}$$

Figura 23 Ecuaciones de la recta recorridos 1 y 2

El estudiante utiliza su conocimiento sobre la función lineal para determinar las ecuaciones de las rectas que pasan por cada par de puntos, definiendo el perímetro del área deseada como se muestra en la Figura 23 y en la Figura 24.



* $(9,12)$ y $(14,27)$

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

$$\frac{Y-12}{27-12}=\frac{X-9}{14-9}$$

$$\frac{Y-12}{15}=\frac{X-9}{5}$$

$$Y-12=3(X-9)$$

$$Y-12=3X-27$$

$$Y=3X-27+12$$

$$\boxed{Y=3X-15}$$

* $(14,27)$ y $(23,0)$

$$\frac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\frac{X-X_1}{X_2-X_1}$$

$$\frac{Y-27}{0-27}=\frac{X-14}{23-14}$$

$$\frac{Y-27}{-27}=\frac{X-14}{9}$$

$$\frac{Y-27}{-3}=X-14$$

$$Y-27=-3(X-14)$$

$$Y=-3X+42+27$$

$$\boxed{Y=-3X+69}$$

Figura 24 Ecuaciones de la recta recorridos 3 y 4

Las respuestas obtenidas como ecuaciones lineales, son iguales a las mostradas en la solución esperada mostrada en la Tabla 9. A continuación el estudiante desarrolla los trazos de los segmentos de forma manual y se observa, en la Figura 25, la forma que tiene el perímetro recorrido.

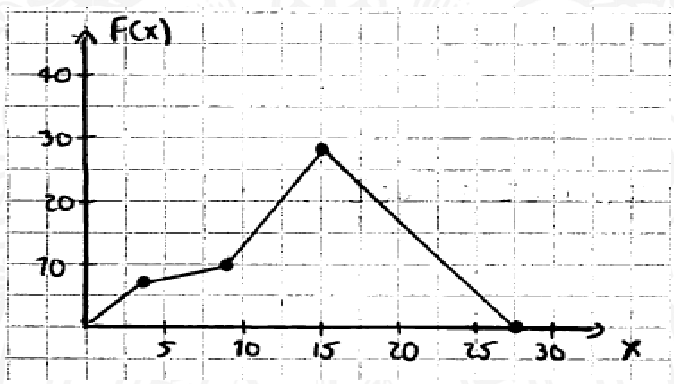


Figura 25 Recorrido realizado por el granjero

Al utilizar la aplicación wxMaxima para representar el trabajo que desarrollo de forma manual, podemos observar varios aspectos que son relevantes:

La Figura 26 muestra que E3 generalizó el proceso de definición de funciones mediante el software, al definir 4-cuatro funciones utilizando letras diferentes (f,g,h,i) como representación de cada uno de los tramos recorridos.

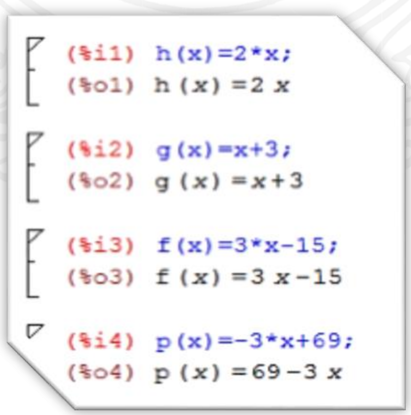
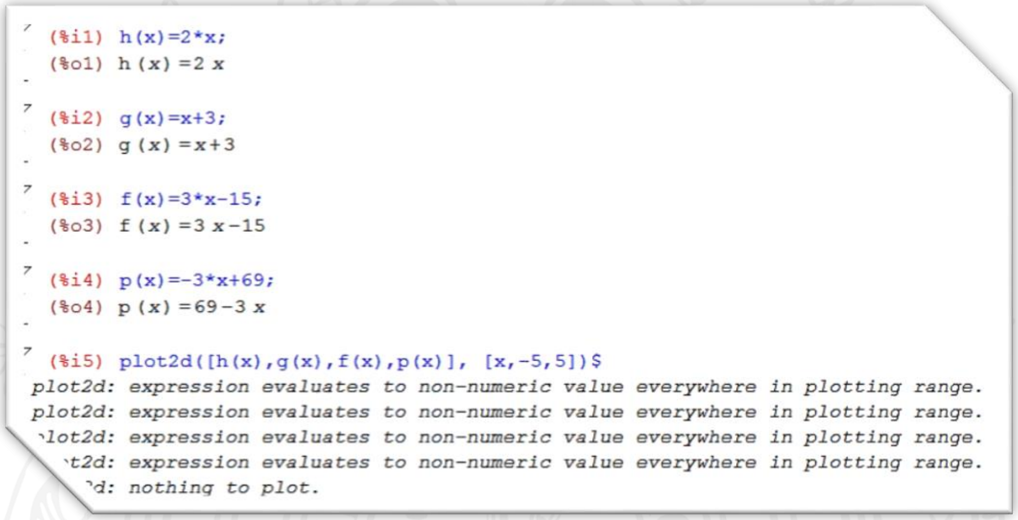


Figura 26 Definición de funciones G3

La Figura 27 muestra un error al intentar graficar, este error no fue reconocido, varias líneas muestran el mismo error, lo que indica que el estudiante presiono ‘enter’ varias veces con el propósito de obtener la gráfica sin modificar los parámetros de la función plot2d.



```
(%i1) h(x)=2*x;
(%o1) h(x)=2 x

(%i2) g(x)=x+3;
(%o2) g(x)=x+3

(%i3) f(x)=3*x-15;
(%o3) f(x)=3 x-15

(%i4) p(x)=-3*x+69;
(%o4) p(x)=69-3 x

(%i5) plot2d([h(x),g(x),f(x),p(x)], [x,-5,5])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value everywhere in plotting range.
plot2d: expression evaluates to non-numeric value everywhere in plotting range.
plot2d: expression evaluates to non-numeric value everywhere in plotting range.
plot2d: expression evaluates to non-numeric value everywhere in plotting range.
plot2d: nothing to plot.
```

Figura 27 Error comando Plot2d G3

Posteriormente identifica el error que se presenta en el intervalo de la gráfica. La Figura 27, en la etiqueta %i5, muestra que el intervalo se encuentra entre x=-5 y x=5, en este intervalo parte de las funciones quedan fuera del rectángulo de visualización y la aplicación lo reporta como error. En la Figura 28 se observa que el intervalo es cambiado por x=0 hasta x=23 tomando el mínimo y máximo valor de x obtenidos en los puntos del recorrido descrito.

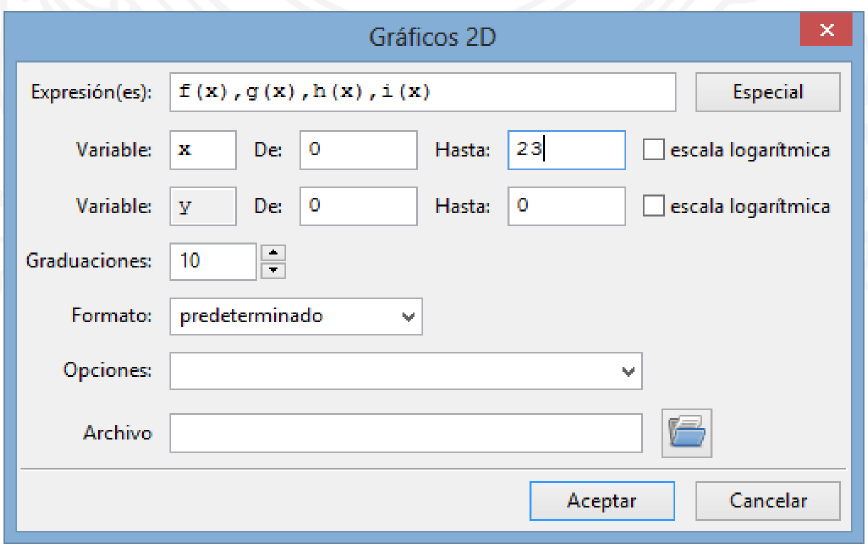


Figura 28 Ventana Gráfica – Parámetros para trazado de curvas

La gráfica obtenida como resultado de este comando se muestra en la Figura 29. En este punto el estudiante se limitó a trazar representaciones gráficas de cada una de las funciones lineales, olvidando que debía dibujar los segmentos de recta entre cada par de puntos, como lo muestra la solución esperada en la Tabla 9.

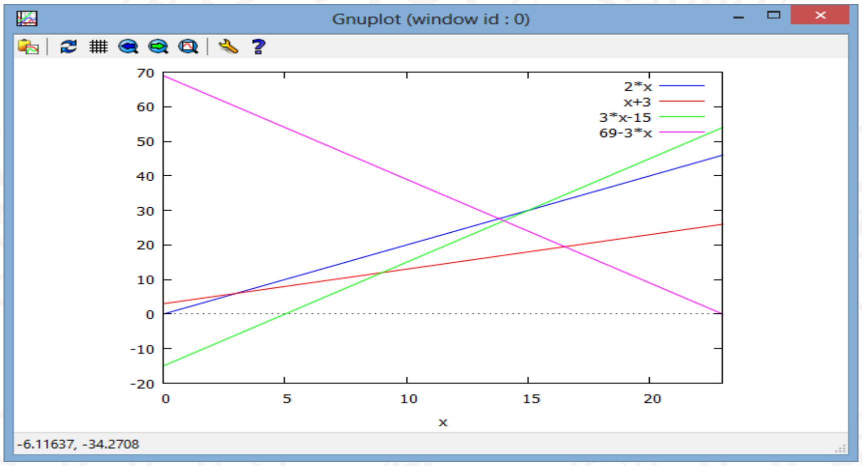


Figura 29 Trazado de varias funciones

La culminación del ejercicio se realizó a partir del dibujo obtenido manualmente y que muestra en la Figura 24, de donde se extrajeron los polígonos regulares mostrados en la Figura 30 para calcular sus respectivas áreas.

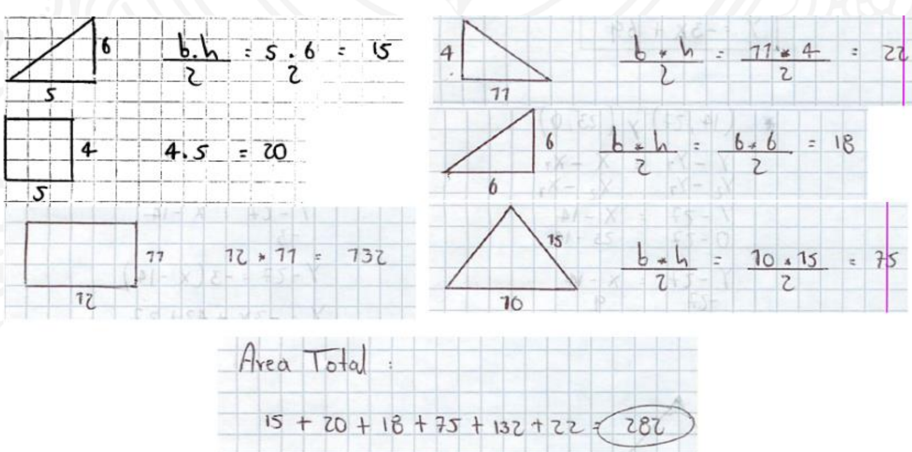


Figura 30 Polígonos regulares obtenidos de los recorridos

El cálculo del área coincide con el de la solución esperada, sin embargo en este caso la aplicación no aportó información para la solución, debido a la restricción de no utilizar el comando adecuado para trazar la representación gráfica de la función a tramos solicitada. Por otra parte se observa un progreso en la representación algebraica y la representación gráfica de n funciones en una sola ventana de graficación.

4.4. Guía 4

La actividad planteada en la Guía 5 tiene como propósito identificar los intervalos donde una función polinómica es positiva o negativa, a partir de su representación gráfica, además de identificar las tendencias en su forma cuando el coeficiente de la variable con mayor grado, es modificado.

En la Tabla 14 se muestra la GROS de objetos matemáticos que forman parte de esta actividad, y la Tabla 15 se muestra la GROS de objetos computacionales el estudiante podría utilizar durante la solución de las cuestiones planteadas en la Guia.

Tabla 13 GROS - Conceptos Matemáticos Guía 4

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Determinar intervalos	Indicar el signo (+ o -) de una función polinómica, que indica cuando su representación gráfica se ubica por encima (+) o por debajo (-) del eje x.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Polinomio	Expresión algebraica que consta de sumas de productos de variables y escalares.
Cero de un polinomio o raíz de un polinomio.	Valor que anula al polinomio
Grado de un polinomio	Es el máximo exponente de la variable

Residuo	Es el número que se le ha de restar al dividendo para que sea igual a un determinado número de veces el divisor
Residuo	Valor que se obtiene cuando el polinomio de divide entre una expresión del tipo (x-a)
Multiplicidad	Número de veces que un mismo factor-monomio o polinomio-se repite.
Factor	Monomio o polinomio que multiplica.
Multiplicidad geométrica	Número de veces que la gráfica pasa por un mismo punto sobre el eje x.
Multiplicidad algebraica	Número de veces que un factor de la forma (x-a) se repite.
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
Intervalo	Espacio numérico comprendido entre dos valores.
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Teorema del Factor	Conocido un cero del polinomio conozco un factor, si el cero es “a” el factor será (x-a).
Teorema del residuo	Si el residuo de dividir el polinomio entre (x-a) es cero, entonces “a” es raíz del polinomio.
Teorema fundamental del álgebra	Conocidos los ceros de un polinomio puede determinar el mínimo grado que éste tiene.
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Teorema del Factor	Si (x-a) es un factor si y solo si “a” es un cero del polinomio.
Teorema del Residuo	Si (x-a) es un factor de P(x) entonces P(a)=0
Teorema fundamental del álgebra	Un polinomio con coeficientes reales de grado “n” tiene exactamente “n” ceros complejos.
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

Ejemplo de solución esperada por parte del profesor.

Ejercicio:

Dada la siguiente función polinómica, trace su gráfica determinando los intervalos negativos y positivos que se presentan en ella (donde está por debajo y donde por encima del eje x).

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

1. Analice la gráfica

a) Encuentre las raíces de la función polinómica y determine la cardinalidad de cada una de ellas.

```
(%i4) solve(f(x));
(%o4) [x=-2,x=-1,x=0]
```

Tiene 3 raíces: x = -2, x = -1, x = 0 y cada una de ellas es de multiplicidad 1.

b) Establezca los intervalos positivos y negativos de función. Construya una tabla donde especifique por cada intervalo el punto de prueba (donde se evalúa la función), el valor de la función al ser evaluada y el resultado para obtener el signo del intervalo.

Intervalo	Valor de prueba	función evaluada	Signo de la función en el intervalo
$(-\infty, -2)$	-3	(%i5) f(-3); (%o5) -6	-
$(-2, -1)$	-1,5	(%i6) f(-1.5); (%o6) 0.375	+

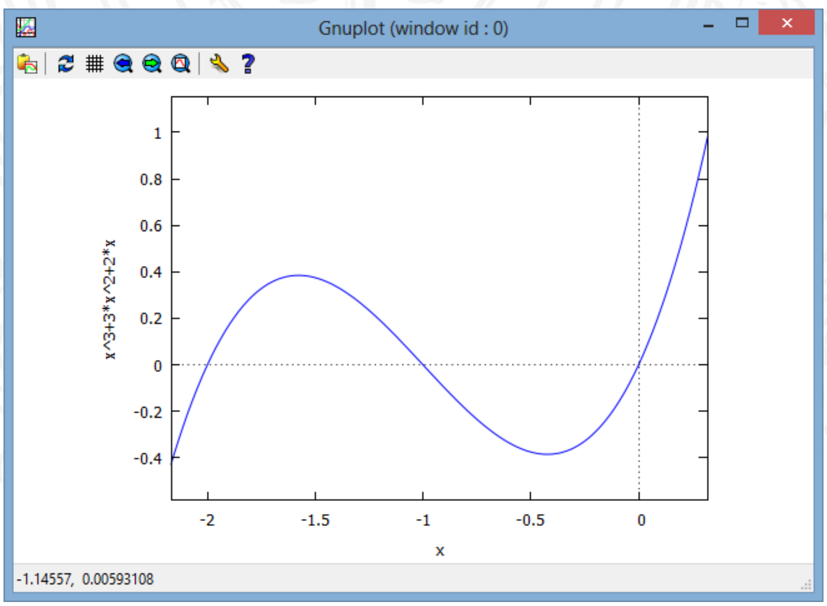
$(-1,0)$	-0,5	(%i8) f(-0.5); (%o8) -0.375	-
$(0,\infty)$	1	(%i9) f(1) (%o9) 6	+

c) Calcule el intercepto con el eje '*y*'

El intercepto con el eje '*y*' se encuentra haciendo x = 0, por tanto evaluamos la función en 0

```
(%i10) f(0);
(%o10) 0
```

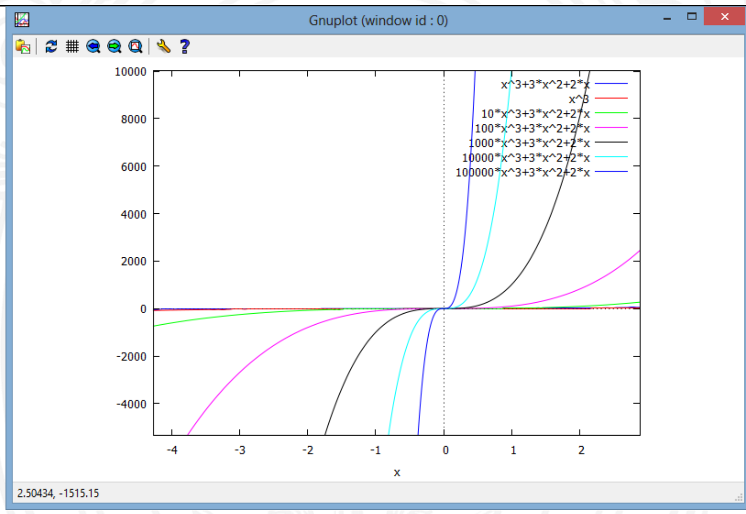
d) Trace la gráfica



2. Cambie repetidamente el coeficiente de x^3

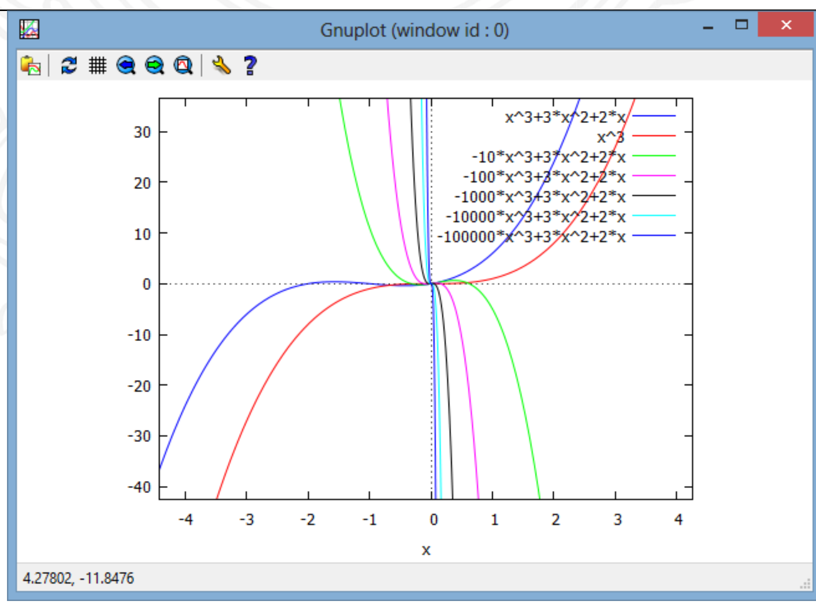
a. Trace la gráfica $f(x) = x^3$ y realice una comparación con cada gráfica al realizar el cambio del coeficiente en el numeral anterior. Repita sistemáticamente el cambio de coeficiente probando números positivos, números negativos y números entre cero y uno; y entre menos uno y cero.

b. ¿Qué se puede concluir si este coeficiente es muy grande?



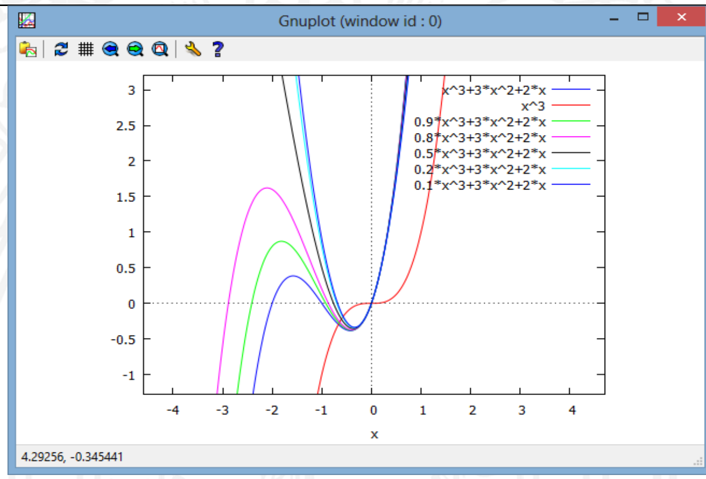
Al aumentar el coeficiente, la gráfica de la función se asemeja a la de x^3

c. ¿Qué se puede concluir si este coeficiente es muy pequeño?



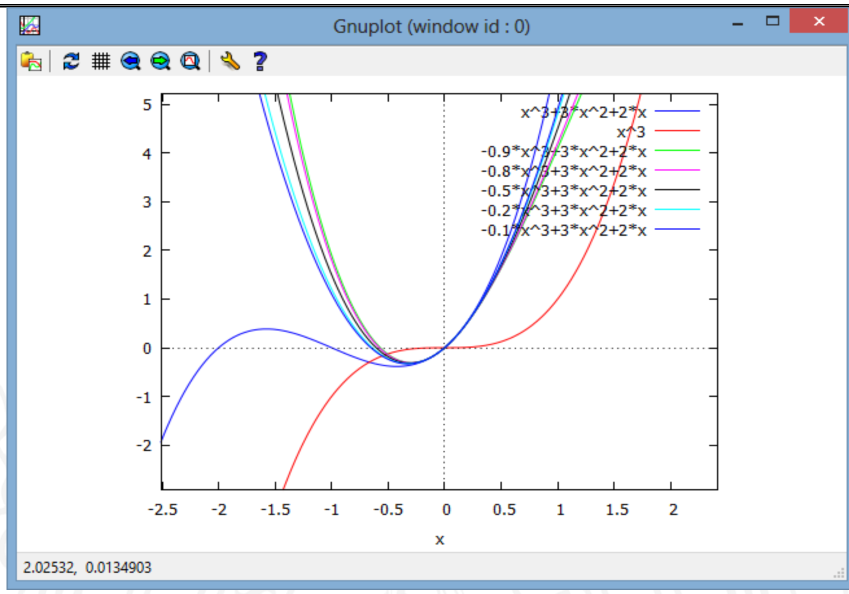
Si el coeficiente disminuye la gráfica tiende a $-x^3$

d. ¿Qué se puede decir si el coeficiente está entre cero y 1?



Entre más se acerca a cero, tiende a una parábola ya que el coeficiente de x a la 3 va disminuyendo y en cero ya se convertiría en una ecuación de grado 2 lo que representa una parábola.

e. ¿Qué se puede decir si el coeficiente está entre -1 y cero?



Entre más se acerca a cero tiende a una parábola ya que el coeficiente de x a la 3 va disminuyendo y en cero ya se convertiría en una ecuación de grado 2 lo que representa una parábola.

Tabla 14 GROS – Nuevos Procedimientos – Guía 3

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Determinar intervalos	Indicar el signo (+ o -) de una función polinómica, que indica cuando su representación gráfica se ubica por encima (+) o por debajo (-) del eje x.
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Variable	Es una etiqueta que se usa para asignar valores diferentes a una letra.
Intervalo	Espacio numérico comprendido entre dos valores

Corte con el eje x	Refiere a un punto de coordenadas (x,0) que pertenezca a la gráfica del polinomio.
Comando	Instrucción que permite al software, realizar una acción predeterminada.
Zoom	Comando que permite cambiar la escala alrededor de un punto de elección.
Línea de comandos	Lugar donde se escribe los comandos para que el software desarrolle las acciones solicitadas.
Barra de menú	Lugar que permite acceso gráfico a los comandos más utilizados.
Parámetro	Datos que reciben los comandos, y que deben ser provistos por el usuario. Cada comando recibe parámetros diferentes.
Representación	Signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Factor	Factoriza una expresión algebraica
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.
Zoom	Cambia la escala de la gráfica para apreciar la presencia de más raíces en la ventana de graficación.
Solve	Resuelve la ecuación propuesta

La Tabla 16 indica los comandos y características que serán examinados en cada numeral, con el propósito de facilitar su observación y análisis.

Tabla 15 Características y objetos matemáticos examinados en la guía 3

	Características a observar	1				2				
		a	B	C	d	A	b	c	D	E
wxMaxima	Línea de comandos				X	X	X	X	X	X
	Barra de menú				X	X				
	Ingreso de información				X	X	X	X	X	X
	Comandos utilizados				X	X	X	X	X	X
	Representación gráfica				X	X	X	X	X	X
	Construcción de gráfica				X	X	X	X	X	X
	Zoom					X	X	X	X	X
	Definición de variables				X	X	X	X	X	X
Función Polinómica	Identificación	X		X		X	X	X	X	X
	Grado	X			X	X				
	Raíces	X	X				X	X	X	X
	Representación algebraica	X	X			X				
	Representación gráfica			X	X					
	Factorización	X	X		X					
	División	X								

La Guía se encuentra dividida en dos partes y cada una de ellas contiene literales que los estudiantes deben resolver.

Para el primer literal se plantea una función polinómica de grado tres en la variable x y se plantean 4 preguntas con fin de analizar la representación gráfica de esta función.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

A continuación analizaremos las respuestas dadas por los estudiantes a las cuestiones planteadas en esta tarea.

La estudiante E4 antes de iniciar la solución del literal a) de la G5-1, construye una representación gráfica de la función polinómica utilizando el comando plot2d que le permite obtener una gráfica en una ventana independiente y la cual es manipulable con los comandos zoom, color, malla entre otros.

Los 19 estudiantes realizaron esta misma acción; se pone de manifiesto con el uso de este comando que se percibe la diferencia entre el comando wplot2d que no permite manipulación gráfica y el comando plot2d anticipando que debe realizar acciones posteriores para analizar la gráfica.

La Figura 31 muestra la representación gráfica, obtenida por la estudiante, durante su procedimiento.

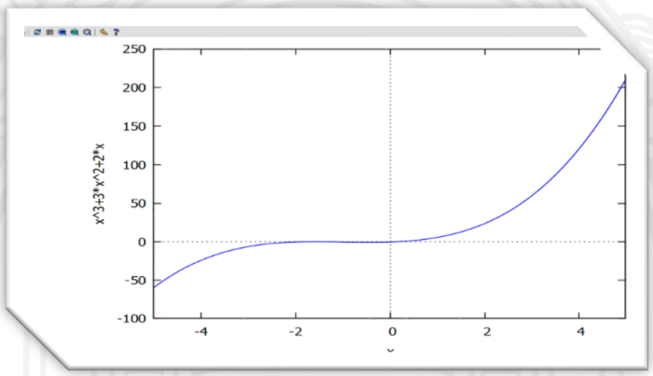


Figura 31 Representación gráfica función G4

El literal a) pide encontrar las raíces de la función polinómica y determinar la multiplicidad de cada una de ella.

La estudiante E4 utiliza el zoom para acercar la gráfica y observar mejor los interceptos con el eje *x*, lo cual se evidencia en la Figura 32, lo cual se puede interpretar como un desarrollo en el uso de las opciones que ofrece el software wxMaxima para el análisis de las representaciones gráficas de funciones y que utiliza con seguridad para dar su respuesta 'con zoom hace cero en -2, -1 y en cero

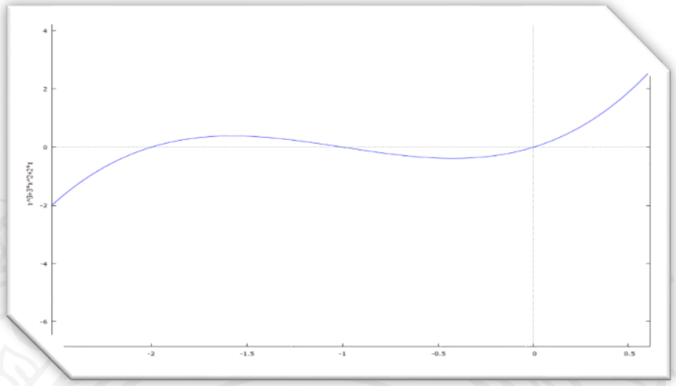


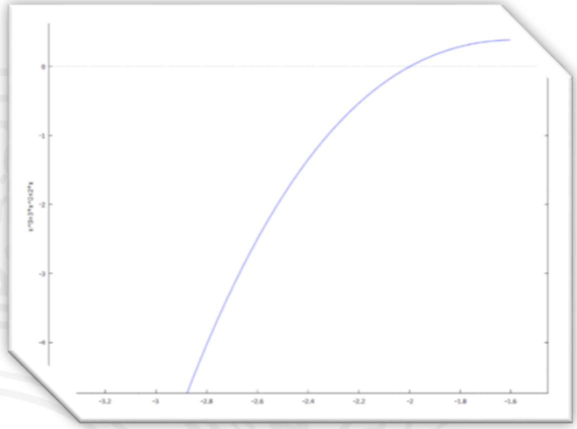
Figura 32 Representación gráfica función G4 - Zoom

El literal b) solicita la construcción de una tabla donde se especifiquen los intervalos donde la función es positiva y negativa.

La E4 construye inicialmente la Tabla 17 y las respalda con las Figura 33, Figura 34 y Figura 35. El estudiante especifica intervalos que visualmente no se pueden determinar, lo que demuestra que ha utilizado la opción del puntero del mouse que permite determinar las coordenadas del punto que se está señalando en el momento, esta opción no fue explicada por el profesor, lo que ofrece evidencia de una exploración de opciones adicionales por parte de la estudiante.

Tabla 16 Intervalos de crecimiento y decrecimiento E4 – Primera versión

INTERVALO	POSITIVO	NEGATIVO
-4.84 hasta 0.384	↑	
0.384 hasta -0.384		↓
-0.384 hasta 4.59	↑	



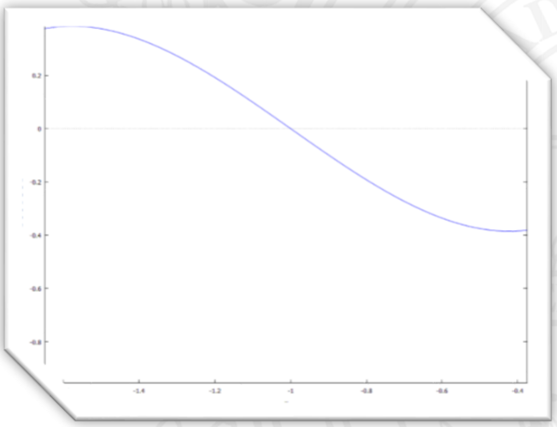


Figura 33 Primer Intervalo G4

Figura 34 Segundo Intervalo G4

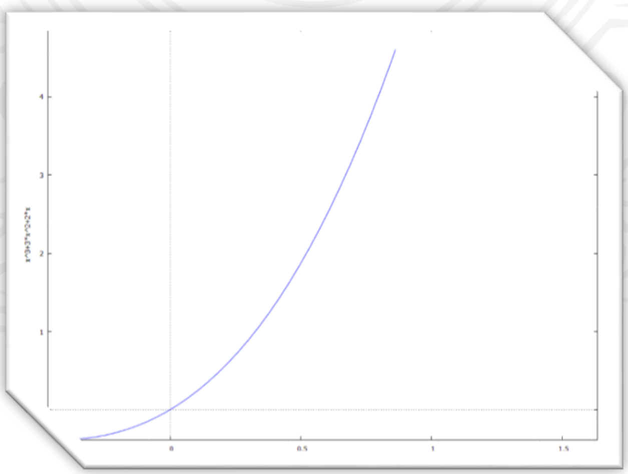


Figura 35 Tercer Intervalo G4

Sin embargo luego de realizado este procedimiento la estudiante descubrió que estaba realizando un procedimiento no solicitado, como lo establece en su respuesta: 'CORRECCIÓN: Lo que hice anteriormente fue: donde es creciente y decreciente, pero ahora sé, donde es negativa (debajo de x) y positiva (encima de x)'.

La confusión se dio porque la representación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento utilizan los signos + y – como representación para cada uno, pero ahora parte de la posición de la gráfica 'negativa (debajo de x) y positiva (encima de x)' para solucionar la cuestión planteada. Con este nuevo análisis construye la Tabla 18 y ofrece evidencia con la Figura 36.

Tabla 17 Corrección intervalos positivos y negativos función G4

Intervalos	Positivo o Negativo
-∞ hasta -2	Negativo
-2 hasta -1	Positiva
-1 hasta 0	Negativa
0 hasta ∞	Positiva

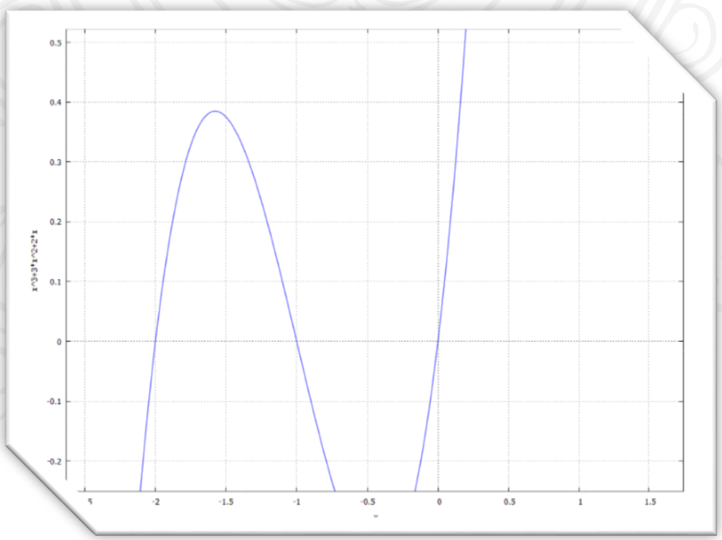


Figura 36 Representación gráfica Uso de grid

Nuevamente se observa en la Figura 35 un progreso sobre las opciones de la ventana grafica para el análisis de la representación gráfica de una función; es uso de la malla. Esta opción que no se esperaba fuera utilizada en actividades anteriores y no se dio el caso, fue utilizada para determinar los valores de x en que la gráfica tomaba sus valores positivos y negativos.

Así se configura la exploración y el descubrimiento de las características y propiedades de artefacto, dándole valor y configurándose en un instrumento (Rabardel, 1995)

El literal c) solicita el cálculo de los interceptos con el eje x, para lo cual E4 utiliza el comando 'factor' obteniendo una expresión factorizada de la función polinómica y sobre la cual basa su respuesta 'Al factorizar nos dio que: x=0, (x+1)=0 entonces sería en -1, (x+2)=0 entonces sería en -2' de esta forma se relaciona el uso del software con el conocimiento matematico al determinar que, de cada factor igualado a cero, se obtiene un intercepto con el eje *x*.

El punto 2 pide analizar la tendencia de la misma función al cambiar de diferentes formas el coeficiente de la variable 'x' que determina el grado de la función polinómica. En el literal a) se pide graficar de nuevo la función utilizada en el punto 1- realizar el grafico de x^3 -, además de realizarle cambios al coeficiente de la función del punto 1 y graficar todos estos cambios en la misma ventana, el resultado se muestra en la Figura 37 donde se aprecian los cambios en la expresión algebraica, y la Figura 38 donde se muestra la representación gráfica de estos cambios.

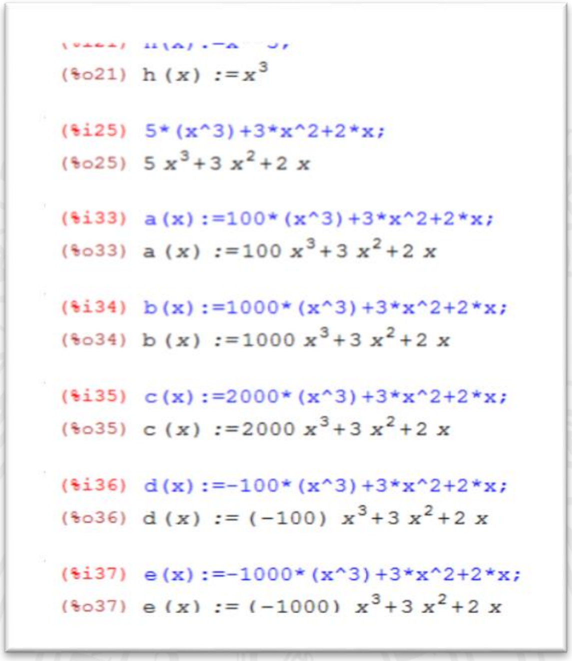


Figura 37 Cambios en la función polinómica – Coeficiente muy grande

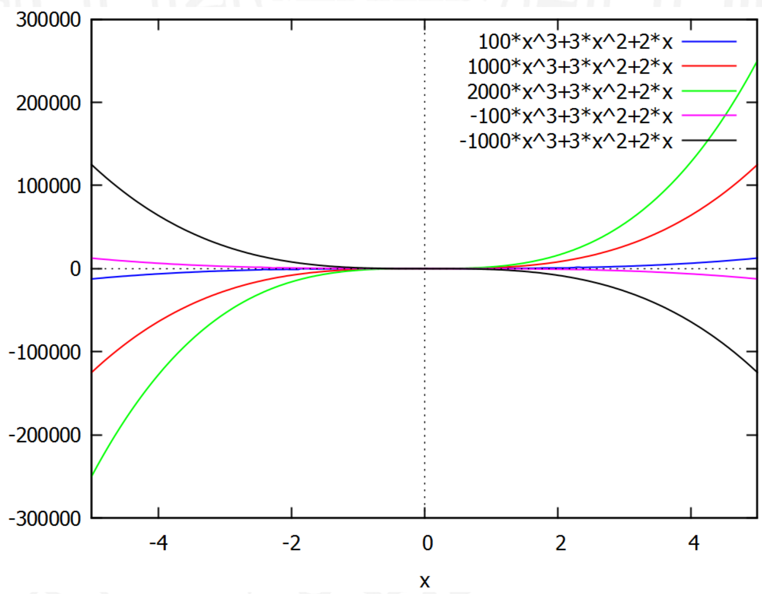


Figura 38 Representación gráfica – Coeficiente muy grande

Podemos observar cómo se utilizan diferentes letras del alfabeto seguidos de paréntesis indicando entre ellos la variable 'x' para definir diferentes funciones. Se vincula nuevamente el conocimiento matemático al relacionar la simbología para representar funciones (Caraca, 1951) y los comandos utilizados en el software para definir una función. Es de resaltar que en los ejemplos explicativos se utilizaron dos funciones (f(x) y g(x)), por lo que el proceso de generalización observado en la Figura 36 para representar más funciones fue obtenido por los estudiantes quienes en totalidad utilizaron esta nomenclatura para representar múltiples funciones con el software.

Igualmente ocurre con la representación gráfica, pues solo se explicó como graficar 2 funciones, así que las acciones para dibujar más funciones en una sola ventana gráfica es una extensión del procedimientos ilustrado por el docente.

El literal b) solicita concluir acerca de los efectos que tiene cambiar el coeficiente de x^3 con coeficientes positivos muy altos, ante lo cual E9 responde ‘Cuando el coeficiente es muy grande la gráfica tiene a ser cero y a parecerse a la gráfica de x**3’.

El literal c) solicita la conclusión si el coeficiente es modificado con un valor negativo muy bajo ante lo cual E9 responde ‘Cuando la gráfica se hace más pequeña es decir, negativa se parece a –x**3’.

Finalmente el literal d) solicita la conclusión del cambio que ocurre a la gráfica si el cambio del coeficiente se da por valores entre 0 y1 y entre 0 y -1, obteniendo como respuesta: ’ ‘Entre 0 y 1 se me va volviendo curva y cuando me acercó a cero se volvió parábola, puesto que 0 me multiplicaba a x**3[16] entonces me daba 0 y lo que me quedaba era el resto de función que era x**2, es decir, una parábola’ ‘. Como respaldo a esta respuesta se ofrece la Figura 39 donde aprecia el cambio de la función polinómica.

[16] La representación con doble asterisco (**) se utiliza para expresar la potencia de un número

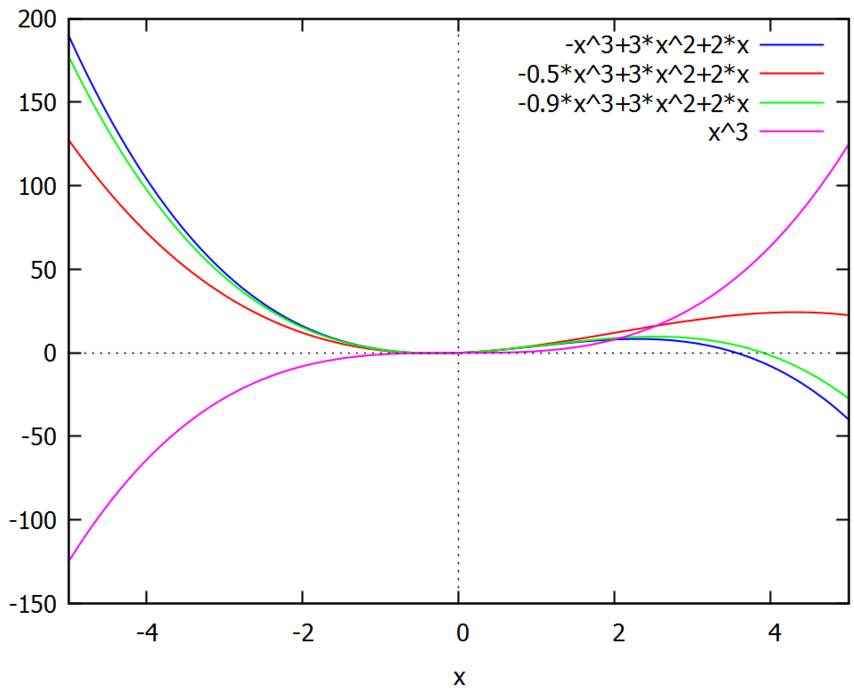


Figura 39 Representación gráfica – Coeficiente entre cero y uno

Para finalizar esta Guía se aprecia que el grupo de estudiantes mostró más autonomía en manejo del software y usó opciones que no habían utilizado en actividades anteriores, se configura así un proceso de instrumentalización.

4.5. Guía 5

Los objetivos de esta tarea son dos, el primero se relaciona con el uso del programa y del computador -utilizarán Geogebra sin instrucciones previas-; y el segundo es graficar la función coseno y compararla con la función seno. Se pregunta ‘en un misma ventana gráfica…realice una comparación entre las dos gráficas y obtenga conclusiones’.

Si bien la pregunta parece amplia, la intención es dar libertad al estudiante para que determine los aspectos a comparar -matemáticos o computacionales- y que escriba sus conclusiones –matemáticas o computacionales-.

La Tabla 19 muestra la GROS de objetos matemáticos presentes en la actividad, y la Tabla 20 muestra nuevos objetos matemáticos y computacionales que surgen por la presencia del ordenador y el software Geogebra en la actividad.

Tabla 18 GROS - Conceptos Matemáticos Guía 5

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Construir la gráfica de función trigonométrica	Representar en el plano cartesiano, la relación que existe entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	
Función Trigonométrica	Expresión algebraica que consta de un nombre y un valor denominado ángulo, para representar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y su ángulo
Cero de un función trigonométrica	Valor que anula al polinomio
Periodo	Valor o intervalo que representa el rango de la función, a partir del cual se repiten los valores tomados por esta.
Angulo	Valor que representa la apertura entre dos semirrectas
Intervalo	Espacio numérico comprendido entre dos valores
Triangulo rectángulo	Figura plana cerrada de 3 lados, que posee un ángulo de 90 grados
Catetos	Lados del triángulo rectángulo que forman 90 grados entre sí
Cateto adyacente	Lado del triángulo rectángulo ubicado entre el ángulo recto y el ángulo de referencia

Cateto opuesto	Lado del triángulo rectángulo ubicado en la parte posterior del triángulo, con respecto al ángulo de referencia
Hipotenusa	Lado del triángulo rectángulo que une los catetos opuestos y adyacente
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Valor de la función seno	Los valores de la función seno(x) están comprendidos en el intervalo [-1,1]
Valor de la función coseno(x)	Los valores de la función coseno(x) están comprendidos en el intervalo [-1,1]
Identidad trigonométrica	Relación algebraica que permite comparar dos Expresiones trigonométricas

Tabla 19 GROS - Conceptos Matemáticos Guía 4

Tipos de Objetos	**Significados** (relación de referencia o de uso)
REPRESENTACIONES (Términos y expresiones matemáticas; símbolos, representaciones gráficas, …)	
Construir la gráfica de función trigonométrica	Representar en el plano cartesiano, la relación que existe entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo
CONCEPTOS (Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición)	

Función Trigonométrica	Expresión algebraica que consta de un nombre y un valor denominado ángulo, para representar la relación entre los lados de un triángulo rectángulo y su ángulo
Cero de un función trigonométrica	Valor que anula al polinomio
Periodo	Valor o intervalo que representa el rango de la función, a partir del cual se repiten los valores tomados por esta.
Angulo	Valor que representa la apertura entre do s semirrectas
Intervalo	Espacio numérico comprendido entre dos valores
Triangulo rectángulo	Figura plana cerrada de 3 lados, que posee un ángulo de 90 grados
Catetos	Lados del triángulo rectángulo que forman 90 grados entre sí
Cateto adyacente	Lado del triángulo rectángulo ubicado entre el ángulo recto y el ángulo de referencia
Cateto opuesto	Lado del triángulo rectángulo ubicado en la parte posterior del triángulo, con respecto al ángulo de referencia
Hipotenusa	Lado del triángulo rectángulo que une los catetos opuestos y adyacente
Circunferencia	Línea curva cerrada cuyos puntos equidistan de otro situado en el mismo plano que se llama centro
Vértice	Punto en el que coinciden los dos lados de un ángulo o de un polígono

Lugar geométrico	Un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas
Deslizador	Opción grafica que sirve para presentar un intervalo de valores variables
Punto	Figura geométrica sin dimensión que describe una posición en el espacio, determinada respecto de un sistema de coordenadas.
Ciclo	Repetición de un fenómeno periódico
PROCEDIMIENTOS (Técnicas, operaciones, algoritmos)	
Graficar	Obtener representación cartesiana de la función polinómica.
Zoom	Cambia la escala de la gráfica para apreciar la presencia de más raíces en la ventana de graficación.
PROPIEDADES (Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba)	
Valor de la función seno	Los valores de la función seno(x) están comprendidos en el intervalo [-1,1]
Valor de la función coseno(x)	Los valores de la función coseno(x) están comprendidos en el intervalo [-1,1]
Identidad trigonométrica	Relación algebraica que permite comparar dos funciones trigonométricas
ARGUMENTOS (Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas)	

La Tabla 21 muestra las características del software Geogebra y los objetos matemáticos que tienen intervención en la G6

Tabla 20 Características y objetos matemáticos examinados en la Guía 5

	Características a observar	
Geogebra	Línea de comandos	X
	Barra de menú	X
	Ingreso de información	X

	Comandos utilizados	X
	Representación gráfica	X
	Construcción de gráfica	X
	Zoom	X
	Definición de variables	X
Función Trigonométrica	Representación Algebraica	X
	Representación gráfica	X
	Ceros	X
	Periodo	X

La Figura 40 muestra la solución de E6, que sobre la gráfica de la función seno intenta dibujar la gráfica de la función coseno. Primero decide cambiar el color para la gráfica coseno "…Cambiamos de color para diferenciar las funciones".

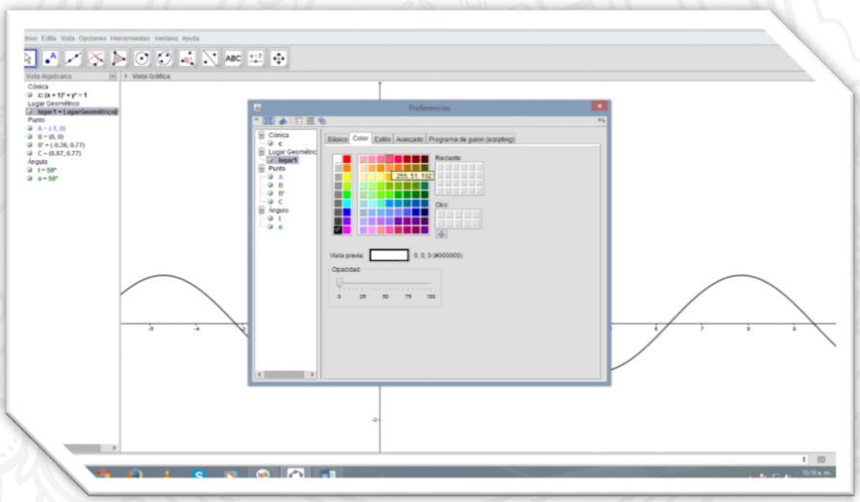


Figura 40 Selección de color para trazado de la curva G5

A continuación afirma 'Luego miramos que en la función seno siempre las coordenadas la Y era igual y si el coseno es en el eje x, entonces es donde nos debe coincidir y buscamos la manera de que nos dé y cambiamos los comandos y donde era (t,y(B')) ponemos X o sea (t,x(B'))…'. El lector puede apreciar que la respuesta de la estudiante es difícil de entender. Sin embargo la explicación de la estudiante hace uso correcto tanto de los comandos de Geogebra como del "discurso matemático" escolar, en tanto que su afirmación "la función seno siempre las coordenadas la Y era igual y el coseno es en el eje X…" refiere a que " la función seno se asocia con el eje y, mientras que el coseno se asocia al eje x" por las definiciones de seno como " lado opuesto, que es y" y la función coseno como "lado adyacente, que es x", discurso este que es usual en el aula de clase.

La estudiante intenta usar los comandos o instrucciones dadas en la primera parte de la Guía, donde se dibujó la función seno, para dibujar la función coseno y afirma: "… y cambiamos los comandos y donde era (t,y(B´)) ponemos x o sea…".

Se aprecia que la estudiante usa simultáneamente sus conocimientos matemáticos junto con los comandos del software, en un intento por responder a la pregunta. La estudiante afirma "…pero obtenemos esto:" haciendo referencia a la Figura 41.

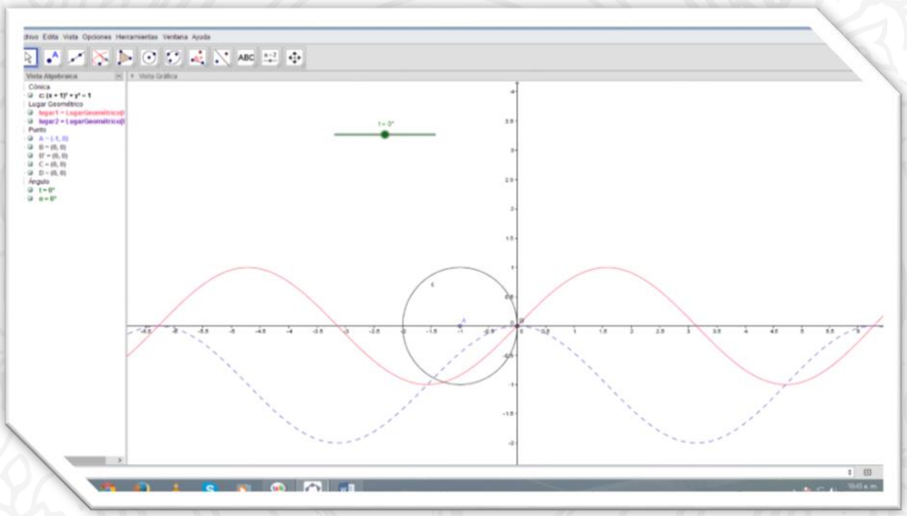


Figura 41 Primera gráfica de la función Seno y Coseno

Se aprecia que su gráfica para la función coseno no es correcta, pues está desplazada hacia abajo. La estudiante se percata de su error y afirma "…y coseno en 0 es 1, y debemos subir la función 1 entonces hacemos (t,x(B´)+1)". La gráfica mostrada por Geogebra se aprecia en la Figura 42.

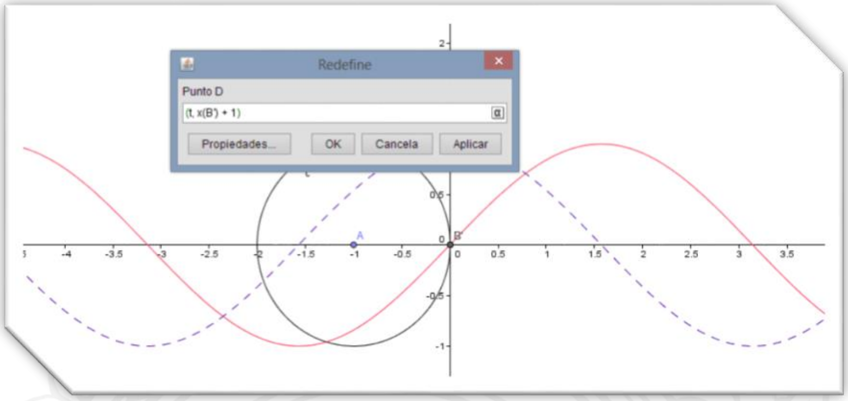


Figura 42 Cambio de parámetro de función en Geogebra

La ventana emergente que se aprecia, es evidencia del desplazamiento buscado de la gráfica. Se aprecia como la estudiante utilizó sus conocimientos previos sobre la función coseno para determinar que la gráfica obtenida no era correcta, y que debía desplazarse para que pasara por el punto (0,1). Ella solo verbaliza este punto notable, pero que finalmente sirve a su propósito. La estudiante usa correctamente el conocimiento matemático sobre la función con los comandos de Geogebra para dar respuesta a la pregunta.

La gráfica resultante después de haber usado el comando 'enter' se aprecia en la Figura 43

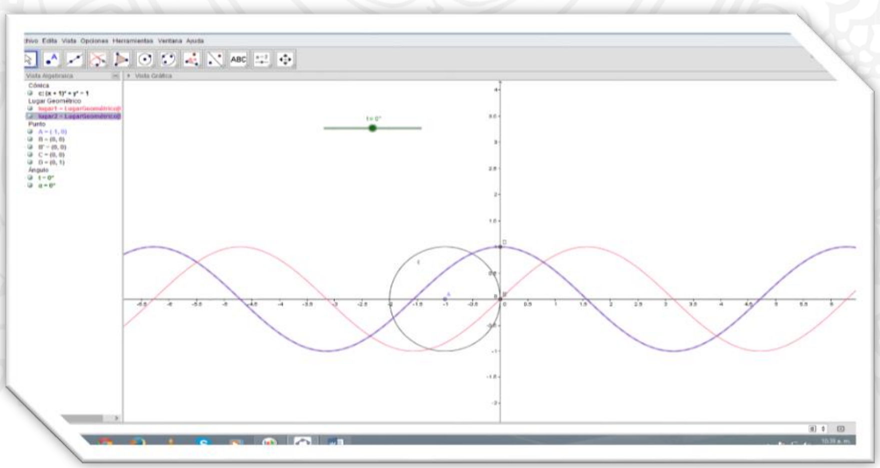


Figura 43 Gráfica conjunta funciones Seno y Coseno

Revisadas todas las conclusiones de los estudiantes, se encuentran las siguientes:

La función sen 0°= 0 y cos 0°= 1

La función coseno es la misma de seno pero desplazada en el eje x 90°

Para obtener la gráfica del seno y el coseno, podemos partir de un mismo círculo de radio 1

Es interesante notar que las conclusiones se dan en torno a las gráficas de las funciones seno y coseno única y exclusivamente. Se reconocen características matemáticas de las mismas pero no hay ninguna conclusión sobre el uso del software: su conveniencia, la facilidad o dificultad de los comandos, la lentitud o rapidez del ordenador, la conveniencia de cambiar color, la conveniencia de ventanas emergentes, etc.

Los estudiantes reconocen y privilegian el contenido matemático sobre la herramienta que están utilizando. Las matemáticas concentran la atención de los estudiantes. El fenómeno de pseudo-transparencia de Artigue(1997) no se reconoce en esta tarea. Los estudiantes parecen ganar experticia en el uso del ordenador para dar cuenta de tareas matemáticas.

4.6. Caso especial

Si bien la propuesta del uso de la TIC se concentró en el uso de Maxima y Geogebra, se informará en este apartado de la experiencia de uso del programa Maxima en un teléfono inteligente, provisto con el sistema Android.

La estudiante descargó, espontáneamente, el programa en su teléfono y lo utilizó para dar respuesta a las preguntas propuestas en la primera Guía. La Figura 44 muestra la apariencia de la aplicación Maxima en el sistema android.

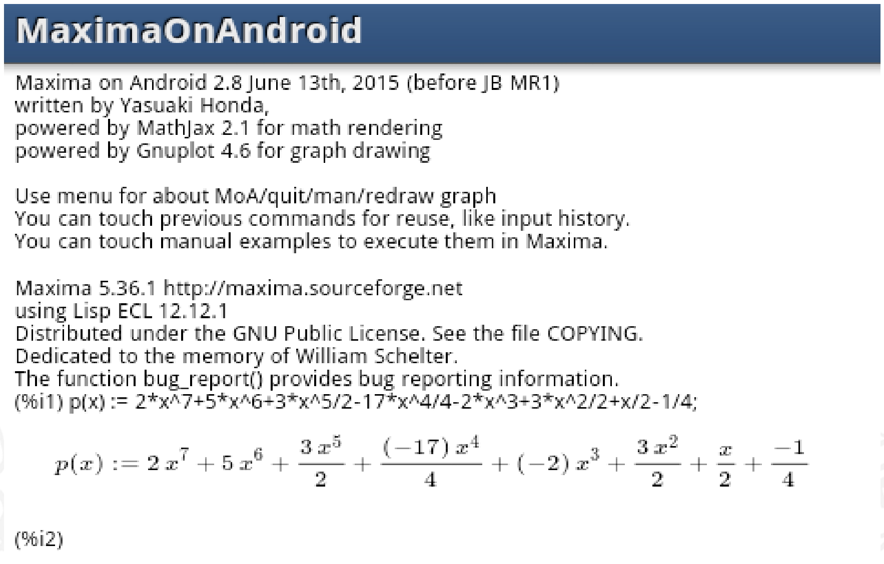


Figura 44 Aplicación Maxima en Android

La estudiante decidió espontáneamente utilizar su teléfono para desarrollar la actividad. La estudiante utilizó los comandos “-solve-” y “-divide-”, pues el programa instalado en el teléfono no permite dibujar.

La principal dificultad con el uso del teléfono celular es el engorroso proceso para escribir las ecuaciones, en tanto que los símbolos para operar están en “-tercer nivel-” con lo cual la escritura de las expresiones es lenta. La apariencia gráfica para ingresar los comandos se observa en la Figura 45.

Las cuestiones matemáticas pudieron sin embargo ser resueltas con el teléfono celular. La estudiante fue interrogada sobre la conveniencia del uso del programa instalado en el teléfono celular, ante lo cual afirmó: ‘es muy útil porque se puede tener en cualquier momento, pero es muy difícil ingresar los comandos’.

Se le indagó sobre la comodidad de uso entre el teléfono y el ordenador, ante lo cual respondió: ‘prefiero el ordenador, pues es más fácil digitar y escribir, además me permite hacer los dibujos’.

Se le preguntó si usaría el teléfono celular durante una prueba escrita, ante lo cual dijo:

'claro, el computador no me lo dejan sacar para un examen y además el celular puede ayudarme a comprobar los resultados'.

Los dos programas no fueron utilizados en situación de examen debido a dos razones: la primera es la falta de tiempo en el curso, la segunda es la falta de equipos para aplicar la prueba simultáneamente a todos los estudiantes. Sin embargo se planea en una versión posterior de la experiencia, favorecer el uso de los dos software durante los exámenes parciales regulares.

Por tal motivo tan solo implantamos una guía con Geogebra, a pesar que se había planeado implantar tres.

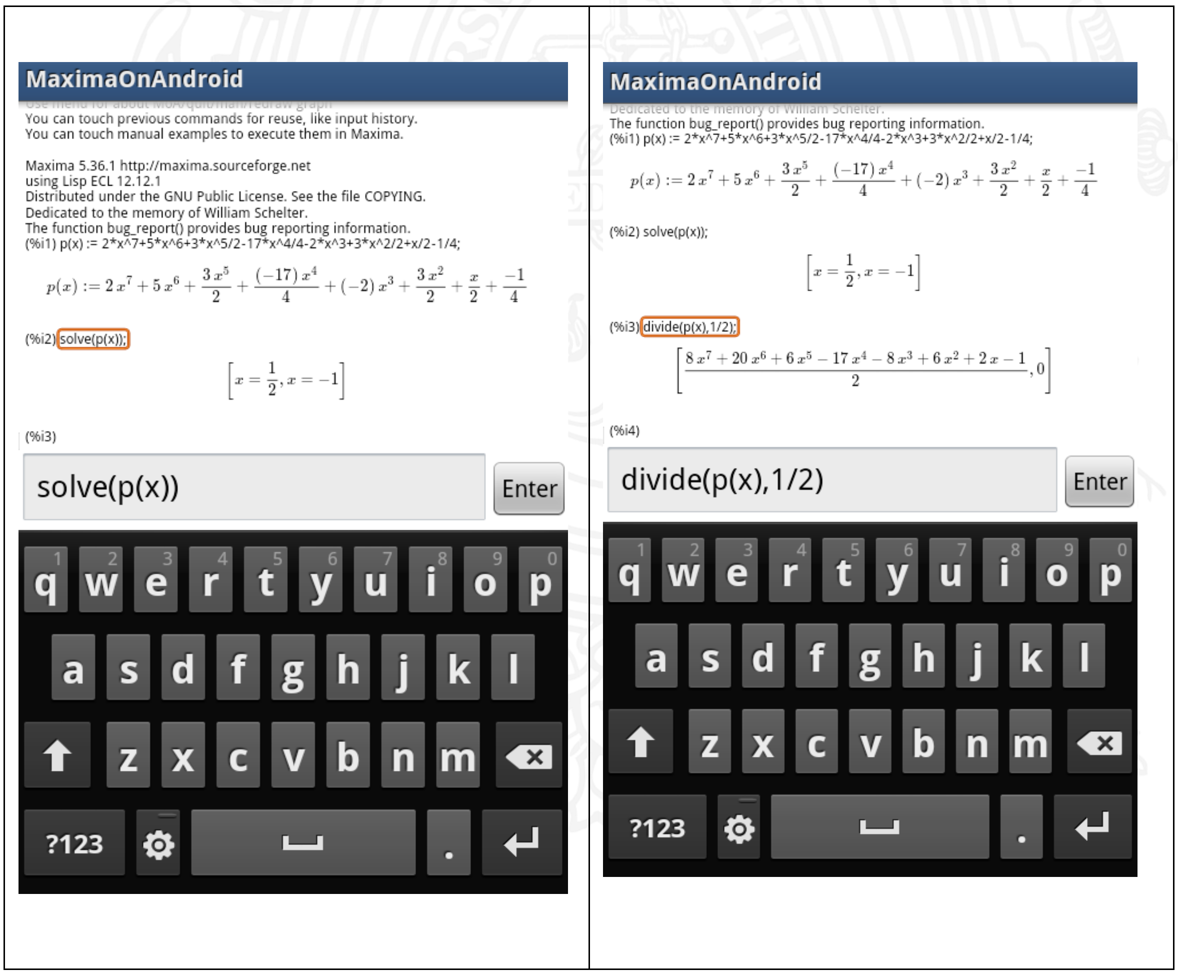


Figura 45 Comandos solve y divide

CAPITULO 5 – CONCLUSIONES

Esta investigación indagó sobre ¿Cómo integran las TIC, en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas Operativas, los estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia Seccional Suroeste? Esta integración se estudió en condiciones naturales de aula de clase, sin modificar ni el syllabus ni la asignación temporal a cada tema de estudio. El marco teórico de referencia se construyó a partir de la teoría de la génesis instrumental, específicamente de la Instrumentación, y de elementos del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y de la Instrucción matemática. La población estudiantil con la cual se trabajó fueron aquellos estudiantes matriculados en el curso de Matemática Operativa. El enfoque investigativo corresponde a la investigación cualitativa.

Se prestó especial atención a reconocer la 'Instrumentación' que los estudiantes manifestaron para responder a la pregunta de investigación. Se encontró, que si bien los estudiantes transitaron por los diferentes pasos del proceso propuesto por Rabardel (1995) iniciando en el artefacto, proponiendo esquemas de uso, descubriendo las potencialidades y las restricciones, para llegar a la configuración de un 'Instrumento', los estudiantes pusieron en acto el dispositivo social que se ha denominado 'Cooperación'.

Aunque las actividades fueron propuestas para un desarrollo individual, no se restringió la comunicación entre compañeros en el aula de clase durante la discusión de las Guías. Esto dio origen al componente que se denominó 'Cooperación', originado en su mayoría por las dificultades que se tenían para utilizar los comandos del software o por errores que no se comprendían en la información mostrada por este. La actuaciones de los estudiantes para buscar una solución se orientaban a determinar entre sus compañeros, quien hubiese resuelto el problema, con el propósito de imitar los pasos seguidos o buscar entre estos pasos, el error en el procedimiento iniciado.

Como resultado de la investigación, se ha reconfigurado los elementos que conforman la construcción de un 'instrumento' a partir de un 'artefacto' en el contexto de la Génesis Instrumental. Tal modificación se muestra en la Figura 2.

Los objetivos que se propusieron en el proyecto de investigación se lograron, en tanto que ellos rezan:

- Introducir las TIC a partir de actuaciones del docente en torno a instrumentalización, instrumentación y génesis instrumental específicas con base en los recursos de representación que ofrecen (Gráfica, Algebraica, y Tabular).

- Analizar las maneras de expresión actuativa de la instrumentación en el curso de matemáticas operativas, por parte de los estudiantes de primer semestre de la Universidad de Antioquia, Seccional Suroeste.

Para el primer objetivo, el docente realizó una exploración sobre los software propuestos (Maxima y Geogebra), para descubrir las potencialidades que cada uno tiene para los contenidos del curso de matemáticas operativas. Máxima presenta un potencial para el trabajo algebraico (cálculos, raíces de polinomios, factorización…). Con base en estas se propusieron actividades para utilizar el software para algunos temas específicos del curso como la función polinómica. Sin embargo este software también brinda la opción de graficar teniendo poca interacción con el usuario, pues los comandos para el trabajo con gráficas son pocos. Por ello las actividades propuestas requerían de una relación entre la representación gráfica y la representación algebraica.

Por otra parte las ventajas de Geogebra radican en la representación gráfica, por ello se propuso una actividad para trabajar la funciones trigonométricas, ya que permiten observar más claramente los proceso que da origen a estas funciones como relación al cambio de los catetos de un triángulo rectángulo circunscrito, en relación con su ángulo

La génesis instrumental se inicia externamente, por parte del profesor, con la exploración de los software (artefactos) y como se configura el proceso de instrumentalización al determinar la potencialidades de cada software y establecer esquemas de uso (Guías) para que sean desarrolladas por estudiantes.

Para el segundo objetivo se diseñaron instrumentos como la Tabla 4 donde se especifican, en cada Guía, los aspectos del software y los conceptos matemáticos, que se requieren para resolver la tarea y que ayudan a concentrar la atención del investigador, además de utilizar la Guías de Reconocimiento de Objetos y Significados matemáticos (GROS) para identificar los conceptos que intervinieron en el desarrollo de cada Guía, así como una identificación de de los objetos matemáticos o computacionales que surgían por la presencia del ordenador y del software en el desarrollo de cada actividad. Estos instrumentos permitieron analizar las actuaciones de los estudiantes e identificar los avances y las limitaciones que presentaba cada software.

La instrumentación se manifestó por los estudiantes, en tanto que estos, presentaron diferentes conductas para desarrollar las Guías y para comprender los comandos del software, configurándose en esquemas de acción instrumentada en la que exploraron los software para obtener nuevos comandos y nuevas formas de desarrollar un mismo procedimiento o para comprobar alguna respuesta previamente obtenida de forma manual. Además de identificar algunas limitaciones que los software o el dispositivo electrónico presentaban, como el caso descrito la sección 4.2 correspondiente a la guía 2, cuando el estudiante E1 se enfrentó a la limitación del software wxMaxima al realizar zoom reiteradamente, o el caso especial descrito en la sección 4.6 cuando la estudiante utilizo un Smartphone para el desarrollo de la guía, identificando restricción de tipo físico para ingreso de comandos. Finalmente en análisis de las actuaciones de los estudiantes si identifico un nuevo aspecto en el proceso de la instrumentación y que se ha denominado como ‘Cooperación’

Inicialmente, las actividades diseñadas con el propósito de dar respuesta a la pregunta de investigación, se plantearon para un desarrollo individual y para explorar cómo cada estudiante, con sus condiciones y conocimientos previos refería a cada una de las cuestiones establecidas; sin embargo, el hecho de ser una actividad que implica para muchos motivación, y para otros un reto, en razón a su desconocimiento operativo de los artefactos dispuestos o por tener dificultades con el manejo del ordenador, los estudiantes recurrieron a compartir u obtener información de sus compañeros, con el propósito de solucionar sus problemas o imitar los casos de éxito.

Este aspecto se configura en la actuación didáctica que en un proceso de génesis instrumental, le permite al docente realizar modificaciones o incluir nuevas actividades que promuevan el normal desarrollo de las guías y que facilite el surgimiento de los esquemas de uso por parte de los estudiantes, sobre los artefactos dispuestos.

También se debe resaltar que la repetición de acciones, conlleva a que los estudiantes exploren nuevos métodos de solución para una misma cuestión. Se entiende la 'repetición de acciones' en el sentido que se solicita al estudiante desarrollar una misma tarea en situaciones diferentes, y como tal la repetición pone en juego no solo la misma acción, sino la acción que se repite en un contexto diferente y para responder a preguntas diferentes.

Para el caso de la búsqueda de las raíces de un polinomio; este requerimiento estuvo presente en varias de las guías diseñadas y se puede apreciar que los estudiantes utilizaron diferentes métodos para obtener una solución: representar gráficamente la función, buscar los interceptos con eje de las x para determinar las raíces de la función. Además los estudiantes utilizaron comandos como "-factor-" para factorizar la función, lo cual favorece una rápida inspección de las raíces o el uso de la función "-solve-" que calcula las raíces de la función deseada.

Estas actuaciones dan cuenta de la instrumentación que los estudiantes logran de la herramienta en referencia con las cuestiones matemáticas, pues además de utilizar el artefacto para encontrar soluciones, también lo usaron para validar sus respuestas, lo que muestra confianza en los resultados computacionales que los estudiantes depositan en el software. Utilizan el software con un propósito ya reconocido en los nombres de los comandos 'solve','factor', 'plot2d', 'divide', en ese sentido 'repiten' el uso de un recurso.

La génesis instrumental se inicia con un sujeto (docente) quien analizó el software y descubrió potencialidades para estudiar los objetos matemáticos y para el subsecuente diseño de tareas matemáticas que permitieran el uso artefactual, con arreglo a objetivos instruccionales matemáticos. El docente hizo corresponder cualidades de objetos matemáticos, emergentes durante la solución de tareas, con potencialidades del recurso tecnológico disponible. La correspondencia propuesta se enmarca tanto en restricciones curriculares como culturales, en tanto que las actividades propuestas debían estar enmarcada con el contenido temático definido para el curso, además de inducir a los estudiantes una nueva forma de observar diferentes objetos matemáticos sin usar los procedimientos algorítmicos a los que se ha estado acostumbrado. Tal correspondencia no agota todas las posibilidades de vinculación.

En reacción a la propuesta del docente los estudiantes ponen en acto los recursos del artefacto, las actividades de instrumentalización propuestas por el docente y descubre opciones y comandos que ni se habían propuesto por el docente ni se habían experimentado por el estudiante, dando pruebas de un proceso de instrumentación tanto sobre el artefacto como sobre el conocimiento matemático. Aquí se percibe una imbricación entre el artefacto y sus características y los objetos matemáticos, que ameritaría una ulterior indagación.

Todas las actividades estuvieron guiadas por los conocimientos matemáticos, que fueron puestos en cuestión por las tareas y por la actividad matemática generada por ellas.

Estas actividades permitieron la vinculación del conocimiento previo, con nuevo conocimiento, y un uso crítico del software por parte de los estudiantes. Este uso crítico y con arreglo a fines, ofrece evidencia que se da un proceso de Génesis instrumental como se describe el la Figura 2.

El uso de la Guía de reflexión de objetos y significados, tanto matemáticos como computacionales, fue importante en este trabajo dado que favoreció tanto la identificación de objetos matemáticos como de recursos tecnológicos y de sus eventuales correspondencias, lo que ayudo al diseño de las Guías propuestas a los estudiantes para el estudio de los dos temas- función polinómica y funciones trigonométricas- que se estudiaron en el marco de esta investigación.

Esta relación entre objetos y recursos, su identificación inicial ayudo a diseñar preguntas y a reconocer posibles conflictos de significado emergentes durante las practicas.

CONSIDERACIONES FINALES

Con esta investigación se ha abierto la posibilidad de estudiar otras cuestiones entorno a la génesis instrumental en el aprendizaje de los estudiantes, y que pueden tener como base de comparación los resultados de esta investigación, cuestiones como:

¿Cómo se da el proceso de génesis instrumental en un ambiente de desarrollo individual?. Es de notar que las actividades planteadas en la investigación eran de carácter individual, pero no se restringió la comunicación con los compañeros de estudio para obtener una respuesta, por ello es importante conocer que acciones realizara un estudiante si él solo, debe enfrentarse a las restricciones identificadas en el uso del software.

¿Cómo se da el proceso de instrumentación, si el docente no es el investigador?. Aunque el proceso de génesis instrumental estuvo enfocado solo en el aprendizaje, el doble papel docente-investigador pone al docente en diferentes situaciones donde debe atender dudas conceptuales sin influir en el propósito de la investigación, esto puede generar la idea de sesgos en los resultados. Por ello es de interés realizar una investigación similar, donde el docente no sea a la vez el investigador.

¿Qué impacto tuvo el uso de las TIC en los estudiantes que participaron de la investigación?. Si bien es una pregunta que debe resolverse a largo plazo, es importante conocer cómo afecta en cursos más avanzados, el rendimiento de los estudiantes que participaron de la investigación, así como conocer si continuaron usando los software y con qué propósito lo hacen.

Cabe resaltar que como investigador me hubiera gustado realizar más actividades con las funciones trigonométricas, pero debido al calendario académico establecido para la Seccional Suroeste y el tiempo destinado para el curso de Matemáticas Operativas, no fue posible destinar más tiempo para este tema, ya que debía cubrirse todo el contenido establecido en el currículo.

Es de mi agrado y mi propósito, continuar investigando sobre estas cuestiones, y ampliar y dar a conocer los resultados que de estos trabajos resulten, al igual que continuar con el trabajo de investigador, dirigiendo trabajos de estudiantes de pregrado o codirigiendo una tesis de maestría.

Finalmente es de resaltar que con motivo de la presente investigación, se presentó una ponencia en la modalidad de comunicación corta en el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME) que tuvo lugar en la ciudad de Bogotá en octubre de 2015, como resultado de ello el resumen de la comunicación será publicada en las actas del ECME 16. Igualmente se trabaja en el escrito de una comunicación corta para enviar a Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME) que en 2016 se realizara en la ciudad de Monterrey (México). Además de la escritura de un artículo que lleva por nombre –Maxima y la función polinómica: Génesis Instrumental en el proceso de aprendizaje– .

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Almazan, C. (2009). Elementos para la resignificación de la serie de Taylor a través de tecnología. *Universidad Autónoma de Yucatán*. Retrieved from http://www.matematicas.uady.mx/dme/docs/tesis/Tesis_CynthiaAlmazan.pdf

Apostol, T. (1973). *Cálculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra líneal. Segunda edición*. (Reverte, Ed.) (Segunda ed). Barcelona.

Artigue, M. (1997). Le logiciel DERIVE comme révélateur de phénomènes didactiques liés à l'utilisation d'environnements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33/2, 133-169.*

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: the genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematics Learning*, *7*, 245–274.

Badia, A. (2006). Ayuda al aprendizaje con tecnología en la educación superior. *Revista de Universidad Y Sociedad Del Conocimiento*, *3*, 5–19. Retrieved from http://www.uoc.edu/rusc/3/2/dt/esp/badia.pdf

Barrera, F., & Santos, M. (2001). Students' use and understanding of different mathematicalrepresentations oftasksin problemsolving instruction. Proceedings of the Twenty Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. *ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education., Vol. 1*, 459–466.

Bautista, A., & Alba, C. (1997). ¿Qué es Tecnología Educativa?: Autores y significados? *Revista Pixel-Bit*.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and aplications in mathematics education. The 14th ICMI Study*.

Briseño, E. (2008). El uso de las gráficas desde una perspectiva instrumental. Un estudio socio-epistemológico. *Tesis de Maestría No Publicada*. Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN, Unidad Distrito Federal.

Brouwer, P. (n.d.). Hold on a minute here: What happened to critical thinkiing in the information age? *Journal of Educational Technology Systems*, 189 – 197.

Cabero, J. (1998). Impacto de las nuevas tecnologías de la información y la comunicación en las organizaciones educativas. Granada: Comunicar.

Caraca, B. (1951). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa.

Castro, W. (2002). Una experiencia docente en el uso ilustrativo de la calculadora durante un curso de cálculo. Revista EMA Vol. 7.

Confrey, J., & Maloney, A. (2007). A theory of mathematical modelling in technological settings. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study. New York: Springer.

Cotret, R. (1985). Etude historique de la notion de fonction: Analyse epistemologique et experimentation didactique, Memoire de Maitrise en Mathematiques. Montreal: Universite du Québec.

Descartes, R. (1637). *The Geometry*. New York: Dover Publications, Inc. Retrieved from https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=MB7F32p0y5MC&oi=fnd&pg=PA2&dq=the+geometry+descartes&ots=lU-zEX2VYO&sig=vdFa7OKOdcgB40a20H6THZPeeg8&redir_esc=y#v=onepage&q=the geometry descartes&f=false

Drijvers, P., Kieran, C., & Mariotti, M. A. (2010). Integrating technology into mathematics education: Theoretical Perspectives. En C. Hoyles y J-B. Lagrange (Eds.), Mathematics education and technology-Rethinkingtheterrain. *The 17thICMI Study*. New York: Springer.

Educar, C. P. (2014). Computadores para Educar. Retrieved June 3, 2014, from Computadores para Educar

Flores, I., Gozalez, G., & Rodriguez, I. (2013). Estrategias de enseñanza para abatir la apatía del alumno de secundaria. *Revista Iberoamericana Para La Investigación Y El Desarrollo Educativo*.

Fowler, D., & Robson, E. (1998). *Historia Mathematica*.

Godino, Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *He International Journal on Mathematics Education, Vol. 39*, 127–135.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 13–31. Retrieved from http://bit.ly/1itFvD3

Godino, Rivas, M., Castro, W., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICME 11*. Morelia: ICME.

Harel, I., & Papert, S. (1991). Situating constructionism. In Constructionism. Norwood: NJ: Ablex Publishing Corporation.

Hoyles, C. (1993). Microworlds/schoolworlds: the transformation of an innovation. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.) Learning from computers: mathematics education and technology. New York: Springer-Verlag.

Hoyrup, J. (1994). In measure, Number, and weight. Albany: State University of New York Press.

Jolly, E., Campbell, P., & Perlman, L. (2004). Engagement, capacity, and continuity: A trilogy for student success. Minneapolis: MN: GE Foundation.

Kilpatrick, J. (1992). *A History of Research in Mathematics Education*. (H. of R. on M. T. And & Learning, Eds.). New York.

Kline, M. (1992). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días* (Ed. Cast). Madrid. Retrieved from http://es.scribd.com/doc/147071130/Morris-Kline-El-pensamiento-matematico-de-la-antiguedad-a-nuestros-dias#scribd

Lajoie, S. P. (1993). *Computer Environments as Cognitive Tools for Enhancing Learning*. NJ:Lawerence Erlbaum Associates, INC. Retrieved from https://books.google.com.co/books?hl=es&lr=&id=xGeasuCsN2MC&oi=fnd&pg=PA261&dq=lajoie,+1993+computer+environment&ots=O4isA2pyPO&sig=qMupaVY492YLrqJTr6fVDgG6wmk#v=onepage&q&f=false

León, O. G., & Montero, I. (2003). Métodos de investigación en Psicología y Educación. Madrid: McGraw-Hill.

Macias Ferrer, D. (2007). Las nuevas tecnologías y el aprendizaje de las matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*, *4*, 1–17. Retrieved from http://www.rieoei.org/deloslectores/1517Macias.pdf

Malone, T. W., & Lepper, M. R. (1987). Making learning fun: A taxonomy of intrinsic motivations for learning. *Aptitude Learning and Instruction*. New Jersey. http://doi.org/10.1016/S0037-6337(09)70509-1

Marqués, P. (2001). Algunas notas sobre el impacto de las TIC en la universidad. *Educar*, *28*, 83–98. Retrieved from http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn28p83.pdf

Maykut, P., & Morehouse, R. (1994). Beginning qualitative research-A philosophic and practical guide. London: Falmer Press.

Mead, G. (1934). Espíritu, Persona y Sociedad desde el punto de vista del conductismo social. Buenos Aires.

Meléndez, R. (2008). Estudio sobre deserción y permanencia académica en la facultad de ingeniería de la Universidad de la Guajira. Riohacha. Retrieved from http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-323174_recurso_1.pdf.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. *Cooperativa Editorial Magisterio*, 103.

MEN. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. *Estándares Básicos de Competencias En Lneguaje, Matemáticas, Ciencias Y Cuidadanas*, 46–95.

MINEDUCACIÓN. (2015). *Estrategias para la Permanencia en Educación Superior : Experiencias Significativas*. (r S. O. & C. Ltda, Ed.). Bogotá. Retrieved from http://www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-350844_pdf.pdf

MinTic. (2014). Ministerio de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones. Retrieved June 3, 2014, from http://www.mintic.gov.co/portal/604/w3-propertyvalue-540.html

Montes, C., & Zambrano, H. (2013). El impacto de las tecnologías de la información y la comunicación (tic) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Retrieved from http://ece.edu.mx/ecedigital/files/Articulo Flor.pdf

Moreno, M. (2012). Conocimiento y Uso de las TIC desde la perspectiva de los estudiantes de la Universidad de Sonora. México: Universidad de Sonora.

NCTM. (2001). National Council of Teachers of Mathematics.

Ospina, C. (2010). Las tics como herramienta de motivación en el aula. Cundinamarca. Retrieved from http://intellectum.unisabana.edu.co/bitstream/handle/10818/5358/129394.pdf?sequence=1

Pérez, C. R. (2014). ENFOQUES TEÓRICOS EN INVESTIGACIÓN PARA LA INTEGRACIÓN DE LA TECNOLOGÍA DIGITAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. *Australian Senior Mathematics Journal*, *19*(1), 8–15. http://doi.org/10.4151/07189729-Vol.53-Iss.2-Art.200

Pizarro, R. a. (2009). *Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas . Aplicación al caso de Métodos Numéricos*. Universidad Nacional de La Plata. Retrieved from http://postgrado.info.unlp.edu.ar/Carreras/Magisters/Tecnologia_Informatica_Aplicada_en_Educacion/Tesis/Pizarro.pdf

Quiroz, S. (2010). Deserción escolar en Colombia: la muerte de nuestra sociedad. Retrieved from http://intergumentacion.blogspot.com.co/2010/11/desercion-escolar-en-colombia-la-muerte.html

Rabardel, P. (1995). Les hommes et les technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Collins.

Roschelle, J., Pea, R., Hoadley, C., Gordin, D., & Means, B. (2000). Changinghow and what children learn in school with computer-based technologies. TheFuture of Children. vol. , No. 2.

Ruiz Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de*

Función: Análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Granada, España.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. (U. de Jaén, Ed.) (Ilustrada). España.

Sajka, M. (2003). A Secondary school students' undertanding of the concept of function-a case study. Educational studies in mathematics.

Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy. Washington: The Mathematical Association of America.

Simpson, G., Hoyles, C., & Noss, R. (2005). Designing a programming-based approach for modelling scientific phenomena. Journal of Computer Assisted Learning, 21, 143–158.

Socas, M., & Camacho, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas Reflexiones. *Boletín de La Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 151–171.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 9(3),* 281–307.

Vérillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: a contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*.

Wood, L. N., & Perrett, G. (1997). Advanced Mathematical Discourse. Sydney.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Arch. Hist. Exact Sci. 16.