

# Masa de neutrinos en un modelo $Z_5$ de materia oscura multicomponente

*Trabajo de Grado para optar al título de*

**Magíster en Física**



*Enviado por*

**Brallan Orlando Taborda Toro**

*Supervisado por*

**Óscar Alberto Zapata Noreña**

Universidad de Antioquia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Física  
Julio 2024

# Resumen

Este trabajo se centra en una extensión al modelo estándar de física de partículas. En este escenario se le añade al modelo estándar dos nuevos campos fermiónicos, un doblete escalar complejo y dos singletes escalares complejos, todos estos nuevos campos estarán cargados bajo una simetría  $Z_5$  de esta manera se obtienen dos sectores oscuros diferentes. Dentro de este marco, emergen varios candidatos potenciales para ser considerados como materia oscura, algunos de ellos en forma de escalares complejos, mientras que otros en forma de fermiones, con esta configuración es posible tener un escenario de materia oscura multicomponente, donde la estabilidad de la componente más pesada estará dada mediante restricciones cinemáticas. La abundancia de reliquia de las partículas de materia oscura estará afectada principalmente por procesos  $2 \rightarrow 2$ , y su contribución conjunta dará cuenta de la densidad de reliquia observada. Adicionalmente, al añadir estos nuevos campos, se obtendrá un mecanismo a nivel de dos bucles que permite generar masas de neutrinos de Majorana, teniendo así un modelo escotogénico. En este trabajo, se eligieron como candidatos a materia oscura dos partículas de tipo escalar y se analizó el comportamiento de dichas abundancias al considerar diferentes valores para los acoplamientos relevantes del modelo. Además, se mostró que el modelo es compatible con los límites establecidos por experimentos que exploran la violación de sabor leptónico al igual que la densidad de reliquia de la materia oscura reportada por el experimento PLANCK y también con los datos actuales de las oscilaciones de neutrinos.

# Índice general

Resumen	II
Contenido	III
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo estándar, materia oscura y neutrinos</b>	<b>5</b>
2.1. Modelo estándar . . . . .	5
2.2. Materia oscura . . . . .	7
2.3. Neutrinos . . . . .	10
<b>3. El modelo</b>	<b>15</b>
3.1. Modelo $Z_5$ de dos componentes de materia oscura . . . . .	15
3.2. El modelo empleado . . . . .	18
3.2.1. Sector escalar . . . . .	18
3.2.2. Sector fermiónico y masa de neutrinos . . . . .	22
3.2.3. LFV . . . . .	25
3.2.4. Materia Oscura . . . . .	27
<b>4. Resultados numéricos</b>	<b>32</b>
4.1. Modelo de referencia . . . . .	32
<b>5. Conclusiones y discusiones</b>	<b>42</b>

<b>A. Cálculo de la masa de neutrinos</b>	<b>45</b>
A.1. Resultados útiles . . . . .	45
A.2. Matriz de masa de neutrinos . . . . .	47
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>

# Capítulo 1

## Introducción

El modelo estándar (ME) de la física de partículas ha sido desarrollado a lo largo de décadas de investigación y experimentación, con la colaboración de científicos de todo el mundo. Su formulación matemática compleja y rigurosa ha permitido predecir y explicar fenómenos observados con una precisión sin precedentes [1], lo que ha conducido a un sólido consenso en la comunidad científica sobre su validez.

Dentro del ME, las partículas fundamentales se clasifican en dos categorías principales: los fermiones, que incluyen a los quarks y a los leptones; por otra parte, están los bosones, responsables de transmitir las interacciones fundamentales, como es el caso del fotón para el electromagnetismo o los gluones para la interacción fuerte [2]. Además, el ME también incorpora la teoría de la relatividad especial de Einstein para describir los fenómenos a altas energías y velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Esta integración entre la mecánica cuántica y la relatividad representa un logro significativo en el desarrollo de la física teórica [3].

Sin embargo, uno de los resultados más significativos en el campo de la física de partículas de los últimos años ha sido el descubrimiento de que los neutrinos son masivos [4–6]. Este fenómeno se debe a que el tipo (o sabor) del neutrino cambia a medida que se desplaza por el espacio, dando lugar a un fenómeno conocido como oscilaciones de neutrinos [7–9]. Actualmente, se disponen de valores experimentales de sus correspondientes ángulos de mezcla [10] lo cual no se puede explicar en la teoría del ME, ya que en ella se asume que los neutrinos no tienen masa.

Por otro lado, observaciones cosmológicas han mostrado que el Universo está conformado principalmente por materia no bariónica a la cual se le ha denominado materia oscura (MO) [11, 12]. De hecho, este tipo de materia constituye aproximadamente un 85 % de la materia del Universo [13], interactúa principalmente a través de la gravedad y no tiene carga eléctrica [14, 15]. En la actualidad, la MO representa un desafío enorme tanto teórico como experimental para la comunidad científica, ya que su falta de interacción directa con la luz la hace invisible a los telescopios y otros instrumentos que dependen de la detección de radiación electromagnética, y aunque existen varios experimentos diseñados para detectar MO directamente, la detección ha resultado desafiante debido a la débil interacción de la MO con la materia ordinaria y los experimentos a menudo deben realizarse en entornos ultracautelosos para reducir las interferencias. Por otra parte, aunque se han desarrollado modelos teóricos sólidos para abordar la naturaleza de las partículas de MO, es importante destacar que su composición precisa y sus propiedades fundamentales aún no han sido completamente identificadas. Además, se cree firmemente que a este tipo de materia le podría corresponder un campo fundamental y en la teoría del ME dicho campo no existe.

Como consecuencia de estas incertidumbres, es sabido que el modelo actual de la física de partículas está incompleto y, por lo tanto, existe la necesidad de tener lo que se conoce como física más allá del ME que permita explicar estos fenómenos. Sobre esta base, han surgido en la literatura varios modelos que proponen diferentes partículas como candidatos a ser MO, como por ejemplo en teorías supersimétricas [16] donde se aborda la cuestión de la MO supersimétrica, cuya idea se basa en la existencia de partículas supersimétricas (que son compañeras supersimétricas de las partículas conocidas en el ME) más masivas que las partículas conocidas, y que estas partículas pueden interactuar de manera débil con la materia visible. Esto explicaría por qué no se ha detectado directamente la materia oscura, ya que no interactúa fuertemente con la luz electromagnética ni con las fuerzas nucleares fuertes o débiles. También, existen modelos que proponen como candidatos de MO a partículas escalares [17], donde se tiene uno de los modelos más simples de MO, en el cual un campo singlete escalar comprende toda o parte de la MO e interactúa con el ME a través de un acoplamiento al bosón de Higgs. En este tipo de escenarios se destacan modelos muy bien estudiados en la literatura, que utilizan al axión

(partícula escalar) que no solo resuelve el problema de CP fuerte, sino que también puede ser un posible candidato para ser MO [18].

Adicionalmente, existen modelos de MO multicomponente basados en simetrías discretas  $Z_n$  [19, 20], donde se exploran escenarios de MO compuesta por múltiples componentes. Estos modelos proponen la existencia de varias partículas de MO, cada una contribuyendo al total de abundancia requerida, y donde su estabilidad está garantizada por la simetría  $Z_N$ . Además, estos modelos estudian cómo la coaniquilación y la semi-aniquilación de partículas del sector oscuro, así como la conversión de la MO, modifican significativamente la abundancia cósmica de MO y la fenomenología de la detección directa.

Gran parte del esfuerzo en la teorización de modelos de MO también se centra en abordar no solo este problema, sino también en desarrollar un mecanismo que permita generar masas para los neutrinos [21–24]. Estos modelos, conocidos como modelos escotogénicos, ofrecen una solución tanto para la generación de masas de los neutrinos como para el problema de la MO [25]. En estos modelos a menudo se implican como candidato a MO, generalmente a una partícula escalar (pero tranquilamente puede ser de cualquier otro tipo), y una violación del número leptónico. Además, hay modelos que generan las masas de neutrinos a través de efectos radiativos, lo que permite una conexión entre las propiedades de los neutrinos y la MO.

Modelos como por ejemplo el modelo basado en una simetría  $Z_2$  [26], donde se propone una extensión mínima del ME que explica las masas pequeñas de los neutrinos a través de un mecanismo de seesaw radiativo de un bucle, y presenta dos candidatos a MO: uno bosónico y otro fermiónico. también están modelos basados en una simetría  $Z_3$  por ejemplo [27], donde las masas de neutrinos se generan radiativamente en un diagrama de dos bucles y la MO en el modelo puede ser un fermión de Dirac o un escalar complejo. Por último se tienen modelos basados en una simetría  $Z_5$  como [28], donde se propone un modelo de seesaw radiativo, en el que las masas de neutrinos se inducen radiativamente a través de un diagrama de dos bucles.

El modelo que se consideró para el trabajo de esta tesis consiste en un modelo escotogenico multicomponente, ya que permite explicar la generación de masas de neutrinos, al igual que propone al menos dos candidatos a MO, está basado en una simetría  $Z_5$ , y se puede ver como



una extensión a modelos ya reportados en la literatura [28, 29], además, se tuvieron presentes interacciones que modifican la abundancia de reliquia significativamente y que no fueron consideradas en trabajos anteriores. El modelo consiste en extender al ME con dos nuevas partículas fermiónicas, un doblete escalar y dos nuevos singletes complejos, donde estas nuevas partículas servirán para generar las masas de los neutrinos en un diagrama de Feynman a dos bucles. Cada una de estas nuevas partículas están cargadas bajo la simetría global  $Z_5$  mientras que las demás partículas del MO serán neutras bajo esta simetría. En este contexto, el autoestado de masa más liviano de la componente neutra del nuevo doblete, así como una de las partículas escalares recién introducidas, se postulan como posibles candidatas a ser MO, cuya abundancia de reliquia conjunta concuerda con las observaciones experimentales. Asimismo, este enfoque posibilita la creación de un mecanismo para conferir masas a los neutrinos mediante un diagrama de dos bucles. Se obtienen los valores de los acoplamientos de Yukawa, utilizando la parametrización de Casas-Ibarra [30], de manera que sean compatibles con las diversas restricciones experimentales.

El trabajo se organizó de la siguiente forma: en el Capítulo 2 se abordan aspectos importantes del ME y su relevancia en nuestra comprensión del Universo. También se discuten algunas características y datos de la MO, se proporciona el valor numérico de la abundancia de reliquia observada y se mencionan brevemente algunos experimentos que trabajan en su detección. El capítulo concluye con una discusión sobre algunas generalidades de los neutrinos. En el Capítulo 3, se presentan algunos resultados de uno de los modelos basados en  $Z_5$  que sirvieron de base para este trabajo. Se muestra su lagrangiano y las condiciones de estabilidad de las partículas de MO. Luego, se continúa con el modelo utilizado en este documento, proporcionando información sobre las nuevas partículas añadidas y presentando expresiones para su sector escalar y fermiónico. Se aborda específicamente los términos que contribuyen a la generación de masas de neutrinos y se proporciona una expresión analítica para la matriz de masa. Finalmente, en el Capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos de la fenomenología del modelo, y en el Capítulo 5 se encuentran las conclusiones.

# Capítulo 2

## Modelo estándar, materia oscura y neutrinos

En este capítulo se habla del ME y su importancia en la física. Además, se presentarán aspectos introductorios para la MO y los neutrinos.

### 2.1. Modelo estándar

El ME de la física de partículas tiene sus cimientos en la teoría cuántica de campos y constituye una estructura teórica que describe las partículas elementales y las fuerzas fundamentales que permiten su interacción. Desarrollado a lo largo del siglo XX, ha llegado a ser el marco conceptual más aceptado para comprender el mundo subatómico [31]. La fundación del ME se remonta a la década de 1960, cuando se logró unificar las teorías del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil en una sola teoría conocida como la teoría electrodébil. Esta unificación fue posible gracias a los trabajos de varios físicos, incluyendo a Sheldon Glashow, Abdus Salam y Steven Weinberg, quienes recibieron el Premio Nobel de Física en 1979 [32].

El ME se basa en dos pilares fundamentales: las partículas elementales y las interacciones fundamentales. En términos de partículas elementales, el modelo postula que la materia está compuesta por quarks y leptones. Los quarks de la primera familia son las partículas que forman a los protones y neutrones en los núcleos atómicos, mientras que los leptones incluyen al electrón,

al muón y tauón y a sus respectivos neutrinos. Además, la teoría también incorpora partículas portadoras de las interacciones fundamentales, como el fotón (interacción electromagnética), los bosones W y Z (interacción nuclear débil) y los gluones (interacción nuclear fuerte).

Uno de los mayores logros del ME es su capacidad para predecir y explicar una amplia gama de fenómenos físicos. Por ejemplo, ha permitido comprender la estructura interna de los protones y neutrones, explicar las interacciones de partículas en aceleradores de partículas como el Gran Colisionador de Hadrones (LHC), estimar con gran precisión el momento magnético del electrón [33] y predecir la existencia de partículas como el bosón de Higgs, cuyo descubrimiento en 2012 fue un hito importante en la física de partículas [34].

Por otro lado, el ME ha proporcionado una base teórica sólida para el estudio de la cosmología y la comprensión de los primeros momentos después de la creación del Universo y también ha ayudado a explicar la formación y evolución del Universo, así como a entender la abundancia relativa de elementos en el cosmos [35]. Sin embargo, el ME también tiene algunas limitaciones y deficiencias: no incluye la gravedad en su formulación actual, es decir, la gravedad descrita por la relatividad general de Einstein no ha sido incorporada en el ME, lo que dificulta su aplicación en escalas cósmicas y en la comprensión de fenómenos como la física de los agujeros negros. Por otra parte, el ME tampoco puede explicar ciertos fenómenos observados, como la existencia de la MO, y así mismo no puede explicar la asimetría entre materia y antimateria en el Universo [36].

Además, de las limitaciones mencionadas anteriormente, el ME también se enfrenta a otros desafíos importantes, uno de ellos es la comprensión de la masa de los neutrinos. Según el ME de la física de partículas, se asume que los neutrinos son partículas sin masa y que no cambian de sabor a medida que se propagan. Sin embargo, numerosos experimentos como Super-Kamiokande en Japón [37] y SNO en Canadá [4] han mostrado evidencia que los neutrinos pueden cambiar de sabor, lo que implica una violación de la conservación del sabor leptónico (LFV, por sus siglas en inglés) [38] y han revolucionado nuestra comprensión de los neutrinos, demostrando que tienen masa y que su comportamiento está gobernado por la mezcla de sus estados de sabor.

La existencia de masas de neutrinos plantea interrogantes sobre la naturaleza fundamental de estas partículas y cómo encajan en el ME. La teoría actual no puede explicar por qué los neutrinos tienen masas tan pequeñas en comparación con otras partículas elementales y por qué sus masas son tan diferentes entre sí, un problema conocido como el problema de la jerarquía de masas [39].

Otro desafío significativo es el problema de CP fuerte. La violación de la simetría de carga y paridad (CP, por sus siglas en inglés) es una propiedad fundamental en la física de partículas que está relacionada con la forma en que las partículas y las antipartículas se comportan de manera simétrica o asimétrica bajo ciertas transformaciones. El ME es capaz de explicar la violación de CP observada en las interacciones débiles, pero no puede explicar la violación de CP en las interacciones fuertes [40].

La modificación del ME es esencial para avanzar en nuestra comprensión de la física de partículas. Problemas como la inclusión de la gravedad, la explicación de la MO, la energía oscura, y la comprensión de las masas de neutrinos son elementos cruciales para lograr una teoría más completa y unificada. Resolver estos desafíos nos acercará a una descripción más precisa del Universo y sus componentes fundamentales.

## 2.2. Materia oscura

La materia oscura (MO) ha sido uno de los enigmas más persistentes en el campo de la cosmología y la astrofísica. Aunque no podemos observarla directamente, su presencia es inferida por sus efectos gravitacionales en la materia visible y la radiación en el Universo.

La idea de la MO surge a partir de las observaciones realizadas por el astrónomo suizo Fritz Zwicky en la década de 1930 [41]. Al estudiar las velocidades de las galaxias en el Cúmulo de Coma, Zwicky concluyó que la cantidad de materia visible era insuficiente para mantener unidas a las galaxias en el cúmulo. Propuso entonces la existencia de una "materia no luminosa" que proporcionaba la gravedad adicional necesaria para mantener la cohesión del cúmulo. Sin embargo, su propuesta fue en gran medida ignorada durante muchos años [11]. Y no fue hasta la década de 1970 que la idea de la MO comenzó a ganar aceptación generalizada. La astrónoma

estadounidense Vera Rubin realizó estudios detallados de las velocidades de rotación de las galaxias y descubrió que las estrellas en las regiones exteriores de las galaxias se movían más rápido de lo que se esperaría si solo estuvieran sujetas a la atracción gravitacional de la materia visible [42]. Este descubrimiento respaldó la noción de que había una cantidad significativa de materia invisible que afectaba la dinámica de las galaxias.

Observaciones posteriores, como por ejemplo el estudio de las anisotropías en la radiación cósmica de fondo [43] y la formación de estructuras a gran escala en el Universo, han proporcionado más evidencia de la existencia de la MO. La radiación cósmica de fondo, que es la radiación remanente del Big Bang, muestra pequeñas fluctuaciones que corresponden a las semillas primordiales de la estructura cósmica. La formación de galaxias, cúmulos de galaxias y supercúmulos se puede explicar mejor si se asume que la MO es una parte significativa del Universo [44].

En cuanto al porcentaje de densidad de energía del Universo, las estimaciones actuales sugieren que aproximadamente el 27 % del contenido total del Universo está compuesto de MO [45]. Esto se compara con alrededor del 5 % atribuido a la materia bariónica, que constituye la materia ordinaria compuesta de átomos, y el 68 % restante asociado a la energía oscura [46], que es otra entidad por conocer y es responsable de la aceleración de la expansión del Universo [47].

En lo que respecta a las propiedades fundamentales de la MO, la evidencia observacional sugiere que no puede estar compuesta por protones, neutrones o electrones, ya que estos constituyentes bariónicos no pueden explicar las propiedades y los efectos observados. Por lo tanto, se han propuesto la existencia de partículas no bariónicas para dar cuenta de la MO en el Universo [14]. Otra de las propiedades fundamentales de la MO es su interacción gravitacional: aunque no interactúa directamente con la luz u otras formas de radiación electromagnética, la MO ejerce influencia gravitacional sobre la materia visible y la estructura a gran escala del Universo. Esta interacción gravitacional es crucial para explicar los efectos observados, como las velocidades de rotación de las galaxias y la distribución de la materia en los cúmulos galácticos.

A diferencia de las partículas bariónicas, que pueden interactuar electromagnéticamente a través de la fuerza electromagnética, la MO no experimenta esta interacción. Sin embargo, se ha

planteado la posibilidad de que pueda tener una carga eléctrica muy pequeña [48]. Esta ausencia de interacción electromagnética hace que la MO sea intrínsecamente invisible a los métodos de detección basados en la radiación electromagnética, lo que dificulta su estudio directo.

Con respecto al tema de la creación de MO, se ha abordado mediante dos mecanismos principales: freeze-out y freeze-in. En el mecanismo de freeze-out, las partículas de MO se crean en abundancia durante las primeras etapas del Universo cuando están en equilibrio térmico con las partículas del ME. A medida que el Universo se expande y enfría, la tasa de interacciones disminuye, y las partículas de MO "se congelan" fuera de equilibrio térmico, estableciendo así su densidad observada. En contraste, el mecanismo de freeze-in sugiere que la MO se genera de manera continua a partir de procesos de decaimiento o desintegración de partículas del ME. En este caso, las partículas de MO no alcanzan el equilibrio térmico con el plasma primordial y se acumulan lentamente a lo largo del tiempo cósmico. Ambos mecanismos ofrecen perspectivas diferentes sobre la producción de MO y tienen implicaciones distintas para la búsqueda experimental y observacional de estas partículas en el Universo actual.

En el estudio de la MO, se han sugerido varios modelos teóricos para describir las partículas que podrían constituir esta misteriosa forma de materia. Uno de los modelos más populares es el de las partículas WIMPs (Weakly Interacting Massive Particles) [49], que son partículas hipotéticas masivas que interactúan con muy baja intensidad con la materia visible. Las WIMPs han sido propuestas como candidatas prometedoras debido a su capacidad para explicar la abundancia observada de MO en el Universo, que de acuerdo con la colaboración PLANCK es  $\Omega h^2 = 0,120 \pm 0,001$  [13]. Sin embargo, a pesar de décadas de búsqueda, aún no se ha logrado detectar ninguna señal de las WIMPs.

Existe una amplia comunidad científica con el objetivo de detectar la MO, donde sus principales estrategias son la detección directa, la detección indirecta, y la producción en colisionadores. Los experimentos de detección directa de MO intentan medir la pequeña energía de retroceso que experimenta un núcleo, dentro de un material, después que este colisiona con una partícula de MO perteneciente a al halo de nuestra galaxia. Alguno de los principales experimentos de detección directa son XENON1T [50], LUX [51], LZ [52] y Darwin [53]. Estos experimentos

encabezan las cotas existentes para las masas de la MO.

Por otro lado, los experimentos de detección indirecta buscan medir el flujo de partículas estables que brinda el ME, y que se producirían por aniquilaciones o desintegraciones de partículas de MO, entre ellas, se miden los fotones, electrones, positrones y otras partículas, las cuales se consideran el mejor canal para identificar las propiedades de la MO ya que preservan la información espacial y espectral de la señal. Algunos de estos experimentos actuales son Fermi-LAT [54], H.E.S.S [55], IceCube [56].

En lo que respecta a la producción de MO en colisionadores, se tienen los experimentos como el LHC [57] (CMS [58] y ATLAS [59]), donde la idea principal es de que si la MO interactúa de alguna manera con las partículas del ME, podría ser posible producirla y detectarla en este tipo de experimentos, ya que en los colisionadores de partículas se aceleran partículas a altas velocidades y las hacen colisionar. En estas colisiones, la energía disponible puede ser suficientemente grande para producir partículas de MO, si estas existen y están dentro del alcance del experimento.

## 2.3. Neutrinos

Los neutrinos son partículas subatómicas eléctricamente neutras que pertenecen a la familia de los leptones. Según el ME de la física de partículas, existen tres tipos de neutrinos: el neutrino electrónico ( $\nu_e$ ), el neutrino muónico ( $\nu_\mu$ ) y el neutrino tauónico ( $\nu_\tau$ ). Cada tipo de neutrino está asociado con su respectivo leptón cargado: electrón, muón y tauón.

Una propiedad fundamental de los neutrinos es que interactúan muy débilmente, esto significa que cuando un neutrino interactúa con la materia, tienen una probabilidad extremadamente baja de interactuar con los átomos. Esta característica hace que los neutrinos sean difíciles de detectar y estudiar experimentalmente.

Durante años, se sostuvo la idea de que los neutrinos carecían de masa. No obstante, experimentos realizados en las últimas décadas han revelado que, aunque su masa es pequeña en comparación con la de otras partículas subatómicas, los neutrinos tienen masa. La confirma-

ción de esta propiedad se ha logrado mediante la observación de las oscilaciones de neutrinos, un fenómeno en el cual estas partículas cambian de un tipo a otro mientras se desplazan en el espacio. También, se ha demostrado que sus números individuales de sabor leptónico no se conservan. Por ejemplo, en un haz de neutrinos de un sabor determinado (electrón, muón o tau), después de propagarse una distancia finita, ya no contiene solo neutrinos de ese sabor inicial.

La existencia de las oscilaciones de neutrinos también implica que los neutrinos se presentan como mezclas de tres estados de masa diferentes, y es por esto que sus autoestados de sabor (electrón, muón y tau) se pueden escribir como una combinación lineal de los autoestados de masa a través de una matriz de rotación conocida como la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakasawa-Sakata (PMNS) [60]:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

en esta expresión,  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  y  $\nu_\tau$  representan los autoestados de sabor de los neutrinos, mientras que  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  y  $\nu_3$  representan los autoestados de masa. Los elementos  $U_{ei}$ ,  $U_{\mu i}$  y  $U_{\tau i}$  de la matriz PMNS son las componentes que relacionan los autoestados de sabor y los autoestados de masa, y se conocen como elementos de mezcla. Estos elementos,  $U_{li}$ , son números complejos y su módulo al cuadrado proporciona la probabilidad de que un neutrino de sabor  $\alpha$  se convierta en un neutrino de masa  $\beta$ .

Es importante destacar que la matriz PMNS es unitaria, lo que significa que cumple con la condición:

$$U^\dagger U = I, \quad (2.2)$$

donde  $U^\dagger$  representa el conjugado hermítico de  $U$  y  $I$  es la matriz identidad. Esta condición de unitariedad garantiza la conservación de la probabilidad total y la ortogonalidad de los autoestados.

Además, los neutrinos poseen tres ángulos de mezcla, conocidos como ángulo de mezcla solar,



atmosférico y de reactor, representados por  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  y  $\theta_{13}$ , respectivamente. Estos ángulos de mezcla permiten parametrizar la matrix PMNS como [61]:

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{-i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{-i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\eta_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\eta_3} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

donde  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$  y  $\theta_{13}$  son los ángulos de mezcla,  $\delta$  es la fase de violación de CP mientras que  $\eta_2$  y  $\eta_3$  son fases de Majorana. Las funciones  $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$  y  $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$  representan los cosenos y senos de los ángulos de mezcla respectivos.

Debido a la incertidumbre en las mediciones de la masa de los neutrinos, las cuales que se encuentran limitadas por valores máximos conocidos [10], los neutrinos se representan usualmente mediante tres autoestados de masa  $m_1$ ,  $m_2$  y  $m_3$ . Esto resulta en dos posibles jerarquías: la jerarquía normal, en la que  $m_1 \leq m_2 \leq m_3$ ; y la jerarquía invertida, donde  $m_3 \leq m_1 \leq m_2$  [62].

En términos de las diferencias de masa entre los neutrinos, para la jerarquía normal sus masas pueden escribirse como [61]:

$$m_1 = m_0, \quad (2.4)$$

$$m_2 = \sqrt{\Delta m_{21}^2 + m_0^2}, \quad (2.5)$$

$$m_3 = \sqrt{\Delta m_{31}^2 + m_0^2}, \quad (2.6)$$

donde la variable  $m_0$  se utiliza para representar una masa base común en la jerarquía normal de los neutrinos y las expresiones  $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$  representan las diferencias de masa al cuadrado entre los neutrinos  $i$  y  $j$ .

La elección de  $m_0$  no tiene un valor físico fundamental y se utiliza como un parámetro arbitrario para establecer las masas de los neutrinos en la jerarquía normal, ya que no representa una masa medida directamente ni tiene un impacto directo en las observaciones experimentales de las oscilaciones de neutrinos. Esta es conveniente para describir las masas absolutas de los neutrinos de manera coherente dentro del marco teórico de la jerarquía normal. Su elección no

afecta las predicciones sobre las oscilaciones de neutrinos, ya que estas dependen solo de las diferencias de masas al cuadrado.

Es importante tener en cuenta que el valor numérico específico de  $m_0$  y las diferencias de masa al cuadrado están sujetas a mediciones experimentales y en este trabajo se utilizaron los valores de  $m_0 = 0$  y los de mejor ajuste a  $1\sigma$  otorgados por [10]:

$$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} eV^2] = 7,55, \quad (2.7)$$

$$\Delta m_{31}^2 [10^{-3} eV^2] = 2,50, \quad (2.8)$$

$$\theta_{12} = 34,5^\circ, \quad (2.9)$$

$$\theta_{23} = 47,7^\circ, \quad (2.10)$$

$$\theta_{13} = 8,45^\circ. \quad (2.11)$$

Por otro lado, se sabe que para un neutrino masivo, el término de masa correspondiente en el Lagrangiano se escribe de la siguiente manera:

$$-\mathcal{L}_{\text{fermión masivo}} = m\bar{\psi}\psi, \quad (2.12)$$

donde el campo  $\psi$  es de la forma:

$$\psi = \psi_L + \psi_R. \quad (2.13)$$

Para campos de Dirac, la componente derecha es completamente independiente de la izquierda, mientras que para campos de Majorana, la componente derecha del campo es la conjugación de carga de la componente izquierda del campo:  $\psi_R = (\psi_L)^C = (\psi^C)_R$  [63], y, por lo tanto, el término de masa de Majorana puede escribirse de la siguiente manera:

$$-\mathcal{L}_{\text{masa de Majorana}} = \frac{1}{2}[M\bar{\psi}^C\psi + \text{h.c.}]. \quad (2.14)$$

En esta expresión,  $M$  es una matriz cuadrada y simétrica cuya dimensión depende del número

de especies de fermiones que existan,  $\overline{\psi^C}$  denota el campo conjugado de carga del fermión y  $\psi$  representa el campo fermiónico (en el espacio del sabor).

# Capítulo 3

## El modelo

Antes de entrar en detalle con el modelo utilizado en este trabajo, es importante resaltar algunos aspectos de uno de los modelos en los que se basó este trabajo, y es por esto que en la sección 3.1 se hablarán de algunas características importantes del modelo  $Z_5$  de dos componentes de MO de tipo escalar [29], mientras que en la sección 3.2 ya se entrará en detalle del modelo que se utilizó en este trabajo.

### 3.1. Modelo $Z_5$ de dos componentes de materia oscura

Entre las diversas teorías y modelos propuestos para explicar la naturaleza de la MO, uno de los enfoques más prometedores es el llamado modelo  $Z_5$  de MO de dos componentes. Este modelo ha captado la atención de los investigadores debido a su simplicidad y sus sólidos fundamentos teóricos, ya que esta simetría se puede obtener como el remanente de una simetría gauge  $U(1)_5$  rota [19].

En las teorías gauge, las simetrías juegan un papel crucial en la definición de las interacciones y propiedades de las partículas. La simetría  $U(1)_5$  es una simetría gauge continua, lo que significa que tiene un número infinito de posibles transformaciones caracterizadas por un parámetro continuo. Tales simetrías se encuentran a menudo en el ME de la física de partículas y sus extensiones.

Sin embargo, en muchos modelos más allá del ME, se hipotetiza que una simetría continua como  $U(1)_5$  puede no ser exacta en la naturaleza. En su lugar, puede romperse espontáneamente debido a la dinámica de la teoría. Esta ruptura puede ocurrir cuando un campo cargado bajo  $U(1)_5$  adquiere un valor de expectación de vacío diferente de cero. Cuando esto sucede, la simetría continua  $U(1)_5$  ya no es preservada por el vacío, pero un subgrupo discreto de ella permanece intacto. En este modelo en particular, el subgrupo discreto que sobrevive es la simetría  $Z_5$ .

La simetría  $Z_5$  es un grupo cíclico de orden 5, lo que significa que consta de cinco elementos distintos. Esta simetría puede dictar reglas específicas de interacción para las partículas en el modelo, proporcionando un marco sólido para las predicciones teóricas. Los remanentes de la simetría  $U(1)_5$  original, que ahora se manifiestan como  $Z_5$ , ayudan a restringir las propiedades e interacciones de las partículas del modelo, llevando a una estructura más rica y predictiva.

Por lo tanto, la simetría  $Z_5$  en el modelo de dos componentes  $Z_5$  de MO no es una elección arbitraria, sino más bien una consecuencia natural de la física subyacente que implica una simetría gauge  $U(1)_5$  rota. Este mecanismo de ruptura de simetría gauge otorga robustez teórica al modelo y se alinea con la idea de que las simetrías observadas a bajas energías podrían ser remanentes de simetrías más fundamentales presentes a energías más altas.

El modelo  $Z_5$  se basa en la idea de que la MO está compuesta por dos componentes diferentes que interactúan débilmente entre sí y con la materia visible. Estas dos componentes son representadas por partículas exóticas que pertenecen a una representación del grupo  $Z_5$ , lo que le da su nombre al modelo. La presencia de dos componentes de MO permite explicar fenómenos observados, como la abundancia de reliquia de MO del Universo.

Uno de los aspectos más interesantes del modelo  $Z_5$  es su capacidad para predecir señales observables que podrían ser detectadas en experimentos de detección directa. Estas señales podrían abrir nuevas ventanas de investigación y proporcionar pruebas cruciales para validar o descartar este modelo particular de MO [29].

El modelo  $Z_5$ , consiste en extender al ME con dos nuevos campos escalares complejos,  $\phi_1$  y  $\phi_2$ , que están cargados bajo una simetría discreta  $Z_5$ . Se asume que los nuevos campos son singletes

del ME y que las partículas del ME son singletes bajo  $Z_5$ .

Así, los campos  $\phi_1$  y  $\phi_2$  transforman como:

$$\phi_1 \rightarrow \omega_5 \phi_1, \quad \phi_2 \rightarrow \omega_5^2 \phi_2; \quad \omega_5 = \exp(i2\pi/5), \quad (3.1)$$

y el potencial escalar más general invariante bajo  $Z_5$  está dado por [64]:

$$\begin{aligned} V = & -\mu_H^2 |H|^2 + \lambda_H |H|^4 + \mu_1^2 |\phi_1|^2 + \mu_2^2 |\phi_2|^2 + \lambda_{41} |\phi_1|^4 + \lambda_{42} |\phi_2|^4 \\ & + \lambda_{S1} |H|^2 |\phi_1|^2 + \lambda_{S2} |H|^2 |\phi_2|^2 + \lambda_{412} |\phi_1|^2 |\phi_2|^2 \\ & + \frac{1}{2} \left[ \mu_{S1} \phi_1^2 \phi_2^* + \mu_{S2} \phi_2^2 \phi_1 + \lambda_{31} \phi_1^3 \phi_2 + \lambda_{32} \phi_1^2 \phi_2^{*3} + \text{h.c.} \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde  $H$  es el doblete de Higgs del ME y los términos dentro del corchete de la ecuación 3.2 son específicos de la simetría  $Z_5$  que se está considerando, mientras que el resto está presente para cualquier  $Z_N$  [19].

La estabilización de ambas partículas de MO se efectúa mediante la imposición de condiciones cinemáticas específicas a sus masas. En particular, se requiere que la masa de la segunda partícula de MO, representada como  $M_2$ , esté dentro del rango definido por  $\frac{M_1}{2} < M_2 < 2M_1$ , donde  $M_1$  es la masa de la partícula  $\phi_1$ , ya que así se evitan los decaimientos dados por los términos mediados por  $\mu_{S1}$  y  $\mu_{S2}$ . Además, se necesita que ninguno de los campos  $\phi$  adquiera un valor de expectación de vacío [29]. Estas condiciones son fundamentales para garantizar la estabilidad del sistema de MO y asegurar que ambas partículas interactúen de manera coherente en el marco del modelo  $Z_5$ . Al imponer esta restricción en las masas, se evita el decaimiento de estas partículas de MO y permite la coexistencia estable de ambas.

Otra de las características distintivas del modelo es que las partículas de MO y las partículas del ME están conectadas únicamente a través de interacciones mediadas por el portal de Higgs [65], por lo que escenarios del tipo freeze-in o freeze-out dependerán del valor de las constantes de acople  $\lambda_{S1}$  y  $\lambda_{S2}$  [66, 67].

Finalmente, se recalca el hecho de que la cantidad de reliquia de MO para este tipo de escenarios puede ser modificada por procesos  $2 \rightarrow 2$  [64], los cuales corresponderán a procesos

de aniquilación, procesos conversión, y procesos de semi-aniquilación de MO. La aniquilación implica que en el estado inicial hay 2 partículas de MO mientras que en el estado final no hay ninguna partícula que sea MO, el de conversión indica que en ambos estados (inicial y final) solo hay partículas de MO, pero alguna de ellas de diferente sector a la otra, y procesos de semi-aniquilación son aquellos que en el estado inicial solo hay una partícula de MO junto con alguna partícula del ME y en el estado final solo hay MO [29].

## 3.2. El modelo empleado

Se considera ahora un escenario donde al ME se le añadirán 2 nuevos campos fermiónicos  $N_1$  y  $N_2$  junto con un doblete escalar  $\eta$  y dos escalares singletes complejos  $\chi$  y  $S$ . Estos campos están cargados bajo una simetría  $Z_5$ , obteniendo así dos sectores oscuros. El contenido de partículas, al igual que sus asignaciones de carga, se muestran en la Tabla 3.1 [28].

**Cuadro 3.1:** Asignación de cargas para las partículas del modelo, donde  $L$  y  $H$  corresponden al doblete fermiónico y doblete de Higgs del ME respectivamente, y  $\omega_5 = \exp(i2\pi/5)$ .

	$L$	$H$	$N_{1,2}$	$\eta$	$\chi$	$S$
$SU(2)$	2	2	1	2	1	1
$U(1)_y$	-1/2	1/2	0	1/2	0	0
$Z_5$	1	1	$\omega_5^2$	$\omega_5^2$	$\omega_5^2$	$\omega_5$

### 3.2.1. Sector escalar

El lagrangiano escalar para este modelo es:

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\rho H)^\dagger (\mathcal{D}_\rho H) + (\mathcal{D}^\rho \eta)^\dagger (\mathcal{D}_\rho \eta) + \partial^\rho \chi^* \partial_\rho \chi + \partial^\rho S^* \partial_\rho S - \mathcal{V}, \quad (3.3)$$

donde  $\mathcal{D}^\rho$  es la derivada covariante del ME la cual se escribe como :

$$D_\rho = \partial_\rho + ig' \frac{B_\rho}{2} + ig\tau^a W_\rho^a, \quad (3.4)$$

aquí  $g = e/s_w$ ,  $g' = e/c_w$ , con  $e$  siendo la carga del electrón,  $s_w$  y  $c_w$  el seno y el coseno del ángulo de Weinberg respectivamente,  $\tau^a$  son las matrices de Pauli,  $B_\rho$  es singlete de  $U(1)$  y  $W_\rho^a$

es triplete de  $SU(2)$  dados por las expresiones:

$$B_\rho = -s_w Z_\rho + c_w A_\rho, \quad (3.5)$$

$$W_\rho^a = \begin{pmatrix} W_\rho^+ \\ c_w Z_\rho + s_w A_\rho \\ W_\rho^- \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

donde  $A_\rho$  es el campo vectorial del fotón y  $W_\rho^+$ ,  $W_\rho^-$ ,  $Z_\rho$  los bosones vectoriales intermedios o bosones débiles.

El potencial escalar invariante bajo  $Z_5$  más general viene dado por [64]:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & -\mu_H^2 |H|^2 + \lambda_H |H|^4 + \mu_\eta^2 |\eta|^2 + \lambda_\eta |\eta|^4 + \lambda_3 |\eta|^2 |H|^2 + \lambda_4 (\eta^\dagger H)(H^\dagger \eta) \\ & + \mu_\chi^2 |\chi|^2 + \lambda_\chi |\chi|^4 + \lambda_{h\chi} |\chi|^2 |H|^2 + \mu_S^2 |S|^2 + \lambda_S |S|^4 + \lambda_{hS} |S|^2 |H|^2 \\ & + \lambda_{4\eta\chi} |\eta|^2 |\chi|^2 + \lambda_{4\eta S} |\eta|^2 |S|^2 + \lambda_{4\chi S} |\chi|^2 |S|^2 \\ & + \left[ \frac{1}{2} \mu_1 \chi^\dagger S^2 + \frac{1}{2} \mu_2 \chi^2 S + \frac{1}{\sqrt{2}} \mu_3 (H^\dagger \eta) \chi^\dagger \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda_{31} S^3 \chi + \frac{1}{2} \lambda_{32} S \chi^{\dagger 3} + \frac{1}{2} \lambda_{33} S^2 \eta^\dagger H + \text{H.c.} \right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde nuevamente los términos dentro el corchete son las interacciones correspondientes a la simetría  $Z_5$  y los demás están presente en cualquier  $Z_N$ . Por simplicidad, todos los acoples se escogerán reales. Los acoples de  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ ,  $\lambda_{h\chi}$ ,  $\lambda_{hS}$  y  $\lambda_{33}$  serán los que permitan a las partículas de MO (de tipo escalar) que interactúen con el ME, por lo tanto, el modelo presenta escenarios de tipo portal de Higgs, el cual es muy conocido en la literatura.

Por otro lado, dependiendo de restricciones cinemáticas, los acoples  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\lambda_{33}$  pueden permitir el decaimiento a dos cuerpos de las partículas de MO (nótese que  $\lambda_{33}$  permite generar procesos  $2 \rightarrow 2$  de semi-aniquilación de MO), mientras que los acoples  $\lambda_{31}$ ,  $\lambda_{32}$  permiten tener procesos  $2 \rightarrow 2$  de conversión de MO y también posibilitan el decaimiento a tres cuerpos de las partículas de MO.

Finalmente, los acoples cuárticos  $\lambda_{4yy}$ , corresponden las interacciones entre las partículas de MO, mientras que  $\mu_3$  compagina a un término de mezcla. Por lo tanto, todos estos acoples



modificarán la abundancia de reliquia de la MO, teniendo así un modelo abundante en fenomenología de MO, de hecho, es posible tener escenarios de tres candidatos de MO los cuales se obtienen por ejemplo al desvanecer los acoples de  $\mu_3$  y  $\lambda_{33}$  simultáneamente o solamente  $\lambda_{33}$  y poniendo restricciones sobre las masas de las partículas, sin embargo en este trabajo no se abordó ese enfoque.

Una vez se da la ruptura espontánea de simetría, los dobletes  $H$  y  $\eta$  se pueden expresar como:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \eta^0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

donde  $h$  es el bosón de Higgs y  $v$  es el valor de expectación del vacío para  $H$  con un valor de  $v \approx 246,22$  GeV [68],  $\eta^+$  es la componente cargada del nuevo doblete y  $\eta^0$  su componente neutra. Entonces, del potencial escalar se consiguen los términos de masa para las partículas  $h$ ,  $S$  y  $\eta^\pm$ , dados por las expresiones:

$$M_S^2 = \mu_S^2 + \frac{\lambda_{hS}}{2}v^2, \quad (3.9)$$

$$M_{\eta^\pm}^2 = \mu_\eta^2 + \frac{\lambda_3}{2}v^2, \quad (3.10)$$

$$M_h^2 = \frac{\lambda_h}{2}v^2. \quad (3.11)$$

Además, como el potencial escalar contiene el termino de mezcla ( $\mu_3$ ) entre los escalares neutros  $\eta^0$  y  $\chi$ , se sigue que en la base de  $(\eta^0 \ \chi)^T$  la matriz de mezcla se escribe como:

$$M_{\eta\chi}^2 \equiv \begin{pmatrix} M_\eta^2 & m_{\eta\chi}^2 \\ m_{\eta\chi}^2 & M_\chi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_\eta^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4)v^2 & \frac{1}{2}\mu_3v \\ \frac{1}{2}\mu_3v & \mu_\chi^2 + \frac{1}{2}\lambda_{h\chi}v^2 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Al diagonalizar esta matriz, se obtienen los auto estados de masa  $\phi_1$  y  $\phi_2$  al igual que sus masas

$M_{\phi_1}$  y  $M_{\phi_2}$  dados por [28]:

$$\begin{pmatrix} \eta^0 \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_\xi & s_\xi \\ -s_\xi & c_\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{pmatrix} \equiv \mathcal{O}_{\eta\chi} \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{O}_{\eta\chi}^T M_{\eta\chi}^2 \mathcal{O}_{\eta\chi} = \text{diag}(M_{\phi_2}^2, M_{\phi_1}^2),$$

$$2M_{\phi_2, \phi_1}^2 = M_\eta^2 + M_\chi^2 \pm \sqrt{(M_\eta^2 - M_\chi^2)^2 + 4m_{\eta\chi}^4}, \quad \sin(2\xi) \equiv s_{2\xi} = \frac{\mu_3 v}{M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_1}^2}, \quad (3.13)$$

siendo  $c_\xi = \cos \xi$ ,  $s_\xi = \sin \xi$ .

Por lo tanto, se sigue que:

$$\eta_0 = c_\xi \phi_2 + s_\xi \phi_1, \quad (3.14)$$

$$\chi = -s_\xi \phi_2 + c_\xi \phi_1. \quad (3.15)$$

En total este modelo contiene 6 parámetros dimensionales ( $\mu_\eta$ ,  $\mu_\chi$ ,  $\mu_S$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  y  $\mu_3$ ) y 13 adimensionales ( $\lambda_\eta$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ ,  $\lambda_\chi$ ,  $\lambda_{h\chi}$ ,  $\lambda_S$ ,  $\lambda_{hS}$ ,  $\lambda_{4\eta\chi}$ ,  $\lambda_{4\eta S}$ ,  $\lambda_{4\chi S}$ ,  $\lambda_{31}$ ,  $\lambda_{32}$  y  $\lambda_{33}$ ), pero los parámetros  $\lambda_S$ ,  $\lambda_\eta$  y  $\lambda_\chi$  son irrelevantes para la fenomenología de la MO y se pueden fijar ya que son términos de auto interacción. Por otro lado, los parámetros  $\mu_\eta$ ,  $\mu_S$  y  $\mu_\chi$  pueden intercambiarse por la masa física de los campos escalares. Además, el parámetro  $\mu_3$  depende del seno del ángulo de mezcla, por lo tanto los parámetros libres del modelo son:

$$M_{\eta^\pm}, M_S, M_{\phi_1}, M_{\phi_2}, \lambda_{hS}, \lambda_{h\chi}, \lambda_{4\eta\chi}, \lambda_{4\eta S}, \lambda_{4\chi S}, \mu_1, \mu_2, \sin \xi, \lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33} \text{ y } \lambda_L, \quad (3.16)$$

donde  $\lambda_L$  es un parámetro que se introduce para parametrizar el parámetro dependiente  $\lambda_4$  de la forma:

$$\lambda_4 = 2\lambda_L - \lambda_3. \quad (3.17)$$

Por lo tanto los demás parámetros dependientes son:  $\mu_\eta$ ,  $\mu_\chi$ ,  $\mu_S$ ,  $\lambda_3$  y toman las siguientes

expresiones:

$$\mu_S^2 = M_S^2 - \frac{1}{2}\lambda_{Sh}v^2, \quad (3.18)$$

$$\mu_\chi^2 = M_{\phi_1}^2 \cos^2 \xi + M_{\phi_2}^2 \sin^2 \xi - \frac{1}{2}\lambda_{\chi h}v^2, \quad (3.19)$$

$$\mu_\eta^2 = M_{\phi_2}^2 \cos^2 \xi + M_{\phi_1}^2 \sin^2 \xi - \lambda_L v^2, \quad (3.20)$$

$$\lambda_3 = 2(M_{\eta^\pm}^2 - \mu_\eta^2)/(v^2). \quad (3.21)$$

### 3.2.2. Sector fermiónico y masa de neutrinos

Entre las nuevas partículas incorporadas se encuentran dos campos fermiónicos de tipo vector,  $N_{1,2}$ , cuya asignación de carga se muestra en la tabla 3.1 ( $N_{1,2} \sim \omega_5^2$ ). Estos campos se añadieron para proporcionar un mecanismo que permita generar la matriz de masa de neutrinos a dos bucles.

Por lo tanto, la Lagrangiana que involucra el nuevo contenido de fermiones se lee como:

$$\mathcal{L} \supset - M_k \bar{N}_k P_L N_k - y_{\alpha k} \bar{L}_\alpha \tilde{\eta} P_R N_k - \frac{1}{2} f_{jk}^R \bar{N}_j P_R N_k^c S^\dagger - \frac{1}{2} f_{jk}^L \bar{N}_j P_L N_k^c S^\dagger + \text{H.c.}, \quad (3.22)$$

donde  $M_k$  representa la masa de los nuevos fermiones. En esta expresión se ha hecho uso de la notación de sumatoria de Einstein con  $\alpha = 1, 2, 3$ , mientras que  $j, k = 1, 2$ .

Además,  $P_R$  y  $P_L$  son los operadores proyector derecho y proyector izquierdo respectivamente, definidos como  $P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ . Los campos  $L_1, L_2, L_3$  corresponden a los dobletes, electrónico ( $L_e$ ), muónico ( $L_\mu$ ) y tauónico ( $L_\tau$ ) respectivamente, del ME. Por otro lado,  $y_{\alpha k}$  es la matriz de los acoples de Yukawa y permite la interacción entre los campos escalares  $\phi_1, \phi_2$  con los singletes fermiónicos  $N_k$ , con los leptones cargados y neutrinos del ME. Por otra parte, esta interacción induce un mecanismo a nivel de dos bucles de la generación de masa de los neutrinos.

Como solamente se añadieron 2 nuevos fermiones, la matriz de Yukawa toma la forma de:

$$y = \begin{pmatrix} y_{e1} & y_{e2} \\ y_{\mu 1} & y_{\mu 2} \\ y_{\tau 1} & y_{\tau 2} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Ahora, como:

$$\tilde{\eta} \equiv i\tau_2\eta^*, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

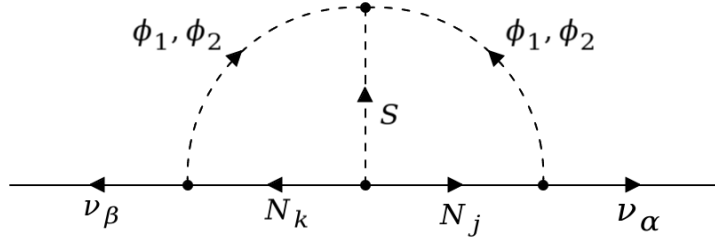
y utilizando la ecuación 3.14 se sigue entonces que:

$$-y_{\alpha k} \bar{L}_\alpha \tilde{\eta} P_R N_k = y_{\alpha k} [\bar{l}_\alpha^- \eta^- - \bar{\nu}_\alpha (c_\xi \phi_2^* + s_\xi \phi_1^*)] P_R N_k. \quad (3.25)$$

Los acoplos  $f_{jk}^R$  y  $f_{jk}^L$  son matrices arbitrarias completamente simétricas que permiten tener la interacción entre los nuevos campos fermiónicos  $N_k$  con el singlete escalar  $S$ , donde dicha interacción se utiliza para completar el diagrama de masas de neutrinos. Además, para evitar el decaimiento de la partícula  $S$  se impone entonces que  $M_S < 2M_1$ , donde  $M_1$  es la masa del nuevo fermión más ligero.

Adicionalmente, para poder generar un diagrama para la masa de los neutrinos es necesario considerar el término del lagrangiano escalar dado por:  $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}\mu_2 (s_\xi^2 \phi_2^2 - 2c_\xi s_\xi \phi_1 \phi_2 + c_\xi^2 \phi_1^2) S + \text{H.c.}$ .

Como se mencionó anteriormente, los neutrinos adquieren masas de Majorana a través de diagramas de dos bucles, mediados por las nuevas partículas cargadas bajo  $Z_5$  como se ilustra en la Figura 3.1, por lo que la matriz de masa de neutrinos resultante, definida mediante  $\mathcal{L} \supset -\frac{1}{2}\mathcal{M}_{\alpha\beta} \bar{\nu}_\alpha \nu_\beta^c + \text{H.c.}$ , se expresa como A.88:



**Figura 3.1:** Diagrama de Feynman para la generación de masa de neutrinos a nivel de dos bucles.

$$[\mathcal{M}_\nu]_{\alpha\beta} = \frac{\mu_2 s_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} y_{\alpha j} (f_{jk}^L C_{jk}^L + f_{jk}^R C_{jk}^R) y_{\beta k} \quad (3.26)$$

$$= \sum_k y_{\alpha j} \tilde{M}_{jk} y_{\beta k} = [y \tilde{M} y^T]_{\alpha\beta}, \quad (3.27)$$

donde  $\tilde{M}_{jk} = (f_{jk}^L C_{jk}^L + f_{jk}^R C_{jk}^R)$  y las funciones de loop  $C_{jk}^L$  y  $C_{jk}^R$  vienen dadas por las expresiones:

$$C_{jk}^L = \int_0^1 dudvdw \frac{\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \left[ \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right. \\ \left. - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) + \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right], \quad (3.28)$$

$$C_{jk}^R = \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 dudvdw \frac{\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right. \\ \left. - \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) + \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right], \quad (3.29)$$

con:

$$\mathcal{I}_L(a, b) = \frac{a^2 \ln(a)}{(1-a)(a-b)} + \frac{b^2 \ln(b)}{(1-b)(b-a)}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{I}_R(a, b) = \frac{a \ln(a)}{(1-a)(a-b)} + \frac{b \ln(b)}{(1-b)(b-a)}, \quad (3.31)$$

$$M_{\phi_1 j S}^2 = \frac{u M_{\phi_1}^2 + v M_j^2 + w M_S^2}{w(1-w)}, \quad M_{\phi_2 j S}^2 = \frac{u M_{\phi_2}^2 + v M_j^2 + w M_S^2}{w(1-w)}. \quad (3.32)$$

El cálculo explícito de la deducción de estas ecuaciones se encuentra en el apéndice A.

### 3.2.3. LFV

Los procesos de violación del sabor de leptones cargados son una señal muy fuerte de física más allá del ME, ya que este tipo de procesos están prohibidos en el ME y debido a que como en este modelo hay nuevas interacciones de Yukawa entre las nuevas partículas y los leptones del ME es importante tener en cuenta este tipo de procesos a la hora de tener valores para los acoples de Yukawa.

Pues bien, debido a la existencia del nuevo doblete  $\eta$ , el cual se acopla a los bosones gauge mediante el término cinético  $(\mathcal{D}^\rho \eta)^\dagger (\mathcal{D}_\rho \eta)$ , se tiene un acoplamiento con el fotón del ME con la partícula cargada  $\eta^\pm$  y además junto con  $N_k$  se inducen procesos que violan el sabor leptónico a nivel de bucle de tipo  $l_\beta \rightarrow l_\alpha + \gamma$  [28, 69] cuyo diagrama se muestra en la figura 3.2.

La razón para este proceso está dado por [70]:

$$\text{Br}(l_\beta \rightarrow l_\alpha + \gamma) = \frac{3\alpha_{em}\text{Br}(l_\beta \rightarrow l_\alpha \nu_\beta \bar{\nu}_\alpha)}{64\pi G_F^2 M_{\eta^\pm}^4} \left| \sum_k y_{\alpha k} y_{\beta k}^* F_2 \left( \frac{M_k^2}{M_\eta^2} \right) \right|^2, \quad (3.33)$$

donde  $G_F$  es la constante de Fermi,  $\alpha_{em} = e^2/4\pi$  y la función  $F_2$  está definida como:

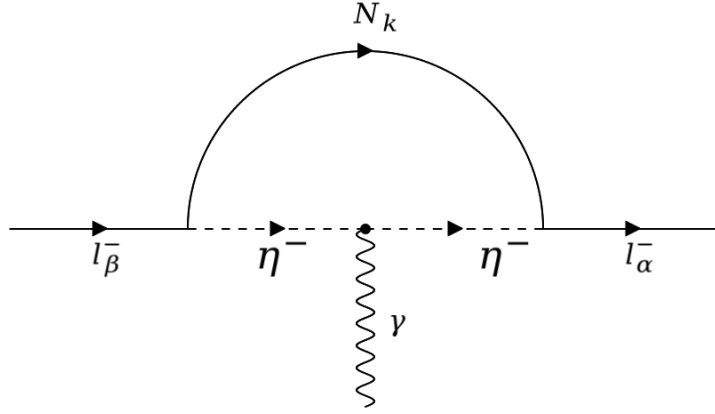
$$F_2(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2 + 2x^3 - 6x^2 \ln x}{6(1-x)^4}, \quad (3.34)$$

se puede apreciar que si  $x \gg 1$  entonces  $F_2(x) \simeq 1/(3x)$  y si, por el contrario,  $x \ll 1$  entonces  $F_2(x) \simeq 1/6$ , por lo que la relación entre las masas del nuevo doblete y los nuevos fermiones afectara en gran medida este proceso.

Resultados experimentales muestran que [71–73] :

$$\begin{aligned} \text{Br}(\mu \rightarrow e \nu \bar{\nu}) &\approx 1, & \text{Br}(\mu \rightarrow e \gamma) &< 5,7 \times 10^{-13}, \\ \text{Br}(\tau \rightarrow e \nu \bar{\nu}) &= 0,1783 \pm 0,0004, & \text{Br}(\tau \rightarrow e \gamma) &< 3,3 \times 10^{-8}, \\ \text{Br}(\tau \rightarrow \mu \nu \bar{\nu}) &= 0,1741 \pm 0,0004, & \text{Br}(\tau \rightarrow \mu \gamma) &< 4,4 \times 10^{-8}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

donde los valores de la derecha de la ecuación 3.35 son las actuales cotas para estos procesos.



**Figura 3.2:** Diagrama de Feynman para el proceso  $l_\beta^- \rightarrow l_\alpha^- + \gamma$ .

Pues bien, existen técnicas que permiten usar los datos de experimentos de neutrinos como parámetros de entrada para obtener los valores de los acoplos de Yukawa y así garantizar que se puedan reproducir correctamente las masas (la diferencia de masas al cuadrado) y los ángulos de mezcla de los neutrinos medidos experimentalmente [30, 61], por lo que utilizando la parametrización maestra de la masa de neutrinos de Majorana [74], obtenemos que:

$$y^T = iV^\dagger \Sigma^{-1/2} R D_{\sqrt{m_\nu}} U^\dagger, \quad (3.36)$$

donde  $D_{\sqrt{m_\nu}} = \text{diag}(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$  es una matriz diagonal que contiene los valores de la masa de los neutrinos dadas en las ecuaciones 2.4, 2.5 y 2.6.  $V$  se obtiene de la descomposición en valores singulares de la matriz  $\tilde{M}$ , ecuación 3.27, tal que  $V^T \tilde{M} V = \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2)$  con  $V^T V = 1$ .  $U$  es la matriz de mezcla leptónica, ecuación 2.3, y  $R$  es una matriz compleja y ortogonal:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta \\ A \sin \theta & A \cos \theta \end{bmatrix},$$

con  $\theta$  tomado un valor aleatorio entre  $[0, 2\pi]$  y escogiendo un valor aleatorio entre 1 o  $-1$  para  $A$ .

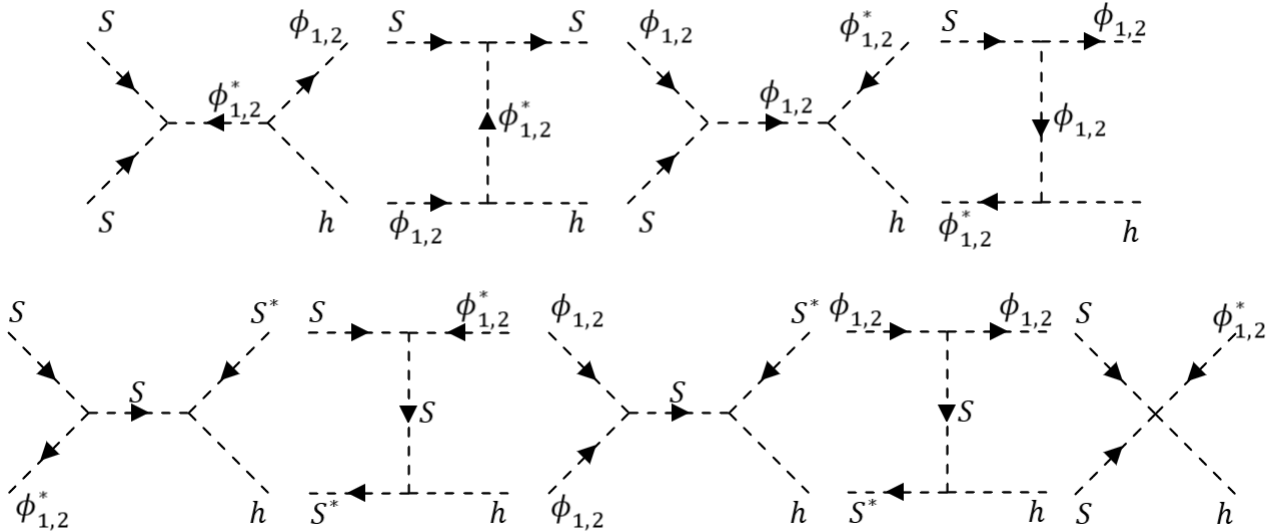
### 3.2.4. Materia Oscura

Es sabido que cuando dos o más campos tienen la misma asignación de cargas bajo una simetría  $Z_N$ , solo el más ligero puede ser estable y, por lo tanto, ser candidato a MO [19]. Este modelo presenta dos sectores oscuros: las partículas que están cargadas bajo  $Z_5$  por  $\omega_5$  y las que lo están por  $\omega_5^2$ . Por tal motivo, para este escenario la partícula  $S$  siempre será candidato a MO (ya que es la única partícula con asignación de carga  $\omega_5$ ). Con respecto al otro sector (carga  $\omega_5^2$ ), se puede tener como otro posible candidato a MO a la partícula  $N_1$  o  $\phi_1$ . Para garantizar que el modelo describa un escenario de MO de dos componentes, las masas de estas partículas tienen que satisfacer:

$$\frac{M_i}{2} < M_S < 2M_i, \quad (3.37)$$

donde  $M_i$  es la masa más liviana de MO.

Como se vio anteriormente, en el modelo la MO se conecta con las partículas del ME a través de las interacciones con el Higgs (las correspondientes a los acoplos:  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \lambda_{hS}$ ), por tal motivo



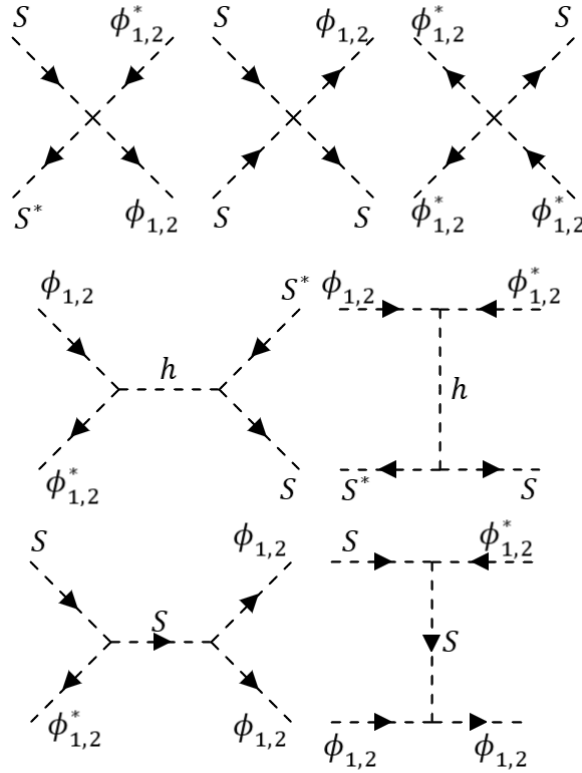
**Figura 3.3:** Procesos de semi-aniquilación de materia oscura. Superior: mediante un acoplamiento trilineal  $\mu_1$  y una interacción con el Higgs  $\lambda_3$  (los dos primeros diagramas) y un acoplamiento  $\mu_2$  junto con  $\lambda_3$  (los dos últimos diagramas). Reemplazando  $\mu_1 \rightarrow \lambda_{33}$  y  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \mu_3$  se obtienen diagramas similares. Inferior: mediante los acoplamientos  $\mu_1$  y  $\lambda_{hS}$  (los dos primeros diagramas), a través de  $\mu_2$  junto con  $\lambda_{hS}$  (el tercer y cuarto diagrama) y solamente con la interacción de  $\lambda_{33}$  (último diagrama).



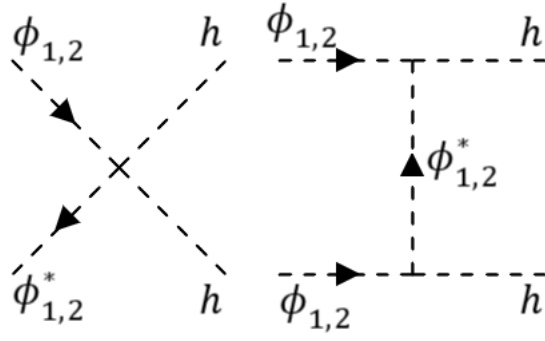
según los valores de estos acoples se pueden tener diferentes escenarios para la abundancia de reliquia de MO (freeze-in o freeze-out).

Los procesos  $2 \rightarrow 2$  que pueden modificar la abundancia de reliquia de la MO corresponderán a tres tipos [29]: procesos de aniquilación (donde solo se verán involucrados dos partículas del ME), procesos de semi-aniquilación (solo hay involucrada una partícula del ME) y finalmente procesos de conversión de MO (donde ninguna partícula del ME está involucrada).

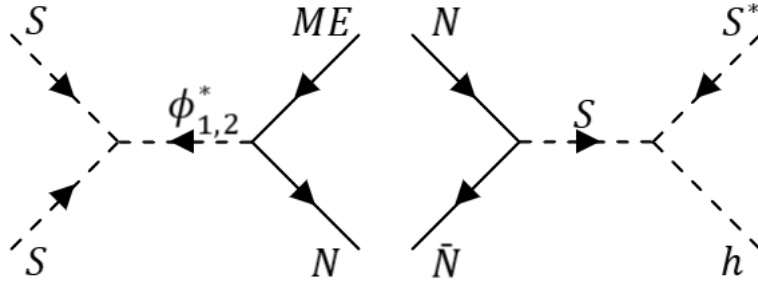
Empezando el análisis por el sector escalar, la partícula  $S$  siempre será candidato a ser MO, por lo que se utilizara la notación de  $\phi_{1,2}$  para denotar al otro candidato. La figura 3.3 muestra los procesos de semi-aniquilación de MO del modelo. En su mayoría estos procesos están mediados por acoplos trilineales ( $\mu_1, \mu_2, \lambda_{33}$ ) junto con un acoplamiento al Higgs, este tipo de procesos reciben múltiples contribuciones que se obtienen al hacer el intercambio de:  $\mu_1 \rightarrow \lambda_{33}$  y  $\lambda_3 \rightarrow$



**Figura 3.4:** Procesos de conversión de materia oscura. Superior: mediante un acoplamiento cuártico  $\lambda_{4\eta s}$  (primer diagrama), un diagrama similar se obtiene al sustituir  $\lambda_{4\eta s}$  por  $\lambda_{4\chi s}$ , mediante el acople  $\lambda_{31}$  (segundo diagrama) y mediante  $\lambda_{32}$  (tercer diagrama). Medio: mediante los acoplos  $\lambda_3$  y  $\lambda_{hs}$  (primer diagrama) diagramas similares se obtienen al intercambiar  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \mu_3$ . Inferior: mediante interacciones trilineales  $\mu_1$  y  $\mu_2$  (primer y segundo diagrama), diagramas similares se obtienen al reemplazar  $\mu_1 \rightarrow \lambda_{33}$ .



**Figura 3.5:** Procesos de aniquilación de materia oscura: mediante los acoplos  $\lambda_3$  (primer diagrama), diagramas similares se obtienen al reemplazar  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_{h\chi}$  y también por  $\lambda_{hs}$  cambiando a  $\phi$  por  $S$ . Mediante los acoplos  $\mu_3$  y  $\lambda_3$  (segundo diagrama), diagramas similares se obtienen al sustituir  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_{h\chi}$ .

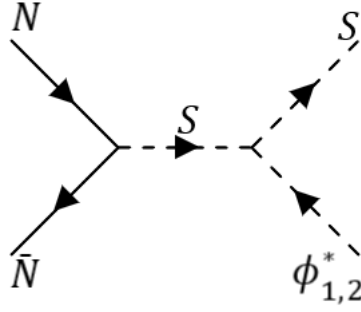


**Figura 3.6:** Proceso de semi-aniquilación de materia oscura donde una de las partículas de materia oscura es fermiónica, esta dado mediante los acoplos  $\mu_1$  (o  $\lambda_{33}$  o también con  $\mu_2$  donde cambiaría un  $S$  por un  $\phi$ ) y el acoplamiento de Yukawa (primer diagrama), también mediante las interacciones de  $\lambda_{hs}$  junto con  $f_{jk}^{L,R}$  (segundo diagrama).

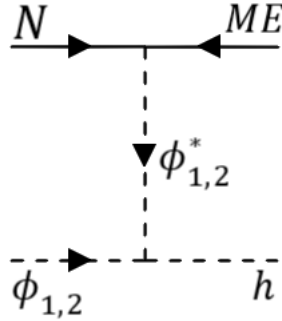
$\lambda_4, \lambda_{h\chi}, \mu_3$ . Por último, se aprecia que solo hay una interacción, la cual está mediada por  $\lambda_{33}$ , que por sí misma genera un proceso de semi-aniquilación. En la figura 3.4 se presentan los procesos de conversión de MO, donde se puede notar que los acoplamientos cuárticos  $\lambda_{4\eta s}$  y  $\lambda_{4\eta s}$  solo contribuyen a estos procesos, mientras que los demás acoplamientos involucrados en los procesos de semi-aniquilación también contribuyen a los procesos de conversión de MO.

En última instancia, los procesos de aniquilación de MO serán obtenidos mediante los acoplos de  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \lambda_{hs}$  y mediante el canal t del acople de  $\mu_3$  junto con los acoplos ya mencionados exceptuando  $\lambda_{hs}$ , estos diagramas se observan en la figura 3.5.

En lo que respecta al sector fermiónico, la partícula  $S$  seguirá siendo MO, mientras que ahora



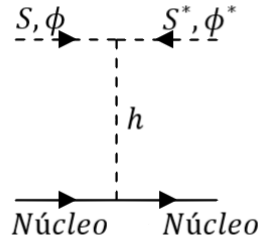
**Figura 3.7:** Proceso de conversión de materia oscura donde una de las partículas de materia oscura es fermiónica, está dado por los acoples de  $f_{jk}^{L,R}$  y  $\mu_1$  (o  $\lambda_{33}$ ).



**Figura 3.8:** Proceso de aniquilación de materia oscura donde una de las partículas de materia oscura es fermiónica, está dado por los acoples de Yukawa y  $\lambda_3$ , diagramas similares se obtienen al hacer  $\lambda_3 \rightarrow \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \mu_3$ .

alguno de los dos nuevos fermiones puede ser candidato (el más ligero de ellos y también tiene que ser más ligero que las demás partículas cargadas con  $w_5^2$ ). En la figura 3.6 se presentan los procesos de semi-aniquilación para esta configuración de partículas de MO, en estos diagramas están involucrados los acoplamientos de Yukawa, los acoples  $\mu_1, \mu_2, \lambda_{33}$  y los acoples  $f_{jk}^{L,R}$ . Y en la figura 3.7 se muestra el proceso de conversión de MO para cuando se tiene un candidato siendo de tipo fermión. Se puede notar que tanto para los procesos de semi-aniquilación y conversión de MO, los acoples  $f_{jk}^{L,R}, \mu_1$  y  $\lambda_{33}$  están presentes.

En cuanto a procesos de aniquilación en este escenario, se consiguen mediante el canal t con los acoplamientos de Yukawa junto con los acoples de  $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_{h\chi}$  y  $\mu_3$  cuyo diagrama se aprecia en la figura 3.8, donde se aprecia que en el estado final hay un Higgs junto con alguna otra partícula del ME (principalmente un leptón).



**Figura 3.9:** Proceso de dispersión entre materia oscura de tipo escalar y el núcleo de un experimento.

Finalmente, es necesario comentar que la detección directa de MO de tipo escalar se debe principalmente a la dispersión que tiene la MO con el núcleo de un experimento, donde las interacciones responsables que esto ocurra están mediadas por el Higgs y la MO ( $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_{h\chi}, \lambda_{hs}, \mu_3$ ) y entre Higgs y el núcleo cuyo proceso se representa en el diagrama 3.9:

Sin embargo, el cálculo analítico para calcular la amplitud de dispersión de este tipo de procesos para el modelo se dejó para estudios posteriores.

# Capítulo 4

## Resultados numéricos

En este capítulo se presentarán los resultados obtenidos al calcular la densidad de reliquia utilizando micrOMEGAS [75] (la versión utilizada fue la 5.3.41).

Para la implementación del modelo se utilizó LanHep [76], que genera los archivos necesarios para utilizar en micrOMEGAS. Posteriormente, se empleó un programa en Python [77] para hacer variar la masa de la partícula de MO y proporcionar a micrOMEGAS los valores de los parámetros libres necesarios para el cálculo de la densidad de reliquia, almacenando dicho valor junto con los valores de los parámetros utilizados para obtenerlo.

### 4.1. Modelo de referencia

Para el análisis numérico se consideró solamente el escenario de dos partículas de MO escalar donde se escogió como segundo candidato a la partícula  $\phi_1$ .

Para realizar los cálculos numéricos y observar cómo afecta a la abundancia de reliquia de la MO de las partículas, se definió un modelo en el cual la mayoría de los parámetros son cero, mientras que los parámetros a analizar fueron variando su valor para comparar y analizar su efecto.

Los parámetros a ser fijos en todos los resultados son:

$$\lambda_L = \lambda_\eta = \lambda_\chi = \lambda_S = \lambda_{hS} = \lambda_{h\chi} = \lambda_{33} = 0,1. \quad (4.1)$$

$$\lambda_{4\eta\chi} = \lambda_{4\eta S} = \lambda_{4\chi S} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = 0. \quad (4.2)$$

Mientras que los parámetros dependientes están dados en las ecuaciones [3.18-3.21].

Por otro lado, también se van a fijar las siguientes relaciones de masa:

$$M_{\phi_2}/M_{\phi_1} = 1,5. \quad M_{\eta^\pm}/M_{\phi_2} = 1,01. \quad (4.3)$$

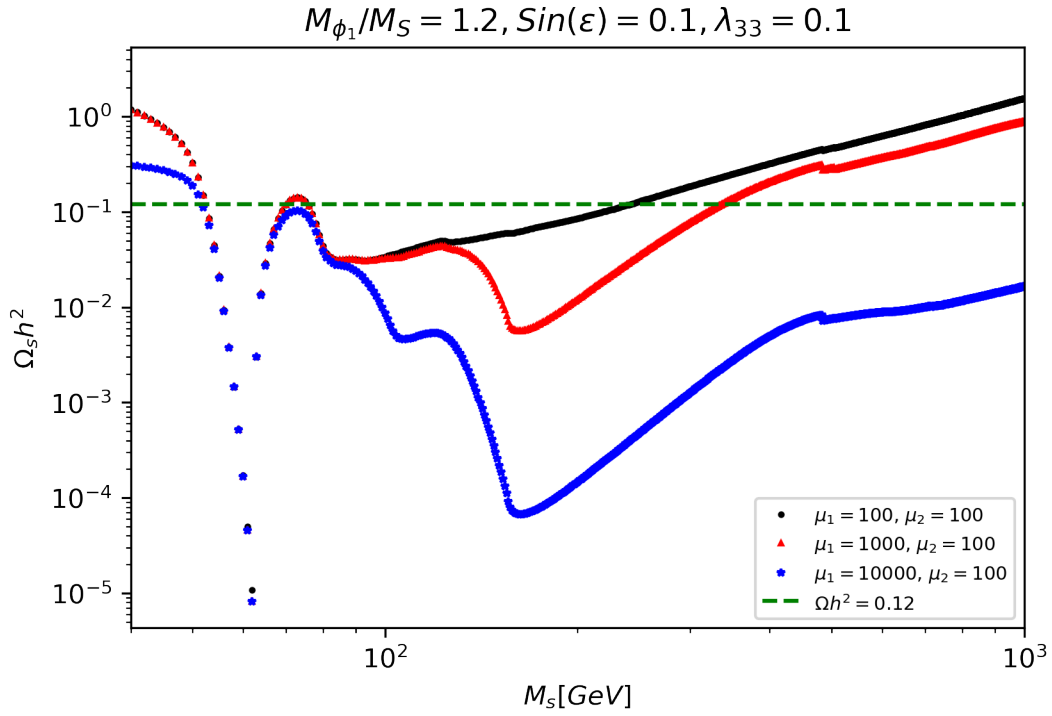
Las relaciones de masa impuestas en la ecuación 4.3, se utilizan para que los candidatos a MO sean las partículas  $\phi_1$  y  $S$ . Por lo tanto, se calculó su respectiva abundancia de reliquia ( $\Omega_{\phi_1}$  y  $\Omega_s$ ) en términos de la masa del más ligero entre ambos.

Además, se tomaron las siguientes relaciones de jerarquía entre las masas  $M_{\phi_1}$  y  $M_S$  para ver el efecto que tiene esta jerarquía en la abundancia de reliquia:

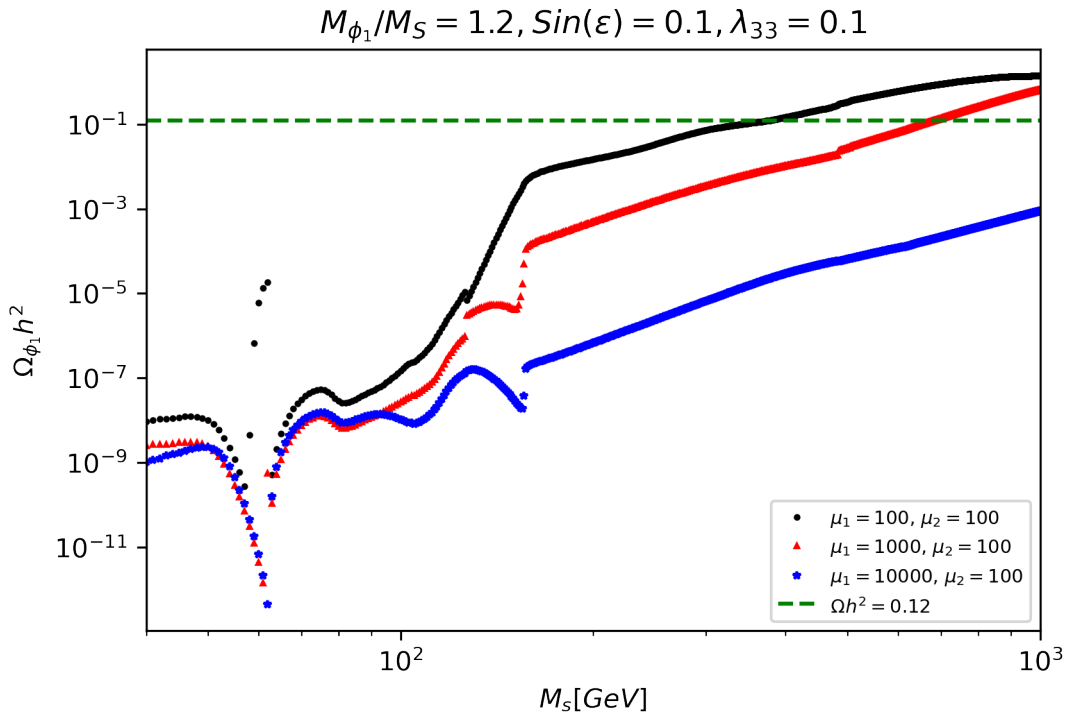
$$M_{\phi_1}/M_S = 1,2. \quad M_S/M_{\phi_1} = 1,2. \quad (4.4)$$

Para el análisis, se hizo variar la masa de la partícula más ligera de MO,  $M_S$  o  $M_{\phi_1}$  según la jerarquía, entre los 20 GeV hasta los 1000 GeV. De igual forma se consideraron tres posibles valores para los parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$ : 100 GeV, 1000 GeV y 10000 GeV. Finalmente, se consideraron dos valores para  $\sin \xi$ : 0.1 y 0.5.

Las figuras 4.1 y 4.2 muestran la abundancia de reliquia para las partícula  $S$  y  $\phi_1$ , respectivamente, en términos de la masa  $M_S$  para diferentes valores de  $\mu_1$  con  $\mu_2 = 100$  GeV y para la relación de masa  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ . Para  $\Omega_S$  se puede observar que a medida que  $\mu_1$  aumenta, la abundancia de reliquia se va suprimiendo y además, se aprecia que en cierto determinado valor de la masa su abundancia empieza a aumentar. Por otro lado,  $\Omega_{\phi_1}$  también muestra un comportamiento similar. En ambos casos se observan que existen puntos que dan cuenta a lo observado por la colaboración PLANCK (línea verde punteada).

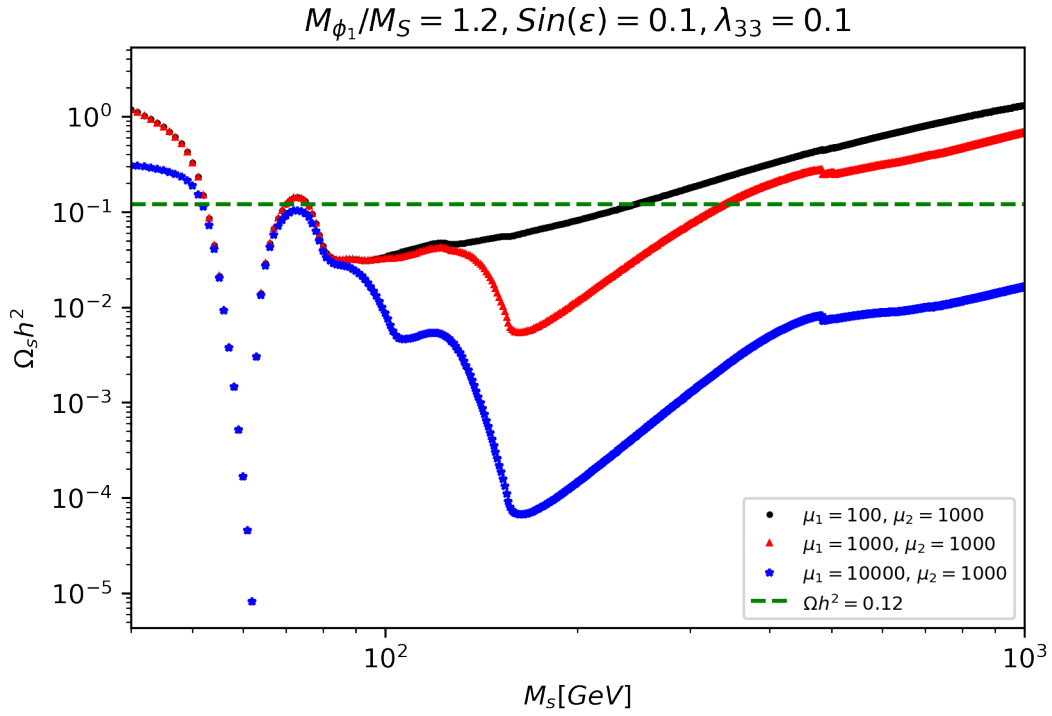


**Figura 4.1:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 100$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .

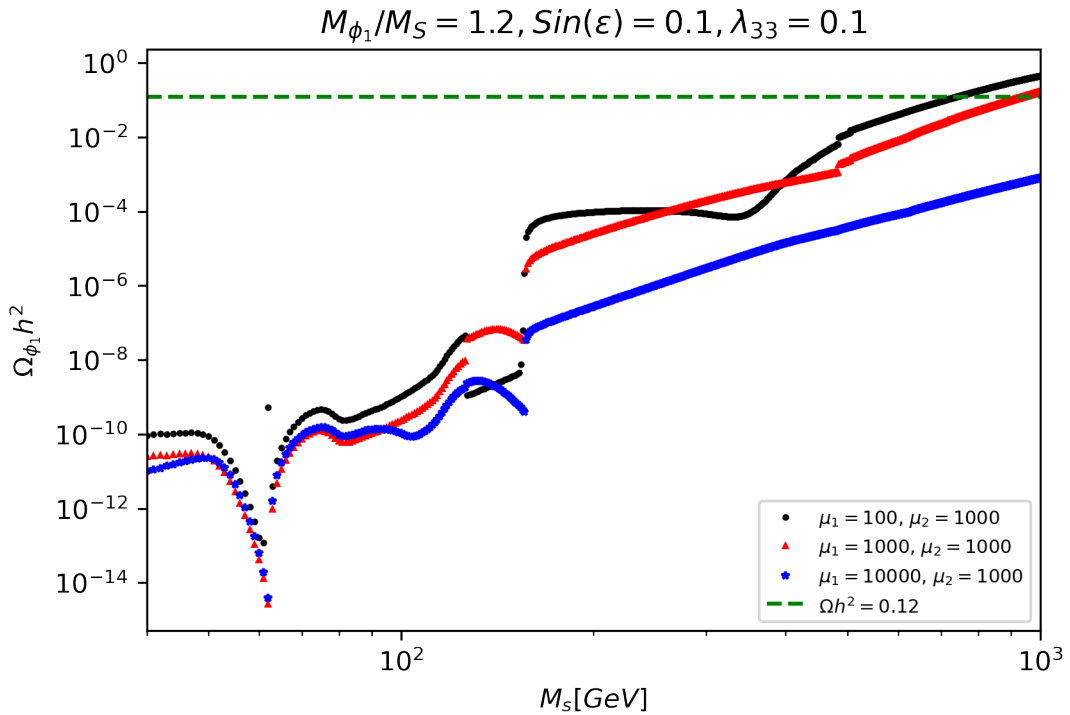


**Figura 4.2:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 100$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran los resultados obtenidos al aumentar  $\mu_2$  a 1000 GeV. En términos generales, se observa que la abundancia de reliquia de ambas partículas se va viendo



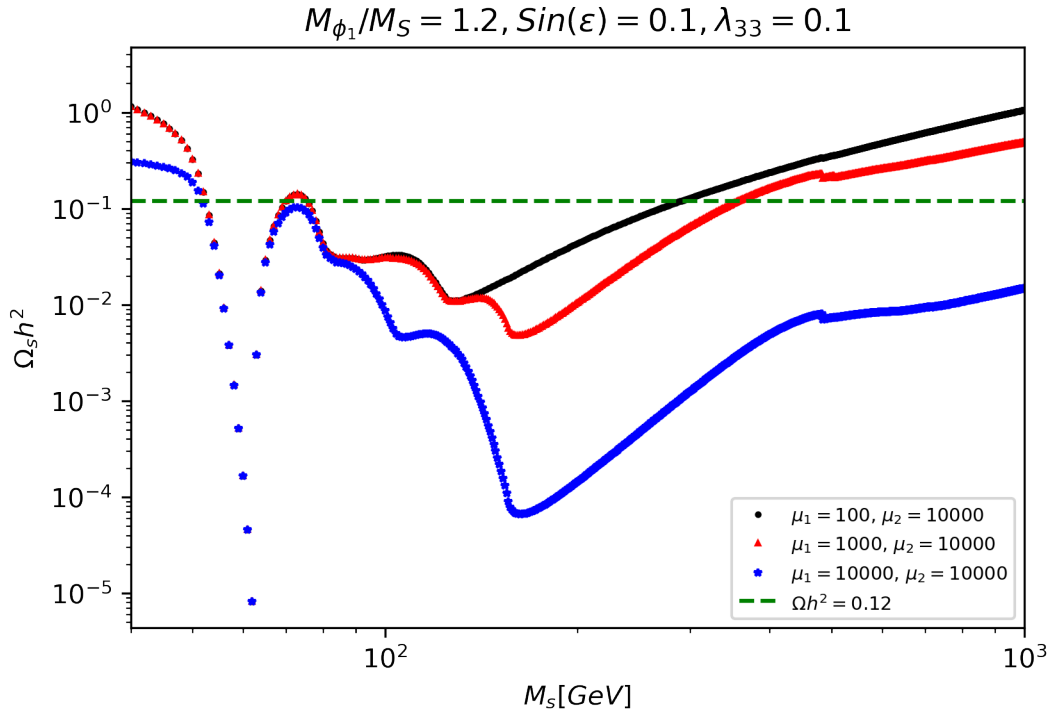
**Figura 4.3:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 1000$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .



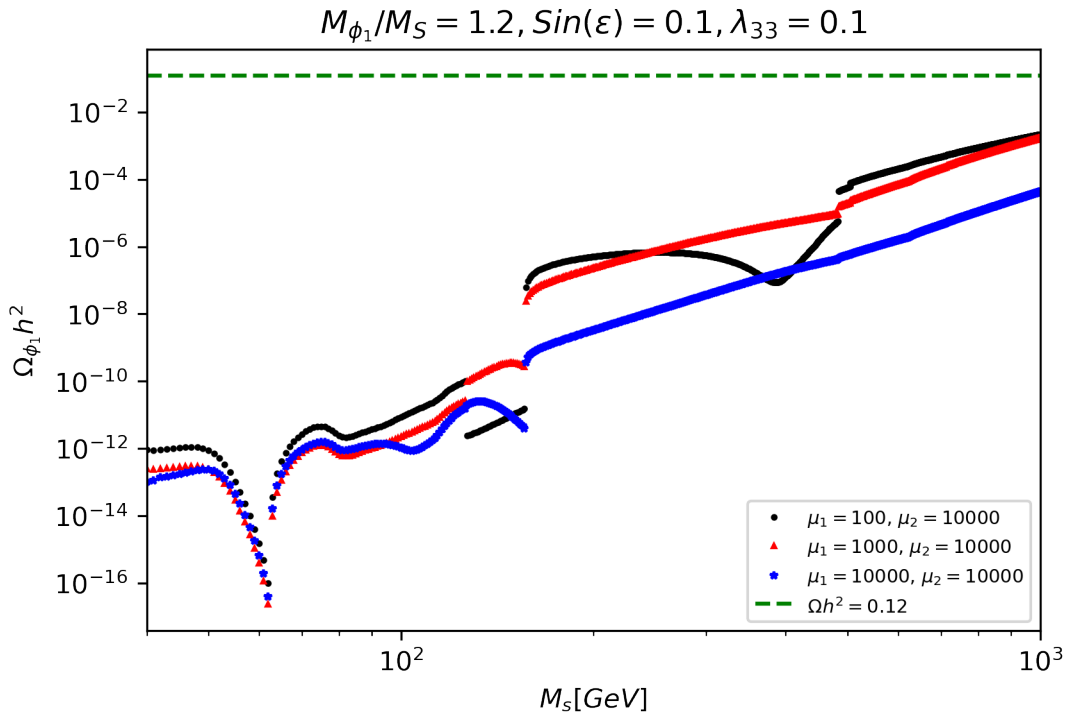
**Figura 4.4:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 1000$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .

suprimida, y en especial la de la partícula  $\phi_1$ , ya que se aprecia que solo para grandes masas, ella sola puede dar cuenta del valor experimental de la abundancia de MO.





**Figura 4.5:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 10000$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .



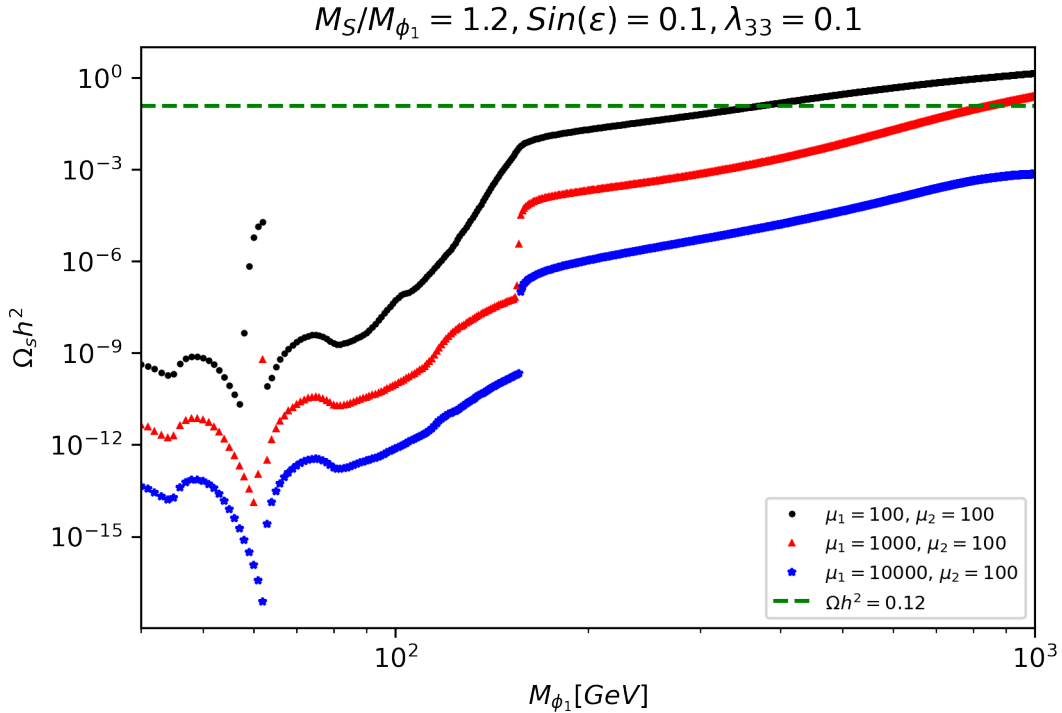
**Figura 4.6:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 10000$  GeV para  $M_{\phi_1}/M_S = 1,2$ .

En las figuras 4.5 y 4.6 se muestran los resultados obtenidos para  $\mu_2 = 10000$  GeV. Se puede observar que ambas abundancias se suprimen más en comparación con los anteriores valores de  $\mu_2$ .

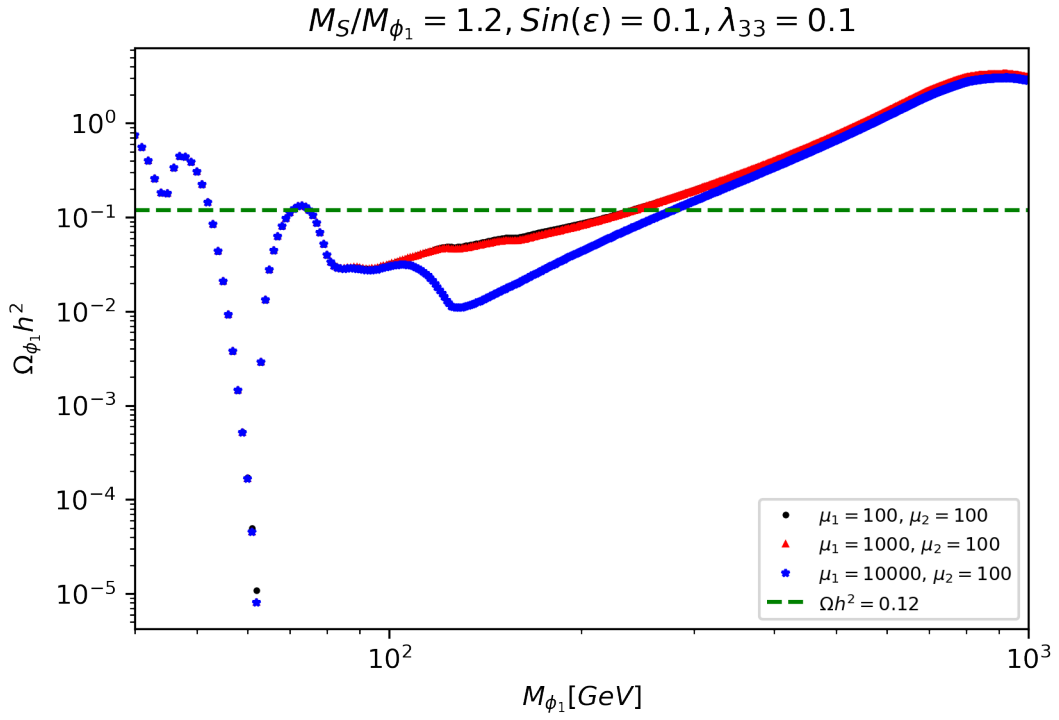
Sin embargo, se puede notar que la abundancia de reliquia para la partícula  $\phi_1$  está totalmente suprimida y no puede dar cuenta de los valores experimentales a pequeñas masas.

Hay que resaltar que, para todas las gráficas obtenidas, en la región de masa cercana al valor de masa del Higgs (alrededor de 125 GeV), se presentan unos saltos abruptos en la abundancia de reliquia de la partícula de MO más pesada, mientras que para la más ligera se observa un aumento rápido. Esto se debe a que, a partir de ese valor de masa, el proceso  $\phi_1 + S \rightarrow \phi_1 + h$  se vuelve cinemáticamente posible. Este proceso puede ser mediado por un  $\phi_1^*$  dado por los acoplamientos de  $\mu_2$  y  $\mu_3$ .

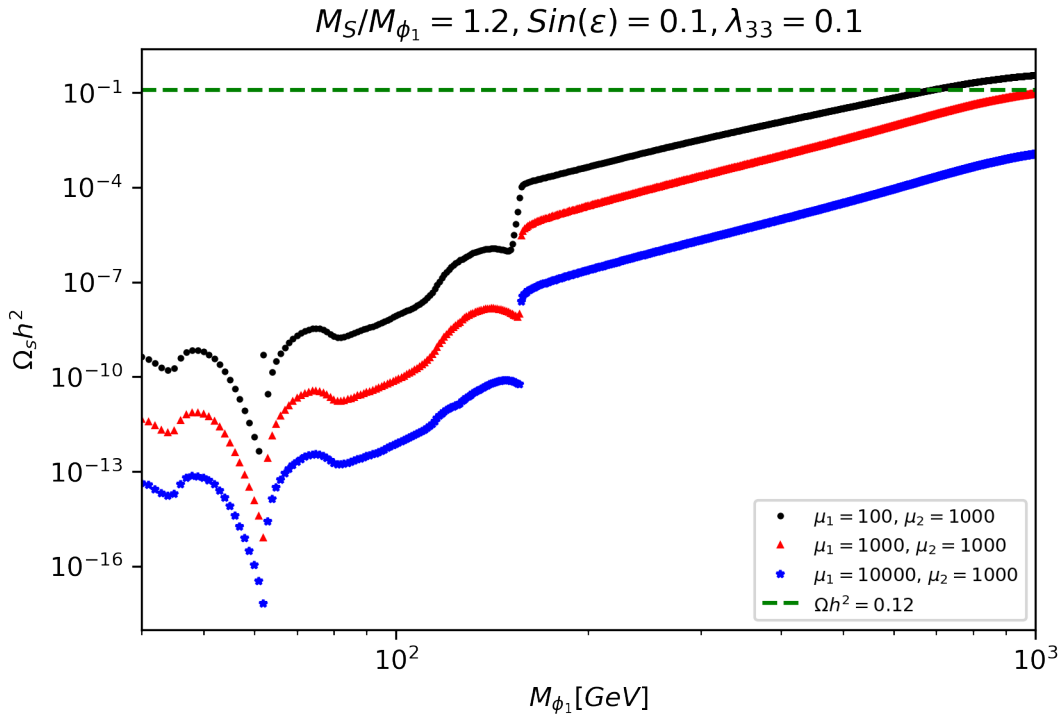
Ahora, al invertir las jerarquías para  $S$  y  $\phi_1$  (ecuación 4.4), se obtuvo lo siguiente: en las figuras 4.7 y 4.8 se muestran los efectos de  $\mu_1$  al dejar a  $\mu_2$  con un valor de 100 GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ . Se puede apreciar que al invertir la jerarquía, ahora la abundancia de reliquia de la partícula  $S$ , que ahora es la más pesada, está más suprimida que la abundancia de la partícula  $\phi_1$ . De igual manera, a medida que  $\mu_1$  aumenta, la abundancia para la partícula  $S$  disminuye, mientras que para la partícula  $\phi_1$  hay una región donde disminuye, pero luego vuelve a aumentar. Se puede observar que para ambas partículas hay puntos en los que se satisface la abundancia de reliquia



**Figura 4.7:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 100$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .



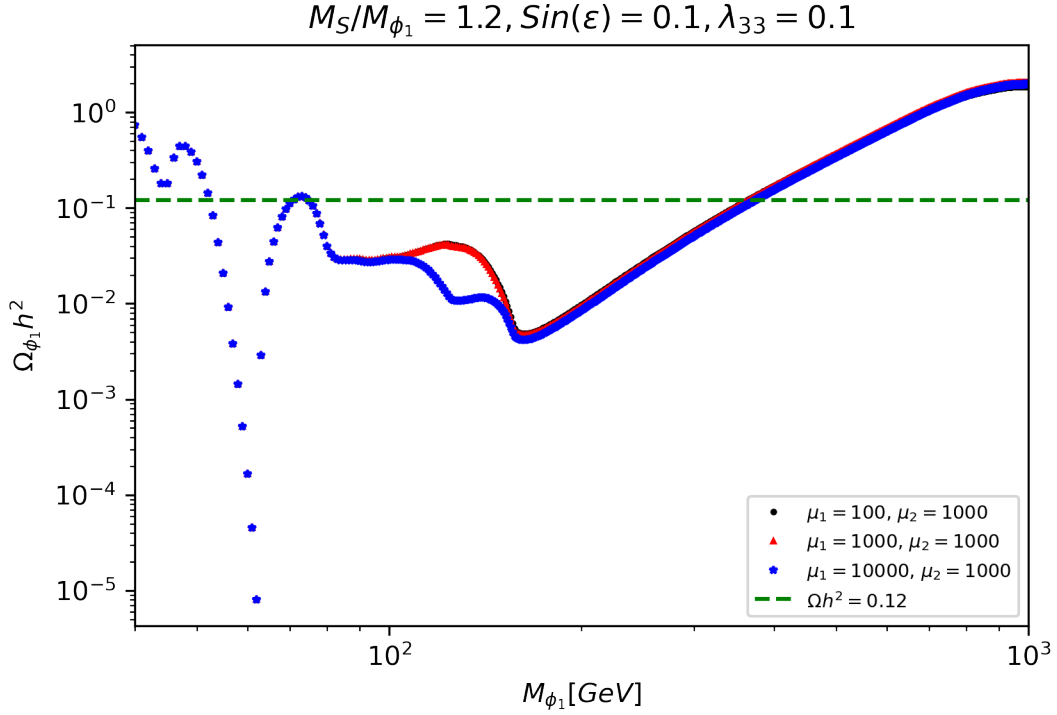
**Figura 4.8:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 100$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .



**Figura 4.9:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 1000$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .

observada.

Al aumentar  $\mu_2$  a 1000 GeV, se observa el mismo comportamiento: la abundancia de reliquia de

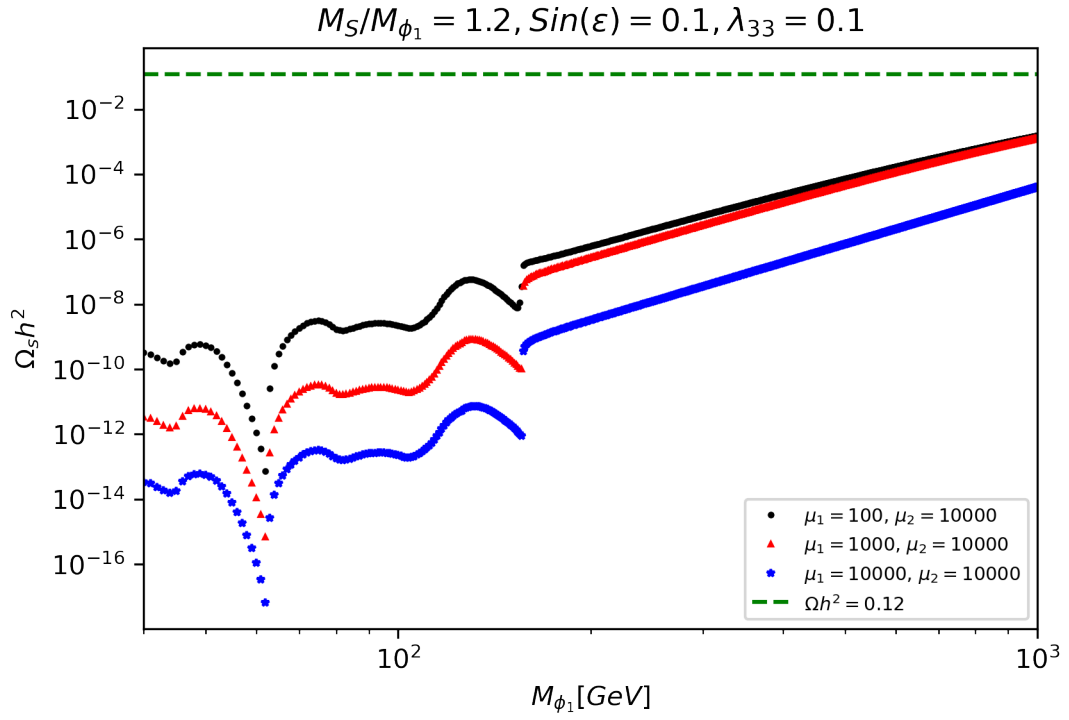


**Figura 4.10:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 1000$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .

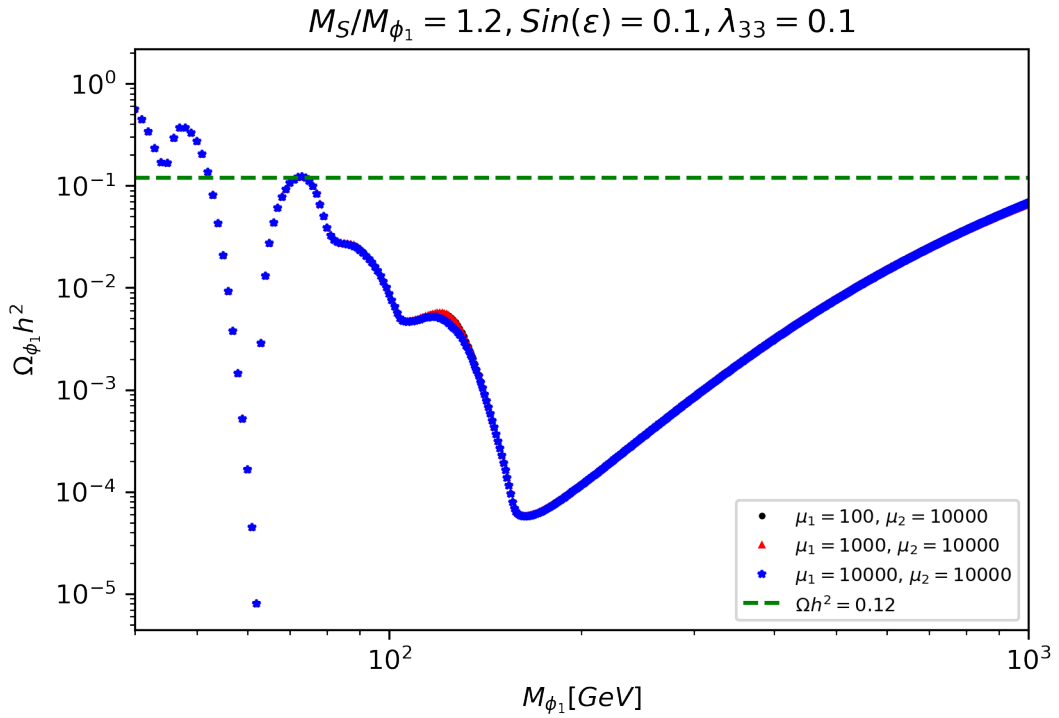
$S$  se suprime aún más, mientras que para  $\phi_1$ , aunque disminuye ligeramente, no es tan drástico como en el caso de  $S$ . Además, se nota un leve cambio en el comportamiento de su abundancia nuevamente alrededor de una masa de 125 GeV (resonancia con el Higgs del ME), como se muestra en las figuras 4.9 y 4.10.

Finalmente, al aumentar  $\mu_2$  a 10000 GeV, como se muestra en las figuras 4.11 y 4.12, se puede observar que para valores de masa mayores de 80 GeV, ninguna de las partículas de MO puede dar cuenta de la abundancia de reliquia experimental (mostrando una aniquilación de MO muy eficiente) mientras que para valores de masa pequeña, solamente la partícula  $\phi_1$  puede estar de acuerdo con lo medido por PLANCK. Además, se puede ver cómo para la partícula  $\phi_1$ , la abundancia de reliquia es aproximadamente la misma sin importar el valor de  $\mu_1$  (siempre y cuando no se encuentre apagada dicha interacción).

Es relevante señalar que todas las gráficas revelan supresiones en las densidades de reliquia para cada candidato a materia oscura, con variaciones notables dependiendo de los valores de los acoplamientos. Esto indica que el modelo es flexible en la asignación de valores, tanto a las masas de las partículas de materia oscura como a los acoplamientos del modelo, permitiendo



**Figura 4.11:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_S$  al dejar a  $\mu_2 = 10000$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .



**Figura 4.12:** Efecto de  $\mu_1$  sobre  $\Omega_{\phi_1}$  al dejar a  $\mu_2 = 10000$  GeV para  $M_S/M_{\phi_1} = 1,2$ .

así una reproducción satisfactoria de los resultados experimentales.

Para finalizar, se seleccionaron varios puntos que cumplen con el valor observado de la abun-

dancia de reliquia de MO en el Universo. Los parámetros correspondientes a estos puntos se utilizaron para encontrar los valores de Yukawa empleando la ecuación 3.36, que satisfacen los límites establecidos por la ecuación 3.35. Uno de estos puntos corresponde a los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
M_S = 220 \text{ GeV}, \quad M_{\phi_1} = 264 \text{ GeV}, \quad M_{\phi_2} = 396 \text{ GeV}, \quad M_{\eta_{\pm}} = 399,9 \text{ GeV}, \quad \mu_1 = 100 \text{ GeV}, \\
\mu_2 = 100 \text{ GeV}, \quad M_1 = 2000 \text{ GeV}, \quad M_2 = 3000 \text{ GeV}, \quad \lambda_{33} = 0,1, \quad \sin \xi = 0,1,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

dando lugar a la matriz de Yukawa:

$$y = \begin{pmatrix} -0,0058054 & 0,06594679 \\ 0,01921726 & -0,11420604 \\ -0,04022764 & 0,06586967 \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

en este contexto, se observa que las entradas de esta matriz son pequeñas, lo que conlleva a la obtención de acoplamientos de Yukawa perturbativos.

# Capítulo 5

## Conclusiones y discusiones

Con el propósito de abordar dos de las cuestiones más relevantes en la física moderna, la MO y las masas de neutrinos, se realizó una investigación sobre la fenomenología de una extensión al ME bajo una simetría  $Z_5$ . Este modelo escotogénico incorpora dos campos fermiónicos, un doblete escalar y dos escalares complejos, todos cargados bajo esta nueva simetría, mientras que las partículas del ME no lo están.

En lo que respecta a la MO, el nuevo doblete tiene una componente cargada y otra neutra, que se mezcla con  $\chi$ , y donde el autoestado de masa más ligero,  $\phi_1$ , es uno de los candidatos a ser MO, junto con otro candidato que es la partícula  $S$  teniendo así un modelo multicomponente de MO.

El modelo también proporciona un mecanismo para la generación de masas de los neutrinos, los cuales adquieren una masa de Majorana gracias a la incorporación de los nuevos fermiones  $N_1$  y  $N_2$ . Este proceso se logra mediante un diagrama de dos bucles, donde en el interior del bucle se encuentran las partículas de MO ( $\phi_1, S$ ) junto con  $\phi_2, N_1$ , y  $N_2$ . La forma analítica de la expresión para las masas de neutrinos depende de las masas de estas nuevas partículas.

Al utilizar la parametrización de Casas-Ibarra, se logró obtener unos valores perturbativos para la matriz de Yukawa, cuyos valores están de acuerdo con los límites experimentales correspondientes a la violación de sabor leptónico y también con la abundancia de reliquia medida por PLANCK.

Se llevaron a cabo diversos análisis para estudiar cómo varía la abundancia de reliquia de cada partícula de MO en función de los acoplamientos  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Este mismo enfoque se aplicó a dos jerarquías de masa distintas para ambas partículas de MO. En ambos casos, se observó que la partícula de MO más ligera (según la jerarquía) era la que predominaba en la abundancia de reliquia.

Se determinó que el modelo es capaz de cumplir con la abundancia de reliquia establecida por el experimento PLANCK. Esto se logra mediante la combinación de las contribuciones individuales de las dos partículas de MO, demostrando la eficacia del modelo en la aniquilación de la MO (como se muestra, por ejemplo, en las figuras 4.11 y 4.12 donde se aprecia una densidad de reliquia muy suprimida para ambas partículas) para alcanzar la abundancia observada.

Es importante resaltar que en este trabajo no se realizó un análisis de detección (ya sea directa o indirecta), en el contexto de experimentos como los de detección directa que utilizan, por ejemplo, Xenón como material detector. La consideración de este análisis se deja para futuras investigaciones.

Resulta relevante resaltar que, aunque se consideró un escenario donde ambas partículas de MO fueran escalares complejos, debido a la simetría  $Z_5$  y la asignación de cargas dadas en la tabla 3.1, es posible considerar a uno de los fermiones como candidato a MO en lugar de  $\phi_1$ , dando lugar a un escenario de MO fermiónica y escalar complejo. También es posible explorar escenarios donde el candidato a MO sea principalmente doblete, ya que la naturaleza de este tipo de candidatos (singlete o doblete) lo da el valor del ángulo de mezcla  $\xi$ .

Además, se pueden explorar otros valores para los acoplamientos, como incorporar el acoplamiento  $\lambda_{31}$ , que modifica drásticamente la abundancia de reliquia en todos los escenarios posibles (MO fermiónica o escalar), así como permitir tres candidatos a MO variando diferentes parámetros, como los acoplamientos  $\mu_3$  y  $\lambda_{33}$ , al igual que los valores de masa.

De igual manera, debido a la incorporación de doblete y de los fermiones, estos deberían inducir una contribución al momento magnético anómalo de los leptones cargados, sin embargo, en este trabajo no se tenía como propósito abordar dicho fenómeno, el cual podría incorporar nuevas restricciones para las masas de las partículas, las cuales no se consideraron. También, debido



a la incorporación del doblete, se tendrían modificaciones a los propagadores de los bosones gauge del ME, por lo que la masa de las partículas escalares estarían también restringidas por los parámetros oblicuos. Dichas restricciones y modificaciones podrían abordarse en estudios posteriores.

El modelo es un modelo escotogénico rico en fenomenología, el cual puede abordar más estudios futuros considerando diferentes restricciones en los acoplamientos y en las masas. En todos los escenarios expuestos anteriormente, se espera que la expresión para la matriz de masa de neutrinos no se vea alterada, mientras que la fenomenología para cada escenario puede abrir nuevas ventanas en los espacios de parámetros del modelo y así poder establecer límites para la detección de la MO en experimentos actuales y futuros.

# Apéndice A

## Cálculo de la masa de neutrinos

En esta sección se mostraran los diferentes pasos para calcular la expresión para la matriz de masa de neutrinos 3.27.

### A.1. Resultados útiles

Para los desarrollos matemáticos se hará uso de las siguientes propiedades de los operadores de proyección de quiralidad:

$$\begin{aligned}P_{R,L}^2 &= P_{R,L}, \\P_{R,L}^\dagger &= P_{R,L}, \\P_{R,L}\gamma^\mu &= \gamma^\mu P_{L,R}, \\P_R P_L &= P_L P_R = 0.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Además, existen métodos que simplifican la integración de las expresiones resultantes en los diagramas de Feynman con bucles. Uno de estos métodos es conocido como "parámetros de Feynman", cuya identidad se expresa de la siguiente manera [78]:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}.\tag{A.2}$$

Por otro lado, también se conocen determinados resultados de algunas integrales comunes

[78]:

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - A)^n} = \frac{i(-1)^n \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{A}\right)^{n - \frac{d}{2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - A)^n} = \frac{i(-1)^{n-1} d \Gamma(n - \frac{d}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{A}\right)^{n - \frac{d}{2} - 1}, \quad (\text{A.4})$$

donde  $\Gamma(n)$  es la función gamma, la cual toma algunos valores específicos, como los siguientes:

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= 1, \\ \Gamma(2) &= 1, \\ \Gamma(3) &= 2, \\ \Gamma(4) &= 6. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Como caso particular: de la ecuación A.3 sea  $d = 4$  y  $n = 3$ , por lo que dicha integral toma el siguiente valor:

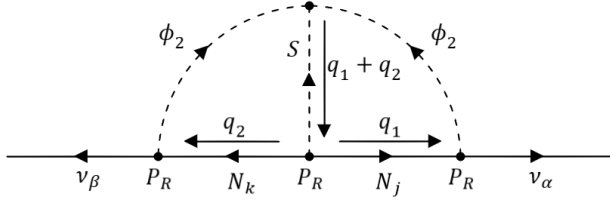
$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - A)^3} &= \frac{i(-1)^3 \Gamma(3 - \frac{4}{2})}{(4\pi)^{\frac{4}{2}} \Gamma(3)} \left(\frac{1}{A}\right)^{3 - \frac{4}{2}} \\ &= \frac{-i \Gamma(1)}{(4\pi)^2 \Gamma(3)} \left(\frac{1}{A}\right) \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Mientras para que la ecuación A.4 tomando los siguientes valores:  $d = 4$  y  $n = 4$  por lo que dicha integral toma la siguiente forma:

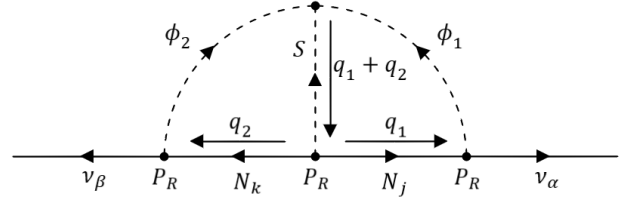
$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 - A)^4} &= \frac{i(-1)^{4-1} 4 \Gamma(4 - \frac{4}{2} - 1)}{(4\pi)^{\frac{4}{2}} 2 \Gamma(4)} \left(\frac{1}{A}\right)^{4 - \frac{4}{2} - 1} \\ &= \frac{-i \Gamma(1)}{(4\pi)^2 2 \Gamma(4)} \left(\frac{1}{A}\right) \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{2}{6} \left(\frac{1}{A}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Por otra parte, es conveniente tener presentes la siguientes integrales [79]:

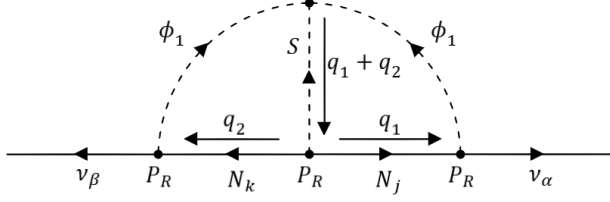
$$\int dx \frac{1}{Ax + B} = \frac{1}{A} (\ln |(Ax + B)|) + C_1. \quad (\text{A.8})$$



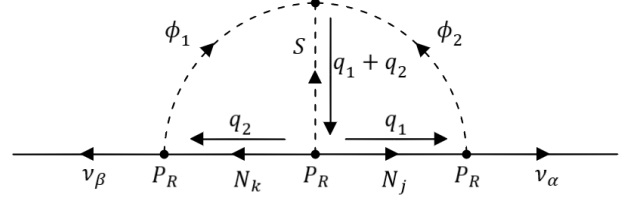
**Figura A.1:**  $\phi_2$ - $\phi_2$  y vértice  $P_R$



**Figura A.2:**  $\phi_2$ - $\phi_1$  y vértice  $P_R$



**Figura A.3:**  $\phi_1$ - $\phi_1$  y vértice  $P_R$



**Figura A.4:**  $\phi_1$ - $\phi_2$  y vértice  $P_R$

$$\int dx \ln(Ax + B) = \frac{(Ax + B)}{A} (\ln(Ax + B) - 1) + C_1. \quad (\text{A.9})$$

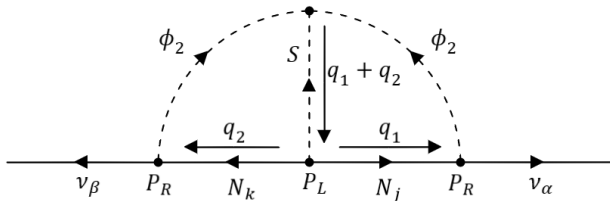
## A.2. Matriz de masa de neutrinos

El diagrama de Feynman para las masas de neutrinos de Majorana se muestra en la figura 3.1 y los términos que contribuyen a la matriz de masa de los neutrinos son:

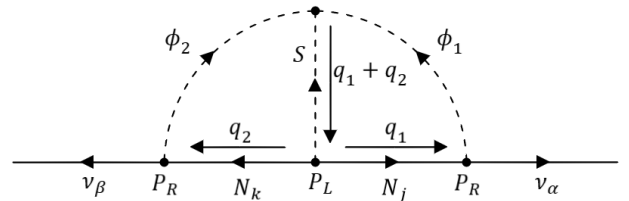
$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & -\frac{1}{2}\mu_2 (s_\xi^2 \phi_2^2 - 2c_\xi s_\xi \phi_1 \phi_2 + c_\xi^2 \phi_1^2) S - y_{\alpha k} \bar{\nu}_\alpha (c_\xi \phi_2^* + s_\xi \phi_1^*) P_R N_k \\ & -\frac{1}{2} f_{jk}^R \bar{N}_j P_R N_k^c S^\dagger - \frac{1}{2} f_{jk}^L \bar{N}_j P_L N_k^c S^\dagger + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Existirán por lo tanto ocho diagramas: cuatro que involucran al vértice  $\bar{N}_j P_R N_k^c S^\dagger$  (figuras A.1-A.4) y otros cuatro los cuales tendrán al vértice  $\bar{N}_j P_L N_k^c S^\dagger$  (figuras A.5-A.8).

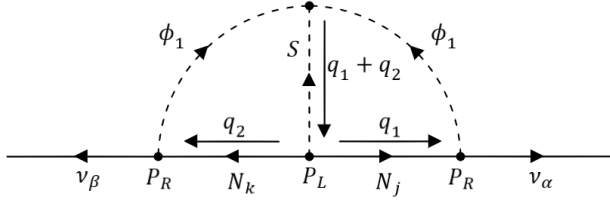
Se llevará a cabo el cálculo de la contribución representada en el diagrama de la figura A.1.



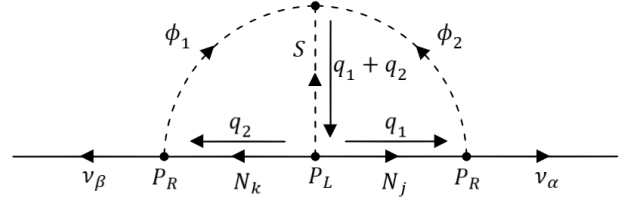
**Figura A.5:**  $\phi_2$ - $\phi_2$  y vértice  $P_L$



**Figura A.6:**  $\phi_2$ - $\phi_1$  y vértice  $P_L$



**Figura A.7:**  $\phi_1$ - $\phi_1$  y vértice  $P_L$



**Figura A.8:**  $\phi_1$ - $\phi_2$  y vértice  $P_L$

Dado que la matriz de masa del neutrino debe ser independiente del momento que lleva el neutrino, se asume, sin pérdida de generalidad, que el momento del neutrino es cero en el caso de una masa en reposo. Dentro del bucle, los momentos se denotan como  $q_1$  y  $q_2$ . Por lo tanto, la integral asociada a la figura A.1 puede expresarse como::

$$\begin{aligned}
I_{\phi_2\phi_2}^R &= \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (-iy_{\alpha j} C_\xi P_R) \left( i \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) \right) (-if_{jk}^R P_R) \left( i \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \right) \\
&\quad \times (-iy_{\beta k} C_\xi P_R) \left( \frac{i}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) (-i\mu_2 S_\xi^2) \left( \frac{i}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{i}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right). \\
I_{\phi_2\phi_2}^R &= \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^R \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} P_R \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) P_R \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \\
&\quad \times P_R \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \tag{A.11}
\end{aligned}$$

donde  $\not{x} = \gamma^\mu a_\mu$  y además se usó el hecho de que:

$$\begin{aligned}
\sin(2\xi) &= 2 \sin(\xi) \cos(\xi), \\
\sin^2(2\xi) &= 4 \sin^2(\xi) \cos^2(\xi), \\
\frac{1}{4} \sin^2(2\xi) &= \sin^2(\xi) \cos^2(\xi).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Por otro lado utilizando las propiedades del operador de quiralidad, A.1, se tiene que:

$$P_R (q_1 + M_j) P_R (q_2 + M_k) P_R = M_j M_k P_R, \tag{A.13}$$

por lo que la ecuación A.11 tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
I_{\phi_2\phi_2}^R &= \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^R \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} M_j M_k P_R \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right) \\
I_{\phi_2\phi_2}^R &= \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^R M_j M_k P_R \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \\
&\quad \times \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Sea:

$$II_{q_1}^R = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \tag{A.15}$$

y utilizando el método de los parámetros de Feynman A.2 para la ecuación A.15 se obtiene:

$$\begin{aligned}
II_{q_1}^R &= \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dudvdw \delta(u + v + w - 1) \\
&\quad \times \frac{2!}{[u(q_1^2 - M_{\phi_2}^2) + v(q_1^2 - M_j^2) + w((q_1 + q_2)^2 - M_S^2)]^3}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Sea ahora  $D_{q_1} = u(q_1^2 - M_{\phi_2}^2) + v(q_1^2 - M_j^2) + w((q_1 + q_2)^2 - M_S^2)$  y recordando que  $u + v + w = 1$  expandimos esta expresión:

$$\begin{aligned}
D_{q_1} &= uq_1^2 - uM_{\phi_2}^2 + vq_1^2 - vM_j^2 + w((q_1^2 + 2q_1 \cdot q_2 + q_2^2) - M_S^2) \\
&= q_1^2 + wq_2^2 + 2q_1 \cdot (wq_2) - uM_{\phi_2}^2 - vM_j^2 - wM_S^2 \\
&= q_1^2 + wq_2^2 + 2q_1 \cdot (wq_2) + w^2 q_2^2 - w^2 q_2^2 - uM_{\phi_2}^2 - vM_j^2 - wM_S^2 \\
&= (q_1 + wq_2)^2 - q_2^2 w(w - 1) - uM_{\phi_2}^2 - vM_j^2 - wM_S^2,
\end{aligned} \tag{A.17}$$

sea  $p = q_1 + wq_2$ , por lo cual se sigue que  $d^4 q_1 = d^4 p$  y además, sea  $A = q_2^2 w(w - 1) + uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2$ , luego se tiene que la integral A.16 se puede escribir de la forma:

$$\begin{aligned}
II_{q_1}^R &= 2 \int_0^1 dudvdw \delta(u + v + w - 1) \\
&\quad \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - A]^3},
\end{aligned} \tag{A.18}$$

por lo que utilizando el resultado de A.6 se sigue que:

$$\begin{aligned}
II_{q_1}^R &= 2 \int_0^1 dudvdw \delta(u+v+w-1) \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} \right) \\
II_{q_1}^R &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dudvdw \delta(u+v+w-1) \frac{1}{q_2^2 w(w-1) + uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2} \\
&= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dudvdw \delta(u+v+w-1) \frac{1}{w(w-1) \left( q_2^2 + \frac{uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2}{w(w-1)} \right)} \\
&= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \frac{1}{\left( q_2^2 - \frac{uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2}{w(1-w)} \right)}.
\end{aligned} \tag{A.19}$$

Se define entonces la siguiente expresión:

$$M_{\phi_2 j S}^2 = \frac{uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2}{w(1-w)}, \tag{A.20}$$

por lo tanto se obtiene que:

$$II_{q_1}^R = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \frac{1}{(q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2)}. \tag{A.21}$$

Así, se tiene que la integral A.14 toma la forma de:

$$\begin{aligned}
I_{\phi_2 \phi_2}^R &= \frac{i^2 \mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^R M_j M_k P_R \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \\
&\times \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right).
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Sea:

$$II_{q_2}^R = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right), \tag{A.23}$$

y nuevamente utilizando el método de los parámetros de Feynman para la anterior expresión se obtiene que:

$$\begin{aligned}
II_{q_2}^R &= \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \delta(x+y+z-1) \\
&\times \frac{2!}{[x(q_2^2 - M_k^2) + y(q_2^2 - M_{\phi_2}^2) + z(q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2)]^3},
\end{aligned} \tag{A.24}$$

y rompiendo el delta para la variable z se consigue:

$$II_{q_2}^R = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{2!}{[x(q_2^2 - M_k^2) + y(q_2^2 - M_{\phi_2}^2) + (1-x-y)(q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)]^3}, \quad (\text{A.25})$$

sea  $D_{q_2} = x(q_2^2 - M_k^2) + y(q_2^2 - M_{\phi_2}^2) + (1-x-y)(q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)$ , entonces se sigue que:

$$\begin{aligned} D_{q_2} &= q_2^2 - xM_k^2 - yM_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2 + xM_{\phi_{2jS}}^2 + yM_{\phi_{2jS}}^2 \\ &= q_2^2 - x(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) - y(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) - M_{\phi_{2jS}}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

denotando ahora la variable  $A_2 = x(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) + y(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) + M_{\phi_{2jS}}^2$ , se tiene que:

$$D_{q_2} = q_2^2 - A_2, \quad (\text{A.27})$$

por lo que reemplazando esta expresión en la ecuación A.25 se obtiene que:

$$II_{q_2}^R = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{1}{[q_2^2 - A_2]^3}, \quad (\text{A.28})$$

y así, recurriendo nuevamente al resultado proporcionado en la ecuación A.6, se deduce que:

$$\begin{aligned} II_{q_2}^R &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A_2} \right) \\ &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{x(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) + y(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2) + M_{\phi_{2jS}}^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Para resolver estas integrales renombrando los términos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} A &= M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2, \\ B &= M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2, \\ C &= M_{\phi_{2jS}}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

por lo que:

$$II_{q_2}^R = \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{x(A) + y(B) + C}, \quad (\text{A.31})$$



y haciendo uso de la integral A.8 se consigue que:

$$\begin{aligned}
II_{q_2}^R &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{\ln(x(A) + y(B) + C)}{B} \right] \Big|_0^{1-x} \\
&= \frac{-i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{\ln(x(A) + (1-x)(B) + C)}{B} - \frac{\ln(x(A) + C)}{B} \right].
\end{aligned} \tag{A.32}$$

Calculando estas integrales por aparte:

$$\begin{aligned}
I_1^R &= \int_0^1 dx \left[ \frac{\ln(x(A) + (1-x)(B) + C)}{B} \right] \\
&= \frac{1}{B(B-A)} [((B-A)x - C - B)(\ln(|(B-A)x - C - B|) - 1)] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{B(B-A)} [(B-A-C-B)(\ln(|B-A-C-B|) - 1) \\
&\quad - (-C-B)(\ln(|-C-B|) - 1)] \\
&= \frac{1}{B(B-A)} [-(A+C)(\ln(|A+C|) - 1) + (C+B)(\ln(|C+B|) - 1)] \\
&= \frac{1}{B(B-A)} [(C+B) \ln(C+B) - C - B - (A+C) \ln(A+C) + A + C] \\
&= \frac{1}{B(B-A)} [(C+B) \ln(C+B) - (A+C) \ln(A+C) + A - B].
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Ahora, la segunda integral:

$$\begin{aligned}
I_2^R &= \int_0^1 dx \frac{\ln(x(A) + C)}{B} \\
&= \frac{(Ax + C)}{BA} [\ln(Ax + C) - 1] \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{BA} [(A+C)(\ln(A+C) - 1) - C(\ln C - 1)] \\
&= \frac{1}{BA} [(A+C) \ln(A+C) - C \ln C - A].
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Utilizando A.30 se puede simplificar la ecuación A.33:

$$\begin{aligned}
I_1^R &= \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_k^2)} (M_{\phi_2}^2 \ln M_{\phi_2}^2 - M_k^2 \ln M_k^2 + M_k^2 - M_{\phi_2}^2) \\
&= \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_k^2)} (M_{\phi_2}^2 \ln M_{\phi_2}^2 - M_k^2 \ln M_k^2 + M_k^2 - M_{\phi_2}^2 \\
&\quad + M_{\phi_2}^2 \ln M_k^2 - M_{\phi_2}^2 \ln M_k^2) \\
&= \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_k^2)} \left( \frac{M_k^2}{M_{\phi_2}^2} M_{\phi_2}^2 \ln M_{\phi_2}^2 - M_k^2 \ln M_k^2 + M_k^2 - M_{\phi_2}^2 \right. \\
&\quad \left. + M_{\phi_2}^2 \ln M_k^2 - \frac{M_k^2}{M_{\phi_2}^2} M_{\phi_2}^2 \ln M_k^2 \right) \\
I_1^R &= \frac{-1}{M_k^2(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_k^2 - M_{\phi_2}^2)} (M_k^2 M_{\phi_2}^2 (\ln M_{\phi_2}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad + \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_k^2)} (M_{\phi_2}^2 \ln M_k^2 - M_k^2 \ln M_k^2) \\
&\quad - \frac{1}{(M_k^2 - M_{\phi_2}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)} (M_k^2 - M_{\phi_2}^2) \\
&= \frac{-1}{M_k^2(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)(M_k^2 - M_{\phi_2}^2)} (M_k^2 M_{\phi_2}^2 (\ln M_{\phi_2}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad + \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)} (\ln M_k^2) \\
&\quad - \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_2 j S}^2)}.
\end{aligned} \tag{A.35}$$

Ahora simplificando la expresión A.34:

$$\begin{aligned}
I_2^R &= \frac{1}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (M_k^2 \ln M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_{\phi_{2jS}}^2 - M_k^2 + M_{\phi_{2jS}}^2) \\
&= \frac{-1}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (-M_k^2 \ln M_k^2 + M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_{\phi_{2jS}}^2 + M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2 \\
&\quad + M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_k^2) \\
&= \frac{-1}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} \left( -M_k^2 \ln M_k^2 + \frac{M_k^2}{M_k^2} M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_{\phi_{2jS}}^2 + M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2 \right. \\
&\quad \left. + M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_k^2 - \frac{M_k^2}{M_k^2} M_{\phi_{2jS}}^2 \ln M_k^2 \right) \\
&= \frac{-1}{M_k^2 (M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (M_k^2 M_{\phi_{2jS}}^2 (\ln M_{\phi_{2jS}}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad - \frac{1}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} ((M_{\phi_{2jS}}^2 - M_k^2) \ln M_k^2) \\
&\quad - \frac{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} \\
&= \frac{1}{M_k^2 (M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (M_k^2 M_{\phi_{2jS}}^2 (\ln M_{\phi_{2jS}}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad + \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (\ln M_k^2) \\
&\quad - \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)}.
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Por lo que finalmente utilizando las expresiones A.35 y A.36 se puede realizar la operación  $I_1^R - I_2^R$  y se obtiene que:

$$\begin{aligned}
I_1^R - I_2^R &= \frac{-1}{M_k^2 (M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_k^2 - M_{\phi_2}^2)} (M_k^2 M_{\phi_2}^2 (\ln M_{\phi_2}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad - \frac{1}{M_k^2 (M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_{2jS}}^2 - M_{\phi_2}^2)} (M_k^2 M_{\phi_{2jS}}^2 (\ln M_{\phi_{2jS}}^2 - \ln M_k^2)) \\
&\quad + \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (\ln M_k^2) - \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} (\ln M_k^2) \\
&\quad - \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} + \frac{1}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} \\
&= \frac{-1}{M_k^2} \left[ \frac{M_k^2 M_{\phi_2}^2 (\ln M_{\phi_2}^2 - \ln M_k^2)}{(M_k^2 - M_{\phi_2}^2)(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} + \frac{M_k^2 M_{\phi_{2jS}}^2 (\ln M_{\phi_{2jS}}^2 - \ln M_k^2)}{(M_k^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)(M_{\phi_{2jS}}^2 - M_{\phi_2}^2)} \right],
\end{aligned} \tag{A.37}$$

donde la expresión anterior, A.37, se puede simplificar como:

$$I_1^R - I_2^R = \frac{-1}{M_k^2} \left[ \frac{\frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2} \ln \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}}{\left(1 - \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}\right) \left(\frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2} - \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2}\right)} + \frac{\frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \ln \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2}}{\left(1 - \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2}\right) \left(\frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} - \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}\right)} \right]. \quad (\text{A.38})$$

Se define entonces la función:

$$\mathcal{I}_R(a, b) = \frac{a \ln(a)}{(1-a)(a-b)} + \frac{b \ln(b)}{(1-b)(b-a)}, \quad (\text{A.39})$$

por lo que:

$$I_1 - I_2 = \frac{-1}{M_k^2} \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right). \quad (\text{A.40})$$

Por lo tanto, reemplazando en la ecuación A.32 se obtiene que:

$$II_{q_2}^R = \frac{(-i)}{(4\pi)^2} \frac{(-1)}{M_k^2} \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right), \quad (\text{A.41})$$

logrando así obtener que la integral A.22 es:

$$\begin{aligned} I_{\phi_2 \phi_2}^R &= \frac{i^2 \mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^R M_j M_k P_R \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \\ &\quad \times \frac{(-i)}{(4\pi)^2} \frac{(-1)}{M_k^2} \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \\ &= \frac{-i \mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Por consiguiente, la contribución a la matriz de masa de neutrinos dada por el diagrama A.1 es:

$$-i \mathcal{M}_{\nu R}^{\phi_2 \phi_2} = \frac{-i \mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right],$$

es decir que:

$$\mathcal{M}_{\nu R}^{\phi_2 \phi_2} = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw \delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.43})$$

La contribución del diagrama A.3 seguirá una estructura completamente análoga a la expresión obtenida en A.43, simplemente sustituyendo  $M_{\phi_2}^2$  por  $M_{\phi_1}^2$  y  $M_{\phi_2 j S}^2$  por  $M_{\phi_1 j S}^2$  (y esto es debido a que se obtienen los mismos factores de la integral A.11) . Esto nos lleva a la siguiente expresión para la contribución:

$$\mathcal{M}_{\nu R}^{\phi_1 \phi_1} = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.44})$$

Para el diagrama de la figura A.4 se tiene la siguiente integral:

$$\begin{aligned} I_{\phi_1 \phi_2}^R &= \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} (-iy_{\alpha j} C_\xi P_R) \left( i \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) \right) (-if_{jk}^R P_R) \left( i \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \right) \\ &\quad \times (-iy_{\beta k} S_\xi P_R) \left( \frac{i}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right) (+i\mu_2 S_\xi C_\xi) \left( \frac{i}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{i}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right). \\ I_{\phi_1 \phi_2}^R &= \frac{-i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^R \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} P_R \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) P_R \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \\ &\quad \times P_R \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

se puede apreciar que la integral A.45 es la misma integral obtenida en la ecuación A.11 solo que esta vez hay un signo menos y se cambio una masa cuadrada  $M_{\phi_2}^2$  por  $M_{\phi_1}^2$ , por lo tanto la contribución del diagrama A.4 es de la forma:

$$\mathcal{M}_{\nu R}^{\phi_1 \phi_2} = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ -\mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.46})$$

Y de manera completamente análoga se obtiene la contribución de la figura A.2:

$$\mathcal{M}_{\nu R}^{\phi_2 \phi_1} = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ -\mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.47})$$

Así, combinando los resultados obtenidos en A.43, A.44, A.46 y A.47 se obtiene la contribución para los diagramas que involucran el vértice  $\bar{N}_j P_R N_k^c S^\dagger$ :

$$\mathcal{M}_\nu^R = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^R C_{jk}^R, \quad (\text{A.48})$$

donde:

$$C_{jk}^R = \frac{M_j}{M_k} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \left[ \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_{1j}S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_{2j}S}^2}{M_k^2} \right) \right. \\ \left. - \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_{1j}S}^2}{M_k^2} \right) + \mathcal{I}_R \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_{2j}S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.49})$$

Calculando ahora las contribuciones de los diagramas representados en las figuras A.5, A.6, A.7, A.8. Para ello, se evaluará la contribución conjunta de pares de diagramas, empezando por A.5 y A.8:

Para el diagrama A.5 se tiene que:

$$I_{\phi_2\phi_2}^L = \int \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} (-iy_{\alpha j} C_\xi P_R) \left( i \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) \right) (-if_{jk}^L P_L) \left( i \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \right) \\ \times (-iy_{\beta k} C_\xi P_R) \left( \frac{i}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) (-i\mu_2 S_\xi^2) \left( \frac{i}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{i}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right) \\ = \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^L \int \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} P_R \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) P_L \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) P_R \\ \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right). \quad (\text{A.50})$$

Nuevamente usando A.1 se tiene que:

$$P_R(q_1 + M_j) P_L(q_2 + M_k) P_R = P_R q_1 q_2, \quad (\text{A.51})$$

por lo que reemplazando en A.50 se obtiene:

$$I_{\phi_2\phi_2}^L = \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^L \int \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} P_R q_1 q_2 \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \\ \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \quad (\text{A.52})$$

y haciendo uso de la propiedad:

$$q_1 q_2 = 2q_1 \cdot q_2 - q_2 q_1, \quad (\text{A.53})$$

se sigue que:

$$I_{\phi_2\phi_2}^L = \frac{i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^L \int \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} P_R(2q_1 \cdot q_2 - q_2 q_1) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right). \quad (\text{A.54})$$

Para evaluar esta integral separémosla en 2 integrales, una que contendrá a  $q_2$  y otra que contendrá a  $q_1$ .

Sea:

$$II_{q_1}^L = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \mathcal{A} \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \quad (\text{A.55})$$

y utilizando el método de los parámetros de Feynman A.2 se obtiene:

$$II_{q_1}^L = \int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dudvdw \delta(u + v + w - 1) \times \frac{2!(\gamma^\nu q_{1\nu})}{[u(q_1^2 - M_{\phi_2}^2) + v(q_1^2 - M_j^2) + w((q_1 + q_2)^2 - M_S^2)]^3}. \quad (\text{A.56})$$

Sea ahora  $D'_{q_1} = u(q_1^2 - M_{\phi_2}^2) + v(q_1^2 - M_j^2) + w((q_1 + q_2)^2 - M_S^2)$  y realizando el mismo procedimiento de la ecuación A.17, se sigue que:

$$D'_{q_1} = (q_1 + wq_2)^2 - q_2^2 w(w - 1) - uM_{\phi_2}^2 - vM_j^2 - wM_S^2, \quad (\text{A.57})$$

considerando  $p = q_1 + wq_2$ . En consecuencia, se deduce que  $d^4 q_1 = d^4 p$ , y también se tiene que  $q_{1\nu} = p_\nu - wq_{2\nu}$ . Además, definamos  $A = q_2^2 w(w - 1) + uM_{\phi_2}^2 + vM_j^2 + wM_S^2$ , por lo tanto se sigue que:

$$II_{q_1}^L = 2\gamma^\nu \int_0^1 dudvdw \delta(u + v + w - 1) \times \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(p_\nu - wq_{2\nu})}{[p^2 - A]^3}. \quad (\text{A.58})$$

Sin embargo, se tiene que:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p}{[p^2 - A]^3} = 0, \quad (\text{A.59})$$

y solo sobrevive la integral:

$$-wq_{2\nu} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - A]^3}, \quad (\text{A.60})$$

cuya solución ya se obtuvo en la ecuación A.21 y por lo tanto:

$$\begin{aligned} III_{q_1}^L &= -\gamma^\nu(wq_{2\nu}) \int_0^1 dudvdw\delta(u+v+w-1) \\ &\quad \times \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2}{[p^2 - A]^3} \\ &= \frac{-iwq_{2\nu}}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{w(1-w)} \frac{1}{(q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)} \\ &= \frac{-iq_{2\nu}}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \frac{1}{(q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Por otro lado, sea:

$$III_{q_1}^L = \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} q_1 \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_j^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \quad (\text{A.62})$$

se puede apreciar que es la misma forma de la integral en A.55 solo que acá no está el factor  $\gamma^\nu$  por lo que la solución es análoga a la ecuación A.61:

$$III_{q_1}^L = \frac{-iq_2}{(4\pi)^2} \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \frac{1}{(q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2)}. \quad (\text{A.63})$$

por lo tanto, se tiene que:

$$\begin{aligned} I_{\phi_2\phi_2}^L &= \frac{i^2\mu_2y_{\alpha j}y_{\beta k}S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} (-2q_2 \cdot q_2 + q_2 q_2) \\ &\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

y haciendo uso de la propiedad  $q_2 q_2 = q_2^2$ , se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} I_{\phi_2\phi_2}^L &= \frac{\mu_2y_{\alpha j}y_{\beta k}S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \\ &\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_{2jS}}^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$



La integral A.65 presenta divergencia por sí sola. Por este motivo, resulta propicio incorporar la contribución proveniente del diagrama representado en la figura A.8 y combinar ambas contribuciones. Examinando más detenidamente la contribución de la figura A.8:

$$\begin{aligned}
I_{\phi_1\phi_2}^L &= \int \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} (-iy_{\alpha j} C_\xi P_R) \left( i \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) \right) (-if_{jk}^L P_L) \left( i \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) \right) \\
&\quad \times (-iy_{\beta k} S_\xi P_R) \left( \frac{i}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right) (+i\mu_2 S_\xi C_\xi) \left( \frac{i}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{i}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right) \\
&= \frac{-i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4} f_{jk}^L \int \int \frac{d^4q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} P_R \left( \frac{q_1 + M_j}{q_1^2 - M_j^2} \right) P_L \left( \frac{q_2 + M_k}{q_2^2 - M_k^2} \right) P_R \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right) \left( \frac{1}{q_1^2 - M_{\phi_2}^2} \right) \left( \frac{1}{(q_1 + q_2)^2 - M_S^2} \right), \tag{A.66}
\end{aligned}$$

esta integral es análoga a la integral de la ecuación A.50, solamente se diferencian en que hay un signo menos global y que para el propagador correspondiente al  $q_2$  le corresponde una masa  $M_{\phi_1}$ , por lo que la integral de la ecuación A.66 se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
I_{\phi_1\phi_2}^L &= \frac{-\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right). \tag{A.67}
\end{aligned}$$

Ahora, al sumar las integrales A.65 y A.67 se consigue lo siguiente:

$$\begin{aligned}
I_{\phi_2\phi_2}^L + I_{\phi_1\phi_2}^L &= \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right) \left[ \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2}^2} - \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_1}^2} \right] \\
I_{\phi_2\phi_2}^L + I_{\phi_1\phi_2}^L &= \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right) \left[ \frac{q_2^2 - M_{\phi_1}^2 - q_2^2 + M_{\phi_2}^2}{(q_2^2 - M_{\phi_2}^2)(q_2^2 - M_{\phi_1}^2)} \right] \\
&= \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^2} f_{jk}^L P_R \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \\
&\quad \times \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right) \left[ \frac{M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_1}^2}{(q_2^2 - M_{\phi_2}^2)(q_2^2 - M_{\phi_1}^2)} \right]. \tag{A.68}
\end{aligned}$$

Calculando la integral para  $q_2$ :

$$I_{q_2}^L = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} q_2^2 \left( \frac{1}{q_2^2 - M_k^2} \right) \left( \frac{1}{q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2} \right) \left[ \frac{1}{(q_2^2 - M_{\phi_2}^2)(q_2^2 - M_{\phi_1}^2)} \right], \quad (\text{A.69})$$

utilizando el método de parámetros de Feynman se tiene que:

$$I_{q_2}^L = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz dr \delta(x + y + z + r - 1) \times \frac{3! q_2^2}{[x(q_2^2 - M_k^2) + y(q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2) + z(q_2^2 - M_{\phi_2}^2) + r(q_2^2 - M_{\phi_1}^2)]^4}, \quad (\text{A.70})$$

sea:

$$D_{q_2} = x(q_2^2 - M_k^2) + y(q_2^2 - M_{\phi_2 j S}^2) + z(q_2^2 - M_{\phi_2}^2) + r(q_2^2 - M_{\phi_1}^2) = q_2^2 - xM_k^2 - yM_{\phi_2 j S}^2 - zM_{\phi_2}^2 - rM_{\phi_1}^2. \quad (\text{A.71})$$

Definamos ahora  $A_2 = xM_k^2 + yM_{\phi_2 j S}^2 + zM_{\phi_2}^2 + rM_{\phi_1}^2$ , por lo tanto se sigue que:

$$I_{q_2}^L = 3! \int_0^1 dx dy dz dr \delta(x + y + z + r - 1) \times \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{q_2^2}{[q_2^2 - A_2]^4}, \quad (\text{A.72})$$

y utilizando el resultado de la ecuación A.7 se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} I_{q_2}^L &= 6 \int_0^1 dx dy dz dr \delta(x + y + z + r - 1) \\ &\quad \times \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{2}{6} \left( \frac{1}{A_2} \right) \\ &= \frac{-2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz dr \delta(x + y + z + r - 1) \frac{1}{A_2} \\ &= \frac{-2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx dy dz dr \delta(x + y + z + r - 1) \\ &\quad \times \frac{1}{xM_k^2 + yM_{\phi_2 j S}^2 + zM_{\phi_2}^2 + rM_{\phi_1}^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

rompiendo el delta:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{x(M_k^2 - M_{\phi_1}^2) + y(M_{\phi_2 j S}^2 - M_{\phi_1}^2) + z(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_1}^2) + M_{\phi_1}^2}. \quad (\text{A.74})$$

Para simplicidad de la notación sea:  $a = M_k^2$ ,  $b = M_{\phi_2 j S}^2$ ,  $c = M_{\phi_2}^2$  y  $d =$ , por lo que:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \frac{1}{x(a-d) + y(b-d) + z(c-d) + d}, \quad (\text{A.75})$$

y estas integrales tienen como solución:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(c-d)(4\pi)^2} \left[ \frac{2b^2(a-c) \ln\left(\frac{a}{b}\right) + 2c^2(a-b) \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{4(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{2(a-b)(a-c)(b-c) \ln a - 3(a-b)(a-c)(b-c)}{4(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{2b^2(a-d) \ln\left(\frac{a}{b}\right) - 2d^2(a-b) \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{4(a-b)(a-d)(b-d)} - \frac{2(a-b)(a-d)(b-d) \ln a + 3(a-b)(a-d)(b-d)}{4(a-b)(a-d)(b-d)} \right], \quad (\text{A.76})$$

desarrollando los términos dentro de los corchetes:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(c-d)(4\pi)^2} \left[ \frac{2b^2(a-c) \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{4(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{2c^2(a-b) \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{4(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{2(a-b)(a-c)(b-c) \ln a}{4(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{3(a-b)(a-c)(b-c)}{4(a-b)(a-c)(b-c)} - \frac{2b^2(a-d) \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{4(a-b)(a-d)(b-d)} - \frac{2d^2(a-b) \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{4(a-b)(a-d)(b-d)} - \frac{2(a-b)(a-d)(b-d) \ln a}{4(a-b)(a-d)(b-d)} + \frac{3(a-b)(a-d)(b-d)}{4(a-b)(a-d)(b-d)} \right], \quad (\text{A.77})$$

simplificando:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(c-d)(4\pi)^2} \left[ \frac{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2(a-b)(b-c)} + \frac{c^2 \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{2(a-c)(b-c)} \right. \\ \left. - \frac{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2(a-b)(b-d)} - \frac{d^2 \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{2(a-d)(b-d)} \right. \\ \left. - \frac{\ln a}{2} + \frac{3}{4} + \frac{\ln a}{2} - \frac{3}{4} \right], \quad (\text{A.78})$$

por lo que:

$$I_{q_2}^L = \frac{-2i}{(c-d)(4\pi)^2} \left[ \frac{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2(a-b)(b-c)} + \frac{c^2 \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{2(a-c)(b-c)} \right. \\ \left. - \frac{b^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)}{2(a-b)(b-d)} - \frac{d^2 \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{2(a-d)(b-d)} \right] \\ = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^2 \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{(a-c)(c-b)} \right. \\ \left. - \frac{b^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{(a-b)(b-d)} - \frac{d^2 \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{(a-d)(d-b)} \right], \quad (\text{A.79})$$

simplificando se obtiene que:

$$I_{q_2}^L = \frac{i}{(c-d)(4\pi)^2} \left[ \frac{\frac{b^2}{a^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{a}\right)} + \frac{\frac{c^2}{a^2} \ln\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(1-\frac{c}{a}\right)\left(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\right)} \right. \\ \left. - \frac{\frac{b^2}{a^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{a}\right)} - \frac{\frac{d^2}{a^2} \ln\left(\frac{d}{a}\right)}{\left(1-\frac{d}{a}\right)\left(\frac{d}{a}-\frac{b}{a}\right)} \right]. \quad (\text{A.80})$$

Por lo que definiendo entonces la función:

$$\mathcal{I}_L(a, b) = \frac{a^2 \ln(a)}{(1-a)(a-b)} + \frac{b^2 \ln(b)}{(1-b)(b-a)}, \quad (\text{A.81})$$

se sigue entonces que:

$$I_{q_2}^L = \frac{i}{(M_{\phi_2}^2 - M_{\phi_1}^2)(4\pi)^2} \left[ \mathcal{I}_L\left(\frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2}\right) - \mathcal{I}_L\left(\frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2}\right) \right], \quad (\text{A.82})$$

por lo que entonces al reemplazar la ecuación A.82 en la ecuación A.68 se tiene:

$$I_{\phi_2\phi_2}^L + I_{\phi_1\phi_2}^L = \frac{-i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^L \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \times \left[ \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.83})$$

De manera totalmente análoga se consiguen las contribuciones para los diagramas:A.7 y A.6, obteniendo así la siguiente expresión:

$$I_{\phi_1\phi_1}^L + I_{\phi_2\phi_1}^L = \frac{-i\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^L \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \times \left[ \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (\text{A.84})$$

Entonces, definiendo la función:

$$C_{jk}^L = \int_0^1 \frac{dudvdw\delta(u+v+w-1)}{(1-w)} \left[ \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_1}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) - \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_1 j S}^2}{M_k^2} \right) + \mathcal{I}_L \left( \frac{M_{\phi_2}^2}{M_k^2}, \frac{M_{\phi_2 j S}^2}{M_k^2} \right) \right], \quad (\text{A.85})$$

y utilizando los resultados de A.83, A.84 y la definición A.85 se concluye que la contribución total de los diagramas que involucran al vértice  $\bar{N}_j P_L N_k^c S^\dagger$  es:

$$\mathcal{M}_\nu^L = \frac{\mu_2 y_{\alpha j} y_{\beta k} S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} f_{jk}^L C_{jk}^L. \quad (\text{A.86})$$

Por lo tanto la expresión para la matriz de masa de neutrinos es:

$$[\mathcal{M}_\nu]_{\alpha\beta} = \frac{\mu_2 S_{2\xi}^2}{4(4\pi)^4} y_{\alpha j} (f_{jk}^L C_{jk}^L + f_{jk}^R C_{jk}^R) y_{\beta k} \quad (\text{A.87})$$

$$= \sum_k y_{\alpha j} \tilde{M}_{jk} y_{\beta k} = \left[ y \tilde{M} y^T \right]_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.88})$$

# Bibliografía

- [1] X. Fan, T.G. Myers, B.A.D. Sukra, and G. Gabrielse. Measurement of the electron magnetic moment. *Physical Review Letters*, 130(7), February 2023. ISSN 1079-7114. doi: 10.1103/physrevlett.130.071801. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.130.071801>.
- [2] Tom W. B. Kibble. The standard model of particle physics, 2014.
- [3] Paul Langacker. *The Standard Model and Beyond*. Taylor & Francis, 2017. ISBN 978-1-4987-6322-6, 978-1-4987-6321-9, 978-0-367-57344-7, 978-1-315-17062-6. doi: 10.1201/b22175.
- [4] Q. R. Ahmad et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory. *Phys. Rev. Lett.*, 89:011301, 2002. doi: 10.1103/PhysRevLett.89.011301.
- [5] F. P. An et al. Observation of electron-antineutrino disappearance at Daya Bay. *Phys. Rev. Lett.*, 108:171803, 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.171803.
- [6] J. K. Ahn et al. Observation of Reactor Electron Antineutrino Disappearance in the RENO Experiment. *Phys. Rev. Lett.*, 108:191802, 2012. doi: 10.1103/PhysRevLett.108.191802.
- [7] Samoil M. Bilenky and S. T. Petcov. Massive Neutrinos and Neutrino Oscillations. *Rev. Mod. Phys.*, 59:671, 1987. doi: 10.1103/RevModPhys.59.671. [Erratum: *Rev.Mod.Phys.* 61, 169 (1989), Erratum: *Rev.Mod.Phys.* 60, 575–575 (1988)].
- [8] Yasuo Takeuchi. Recent oscillation results and future prospects of Super-Kamiokande. *PoS*, NOW2022:004, 2023. doi: 10.22323/1.421.0004.

- [9] Koichi Ichimura. Recent results from KamLAND-Zen. *PoS*, NOW2022:067, 2023. doi: 10.22323/1.421.0067.
- [10] P. F. de Salas, D. V. Forero, C. A. Ternes, M. Tortola, and J. W. F. Valle. Status of neutrino oscillations 2018:  $3\sigma$  hint for normal mass ordering and improved CP sensitivity. *Phys. Lett. B*, 782:633–640, 2018. doi: 10.1016/j.physletb.2018.06.019.
- [11] Gianfranco Bertone and Dan Hooper. History of dark matter. *Rev. Mod. Phys.*, 90(4): 045002, 2018. doi: 10.1103/RevModPhys.90.045002.
- [12] F. Zwicky. Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helv. Phys. Acta*, 6:110–127, 1933. doi: 10.1007/s10714-008-0707-4.
- [13] N. Aghanim et al. Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters. *Astron. Astrophys.*, 641:A6, 2020. doi: 10.1051/0004-6361/201833910. [Erratum: *Astron. Astrophys.* 652, C4 (2021)].
- [14] Lars Bergström. Nonbaryonic dark matter: Observational evidence and detection methods. *Rept. Prog. Phys.*, 63:793, 2000. doi: 10.1088/0034-4885/63/5/2r3.
- [15] J. Silk et al. *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010. ISBN 978-1-107-65392-4. doi: 10.1017/CBO9780511770739.
- [16] Gerard Jungman, Marc Kamionkowski, and Kim Griest. Supersymmetric dark matter. *Phys. Rept.*, 267:195–373, 1996. doi: 10.1016/0370-1573(95)00058-5.
- [17] James M. Cline, Kimmo Kainulainen, Pat Scott, and Christoph Weniger. Update on scalar singlet dark matter. *Phys. Rev. D*, 88:055025, 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.055025. [Erratum: *Phys. Rev. D* 92, 039906 (2015)].
- [18] John Preskill, Mark B. Wise, and Frank Wilczek. Cosmology of the Invisible Axion. *Phys. Lett. B*, 120:127–132, 1983. doi: 10.1016/0370-2693(83)90637-8.
- [19] Carlos E. Yaguna and Óscar Zapata. Multi-component scalar dark matter from a  $Z_N$  symmetry: a systematic analysis. *JHEP*, 03:109, 2020. doi: 10.1007/JHEP03(2020)109.

- [20] Geneviève Bélanger, Kristjan Kannike, Alexander Pukhov, and Martti Raidal. Minimal semi-annihilating  $\mathbb{Z}_N$  scalar dark matter. *JCAP*, 06:021, 2014. doi: 10.1088/1475-7516/2014/06/021.
- [21] Cristian D. R. Carvajal and Óscar Zapata. One-loop Dirac neutrino mass and mixed axion-WIMP dark matter. *Phys. Rev. D*, 99(7):075009, 2019. doi: 10.1103/PhysRevD.99.075009.
- [22] Mayumi Aoki, Shinya Kanemura, and Osamu Seto. Neutrino mass, Dark Matter and Baryon Asymmetry via TeV-Scale Physics without Fine-Tuning. *Phys. Rev. Lett.*, 102:051805, 2009. doi: 10.1103/PhysRevLett.102.051805.
- [23] Michael Gustafsson, Jose Miguel No, and Maximiliano A. Rivera. Predictive Model for Radiatively Induced Neutrino Masses and Mixings with Dark Matter. *Phys. Rev. Lett.*, 110(21):211802, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.211802. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 112, 259902 (2014)].
- [24] Diego Restrepo, Oscar Zapata, and Carlos E. Yaguna. Models with radiative neutrino masses and viable dark matter candidates. *JHEP*, 11:011, 2013. doi: 10.1007/JHEP11(2013)011.
- [25] Cesar Bonilla, Ernest Ma, Eduardo Peinado, and Jose W. F. Valle. Two-loop Dirac neutrino mass and WIMP dark matter. *Phys. Lett. B*, 762:214–218, 2016. doi: 10.1016/j.physletb.2016.09.027.
- [26] Ernest Ma. Verifiable radiative seesaw mechanism of neutrino mass and dark matter. *Phys. Rev. D*, 73:077301, 2006. doi: 10.1103/PhysRevD.73.077301.
- [27] Mayumi Aoki and Takashi Toma. Impact of semi-annihilation of 3symmetric dark matter with radiative neutrino masses. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2014(09):016–016, September 2014. ISSN 1475-7516. doi: 10.1088/1475-7516/2014/09/016. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1475-7516/2014/09/016>.
- [28] Shu-Yu Ho, Takashi Toma, and Koji Tsumura. A Radiative Neutrino Mass Model with SIMP Dark Matter. *JHEP*, 07:101, 2017. doi: 10.1007/JHEP07(2017)101.



- [29] Geneviève Bélanger, Alexander Pukhov, Carlos E. Yaguna, and Óscar Zapata. The  $Z_5$  model of multi-com-component dark matter. *JHEP*, 09:030, 2020. doi: 10.1007/JHEP09(2020)030.
- [30] J. A. Casas and A. Ibarra. Oscillating neutrinos and  $\mu \rightarrow e, \gamma$ . *Nucl. Phys. B*, 618:171–204, 2001. doi: 10.1016/S0550-3213(01)00475-8.
- [31] Mary K. Gaillard, Paul D. Grannis, and Frank J. Sciulli. The Standard model of particle physics. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S96–S111, 1999. doi: 10.1103/RevModPhys.71.S96.
- [32] Agneta Wallin Levinovitz and Nils Ringertz. *The Nobel Prize: the first 100 years*. World Scientific, 2001.
- [33] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 100:120801, 2008. doi: 10.1103/PhysRevLett.100.120801.
- [34] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29, 2012. doi: 10.1016/j.physletb.2012.08.020.
- [35] Edward W. Kolb. Particle physics and cosmology. In *42nd Scottish Universities Summer School in Physics (SUSSP 93): High-energy Phenomenology (NATO Advanced Study Institute)*, pages 361–415, 3 1994.
- [36] Andrei D Sakharov. Violation of cp-invariance, c-asymmetry, and baryon asymmetry of the universe. In *In The Intermissions... Collected Works on Research into the Essentials of Theoretical Physics in Russian Federal Nuclear Center, Arzamas-16*, pages 84–87. World Scientific, 1998.
- [37] R. Wendell et al. Atmospheric neutrino oscillation analysis with sub-leading effects in Super-Kamiokande I, II, and III. *Phys. Rev. D*, 81:092004, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.092004.

- [38] Andre de Gouvea and Petr Vogel. Lepton Flavor and Number Conservation, and Physics Beyond the Standard Model. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 71:75–92, 2013. doi: 10.1016/j.pnpnp.2013.03.006.
- [39] Seth Koren. *New Approaches to the Hierarchy Problem and their Signatures from Microscopic to Cosmic Scales*. PhD thesis, UC, Santa Barbara (main), 2020.
- [40] Yuval Grossman, Yosef Nir, and Riccardo Rattazzi. CP violation beyond the standard model. *Adv. Ser. Direct. High Energy Phys.*, 15:755–794, 1998. doi: 10.1142/9789812812667\_0011.
- [41] F. Zwicky. On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae. *Astrophys. J.*, 86:217–246, 1937. doi: 10.1086/143864.
- [42] Vera C. Rubin and W. Kent Ford, Jr. Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions. *Astrophys. J.*, 159:379–403, 1970. doi: 10.1086/150317.
- [43] George F. Smoot et al. Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps. *Astrophys. J. Lett.*, 396:L1–L5, 1992. doi: 10.1086/186504.
- [44] Joseph Silk. Galaxy formation and dark matter. *Lect. Notes Phys.*, 720:101–121, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-71013-4\_4.
- [45] Leonard S Kisslinger and Debasish Das. A brief review of dark matter. *International Journal of Modern Physics A*, 34(27):1930013, 2019.
- [46] P. A. R. Ade et al. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astron. Astrophys.*, 571:A1, 2014. doi: 10.1051/0004-6361/201321529.
- [47] Joshua Frieman, Michael Turner, and Dragan Huterer. Dark Energy and the Accelerating Universe. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008. doi: 10.1146/annurev.astro.46.060407.145243.
- [48] Prateek Agrawal, Francis-Yan Cyr-Racine, Lisa Randall, and Jakub Scholtz. Make dark matter charged again. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(05):022, 2017.

- [49] Katherine Garrett and Gintaras Duda. Dark Matter: A Primer. *Adv. Astron.*, 2011:968283, 2011. doi: 10.1155/2011/968283.
- [50] E. Aprile et al. Dark Matter Search Results from a One Ton-Year Exposure of XENON1T. *Phys. Rev. Lett.*, 121(11):111302, 2018. doi: 10.1103/PhysRevLett.121.111302.
- [51] D. S. Akerib et al. Results from a search for dark matter in the complete LUX exposure. *Phys. Rev. Lett.*, 118(2):021303, 2017. doi: 10.1103/PhysRevLett.118.021303.
- [52] B. J. Mount et al. LUX-ZEPLIN (LZ) Technical Design Report. 3 2017.
- [53] J. Aalbers et al. DARWIN: towards the ultimate dark matter detector. *JCAP*, 11:017, 2016. doi: 10.1088/1475-7516/2016/11/017.
- [54] A. Albert et al. Searching for Dark Matter Annihilation in Recently Discovered Milky Way Satellites with Fermi-LAT. *Astrophys. J.*, 834(2):110, 2017. doi: 10.3847/1538-4357/834/2/110.
- [55] V. Lefranc and E. Moulin. Dark matter search in the inner galactic center halo with H.E.S.S. In *51st Rencontres de Moriond on Cosmology*, pages 149–152, 8 2016.
- [56] M. G. Aartsen et al. Search for annihilating dark matter in the Sun with 3 years of IceCube data. *Eur. Phys. J. C*, 77(3):146, 2017. doi: 10.1140/epjc/s10052-017-4689-9. [Erratum: Eur.Phys.J.C 79, 214 (2019)].
- [57] Pran Nath et al. The Hunt for New Physics at the Large Hadron Collider. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 200-202:185–417, 2010. doi: 10.1016/j.nuclphysbps.2010.03.001.
- [58] Albert M Sirunyan et al. Search for dijet resonances in proton–proton collisions at  $\sqrt{s} = 13$  TeV and constraints on dark matter and other models. *Phys. Lett. B*, 769:520–542, 2017. doi: 10.1016/j.physletb.2017.02.012. [Erratum: Phys.Lett.B 772, 882–883 (2017)].
- [59] Daniel Abercrombie et al. Dark Matter benchmark models for early LHC Run-2 Searches: Report of the ATLAS/CMS Dark Matter Forum. *Phys. Dark Univ.*, 27:100371, 2020. doi: 10.1016/j.dark.2019.100371.

- [60] Ziro Maki, Masami Nakagawa, and Shoichi Sakata. Remarks on the unified model of elementary particles. *Prog. Theor. Phys.*, 28:870–880, 1962. doi: 10.1143/PTP.28.870.
- [61] Isabel Cordero-Carrión, Martin Hirsch, and Avelino Vicente. General parametrization of Majorana neutrino mass models. *Phys. Rev. D*, 101(7):075032, 2020. doi: 10.1103/PhysRevD.101.075032.
- [62] X Qian and P Vogel. Neutrino mass hierarchy. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, 83:1–30, 2015.
- [63] Evgeny K. Akhmedov. Neutrino physics. In *ICTP Summer School in Particle Physics*, pages 103–164, 6 1999.
- [64] G. Bélanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov. micrOMEGAs4.1: two dark matter candidates. *Comput. Phys. Commun.*, 192:322–329, 2015. doi: 10.1016/j.cpc.2015.03.003.
- [65] Giorgio Arcadi, Abdelhak Djouadi, and Martti Raidal. Dark Matter through the Higgs portal. *Phys. Rept.*, 842:1–180, 2020. doi: 10.1016/j.physrep.2019.11.003.
- [66] Lawrence J. Hall, Karsten Jedamzik, John March-Russell, and Stephen M. West. Freeze-In Production of FIMP Dark Matter. *JHEP*, 03:080, 2010. doi: 10.1007/JHEP03(2010)080.
- [67] Carlos E. Yaguna. The Singlet Scalar as FIMP Dark Matter. *JHEP*, 08:060, 2011. doi: 10.1007/JHEP08(2011)060.
- [68] R. L. Workman and Others. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022. doi: 10.1093/ptep/ptac097.
- [69] Alejandro Ibarra, Carlos E. Yaguna, and Oscar Zapata. Direct Detection of Fermion Dark Matter in the Radiative Seesaw Model. *Phys. Rev. D*, 93(3):035012, 2016. doi: 10.1103/PhysRevD.93.035012.
- [70] Jisuke Kubo, Ernest Ma, and Daijiro Suematsu. Cold Dark Matter, Radiative Neutrino Mass,  $\mu \rightarrow e\gamma$ , and Neutrinoless Double Beta Decay. *Phys. Lett. B*, 642:18–23, 2006. doi: 10.1016/j.physletb.2006.08.085.

- [71] J. Adam et al. New constraint on the existence of the  $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$  decay. *Phys. Rev. Lett.*, 110:201801, 2013. doi: 10.1103/PhysRevLett.110.201801.
- [72] Bernard Aubert et al. Searches for Lepton Flavor Violation in the Decays  $\tau^+ \rightarrow e^+\gamma$  and  $\tau^+ \rightarrow \mu^+\gamma$ . *Phys. Rev. Lett.*, 104:021802, 2010. doi: 10.1103/PhysRevLett.104.021802.
- [73] C. Dohmen et al. Test of lepton flavor conservation in  $\mu \rightarrow e$  conversion on titanium. *Phys. Lett. B*, 317:631–636, 1993. doi: 10.1016/0370-2693(93)91383-X.
- [74] I. Cordero-Carrión, M. Hirsch, and A. Vicente. General parametrization of majorana neutrino mass models. *Physical Review D*, 101(7), April 2020. ISSN 2470-0029. doi: 10.1103/physrevd.101.075032. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.075032>.
- [75] G. Belanger, F. Boudjema, A. Pukhov, and A. Semenov. micrOMEGAs\_3: A program for calculating dark matter observables. *Comput. Phys. Commun.*, 185:960–985, 2014. doi: 10.1016/j.cpc.2013.10.016.
- [76] A. Semenov. LanHEP: A Package for the automatic generation of Feynman rules in field theory. Version 3.0. *Comput. Phys. Commun.*, 180:431–454, 2009. doi: 10.1016/j.cpc.2008.10.012.
- [77] Python Software Foundation. *Python Language Reference, version 3.9*. Python Software Foundation, 2023. URL <https://www.python.org>.
- [78] Michael E Peskin. *An introduction to quantum field theory*. CRC press, 2018.
- [79] Ronald J Tallarida. *Pocket book of integrals and mathematical formulas*, volume 2. CRC Press, 2008.