Movilización de Prácticas Matemáticas de estudiantes de educación media, a partir de un ambiente de aprendizaje con números racionales

Mobilization of high school students' mathematical practices from a learning environment with rational numers

Recibido el 16 de agosto de 2020, aceptado el 25 de septiembre de 2020

Mónica Marcela Parra-Zapata[*]
Julián Darío Ramírez Castro[†]
Manuela Restrepo-Puerta[‡]
Santiago Cardona Arenas[§]

Resumen

En este artículo se presentan algunos de los resultados del análisis realizado a nuestro trabajo de investigación, en el marco de las prácticas pedagógicas de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. En la investigación se diseñó un *ambiente de aprendizaje* en función del encuentro de los estudiantes (de educación media) con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los números racionales. En este sentido, se analizan las acciones que movilizan las prácticas matemáticas, emergentes de la

[*] Magíster en Educación por la Universidad de Antioquia. Docente de cátedra en la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia.
http://orcid.org/0000-0002-8844-0013 monica.parra@udea.edu.co
[†] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia. http://orcid.org/0000-0001-6956-8321 jdario.ramirez@udea.edu.co
[‡] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia. http://orcid.org/0000-0002-5343-2494 manuela.restrepop@udea.edu.co
[§] Estudiante de Licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Antioquia, Medellín, Antioquia, Colombia. http://orcid.org/0000-0002-6265-6449 santiago.cardona@udea.edu.co

actividad matemática de los estudiantes, a partir de la interacción y el uso de instrumentos y procedimientos matemáticos. Los resultados ofrecen una comprensión del aprendizaje como transformación de prácticas a partir del encuentro individuo-sociedad.

Palabras clave: actividad matemática, prácticas matemáticas, interacción, instrumentos y procedimientos, números racionales.

Abstract

In this paper, we present some of the results of the analysis carried out in our research paper, within the framework of the pedagogical practices of the Degree in Mathematics and Physics of the Faculty of Education of the University of Antioquia. In the investigation, we designed a Learning Environment, based on the encounter of students (of high school) with culturally codified ways of thinking mathematically about Rational numbers. We analyze the actions that mobilize mathematical practices, emerging from the Mathematical Activity of students, based on the interaction and use of mathematical instruments and procedures. The results offer an understanding of learning as a transformation of practices from the individual-society encounter.

Keywords: mathematical activity, mathematical practices, interaction, instruments and procedures, rational numbers.

Introducción

Durante el año 2018 se realizó nuestra práctica pedagógica de la Licenciatura en Matemáticas y Física de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, en el marco del Proyecto PROFE[1]. Este proyecto nos planteó grandes retos a nivel personal y formativo, pues nos permitió acercarnos al ejercicio docente en diferentes lugares de nuestra región, a la vez que fue el espacio donde iniciamos nuestro trabajo de investigación. Allí se analizan nuestras propias sesiones de clase y, a partir de esto, se indaga por problemáticas pertinentes para la educación matemática.

El trabajo fue realizado en el primer semestre del año 2018, con los estudiantes de diferentes instituciones educativas públicas en los municipios de San Luis y Girardota del departamento de Antioquia, Colombia. Éste condujo a repensarnos la manera cómo se enseña y se aprende matemáticas, a la vez que produjo un acercamiento a perspectivas teóricas en educación matemática donde las acciones de

[1] PROFE: Programa de Fortalecimiento Educativo, para el mejoramiento de la calidad educativa en instituciones públicas de Antioquia, Colombia. Convenio Universidad de Antioquia y Fundación Argos (entidad privada sin ánimo de lucro).

los estudiantes y los contextos sociales e históricos son importantes para la construcción de conocimiento. Se entiende que, a partir de estas perspectivas teóricas en este proceso, los estudiantes no deben ser solo receptores, sino que debe ser la reflexión de sus prácticas y la interacción con otros y con el medio lo que permite que se generen significados colectivos a partir de lo que la cultura pone a su disposición, es decir, que se debe colocar en movimiento su *actividad matemática*[2]. En este sentido, en el segundo semestre del año se desarrolló un *ambiente de aprendizaje*[3] que posibilitó la movilización de las prácticas matemáticas[4] de los estudiantes, en el encuentro con los números racionales[5].

Así pues, este artículo es el producto de ese trabajo de investigación y presenta reflexiones a partir de tres categorías de análisis en el marco de las prácticas matemáticas, las cuales son: acciones movilizadoras de las prácticas matemáticas, interacción e instrumentos y procedimientos. Para dar cuenta de los análisis, los alcances y desafíos generados en el *ambiente de aprendizaje,* se presenta en este artículo en cuatro apartados. En el primero, abordamos los referentes teóricos que nos permiten hablar de *actividad matemática*, prácticas matemáticas y números racionales. En el segundo, hacemos una presentación general del *ambiente de aprendizaje*. En el tercero, presentamos reflexiones acerca del desarrollo del *ambiente de aprendizaje* con los estudiantes bajo las tres categorías mencionadas anteriormente. Por último, se exponen unas consideraciones finales en torno a los análisis, se hacen las últimas reflexiones y se deja el camino abierto a nuevas investigaciones.

Actividad matemática, prácticas matemáticas y números racionales

Desde fines del siglo pasado viene posicionándose una alternativa a la manera individualista generalizada de entender el proceso de aprendizaje de las matemáticas, a saber: la perspectiva histórico-cultural o socio-cultural de la educación matemática, la cual consiste en el esfuerzo de diferentes investigadores por rescatar los aportes de la psicología histórico-cultural de Lev Vygotsky (junto a los intelectuales soviéticos de principios del siglo XX) y actualizarlos y adaptarlos al entendimiento del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas[6]. Esta perspectiva se preocupa por entender la educación matemática como un fenómeno social, cultural e histórico, donde el

---

[2] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática", *Revista Científica* Vol. 3: n° 20 (2014): 72-90.
[3] Mónica Marcela Parra-Zapata, "Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática" (tesis de maestría en Educación, Universidad de Antioquia, 2015).
[4] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación".
[5] Gilberto Obando Zapata *et al., Pensamiento numérico y sistemas numéricos,* módulo I (Medellín: Universidad de Antioquia / Secretaría de Educación, Gobernación de Antioquia, 2006).
[6] Luis Radford, "De la teoría de la objetivación", *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* Vol. 7: n° 2 (2014): 132-150.

conocimiento matemático es el resultado de la acción humana en un contexto de prácticas particulares con ciertas delimitaciones institucionales de acuerdo con una comunidad académica específica. Se trata, en otras palabras, de la búsqueda de una comprensión del desarrollo humano como una relación permanente entre las acciones del individuo y el entorno social e histórico en el que se sitúa.

En el marco de esta perspectiva, encontramos los aportes de Obando, Arboleda y Vasco[7] para una teoría de la *actividad matemática* como un insumo de investigación importante para nuestro trabajo. La "actividad", entendida a partir de la perspectiva Vygotskiana, es un conjunto de acciones socialmente dirigidas con el objetivo de alcanzar un fin (objeto/motivo), pero además como un proceso colectivo en el cual la *interacción* y la reflexión son fundamentales para la transformación de las prácticas matemáticas y el posicionamiento frente a un sistema de prácticas institucionalizado, histórico y cultural.

En la Figura1 representamos el devenir de la *actividad matemática*; allí, se resalta que es, precisamente, el encuentro individuo/sociedad a través de las prácticas matemáticas, orientado por un objeto/motivo, lo que abre el camino al aprendizaje, pues, "partiendo de la idea de que lo que se aprende existe de algún modo ya en la cultura (por ejemplo, el concepto de número o el concepto de función o el de figura), lo que había que hacer quizás era plantear el aprendizaje como un *encuentro*, y no como algo que me apropio y al apropiármelo lo hago mío. Queríamos salir de la lógica de la posesión y del propietario privado de las aproximaciones individualistas"[8]. Así, el estudiante abandona el papel de receptor solo para sí mismo, reflexiona acerca de sus prácticas e interactúa con otros para generar nuevos conocimientos en los marcos institucionales.

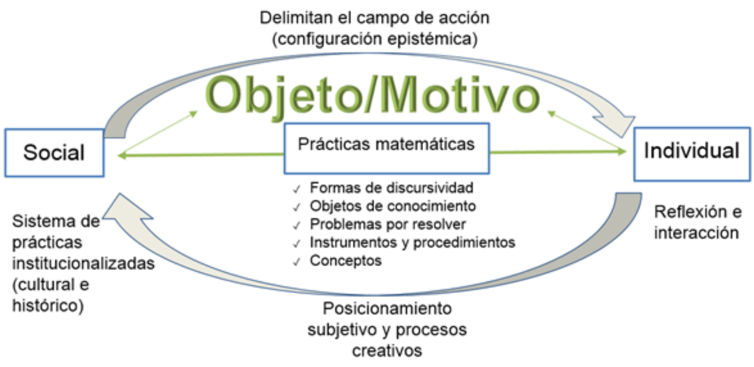


Figura 1. Actividad Matemática[9]

---

[7] Gilberto Obando Zapata *et al.*, "Filosofía, matemáticas y educación".
[8] Luis Radford, "Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación", *PNA* Vol. 12: n° 2 (2018): 66.
[9] Elaboración propia, 2018.

Las prácticas matemáticas son caracterizadas por unas formas de discursividad (lenguaje), unos instrumentos y procedimientos y unos problemas por resolver donde se refleja una relación entre objetos y conceptos matemáticos, además, todo esto en el marco de una configuración epistémica que "permite la toma de decisiones sobre el hacer (cosmovisiones, valoraciones sobre las matemáticas, fines de las matemáticas, posturas filosófica y ontológica)"[10]. Estas características permiten mostrar no solo la manera cómo las personas desarrollan en el presente su *actividad matemática*, sino también cómo las transformaciones de las prácticas inmersas en ella dejan ver la constitución de nuevos conocimientos matemáticos. En otras palabras, la movilización de las prácticas matemáticas es la que da lugar al aprendizaje. Además, estas características, de acuerdo con Jiménez, Zapata y Cautiva[11], no se movilizan de manera aislada, así, los cambios generados en una de ellas repercuten, como una especie de "efecto dominó", en las demás.

En esta investigación se centra la atención en los instrumentos *y* procedimientos generados en el encuentro con los números racionales, como una de las maneras de analizar la transformación (movilización) de las prácticas matemáticas. Los instrumentos son mediadores entre las construcciones sociales y la apropiación que los individuos tengan de ellas, por tanto, no son solo signos, símbolos, textos, fórmulas, gráficas, entre otros, pues de ser así "el lenguaje simbólico-algebraico quedaría reducido a un conjunto de jeroglíficos"[12] y, por tanto, son también las maneras de leer el mundo que se encuentran encarnadas en los objetos materiales y simbólicos que cristalizan la inteligencia de la que es portadora tal lenguaje.

Este encuentro genera unas estructuras dinámicas objetivas que "permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos"[13]. Además, no puede hablarse de actividad sin el objeto/motivo que la oriente, pero tampoco en la pasividad, son precisamente las acciones orientadas al fin (acciones y fin como unidad inseparable), con unas operaciones que las condicionan, las que dan lugar a la Actividad Matemática.

El objeto/motivo es un fin que permite orientar las acciones humanas, en el presente estudio se define, con base en D'Amore y Radford[14], como el encuentro de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los números racionales. Es este el norte que posibilita la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, es decir, las prácticas se transforman a

---

[10] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación", 83.

[11] Ana María Jiménez Echavarría *et al*., "Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales" (tesis de pregrado en Licenciatura en Educación, Universidad de Antioquia, 2017), 114.

[12] Luis Radford, "Elementos de una teoría cultural de la objetivación", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME* Vol. 9: Extraordinario 1 (2006): 113.

[13] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación", 74.

[14] Bruno D'Amore y Luis Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas / Doctorado Interinstitucional en Educación, 2017).

medida que se actúa hacia él; es un movimiento intencionado, esto es, las acciones son orientadas por el objeto/motivo[15]. Las operaciones de la actividad pueden entenderse como el conjunto de procesos que permiten que dichas acciones sean concretas: son las posibilidades reales que tienen los sujetos de llevar a cabo las acciones dirigidas a un fin, de acuerdo con el condicionamiento que le genera el momento histórico, el campo institucional, el lugar donde está situado y los recursos que tiene a su disposición, siendo estas las condiciones reales para la acción.

La interacción juega un papel principal en el devenir de la *actividad matemática*, pues es fundamental para la construcción de sentidos y significados. Es el contacto permanente con los demás y con el medio lo que puede llevar al individuo a edificar una conciencia y unos constructos teóricos frente a un saber. "Esta interacción implica entonces sujetos que inter-actúan en constante oposición unos a otros: la acción de cada sujeto siempre constituye una réplica a las acciones de los otros"[16]. Es de esta manera como los sujetos se apropian de la cultura a la vez que generan procesos de transformación (movilización) de sus prácticas.

Para Radford[17], la "interacción" humana es uno de los dos ejes principales de la "actividad", el otro es la producción. Ambos van siempre de la mano, pues las diferentes maneras como los estudiantes pueden interactuar entre sí y con el saber van condicionadas por unos modos de entender la producción. Para el caso de la educación, la actividad tiene como fin la producción de saberes, ligada a una manera también de entenderlos. La actividad no se trata solo de hacer cosas juntos, sino de hacia dónde se dirigen las prácticas y los caminos que hay que tomar para llegar al fin; pero, sobre todo, se trata de la manera como los sujetos interaccionan para llegar al resultado. La interacción puede ocurrir de diversas maneras, según como se entienda el proceso de producción de saber: puede ser vertical y pasiva o puede ser horizontal y colaborativa. En una perspectiva educativa donde el estudiante solo es receptor de saberes y no hay cabida a la reflexión de estos, la interacción entre los sujetos es vertical y pasiva; de otra manera, en una perspectiva educativa donde la cultura y el individuo tienen una relación dialéctica, la interacción entre los sujetos es horizontal y colaborativa.

El objeto matemático presente en esta investigación fueron los números racionales, los cuales se entienden a partir de la construcción formal (codificada culturalmente) tomada de Acevedo y Arango[18], la cual establece que:

$$Q := \{\frac{m}{n} : m, n \epsilon Z, n \neq 0 \; y \; m.c.d.(m,n) = 1\}$$

---

[15] Este es el objeto/motivo educativo, inicialmente, solo claro para el docente. El objeto/motivo (diferente al primero) explícito para las tareas propuestas a los estudiantes debe servir para que estos hagan consciente el objeto/motivo educativo.

[16] Diana Jaramillo *et al*., "El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase", curso, 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia, 8 al 10 de octubre de 2009, 9.

[17] Luis Radford, "Algunos desafíos encontrados".

[18] Diana Patricia Acevedo Vélez y Juan Carlos Arango Parra, *Lógica y teoría de conjuntos* (Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, 2012), 189.

Es decir, un número racional es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$, donde m es cualquier número entero y n es un número entero diferente de cero. Además, el máximo común divisor entre m y n es uno (1), lo que quiere decir que un número fraccionario solo es racional si está simplificado en su mínima expresión.

Reconociendo, en el campo de las matemáticas, la existencia de otras definiciones de número racional, en esta estrategia se trabajó con la definición anterior, que hace alusión a la representación de los números racionales. Esta es una definición que se encuentra con mucha frecuencia en la literatura interesada en la construcción de los sistemas numéricos, sin embargo, el lector podría preguntarse: si 2/4 no es un número racional, entonces, ¿qué es? Para resolver dicha pregunta se exploran las diferencias entre el conjunto de las fracciones y de los números racionales[19].

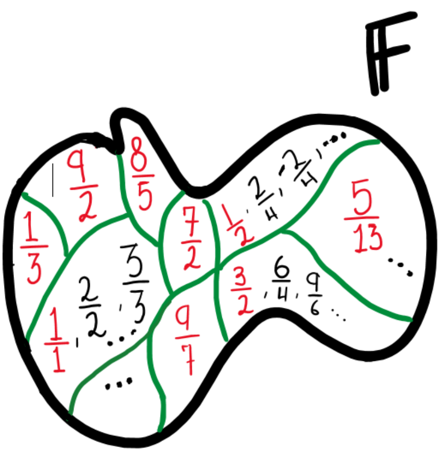
Primero, se dice que existe un conjunto de fracciones denotado por $\mathbb{F}$, definido como

$$\mathbb{F} = \{ \frac{x}{y} : x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0 \}$$

De aquí, podemos observar que $\frac{2}{4}$ pertenece a este conjunto, es decir, es una fracción. De igual manera, es posible observar que al interior del conjunto hay relaciones de equivalencia entre algunos elementos. Esta relación se puede definir como:

$$\frac{a}{b} \textit{ es equivalente a } \frac{c}{d} \textit{ sí y solo sí se cumple que } ad = bc, \textit{con } b, d \neq 0$$

Por tanto, concluimos que las fracciones $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$ son equivalentes ya que $2x6 = 4x3$. Esta relación de equivalencia genera una partición en el conjunto de las fracciones ($\mathbb{F}$) en clases de equivalencia, como se observa en la siguiente imagen:



[19] Hugo Guarín Vásquez, *Introducción a los sistemas numéricos* (Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, 2000), 70.

Figura 2. Partición en clases de equivalencia conjunto de fracciones.[20]

En cada una de las particiones del conjunto de las fracciones ($\mathbb{F}$) se encuentran aquellas fracciones que son equivalentes. Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\cdots$$

De estos, el único racional es $\frac{1}{2}$, pues es aquel que representa cada clase de equivalencia (partición). De otra manera, se podrá decir que $\frac{1}{2}$ es el menor representante. En la Figura 2, los números racionales, es decir, el menor representante, están escritos en rojo y los demás son las fracciones equivalentes a dicho número.

Se concluye entonces que $\frac{2}{4}$, si bien es una fracción, no cumple las condiciones para ser un número racional. No es el menor representante, en tanto que el máximo común divisor (MCD) $(2,4) \neq 1$.

De este modo, se puede observar que, si bien los números racionales y las fracciones no son lo mismo, están estrechamente relacionados. Los números racionales son un caso particular de las fracciones, por lo que una manera de acercarse a los conceptos de los números racionales es a partir de las diferentes maneras de representar las fracciones.

Cada sistema de representación es un modo de expresar y simbolizar determinadas estructuras numéricas mediante diversos instrumentos[21]. Si el estudiante conoce los diferentes sistemas de representación, entiende sus propiedades y logra hacer una relación entre ellos puede establecer una comprensión del objeto matemático o, por lo menos, construir diversos conceptos acerca de él. Para esta investigación se retoman algunas representaciones de Obando, Vanegas y Vásquez[22], a saber, la "fracción decimal", la "fracción" como "relación parte-todo", como "relación multiplicativa", y como "cociente indicado". Las notaciones de los números racionales que se abordan en el presente estudio surgen de estas representaciones, pero pueden ser el producto de más de una de ellas, es decir, la fracción $\frac{a}{b}$ puede ser la notación de una "fracción como relación parte-todo", "como cociente indicado" o "como relación multiplicativa", por ejemplo. Los análisis y reflexiones acerca de este objeto matemático en la investigación se exponen de manera detallada en artículos posteriores.

Para sintetizar lo anterior, se puede decir que: la *actividad matemática* se entiende como el conjunto de acciones socialmente dirigidas al objeto/motivo que permite el encuentro de los estudiantes con diferentes representaciones (o conceptos) de los números racionales. En esta actividad, la interacción de los estudiantes con otros y con el medio es indispensable, además que debe ser coherente con la manera de entender la construcción del conocimiento en esta perspectiva socio-cultural. El encuentro está mediado por unas prácticas matemáticas caracterizadas, entre otras cosas, por unos

[20] Elaboración propia, 2018.
[21] José María Gairín Sallán, "Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación" (tesis de doctorado en Educación, Universidad de Zaragoza, 1998), 22.
[22] Gilberto Obando Zapata *et al*., *Pensamiento numérico y sistemas*.

instrumentos *y* procedimientos que albergan en sí unas construcciones sociales históricas. La movilización (transformación) de estas prácticas matemáticas genera el aprendizaje en el aula de matemáticas.

Ambiente de aprendizaje: *encuentro* con números racionales

Para el desarrollo de nuestra investigación, se implementó un *ambiente de aprendizaje*, entendido como un espacio en la clase de matemáticas en el que se promovió la participación, la interacción y la reflexión para la construcción del conocimiento matemático[23], el cual consistió en la creación de una micro sociedad al interior del aula que fomentó la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, a partir del encuentro[24] con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los números racionales[25].

Acá se hace referencia a micro sociedad como el espacio simbólico generado en el aula que intentó reproducir, a pequeñas proporciones, algunas relaciones (económicas, sociales, políticas, entre otras) y maneras de actuar en la sociedad, con el fin de traer elementos de lo cotidiano al aula de matemáticas. Para este caso se trató de relaciones económicas mediadas por un papel moneda y en donde cada persona cumplió con unas funciones determinadas.

El papel moneda, construido por los investigadores (Figura 3), presentó diferentes denominaciones establecidas a partir de las notaciones que surgen de las diferentes representaciones de los números racionales. Las denominaciones de los Billetes Racionales, en MatePesos, son: 1/20 (0,05), 1/10 (0,1), 1/5 (0,2), 1/2 (0,5), 1 (2/2), 1,5 ($1\frac{1}{2}$) y 2 (18/9).

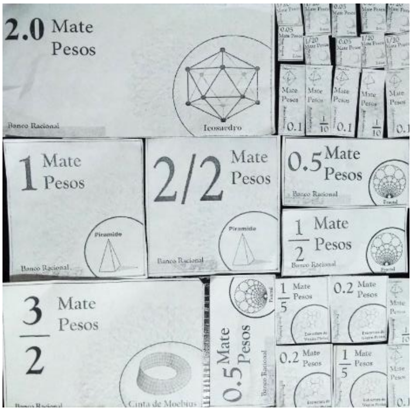


Figura 3. Billetes Racionales[26]

[23] Mónica Marcela Parra-Zapata, "Participación de estudiantes", 120.
[24] Luis Radford, "Algunos desafíos encontrados", 66-67.
[25] Gilberto Obando Zapata *et al*., *Pensamiento numérico y sistemas*.
[26] Elaboración propia, 2018.

Además, como se observa en la figura anterior, el área que ocupa cada Billete Racional es proporcional a su denominación; por ejemplo, el área del billete de *1 MatePesos* es igual a cinco veces el área del billete de 0,2 *MatePesos*.

Así mismo, la micro sociedad estuvo conformada por grupos de trabajo que se constituyeron en empresas, a saber: Depósito, Carpintería y ferretería, Empresa de ejercicios, Empresa de patentes y Banco Racional. Las empresas tuvieron diferentes funciones (presentadas en la Figura 4) que giraron en torno al objetivo[27] de construir diseños con palos de paleta (ver Figura 10), los estudiantes asumieron las funciones según la empresa a la que pertenecían y el Banco Racional estuvo a cargo de nosotros como profesores orientadores.

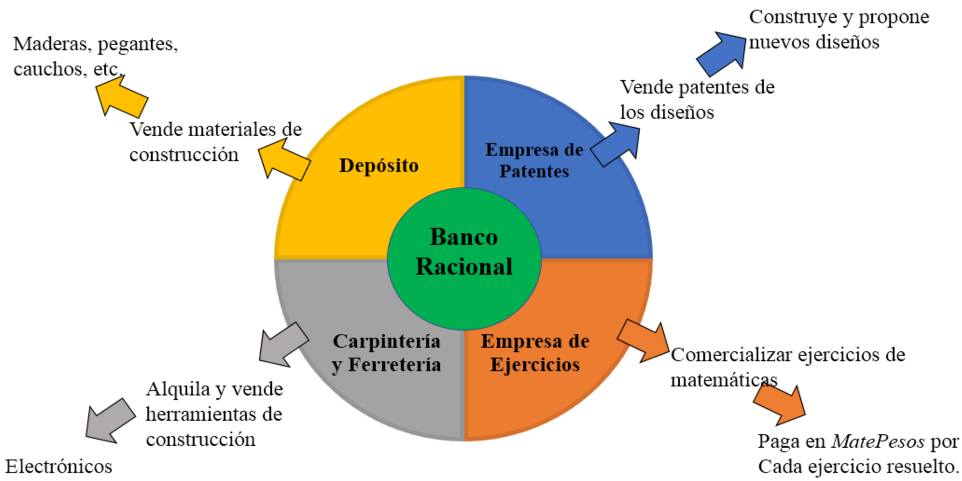


Figura 4. Empresas al interior de la microsociedad.[28]

La implementación de este ambiente de aprendizaje fue llevada a cabo en el segundo semestre del año 2018 con estudiantes de educación media (entre 15 y 18 años), en tres instituciones educativas: dos del municipio de San Luis, Antioquia, y una en el municipio de Girardota, Antioquia, en las que hicieron presencia los investigadores de manera separada. Para ello, se desarrollaron siete sesiones de clase (Figura 4).

La investigación tuvo un enfoque cualitativo[29], pues la preocupación se centra en las acciones de los estudiantes, sus significados y sus interacciones en un momento

[27] Éste, podemos decir, es el objeto/motivo explícito de las tareas constituyentes del ambiente de aprendizaje. Sin embargo, lo llamamos solo objetivo para no confundirlo con el objeto/motivo educativo (o de la actividad), el cual los estudiantes deben hacer consciente en el transcurso del ambiente de aprendizaje.

[28] Elaboración propia, 2018.

[29] Véase Jorge Martínez Rodríguez, "Métodos de investigación cualitativa", *Silogismo* Vol. 4: n° 8 (2011): 27-38; Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y María del Pilar Baptista Lucio, *Metodología de la investigación*, quinta edición (Ciudad de México: McGraw-Hill, 2010).

histórico-cultural particular. La interacción con ellos ocurrió de manera dialógica, comunicativa y empática para explorar, describir y comprender el aprendizaje de los estudiantes a partir de la movilización de sus prácticas.

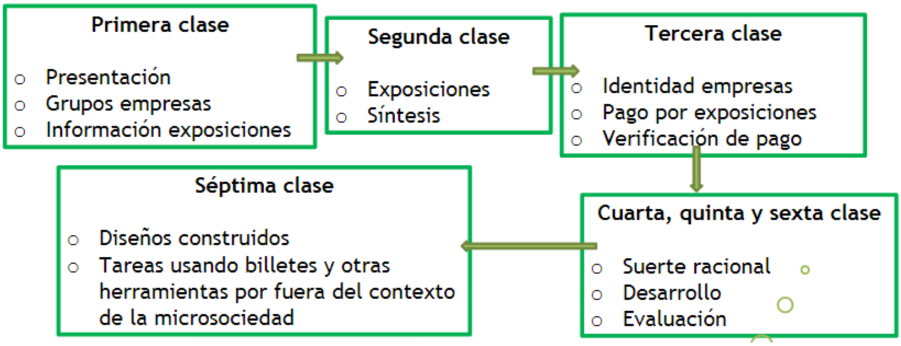


Figura 5. Sesiones de clase del ambiente de aprendizaje.[30]

La recolección de los datos se realizó en tres partes: en el caso de los investigadores, mediante la técnica de observación participante, donde las notas de campo, fotografías y vídeos constituyeron sus instrumentos. Para recolectar los datos de los estudiantes se usaron dos técnicas: el documento (fichas) y las entrevistas abiertas. Para la literatura, se realizaron fichas bibliográficas con el fin de recopilar de forma detallada y estructural la información.

Reflexiones acerca del desarrollo del *ambiente de aprendizaje* con los estudiantes: discusiones y análisis

A continuación, se presentan, en una secuencia temporal (Figura 5), cuatro episodios acontecidos en las tres instituciones educativas que permitieron analizar las acciones de los estudiantes a partir de las categorías de análisis presentadas en el apartado anterior. Se empezará por la reflexión suscitada por una de las tareas de la primera y segunda sesión de clase (laberinto decimal) en lo que se llamó "exposiciones". Seguido a esto, como segundo episodio, se examinan las interacciones que se presentaron al interior de los grupos de trabajo (empresas) al repartir funciones, manejar el papel moneda y registrar de manera escrita las transacciones diarias de cada empresa. El tercer episodio se trata de la solución de un estudiante a un enunciado de la "empresa de ejercicios", donde hace uso de instrumentos presentes en los Billetes Racionales. Por último, y como cuarto episodio, se expone el análisis sobre una de las tareas propuestas en el cierre del *ambiente de aprendizaje*.

En la primera y segunda sesión de clase se presentó el *ambiente de aprendizaje* y se organizaron cuatro grupos de trabajo, los cuales conformaron posteriormente las

[30] Elaboración propia, 2018.

diferentes empresas. A cada grupo se le asignó una información diferente acerca de los números racionales, con la intención de compartir con los demás compañeros, por medio de exposiciones, el resultado del diálogo entre sus saberes previos y lo que dicha información podía aportarles.

Esto se convirtió en una primera acción que permitió el encuentro de los estudiantes con los números racionales. Además, propició un diálogo donde los saberes previos de los estudiantes tomaron un papel esencial: a la vez que estos se contrastaban con los institucionales, se generaban unos acuerdos que ayudaron a la construcción de un lenguaje común; en otros términos, son acciones que “permiten el mínimo de acuerdos posibles para la movilización de la actividad de los individuos”[31].

Una de las exposiciones mencionadas previamente consistió en la aproximación a algunos procedimientos con números decimales[32], la tarea realizada fue un laberinto decimal, tomado de Valencia y Ávila[33], donde se abordaron instrumentos reflejados en procedimientos básicos: suma, resta, multiplicación y división (ver Figura 6).

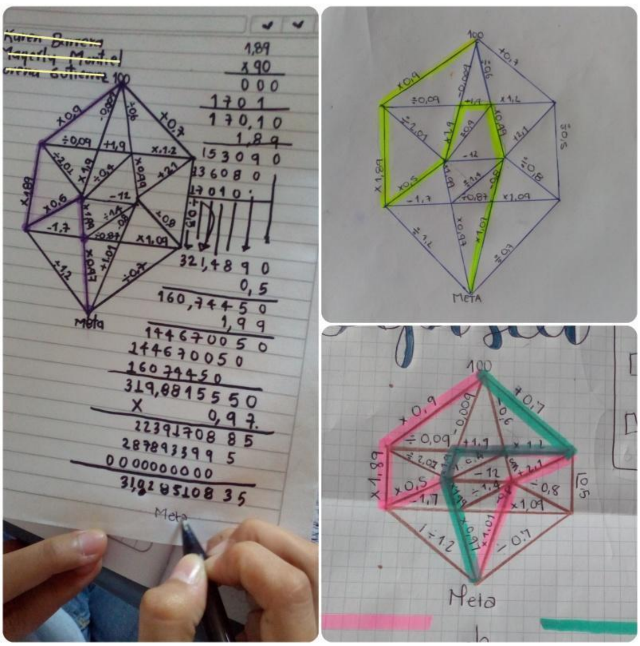


Figura 6. Laberinto decimal elaborado por estudiantes de una de las instituciones de San Luis, Antioquia.[34]

[31] Gilberto Obando Zapata *et al*., “Filosofía, matemáticas y educación”, 74.
[32] En este artículo se llama números decimales a aquellos que surgen de entender la fracción como *fracción decimal.*
[33] Evelyn Valencia y Alicia Ávila, “Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el laberinto de decimales”, *Educación Matemática* Vol. 27: n°3 (2015): 81-110.
[34] Elaboración propia, 2018.

El laberinto consiste en llegar a la meta con el mayor número de puntos posibles, el cual inicia en la parte superior con un valor de 100, sin pasar dos veces por el mismo segmento o punto. En los segmentos que representan los caminos se encuentran expresiones como: x (0,9), ÷ (0,6), x (0,99), + (0,7), x (1,99), entre otros. En la Figura 6 se observa que los caminos que tomaron los estudiantes fueron aquellos donde predomina la multiplicación y la suma. En este artículo, es necesario aclarar que, como profesores, se reconoce que, al escribir números racionales en su representación decimal, se hace uso de la coma o el punto dependiendo el país o del recurso usado (calculadora, por ejemplo). Sin embargo, durante el desarrollo del *ambiente de aprendizaje*, no se tuvo la oportunidad de generar reflexiones con los estudiantes acerca del uso del punto o la coma para escribir los números racionales en su notación decimal, por lo cual se puede encontrar en las evidencias que hay un uso indiscriminado de una u otra forma de escritura. Por lo demás, en la escritura del artículo se hace uso de la coma.

El análisis de esta tarea fue un proceso colectivo estudiantes-docente. Se compararon los resultados y exploraron las posibilidades que generaba la multiplicación y la división con números decimales. Se propició un acercamiento a las propiedades que estos tienen; los estudiantes se dieron cuenta que, en el conjunto de los números racionales, no siempre multiplicar un número lo hace más grande en cantidad y que no siempre dividir un número lo hace más pequeño en cantidad, como sí ocurre con los números enteros. Entendieron que, si bien se usan los mismos instrumentos para los procedimientos (ver Figura 6, parte izquierda), dichos instrumentos deben pensarse de otras maneras, pues cada uno de ellos trae consigo una carga teórica propia de una construcción social y simbólica, para este caso, aquella que conforma el constructo teórico de los números racionales o —en palabras de Obando, Vanegas y Vásquez— "la fracción decimal es un sistema notacional con reglas y lógica propia"[35].

Esta tarea, donde el objeto/motivo de la actividad educativa[36] se hizo consciente para los estudiantes, se convirtió en una acción que movilizó prácticas matemáticas, pues, elementos característicos como los instrumentos y procedimientos se transformaron, lo que ocasionó, a su vez, en un efecto dominó, que los demás elementos constituyentes de ella (conceptos, formas de discursividad y problemas por resolver) se vieran alterados[37]. Es esto lo que se llama "movilizar las prácticas matemáticas", es decir, generar aprendizaje. Estas acciones, además, constituyen la *actividad matemática* generadora de conciencia que se ha venido mencionando, pues se encuentran orientadas por el objeto/motivo y enmarcadas en unas condiciones (operaciones de la *actividad*) propias de cada uno de los escenarios donde se realizaron.

[35] Gilberto Obando Zapata *et al*., *Pensamiento numérico y sistemas*, 66.
[36] Encuentro con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los números racionales.
[37] Ana María Jiménez Echavarría *et al*., "Prácticas matemáticas que movilizan", 116.

En la tercera sesión de clase, los grupos de estudiantes que realizaron las exposiciones en clases anteriores definieron la identidad de la empresa (nombre, logo y eslogan) de la cual hacían parte (ver Figura 7) y se dividieron las funciones que debían cumplir dentro de la misma.

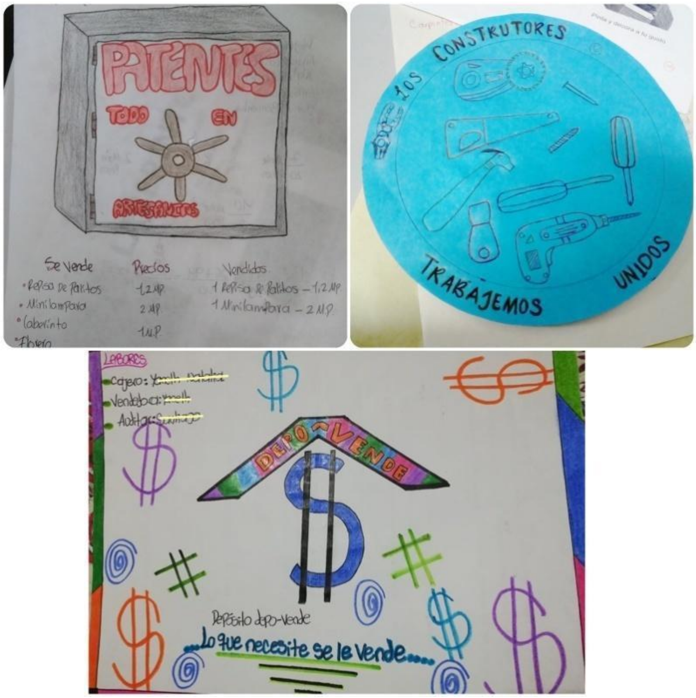


Figura 7. Nombres, logos y eslogan construidos por algunos equipos de estudiantes de las instituciones educativas.[38]

Durante esta tercera sesión se observó cómo los estudiantes se relacionaron en sus equipos de trabajo para conseguir lo que les propusimos hacer. Al momento de dividir las funciones de cada empresa se notó una interacción horizontal y colaborativa, en la cual los estudiantes se dieron cuenta que, si no se asignaban diferentes funciones al interior de las empresas, no podrían cumplir con todo. Las funciones de los miembros de los equipos fueron asignadas por los mismos estudiantes: en algunos casos, conscientes de las fortalezas y aptitudes que cada uno tenía para aportar al equipo; y, en otros, con la intención de que todos pudieran realizar una función durante al menos una vez en las sesiones de clase siguientes. Las relaciones entre ellos, guiadas por el objetivo del *ambiente de aprendizaje*, empezaron a ser participativas y propositivas, lo cual es un primer paso importante para hablar de *interacción* en esta perspectiva educativa.

[38] Elaboración propia, 2018.

Durante el trabajo al interior de las empresas, también hubo una interacción con el papel moneda construido por los investigadores. Es así como el trabajo en las empresas no solo estaba en pro de la construcción de los diseños con palos de paleta (objetivo explícito de las tareas), sino que también estaba orientado por el objeto/motivo de la actividad educativa. De esta manera, los estudiantes se hicieron conscientes de que el objetivo explícito de las tareas convergía cada vez más con el objeto/motivo de la actividad educativa. En esta investigación, el uso colectivo de los Billetes Racionales por parte de las empresas fue el complemento necesario para hablar de interacción en *actividad matemática*, pues, en concordancia con Radford[39], en la actividad no solo se trataba de hacer cosas juntos, sino de hacia dónde se dirigían las prácticas y los caminos para llegar al fin. Con los Billetes, la *interacción* se empieza a dar en el marco del *encuentro* con los números racionales.

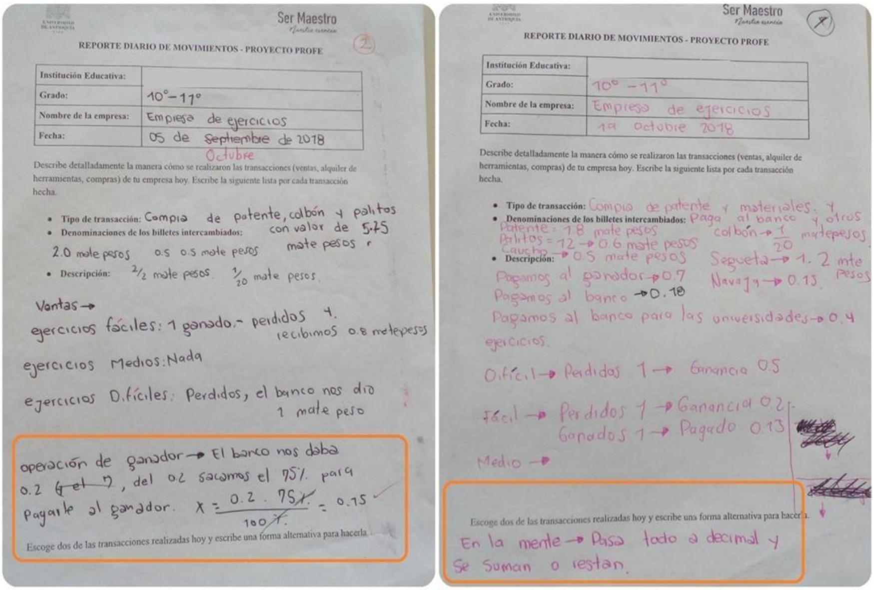
Las interacciones al interior de las empresas se dieron en una constante oposición entre los integrantes[40], es decir, se presentaron acuerdos y desacuerdos acerca de los instrumentos y procedimientos que se debían utilizar para realizar alguna transacción de las empresas: entregar cambio en las compras, comprar a otras empresas, registrar las ganancias del día, entre otras. Este es el caso de uno de los equipos que conformó la Empresa de ejercicios en el cual se distribuían las funciones de manera diferente en cada clase; así, en una de las clases, dos estudiantes registraron algunos movimientos de la empresa en la ficha mediante procedimientos escritos y, en otra de las clases, otros estudiantes registraron los movimientos en la ficha sin realizar ningún procedimiento escrito[41] (ver Figura 8). Los primeros estudiantes no confiaban en lo escrito por los segundos; argumentaron que necesariamente se debían realizar los procedimientos de manera escrita para verificar que estuvieran correctos. Por su parte, los segundos estudiantes argumentaron, de manera oral, cómo llegaban a los resultados registrados en la ficha. El diálogo fue el siguiente:

Profesora: ¿cómo hicieron la suma?, ¿cómo sumaron todos los billetes?
Estudiante 1: pasamos todo a decimal.
Profesora: ¿lo pasaron haciendo todas las operaciones[42]? o ¿de qué manera?
Estudiante 1: en la mente; por decir un medio, uno sabe que da cero punto cinco.
Profesora: ¿por qué sabes eso?
Estudiante 1: porque se divide uno entre dos, entonces da cero punto cinco.
Profesora: ¿por qué más lo podrías saber?
Estudiante 1: por la suma de cero punto cinco dos veces, da uno.
Profesora: ¿las operaciones las hicieron sin hacer el cálculo en una hoja?
Estudiante 1: sí.

---

[39] Luis Radford, “Algunos desafíos encontrados”, 72.
[40] Diana Jaramillo *et al.*, “El conocimiento matemático, actividad”, 9.
[41] Se entiende que sí hubo una escritura de su forma de proceder, pero aun así se considera que esta escritura no nos permite analizar instrumentos propios que propicien el encuentro con los números racionales.
[42] Aquí las operaciones se refieren a los procedimientos que se vienen analizando.

Profesora: ¿cómo se dieron cuenta que lo podían hacer sin hacer los cálculos escritos, sabiendo que tienen billetes con denominaciones en decimales y en fracciones?
Estudiante 2: porque, por ejemplo, aquí [señalando los billetes de denominación 1/20 MatePesos, ver Figura 1] sabemos que esto da cero punto cero cinco, además porque tiene el mismo logo, entonces sabemos que da eso[43].



Ser Maestro

REPORTE DIARIO DE MOVIMIENTOS - PROYECTO PROFE

2

Institución Educativa:	
Grado:	10°–11°
Nombre de la empresa:	Empresa de ejercicios
Fecha:	05 de ~~Septiembre~~ Octubre de 2018

Describe detalladamente la manera cómo se realizaron las transacciones (ventas, alquiler de herramientas, compras) de tu empresa hoy. Escribe la siguiente lista por cada transacción hecha.

- Tipo de transacción: Compra de patente, colbón y palitos con valor de 5.75 mate pesos
- Denominaciones de los billetes intercambiados: 2.0 mate pesos 0.5 0.5 mate pesos
- Descripción: 2/2 mate pesos. 1/20 mate pesos.

Ventas →
ejercicios fáciles: 1 ganado.- perdidos 4. recibimos 0.8 matepesos
ejercicios Medios: Nada
ejercicios Difíciles: Perdidos, el banco nos dio 1 mate peso

operación de ganador → El banco nos daba 0.2 ~~(el 7)~~, del 0.2 sacamos el 75% para pagarle al ganador. $X = \frac{0.2 \cdot 75\%}{100\%} = 0.15$

Escoge dos de las transacciones realizadas hoy y escribe una forma alternativa para hacerla.

Ser Maestro

REPORTE DIARIO DE MOVIMIENTOS - PROYECTO PROFE

Institución Educativa:	
Grado:	10° – 11°
Nombre de la empresa:	Empresa de ejercicios
Fecha:	19 Octubre 2018

Describe detalladamente la manera cómo se realizaron las transacciones (ventas, alquiler de herramientas, compras) de tu empresa hoy. Escribe la siguiente lista por cada transacción hecha.

- Tipo de transacción: Compra de patente y materiales. Y
- Denominaciones de los billetes intercambiados: Paga al banco y otros
Patente = 1.8 mate pesos colbón → 1/20 matepesos
Palitos = 12 → 0.6 mate pesos
Caucho → 0.5 mate pesos Segueta → 1.2 mte pesos
- Descripción:
Pagamos al ganador → 0.7 Navaja → 0.15.
Pagamos al banco → 0.18
Pagamos al banco para las universidades → 0.4

ejercicios.
Difícil → Perdidos 1 → Ganancia 0.5
Fácil → Perdidos 1 → Ganancia 0.2
Ganados 1 → Pagado 0.13
Medio →

Escoge dos de las transacciones realizadas hoy y escribe una forma alternativa para hacerla.
En la mente → Pasa todo a decimal y se suman o restan.

Figura 8. Fichas: Reporte diario de movimientos realizado por los estudiantes, empresa de ejercicios.[44]

La Figura 8 sirve como complemento a este diálogo: aquí se observan las dos maneras de procedimientos frente a las transacciones de las empresas que se mencionaron anteriormente. El argumento escrito que se resalta al final de la ficha de la derecha —acerca de cómo realizaron los procedimientos— fue el mismo expresado en la entrevista anterior. Los estudiantes consideraron el tamaño de los billetes e intentaron completar, con varios del mismo tamaño, una unidad y extraer la porción de unidad necesitada en alguna transacción.

Esta situación permite entender que las interacciones entre los estudiantes también pueden ser de oposición, que las discusiones que se generaron acerca de cómo movilizar sus prácticas matemáticas, en este caso a través de los instrumentos y procedimientos, son importantes para el aprendizaje. Cada persona puede tener distintas maneras de proceder matemáticamente y ponerlo en discusión enriquece las prácticas y el encuentro.

[43] Entrevista realizada por Manuela Restrepo-Puerta a Estudiante 1 y 2, 28 de octubre de 2018, San Luis, Colombia.
[44] Elaboración propia, 2018.

Al analizar las interacciones de los estudiantes, se puede concluir, en primer lugar, que dichas interacciones presentadas en el *ambiente de aprendizaje*, en busca del buen funcionamiento de las empresas, fueron horizontales y colaborativas. En segundo lugar, que las interacciones entre los mismos estudiantes con el papel moneda propuesto estuvieron orientadas por el objeto/motivo (educativo) de la actividad, pues les permitió comprender que no se trataba solo de hacer los diseños con palos de paleta, sino que esto generaba en ellos un encuentro con los números racionales. En tercer lugar, se observó que se presentaron interacciones en constante oposición entre los mismos estudiantes, lo que generó una apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión.

En este segundo episodio se puede reflexionar, además, acerca de los instrumentos y procedimientos utilizados por los estudiantes con el manejo de los Billetes Racionales. En el diálogo presentado anteriormente se ve que algunos estudiantes pudieron familiarizarse rápidamente con los billetes; estos se convirtieron en un instrumento para ellos con los cuales los procedimientos se facilitaron. Los estudiantes llegaron incluso al caso de no tener la necesidad de utilizar los instrumentos y procedimientos convencionales escritos para hacer cuentas rápidas con números racionales. Aun así, como se visibiliza en la parte izquierda resaltada de la Figura 8, los estudiantes no dejaron de lado dichos procedimientos escritos, por el contrario, el uso de los billetes y la mentalización de los procedimientos permitió un mejor entendimiento y refinamiento de aquellos que usaban en otros contextos académicos.

Lo anterior se evidencia mucho mejor en el tercer episodio ocurrido en una de las instituciones educativas de San Luis, Antioquia, cuando el Estudiante 3 decidió resolver uno de los ejercicios que comercializaba la Empresa de ejercicios para obtener *MatePesos* adicionales. En el ejercicio se planteó el siguiente enunciado: Escribe 1,4 en forma de fracción. En la figura 9 se puede observar el procedimiento utilizado para darle solución.

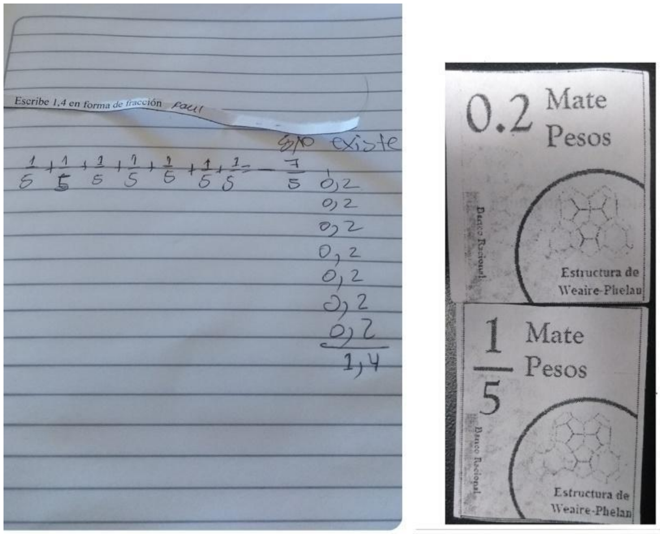


Figura 9. Solución ejercicio de la Empresa de ejercicios por estudiante de San Luis, Antioquia.[45]

El estudiante no recordó el algoritmo que se repasó en las primeras sesiones de clase que permite hacer este tipo de conversiones (y no tenía porqué hacerlo), por lo que pensó su propio *procedimiento*. Como estaba ya familiarizado con los Billetes Racionales, decidió hacer la siguiente relación: sabía, por su experiencia con los Billetes Racionales, que 0,2 *MatePesos* era exactamente el mismo valor que 1/5 *MatePesos*, por lo que procedió a sumar tantas veces 0,2 hasta que el resultado fuera 1,4. Así, la solución se redujo a sumar 1/5 exactamente el número de veces que había sumado 0,2 para llegar a 1,4 lo que dio como resultado 7/5[46].

[45] Elaboración propia, 2018.
[46] Observación de uno de los autores a tarea realizada por estudiante.

Figura 10. Diseños terminados con palos de paleta por los estudiantes.[47]

Se interpreta de esto último que los instrumentos y procedimientos cambiaron y que el estudiante pudo lograr una mejor comprensión del objeto matemático[48], logrando decir varias cosas acerca de este (conceptos) y, con ello, los números racionales pasaron de solo estar escritos en un papel a ser una representación (de una parte de los números racionales) en su cabeza. La transformación (movilización) de las prácticas matemáticas por medio de los instrumentos utilizados en ellas generó en el estudiante un aprendizaje. De acuerdo con la situación anterior, los Billetes Racionales y los instrumentos presentes en ellos fueron esenciales para la apropiación de los individuos de unas construcciones sociales.

Para finalizar, en la séptima sesión de clase, se desarrolló un cierre del *ambiente de aprendizaje*. En una primera parte, los estudiantes presentaron sus diseños con palos de paleta terminados (ver Figura 10), en donde se pudo observar el fruto de su trabajo colectivo representado en algo tangible. Esta fue la consecución del objeto/motivo (nombrado simplemente como objetivo) explícito del *ambiente de aprendizaje*. Seguido a esto, se desarrolló una acción con los estudiantes tipo carrusel, la cual consistió en cuatro estaciones por donde los grupos de trabajo

---

[47] Elaboración propia, 2018.
[48] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación", 75.

(empresas) pasaban cada cierto periodo por cada una de éstas. Cada estación tenía una tarea representada en un reto o juego relacionado con números racionales: una de ellas se analizará a continuación. Este cierre pretendió evidenciar qué tan consciente fue para los estudiantes el objeto/motivo educativo de la actividad.

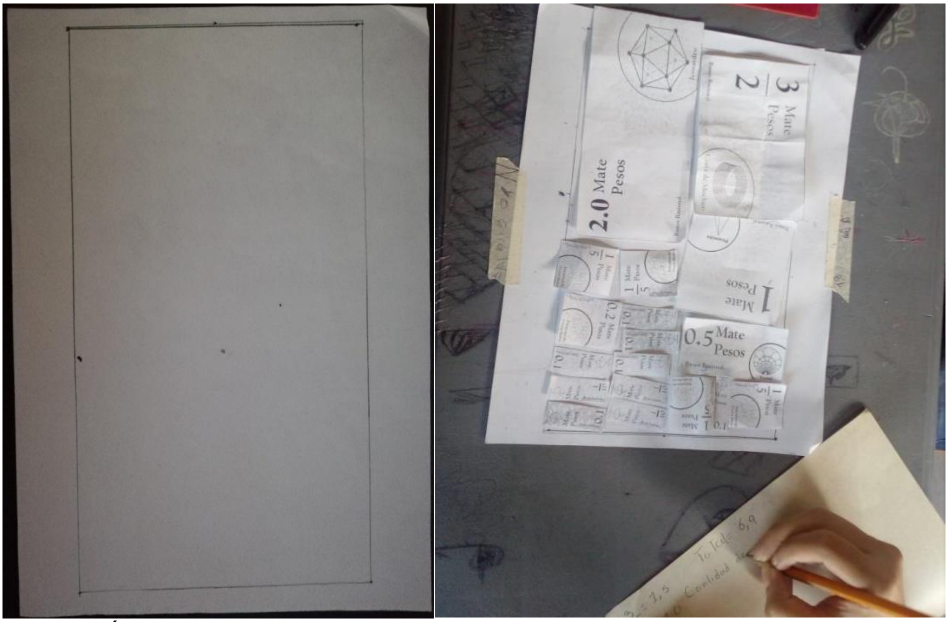


Figura 11. Áreas, razones y porcentajes con Billetes Racionales, tarea propuesta a los estudiantes.[49]

Una de las tareas que hizo parte de una de las estaciones del carrusel tuvo como objetivo el uso de los Billetes Racionales en otros contextos. La intención fue que, con la ayuda de los instrumentos presentes en estos Billetes, los estudiantes construyeran diferentes conceptos acerca de los números racionales. Se les presentó una hoja donde estaba dibujado un rectángulo (ver Figura 11) con las siguientes indicaciones: i) ¿cuál es el área del rectángulo?, ii) ¿cuál es la razón del billete de 1½ (3/2) con respecto al total?, iii) ¿cuántos MatePesos hay? y iv) ¿qué porcentaje representan los billetes de 1/10 con respecto al total?

En la Figura 11 se observa que los estudiantes procedieron a cubrir completamente el rectángulo dibujado en la hoja con los Billetes Racionales. De esta manera lograban obtener algunas de las respuestas presentadas en la Figura 12. Contar los *MatePesos* que allí se encontraban no les generaba dificultad, pues ya estaban familiarizados con los billetes. Las respuestas con respecto al total de *MatePesos* oscilaron entre 6,9 y 7,1 *MatePesos*, esto tal vez por los márgenes de error que podían presentarse con el recorte de los billetes. Encontrar la razón y el

[49] Elaboración propia, 2018.

porcentaje tampoco generó dificultad en los estudiantes, pues entendieron que había un total que habían calculado y que cada billete, tal como lo hicieron en las acciones con las empresas, era una pequeña porción de ese total (ver Figura 12).

En la Figura 12 se representan algunos de los *procedimientos* usados por dos grupos diferentes para darle respuestas a las preguntas (ii y iv) antes mencionadas. En la parte de arriba se observa que usaron la notación fraccionaria que permite hacer una relación entre una parte y un todo[50], y el uso además de la fracción como relación multiplicativa para que esta relación se hiciera entre dos números enteros. En la parte de abajo de la Figura 12 se observa también dicha relación con respecto a un total, donde establece el 100 como un todo (porcentajes).

Esta tarea dejó ver que el uso de Billetes Racionales fue significativo, pues sus elementos se convirtieron en instrumentos mediadores que permitieron la comprensión y la apropiación de saberes culturales institucionales acerca de los números racionales a través de la movilización de sus prácticas matemáticas. Estos instrumentos fortalecieron y modificaron otros aspectos de las prácticas matemáticas de los estudiantes, como los conceptos acerca de los números racionales.

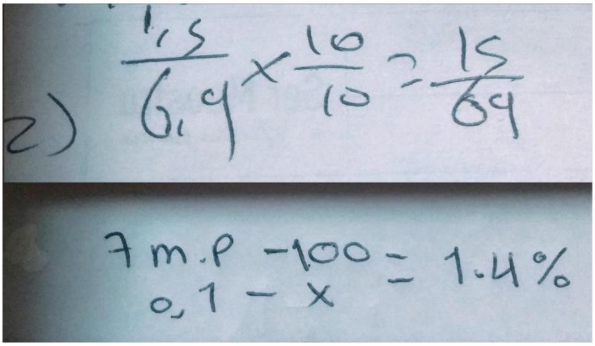


Figura 12. Solución razón y porcentaje al usar Billetes Racionales, diferentes grupos de trabajo.[51]

Consideraciones finales

En el *ambiente de aprendizaje* propuesto se propició el desarrollo de la *actividad matemática*[52], pues estuvo conformado por unas acciones orientadas por el objeto/motivo educativo de la actividad definido como el encuentro de los estudiantes con maneras culturalmente codificadas de pensar matemáticamente acerca de los números racionales. Las primeras acciones permitieron generar unos acuerdos mínimos para el curso de la actividad a partir del primer encuentro entre los estudiantes (con sus saberes previos) y lo que la cultura pone a su disposición acerca de los números racionales. Los elementos presentes en los Billetes Racionales —usados en el transcurso de la implementación— a partir de la interacción en los

[50] Gilberto Obando Zapata *et al*., *Pensamiento numérico y sistemas*, 61.
[51] Elaboración propia, 2018.
[52] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación", 82.

grupos de trabajo se convirtieron en instrumentos mediadores entre los saberes institucionales y los individuos, además que incentivaron la movilización de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lo que propició la creación de nuevos conocimientos matemáticos en los estudiantes.

Las interacciones entre estudiantes, docentes y el medio fueron horizontales y colaborativas, por lo que fueron coherentes con una manera de producción de saber en esta perspectiva educativa y, además, estuvieron orientadas por el objeto/motivo de la actividad, por lo que se constituyeron como uno de los ejes principales de la actividad[53]. Además, fueron interacciones que presentaron oposiciones y complementos entre los estudiantes, lo que fortaleció la apropiación del conocimiento matemático puesto en discusión[54].

Los procedimientos utilizados por los estudiantes a la hora de enfrentarse a problemas con números racionales (los cuales se presentaron y discutieron anteriormente) fueron modificándose a partir de la familiarización con los elementos presentes en los Billetes Racionales que funcionaron como instrumentos mediadores de la cultura[55]. Esto propició, además, que muchas características de las prácticas matemáticas se movilizaran y, en ese sentido, se transformaran. Estas movilizaciones de las prácticas matemáticas se analizaron aquí a profundidad solo a partir de una de las características de las prácticas matemáticas: *instrumentos* y *procedimientos*; sin embargo, es importante reconocer que este ambiente de aprendizaje permite también enfocarse en otras de las características o en todas como conjunto (pues están interconectadas).

El aprendizaje como encuentro que genera actividad, es decir, como movilización de las prácticas propicia transgredir el papel de los estudiantes como solo receptores del saber los involucra activamente en su proceso de aprendizaje y los pone a dialogar con la cultura. Es esta la importancia de rescatar aquellas perspectivas educativas que se alejen del individualismo y la sumisión en educación matemática, donde pareciera que todo está acabado y la función del estudiante sea repetir al pie de la letra lo que el profesor sabe (así esté errado) sin posibilidad de reflexionar, refutar y discernir. Esto se rescata en este trabajo y fue uno de los comentarios más recurrentes entre los estudiantes con los que se realizó la investigación. La mayoría de ellos resaltaron la importancia de buscar estrategias para que sea la *actividad* el motor del aprendizaje.

---

[53] Luis Radford, "Algunos desafíos encontrados", 72.
[54] Diana Jaramillo *et al*., "El conocimiento matemático, actividad", 12.
[55] Gilberto Obando Zapata *et al*., "Filosofía, matemáticas y educación", 81.

Referencias

Fuentes primarias

Entrevista realizada por Manuela Restrepo-Puerta a Estudiante 1 y 2, 28 de septiembre de 2018, San Luis, Colombia.

Fuentes secundarias

Acevedo Vélez, Diana Patricia y Juan Carlos Arango Parra. *Lógica y teoría de conjuntos*. Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, 2012.

D'Amore, Bruno y Luis Radford. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas / Doctorado Interinstitucional en Educación, 2017.

Gairín Sallán, José María. "Sistemas de representación de números racionales positivos un estudio con maestros en formación". Tesis de doctorado en Educación, Universidad de Zaragoza, 1998.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández Collado y María del Pilar Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*. Quinta edición. Ciudad de México: McGraw-Hill, 2010.

Jaramillo, Diana, Gilberto Obando y Yolanda Beltrán. "El conocimiento matemático, actividad matemática e interrelaciones en la clase". Curso. 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, Pasto, Colombia, 8 al 10 de octubre de 2009, 1-17.

Jiménez Echavarría, Ana María, Cristian Stiven Zapata Marín y Francy Lorena Cautiva Sosa. "Prácticas matemáticas que movilizan estudiantes de primer grado, al utilizar los billetes decimales". Tesis de pregrado en Licenciatura en Educación, Universidad de Antioquia, 2017.

Martínez Rodríguez, Jorge. "Métodos de investigación cualitativa". *Silogismo* Vol. 4: n° 8 (2011): 27-38.

Obando Zapata, Gilberto, Luis Arboleda A y Carlos Eduardo Vasco U. "Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática". *Revista Científica* Vol. 3: n° 20 (2014): 72-90.

Obando Zapata, Gilberto, María Denis Vanegas Vasco y Norma Lorena Vásquez Lasprilla. *Pensamiento numérico y sistemas numéricos*. Módulo I. Medellín: Universidad de Antioquia / Secretaría de Educación, Gobernación de Antioquia, 2006.

Parra-Zapata, Mónica Marcela. "Participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática: reflexiones a partir de la perspectiva socio-crítica de la modelación matemática". Tesis de maestría en Educación, Universidad de Antioquia, 2015.

Radford, Luis. "Elementos de una teoría cultural de la objetivación". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME* Vol. 9: Extraordinario 1 (2006): 103-129.

__________. "De la teoría de la objetivación". *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* Vol. 7: n° 2 (2014): 132-150.

__________. "Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación". *PNA* Vol. 12: n° 2 (2018): 61-80.

Valencia, Evelyn y Alicia Ávila. "Ideas previas sobre la multiplicación y división con decimales: su evolución a partir de una experiencia con el laberinto de decimales". *Educación Matemática* Vol. 27: n°3 (2015): 81-110.