

PROCESOS DE MEDIACIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS CON ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA EN PRODUCTO DE MEDIDAS

Autor(es)

Adriana Andrea Anacona Ordoñez

María Elena Aranzazu Arias

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Medellín, Colombia
2024





Procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas

Adriana Andrea Anacona Ordoñez María Elena Aranzazu Arias

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciada en Educación Básica Primaria

Asesores

Gilberto de Jesús Obando Zapata, Doctor (PhD) en Educación Ana Carolina González Grisales, Magíster (MSc) en Educación

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación
Licenciatura en Educación Básica Primaria
Medellín, Antioquia, Colombia
2024

Cita

(Anacona y Aranzazu, 2024)

Referencia

Anacona, A., y Aranzazu, M. E. (2024). Procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas [Trabajo de grado profesional]. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Estilo APA 7 (2020)



Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).





Centro de Documentación Educación

Repositorio Institucional: http://bibliotecadigital.udea.edu.co

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

Rector: John Jairo Arboleda Céspedes.

Decano/Director: Wilson Antonio Bolívar Buriticá.

Jefe departamento: Maribel Barreto Mesa.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Dedicatoria

María Elena Aranzazu Arias: Esta dedicatoria es una bella oportunidad para exaltar y agradecer primeramente a "Dios", por su fidelidad y cuidado en todo este proceso formativo, por alinear y bendecir cada paso que he dado, mostrando siempre su gran amor.

A mi "Familia" por el apoyo incondicional durante todo este tiempo.

A ti "Patito" por tu compañía, apoyo constante e incondicional, sin importar las distancias, la lluvia o el sol, por estar siempre dispuesto para mí, motivándome siempre a salir adelante.

Adriana Andrea Anacoca Ordoñez: A mis hijos y esposo, quiero expresarles mi más profundo agradecimiento por su constante aliento y paciencia. Gracias por brindarme el tiempo y el espacio para perseguir mis sueños y alcanzar mis metas. Su amor incondicional y apoyo inquebrantable han sido mi mayor fortaleza en este viaje. Con ustedes a mi lado, sé que siempre puedo alcanzar las estrellas. Este logro también es suyo, y celebro con gratitud cada paso que hemos dado juntos en este camino. ¡Gracias por ser mi roca y mi inspiración constante!"

Agradecimientos

Queremos expresar nuestro agradecimiento sincero a nuestros asesores, cuya orientación experta y apoyo constante fueron fundamentales para desarrollar este proyecto de investigación. Su sabiduría y dedicación fueron una guía invaluable a lo largo de todo el proceso.

Agradecemos a los centros de práctica que abrieron sus puertas y que nos dieron la oportunidad de investigar en sus instalaciones. A los estudiantes por su colaboración y disposición fueron esenciales para la recolección de datos y el éxito de nuestro estudio.

Extendemos nuestro agradecimiento a quienes contribuyeron a la investigación, ya sea proporcionando recursos, compartiendo conocimientos o apoyando emocionalmente.

Cada uno de ustedes hizo posible este proyecto y agradecemos su participación.

Su generosidad y compromiso han sido un pilar fundamental en nuestro camino hacia la culminación de este trabajo.
¡Gracias por ser parte de este viaje y por su invaluable contribución!"

Tabla de contenido

Resumen	10
Introducción	12
1. Planteamiento del problema	14
2. Justificación	22
2.1. Objetivos	29
3. Marco teórico	30
3.1 Estructuras multiplicativas	30
3.2 Magnitudes continuas	34
3.3 Medida, cantidad y unidades de medida	37
3.4 Estimación y conversión de medidas	40
3.5 Mediación	41
4. Metodología	44
4.1 Enfoque metodológico	44
4.2 Fases de la investigación	45
4.3 Ética del investigador	55
5. Análisis y Resultados	56
5.1 De la imaginación de calcular a la realidad de medir	56
5.2 De la intuición a la realidad	60
6. Conclusiones	69
6.1 Recomendaciones	72
7. Referencias	73
8. Anexos	79
Anexo 1. Consentimiento informado a padres de familia, I.E Francisco M	Iontova Kennedv 79

Anexo 2. Consentimiento informado a padres de familia, Colegio León de Judá	80
Anexo 3. Prueba exploratoria, estructura multiplicativa	82
Anexo 4. Tarea complementaria, taller conversión y estimación de medidas	83
Anexo 5. Cartilla, Producto de medidas (portada)	84
Anexo 6. Presentación, Cartilla Producto de Medidas	85
Anexo 7. Sesión 1 Introducción	86
Anexo 8. Confirmación y verificación de lo aprendido	87
Anexo 9. Sesión 2, divirtiéndonos por las alturas	88
Anexo 10. Hoja de registro de tiempos y distancias	89
Anexo 11. Práctica estimación de velocidad	90
Anexo 12. Sesión 3, práctica online con Google Maps	91
Anexo 13. Instrucciones para navegar en Google Maps	92
Anexo 14. Problemas para hallar producto de medidas	93
Anexo 15. Observo y construyo	94
Anexo 16. Sesión 5, construcción de plano a escala	95

Lista de tablas

Tabla 1 ϵ

Lista de figuras

Figura 1. Primer problema de la prueba exploratoria	17
Figura 2Segundo problema de la prueba exploratoria	18
Figura 3Tercer problema de la prueba exploratoria	19
Figura 4Cuarto problema de la prueba exploratoria	19
Figura 5Diagrama de árbol	33
Figura 6. Área de un rectángulo	35
Figura 7Perímetro de un rectángulo	35
Figura 8. Magnitudes básicas	39
Figura 9. Magnitudes derivadas	40
Figura 10Problema de velocidad	50
Figura 11Sesión uno, verifica lo aprendido	58
Figura 12. Elaboración cinta métrica y medición de objetos	59
Figura 13Medición de figuras geométricas trazadas en el suelo	60
Figura 14. Estimación de medida y medición de objetos en el aula	62
Figura 15Tarea complementaria, taller de estimación y conversión de medidas	64
Figura 16Tarea tres, vuelo de aviones	65
Figure 17 Registro de tiempos y distancias	66

Resumen

Este documento presenta una investigación adscrita al programa de Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad de Antioquia (Medellín, Colombia). Esta investigación se desarrolló en los centros de práctica de las profesoras en formación y tuvo como interés los procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa relacionados con el producto de medidas.

Se aplicó una prueba exploratoria, se diseñó y consolidó una cartilla y se implementó una tarea complementaria en correspondencia con el producto de medidas y los planteamientos de Vygotsky (1979), Vergnaud (1988) y Pólya (1988). Los resultados de la investigación muestran los diferentes desafíos que presentan los estudiantes al realizar procesos que incluyan la medida y estimación de las unidades de medida, la conversión de unidades de medición. Estos obstáculos revelan áreas de necesidad de apoyo y claridad conceptual para los estudiantes.

En consecuencia, la mediación pedagógica resulta crucial para superar las dificultades detectadas, al permitir guiar a los estudiantes en la construcción de significados y estrategias facilitadoras para la resolución de problemas. En este sentido, las herramientas diseñadas en esta investigación como la cartilla y tarea complementaria, destacan por su potencial al promover aprendizajes significativos. Los hallazgos obtenidos no solo contribuyen a mejorar la práctica educativa actual, sino que también ofrecen una base valiosa para diseñar futuras intervenciones en contextos similares. De este modo, se refuerza la importancia de una enseñanza reflexiva, mediada y centrada en las necesidades de los estudiantes.

Palabras clave: producto de medidas, mediación, magnitud.

Abstract

This document presents a research study affiliated with the Bachelor's Program in Primary Basic Education at the University of Antioquia (Medellín, Colombia). The central objective of this research focused on the practice centers, which necessitated examining the mediation process in solving problems involving multiplicative structures related to the product of measurements.

A booklet, an exploratory test, and a supplementary task were designed and developed in line with the theories of Vygotsky (1979), Vergnaud (1988), and Pólya (1988). The results of the research show the different challenges that students face when carrying out processes that include the measurement and estimation of units of measurement, the conversion of units of measurement. These obstacles reveal areas of need for support and conceptual clarity for students.

Keywords: product of measurements, mediation, magnitude.

Introducción

La resolución de problemas con estructura multiplicativa constituye un área fundamental en la Educación Matemática, lo que implica la utilidad de conceptos multiplicativos en contextos reales y abstractos. Como equipo investigativo se decidió realizar una prueba exploratoria con estudiantes de grado cuarto y quinto de las instituciones de práctica. Dicha prueba se enfocó en la resolución de problemas basada en las categorías isomorfismo de medida, espacio único de medida y producto de medidas de la estructura multiplicativa de Vergnaud (1988).

En los resultados de la prueba, se evidenciaron algunos desafíos por parte de los estudiantes para realizar procesos relacionados con la multiplicación, específicamente, en el producto de medidas planteado por Vergnaud (1988). Esta situación junto con algunos documentos de literatura en Educación Matemática ayudó a formular la siguiente pregunta de investigación ¿Qué procesos permiten la mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa de producto de medidas?

En correspondencia con lo anterior, el contenido de este proyecto de investigación se organiza en cuatro capítulos. El primer capítulo relata la manera en que se consolidó el problema de investigación, la pregunta y los objetivos que orientaron el trabajo.

El segundo capítulo presenta los referentes teóricos que proporcionan un acercamiento a los procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas. Seguidamente, el tercer capítulo correspondiente a la metodología en la que se muestra procedimentalmente cómo se diseñó e implementó una cartilla con cinco tareas y un taller complementario a treinta estudiantes del grado cuarto y quinto.

El cuarto capítulo presenta los resultados de la investigación, los cuales muestran que la resolución de problemas de producto de medidas conlleva una serie de procesos cognitivos que van más allá de la simple aplicación de algoritmos. En este sentido, la mediación juega un papel crucial al facilitar el camino hacia la comprensión y la solución de dichos problemas.

Finalmente, en el quinto capítulo se dan a conocer las principales conclusiones y reflexiones a las cuales se llegaron después del proceso investigativo. Cabe resaltar que una de ellas fue, destacar la importancia de la correspondencia entre los instrumentos, la medida y las unidades de medida. Es por ello, que gracias a la implementación de la cartilla la mayoría de los estudiantes

aprendieron a seleccionar los instrumentos y reconocieron si eran los más adecuados para el objeto o espacio a medir.

1. Planteamiento del problema

Las matemáticas se utilizan en varios campos y situaciones, son fundamentales en la resolución de problemas cotidianos, el diseño de algoritmos y en muchas áreas de la investigación. Algunas de las aplicaciones más comunes de las matemáticas son: describir y entender fenómenos en física, química y biología. También son utilizadas para recopilar, analizar e interpretar datos en diversas disciplinas, desde la investigación científica hasta la toma de decisiones empresariales a través de la estadística. En la medicina, la modelización de procesos biológicos, análisis de datos médicos y desarrollo de modelos epidemiológicos. Por lo tanto, enseñar matemáticas desde una edad temprana es fundamental para la formación integral de los niños, en edad escolar.

Palmer (2018), reconoce la utilidad de las matemáticas en el ámbito de la vida cotidiana, al mencionar algunos ejemplos claros donde se realizan cálculos y estimaciones en situaciones con medidas (peso, capacidad, tiempo y longitud) al vincular preguntas como: ¿A qué horas salgo para llegar puntual al trabajo?, ¿qué camino es más rápido para llegar?, ¿qué tiempo tomará? Las respuestas a esas preguntas se resuelven en mayor medida a través de la práctica que con algoritmos matemáticos. En ese caso, para saber cuánto tiempo tarda una persona en llegar al trabajo, lo usual es llevar a cabo la acción directamente. Sin embargo, cuando se observa las matemáticas desde la educación, la perspectiva cambia. En lugar de basarse únicamente en la acción, se destaca la importancia de procesos como el razonamiento, la reflexión y la comunicación (MEN, 1998), lo que permite a los estudiantes no solo resolver problemas, sino que también reflexionen sobre las estrategias utilizadas, para enfrentar situaciones con un enfoque más profundo y analítico.

En efecto, las matemáticas pueden llegar a considerarse una asignatura con desafíos para muchos estudiantes, pero las pasiones que despierta esta ciencia son extremas: o la amas o la odias (Siquiera C. 2015). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas son esenciales, en particular, este trabajo se centra en analizar las matemáticas desde el currículum de la Educación Básica Primaria, específicamente, en la organización multiplicativa. En ese sentido, Vergnaud (1990) propone que las situaciones aditivas y de estructuras multiplicativas son dos tipos fundamentales de contextos matemáticos que permiten desarrollar una comprensión más profunda de operaciones como la multiplicación y la división.

La población escolar objeto de esta investigación se sitúa en las instituciones educativas Juan Pablo Gómez Ochoa, específicamente en la sede urbana Francisco Montoya Kennedy, en el municipio de Caramanta, Antioquia. La atención se centra en el grado cuarto, compuesto por 19 estudiantes cuyas edades varían entre 8 y 12 años, con una distribución equitativa de géneros entre niños y niñas. Cabe destacar que esta institución es de carácter público, lo que refleja un entorno educativo accesible y diverso.

Y en el Colegio León de Judá, institución educativa de carácter privado, ubicado en zona rural con sede campestre en el municipio de Villamaria- Caldas. La atención se centra en los grados cuarto y quinto, conformado por 13 estudiantes, comprendidos entre las edades de 10 y 11 años.

Estos contextos proporcionan un marco significativo para analizar las dinámicas de aprendizaje y las metodologías pedagógicas aplicadas, así como el desarrollo social y emocional de los estudiantes en esta etapa crucial de su formación. A través de esta investigación, se busca comprender mejor las necesidades y desafíos que enfrentan los estudiantes en sus procesos educativos, así como identificar estrategias que puedan mejorar sus experiencias escolares.

Una de las dificultades que se logró evidenciar en el contexto de práctica (Colegio León de Judá de Villamaría-Caldas y de algunos estudiantes del grado cuarto de la Escuela Urbana Francisco Montoya Kennedy de Caramanta – Antioquia), es que los procesos de enseñanza en el área de matemáticas en los grados cuarto y quinto se basan en la aplicación de procedimientos memorísticos del algoritmo de las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y memorización de las tablas de multiplicar. Para Chávez (2011), los procesos de aprendizaje se asocian a menudo con el uso de metodologías tradicionales, que emplean métodos deductivos y conceptualizan los contenidos del currículo a través de lecciones magistrales. Esta estrategia tiende a reforzar el aprendizaje con actividades y tareas escolares que resultan repetitivas, mecánicas y tediosas, lo que, lamentablemente, puede llevar a los estudiantes a desarrollar sentimientos negativos hacia las matemáticas. Esto se observó al realizar una prueba exploratoria con 28 estudiantes entre los 8 y 11 años.

El análisis y la continua reflexión sobre la prueba exploratoria enfocada en la estructura multiplicativa fueron decisivos para encaminar, delimitar y focalizar en el producto de medidas. Esta prueba, que constituyó el punto de partida, evidenció que la mayoría de los estudiantes se les dificultó reconocer y apropiarse de los conceptos teóricos relacionados el producto de medidas. En la mayoría de las respuestas sobre situaciones que requerían calcular el área de una superficie, los estudiantes no identificaron cómo se expresaba el área del rectángulo, no reconocían la magnitud de área, la conversión a metros cuadrados. Tal situación condujo a la planificación e

implementación de estrategias metodológicas que subrayaron la importancia de adaptar la enseñanza a las necesidades reales de los alumnos. Al identificar las dificultades en la comprensión de las unidades de medida y las conversiones, se hizo evidente la necesidad de un enfoque más práctico y experiencial, que se alineara con los principios del aprendizaje constructivista.

La prueba exploratoria tenía cuatro problemas en correspondencia con los planteamientos de Vergnaud (1988) del producto de medidas, el cual menciona que deben considerar tres aspectos: situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, conceptos y teoremas que permiten analizar y dar soluciones a esas situaciones y el conjunto de representaciones que se utilizan en los procedimientos para solucionar los problemas. Es por ello que el primero se clasificó como un problema de conteo, en el que se combinan dos grupos camisas y pantalones, y se busca saber cuántas combinaciones posibles hay entre dichas prendas.

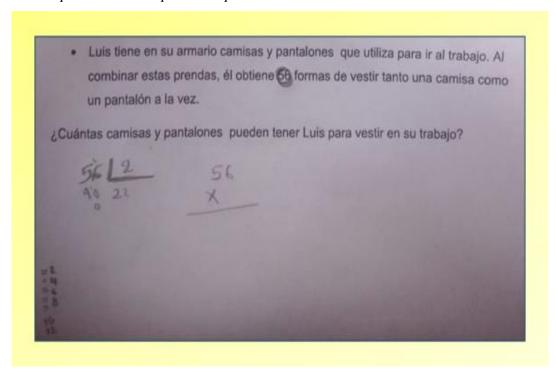
El segundo estuvo relacionado con la búsqueda de un área. En este caso, se trabajó con las propiedades de un rectángulo, lo que implicó la aplicación de fórmulas matemáticas para calcular su área a partir de su largo y ancho. Adicionalmente, el tercer problema involucró la comparación de una cantidad de dinero, lo que recibe Carmen con respecto a la cantidad que recibe su hermana María. Y por último, el cuarto problema también vinculó las posibles combinaciones que puede hacer Elena con sus faldas y blusas.

Esta prueba exploratoria se llevó a cabo en grupos de a tres estudiantes y las respuestas de los problemas no se clasificaron como "bien", "regular" o "mal", porque la prueba se aplicó para identificar las estrategias utilizadas por los estudiantes al resolver problemas con organización multiplicativa enfocado en el producto de medidas. Por un lado, se reconoció que la estrategia más utilizada por los estudiantes en la resolución de los problemas fue el conteo, el cual está más relacionado con el sistema aditivo. Sin embargo, los enunciados propuestos correspondían al sistema multiplicativo.

Asimismo, se observó que ninguna de las respuestas de los estudiantes incluía estimación o valoración sin instrumentos de medida. Según Bright (1976) estimar es "un proceso de llegar a una medición o a una medida sin la ayuda de herramientas de medida. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos" (p.89). Adicionalmente, en varios casos se observó el uso de las tablas de multiplicar y la utilización del algoritmo de multiplicación para tratar de resolver la situación, pero los estudiantes afirmaron que les hacía falta datos en los enunciados.

En el primer problema (ver figura1) la mayoría de los estudiantes utilizó la información contenida en la situación para referirse a las cantidades de prendas y con dicha información se inclinaron por realizar una división, con lo cual establecieron una relación entre la cantidad de prendas de vestir en el divisor y en el dividendo relacionaron con las dos prendas que se mencionan "una camisa como un pantalón a la vez" siendo el resultado posibles combinaciones.

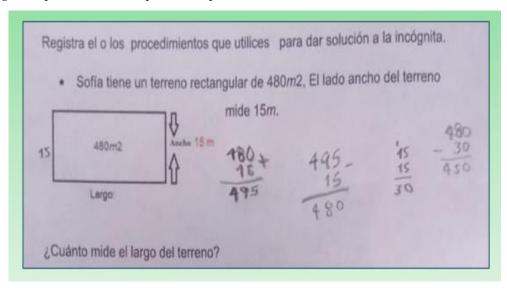
Figura 1.Primer problema de la prueba exploratoria



Nota. Elaboración propia.

En el segundo problema, relacionado con la longitud del terreno (ver figura 2), los niños utilizaron datos del rectángulo y aplicaron el algoritmo de suma a todas las medidas de este. En ocasiones, también emplearon la resta, utilizando el resultado de la suma junto con la medida del ancho. A pesar de sus esfuerzos por realizar estas operaciones, no lograron determinar la medida del terreno. Los estudiantes enfrentaron dificultades con el manejo de magnitudes y la proporción, lo que impidió que ningún grupo llegara a una respuesta correcta. Además, mostraron confusión en varias ocasiones sobre el significado de las unidades de medida, especialmente en relación con las unidades cuadradas, cuestionando su aplicación y utilidad en el contexto del problema.

Figura 2.Segundo problema de la prueba exploratoria



Nota. Elaboración propia.

Para solucionar el problema dos, los estudiantes no tuvieron en cuenta que debían calcular el valor de una tercera cantidad (área del rectángulo) a partir de dos cantidades iniciales (longitud de los lados):

M1: Medida 1

M2: Medida 2

M3: Medida 3

Estas tres medidas se relacionan mediante la ecuación:

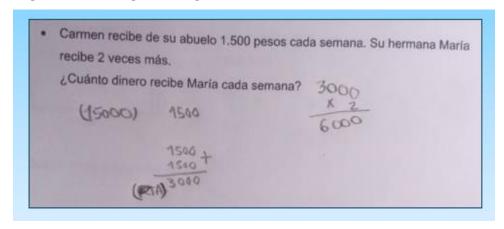
 $M3 = M2 \times M1$

Si bien las situaciones de producto de medidas promueven la interacción entre magnitudes y sus medidas mediante una estructura multiplicativa, la mayoría de los estudiantes se les dificulta realizar estos procesos. Un ejemplo de ello se muestra en la figura 2, en la que se evidencia que un estudiante aplicó suma, después la multiplicación y por último realizó cálculos mentales obteniendo una respuesta sin tener en cuenta el producto de medidas.

Para resolver el problema tres (ver figura 3) los estudiantes se inclinaron en su mayoría por el algoritmo de la suma, que no es una alternativa errónea, pero no representaba el producto de

medidas. Asimismo, la mayoría de los estudiantes optaron por multiplicar el doble del resultado de la suma, pero ninguno realizó los cálculos de manera mental.

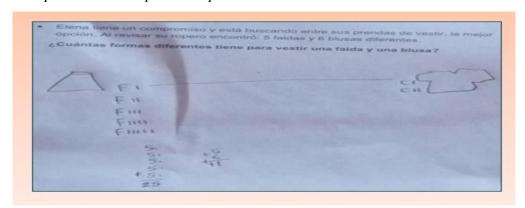
Figura 3. *Tercer problema de la prueba exploratoria*



Nota. Elaboración propia.

En el problema cuatro los estudiantes usaron la representación gráfica de las cantidades, pero ninguno logró responder con esta estrategia, como se puede ver en la figura 4, donde el estudiante intentó establecer correspondencia entre faldas y blusas, luego realizó una suma con la cantidad de faldas y como última opción sumó la cantidad de prendas, sin concluir en una respuesta a lo cuestionado.

Figura 4.Cuarto problema de la prueba exploratoria



Nota. Elaboración propia.

En relación con lo observado en la prueba de exploratoria, se evidencia que los estudiantes aplican tanto estrategias correctas como incorrectas. Sin embargo, suelen utilizar adecuadamente los algoritmos de las operaciones básicas, excepto en el caso de la división y multiplicación, que se aplicó de manera muy limitada. En ese sentido, los algoritmos utilizados por los estudiantes no corresponden con el producto de medidas, lo cual puso en evidencia sus dificultades o poco manejo en dicho concepto. Es por ello por lo que, la operación preferida por los estudiantes para encontrar una posible solución fue la suma, aunque dicha elección no siempre representó de manera correcta las relaciones y acciones sobre las cantidades involucradas en cada situación.

Para resolver situaciones de producto de medidas se deben considerar varios factores: unidad de medida en que se expresa, ejercicios de conversión, comprensión del uso de las diferentes unidades de medida, pero la mayoría de los estudiantes desconocen estos factores, y se redujeron a operaciones con algoritmos¹. Un hecho muy relevante es la poca cantidad de respuestas y la empleabilidad de estrategias incorrectas, se evidencian actitudes de confusión, incertidumbre, frustración, al preguntar qué operación debían haber desarrollado, cómo ordenar las cantidades para realizar las operaciones, entre otras. Al final, los estudiantes centraron la atención en las orientaciones realizadas por la docente encargada de implementar la prueba.

De igual manera, la utilización de herramientas de medición y la incorporación de dinámicas lúdicas no solo facilitaron la comprensión de los conceptos abstractos, sino que también promovieron su aplicación en situaciones cotidianas. En este sentido, las tareas fueron planificadas y organizadas en una cartilla que cumplió un doble propósito: servir como herramienta de aprendizaje y como evidencia del proceso en la resolución de problemas relacionados con el producto de medidas, apoyando así la sistematización del proceso de aprendizaje e interacción con el mismo y fomentando un aprendizaje significativo. La aplicación de la teoría de Vygotsky, centrada en la interacción social y la colaboración, enriqueció aún más el proceso de aprendizaje, promoviendo un ambiente en el que los alumnos pudieron aprender unos de otros y desarrollar habilidades de resolución de problemas en conjunto. Un incremento en la comprensión y aplicación de conceptos de medida indicó que las prácticas didácticas implementadas no solo fueron bien recibidas, sino que también tuvieron un impacto tangible en el aprendizaje.

¹ Algoritmos: conjunto de operaciones ordenadas que sirven para encontrar la solución de un problema, es decir, es una serie de instrucciones que se siguen para obtener un resultado final. Algoritmos matemáticos: qué son y nuestros ejemplos | ESIC

Para investigaciones futuras sobre el tema, se recomienda explorar con mayor profundidad las estrategias metodológicas adaptadas a los contextos y necesidades de los estudiantes, así como evaluar su efectividad en diferentes entornos educativos. Además, sería beneficioso investigar el uso de tecnologías digitales como herramientas de apoyo en la enseñanza del producto de medidas. Asimismo, se sugiere realizar estudios comparativos que analicen la implementación de diferentes enfoques pedagógicos en la enseñanza de la medición y el producto de medidas, con el fin de identificar prácticas que optimicen el aprendizaje de los estudiantes.

En consecuencia, el problema de investigación se centra en los procesos que deberían intervenir en la mediación de problemas con estructura multiplicativa. En ese sentido, el trabajo busca dar respuesta a la pregunta: ¿Qué procesos permiten la mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas?

2. Justificación

Es fundamental reconocer y explorar las posibles dificultades que los estudiantes pueden enfrentar al abordar situaciones de resolución de problemas relacionados con la multiplicación en el contexto de medidas. Las matemáticas, con su enfoque en conceptos abstractos y simbologías, pueden representar un desafío para muchos estudiantes. Asimismo, en algunas ocasiones los estudiantes se les dificulta visualizar la aplicación de ciertos conceptos matemáticos en su vida diaria, lo que a su vez puede llevarlos a cuestionar la relevancia de estos.

Es importante destacar que el desarrollo del pensamiento espacial y sistemas geométricos es fundamental no solo en el ámbito académico, sino también en la vida cotidiana (MEN, 1998). Estas habilidades son esenciales para comprender y resolver una amplia variedad de problemas en campos tan diversos como la ciencia, la ingeniería, la economía y otras áreas. Por lo tanto, es crucial abordar estas dificultades mediante estrategias de aprendizaje que promuevan el desarrollo de los conceptos matemáticos, así como su aplicación práctica. Estas estrategias pueden incluir el uso de situaciones reales que demuestren la relevancia de las matemáticas en diferentes contextos, así como actividades diseñadas para fomentar el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Esto no solo potencia el aprendizaje matemático, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos en la vida diaria y en sus futuras carreras profesionales.

Por un lado, las medidas y sus magnitudes ocupan un lugar fundamental en el desarrollo de este pensamiento y en el proceso de razonamiento lógico y analítico (MEN, 1998). Enseñar a los estudiantes a utilizar medidas no solo les facilita la comprensión y comunicación de información en múltiples contextos, como la ciencia, las matemáticas y la vida cotidiana, sino que también promueve la precisión y la exactitud. El dominio en el uso de medidas les otorga la capacidad de ser más precisos en sus cálculos y mediciones, lo que resulta crucial en campos como la ciencia, la ingeniería y la tecnología.

Por otro lado, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas involucra un amplio espectro de situaciones, problemas, procesos y procedimientos relacionados con: la medida, la proporción simple, la proporción múltiple, función lineal, no lineal, aplicaciones lineales, fracciones, razón, número racional y múltiplo divisor, etc. Adicionalmente, diversas investigaciones resaltan la importancia de la experimentación del isomorfismo de medidas (Caicedo y Manzano, 2019; Tarapues, 2018; y Cerritos, 2012). Lo contrario ha pasado con el producto de medidas donde el aproximarse a este concepto es difícil de referenciar, las

investigaciones mencionan el producto de medidas, sin profundizar o plantear estrategias de enseñanza o procesos de mediación.

El producto de medidas se enfoca en la resolución de problemas contextualizados (MEN, 2006). Por ejemplo, al considerar el siguiente caso hipotético: si tienes un terreno que mide 5 metros de largo y 3 metros de ancho, ¿cuál es el área total del terreno? Este ejemplo ilustra la importancia de comprender que existen diferentes tipos de unidades para medir longitud, como metros y centímetros. Además, es fundamental conocer las conversiones entre distintas unidades para poder realizar cálculos de manera efectiva empleando diversas medidas. Al multiplicar las dimensiones, es esencial que las unidades sean compatibles, lo que implica que se debe realizar las conversiones correspondientes si es necesario. Esto garantiza que al calcular el área (en este caso, multiplicando 5 metros por 3 metros) se obtenga un resultado correcto y significativo en las unidades adecuadas, que en este caso sería el área en metros cuadrados.

Este ejemplo no solo refuerza la comprensión de cómo calcular áreas, sino que también resalta la importancia de las conversiones entre diferentes unidades de medida. Aplicar estas habilidades matemáticas es útil en situaciones cotidianas donde se necesita estimar el espacio disponible, planificar un proyecto o incluso construir algo. Al comprender y manejar las unidades, se facilita una mejor toma de decisiones basada en cálculos precisos.

En el caso de los centros de práctica, las mallas curriculares incluían el producto de medidas a través de la enseñanza de figuras geométricas, sin tener en cuenta situaciones contextualizadas a la cotidianidad, necesidad de los estudiantes y sus realidades. Es ese sentido y en correspondencia con lo revisado en la literatura, se infieren las razones por las cuales no se profundiza en el producto de medidas en las instituciones:

Priorización de otros conceptos: en algunas planeaciones académicas, se priorizan ciertos temas considerados más fundamentales o relevantes (operaciones aritméticas: suma, resta, multiplicación y división) para el nivel de Básica Primaria y esto omite otros conceptos, como el producto de medidas. Los planes de estudio suelen tener limitaciones de tiempo, y los maestros pueden priorizar ciertos conceptos matemáticos considerados esenciales para el nivel educativo en cuestión.

Secuencia coherente en el desarrollo de habilidades básicas: en el diseño de planes de estudio, es fundamental establecer una secuencia coherente que permita a los estudiantes desarrollar bases sólidas en habilidades matemáticas. Se propone una organización que comienza

con la consolidación de conceptos básicos antes de introducirse en temas, como el producto de medidas.

Variedad de temas en matemáticas: dada la diversidad de temas que abarca el área de matemáticas, algunos conceptos pueden recibir menos énfasis para permitir una cobertura más amplia.

Formación de profesores: la formación continua de profesores se presenta como un pilar fundamental para el mantenimiento de la tendencia educativa y la adecuada adaptación de los planes de estudio ante los cambios en las demandas. Según Guskey (2002), la capacitación profesional no solo enriquece el conocimiento del docente, sino que también tiene un impacto significativo en la calidad de la enseñanza. En el ámbito de las matemáticas, donde la evolución es constante, resulta crucial abordar las actualizaciones y modificaciones en los planes de estudio de manera estratégica. Tal enfoque garantiza una enseñanza dinámica y pertinente que responde a las necesidades y exigencias del mundo contemporáneo (Steiner, 2018). La adecuación de los métodos de enseñanza, además, se ve beneficiada por la integración de nuevas tecnologías y enfoques pedagógicos, lo que permite a los educadores ofrecer una educación más inclusiva y efectiva (Hattie, 2009).

La necesidad de reformular las prácticas docentes en el ámbito de las matemáticas se hace evidente al observar que muchas de ellas aún están ancladas en métodos tradicionales que limitan el desarrollo del pensamiento crítico y la creatividad. Proporcionar a los profesores herramientas y estrategias para abordar la enseñanza de las matemáticas de una forma más inclusiva y contextualizada es una tarea que debe ser priorizada en la formación continua. Esto implica un compromiso por parte de las instituciones educativas para fomentar la reflexión sobre la práctica docente y ofrecer espacios de aprendizaje colaborativo donde los educadores puedan intercambiar experiencias y desarrollar nuevas formas de enseñanza.

Así, al mejorar la formación de los profesores y actualizar las metodologías empleadas en las aulas, se puede generar un efecto positivo en la motivación de los estudiantes y en su desempeño académico. Este proceso de adaptación y crecimiento profesional entre los educadores no solo beneficiará su desarrollo personal, sino que también repercutirá en la calidad de la educación que reciben los alumnos, preparándolos de una mejor manera para enfrentar los retos del futuro. En definitiva, la transformación de la enseñanza de las matemáticas debe ir acompañada de una

evolución en la práctica pedagógica que sea capaz de responder a las demandas de un mundo en constante cambio.

En los centros de práctica, las clases combinaban teoría y práctica, pero a menudo se utilizaban ejemplos repetitivos y mecánicos, asimismo, se implementaban las copias descontextualizadas acerca de las medidas, lo que resulta en un manejo superficial del tema. El enfoque de enseñanza se centraba en la realización de figuras geométricas planas en papel y sólidos geométricos en casa, más que en comprender los conceptos. No es que no se deba aplicar, simplemente que la enseñanza de figuras geométricas implica comprender sus dimensiones y propiedades. En muchos casos, estas dimensiones se expresan en unidades de medidas específicas. Por ejemplo, se puede medir la longitud de un lado, su área, o volumen de un objeto geométrico. Esto se relaciona directamente con producto de medidas, en consideración que las dimensiones geométricas están asociadas a unidades de medidas. En ese sentido, la capacidad de realizar cálculos con medidas facilita:

Desarrolla habilidades espaciales: la relación con producto de medidas radica en que se mejora la capacidad de estimar y comprender tamaños, distancias y relaciones espaciales. Estas habilidades son esenciales al trabajar con medidas, lo que facilita una interpretación más precisa de los datos. El desarrollo de habilidades espaciales es fundamental en el aprendizaje de la geometría, ya que esta área de las matemáticas permite a los estudiantes mejorar su capacidad para estimar y comprender tamaños, distancias y relaciones espaciales (Van, 1986). Estas habilidades son esenciales para trabajar con medidas, lo que a su vez facilita una interpretación más precisa de los datos y contribuye a la resolución de problemas matemáticos complejos (Clements, 1999).

Implementar aplicaciones en la vida cotidiana: las figuras geométricas se encuentran en nuestro entorno diario. Comprenderlas ayuda a reconocer patrones, calcular áreas y volúmenes, y resolver problemas prácticos, como diseño de espacios, construcción y planificación. Asimismo, permite resolver problemas prácticos en diversas áreas, como el diseño de espacios, la construcción y la planificación urbana (Bögl, 2015). La utilización de conceptos geométricos en contextos reales no solo mejora la comprensión matemática, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos en su vida diaria.

Realizar conexiones con otras áreas de las matemáticas: la geometría está íntimamente relacionada con otras disciplinas matemáticas, como el álgebra. Al entender la relación entre formas y estructuras, los estudiantes no solo refuerzan su comprensión de geometría, sino que

también desarrollan habilidades algorítmicas y algebraicas, fundamentales para su formación matemática integral (Kerslake, 1986). Este tipo de conocimiento es crítico, ya que prepara a los estudiantes para disciplinas científicas y tecnológicas que requieren un sólido entendimiento de los conceptos geométricos (NCTM, 2000). Por ende, la enseñanza de figuras geométricas sienta las bases para conceptos más avanzados en campos como la geometría analítica y la trigonometría, lo que fomenta una apreciación más profunda por la belleza y la estructura de las formas geométricas presentes en el entorno.

Según una observación realizada por las docentes investigadoras, el estudio de las figuras geométricas es lo más aproximado al producto de medidas en el proceso de enseñanza de los estudiantes de los grados cuarto y quinto de la población de práctica. Para este caso, la enseñanza se limita a trazar figuras, sin contexto, determinan áreas y perímetros a través de la aplicación de la suma, no se establecen situaciones problema reales o fórmulas simples para el tratamiento del área de figuras básicas (área del cuadrado = lado x lado). Así mismo se destaca la operación de la suma de las longitudes de todos los lados de una figura y utilizan unidades concretas (centímetros) para medir los lados y calcular el perímetro.

La práctica de los conceptos también es fundamental para mejorar la comprensión del producto de medidas. La enseñanza de conceptos específicos como las unidades de medida, magnitudes y medidas, puede depender en gran parte del plan de área de la institución educativa y los métodos de enseñanza utilizados por los docentes. Los estudiantes podrían desarrollar las habilidades del pensamiento espacial y sistemas geométricos al proporcionarles situaciones del mundo real en el que hallen áreas y perímetros, midan espacios (salones, pasillos, canchas) con los instrumentos pertinentes y realicen planos, entre otras. El aprendizaje del concepto de producto de medidas desde la Educación Básica Primaria resulta fundamental para abordar correctamente las unidades de medida en niveles educativos posteriores, como la Educación Media. Según Martínez (2020), la comprensión efectiva de las unidades de medida en etapas tempranas de la educación facilita el desarrollo de habilidades matemáticas más complejas en grados superiores.

Uno de los desafíos más recurrentes que enfrentan los estudiantes en la Educación Media es la incorrecta aplicación de las unidades de medida. Este problema se manifiesta, en gran medida, cuando los alumnos efectúan algoritmos matemáticos sin considerar las unidades a lo largo del proceso. En muchas ocasiones, estos estudiantes solo añaden las unidades al final del cálculo, obviando la importancia de operarlas de manera algebraica durante toda la resolución del problema

(García, 2019). Esta falta de atención a las unidades de medida puede conducir a errores significativos y a una comprensión deficiente de los conceptos matemáticos involucrados, tal como lo señala Pérez (2021).

Por lo tanto, enfatizar en la enseñanza de las unidades de medida desde la Educación Básica Primaria es esencial para que los alumnos desarrollen una visión integral y coherente del contenido matemático, lo que, a su vez, facilitará su desempeño en niveles educativos posteriores (López, 2022). Al fomentar esta comprensión en la etapa inicial de su educación, se contribuirá a mitigar las dificultades que presentan en la aplicación correcta de las unidades, mejorando así su capacidad para resolver problemas matemáticos de manera efectiva y precisa.

Para resolver un problema matemático, particularmente en el contexto del producto de medidas, es fundamental que los estudiantes comprendan de manera integral tanto la naturaleza del problema como la información disponible. Pólya (1965) destaca la relevancia de desglosar este proceso en cuatro etapas: entender el problema, planificar una estrategia adecuada, llevar a cabo dicha estrategia de forma sistemática y, finalmente, reflexionar sobre el proceso de resolución. Cada uno de estos pasos se considera crucial para fortalecer las habilidades matemáticas fundamentales.

Las matemáticas son fundamentales tanto en el ámbito académico como en la vida cotidiana. Fomentan habilidades analíticas y permiten resolver problemas en contextos reales. Estas disciplinas permiten mejorar la lógica y el razonamiento, preparando a los individuos para futuros estudios y carreras que involucren conceptos matemáticos. A través de este enfoque metódico, los estudiantes no solo mejoran su capacidad para resolver problemas matemáticos, sino que también cultivan una comprensión profunda y sostenible de las mismas (Pólya, 1965).

Desde la perspectiva de Vygotsky (1979), la mediación juega un papel vital en el aprendizaje, ya que facilita el desarrollo cognitivo actuando como un puente entre el individuo y la tarea a la que se enfrenta. Esta mediación, que puede ser interna o externa, proporciona a los estudiantes las herramientas necesarias para entender y superar desafíos específicos, aumentando así su capacidad para aplicar lo aprendido en diversas situaciones.

Vygotsky (1981) argumenta que el lenguaje es una herramienta esencial no solo para la comunicación, sino también para el procesamiento del pensamiento y la internalización de conocimientos. A través de la interacción social, los estudiantes pueden acceder a conocimientos y habilidades que, de otro modo, les resultarían inalcanzables. Además, introduce el concepto de

la "zona de desarrollo próximo" (ZDP), que representa la brecha entre el nivel de desarrollo independiente de un individuo y el nivel que podría alcanzar con la asistencia de un adulto o compañero más experimentado. Este proceso de mediación entre el conocimiento previo y la nueva información es crucial para facilitar un aprendizaje (Vygotsky, 1979).

La mediación puede manifestarse externamente con la ayuda de un maestro (agencia) o el uso de herramientas, e internamente mediante el pensamiento y la autorregulación desarrolladas gracias a la interacción social y la experiencia. Así, los recursos externos e internos son cruciales en el aprendizaje y desarrollo personal. En este trabajo de investigación se entenderá la mediación como aquellos procesos que permiten solucionar problemas con estructura multiplicativa, específicamente en producto de medidas, en correspondencia con los planteamientos de Vygotsky (1979). En ese sentido, este trabajo propone los siguientes objetivos para dar respuesta a la pregunta de investigación.

2.1. Objetivos

De acuerdo con lo expuesto en la delimitación del problema la mediación en resolución de problemas representa un aspecto fundamental en el aprendizaje matemático, especialmente al abordar situaciones que implican producto de medidas. Comprender los procesos que intervienen en esta mediación no solo enriquece la práctica educativa, sino que también apoya la enseñanza de conceptos matemáticos complejos. A continuación, se presentan los siguientes objetivos de esta investigación, los cuales buscan profundizar en la identificación y caracterización de estos procesos mediadores que permiten tener un acercamiento a la pregunta de investigación.

2.1.1 Objetivo general

• Analizar los procesos, que permiten la mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, en producto de medidas.

2.1.2 Objetivos específicos

- Identificar los procesos de mediación en la resolución de problemas, en producto de medidas.
- Caracterizar los procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa, en producto de medidas.

3. Marco teórico

La presente investigación se centra en analizar el proceso de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas, siendo un área relevante debido al escaso énfasis que se da en el área de matemáticas evidenciado en los centros de práctica (ver capítulo 2). Para responder a ello, este capítulo presenta algunos referentes teóricos relacionados con los conceptos de organizaciones multiplicativas y mediación.

3.1 Estructuras multiplicativas

Las estructuras multiplicativas según Vergnaud (1988), están conformadas por un conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar y dar soluciones a situaciones que implica una o varias multiplicaciones o divisiones. Dichas soluciones pueden trabajarse en: proporción simple, proporción múltiple, función lineal, no lineal y aplicaciones lineales, fracciones, razón, número racional, múltiplo divisor, entre otros. Por lo tanto, las estructuras multiplicativas se pueden desglosar en tres aspectos fundamentales: el isomorfismo de medidas, el producto de medidas y el espacio único de medidas (Vergnaud, 1988).

En el contexto de estas estructuras, el isomorfismo de medidas, el espacio único de medidas y el producto de medidas, reflejan las relaciones entre diversas cantidades. Estas interrelaciones son cruciales, ya que evidencian la conexión que se establece entre magnitudes que pertenecen a dos tipos distintos de espacios de medida, demostrando así una correlación lineal entre ellas.

Para el caso del isomorfismo de medidas, Vergnaud (1988) menciona que es un concepto clave en la comprensión de cómo diferentes magnitudes se relacionan entre sí a través de operaciones matemáticas. Asimismo, el autor menciona cuatro situaciones, cada una con características y aplicaciones específicas:

Multiplicación: este tipo de operación se da cuando una cantidad se repite varias veces. Por ejemplo, si tenemos una magnitud como la longitud y un escalar que indica cuántas veces se repite (por ejemplo, 5 metros repetidos 3 veces), el resultado se obtiene multiplicando la cantidad (5 m) por el número de repeticiones (3). En este caso, se obtiene un total de 15 metros.

Regla de tres simple: este proceso se utiliza para resolver problemas en los que se busca establecer una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes. Por ejemplo, si 2 metros de tela cuestan 10 euros, ¿cuánto costarán 5 metros? Usando la regla de tres, establecemos la proporción y encontraremos que 5 metros costarán 25 euros.

División medida: este proceso se refiere a cómo se puede dividir una cantidad en partes proporcionales. Por ejemplo, si tenemos 12 litros de agua y queremos dividirlos en 4 recipientes de igual medida, cada recipiente contendrá 3 litros. Este tipo de problema permite entender cómo se distribuyen cantidades de forma equitativa.

División partitiva: este es un tipo específico de división busca encontrar cómo se puede dividir una cantidad en partes específicas que pueden no ser iguales.

Las operaciones de multiplicación y división son fundamentales para desarrollar habilidades en el uso de magnitudes y medidas en diferentes contextos, ya que facilitan la comprensión de relaciones matemáticas y sirven como base para resolver situaciones cotidianas relacionadas con cantidades y proporciones (Santos et al., 2020). En particular, la operación de producto de medidas o el producto cartesiano establece la relación de tres cantidades: dos son factores y uno es el resultado de la multiplicación, lo que se manifiesta tanto en el plano numérico como en el dimensional (Cruz y Martínez, 2019). En ese sentido, se pueden identificar dos clasificaciones de situaciones problemáticas en el producto de medidas:

Multiplicación: Esta implica encontrar la medida del producto cuando se conocen las medidas elementales.

División: En este caso, se trata de determinar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra y el resultado del producto.

En el caso de producto de medidas también se abarca la combinatoria, la cual se refiere a las situaciones en las que se combinan dos o más elementos y/o cantidades determinadas (González, 2021). Por ejemplo, consideremos un caso hipotético en el que Camilo tiene en su closet 4 camisas y 3 pantalones, todos distintos entre sí. Si Camilo decide usar una camisa y un pantalón a la vez, el número de combinaciones posibles para vestirse se puede calcular mediante la multiplicación de las cantidades de camisas y pantalones. Para resolver esta situación, se pueden emplear dos estrategias de solución.

Estrategia 1: uso de representación simbólica. Esta estrategia plantea una relación multiplicativa, donde se identifican las cantidades para combinar y se establece la operación que permite hallar la cantidad de combinaciones. En este caso, el número total de combinaciones que Camilo puede formar se calcula de la siguiente manera:

Así, esta estrategia no solo ayuda a Camilo a comprender el concepto de producto de medidas, sino que también refuerza su capacidad para aplicar principios matemáticos en situaciones cotidianas (Vargas, 2022).

En la situación, se identifica:

- Cantidad 1: 4 camisas
- Cantidad 2: 3 pantalones.
- Cantidad de combinaciones: Cantidad de formas con que se puede vestir Camilo usando una camisa y un pantalón.

Estas cantidades se relacionan mediante la siguiente estructura multiplicativa:

Cantidad de combinaciones = cantidad 1 x cantidad 2

Seguidamente, podemos relacionar los elementos de la multiplicación con las cantidades identificadas previamente.

Cantidad de combinaciones = 4×3

Así, para saber la cantidad de formas que Camilo puede obtener al combinar una camisa y un pantalón, obtenemos:

Cantidad de combinaciones = 12

Finalmente, Camilo puede combinar sus camisas y pantalones de 12 formas diferentes.

Estrategia 2: uso del diagrama de árbol.

En esta estrategia se plantea la elaboración de un gráfico (diagrama de árbol), luego se identifican las cantidades a combinar para hallar la cantidad de combinaciones.

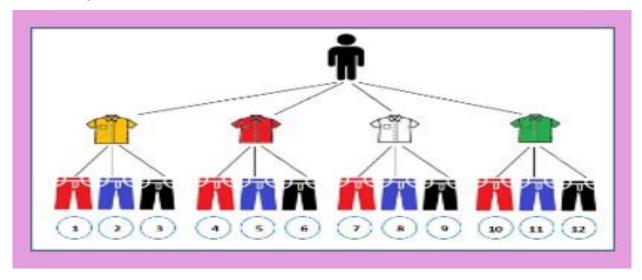
En la situación, se identifica:

- Cantidad 1: 4 camisas
- Cantidad 2: 3 pantalones.
- Cantidad de combinaciones: Cantidad de formas que puede vestirse Camilo usando una camisa y un pantalón a la vez.

A continuación, elaboramos el diagrama de árbol, al visualizarlo, realizamos el conteo de las modalidades con las cuales Camilo se puede vestir. Se observa en la figura las 12 formas, equivalentes a:

 $4 \ camisas \ x \ 3 \ pantalones = 12 \ formas.$

Figura 5.Diagrama de árbol



Nota: Fuente es.khanacademy.org

En combinatoria, a menudo se utiliza la multiplicación para contar el número de formas en que se pueden combinar elementos. De manera similar en el producto de medidas, específicamente con magnitudes, se multiplican dos magnitudes para formar otra nueva que representa el área, tiempo, distancia u otra cantidad. En ese orden de ideas, este trabajo de investigación tiene como uno de sus aspectos fundamentales las magnitudes y las medidas por su enfoque en el producto de medidas. Siendo las primeras una propiedad que se puede cuantificar. Por ejemplo, la longitud, el área, el volumen, la masa y el tiempo son todas magnitudes, cada una de estas puede medirse y compararse con otras. Para el caso de la medida, se puede definir como un resultado de aplicar un procedimiento de comparación de una magnitud con una unidad estándar. Por ejemplo, medir la longitud de una mesa puede implicar compararla con una regla que tiene la unidad de medida en centímetros o pulgadas.

3.2 Magnitudes continuas

Las magnitudes según Alsina (2006), son aquellas a las que se refieren al conocimiento de magnitudes continuas encontrándose en la vida cotidiana, como son: la longitud, la masa, la capacidad, el volumen, el tiempo, entre otras. El uso de la multiplicación en medidas permite no solo calcular áreas y volúmenes, sino que también establece relaciones entre diversas magnitudes físicas.

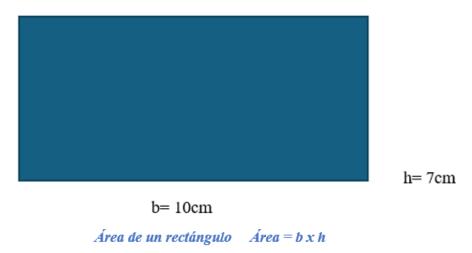
Un caso específico de estas magnitudes se puede observar al analizar la correlación entre el tiempo y la velocidad. La velocidad, definida como el cociente entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido, se presenta en múltiples contextos en campos como la física y la ingeniería. En el ámbito de la estadística, la multiplicación también juega un papel crucial al permitir la obtención de frecuencias acumuladas y probabilidades conjuntas, constituyendo así una herramienta esencial para el análisis de conjuntos de datos.

Estas interrelaciones entre las magnitudes resaltan la importancia de la multiplicación como operación matemática fundamental en diversas disciplinas. En este sentido, se puede afirmar que la comprensión y el manejo adecuado de las magnitudes continuas facilitan un acercamiento más riguroso y crítico a fenómenos cotidianos y científicos.

3.2.1 Algunos conceptos de magnitudes

Área: medida bidimensional que cuantifica una extensión o región en unidades cuadradas (Bennett, 2019). Estas unidades pueden darse en metros cuadrados (m²), centímetros cuadrados (cm²), etc. La fórmula general para el cálculo del área varía según la figura geométrica específica, por ejemplo: área de un rectángulo como lo muestra la siguiente figura.

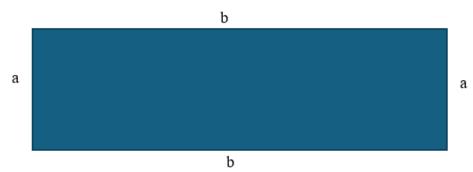
Figura 6. Área de un rectángulo



Nota: Fuente elaboración propia

Perímetro: medida de la longitud total del contorno de una figura o región bidimensional. Se expresa en unidades lineales, como metros (m), centímetros (cm), entre otros. La fórmula general para el cálculo del perímetro también depende de la figura geométrica específica, por ejemplo, perímetro de un rectángulo.

Figura 7. *Perímetro de un rectángulo*



Perímetro de un rectángulo: Perímetro = $2 \times (Longitud + Ancho)$

Nota: Fuente elaboración propia

El tiempo: medida que cuantifica la duración o separación entre eventos. Se mide en unidades como segundos (s), minutos (min), horas (h). Tiempo es igual a distancia sobre velocidad.

$$Tiempo = \frac{Distancia}{Velocidad}$$

Distancia: mide cuánto espacio existe entre dos puntos. Se mide en unidades lineales, como metros (m), kilómetros (km), millas (mi).

$$Distancia = Velocidad \times Tiempo$$

Estos conceptos son fundamentales en matemáticas y física, se aplican en una variedad de situaciones de la vida cotidiana y en disciplinas científicas. Al conceptualizar algunas medidas de magnitudes, se debe tener en cuenta que la medida es la cuantificación de una magnitud, y la unidad de medida es la cantidad estándar que se utiliza para expresar esa magnitud.

En la educación básica primaria, los conceptos de matemática, física y geometría son fundamentales para el desarrollo integral de los estudiantes. Estos conceptos no solo se limitan al aspecto teórico, sino que también se aplican en diversas situaciones de la vida cotidiana y en múltiples disciplinas científicas.

La matemática, como disciplina que estudia las propiedades y las relaciones de los números, es esencial para la formación de habilidades que los estudiantes utilizarán a lo largo de su vida. Según NCTM (2000), la enseñanza de la matemática debe enfocarse en proporcionar a los estudiantes un entendimiento profundo de conceptos matemáticos, promoviendo a su vez la resolución de problemas y el pensamiento crítico.

En el ámbito de la física y la geometría, estas disciplinas ofrecen una comprensión más amplia del mundo físico y del espacio en que se desenvuelven los estudiantes. La física se ocupa de las propiedades de las magnitudes y sus relaciones, mientras que la geometría estudia las figuras y las formas en el espacio. Ambas disciplinas son interdependientes y, como sostiene Van Hiele (1986), el entendimiento de las relaciones geométricas es esencial para la comprensión de conceptos físicos.

Un aspecto clave en la enseñanza de estas disciplinas es el concepto de medida, que se refiere a la cuantificación de una magnitud. A este respecto, Green (2005) resalta que la medida implica no solo la determinación del tamaño o cantidad de una magnitud, sino también el reconocimiento de las unidades estándar que permiten expresar esta magnitud de manera coherente y universal. Así, conceptos como longitud, masa y tiempo se vuelven fundamentales en la

formación de los estudiantes, proporcionando una base que les ayudará a interactuar con el entorno de manera más efectiva.

Conforme los estudiantes avanzan en su aprendizaje, la conexión entre matemática, física y geometría se convierte en un eje central que facilita la resolución de problemas en contextos reales. Según Piaget (1970), el desarrollo cognitivo en los niños permite que construyan sus propias estructuras de conocimiento mediante la experiencia, lo que resulta en una comprensión más robusta y significativa de estos conceptos.

En conclusión, la integración de la matemática, la física y la geometría en la educación básica primaria es crucial para el desarrollo de habilidades que los estudiantes utilizarán a lo largo de su vida. El enfoque en el entendimiento de las magnitudes y la importancia de las unidades de medida permite una conexión directa entre el aprendizaje y la aplicación práctica en la vida cotidiana y en diversos campos científicos.

3.3 Medida, cantidad y unidades de medida

Para hablar de magnitudes, también implica comprender conceptos como: medida, cantidad y unidades de medida. En ese sentido, Vergnaud (1991) afirma que el producto de medidas se genera al multiplicar dos magnitudes ya existentes para originar una nueva magnitud (cálculo del área, volumen, etc), de igual forma, pasa con las unidades de medida.

Por un lado, la cantidad se refiere a la extensión o número de elementos que puede poseer un objeto o fenómeno. Es, por tanto, un concepto que se refiere a una propiedad cualitativa y cuantitativamente definible. Por su parte, las unidades de medida son estándares que se utilizan para expresar cantidades de magnitudes. Estas proporcionan un marco común que permite comparar diferentes magnitudes entre sí (Cohen, 2010).

Por otro lado, el estudio y aplicación de magnitudes es esencial no solo para identificar las cantidades y unidades correspondientes, sino también para entender cómo interactúan entre sí las distintas magnitudes a través de la multiplicación y otras operaciones matemáticas, tal como se muestra en los procedimientos para calcular área o volumen (Steiner, 2012).

La comparación en el ámbito de la medición permite establecer un término de referencia que facilita la comprensión de una cantidad en relación con otra. Según Martínez (2019), medir implica determinar cuántas veces una unidad de medida puede ser contenida en una cantidad dada, lo que establece la noción de "medida". Este concepto resulta fundamental en el proceso de

cuantificación de la realidad, ya que permite convertir magnitudes en números, facilitando su manipulación y análisis en contextos matemáticos y científicos.

La comparación en el ámbito de la medición permite establecer un término de referencia que facilita la comprensión de una cantidad en relación a otra. Según Martínez (2019), medir implica determinar cuántas veces una unidad de medida puede ser contenida en una cantidad dada, lo que establece la noción de "medida". Este concepto resulta fundamental en el proceso de cuantificación de la realidad, ya que permite convertir magnitudes en números, facilitando su manipulación y análisis en contextos matemáticos y científicos.

La adecuada instrucción sobre medidas y unidades de medida, especialmente en el contexto de las operaciones multiplicativas, es un aspecto esencial en la educación matemática. Según Piaget (1972), la formación de conceptos matemáticos en los estudiantes se ve favorecida cuando estos son introducidos en contextos significativos. Por lo tanto, es indispensable adaptar las estrategias de enseñanza al nivel educativo de los alumnos, asegurando que los contenidos sean tanto accesibles como desafiantes.

La mediación educativa, en este sentido, no solo se limita a la simplificación de los contenidos, sino que también implica el diseño de actividades que presenten retos adecuados a las habilidades de los estudiantes (Vygotsky, 1978). Esta teoría subraya la importancia de la interacción social y el contexto en el aprendizaje, donde el mediador juega un rol crítico en facilitar la comprensión de conceptos complejos. Así, al integrar las nociones de medida y multiplicación en la enseñanza, se fomenta un aprendizaje más profundo que promueve el desarrollo de competencias fundamentales en la educación matemática.

Los conceptos de magnitud, cantidad, medida y unidad de medida son fundamentales en el ámbito de la ciencia y la ingeniería, y a menudo se utilizan de manera indistinta, aunque en realidad poseen características propias que los diferencian entre sí.

Magnitud: se refiere a una propiedad física que puede ser cuantificada. Según el Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2022), una magnitud es "cualidad de lo que se puede medir". Este concepto abarca una variedad de propiedades, como longitud, masa, tiempo, y temperatura. En este sentido, un autor como Giancoli (2014) señala que las magnitudes físicas son aquellas que permiten describir los fenómenos a través de la medición.

Por otro lado, cantidad se define como la expresión numérica de una magnitud. Cuando se habla de cantidad, se está aludiendo a un valor específico que proporciona una medida de la

magnitud en cuestión. En este contexto, el autor Cengage Learning (2017) explica que la cantidad se refiere a la porción que se tiene de una magnitud y que, por lo general, se expresa con un número acompañado de una unidad.

La medida es el proceso mediante el cual se determina la cantidad de una magnitud. Se trata de un procedimiento que involucra herramientas y técnicas específicas para obtener un valor cuantitativo. La medición varía según el tipo de magnitud que se está evaluando; por ejemplo, se puede medir la longitud con una regla y la masa con una balanza. Según Gibilisco (2006), la medida es esencial en cualquier experimento científico, ya que proporciona un marco para comparar y analizar resultados.

Finalmente, la unidad de medida es un estándar utilizado para expresar la cantidad de una magnitud. Las unidades permiten la comparación y la comunicación efectiva de mediciones. Por ejemplo, la unidad de medida para longitud puede ser el metro (m), para masa el kilogramo (kg) y para tiempo el segundo (s). Según el Sistema Internacional de Unidades (SI), es crucial utilizar unidades estandarizadas para asegurar consistencia y claridad en las mediciones realizadas ((BIPM) o Oficina Internacional de Pesas y Medidas et Mesures, 2019).

Figura 8. *Magnitudes básicas*

Magnitudes básicas				
Magnitud	Símbolo	Unidad S.I.	Equivalencias	
Longitud	e	Metro (m)	(km, hm, dam,)	
Masa	m	Kilogramo (kg)	(g, hg, dag,)	
Tiempo	t	Segundo (s)	(Años, días, h,)	
I. eléctrica	I	Amperio (A)	(kA, mA,)	
Temperatura	T	Kelvin (K)	K=°C+273	
I. luminosa	I	Candela (cd)		
Cantidad de sustancia	mol	Mol (mol)		

Nota: Fuente https://images.app.goo.gl/takgGfRZc5sMCyfe7

Figura 9. *Magnitudes derivadas*

Magnitudes derivadas				
Magnitud	Fórmula	Unidad 5.I.	Equivalencias	
Superficie	5= e ²	m ²	(km², hm²,)	
Volumen	V= e ³	m ³	1dm³= 1L	
Velocidad	v= e/t	m/s	(km/h, km/s,)	
Aceleración	a= v-v ₀ /t	m / s ²	(km/h², km/s²,)	
Fuerza	F= m·a	Newton (N)	1N= 10 ⁵ dyn 1kp= 9,8N	
Trabajo o Energía	W= F · e	Julio (J)	1J= 107Erg 1J= 0,24cal	
Potencia	P= W/t	watio (W)	1 CV= 735W	
Densidad	d= m/V	kg/m³	(g/cm³, g/mL,)	
Presión	P= F/S	Pascal (Pa)	1Atm = 760mmHg = 1013mb = 1,013·10 ⁵ Pa	

Nota: Fuente https://images.app.goo.gl/takgGfRZc5sMCyfe7

3.4 Estimación y conversión de medidas

Bright (1976) aborda la importancia de la estimación en la vida cotidiana y su aplicación en la toma de decisiones prácticas. Destaca que la habilidad para hacer estimaciones es esencial para enfrentar situaciones en las que no se dispone de información exacta o precisa, y donde es necesario tomar decisiones basadas en datos aproximados.

Bright (1976) resalta que la capacidad de estimar es una habilidad valiosa desarrollada durante la vida y que puede ser útil en varios contextos, desde las tareas cotidianas hasta la planificación estratégica en los negocios. Además, señala que la estimación es una habilidad que se puede mejorar mediante la práctica y la experiencia. Así como también lo plantea Hildreth (1983):

Al estimar longitudes se involucran habilidades y conceptos como la comprensión de los atributos (longitud) que se midió (estimó), comprensión del concepto de unidad, imagen mental de la unidad que se utilizó en la tarea de estimación, capacidad de comparar los objetos en el atributo a medir, selección y utilización de estrategias para hacer estimaciones cuantas veces sea necesario que permitan llegar a una aproximación de la medida ideal como lo plantea (pp. 50-54).

En su trabajo, Bright (1976), también destaca la importancia de ser consciente de las limitaciones de la estimación y de reconocer cuándo es necesario buscar datos más precisos o utilizar técnicas más avanzadas para realizar estimaciones más exactas. Además, enfatiza la importancia de desarrollar la capacidad de hacer estimaciones razonables y realistas, evitando tanto la subestimación como la sobreestimación.

3.5 Mediación

La mediación se erige como un puente que facilita la asimilación de nuevos conocimientos y enriquece significativamente la enseñanza del producto de medidas. Vygotsky (1979) enfatiza que este proceso no solo favorece el desarrollo cognitivo, sino que también promueve funciones mentales superiores, como el pensamiento crítico y la memoria lógica, necesarios para el desempeño efectivo en diversos contextos. Este marco destaca la importancia de analizar las estrategias de mediación implementadas en el aula, evidenciando su impacto en el aprendizaje, especialmente en contextos que involucran la resolución de problemas, como es el caso del producto de medidas.

El proceso de resolver situaciones problema enfrenta al estudiante a la construcción de aprendizaje, donde debe leer cuidadosamente el enunciado para comprender lo solicitado. Esto implica identificar la información relevante y destacar los datos importantes, lo cual permite establecer las operaciones matemáticas necesarias para resolver el problema de manera estratégica. Este enfoque también está en concordancia con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, que expone que las aplicaciones y los problemas no deben considerarse solo después de que haya ocurrido el aprendizaje. En cambio, deben utilizarse como contextos en los cuales tiene lugar dicho aprendizaje (MEN, 2006).

Este proceso no solo implica el desarrollo de habilidades analíticas y de razonamiento, sino que también inculca una competencia matemática integral, proporcionando una guía valiosa que forja la actitud del individuo frente a los desafíos de la vida. Pólya (1965) afirma que la habilidad para resolver problemas en matemáticas es fundamental para los estudiantes, debido a su uso frecuente a lo largo de sus vidas, incluso después de dejar la escuela. Esta habilidad, que puede enseñarse y fortalecerse desde los procesos educativos, se convierte en un componente central del aprendizaje y el desarrollo humano, sustentado por las teorías de Vygotsky. Para una enseñanza del producto de medidas, se pueden adoptar diversas estrategias de mediación:

Contextualización y ejemplos prácticos: plantear problemas que conecten directamente con la vida diaria de los estudiantes, por ejemplo, calcular el área y el perímetro de figuras planas en el entorno. Chesebro (1999) define la contextualización como el proceso de tener en cuenta el contexto en el que se produce o se comunica un contenido, lo que permite una comprensión más profunda.

Uso de material manipulable: la manipulación de objetos con medidas específicas permite a los estudiantes experimentar de manera tangible el proceso de multiplicación. Ameijeiras (2008) define estos materiales como "todo el amplio campo de los objetos que se ponen a disposición del niño" (p. 93).

Visualización gráfica: el uso de gráficos y diagramas se convierte en una ventana visual que ilustra cómo las medidas se combinan y multiplican. Tufte (1983) considera que los gráficos son una forma efectiva de presentar Información y facilitan la comprensión.

Diferenciación según niveles: reconocer las diferencias en el nivel de habilidades y adaptar las tareas para desafiar adecuadamente a cada estudiante promueve un entorno de aprendizaje inclusivo. Según Hockett (2017), la diferenciación maximiza las capacidades de cada alumno.

Conexiones interdisciplinarias: explorar cómo los conceptos de producto de medidas se entrelazan con otras disciplinas amplía la comprensión y el interés de los estudiantes. Boix y Jackson (2013) subrayan la importancia de esta interconexión en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo.

Colaboración entre estudiantes: fomentar la colaboración entre pares en la resolución de problemas promueve un aprendizaje cooperativo que enriquece la comprensión. Según Hijzen et al. (2007), el trabajo colaborativo facilita la integración social y el aprendizaje entre compañeros.

Retroalimentación constructiva: proporcionar retroalimentación específica y constructiva es fundamental para corregir malentendidos. Autores como Castillo y Cabrerizo (2010); López (2007) destacan la importancia de herramientas como las rúbricas para permitir una evaluación formativa y desarrollar una actitud crítica frente al proceso evaluativo.

Díaz y Hernández (1999) destacan que el docente juega un rol esencial como agente mediador, organizando y facilitando el encuentro entre los estudiantes y el conocimiento. Así, los educadores deben ayudar a organizar el sistema de pensamiento y generar instrumentos intelectuales para la resolución de problemas.

La mediación también abarcará la colaboración entre pares, un principio subrayado por Vygotsky (1979) como esencial para el aprendizaje. Esta colaboración puede extenderse a situaciones de mediación en conflictos, donde el mediador proporciona herramientas lingüísticas y conceptuales que favorecen la comprensión y la resolución de problemas.

Finalmente, es esencial considerar la actitud del docente y las preguntas que surgen durante el proceso, ya que la influencia del maestro o maestra afecta la orientación y el estímulo hacia el aprendizaje. Esta dinámica es crucial al abordar la enseñanza de estructuras multiplicativas, donde la brecha entre teoría y práctica puede ser notoria. La integración de teoría y práctica en la enseñanza de las matemáticas ayuda a los estudiantes a comprender profundamente los conceptos, convirtiéndose en un elemento fundamental para facilitar la construcción del conocimiento.

4. Metodología

El propósito de este capítulo es mencionar la manera en que las maestras en formación procedieron metodológicamente para tener un acercamiento a la pregunta problematizadora con sus respectivos objetivos. En ese sentido, este capítulo se divide en dos aspectos: *enfoque metodológico* y las fases de la investigación. Cabe resaltar que, este trabajo de investigación se desarrolló en el marco de la práctica pedagógica de las maestras en formación, específicamente en dos instituciones, una de ellas ubicada en el municipio de Manizales, Caldas y la otra en el municipio de Caramanta, Antioquia. En ambas instituciones, se trabajó con estudiantes de cuarto y quinto grado para un total de 30 estudiantes con edades entre los 9 y 11 años.

4.1 Enfoque metodológico

La investigación adoptó un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo y explicativo, para analizar las interacciones entre los estudiantes y las maestras investigadoras en el contexto de la actividad matemática en el aula. Según Creswell (2014), el enfoque cualitativo permite explorar y comprender la complejidad de las experiencias sociales, lo cual es fundamental en este estudio, ya que se centró en las dinámicas de enseñanza y aprendizaje. Además, se implementó el rol de observación participante, el cual, como señala Creswell (2014), se caracteriza por la implicación activa del investigador en el entorno que se estudia. Este rol favoreció la realización de procedimientos sistemáticos, tales como la participación, la reflexión constante y la evaluación, que son elementos clave en el proceso investigativo. De este modo, se logró obtener una comprensión más profunda de las prácticas educativas y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Guber (2011) subraya que la observación participante no solo consiste en observar desde una posición externa, sino también en interactuar y participar en las actividades del grupo, lo que brinda una perspectiva más rica y compleja de la realidad social. Este enfoque implica un balance delicado entre la objetividad del investigador y su implicación personal en el entorno estudiado. Además, Guber enfatiza la importancia de la reflexividad en este método, en la que el investigador debe ser consciente de su influencia en el entorno y de cómo su presencia puede afectar las acciones y actitudes de los sujetos observados.

La observación participante es un rol valioso en la formación docente, ya que permite a las maestras en formación no solo ser receptoras pasivas de información, sino que se convierten en agentes activos del proceso educativo. Al involucrarse en la orientación de tareas propuestas en una cartilla, las maestras investigadoras pueden observar en tiempo real las interacciones y comportamientos de los estudiantes en su contexto natural. Este acercamiento les brinda a las autoras de este trabajo una perspectiva más profunda sobre el aprendizaje de los estudiantes de cuarto y quinto grado, manteniendo la autenticidad de las interacciones que se producen.

La sistematización de experiencias es otro aspecto clave en este proceso. Utilizar una bitácora como instrumento de recopilación no solo documenta lo observado, sino que también permite a las maestras reflexionar sobre su práctica y las reacciones de los estudiantes. Este registro se convierte en una herramienta valiosa para la futura referencia y el desarrollo profesional. Además, es fundamental considerar una variedad de factores en el desarrollo de la investigación. El entorno del aula, las características individuales de los estudiantes y la documentación institucional orientadora son elementos que enriquecen el análisis. Esto no solo ayuda a comprender mejor los procesos de aprendizaje, sino que también permite ofrecer sugerencias prácticas para mejorar la mediación en la resolución de problemas, especialmente en contextos donde se manejan medidas.

Según Bonilla y Rodríguez, (1997) este tipo de observación implica un compromiso profundo por parte del investigador, quien no solo observa, sino que también interactúa con los sujetos de estudio, lo que le permite obtener una comprensión más rica y contextualizada de las dinámicas sociales y culturales. Adicionalmente, esos mismos autores enfatizan en la importancia de la reflexividad en el proceso, es decir, el investigador debe ser consciente de su propia posición y cómo esta puede influir en la investigación y en las interacciones con los participantes. En ese sentido, la observación activa y la reflexión crítica a través de la sistematización de experiencias facilita el desarrollo de una práctica educativa más consciente.

4.2 Fases de la investigación

Esta investigación adoptó cinco fases en correspondencia con los planteamientos de Jara (2018), para realizar la sistematización de las experiencias vividas en los centros de práctica al implementar una cartilla, una tarea complementaria de unidades de medida de longitud y un taller de conversión y estimación de medidas. En ese sentido, se tuvo como eje orientador los siguientes cinco tiempos (Jara, 2018): i) vivir la experiencia, sistematiza quien ha vivido la experiencia, ii)

plan de sistematización, propone qué se quiere sistematizar y para qué sistematizar, iii) recuperación del proceso vivido, permite reconstruir el camino recorrido con una mirada crítica y analítica, iv) interpretación crítica, identifica los aprendizajes significativos y v) comunica los aprendizajes.

4.2.1 Punto de partida de la experiencia

Esta primera fase implicó que las maestras investigadoras se involucraran activamente en el proceso. Es fundamental que quien sistematice haya vivido en primera persona las experiencias a analizar (Jara, 2018), lo cual permitió reconocer el contexto de los estudiantes. Adicionalmente, se definió de manera clara qué aspectos de la experiencia se sistematizarían, con qué propósito y cuáles herramientas se utilizarían para la recolección de la información. Esto permitió realizar un plan de sistematización que orientaría el proceso de recopilación y análisis de datos.

Para seleccionar la información pertinente para esta investigación, se realizó un sondeo de las respuestas obtenidas de los estudiantes a través de la implementación de una cartilla, un taller y una tarea complementaria. Esto se realizó de la siguiente manera: en primer lugar, se organizó la información recolectada, donde las respuestas físicas se consolidaron en un formato digital (fotografías) dentro de un único documento. Posteriormente, se clasificaron las evidencias por temas relevantes, tales como: contenido, dinámica, aciertos y desafíos en la realización de las tareas, lo que proporcionó un marco claro para el posterior análisis. Una vez organizada la información, se analizó con la intención de destacar tendencias y patrones en las respuestas obtenidas de los estudiantes.

Finalmente, para la sistematización de esta experiencia en los centros de práctica, fue fundamental el registro en los diarios de campo de las autoras de esta investigación, asimismo, la información suministrada por los estudiantes en las diferentes tareas propuestas que permitieron reconocer las dinámicas, interacciones, emociones y desafíos en el contexto educativo. Lo cual, buscó conocer no solo el qué, sino también el cómo y el porqué de las acciones realizadas. A continuación, se presenta el plan de sistematización.

4.2.2 Plan de sistematización

La sistematización según Jara (2018) implica seguir un proceso estructurado que garantice la participación de los actores involucrados y la generación de conocimiento significativo. Es por ello por lo que, en este trabajo el plan de sistematización se dividió en cinco tareas propuestas en

una cartilla "*aprendamos sobre producto de medidas*". Dicha cartilla se diseñó para los estudiantes de cuarto y quinto y, se organizó de manera secuencial con diferentes niveles de dificultad para el estudio y profundización del producto de medidas.

La decisión de diseñar una cartilla se encuentra fundamentada en la capacidad que tiene este recurso para presentar información de manera clara y secuencial, lo que facilita la comprensión de conceptos complejos. Según Bruner (1986), la representación visual juega un papel crucial en el proceso de aprendizaje, ya que permite a los estudiantes organizar y simplificar la información. Al utilizar cartillas como recursos visuales, se favorece la asimilación de contenidos, haciendo que el aprendizaje sea más accesible y efectivo para los educandos. Este enfoque se alinea con los principios constructivistas promovidos por Bruner, que enfatizan la importancia de las herramientas educativas que apoyan la construcción del conocimiento a través de representaciones significativas.

Síntesis y claridad: las cartillas son herramientas que resumen la información esencial de manera concisa, permitiendo a los estudiantes obtener una visión general rápida sin la necesidad de leer textos extensos. Este enfoque es coherente con la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel, quien subrayó la importancia de organizar la información para facilitar la comprensión.

Visualización de conceptos: al incluir gráficos, diagramas e ilustraciones, las cartillas refuerzan los conceptos presentados, haciendo que la información sea más memorable y comprensible. Estos recursos visuales son especialmente útiles para los estudiantes que aprenden de manera visual.

Enfoque en puntos clave: al centrarse en los aspectos fundamentales de un tema, las cartillas permiten a los estudiantes concentrarse en lo más relevante, evitando distracciones de detalles menos importantes. Esto contribuye a una mejor retención del conocimiento.

Accesibilidad: el formato compacto y, a menudo, gratuito de las cartillas las hace accesibles a una amplia audiencia, incluyendo estudiantes y profesionales. Esto amplía el alcance de la información y facilita su uso.

Autodidactismo: Las cartillas pueden ser utilizadas de forma autónoma, lo que fomenta el autoaprendizaje. Su diseño claro y conciso permite a los estudiantes repasar conceptos por su cuenta, promoviendo un aprendizaje activo.

Teoría de las inteligencias múltiples: la diversidad de estilos de aprendizaje, según Gardner, sugiere que las cartillas pueden adaptarse a diferentes formas de aprender, ofreciendo un recurso valioso que apela a múltiples inteligencias.

Por las anteriores consideraciones, la cartilla se presenta como un instrumento pertinente para esta investigación al proporcionar información clara, concisa y visualmente atractiva para los estudiantes, lo que facilita la comprensión y el aprendizaje del producto de medidas. En ese sentido, se presentan las cinco tareas que se propusieron en la cartilla.

4.2.2.1 Primera tarea: saberes previos

Esta tarea se relacionó con los conocimientos previos que tenían los estudiantes acerca de las unidades de medida, en ese sentido, se les pidió consultar con sus familiares y abuelos ¿Cómo se media antes? Esto permitió analizar la evolución histórica de las medidas mediante conocimientos previos de familiares, lo que posibilitó hacer una comparación entre las maneras de medir en la antigüedad con la actualidad, y a su vez, los instrumentos utilizados en ambas épocas.

4.2.2.2 Segunda tarea: verificar lo aprendido

Esta tarea constó de dos momentos. En el primero, los estudiantes tuvieron la posibilidad de medir varias figuras geométricas en el suelo (delimitadas por una cinta enmascarar) con sus pies y manos, con la intención de que reconocieran por qué es importante una medida estándar, ya que la medida de los pies no es exacta porque depende de la morfología de cada persona. Es por ello por lo que, cada estudiante midió sus pies con una regla y registró su medida en la cartilla. Luego, compararon sus resultados con los datos obtenidos de sus familiares y observaron que los valores eran diferentes.

Finalmente, en esta sesión los estudiantes encontraron demarcadas en el suelo varias figuras geométricas de diferentes tamaños. Midieron cada una de ellas con sus pies para determinar cuántos centímetros medían y, posteriormente, compararon sus mediciones con las de sus compañeros.

El análisis de la experiencia vivida en la primera y segunda tarea llevó a la necesidad de implementar lo que se conoció como una tarea complementaria. Esta tarea se centró en la reflexión crítica sobre las experiencias obtenidas de las tareas iniciales y cuestionó el conocimiento que los estudiantes tenían respecto a las unidades de medida de longitud. Así, se estructuró una tarea complementaria que permitió a los alumnos construir cada unidad de medida de longitud.

Se asignó el carácter de complementaria a esta tarea porque el concepto que se intentó abordar era de naturaleza práctica. Solo fue necesario introducir y aclarar conceptos sobre el manejo y la diferenciación entre las unidades de medida de longitud. La tarea consistió en la elaboración de una cinta métrica que midiera en milímetros, centímetros, decímetros y metros. Esto permitió a los estudiantes relacionarse con las unidades de medida de manera individual y también les proporcionó una comprensión más amplia de cada una.

Los estudiantes eligieron objetos, espacios o distancias con los cuales interactuaron utilizando las unidades de medida. Esta práctica contribuyó a que los estudiantes alcanzaran un nivel más profundo de conocimiento sobre las unidades de medida, especialmente si se desarrollaba mediante la manipulación, la representación gráfica, la observación y la experimentación con instrumentos y herramientas de medición.

Durante el desarrollo de la tarea complementaria, se observó que la mayoría de los estudiantes aún necesitaban fortalecer sus habilidades en estimación y conversión de magnitudes. Estas habilidades son fundamentales para lograr la precisión y exactitud en las medidas. Por ello, se consideró que una única tarea no era suficiente; por lo cual, se realizó también un taller de conversión y estimación de medidas.

En el taller, primero se ofreció información sobre las unidades de longitud. Luego, se presentó una imagen con tres objetos: una escoba, un lápiz y un pincel, y se pidió a los estudiantes que calcularan la longitud en centímetros de cada objeto. Posteriormente, se hicieron mediciones con una regla para comparar los resultados y registrar las diferencias entre la medida estimada y la real (ver anexo 4).

Este proceso permitió ajustar estrategias, tomar decisiones, desarrollar nuevas iniciativas y adaptar procesos en función del conocimiento construido a partir de las experiencias vividas. De esta manera, se aprovecharon las vivencias pasadas como recursos valiosos para el aprendizaje y el desarrollo analítico de cada una de las tareas.

4.2.2.3 Tercera tarea: divirtiéndose por las alturas

Esta tarea tuvo tres momentos. El primero estuvo relacionado con la realización de un avión de papel, para ello, los estudiantes de manera individual seleccionaron una hoja y siguieron las instrucciones de la cartilla. Una vez realizado el avión, los estudiantes le asignaron un nombre para facilitar su identificación y registro de la información.

Este momento de la tarea les permitió a los estudiantes recordar formas geométricas como: triángulos, cuadrados, rectángulos, etc., que fueron visibles en la estructura de los aviones de papel generados por los pliegues. Asimismo, la construcción de dichos aviones promovió en los estudiantes el desarrollo de habilidades para el manejo de instrumentos de medidas y su cantidad correspondiente.

En un segundo momento, los estudiantes lanzaron el avión desde diferentes puntos del colegio, especialmente desde la cancha deportiva, y apuntaron su distancia y tiempo en la hoja de registro, luego, se relacionaron dichos datos lo que les permitió calcular la velocidad del avión. Este ejercicio no solo fomentó el trabajo en equipo al discutir las diferencias en rendimiento entre sus aviones, sino que también estimuló el análisis crítico sobre cómo las medidas, el área y el perímetro afectaban el vuelo del avión. En ese orden de ideas, la actividad de construir y volar aviones de papel resultó ser una excelente manera de integrar conceptos matemáticos y físicos en un entorno práctico. Por lo cual, los estudiantes pudieron observar de manera tangible cómo las figuras geométricas (triángulos y rectángulos) influían en el diseño y el rendimiento de sus aviones.

Posteriormente, el tercer momento estuvo conformado por la resolución de un problema, con la intención de que los estudiantes aplicaran los conceptos aprendidos en la práctica con los aviones. El problema propuesto fue el siguiente:

Figura 10.

Problema de velocidad

En una carrera de aviones de papel, el avión de Juan avanzó 20 metro en 10 segundos. ¿A qué velocidad se desplazó el avión de Juan?

Nota: Fuente elaboración propia.

Se utiliza la fórmula:

$$V = \frac{d}{t}$$

donde V es la velocidad, d es la distancia y t es el tiempo. Sustituyendo los valores:

$$V = \frac{20m}{10s} = 2m/s$$

Esto significa que el avión de Juan se desplazó a una velocidad de 2 metros por segundo.

Con esta información, los estudiantes pudieron comparar las velocidades de sus aviones de papel y determinar cuáles fueron más rápidos, expresando los resultados en centímetros por segundo (cm/s) o metros por minuto (m/min). Además, al analizar los datos de área y perímetro de los aviones, podrán reflexionar sobre cómo estos factores influyen en el rendimiento del vuelo. Pueden investigar si los aviones con mayor área de ala logran mantenerse en el aire por más tiempo o si los que tienen un diseño más aerodinámico vuelan más lejos. Este análisis les permitió entender mejor la relación entre geometría, física y el rendimiento de sus creaciones. Ya con los resultados de la medida de velocidad, los estudiantes podrían inferir de manera concreta ¿Cuáles aviones volaron más en cm/s o m/m? y si ¿el área y perímetro influían en el rendimiento del vuelo de los aviones?

4.2.2.4 Cuarta tarea: ¡Práctica online!

En esta tarea, se exploró la herramienta Google Maps con el fin de analizar las estimaciones de tiempo y distancia que proporciona la aplicación, lo que permitió profundizar en la precisión de las unidades de medida de longitud y su impacto en la planificación de rutas. Durante la actividad, se dio la bienvenida al viaje online, en el que cada estudiante utilizó un computador para recorrer diferentes lugares a través de Google Maps, como una aplicación que facilitó la navegación en línea y permitió establecer y estimar medidas.

Las docentes sugirieron a los estudiantes que siguieran las indicaciones de la cartilla (ver anexo 4) para ubicar puntos de referencia tales como la escuela, la casa, el parque, la iglesia, el hospital, la cancha deportiva y el supermercado. Al introducir el punto de partida y el destino, el sistema trazó rutas, definió trayectorias y estimó tiempos para los recorridos. A partir de esta información, los estudiantes registraron los tiempos y distancias estimados por Google Maps para los diferentes lugares.

Una vez finalizada la exploración en la aplicación, se realizaron a los estudiantes algunas preguntas reflexivas como: ¿cómo crees que Google Maps estima el tiempo y distancia en los recorridos? Y ¿por qué el tiempo cambia de acuerdo con el medio de transporte? Gracias a los problemas matemáticos relacionados con el producto de medidas en tareas anterior, se les facilitó a los estudiantes el análisis de estas situaciones, la identificación de patrones, la formulación de

estrategias y la evaluación de resultados. Este proceso contribuyó al fortalecimiento de su capacidad de pensamiento crítico y resolución de problemas.

4.2.2.4.1 Observo y construyo

En el contexto educativo actual, el uso de herramientas tecnológicas como Google Maps permite transformar la manera en que los estudiantes interactúan con el conocimiento geográfico. En esta tarea, se observó la escuela a través de Google Maps desde una perspectiva cenital (con el eje óptico perpendicular al suelo), lo cual facilitó la identificación de la forma y la figura del espacio escolar. Posteriormente, se llevó a cabo la tarea denominada "Hora de aplicar", en la cual se utilizaron opciones de medición proporcionadas por la aplicación. Esta experiencia no solo promovió la interacción con Google Maps, sino que también ofreció a los estudiantes una oportunidad para explorar diversas ubicaciones, realizar recorridos virtuales y acceder a información detallada sobre distintos lugares.

El uso de Google Maps en entornos educativos fomenta el desarrollo de habilidades geográficas. De acuerdo con Gil (2020), la capacidad de interpretar mapas y planos, así como de localizar lugares y comprender los diferentes contextos geográficos, son competencias esenciales que pueden motivar a los estudiantes a aprender de forma práctica. Además, la integración de Google Maps en el aula facilita una enseñanza moderna, donde los docentes pueden incorporar efectivamente la tecnología para brindar a los estudiantes una experiencia de aprendizaje enriquecedora y relevante.

4.2.2.5 Quinta tarea: hora de aplicar

La quinta tarea parte de la observación de la escuela desde arriba para identificar la forma y posteriormente dibujarla a escala. Esto se realizó con la ayuda de las medidas estimadas de Google Maps. Asimismo, se realizó un recorrido con los estudiantes por cada uno de los espacios y lugares de la escuela para tener en cuenta los detalles como pacillos, ventanas, entradas, puertas y gradas.

El plano se pensó en una escala de 1:100. Esta enumeración funcionó de la siguiente manera: el primer número se asoció a las unidades de medida del plano y el segundo a las medidas reales, es decir, 1cm del plano equivale a 10m de la realidad. En ese orden de ideas, la tarea de observación y dibujo a escala de la escuela tuvo varios objetivos:

Desarrollo de Habilidades Técnicas: este ejercicio fomentó el desarrollo de habilidades de dibujo técnico y de representación gráfica. Aprender a realizar planos a escala es fundamental en disciplinas como la arquitectura, la ingeniería y el diseño urbano.

Observación Detallada: al recorrer la escuela y observar los espacios, los estudiantes aprendieron a prestar atención a los detalles arquitectónicos y urbanísticos lo que les permitió mejorar sus estimaciones y conversiones de medidas. La identificación de elementos como pasillos, ventanas, entradas y puertas les ayudó a comprender cómo estos aspectos influyen en el uso y funcionalidad de los espacios.

Geometría y Matemáticas Aplicadas: la tarea involucró la aplicación de conceptos matemáticos relacionados con unidades de medidas, particularmente en lo que compete a escalas y medidas. Esto contribuyó al aprendizaje práctico de la geometría, ya que los estudiantes debían calcular y convertir dimensiones.

Sensibilización Espacial: al crear un plano a escala de su entorno, los estudiantes desarrollaron una mayor comprensión del espacio en el que se encontraban, no solo en términos de la Institución sino también de la comunidad que los rodeaba.

Fomento de la Creatividad: este tipo de tarea podría potenciar la creatividad en los estudiantes al permitirles imaginar y proyectar cambios potenciales en su entorno o incluso en el diseño de nuevos espacios ya sea a nivel institucional o de comunidad.

Dentro de este orden de ideas, la tarea de observar, medir y dibujar un plano a escala no solo es un ejercicio técnico, sino que también es una actividad multidisciplinaria que abarca varios aspectos del aprendizaje, desde habilidades matemáticas que implican el producto de medidas hasta la promoción del trabajo en equipo y la apreciación del entorno. Esta fase da paso a la siguiente fase de "la recuperación del proceso vivido" en la metodología propuesta por Jara (2018). Para la sistematización de experiencias implica analizar y reflexionar sobre la experiencia vivida para comprenderla en profundidad.

4.2.3 Técnicas para la recuperación del proceso vivido

En esta fase, se analizó la experiencia de la práctica desde una perspectiva vinculada a la sistematización de experiencias y el aprendizaje colectivo. De acuerdo con Jara (2018), recuperar el tiempo experimentado implica reflexionar sobre las experiencias pasadas, tanto positivas como negativas, con el propósito de extraer lecciones valiosas que guíen decisiones y acciones futuras. En el contexto de esta investigación, se observó detenidamente las acciones, tareas y análisis que los estudiantes llevaron a cabo en las sesiones programadas, utilizando los registros del diario de campo y las estrategias implementadas, tales como una cartilla, una tarea complementaria sobre unidades de medida de longitud y un taller de conversión y estimación de medidas.

El registro en el diario de campo se llevó a cabo de manera sistemática, concibiéndose este documento como un elemento dinámico que se adaptó a las especificidades del proyecto investigativo. De acuerdo con Clandinin y Connelly (2000), los diarios de campo son herramientas valiosas que permiten a los investigadores capturar experiencias de forma narrativa y contextualizada. Así, se estableció una estructura que propició un registro integral del avance de las tareas, incluyendo preguntas que fomentaron la reflexión sobre el proceso, la identificación de obstáculos y la documentación del progreso realizado. Este enfoque contribuyó significativamente a la evaluación del trabajo ejecutado.

A lo largo del desarrollo del estudio, el diario de campo emergió como un recurso esencial para documentar de manera metódica las observaciones, reflexiones y vivencias del investigador. Las anotaciones, realizadas con atención al detalle y al contexto, posibilitaron el registro de interacciones, dinámicas grupales y situaciones significativas dentro del entorno de aprendizaje. Estas entradas no solo capturaron el contexto y las emociones de los participantes, sino que también facilitaron la identificación de patrones y temas emergentes capaces de influir en la interpretación de los datos obtenidos. Al concluir el proceso investigativo, el análisis del contenido del diario de campo se integró con otras fuentes de datos, lo que enriqueció la comprensión del fenómeno estudiado y proporcionó una perspectiva reflexiva sobre la mediación en el aprendizaje.

Para analizar la información de una cartilla, fue fundamental seguir un enfoque sistemático que permitió desglosar y comprender su contenido de manera efectiva. En primer lugar, se leyó detenidamente cada sección, identificando los temas principales y los subtemas que se presentaron. Fue útil tomar notas y resaltar datos clave, así como analizar la estructura de la cartilla para entender cómo se organizó la información. Posteriormente, se contrastó la información con otras fuentes

para validar su precisión y relevancia. Finalmente, reflexionar sobre el propósito de la cartilla y su impacto en el público objetivo permitió alcanzar una comprensión más profunda y crítica de su mensaje. Este proceso no solo facilitó la asimilación del contenido, sino que también promovió un análisis más crítico y reflexivo de la información presentada.

La recolección de percepciones y significados a través de fotografías permitió analizar patrones y comportamientos que, de otro modo, podrían no ser evidentes en los textos analizados. Esto hizo que los resultados fueran más accesibles y evidentes, proporcionando una visión más clara del fenómeno estudiado. La información recopilada a través de este enfoque vislumbró una base sólida sobre la cual construir el proyecto, permitiendo que el equipo investigador se sumergiera en el entorno estudiado, lo que contribuyó a una comprensión profunda de la interacción con las tareas.

4.3 Ética del investigador

El presente estudio se llevó a cabo con un estricto apego a los principios éticos que rigen la investigación académica. En la Universidad de Antioquia, la ética en la investigación es un pilar fundamental que guía el desarrollo académico y científico de la institución. Este enfoque se basa en el respeto a la dignidad humana, la integridad y la responsabilidad social, promoviendo una cultura de transparencia y honestidad en todos los procesos investigativos. La universidad fomenta un compromiso con la producción de conocimiento riguroso y relevante, asegurando que los proyectos respeten los derechos de los participantes, prevengan cualquier tipo de daño y consideren el impacto social y ambiental de sus hallazgos.

Para garantizar el cumplimiento de estos principios, se obtuvo el consentimiento informado de los padres de familia, asegurando que comprendieran plenamente los objetivos del estudio, así como la naturaleza y el alcance de la participación de sus hijos. Se garantizó la confidencialidad de toda la información recolectada, que será utilizada exclusivamente con fines académicos. Este enfoque ético refuerza nuestro compromiso de realizar una investigación responsable que priorice el bienestar de los involucrados y la integridad del proceso investigativo. A través de la formación en ética de la investigación, la Universidad de Antioquia busca cultivar una comunidad académica que actúe de manera ética y responsable, contribuyendo así al avance del conocimiento y al bienestar de la sociedad.

5. Análisis y Resultados

Para atender a los objetivos y a la pregunta de investigación, en este capítulo se darán a conocer los resultados de las evidencias recolectadas en la implementación de la cartilla, el taller de conversión y estimación de medidas. Esto con la intención, de comprender los procesos y las dinámicas que los estudiantes obtuvieron en la práctica pedagógica a la luz de los planteamientos propuestos por Jara (2018). Estos hallazgos se presentan a través de dos categorías: *de la imaginación de calcular a la realidad de medir y de la intuición a la realidad*. La primera categoría consiste en describir los procesos realizados por los estudiantes en la utilización de instrumentos y procedimientos para medir. Y la última pero no menos importante, hace referencia a los procesos de comprensión y estimación de magnitudes realizados por los estudiantes, a partir del proceso de mediación partiendo del análisis de la información obtenida directamente de la práctica. A continuación, se presentan las evidencias de acuerdo con dichas categorías.

5.1 De la imaginación de calcular a la realidad de medir

Esta categoría analizó dos aspectos. El primero relacionado con la manera en que los estudiantes usaron los diferentes instrumentos: reglas, cintas métricas, metro, etc. Asimismo, se analizó las unidades de medida que elegían para medir objetos, espacios o distancias. Es decir, se observó cuáles instrumentos seleccionaban y si eran los más adecuados para el objeto o espacio.

El segundo aspecto, analizó los procesos de medición que los estudiantes realizaron en el desarrollo de las tareas. Se logró identificar en las producciones de los estudiantes junto con la observación en los centros de prácticas que, estos reconocieron las extremidades del cuerpo para determinar medidas como pie, pulgada, brazo, palmo, codo y objetos como vara y cuerdas. Esto les permitió identificar cómo a través de la historia se plantea la necesidad de medir. Asimismo, reconocieron la utilidad de la medida y la utilización de diferentes sistemas para medir magnitudes, hasta llegar a la estandarización de un único sistema global de medición. Sin embargo, al analizar que el sistema de medidas corporales no presentaba medidas con precisión, surgió la necesidad de establecer una relación entre una magnitud (patrón) y otra de la misma unidad que permitiera comparar medidas.

En el proceso de medición, se analizó cómo los estudiantes determinaron que el uso de medidas antropomórficas no era exacto y, a la vez, reconocieron su cuerpo como un instrumento de medición. Esta autocomprensión facilitó la comparación con las medidas estandarizadas y

validó la información teórica relacionada con la estandarización de las unidades de longitud a escala global. Al identificar patrones básicos, conocidos como unidades de medida, se observó que una unidad se repetía tantas veces como fuera necesario para cubrir la cantidad total que se estaba midiendo.

Medir con precisión implica el uso adecuado de unidades de medida. Según el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), el pensamiento relacionado con los sistemas métricos abarca procedimientos que se refieren a la comprensión general que una persona tiene sobre magnitudes y cantidades, así como su capacidad para medirlas y utilizar de manera flexible los sistemas de medida en diversas situaciones. Esto pone de relieve la importancia de la comprensión de las unidades de medida en el proceso educativo y en la vida cotidiana

En la segunda tarea propuesta en la cartilla de producto de medidas, al medir figuras geométricas en el suelo con medidas corporales y posteriormente pasarlas a medidas estándar (ver figura 11), algunos estudiantes preguntaban ¿Cómo se mide, desde dónde se inicia la medida?, ¿desde el cero o desde el número uno? Esto evidenció que la mayoría de los estudiantes no tenían claro desde dónde se iniciaba para tomar la medida y otros lo realizaron por el lado de las pulgadas. Adicionalmente un estudiante preguntó ¿por qué la mayoría de las reglas están compuestas de 30 cm?, las maestras investigadoras infieren que dichas preguntas se debían al poco manejo de instrumentos, como la regla. Al comprobar y confrontar medidas corporales con medidas estándar, a la mayoría de los estudiantes se les facilitó medir con cuartas, pies y pulgadas ya que existía un principio y un fin de la medida delimitada por partes del cuerpo. No obstante, cuando las medidas las realizaron con la regla o cinta métrica, surgió confusión.

Figura 11.Sesión uno, verifica lo aprendido



Nota: Fuente elaboración propia

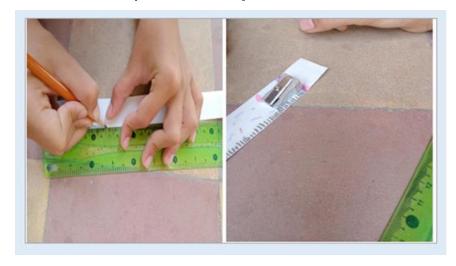
Se identificó que algunos estudiantes les resultó difícil comprender y aplicar los conceptos relacionados con la medición, tales como las unidades de medida, la comparación de longitudes y la utilización de instrumentos de medición. No obstante, las autoras de esta investigación consideraron que dichos estudiantes necesitaban más práctica y orientación para desarrollar las habilidades y los conocimientos que les permitiera utilizar una regla, cinta métrica o metro en los procesos de medición. Por este motivo, se aplicó una tarea complementaria en la que los estudiantes identificaban las unidades de medida de manera individual, lo que se consideró relevante, ya que la individualización de las unidades de medida facilita el reconocimiento de estas.

Entre las particularidades de esta tarea complementaria (ver figura 12) se encontró que algunos estudiantes poco asociaban la unidad de medida de milímetro y su utilización para medir objetos. Un ejemplo de ello se logró evidenciar cuando los estudiantes al inicio intentaron medir el marco de una puerta con la unidad de medida de milímetros (mm). Sin embargo, tras discutir sus estimaciones, decidieron enfocar su atención en objetos más pequeños como, por ejemplo: saca puntas, diámetro de monedas, grosor de cuadernos y libros, diámetro de lápices y lapiceros, grosor de borradores donde podían contar cada milímetro de manera precisa. Esto les permitió definir medidas más claras, como se observa en la figura 12. Durante esta actividad, los estudiantes también comprendieron que cada diez milímetros equivalían a un centímetro (cm), lo que les ayudó a establecer relaciones entre las unidades de medida. Algunos incluso comenzaron a asociar el uso

del metro como herramienta de medición con su función como unidad de medida, lo que enriqueció su entendimiento del sistema métrico.

El proceso implementado no solo facilitó la práctica de la medición, sino que también promovió la reflexión sobre la conversión entre diferentes unidades, permitiendo a los estudiantes desarrollar una base sólida en el uso de sistemas de medidas. A medida que se familiarizaban con las relaciones entre milímetros, centímetros y metros, su confianza y habilidades en medición mejoraron. En relación con la cinta métrica que tenía como unidad de medida el metro, los estudiantes inicialmente mostraron indiferencia hacia la equivalencia entre metros y centímetros, así como en la utilidad de dicha cinta. Comenzaron midiendo un escritorio, pero al no encontrar referencia en esta medida, se sugirió que midieran espacios más amplios. Así, procedieron a medir un pasillo, lo cual les permitió comprender de manera más efectiva las unidades de medida del metro. La actividad culminó con la medición de la estatura de cada estudiante utilizando las cintas métricas.

Figura 12. *Elaboración cinta métrica y medición de objetos*



Nota: Fuente elaboración propia

Los instrumentos de medición desempeñaron un papel crucial en la actividad de los estudiantes. Al asociar las medidas de las baldosas, que tenían un tamaño de 20 cm por lado, los estudiantes pudieron determinar las dimensiones de diferentes figuras geométricas. Esta actividad les permitió realizar cálculos mentales y establecer patrones de medida de manera más intuitiva. Al identificar la medida de las baldosas, los estudiantes crearon un patrón que les facilitó estimar y verificar las dimensiones de las figuras. Este enfoque práctico no solo facilitó la comprensión de

las propiedades de las figuras geométricas, sino que también fortaleció su habilidad para realizar conversiones y comparaciones entre diferentes unidades de medida. Adicionalmente, trabajar con una referencia visual y práctica, como las baldosas, contribuyó al proceso de aprendizaje al permitir a los estudiantes ver y calcular en un contexto real. Esta experiencia no solo desarrolló sus habilidades matemáticas, sino que también fomentó el trabajo en equipo y la discusión colaborativa entre ellos.

Figura 13. *Medición de figuras geométricas trazadas en el suelo*



Nota: Fuente elaboración propia

De acuerdo con lo expuesto hasta el momento, se logra evidenciar que el aprendizaje del producto de medidas es posible si se generan espacios y condiciones donde los estudiantes interactúen con instrumentos y longitudes que permitan medir objetos y espacios. Es importante destacar que se posibilita la estimación mediante conceptos teóricos y procedimentales, que no sea un conocimiento abstracto sino un aprendizaje práctico.

5.2 De la intuición a la realidad

La medición se entendió como un proceso que integra conceptos matemáticos fundamentales, tales como la comparación, la estimación, la precisión y las unidades de medida.

Según Fernández (2019), la medición es una actividad esencial en diversas disciplinas, ya que permite cuantificar características y compararlas de manera sistemática, lo que resulta fundamental para el desarrollo del conocimiento científico y técnico. A través de la implementación de la cartilla, el taller y la tarea complementaria, los estudiantes tienen la oportunidad de explorar y comprender aspectos como la longitud de manera práctica.

En la búsqueda por comprender la importancia de la medición, los estudiantes aplicaron diversos conceptos matemáticos abstractos en contextos prácticos. Por ejemplo, al abordar el concepto de área, los alumnos midieron las dimensiones de diferentes superficies en su entorno, como mesas, salón de clases. Esta experiencia práctica les permitió no solo visualizar la fórmula del área base por altura, sino también reconocer su utilidad al calcular la cantidad de material necesaria para cubrir esas superficies. Además, al involucrarse en actividades de comparación de resultados, los estudiantes exploraron conceptos como la proporcionalidad y la relación entre diferentes unidades de medida. Por ejemplo, al medir longitudes en metros y convertirlas a centímetros, los estudiantes tuvieron la oportunidad de aplicar el principio de equivalencia, lo que fomentó un entendimiento más profundo de las unidades métricas y su interrelación.

Esta experiencia práctica no solo reforzó la comprensión teórica de los estudiantes, sino que también promovió el desarrollo de habilidades críticas, como el razonamiento lógico y la resolución de problemas. Al enfrentarse a situaciones reales que requerían mediciones precisas, los alumnos aprendieron a realizar estimaciones más acertadas y a utilizar correctamente las unidades de medida. En consecuencia, esta integración de conceptos matemáticos abstractos en actividades de medición fomentó una apreciación más profunda de la matemática en la vida diaria.

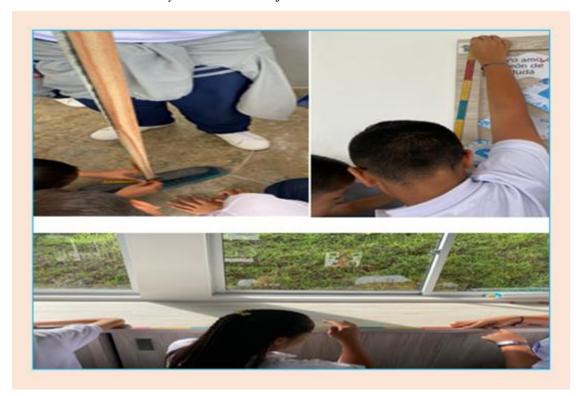
Esta categoría partió principalmente del análisis del taller de estimación y conversión de medidas, donde se plantearon situaciones que implicó estimar sin instrumentos de medición la longitud de objetos comunes de un salón de clase (escritorio, tablero, puerta, ventana), lo cual evidenció que en algunos casos las estimaciones que realizaron los estudiantes fueron amplias y poco precisas. Sin embargo, se corroboraron las cantidades de las unidades de medida con instrumentos de medición, lo cual permitió establecer el margen de error de dichas cantidades para el acercamiento del concepto de estimación.

Cabe resaltar que, aunque la estimación es un proceso que no necesariamente implica la medición se observó que, si los estudiantes se acercaban más a los instrumentos y a los procesos para medir se les facilitaba más estimar las medidas. Es evidente que existen necesidades

conceptuales y procedimentales que permiten hacer estimaciones razonables de medidas. Estas necesidades pueden estructurarse y desarrollarse a través de la interacción en el aula, se hizo la siguiente pregunta ¿qué es estimación? Ellos respondieron: "estimar es creer cuánto mide un objeto, es una suposición de una medida posible de que sea cierta, es aproximar, es tratar de llegar a un número".

Esto facilitó una primera aproximación al concepto y práctica de la estimación, guiando a los estudiantes hacia el objetivo planteado por Bright (1976). Para llevar este concepto a la práctica, se propuso que los estudiantes estimaran y registraran las medidas de diversos objetos en el aula, como un palo de escoba, un cajón y un tablero informativo. Una vez estimados los valores, se procedió a su verificación al medir con la cinta métrica, como se muestra en la figura 14.

Figura 14.Estimación de medida y medición de objetos en el aula



Nota: Fuente elaboración propia

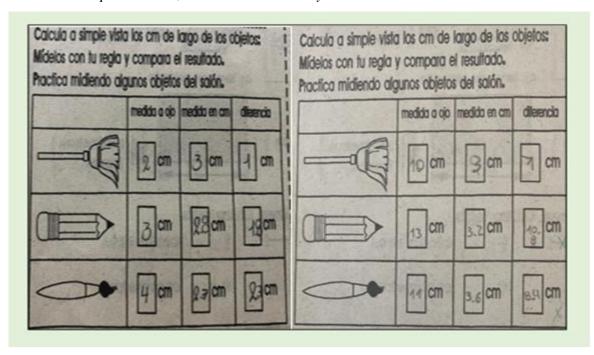
Este ejercicio permitió que los estudiantes se acercarán a las medidas y observaran que en una estimación se busca un valor numérico cercano al real y, depende de los conocimientos previos y perspectiva de quien realice dicha estimación. La medición como método de comprobación hizo

que los estudiantes desarrollaran una idea de la cantidad de las unidades de medida antes de estimar, lo que permitió en estos distinguir el concepto abstracto de estimación de medida al proporcionar y desarrollar una apreciación realista de la exactitud de las mediciones físicas a través de los instrumentos de medida.

Posteriormente, se realizaron ejercicios del taller de conversión y estimación de medidas en los cuales los participantes estimaron la longitud de objetos en imágenes (ver figura 15). Luego, midieron con una regla para comparar sus resultados. Durante esta actividad, se discutieron los márgenes de error que pudieron haber influido en sus estimaciones. Se observó que fue útil fomentar el uso de técnicas de estimación mental, donde los participantes aproximaron las longitudes antes de medirlas, lo que les permitió desarrollar su intuición sobre las dimensiones. Finalmente, la reflexión grupal sobre las experiencias de medición y estimación ayudó a consolidar el aprendizaje y a identificar áreas de mejora en el proceso.

En la figura 15, el respondiente de este ejercicio muestra una agilidad de estimación que se desvía de la realidad, especialmente al utilizar centímetros como unidad de medida. Es fundamental tener en cuenta las "unidades de diferencia", ya que la discrepancia entre la percepción y la realidad puede traducirse en diversas unidades de medida. Al referirnos a diferencias en centímetros, podemos entender de manera más clara la magnitud proporcional de esos errores de estimación. Al comparar estas estimaciones con la realidad, también expresada en centímetros, se evidencia cómo las diferencias perceptuales pueden dar lugar a inexactitudes significativas en diversos contextos. Por lo tanto, es imprescindible contrastar la realidad con estas estimaciones mediante mediciones precisas, garantizando así la validez en aplicaciones tanto prácticas como académicas. Aquí, la estimación fue más corta o mucho más larga que la medida real. Esto resalta que la percepción de la longitud puede ser subjetiva y que diferentes factores, como el ángulo de visión o la familiaridad con el objeto, pueden afectar esa percepción.

Figura 15.Tarea complementaria, taller de estimación y conversión de medidas



Nota: Fuente, pinterest.com.mx

La transición de la estimación hacia la comprensión de las unidades de medida implicó un proceso de aprendizaje en el que los estudiantes exploraron la relación entre lo visual y lo cuantitativo. Este proceso se evidenció especialmente al aplicar la tercera tarea de la cartilla "Vuelo de aviones", donde las estimaciones fomentaron un análisis sobre la importancia de comprender las magnitudes de medida. A medida que los estudiantes se adentraban en esta experiencia, comenzaron a reconocer la necesidad de desarrollar habilidades que les permitieran avanzar de estimaciones iniciales a aproximaciones más precisas de las medidas.

En este contexto, se llevó a cabo la competencia de aviones de papel (ver figura 16), en la cual se asignaron roles específicos a los estudiantes para facilitar el registro de la información obtenida. Cada estudiante se encargó de medir tanto la distancia recorrida por el avión como el tiempo que este permaneció en el aire antes de caer al suelo. Esta actividad no solo reforzó el aprendizaje de las unidades de medida, sino que también les permitió a los estudiantes aplicar de manera práctica los conceptos previamente discutidos. Una vez realizada la medición, se les permitió volar y disfrutar de sus aviones libremente, lo que proporcionó un cierre lúdico a la experiencia educativa y consolidó su comprensión de las magnitudes involucradas.

Figura 16.

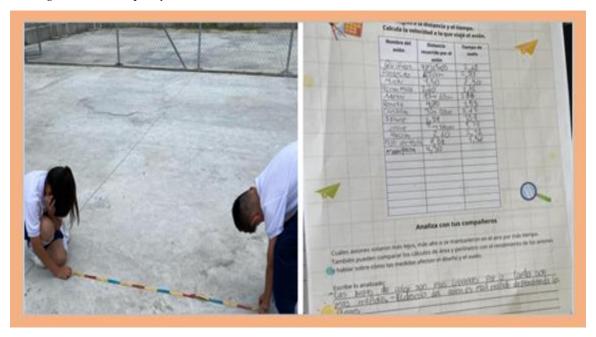
Tarea tres, vuelo de aviones



Nota: Fuente elaboración propia

Durante esta actividad, los estudiantes observaron características específicas relacionadas con sus modelos de aviones de papel, tales como qué aviones se mantuvieron más tiempo en el aire, cuáles recorrieron mayores distancias y cuáles volaron a mayor velocidad. Por ejemplo, algunos estudiantes percibieron variables significativas, como el efecto del viento en las distancias recorridas y la dirección del vuelo. En ciertos ensayos, se observó que el viento a favor podía aumentar la distancia, mientras que el viento en contra reducía considerablemente el rendimiento del vuelo. Finalmente, los estudiantes registraron los datos de sus vuelos en las planillas propuestas (ver anexo 10), lo que les permitió comparar distancias y tiempos con sus compañeros, favoreciendo el análisis crítico y la reflexión sobre el desempeño de cada diseño a través de la interacción grupal.

Figura 17. *Registro de tiempos y distancias*



Nota: Fuente elaboración propia

Esta tarea se estuvo en correspondencia con el modelo de Pólya (1988), que destaca la similitud entre la organización de actividades humanas y la resolución de problemas. En esta investigación, se plantearon tareas que permitieron a los estudiantes identificar y superar dificultades, tomar decisiones informadas y seguir caminos intermedios que los acercaran a sus objetivos. Así, mediante la planificación y ejecución de soluciones, se lograron los fines propuestos.

La resolución de problemas no solo permite alcanzar estos objetivos, sino que también desarrolla en los estudiantes habilidades fundamentales para responder a situaciones con flexibilidad. Les ayuda a encontrar semejanzas entre situaciones aparentemente distintas y a sintetizar conceptos previos, generando nuevas ideas e hipótesis.

La siguiente tabla presenta las categorías abordadas en la investigación *De la imaginación* de calcular a la realidad de medir y *De la intuición a la realidad*. Cada categoría se desglosa en subtemas que resaltan la importancia de los instrumentos de medición. Se destaca que estos instrumentos son esenciales para cuantificar magnitudes como longitud, masa, tiempo, temperatura y volumen, permitiendo así la obtención de datos precisos y reproducibles. Asimismo, se subraya

que la estandarización de estos instrumentos no solo asegura la consistencia y precisión de los resultados, sino que también facilita la comparación de datos entre distintos estudios, lo cual es vital para el progreso del conocimiento. Además, se explora el concepto de medición, que se clasifica en directa e indirecta, y se resalta la importancia de la estimación y conversión de medidas en la investigación y la comunicación de resultados. Estas clasificaciones y enfoques ponen de manifiesto la relevancia de medir y dimensionar adecuadamente para garantizar la validez de las conclusiones en variados contextos científicos y educativos.

Tabla 1.Categorías de la investigación

Categoría	Subtemas	Definiciones	
De la imaginación de calcular a la realidad de medir	Instrumentos de medición	Los instrumentos de medición son esenciales en diversas disciplinas científicas y técnicas, ya que permiten cuantificar magnitudes como longitud, masa, tiempo, temperatura y volumen, proporcionando datos precisos y reproducibles. Según R. G. C. McCulloch (2017), "la	
	Proceso de medición	La medición se define como el proceso que determina la magnitud de un fenómeno al compararlo con una unidad de medida. Según Landa et al. (2017), la medición puede clasificarse en dos tipos: directa e indirecta. La medición directa se realiza utilizando una sola unidad y un instrumento específico, mientras que la medición indirecta implica el uso de distintas unidades para calcular la magnitud deseada. Esta distinción es fundamental para entender cómo se realiza la	

De la intuición a la realidad	Estimación de medidas	cuantificación de diversas variables en diferentes campos del conocimiento. La estimación de medidas es un proceso fundamental en diversas disciplinas, ya que proporciona valores que, aunque no sean exactos, son esenciales para analizar y
		entender características cuantificables de objetos y fenómenos. Según Bachelard, "el primer paso hacia el conocimiento es la elección de los objetos de conocimiento y la medida que les aplicamos" (Bachelard, 1938). Esta afirmación subraya que la forma en que dimensionamos y cuantificamos nuestras observaciones influye considerablemente en la validez de nuestras conclusiones.
	Conversión de medidas	La conversión de medidas es fundamental en diversos campos, desde la ciencia hasta la economía, y se basa en la necesidad de uniformidad y comparabilidad de las cantidades. Según Ocampo Hernández (2015), "la conversión de unidades es una habilidad esencial en el aprendizaje de las matemáticas y ciencias, ya que permite a los estudiantes entender y comunicar conceptos de manera efectiva".

Nota: Fuente elaboración propia

6. Conclusiones

El objetivo de este capítulo es integrar todos los elementos recopilados y analizados durante el proceso de investigación, a la luz de la pregunta problematizadora y los objetivos establecidos en los capítulos 1 y 2. Este capítulo se alinea con la metodología propuesta por Jara (2018), conocida como el "punto de llegada", que representa un momento crucial en la investigación, donde se realiza una síntesis profunda y reflexiva de la experiencia sistematizada. En este contexto, se retoman las dos categorías planteadas: *De la imaginación de calcular a la realidad de medir y De la intuición a la realidad.*

La investigación demostró que abordar la categoría *De la imaginación de calcular a la realidad de medir* fue determinante para los procesos de mediación en la resolución de problemas con estructura multiplicativa en productos de medidas. Proponer tareas que involucraran herramienta y procedimientos de medición permitió a los estudiantes utilizar conocimientos previos fundamentales, lo que se reflejó en su progreso al manejar herramientas de medición de manera efectiva.

Es fundamental considerar las diversas perspectivas de los participantes, reconociendo la riqueza de sus experiencias. A partir de estas reflexiones, se pueden extraer lecciones significativas que informen futuras acciones y decisiones, identificando lo que funcionó, lo que no y las áreas de mejora.

Se subrayó la importancia de establecer una concordancia entre el proceso de mediación y las prácticas coherentes, ya que no se puede enseñar a resolver problemas relacionados con el producto de medidas sin un conocimiento práctico de los instrumentos y procedimientos de medición. Esta lección impulsó la generación de estrategias complementarias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en este ámbito.

Por otro lado, la categoría *De la intuición a la realidad* destacó la necesidad de diferenciar entre medición y estimación, evidenciando que conocer un concepto no garantiza la habilidad para aplicarlo, ya que ambos procesos requieren enfoques distintos.

La categoría central del "Producto de medidas" se posiciona como el eje principal de esta investigación. Se concluye que el aprendizaje del producto de medidas se logra a través de la

interacción con instrumentos y procedimientos de medición, proporcionando habilidades prácticas y conceptuales esenciales para la vida cotidiana. Este proceso contribuye al desarrollo del pensamiento espacial y a la toma de decisiones informadas en diversos contextos.

El "punto de llegada" de esta categoría se recorrió a través de un proceso sistemático, donde todas las tareas fueron adecuadas para el aprendizaje del producto de medidas. La sistematización de experiencias es clave para consolidar aprendizajes, generar conocimiento y contribuir al aprendizaje colectivo y a la acción transformadora. Este momento de reflexión y síntesis busca impactar positivamente en la práctica y mejorar las intervenciones futuras.

Se observó que el aprendizaje del producto de medidas es evolutivo; sin embargo, si no se poseen bases fundamentales, como el conocimiento de unidades de medida y procedimientos, el proceso puede estancarse. Esto se evidenció en la implementación de las dos primeras tareas de la cartilla, donde fue necesario reforzar estos temas a través de una tarea complementaria sobre unidades de medida de longitud y un taller de estimación y conversión.

Al tomar las dimensiones de un espacio u objeto, se obtienen datos precisos que permiten crear un plano a escala, reflejando fielmente las proporciones y características del lugar o elemento a representar. Este proceso asegura que el plano facilite la visualización y comprensión de las relaciones espaciales, permitiendo a los estudiantes interpretar y comunicar ideas de manera más efectiva.

Trabajar en un plano a escala brinda a los estudiantes la oportunidad de entender y aplicar conceptos de proporción y escala. La creación de un plano implica el uso de conceptos matemáticos como fracciones, proporciones, multiplicación y división, ayudándoles a comprender su utilidad en situaciones reales.

Este proceso involucra la resolución de problemas prácticos, como determinar las dimensiones adecuadas y calcular las escalas apropiadas, desarrollando así habilidades de resolución de problemas y razonamiento matemático. Además, la creación de un plano a escala puede ser una actividad creativa, donde los estudiantes expresan su imaginación al representar objetos y espacios de manera visualmente atractiva.

En resumen, la elaboración de un plano a escala no solo proporciona una experiencia práctica en matemáticas y geometría, sino que también estimula el pensamiento espacial y promueve la creatividad. Es una actividad interdisciplinaria que integra diversas áreas del currículo, como matemáticas, arte y ciencias sociales.

El producto de medidas ofrece a los estudiantes herramientas para abordar situaciones de la vida real que requieren la comparación y manipulación de diferentes cantidades y unidades. Además, el aprendizaje del producto de medidas fomenta el desarrollo del pensamiento crítico y la solución de problemas, implicando la aplicación de conceptos matemáticos en contextos prácticos.

Se identificaron desafíos en la enseñanza del producto de medidas, especialmente en la comprensión de conceptos previos fundamentales. Es crucial que los estudiantes desarrollen una comprensión sólida de estos conceptos antes de avanzar en el estudio del producto de medidas.

También se reconoció la importancia de contextualizar el aprendizaje del producto de medidas, relacionándolo con situaciones relevantes para los estudiantes, lo que aumenta su motivación y compromiso con el aprendizaje, además de permitirles ver la utilidad de los conceptos matemáticos en su vida cotidiana.

Esta fase de la investigación representa un momento crucial para consolidar aprendizajes y generar conocimiento, buscando impactar positivamente en la práctica educativa y en la mejora de futuras intervenciones, enriqueciendo la comprensión del mundo matemático y su aplicación en la vida cotidiana.

6.1 Recomendaciones

Para aquellos interesados en retomar y profundizar la presente investigación, se recomienda ampliar el rango de longitudes y magnitudes estudiadas. Esta ampliación permitirá explorar cómo varía el producto de medidas en diferentes contextos y situaciones. Además, estas tareas pueden contribuir al desarrollo de habilidades adicionales que están relacionadas con el manejo de medidas y la comprensión de la estructura multiplicativa.

Se sugiere realizar la prueba exploratoria enfocándose específicamente en el producto de medidas, en lugar de abordar la estructura multiplicativa en general. Esto permitirá obtener una visión más clara del nivel de conocimiento en la gestión de este tema. También se recomienda modificar y contextualizar los problemas de la cartilla, el taller y la tarea complementaria de acuerdo con las necesidades y niveles de los estudiantes. Esta adaptación garantizaría que las actividades sean pertinentes y efectivas para el desarrollo de habilidades en el producto de medidas.

Es aconsejable que futuras investigaciones sobre el producto de medidas consideren este trabajo como una base para fortalecer y desarrollar habilidades en la solución de problemas relacionados con dicho producto. Dado que este es un campo poco explorado, se invita a futuros educadores e investigadores a experimentar y vincular el producto de medidas como un concepto significativo dentro de la multiplicación.

Por último, es pertinente que la tarea complementaria y el taller de estimación y conversión se integren adecuadamente en las actividades de la cartilla. Reconstruir y adaptar la implementación de la cartilla a contextos específicos es fundamental, ya que el éxito de dichas actividades está estrechamente relacionado con las características particulares de los contextos educativos en los que se desarrollan. Por lo tanto, se recomienda adaptar las actividades de la cartilla considerando las particularidades de cada contexto educativo.

7. Referencias

- Alsina, A. (2006). *Cómo desarrollar el pensamiento matemático de 0 a 6 años*. Ediciones Octaedro.
- Ameijeiras Saiz, R. (2008). *Manual de educación infantil: Aspectos didácticos y organizativos*. Universidad de Extremadura.
- Bögl, L. (2015). *Geometric Thinking in the Middle Grades*: The Nature of Students' Learning. International Society for Research in Education and Science.
- Boix, V., y Jackson, A. (2013). *Educating for global competence: Learning redefined for an interconnected world*. En H. Jacobs (Ed.), *Mastering global literacy: Contemporary perspectives* (pp. xx-xx). Solution Tree.
- Bricall, J. (2000). [Título del libro o artículo, si se proporciona].
- Bright, G. W. (1976). Estimación como parte del aprendizaje de la medida. Anuario Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, 38, 87-104.
- Bright, G. W. (2003). Estimación: Apuntes didácticos. Actividades en el aula para la medición del aprendizaje y la enseñanza.
- Bruner, J. (1986). *Actualización de la teoría del aprendizaje*. En J. Bruner, La educación, línea de acción (pp. 89-120). Ediciones Prensa Universitaria.
- Bureau International des Poids et Mesures. (2019). Le Système international d'unités (SI).
- Caicedo Ramírez, A. L., y Manzano Marín, P. (2019). Una propuesta de aula para la resolución de problemas de isomorfismo de medida en estudiantes de quinto grado de educación básica primaria.
- Castro et al (2016). Conocimiento conceptual y procedimental en matemáticas: su evolución tras décadas de investigación. Revista de Educación, 374, 43-68.
- Cengage Learning. (2017). Physics for Scientists and Engineers.
- Cerritos, H. (2012). El isomorfismo de medidas como estrategia para la resolución de problemas multiplicativos en el tercer grado de la escuela primaria.
- Chamorro, I. L. (2010). El juego en la educación infantil y primaria. Autodidacta, 1(3), 19-37.
- Chávez, M. (2011). Reseña de *El aprendizaje basado en problemas: Una propuesta metodológica en educación superior*.

- Clandinin, D. J., y Connelly, F. M. (2000). *Narrative Inquiry: Experience and Story in Qualitative Research. Jossey-Bass*.
- Clements, D. H. (1999). *Geometry and spatial reasoning*. En J. Kilpatrick, J. Swafford, & B. Findell (Eds.), Mathematics Learning Study Committee: Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics (pp. 87–123). National Academies Press.
- Cohen, L. (2010). Mathematics education: A critical inquiry. New York: Routledge.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research methods in education* (8.ª ed.). Routledge.
- Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM). (2000). Principios y estándares para las matemáticas escolares.
- Convención sobre los Derechos del Niño (CDN). (1989). Tratado internacional adoptado por la Asamblea General de Naciones Unidas.
- Creswell, J. W. (2008). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (3rd ed.). Pearson Education, Inc.
- Creswell, J. W. (2014). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4th ed.). SAGE Publications.
- Cruz, J., y Martínez, A. (2019). *Matemáticas para la vida cotidiana*. Ediciones Universitarias.
- Fajardo, M. T., Gálvez, G., Pino, K., y Ramírez, A. (2017-2019). *Unidad de aprendizaje: Situaciones multiplicativas*. Visión global. Chile.
- Fernández, J. (2019). Fundamentos de la medición en ciencias exactas. Editorial Académica.
- Ferrini-Mundy, J., y Steen, L. A. (2013). *Mathematics education and the challenges of the twenty-first century*. Mathematics Teaching in the Middle School, 18(6), 348-354.
- García, L. (2019). La didáctica de las matemáticas en la educación secundaria. Editorial Universitaria.
- Giancoli, D. C. (2014). *Physics: Principles with Applications*.
- Gibilisco, S. (2006). Physics Demystified
- Gil, J. (2020). La enseñanza geográfica en la era digital: herramientas y métodos innovadores. Editorial Educa.

- Gobierno de la República. (2004). Programa Nacional de Educación 2001 2006: Manual de estilos de aprendizaje. Material autoinstruccional para docentes y orientadores educativos.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros* (pp. 635-654). Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- González, L. (2021). Combinatoria y su aplicación en problemas reales. Editorial Académica.
- Green, A. (2005). *Enseñando la medición: No todo lo que brilla es oro*. Journal of Mathematics Teacher Education, 8(1), 29-47.
- Guskey, T. R. (2002). Professional *Development and Teacher Change*. Teachers and Teaching: Theory and Practice, 8(3), 381-392.
- Hattie, J. (2009). Visible Learning: A Synthesis of Over 800 Meta-Analyses. Relating to Achievement. Routledge.
- Hernández Pérez, C. A. (2021). La sistematización en la dialéctica educativa. *Revista Digital de Investigación y Postgrado, 1*(1).
- Hijzen, D., Boekaerts, M., y Vedder, P. (2007). Exploring the links between students' engagement in cooperative learning, their goal preferences and appraisals of instructional conditions in the classroom. Learning and Instruction. 17. 673-687.

 10.1016/j.learninstruc.2007.09.020.
- Hildreth, D. J. (1983). El uso de estrategias en la estimación de medidas. *Arithmetic Teacher*, (5), 50-54.
- Hockett, J. (2017). La diferencia en la escuela media y secundaria.
- Kerslake, D. (1986). *Students' Understanding of Geometry*. In J. N. D. G. de Lange (Ed.), Proceedings of the 10th International Conference on the Psychology of Mathematics Education (pp. 155–162).
- Landa, J. J., González, M. R., y Pérez, A. (2017). *Fundamentos de la Metrología*. Editorial Universitaria.

- Ley 115. (1994). Por la cual se expide la ley general de educación. Congreso de la República de Colombia.
- López, M. (2022). Estrategias didácticas para la enseñanza de las unidades de medida. Revista de Educación Matemática, 12(1), 45-58.
- Malagón Patiño, M. R. (2021). Las prácticas docentes en el aula de matemáticas: Una mirada desde la formación de profesores. *Revista Tecné*, *Episteme y Didaxis*, 49, 91-106.
- Martínez, A. (2020). Fundamentos del aprendizaje en la educación básica. Editorial Académica.
- Martínez, J. A. (2019). *La ciencia de la medición: principios y aplicaciones*. Editorial Universitaria.
- McCulloch, R. G. C. (2017). Measurement Theory and Practice. London: Academic Press.
- MEN. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas: Lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden. Ministerio de Educación Nacional.
- Merino, A. (2016). *Inicio al Método ABN*. Recuperado el 15-05-2019.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares: Matemáticas. Bogotá: Magisterio.
- Monje, C. (2011). *Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa:* Guía didáctica. Universidad Surcolombiana.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Noss, R., y Hoyles, C. (2019). *Micromundos, construcción y matemáticas. Educación Matemática*, 31(2), 7-21
- Ocampo Hernández, M. E. (2015). La importancia de la conversión de unidades en el aprendizaje de las ciencias. Revista de Educación y Tecnología, 9(2), 75-82

- Ocampo, A. (2019). La comprensión en acción: Un análisis sobre sus niveles y cualidades. Revista Pilquen, 16(2).
- Oleza, L. C. (1989). La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas por el niño de 8 a 11 años. *Anuario de psicología/The UB Journal of Psychology*, 83-102.
- Palmer, M. (2018). Las matemáticas de la vida cotidiana: La realidad como recurso de aprendizaje y las matemáticas como medio de comprensión. *Miradas Matemáticas*. Madrid, España.
- Parra, F., y Keila, N. (2014). El docente y el uso de la mediación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Revista de Investigación, 38(83), 155-180. Recuperado el 12 de julio de 2023.
- Partida Valdivia, J. M. (2022). El juego en el preescolar desde la fenomenología del mundo social. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 52(1), 321-350.
- Pérez, J. (2021). Errores comunes en la enseñanza de las matemáticas. Revista de Investigación Educativa, 15(2), 78-90.
- Piaget, J. (1970). La ciencia de educar a los jóvenes. Nueva York: Viking Press.
- Piaget, J. (1972). El desarrollo intelectual del niño. Editorial Siglo XXI.
- Pino, A. (2020). La importancia de las herramientas digitales en el aprendizaje de matemáticas.

 Revista de Educación y Tecnología, 5(1), 45-58
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* [Título original: *How to Solve It?*]. Trillas.
- Real Academia Española. (2022). Diccionario de la lengua española.
- Santos, M., Pérez, R., y Díaz, T. (2020). La didáctica de las matemáticas en la educación básica. Editorial XYZ.
- Siquiera, C. (2015). ¿Por qué la matemática es tan importante en la educación?
- Steiner, D. (2018). Innovations in the Mathematics Curriculum: Teaching from the Inside Out. Journal of Mathematical Behavior, 52, 23-32.

- Steiner, J. (2012). Measuring the measurable: A guide to units of measurement. London: Academic Press
- Tarapues Paz, H. R. (2018). Características de las estrategias que adoptan un grupo de estudiantes de grado cuarto de la educación básica primaria en la resolución de problemas de isomorfismo de medidas.
- Tufte, E. R. (1983). The visual display of quantitative information. Graphics Press.
- Van Hiele, P. M. (1986). Estructura e insight: Una teoría de la educación matemática. Academic Press.
- Vargas, K. (2022). Estrategias de enseñanza en matemáticas. Grupo Editorial.
- Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 141-161). Lawrence Erlbaum Associates.
- Vergnaud, G. (1991). *Theory of conceptual fields. In: D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking* (pp. 163-197). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En H. Guershon & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the middle grades*.
- Vergnaud, G. (1997). The nature of mathematical concepts. En T. Nunes & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective*. Psychology Press.
- Vygotsky, L. S. (1978). Interaction between learning and development. En Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes. Harvard University Press.
- Vygotsky, L. S. (1979). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Grijalbo.
- Vygotsky, L. S. (1981). Pensamiento y lenguaje. La Pléyade.

8. Anexos

Anexo 1. Consentimiento informado a padres de familia, I.E Francisco Montoya Kennedy

Consentimiento informado para padres de familia de la Institución Educativa Juan Pablo Gómez Ochoa sede Francisco Montoya Kennedy Área de matemáticas Grado cuarto

AUTORIZACIÓN PARA PUBLICACIÓN, DIFUSIÓN Y USO DE MATERIAL.

Yo							ide	entificado(a)	con	CC.
estudiante				, ider	ntifica	do(a) c	on		núm	nero
		d								
proceso de										
estrategias n										
de medidas"					UNO 300		de Edu	cación por	la doce	ente
Adriana And	rea Anacoi	na Ordonez	- Maria Ele	na Aranz	zasu A	rias.				
Entiendo qu	e este pro	oceso busca	constituir	una prá	ctica p	pedagóg	ica refle	xiva e inve	stigativ	a, a
partir del re										
práctica. Y ta multiplicativa										uras
La informaci										nera
confidencial,										
mi identidad	en cualqu	uier tipo de	publicaciór	n o proce	eso de	investig	gación. S	sé que puec	lo nega	ar la
participaciór			lquier eta _l	pa de la	inve	stigaciór	n, sin ex	xpresión de	caus	a ni
consecuenci	as negativa	as para mí.								
Al firmar es										
práctica ped										
anterior se r										
intimidad, al con anterior		de la privació	aad y a la	propia ir	nagen	i dei (de	ia) estu	diante men	cionad	o(a)
con anterior	iuau.									
Nombre del										
Documento										
Firma:		50 50 5								
Nombre del	acudiente	2:								
CC										
Teléfono de										
Firma:										

Anexo 2. Consentimiento informado a padres de familia, Colegio León de Judá

Consentimiento informado para padi	res de familia de la Ins	stitución Colegio Leór	n de Judá Área de
Matemáticas Grados 4° y 5°			
AUTORIZACIÓN PARA PUBLIC	ACIÓN, DIFUSIÓN Y	Y USO DE MATERIA	AL
Yo			
identificado(a) con CC.	de	,	en calidad de
acudiente responsable por el (o	la) estudiante		,
identificado(a) con	número	de	declaro
que he sido informado(a) e invitado	o(a) a participar en el	l proceso de Práctica	s Pedagógicas en
correspondencia con el trabajo de gra	ado " Análisis de estra	tegias mediadoras par	a la resolución de
problemas con estructura multiplicat	tiva en producto de me	edidas", desarrollado	en la Universidad
de Antioquia, Facultad de Educación	n.		
Entiendo que este proceso busca co	onstituir una práctica _I	pedagógica reflexiva	e investigativa, a
partir del reconocimiento de las con	ndiciones generales de	la práctica pedagógio	ca y del centro de
práctica. Y también, explorar algund	as problemáticas en to	rno a la enseñanza y	el aprendizaje las
estructuras aditivas y multiplicativas	s con niños y niñas de	la Educación Básica l	Primaria.
Me han explicado que la informac	ción suministrada se a	administrará exclusiva	amente con fines
académicos y de manera confidence	cial, por lo que no se	e divulgará mi nomb	ore ni se incluirá
información que permita revelar la	a identidad en cualqu	ier tipo de publicaci	ón o proceso de
investigación. Sé que puedo nega	ar la participación o	retirarme en cualqu	uier etapa de la
investigación, sin expresión de causa	a ni consecuencias neg	ativas para mí.	
Al firmar este documento autorizo	usar, publicar, difund	ir el material derivad	lo del proceso de
práctica pedagógica que se realiza	en los grados 4° y 5°	en la asignatura de	Matemáticas. Lo
anterior se realiza con el ánimo de a	poyar los procesos aca	démicos, bajo el dere	cho al honor, a la
intimidad, al respeto de la privacida	ad y a la propia image	n del (de la) estudian	te mencionado(a)
con anterioridad.			
Nombre del [de la] estudiante:		_	
Documento de identidad:		_	

Nombre del acudiente:	
CC	
Teléfono de contacto: _	
Firma:	

Anexo 3. Prueba exploratoria, estructura multiplicativa

Proyecto investigativo: análisis del proceso de mediación en la resoluciór de problemas con estructura multiplicativa en producto de medidas

Prueba exploratoria: estructura multiplicativa

Estudiante:

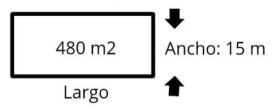
Luis tiene en su amario camisas y pantalones que utiliza para ir al trabajo. Al combinar estas prendas, el obtiene formas de vestir tanto una camisa como un pantalón a la vez.

¿Cuántas camisas y pantalones pueden tener Luis para vestir en su trabajo?

Registra el o los procedimientos que utilices para dar solución a la incógnita.

Sofia tiene un terreno rectangular de 480m2, El lado ancho del terreno mide 15 m.

¿Cuánto mide el largo del terreno?



Carmen recibe de su abuelo 1.500 pesos cada semana. Su hermana Maria recibe 2 veces más.

¿Cuánto dinero recibe Maria cada semana?

Elena tiene un compromiso y está buscando entre sus prendas de vestir, la mejor opción. Al revisar su ropero encontró: 5 faldas y 6 blusas diferentes.

¿Cuántas formas diferentes tiene para vestir una falda y una blusa?

Anexo 4. Tarea complementaria, taller conversión y estimación de medidas

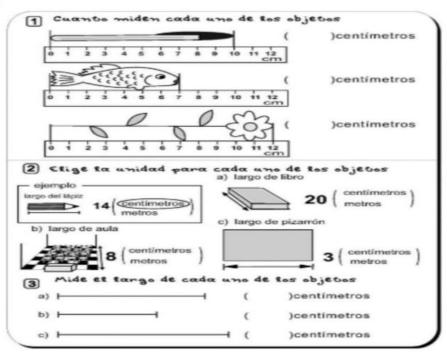
TALLER DE CONVERSIÓN Y ESTIMACIÓN DE MEDIDAS GRADOS 4° Y 5°

NOMBRE:	FECHA:
INCIVIDICE.	ILCIIA.

Lee atentamente la siguiente información de estimación y conversión de medidas, resuelve los ejercicios:

El metro es la principo En un metro hay 10 d En un Decímetro hay En un Centímetro hay	ecímetros. 10 centíme	tros. 1dm	n = 10dm n = 10cm n = 10mm	# milimetro centimetro
Recorta lo cuadros de la corresponda. O 1 2 3 4 5 ¿Cuántas tiras como o Calcula a simple visto Mídelos con tu regla practica midiendo algoractica midiendo	6 7 8 éstas forman a los cm de	9 10 un metro?	de A	¿Cuántos cm tienen? La canfidad de metros multiplicada por 100 nos da el número de cm 121 m = cm 121 m = cm 49 m = cm ¿Cuántos metros tienen?
		medida en cm	diferencia	dividido entre 100 nos 2 600 m =m
	cm	cm	cm	m que buscamos. 4 800 m = n
	cm	cm	cm	Al multiplicar la 25 km = n cartidad de km por 1,000
	cm	cm	cm	obtenemos el número de 30 km = n m que hay. 201 km = n
				nin V

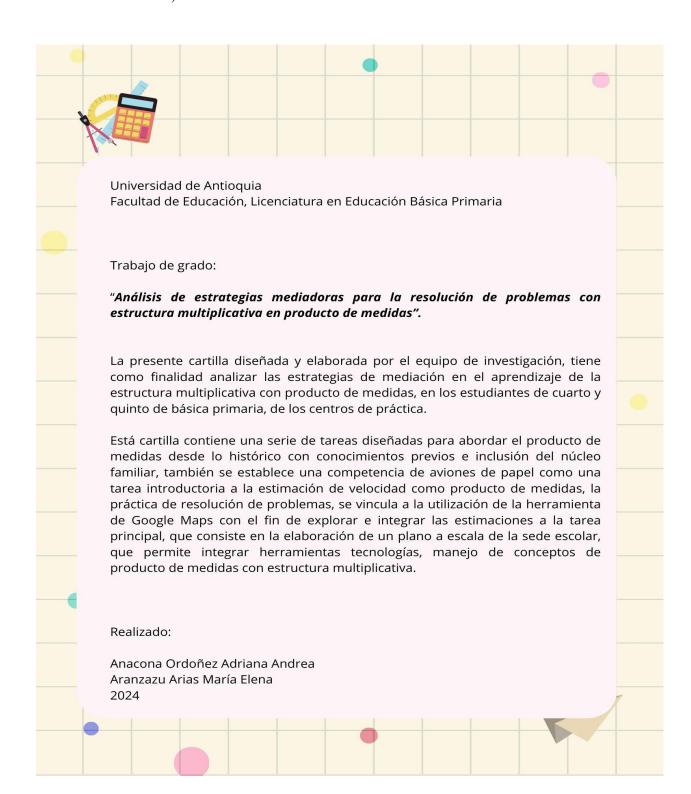
Responde:



Anexo 5. Cartilla, Producto de medidas (portada)



Anexo 6. Presentación, Cartilla Producto de Medidas



Anexo 7. Sesión 1 Introducción

											_1	
	THE C				4 :	Sesió		4 h				
						o esti		1 h				
	1					Introd	ucción					
	\	/amos a	comen	zar un i	recorric	Hola do que n		ırá al uı	niverso	de prod	ucto de	
			medi	das, pe	ro ante	s de lleg	ar a ese	mome	nto, inc	laga:		
4	Pregi	unta a tu	s abuelo	s o famil	liares, so	bre cóm	o mediar	objetos	, distanc	ias,		
	J					puntes d				•		
-												
								 				
_								<u> </u>				
_						,						
							%					
-						- <u> </u>	ob to the second					
_		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	11.			1				1		
				× ×)	
											 >	
		,								ή		
											(
	•											

Anexo 8. Confirmación y verificación de lo aprendido

	Confirma lo aprendido
	Antiguamente las primeras unidades de longitud que usaba el hombre derivaron de las
	dimensiones de distintas partes del cuerpo: pulgada, palmo, codo, braza, pie, paso a
	estas las llamamos unidades de medida no convencionales.
	Estas unidades tenían el inconveniente de que no eran iguales para todos, así la longitud
	de un palmo o pie variaba de una persona a otra. Por tanto, no eran fiables.
	PASO PIE PALMO
	BRAZA CODO
	Verifica lo aprendido
	Encontrarás demarcado con cinta en el suelo del aula, figuras como cuadrados, rectángulos y triángulos en diferentes tamaños, procede a medir las figuras con tus pies.
	Mide tu pie con una regla y según esta medida, descubre cuáles son las medidas de cada figura (compara las medidas con tus compañeros).
	Registra tus datos.
	Número de pies en cada figura:
	Medida del pie en cm:
	Medida de las figuras:
ь Д=b	

Anexo 9. Sesión 2, divirtiéndonos por las alturas

71110210	7. Sesion 2, divirtiendonos por las alturas
	3
	Sesión 2, tiempo estimado 2h
	Divirtiéndonos por las alturas
	Desafío especial: realiza un avión. Elige el tamaño de la hoja, mide el largo y ancho, calcula área y perímetro de la hoja.
	Realiza los siguientes modelos:
	Después de haber realizado los aviones colócales un nombre.
	Prepárate para participar en una competencia de aviones! Ensaya varias veces la técnica para lanzar los aviones.
	En el punto de partida, todos se preparan para lanzar los aviones, siguiendo las instrucciones de la docente.
	Registra tiempos y distancias recorridas por los aviones de papel en la siguiente hoja basignada para ello.
0	

Anexo 10. Hoja de registro de tiempos y distancias

•				
	Н	oja de registro		4
		la distancia y el ti		
		ocidad a la que via		
	Nombre del avión	Distancia	Tiempo de vuelo	
	avion	recorrida por el avión	vuelo	
	Analiza co	on tus compañero	s	
Cuáles aviones volaron m				También pueden comparar
los cálculos de área y per				
diseño y el vuelo.				
Escribe lo analizado:				
		•		$S = \frac{d}{1}$

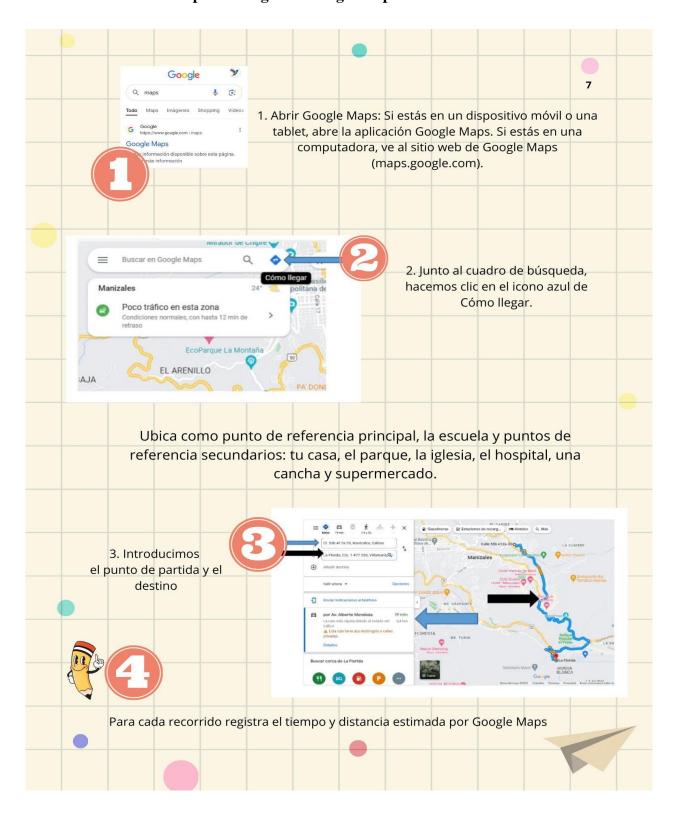
Anexo 11. Práctica estimación de velocidad

		Práct	ica			
	Anlica la sig	uiente fórmula para	estimar la	velocidad	1 2 3 +	5
	7 piled la sig	V= d/t (usa la calc		verocidad.	4 5 6 - 7 8 9 ×	
					6000	
En ur		nes de papel, el avi qué velocidad se de				undos.
	ZA	que velocidad se de	espiazo ei a	avion de Juai	1:	
	Con los registros a	nteriores de distanc	ia v tiompo	طم سیمام حماد	ula la volocidad	a la guo
	se desplazaron los		ia y tierripo	de vuelo, calc	dia la velocidad	a la que
			_			
	Nombre del	Velocidad del				
	avión	avión		Amal	i tus	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~
					iza con tus compa	
					olaron más cm por s o, si el área y períme	
					o del vuelo de los a	
			-	Escr	ibe lo analizado:	1,2
			-)		-
			_			
			_			
			-			
						c - d
						5- T

Anexo 12. Sesión 3, práctica online con Google Maps

6
Sesión 3, Tiempo estimado 2h
Llegó la hora de ¡ Practicar on line!
Hola
Bienvenidos 😜
🚀 iniciaremos este viaje, en el cual haremos un recorrido por diferentes lugares 😎
¿Sabes que es Google™ Maps? 🖏
navegar on line por el mundo 💉
de manera más fácil.
Comenzaremos este viaje, que inicia 1,2,3
vamos a Google Maps
Sigue las siguientes instrucciones
en el navegador de Google

Anexo 13. Instrucciones para navegar en Google Maps



Anexo 14. Problemas para hallar producto de medidas



Anexo 15. Observo y construyo



Anexo 16. Sesión 5, construcción de plano a escala

45 cm			
13.600 km		Recuerda tener	
	Sesión 5	contigo la cinta métrica	10
	tiempo aprox 3 horas		
	← Ahora de aplicar→		
Ya que observaste la escuela d	esde arriba e identificast	te la forma, dibújala a esca	a
Utiliza las m	edidas estimadas de Goo	ogle Maps	
Salgamos hacer un recorrido, por c			
plano de acuerdo a las indicaciones ventanas, entradas, puertas y gra			
	no a escala de la escuela		
	Plano a escala 1:100		
La numeración a escala funciona d		-	a las
unidades de medida d	del plano y el segundo a l	las medidas reales.	
1 cm del plan	o equivale a 10 metro de	la realidad	
	0		
	THE COLUMN TWO IN THE COLUMN T		N. C.