Procesos de Razonamiento y de Comprensión con Respecto a la Solución de Problemas que Involucran la Estructura Multiplicativa

Gladys María Rivera González

Grupo de investigación: Educación Matemática e Historia

Programa de maestría en regiones

Cohorte I

Facultad de Educación

Universidad de Antioquia

Medellín

2014

Procesos de Razonamiento y de Comprensión con Respecto a la Solución de Problemas que Involucran la Estructura Multiplicativa

Gladys María Rivera González

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación

Orientador:

John Henry Durango Urrego

Grupo de investigación: Educación Matemática e Historia

Programa de maestría en regiones

Cohorte I

Facultad de Educación

Universidad de Antioquia

Medellín

2014

Dedicatoria

Este trabajo es dedicado a los niños que van descalzos a la escuela,

para aquellos que se mojan allí, cuando llueve,

para los que cargan el agua en burro para hacer el restaurante,

para los niños de la escuela:

mi motivo y mi razón de ser.

Agradecimientos

“Agradece a la llama su luz, pero no olvides el pie del candil que, constante y paciente, la sostiene en la sombra”.

Rabindranath Tagore

En primer lugar quiero agradecer a Jesús, quien siempre ha estado conmigo llenándome de ánimo y de fuerza.

A mi orientador John Henry Durango Urrego, ¡excelente maestro!,¡un gran ser humano y guía!, que ha decido compartir conmigo sus conocimientos. ¡Gracias por acompañarme, por apoyarme y por hacer posible este trabajo!

A mi familia por amarme y por apoyarme de manera incansable.

Contenido

Índice de tablas

Índice de ilustraciones

Resumen

En los primeros años de la educación básica, los estudiantes construyen sus procesos de razonamiento con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura de tipo multiplicativo. Dichos procesos se materializan con la ayuda de la explicación. Describir los procesos razonamiento a través de las explicaciones con el fin de determinar las dimensiones y los niveles de comprensión alcanzados por los estudiantes es el propósito de la presente investigación.

Inicialmente, se da cuenta del problema de investigación a partir de una revisión cuidadosa de antecedentes investigativos y teóricos que resaltan la pertinencia de este estudio, luego de ello se aborda el origen epistemológico del objeto matemático, lo que posteriormente da paso a la construcción de un referente conceptual que procura establecer relaciones de tipo teórico entre las categorías: Comprensión y razonamiento. Después se presenta de manera detallada el desarrollo del diseño metodológico que orienta la recolección, categorización y análisis de la información y finalmente, se dan a conocer las conclusiones que surgen a partir de la información recolectada.

Palabras clave: Razonamiento, comprensión, explicación, estructura multiplicativa.

Introducción

El presente estudio de investigación se ha realizado en el marco de la Maestría en Educación en Regiones de la Universidad de Antioquia, dentro del Grupo de investigación Educación Matemática e Historia, el origen del problema de investigación se encuentra dentro de las aulas de clase, en los pasillos del colegio y en las conversaciones entre maestros, planteado en las siguientes preguntas:

- ¿Por qué los estudiantes no entienden matemáticas?, ¿Qué hacemos para que ellos entiendan? y ¿cómo les ayudamos a pensar y a entender los problemas?

Aunque estas preguntas no son resueltas durante el desarrollo de la presente investigación, hacen parte de los primeros planteamientos, en consecuencia la evolución de estas ha constituido la pregunta de investigación que guía el presente estudio, cuyo objetivo propuesto es describir los procesos de razonamiento de los estudiantes del grado cuarto con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo, luego de ello cada una de estas explicaciones se relaciona con una o más dimensiones de la comprensión. Para ello se proponen seis capítulos presentados así (ver ilustración X)

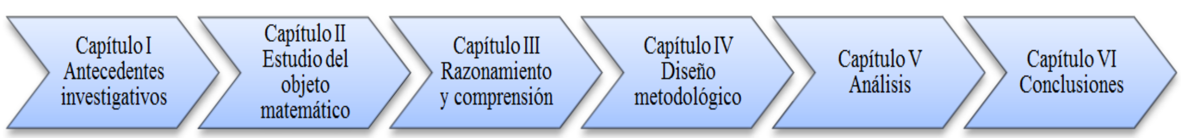


Ilustración 1. Presentación de los capítulos

En el **Capítulo I** se da a conocer el problema de investigación iniciando con un recorrido por los estándares de calidad que rigen la enseñanza de las matemáticas en Colombia dentro del contexto de la Educación Básica Primaria, luego se realiza la presentación de antecedentes investigativos y teóricos[1], se describen las causas que dan origen al problema y que conllevan la formulación de la pregunta y los objetivos.

En el **Capítulo II** se realiza una revisión sobre el origen y la evolución del concepto de estructura multiplicativa en las culturas: egipcia, hindú, babilónica y china; con el objetivo de conocer a profundidad el origen del concepto de estructura.

En el **Capítulo III** se exponen una serie de acercamientos teóricos existentes entre las teorías de enseñanza para la comprensión y la Balacheff (2000) sobre el razonamiento y la explicación. Con el fin de construir un marco teórico que dé solidez a la presente investigación.

En el **Capítulo IV** se centra en la descripción del diseño metodológico que se ha llevado a cabo para el desarrollo de la investigación cuyo propósito es delimitar la ruta de investigación.

En el **Capítulo V** se presenta el proceso de análisis de la información y la triangulación de los datos. Las categorías en este capítulo emergen a partir de los datos obtenidos a través de la aplicación de los instrumentos.

En el **Capítulo VI** se encuentran consignadas las conclusiones que surgen de la investigación realizada, estas se encuentran relacionadas con el objetivo de investigación propuesto.

Finalmente, se presentan los anexos que soportan el contenido expuesto del trabajo de investigación.

[1] Con el propósito de abordar el problema de investigación desde diferentes perspectivas y de dar mayor relevancia a los aportes de la presente investigación.

Capítulo 1 Antecedentes Investigativos:

Del Razonamiento a la Comprensión Matemática

"Ocurre, pues, que no se podría razonar, ni siquiera en matemáticas puras, sin experimentar ciertos sentimientos, y que, a la inversa, no existen afecciones que no se hallen acompañadas de un mínimo de comprensión o discriminación"

Piaget (1963)

El tema a tratar en este capítulo está dirigido a resaltar la importancia de investigaciones cuyo objeto de estudio sea la descripción de los procesos de razonamiento en relación con las estructuras multiplicativas de los estudiantes que cursan grados de la Educación Básica Primaria, para ello se ha planteado inicialmente un recorrido sobre aquellas pautas que direccionan el trabajo de los maestros en Colombia, como es el caso, de los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1996) y los estándares curriculares de matemáticas (MEN, 2006).

Seguidamente se tienen en cuenta aquellas investigaciones que han realizado diferentes autores sobre el concepto de razonamiento aritmético, de comprensión aritmética y de estructura multiplicativa, tal recorrido permitirá evidenciar que en la actualidad existen escasas investigaciones encaminadas a profundizar en la descripción de los procesos de razonamiento de los estudiantes durante la infancia, haciendo de este tema innovador.

1.1 Una Mirada Evolutiva Desde los Lineamientos Curriculares

La Educación Matemática en Colombia y en el mundo, ha presentado varios cambios no sólo a nivel de la práctica sino también a nivel de los significados que se dan desde la investigación, la formulación y renovación del currículo; esto se ve reflejado en el diseño de los estándares curriculares de matemáticas (MEN, 2006) asegurando que desde los inicios de la república la Educación Matemática en Colombia ha ejercido un papel fundamental gracias a la contribución de ésta en el desarrollo del razonamiento lógico y, al mismo tiempo, al de la ciencia y al de la tecnología, lo anterior permite inferir que las matemáticas se relacionan directamente con el desarrollo del país en dichos campos.

Los cambios mencionados al inicio del párrafo anterior, pueden inferirse a partir de las distintas pautas y políticas que va fijando el estado. En primer lugar, se encuentran los Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1983) que le dan una visión renovada al tipo de enseñanza tradicional que se impartía desde hacía varios años en el país, éstos proponen dejar atrás el aprendizaje por repetición para reorientarlo por el aprender haciendo, es decir, se le otorga al estudiante un papel activo y participativo en la construcción del conocimiento matemático (MEN, 1983).

Posteriormente en 1994 con la Ley General de la Educación el estado se compromete a formular y difundir unos Lineamientos Curriculares de matemática que orienten las prácticas de los maestros y el diseño de planes de área de las instituciones, dicho documento fue publicado en 1998, allí se dan a conocer ideas fundamentales como: Los procesos generales del área (modelación, formas de comunicación, resolución de problemas, ejercitación y formulación de procedimientos y *razonamiento*), los cinco tipos de pensamiento matemático (numérico, métrico, variacional, espacial y aleatorio), los problema como estrategia de enseñanza y una serie de fundamentos y direccionamientos que deben ser tenidos en cuenta para la enseñanza del área (Ministerio de Educación Nacional, 1998); ocho años más tarde, se publican los Estándares Curriculares de matemática donde se plantean los logros a alcanzar en cada uno de los ciclos[2] por grados, se incorporan los tipos de pensamiento matemático y se enfatiza en la importancia de formar un sujeto que sea competente matemáticamente.

Todas estas formulaciones y pautas repercuten en las concepciones del maestro y del estudiante, en relación a esto puede decirse que las prácticas de aula se encuentran permeadas por dichas concepciones, esto se puede hacer explícito en el ejercicio de la práctica, dependiendo del contexto donde se desarrollan y se construyen los conocimientos, de la interacción particular de los sujetos que conforman diferentes comunidades. En la Ilustración 2 se esquematiza lo mencionado anteriormente.

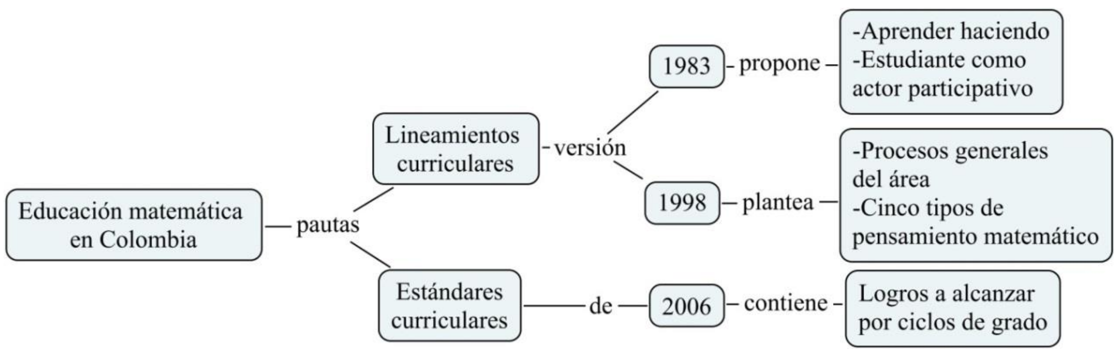


Ilustración 2. Referentes de calidad

1.2 Referentes Investigativos

Como se ha dicho anteriormente, los cambios en Educación Matemática no se han presentado solo a nivel del currículo, sino también a nivel de las investigaciones que se han desarrollado en el área y que dirigen su atención hacia “qué matemáticas se enseñan y se aprenden en la escuela y cómo se llevan a cabo estos procesos” (Kilpatrick, Gomez y Rico,1998). En el transcurso de este apartado se tienen en cuenta especialmente aquellas investigaciones que tienen como objeto, el estudio del razonamiento (proceso matemático), la comprensión aritmética y la estructura multiplicativa, abordados en este orden.

[2] Los ciclos son dos: la Educación Básica Primaria de cinco grados y la Educación Básica Secundaria de cuatro grados.

1.2.1 Investigaciones dirigidas hacia el estudio del razonamiento.

Una de las investigaciones realizadas en torno al razonamiento ha sido desarrollada por Ruesga (2003) quien enmarca su tesis de doctorado en el estudio del razonamiento lógico matemático de los estudiantes durante los primeros años de escolaridad, allí se presenta la elaboración de una propuesta que incluye unas tareas a realizar, las cuales permiten refinar la construcción de conceptos de reversibilidad y de clasificación (modo directo-modo inverso) con la ayuda de los bloques lógicos. En su trabajo concluye entonces "la importancia que debe darse al desarrollo del razonamiento matemático de forma especial durante la etapa de educación infantil desde la cual es posible comenzar a abordar aspectos que lo definen" (Ruesga, 2003, p. 331), de ahí la conveniencia de realizar estudios que aborden la descripción de este en grados avanzados.

Dos años después, Cecilia Crespo y Rosa Farfán en el año 2005 elaboran un artículo basado en su tesis de maestría con el propósito de dar a conocer la importancia de la argumentación en el aula de clase, dicha investigación ha sido desarrollada con estudiantes de secundaria, sin embargo, en uno de sus apartados afirman que "es necesario que los niños aprendan a intuir, plantear hipótesis, hacer conjeturas, generalizar y cuando sea posible, ensayar pequeñas argumentaciones y demostraciones" (Crespo y Farfan, 2005, p. 290), lo anterior permite inferir lo oportuno que es este trabajo de investigación, ya que pretende describir los argumentos y explicaciones que construyen los estudiantes del grado cuarto de la Educación Básica Primaria.

En esta línea de ideas, Cañadas (2007) opta por describir y caracterizar el razonamiento inductivo de estudiantes que cursan estudios secundarios ya que considera que es de gran interés para los maestros "conocer las limitaciones y lagunas del razonamiento inductivo de los estudiantes" (Cañadas, 2007, p. 431). Al final de su investigación esta investigadora concluye que "no siempre el modelo de razonamiento inductivo es lineal" (Cañadas, 2007, p. 410), lo que posibilita considerar la multiplicidad de procesos y de estrategias de solución que suceden alrededor del razonamiento; idea por la cual se hace necesario realizar estudios de este tipo en los grados de la Educación Básica Primaria.

Más adelante, Carmen Ferrándiz y otros en el año 2008 realizaron un estudio sobre el razonamiento lógico matemático en estudiantes de Preescolar y Básica Primaria basado en el modelo de las inteligencias múltiples de Gardner, caracterizando el razonamiento según variables como: razonamiento numérico, razonamiento espacial y razonamiento lógico; finalmente esta investigación informa el diseño de un perfil cognitivo de los estudiantes enmarcado en los diferentes tipos de inteligencia y concluye que los estudiantes de la básica primaria presentan diferencias estadísticas a su favor con respecto a los estudiantes de educación infantil, lo que da origen a la siguiente hipótesis "a mayor edad mayor competencia lógico matemática" (Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto, 2008, p. 220).

Paralelamente, en este mismo año, Rodríguez y otros (2008) publicaron un estudio monográfico sobre el desarrollo de las estrategias infantiles teniendo en cuenta el uso del razonamiento para su construcción, dicho estudio se llevó a cabo con estudiantes en edades de cuatro a seis años. Las autoras argumentan que es pertinente realizar estudios de este tipo ya que permiten "determinar cómo los niños organizan y procesan la información" (Rodriguez, Lago, Caballero, Dopico, Jiménez y Solbes, 2008, p. 240). Al finalizar dicho estudio se concluye que los estudiantes desarrollan gran variedad de estrategias para solucionar tales problemas y operaciones, moviéndose indistintamente de unas a otras.

Los estudios presentados anteriormente dan cuenta de la importancia de abordar estudios de este tipo, sin embargo es de anotar que dichas investigaciones solo toman como objeto de estudio el razonamiento, apartándose de la estrecha relación que tiene éste con respecto a la comprensión.

1.2.2 Investigaciones que orientan sus estudios hacia la comprensión.

Las investigaciones que se presentan a continuación están directamente relacionadas con la comprensión en el campo de la Educación Matemática, éstas dan cuenta de la importancia de llevar a cabo investigaciones que se preocupen por asuntos sobre esta y en ocasiones se proponen estrategias de enseñanza para su evolución.

Con relación a lo anterior, Godino (2003) expone que es necesario clarificar qué se entiende por comprender los objetos matemáticos antes de proponer una teoría para lograrlo, sin embargo sus estudios no solo se preocupan por la comprensión de los objetos sino también “por la comprensión de los sujetos, en particular por la de los estudiantes en una institución escolar y la forma en que ellos construyen su conocimiento” (Godino, 2003, p. 98) entendiendo que se involucran procesos mentales y sociales. En esta investigación se afirma que una de las ideas acogidas y aceptadas en el estudio de la Educación Matemática es que los estudiantes deben comprender matemáticas, tal idea reafirma la importancia del presente trabajo de investigación, ya que pretende establecer a través de la descripción de las explicaciones (producto del razonamiento) en qué nivel de la comprensión se encuentran los estudiantes.

En esta línea de ideas, Gallardo y González (2004) sostienen que la “compresión del conocimiento matemático, su diagnóstico y su evaluación” son un tema de interés dentro del área ya que a pesar de los numerosos aportes que se han realizado, aún “es un campo de investigación abierto” (Gallardo y González, 2004, p. 6). Los aportes que se realicen en torno a éste son de gran relevancia; esta investigación está orientada específicamente a la comprensión del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de los números naturales ya que consideran que “no se encuentran ejemplos que traten en profundidad la comprensión del algoritmo estándar escrito del producto” (Gallardo y González, 2004, p. 127) lo anterior da cuenta de la pertinencia del presente proyecto de investigación ya que más que abordar la comprensión del algoritmo estándar se pretende describir los procesos de razonamiento de los estudiantes con respecto a la comprensión de dicha estructura.

Igualmente, Echenique (2006) relaciona el significado de la comprensión con el término competencia, entendida como la capacidad de interrelacionar, argumentar, asociar y resolver diferentes situaciones, la comprensión en esta perspectiva se concibe como un proceso “largo y costoso” (Echenique, 2006, p. 16), para ello se requiere que los maestros desarrollen con sus estudiantes durante la Educación Primaria, actividades relacionadas con la resolución de problemas y la argumentación de dichas soluciones. Aunque Echenique (2006) reconoce la elaboración de argumentos como parte del desarrollo de la comprensión no se detiene a describir dichos procesos.

Asimismo, Rico (2009) realiza un estudio sobre el significado y la diferencia entre la representación y la comprensión, donde afirma que los procesos de enseñanza aprendizaje tienen como finalidad "el incremento de la comprensión sobre un campo concreto" (Rico, 2009, p. 2), justificando entonces su estudio; de igual forma propone que la representación según los racionalistas es "una entidad intermedia entre el sujeto y el objeto" (Rico, 2009, p. 2) entendido el objeto como un concepto matemático, de esta manera aunque la representación se encuentra inmersa dentro de los procesos de razonamiento, en la investigación de Rico (2009) se aborda como un elemento que aporta a la comprensión de conceptos matemáticos.

Como puede observarse en los apartados anteriores, la comprensión en Educación Matemática ha sido abordada desde varias perspectivas; durante la presente investigación se realiza dicho estudio a través de las explicaciones de los estudiantes, describiendo su relación con los procesos de razonamiento en el ámbito de la Educación Básica Primaria.

1.2.3 Investigaciones con relación a la estructura multiplicativa.

El objeto matemático que aborda esta investigación es la estructura multiplicativa, dicha estructura involucra aquellos problemas que implican el uso de una multiplicación o una división para hallar su solución. A continuación se presentan investigaciones orientadas a profundizar en el estudio de este campo.

En Chile, Castro, Benavides y Segovia (2006) desarrollaron un cuestionario sobre la resolución de problemas con respecto a la estructura multiplicativa con el fin de caracterizar estudiantes con talento matemático. Los estudiantes que participaron en el desarrollo de la prueba pertenecen a los primeros grados de la secundaria, el cuestionario contiene diferentes grupos de problemas de tipo multiplicativo, entre ellos se precisan los de comparación, de combinatoria, de escala, de un componente adicional y de números menores que la unidad; para dar validez al cuestionario de problemas de estructura multiplicativa los autores han comparado la eficacia del instrumento con otros instrumentos, como el test de Raven y la calificación en matemática. De esta manera concluyen que el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa "se constituye como un buen criterio diferenciador de grupos de niños con talento matemático" (Castro, Benavides y Segovia, 2006, p. 21).

Años más tarde, Ayllón, Castro y Molina (2011) realizan una investigación orientada a establecer cuáles son los tipos de problema que los estudiantes consideran difíciles de resolver, para ello le han pedido a un grupo compuesto por representantes de cada uno de los grados de la Básica Primaria plantear un problema difícil que debe ser resuelto por su compañero, los resultados de la investigación han concluido que los estudiantes de los grados cuarto, quinto y sexto han propuesto problemas que involucran la estructura multiplicativa, lo que permite afirmar a los investigadores que los estudiantes en la escuela tienen mayor contacto con los problemas de razón para la estructura multiplicativa y que "se trabajan poco la comparación multiplicativa y el producto cartesiano" (Ayllón, Castro, y Molina, 2011, p. 284) por tal razón los investigadores concluyen que los estudiantes presentan mayores dificultades en la solución de problemas relacionados con la estructura multiplicativa.

En Colombia, Ospina y Salgado (2010) han realizado una investigación sobre el estudio de la estructura multiplicativa en el grado tercero de la Básica Primaria donde se propone una aproximación a la teoría de los campos conceptuales de Gerard Vergnaud y al estudio de los lineamientos curriculares del área de matemáticas, además de dicha aproximación se presenta el análisis de libros de texto a la luz de dichos referentes teóricos, en una de sus conclusiones las autoras aseguran que en ciertos libros aparecen de manera explícita "los términos de la multiplicación, los nombres de las propiedades y la redacción de procedimientos en cuanto a cómo multiplicar por una, dos y tres cifras" (Ospina y Salgado, 2010, p. 489) agregando, que la solución de problemas se plantea dentro de las últimas páginas del libro de texto. Aunque la investigación anterior ha sido realizada dentro del marco de la Educación Básica Primaria, no se encuentran presentes procesos como el razonamiento y comprensión.

En la ciudad de Medellín en el año 2011 a través de una encuesta realizada con estudiantes de los grados primero a tercero, Lotero, Andrade y Andrade (2011) revelaron que "el gusto por la materia matemáticas disminuye drásticamente en el grado tercero"

(Lotero, Andrade y Andrade, 2011, p. 38) considerando que una de las causas de ello puede ser la insistencia del aprendizaje de las tablas de multiplicar, para ello proponen la enseñanza de la multiplicación a partir del planteamiento de problemas de la vida cotidiana y el uso de material tangible. Concluyendo entonces que "conceptualizar la multiplicación es mucho más que aprender de memoria las tablas de multiplicar" (Lotero, Andrade y Andrade, 2011, p. 60).

En la Ilustración 3 se da a conocer una síntesis de las investigaciones expuestas con respecto al estudio del razonamiento, la comprensión y la estructura multiplicativa, en dicha ilustración se hace un sumario de las razones y justificaciones que expresan los diferentes autores sobre la importancia de realizar estudios que incluyan cada una de las categorías mencionadas, y los aportes elaborados por los investigadores.

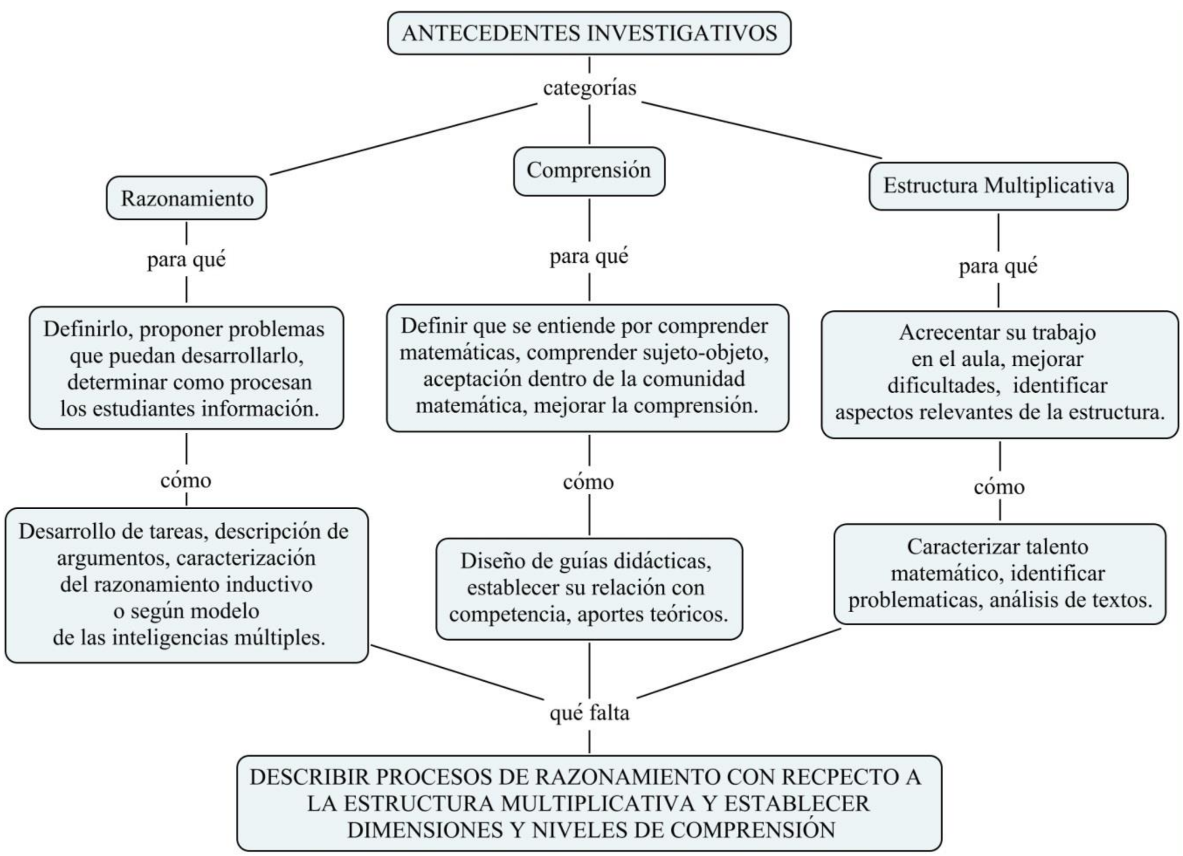


Ilustración 3. Síntesis de antecedentes investigativos

1.3 Referentes Teóricos

1.3.1 La voz de distintos autores.

El concepto de razonamiento ha sido tenido en cuenta tanto en las investigaciones en las Matemáticas como en la Educación Matemática. Por ejemplo Pólya (1966) plantea que para llevarse a cabo un proceso de razonamiento se debe partir del planteamiento de casos particulares, dando la posibilidad de realizar conjeturas y que dichas conjeturas deben ser comprobadas con la realización de nuevos problemas particulares.

Con relación a las conjeturas, Pólya (1966) en su penúltimo capítulo de *Mathematics and plausible reasoning* da a conocer sus aportes sobre lo que él denomina razonamiento plausible, este consiste en proponer conjeturas que deben ser rechazadas o aprobadas, dicha aprobación está sujeta a encontrar una prueba que pueda ser refutada con la aparición de un contraejemplo (Pólya, 1966, pp. 413-414). En este sentido, Pólya plantea que las conjeturas que surgen de este tipo de razonamiento pueden ser no ciertas, lo que obliga al estudiante a buscar otros caminos de solución a los problemas.

Mientras que Pólya (1966, p. 418) argumenta que la imaginación es un recurso del razonamiento que permite elaborar nuevas conjeturas, Blanché (1973) afirma que el razonamiento es un proceso intuitivo puesto que se centra en el pensamiento:

> El razonamiento se acerca cada vez más a la intuición en la medida en que se concentra el pensamiento, entendido como acto de la mente. Por el contrario, cuando se detiene en su expresión verbal o simbólica, aparece como una manera de organizar el discurso para convertirse al final en una serie de operaciones formales exactamente ordenadas, es decir, un cálculo. (p. 39).

Como puede observarse, ambos autores plantean el razonamiento como una actividad propia de la mente (Pólya 1966 y Blanché, 1973).

Los aportes de Blanché (1973) coinciden con la idea de razonamiento de Balacheff (2000) al concebir el razonamiento como una actividad propia del pensamiento, y como “la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida, para producir una nueva información” (Balacheff, 2000, p.

13), de igual modo también plantea que durante sus estudios ha notado la necesidad de que los estudiantes hagan explícitos sus razonamientos y procedimientos, pero éstos se sienten intimidados por su incapacidad de comprenderlos como procesos elementales. En este sentido, en el estudiante podría surgir el dilema sobre la aceptación y la validez de sus propias reflexiones, frente a los procedimientos y criterios del maestro.

Siguiendo a Balacheff, otro elemento que se pone a consideración, es la interacción social asignándole un papel relevante en la construcción del razonamiento. Los estudiantes al exponer sus razonamientos frente a sus compañeros aclaran y ordenan sus ideas y se convencen unos a otros a través de los argumentos, asumiendo cierta responsabilidad frente a los saberes que se construyen dentro del aula (Balacheff, 2000, p. 6). Por otro lado, Balacheff (2000) aclara que existe una gran diferencia entre argumentar y razonar; el argumento está dirigido a convencer utilizando una lógica coherente y no necesariamente válida, mientras que el razonamiento busca determinar el valor de verdad de una afirmación.

En general Balacheff (2000) plantea la necesidad de conocer los procesos de razonamiento de los estudiantes más allá de los resultados. Conocer estos procesos de razonamiento evolutivo puede guiar a los maestros en el diseño de actividades que les permitan a sus estudiantes avanzar en el desarrollo de estos niveles, para ello, Balacheff plantea tres niveles de validación: explicación, prueba y demostración.

Estos tres niveles son aquellos procesos que se encargan de darle un nivel de credibilidad, convicción o aceptación a una conjetura planteada. En la explicación, es el estudiante locutor quien establece y garantiza la validez de una proposición; el paso del nivel de explicación a la prueba radica en un proceso de socialización en el cual la conjetura inicial y su convencimiento de veracidad no es aceptada sólo por quien la expone sino también por un grupo social; esta clase de prueba puede darse de manera empírica o como una especie de demostración informal, por ello la prueba no es expresada en un lenguaje formal como se hacen las demostraciones. Y cuando la prueba está formulada a partir de reglas utilizadas por la comunidad matemática y la lógica formal se le da el nombre de demostración. Este proceso de validación formal no deja lugar a dudas sobre la legitimidad y la validez de una conjetura (Balacheff, 2000).

En conclusión, Balacheff plantea que la elaboración y aceptación de una conjetura siempre está acompañada de un proceso de validación que se inicia en la explicación, pasa por la prueba o la demostración empírica y termina con la demostración formal propia de las matemáticas. Estos niveles de rigor se pueden observar en la Ilustración 4.

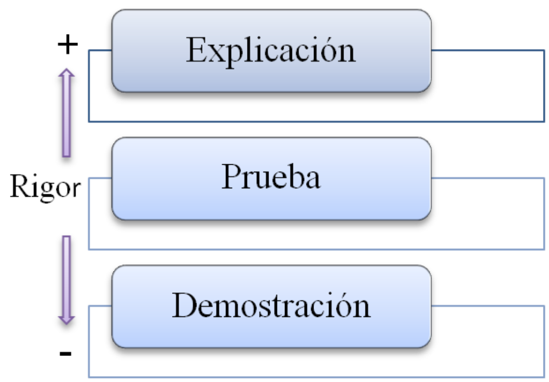


Ilustración 4. Procesos de validación

Después de dar una mirada al ámbito internacional, se hace necesario comprender cómo se ha concebido en Colombia el concepto de razonamiento. Los Lineamientos curriculares (1998) lo definen como: "los procesos del pensamiento matemático: la manipulación, la formulación de conjeturas, la generalización, la argumentación (…) entendemos por razonar la acción de ordenar ideas en la mente para llegar a una conclusión" (Ministerio de Educación Nacional, 1998, p. 53-54). Definición que se acerca notablemente a las concepciones de Balacheff.

Según los Lineamientos, el razonamiento está presente en el desarrollo de cualquier actividad matemática y que además deberá estar articulado a cualquier trabajo matemático que se plantee dentro del aula, partiendo del nivel de desarrollo del estudiante y los niveles de razonamiento informales[3] que estos puedan tener. De igual modo, el razonamiento

[3] Entiéndase por razonamiento informal aquellos razonamientos que los estudiantes construyen pero que requieren de material manipulable para ser construidos, es una etapa en que el estudiante utiliza contextos y materiales físicos que permiten percibir regularidades y relaciones; hacer predicciones y conjeturas; justificar

empieza a darse en los primeros grados teniendo en cuenta el valor del contexto y de los materiales físicos en la construcción de relaciones, predicciones, interpretaciones y conjeturas; y posteriormente, en los grados superiores los razonamientos se van alejando de lo empírico para ser tratados desde el mundo de las proposiciones y de la lógica formal.

1.3.1.1 Piaget y el razonamiento.

Para facilitar la comprensión de los niveles informales de razonamiento mencionados en el párrafo anterior, se consideran también las etapas del desarrollo de Piaget (1987), este autor informa la evolución del sujeto no sólo en su dimensión social y afectiva, sino también en su aspecto racional; analizando las representaciones internas, no observables y transformaciones de dichas representaciones.

En este trabajo, se tendrán en cuenta dos etapas del desarrollo de las cuatro planteadas por Piaget, ya que los actores participantes de la investigación se encuentran caracterizados dentro de dichas etapas: Operaciones concretas (7-11 años) y operaciones formales (11-15 años).

Cuando el estudiante adquiere la capacidad de regresar mentalmente sobre un proceso que ha realizado con anterioridad (facultad de reversibilidad) se dice que ha alcanzado la etapa de las operaciones concretas. Además de la reversibilidad, los estudiantes son capaces de conservar dos o más propiedades de los objetos, se atreven a clasificarlos y ordenarlos según sus características, es aquí donde aparecen las operaciones matemáticas.

En general Piaget plantea que los seres humanos poseen dos funciones que poco varían como son la organización y la adaptación, en este capítulo se dará mayor énfasis a lo que Piaget denomina organización, entendida ésta como un sistema de relaciones que se estructuran de manera coherente y que permiten los procesos de adaptación. La organización está estrechamente relacionada con el concepto de esquema al cual se refiere como "una estructura mental que puede ser transmitida y generalizada", es decir, un

---

o refutar esas conjeturas; dar explicaciones coherentes; proponer interpretaciones dar respuestas posibles que pueden ser adoptadas o rechazadas con argumentos y razones.

esquema es un conjunto de operaciones que suceden en la mente en el cual se obtiene como resultado la elaboración de una estructura coherente, en este sentido puede decirse que el razonamiento es entendido como una actividad mental encargada de procesar la información (Balacheff, 2000), el cual hace parte de la construcción y del refinamiento de las estructuras y de los esquemas.

Mientras que en el marco de los Estándares curriculares de matemáticas se define la comprensión desde la teoría de Enseñanza para la Comprensión de Perkins y Blythe; afirmando “la comprensión se entiende explícitamente como relacionada con los desempeños de comprensión, que son actuaciones, actividades, tareas y proyectos en los cuales se muestra la comprensión adquirida y se consolida y profundiza la misma” (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

1.3.2 La teoría de enseñanza para la comprensión.

Ampliando los aportes que hace el marco de Enseñanza para la Comprensión (EPC) a la enseñanza de la matemática, deben tenerse en cuenta los niveles y las dimensiones de la comprensión, la teoría plantea un enfoque que permite la planeación de las temáticas orientadas y diseñadas para refinar los desempeños de comprensión de los estudiantes. En el presente proceso de investigación solo serán tenidos en cuenta en cuenta los aportes de la teoría que se relacionan con las dimensiones y los niveles de la comprensión.

Según esta teoría la planeación de las sesiones de clase deben plantearse a partir de unos tópicos generativos cuyas características deben ser: la centralidad, la asequibilidad y su relación con otros temas. Estos tópicos deben estar acompañados de unas metas de comprensión que se encargan de darle un enfoque específico a estos, luego se encuentran los desempeños de comprensión que son retos planteados de manera progresiva, sutil y alcanzable, además, deben apoyar las metas de comprensión alcanzadas y deben ser dispuestos desde el principio hasta el final (Perkins y Blythe 1994).

Del mismo modo, se recomienda una valoración diagnóstica continua a través de la retroalimentación, del grupo de pares y la autoevaluación, esto con el fin de hacer reflexiones acerca del proceso de enseñanza.

Como se ha dicho anteriormente, el planteamiento de las dimensiones permite elaborar y diseñar metas de comprensión e hilos conductores. Establecer las dimensiones y los niveles de comprensión en los cuales se encuentran los razonamientos desarrollados por los estudiantes permite diseñar estrategias que conlleven a refinar dichos razonamientos y por ende proponer por parte del maestro un nivel de comprensión avanzado en los estudiantes. A continuación se enuncian las diferentes dimensiones y niveles de comprensión expuestos en la teoría de enseñanza para la comprensión.

1.3.2.1 Dimensiones de la comprensión.

1.3.2.1.1 Dimensión de contenido.

Esta dimensión permite modificar las concepciones iniciales que los estudiantes poseen, en la presente investigación éstas se relacionan con el concepto que poseen acerca de las estructuras multiplicativas y su uso. Dichas concepciones los acercan al conocimiento de los expertos y permiten la creación de redes conceptuales para la refinación del conocimiento. En esta dimensión, el razonamiento cumple un papel fundamental en cuanto se encarga de organizar los contenidos en relación con la teoría, es decir, ordena y establece distintas redes conceptuales.

1.3.2.1.2 Dimensión del método.

En esta dimensión se fomenta el “sano” escepticismo acerca de lo que se conoce, es decir, cuestionar lo que se aprende, evaluar y buscar nuevas fuentes. En esta línea se procura la construcción de métodos confiables que permitan acercamientos a la argumentación racional.. Esta dimensión se encuentra estrechamente relacionada con el razonamiento ya que los procesos de validación planteados por Balacheff (2000) permiten al estudiante inferir si los métodos utilizados para construir afirmaciones y tomar decisiones con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa son debidamente razonados y acertados.

1.3.2.1.3 Dimensión de propósito o praxis.

En palabras de Barrera y León citando a Perkins y Blythe (1994) “se concibe el conocimiento como una herramienta para explicar, interpretar y operar en el mundo” (p.24), en esta dimensión los estudiantes reconocen el verdadero propósito y aplicación de los conocimientos en el mundo real y lo hacen de manera responsable y autónoma. El papel del estudiante otorgado al razonamiento en esta dimensión se evidencia en la construcción de relaciones que permitan establecer conexiones entre la teoría y la práctica, entre la estructura multiplicativa y su aplicación en el contexto real y próximo[4].

1.3.2.1.4 Dimensión de formas de comunicación.

Esta dimensión se enfoca en la manera como el conocimiento es compartido con otros, está relacionada directamente con el uso del lenguaje y de los símbolos en la socialización del conocimiento, teniendo en cuenta el contexto real y los actores a quienes está dirigido. En relación con el razonamiento cabe mencionar dentro de esta dimensión el valor de la explicación como parte del conocimiento compartido, de la socialización, de los procesos y de la información que el estudiante ha procesado en la mente.

Dentro de las dimensiones descritas anteriormente los estudiantes pueden presentar cuatro niveles de comprensión: de ingenuo, de novato, de aprendiz y de maestría. Los niveles de comprensión se relacionan con el razonamiento en la medida en que ambos evolucionan de manera progresiva, por lo tanto cada nivel de comprensión va acompañado de razonamientos cada vez más sofisticados.

1.3.2.2 Niveles de comprensión.

1.3.2.2.1 Comprensión en el Nivel ingenuo.

Este tipo de comprensión se da de manera intuitiva, en este nivel los estudiantes no son capaces de relacionar los conocimientos que trabajan en la escuela con el conocimiento cotidiano. Sus explicaciones no dan cuenta de un proceso de análisis de la información

[4] Es decir en relación con el lugar donde el estudiante se desenvuelve diariamente, la casa, la escuela, el barrio.

coherente y rico en posibilidades. Su razonamiento está enmarcado en las ideas que ha construido en el medio y no solamente a partir de la reflexión. Los procedimientos que se llevan a cabo dentro de la solución del problema que involucra la estructura multiplicativa son realizados de manera automática, la respuesta del estudiante ante la pregunta del por qué es simplemente “porque si” “yo creo que es así” “no sé” “me imaginé” “así me dijo la profe” “yo pensé y me dio”

1.3.2.2.2 Comprensión en el nivel de novatos.

En este nivel los estudiantes empiezan a hacer relaciones entre conceptos disciplinares y describir la naturaleza y objetivos de la construcción del conocimiento. Los razonamientos están fuertemente influenciados por la enseñanza del maestro y los contenidos de los libros de texto, por lo tanto sus explicaciones están marcadas por la repetición mecánica de ambos discursos. Con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa, dentro de esta dimensión los estudiantes realizan procesos algorítmicos casi de manera automática, resuelven con facilidad problemas cuyos planteamientos son similares a los que se han trabajado en la escuela.

1.3.2.2.3 Comprensión en el nivel de aprendiz.

Se demuestran el uso flexible de conceptos o ideas y los desempeños de este nivel se relacionan con los conocimientos disciplinares y la vida cotidiana. Durante la construcción de razonamientos plasmados en las explicaciones, el estudiante es capaz de argumentar procesos y procedimientos utilizando conceptos propios de las matemáticas y experiencias anteriores, es decir, es capaz de fusionar la teoría con la práctica, de relacionar conceptos de la vida diaria y del entorno escolar. Lo que significa que además de trascender los conocimientos previos en relación con los conocimientos matemáticos el estudiante es capaz de vincular problemas de la vida cotidiana en las cuales ha hecho uso de la estructura multiplicativa con los problemas que se proponen en la escuela.

1.3.2.2.4 Comprensión en el nivel de maestría.

En este nivel los estudiantes son integradores, creativos y críticos; además desarrollan habilidades que permiten interpretar y reinterpretar el conocimiento en función de la realidad del contexto. Esta dimensión va acompañada por procesos de razonamiento fundamentados en el quehacer y el saber matemático, que se hacen evidentes a través de la explicación entendida como un proceso personal donde se reflejan los conocimientos y construcciones de cada estudiante.

En la Ilustración 5 se esquematizan las dimensiones y niveles que hacen parte de la teoría de Enseñanza para la Comprensión.

Ilustración 5 Teoría de enseñanza para la comprensión

Según lo dicho anteriormente, la comprensión está ligada a la habilidad de pensar y actuar de manera flexible e innovadora, en problemas diferentes, lo que significa que el estudiante comprende cuando es capaz de argumentar, explicar, representar y aplicar de manera reflexiva y creativa sus conocimientos. En las matemáticas escolares, específicamente en el grado cuarto, se plantea la necesidad del desarrollo de procesos curriculares y actividades que permitan la comprensión del "sentido y significado de las operaciones y de las relaciones entre los números…, dando lugar a la aritmética" (Ministerio de Educación Nacional, 2006).

Como ya se mencionó en el apartado 1.3.1, el razonamiento es un proceso que se encuentra presente en cualquier actividad matemática y la teoría de enseñanza para la comprensión puede ser aplicada en los diferentes campos disciplinares, con el fin de particularizar dicha relación entre ambos (comprensión y procesos de razonamiento) se delimita su estudio al de la estructura multiplicativa, específicamente en la solución de problemas que la involucran, lo que constituye el objeto matemático de esta investigación.

1.3.3 Sobre la estructura multiplicativa.

1.3.3.1 Hans Freudenthal con respecto a la estructura.

Para abordar el concepto de estructura multiplicativa se han tenido en cuenta autores como Freudenthal (1983, 1999) y Vergnaud (1991). Freudenthal (1999) sostiene que las operaciones aritméticas constituyen un medio para organizar los fenómenos de las cantidades, planteando así la relación de los números con la realidad (el número y la realidad interactúan de manera significativa).

Su teoría define que existen términos que preceden a la operación formal como tal, expresiones como: "doble" y "veces", "te lo dije tres veces" (Freudenthal, 1999, p. 108), por lo tanto según el autor los problemas multiplicativos son las que se dan en mayor número de veces de manera espontánea y natural en la vida cotidiana.

Freudenthal (1999) propone el uso de la recta como una estrategia para efectuar multiplicaciones y divisiones (ver Ilustración 6 e Ilustración 7), las operaciones en la recta facilitan el conteo y el reconteo de cantidades, estas operaciones se pueden aplicar por medio de problemas que impliquen el uso de magnitudes de longitud (m, km, entre otros), es decir, plantea que se pueden enlazar el número y la línea. Este planteamiento permite diseñar problemas que involucren el uso de la estructura multiplicativa de manera novedosa donde los estudiantes pueden argumentar y explicar los procesos de razonamiento que han desarrollado para plantear diferentes soluciones.

$4 \times 3 = 12$

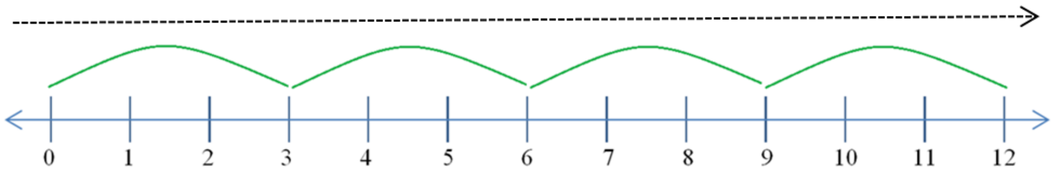


Ilustración 6. Multiplicación con la recta

$12 \div 2 = 6$

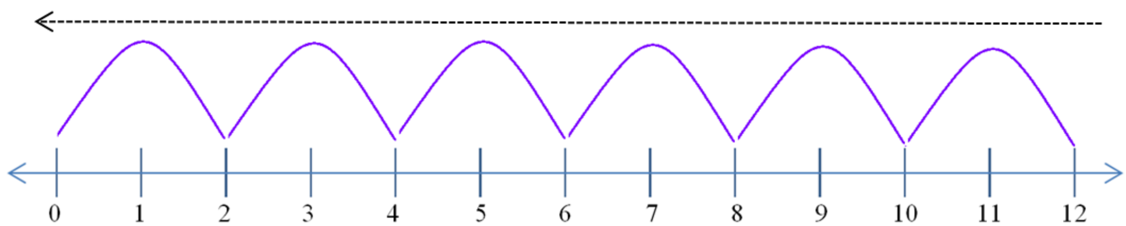


Ilustración 7. División en la recta

Por otro lado, Freudenthal (1999) considera que los automatismos afectan seriamente la capacidad de razonar del estudiante, por ello se requiere de la utilización de fenómenos reales que le permitan generar sus propias reglas y procesos, afirma entonces que los algoritmos no son un fin en sí mismos, sirven para simplificar los procesos de cálculo dentro de las operaciones, de ellos puede decirse que funcionan, así el estudiante los entienda o no. En este sentido se da entonces gran relevancia a la función que constituye el razonamiento como un proceso que le permite al estudiante crear sus propios procedimientos con respecto a la solución de un problema o le permite efectuar una u otra operación.

En consecuencia, con respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las operaciones, Freudenthal (1983) afirma que el uso del ábaco permite a los estudiantes comprender y aclarar el concepto de transformación de las unidades a decenas, a centenas y viceversa. De igual modo, afirma que con su ayuda se pueden realizar cualquiera de las cuatro operaciones. Este aporte permite incluir dentro del proceso de recolección de datos el uso de instrumentos que facilitan a los estudiantes representar la información suministrada en el enunciado que se plantea.

1.3.3.2 Vergnaud y el concepto de estructura multiplicativa.

Por otra parte, Vergnaud (1990) elabora una teoría orientada a establecer relaciones y rupturas entre diferentes campos conceptuales (campos de conocimiento), en este apartado se dará atención al campo conceptual de la estructura multiplicativa, ya que, es el objeto matemático que pretende abordar esta investigación.

La idea de concepto es asumida por Vergnaud, en términos de "conocimiento racional operatorio" (Vergnaud, 1990, p. 2) por tanto, el concepto va más allá de la definición, más allá del significado, en otras palabras, va orientado en términos de la pragmática, pues se trata de dar sentido a través de problemas teóricos o prácticos. En algunos casos los estudiantes podrán utilizar parte de sus repertorios y competencias, en un momento específico del desarrollo, bajo ciertas circunstancias para resolver tales problemas de manera satisfactoria, mientras que en otros casos no.

Por su parte el esquema, es entendido como "*la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dada*"[5] (Vergnaud, 1990, p. 2) en este sentido el esquema permite estudiar la forma como los estudiantes resuelven los diferentes tipos de problemas, los procesos cognitivos que llevan a cabo, los procedimientos y los conocimientos aplicados. El esquema es uno de los conceptos de Vergnaud que más se acerca a la explicación como parte del razonamiento, ya que en una de sus definiciones se concibe el esquema como "una función temporalizada de argumentos, que permite generar una series de acciones diferentes y de recogida de información en función de los valores de las variables de la situación" lo que permite reconocer en el esquema una serie de procesos que ocurren en el razonamiento. Los esquemas son modificados por el estudiante cuando no generan resultados satisfactorios, cuando el esquema empleado para resolver un problema no logra hacerlo.

[5] El texto original lo presenta en letra cursiva.

La articulación y la interacción de estos esquemas conforman una estructura, en el caso de la multiplicativa, y se concibe como “el conjunto de situaciones[6] que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones” (Vergnaud, 1990, p. 8) esta delimitación de la estructura permite realizar una clasificación de los procedimientos y tareas cognitivas que en ella se ponen en juego.

De igual forma, la estructura multiplicativa requiere de un conjunto de conceptos y teoremas que permiten el estudio de dichas situaciones, como es el caso de la proporción simple y proporción múltiple, razón escalar, directa e inversa, función lineal y n-lineal, múltiplo, divisor, fracción, entre otros. De esta forma los esquemas, conceptos y teoremas utilizados dentro de una estructura pueden intervenir en la solución de situaciones propias de otra. Por ejemplo operaciones propias de la estructura aditiva en ocasiones intervienen en la solución de problemas propios de la estructura multiplicativa. A pesar de ello ambas estructuras son completamente distintas.

Esta diferencia se hace evidente en el caso de la estructura multiplicativa y la estructura aditiva, ya que en la primera las relaciones de base no son ternarias sino cuaternarias[7] (ver Ilustración 8), puesto que en los problemas más simples de multiplicación y división se establecen relaciones entre dos tipos de medida cada una con dos cantidades que intervienen (proporción simple de dos variables).

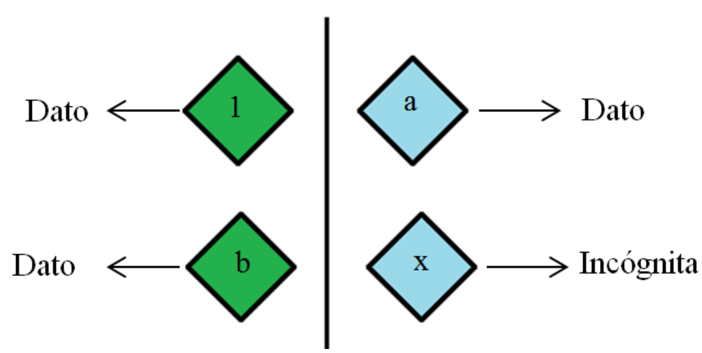


Ilustración 8. Relación cuaternaria de la estructura multiplicativa, según Vergnaud 1990

[6] Vergnaud entiende el término situación como tarea que permite poner en escena conceptos y procedimientos (Vergnaud, 1990, p. 8).
[7] La relación ternaria es aquella que involucra solo tres términos (axb=c), mientras que la cuaternaria requiere el uso de cuatro términos incluyendo generalmente el 1 (axb/1=c.

Teniendo en cuenta dichas relaciones se dan a conocer diferentes tipos de problemas: isomorfismo de medidas, un solo tipo de medida y producto de medidas, a continuación se da a conocer una definición de cada uno.

El *isomorfismo de medidas*, en este tipo de problemas se ponen en juego cuatro cantidades (en los problemas más simples una de las cantidades es uno), este tipo de problema puede caracterizarse en tres clases, según el lugar de la incógnita.

El primero corresponde al tipo de problema que requiere de la multiplicación (ver Ilustración 9) como operación para su solución.

Ejemplo:

En una caja caben 8 lápices. ¿Cuántos lápices caben en 5 cajas?

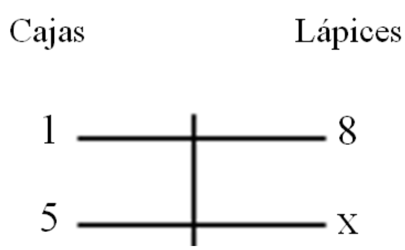


Ilustración 9. Relación cuaternaria de la multiplicación

Seguido, se encuentran aquellos problemas que requieren de una división para su solución, tal y como se observa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Quince paletas cuestas $7500. ¿Cuánto cuesta una paleta?

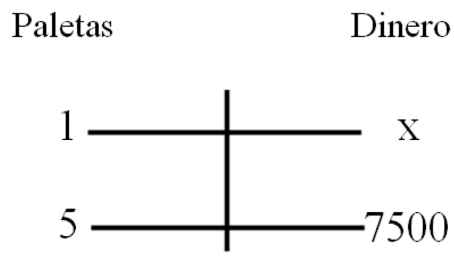


Ilustración 10. División: Búsqueda de valor unitario

En tercer lugar, se encuentra el de división: búsqueda de la cantidad de unidades.

Ejemplo:

Cuatro balones de fútbol tienen una cantidad de masa de 800 g. ¿3200 g corresponde a la masa de cuántos balones de fútbol?

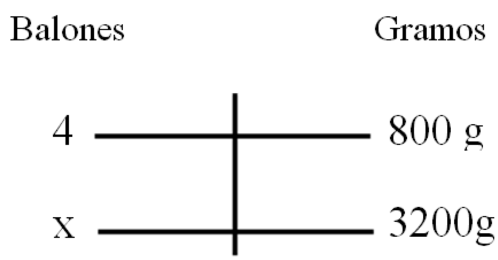


Ilustración 11. División: Búsqueda de la cantidad de unidades.

Luego de abordar los tres subtipos de problemas que corresponden al tipo de problema isomorfismo de medidas da paso a otro tipo de problema *caso de un solo tipo de medidas*, implican una diferenciación entre medida y escalar, "que requieren de un estudio profundo" (Vergnaud, 1991, p. 18), en ellos solo se encuentra una categoría de medidas, donde la correspondencia no se evidencia entre cuatro cantidades sino entre dos y entre dos objetos. Las expesiones tres veces más o menos, se encuentran presentes en este tipo de problemas, los cuales pueden ser representados a través del esquema propuesto en la Ilustración 12.

Ejemplo:

Julian tiene seis años y su abuela tiene 9 veces más la edad de Julian. ¿Cuántos años tiene la abuela?

Ilustración 12. Caso de un solo espacio de medidas

Un tercer tipo de problema propio de la estructura planteado por Vergnaud (1991) es el *producto de medidas*, donde se proponen problemas que requieren el uso de la regla de tres, permitiendo abordar dos clases de problemas:

- Multiplicación: que consiste en encontrar la “medida-producto” (Vergnaud, 1991, p. 19) cuando son conocidas las medidas elementales.
- División: pretende encontrar una de las medidas elementales teniendo conocimiento de la otra y de la medida-producto.

Este tipo de problemas también incluye otras subclases de problemas tales como: producto discreto-discreto, producto continuo-continuo, producto continuo-continuo y noción de medida, lo que indica la multiplicidad existente en las clases de problemas que requieren del uso de una multiplicación o una división para su solución.

Vergnaud (1991), considera que es necesario tener en cuenta la distinción de estos tipos de problema cuando se pretende “ayudar al niño a reconocer la estructura de los problemas y a encontrar el procedimiento que conducirá a su solución” (Vergnaud , 1991, p. 20).

Teniendo en cuenta los aportes expuestos anteriormente se ha elaborado el siguiente esquema (ver Ilustración 13) que sintetiza las categorías expuestas y su relación, teniendo en cuenta los aportes investigativos y teóricos abordados.

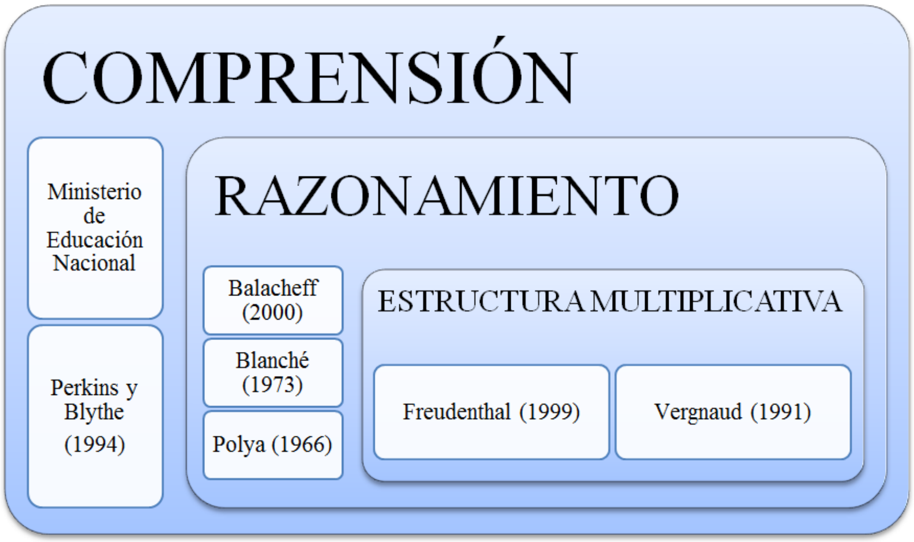


Ilustración 13 Relación entre: Comprensión, razonamiento y estructura multiplicativa

1.4 Formulación del Problema

Antes de formular el problema de investigación se hace necesario abordar las causas que motivaron su planteamiento.

1.4.1 Causa uno: silencio en el aula.

Durante el desarrollo de las prácticas de aula y en conversaciones con los maestros es común encontrarse con afirmaciones como "los estudiantes no entienden las explicaciones" o "es que estos estudiantes no saben resolver problemas, les explico y les explico y no entienden" estas afirmaciones son consecuencia de los procesos que se llevan dentro del aula, generalmente se espera que los estudiantes repitan de manera automática las explicaciones que ha dado el maestro dentro del desarrollo de la clase (dos por seis doce, pongo el dos y llevo una, dos por cinco diez y una que llevaba …) si el estudiante olvida un paso del algoritmo o fracasa en la resolución de una operación o un problema, el maestro infiere que no ha comprendido y por lo tanto dirá: que no lo ha logrado.

En el caso de la enseñanza de las matemáticas dentro de la Educación Primaria se ha notado que los estudiantes durante los tres primeros años de escolaridad, comprenden con facilidad los temas trabajados en el área, podría decirse que a los estudiantes le gusta estudiar matemáticas, pero mientras avanzan en la complejidad de los temas y los problemas alrededor de los mismos, los estudiantes manifiestan “no entiendo nada, esos problemas son muy duros” “lo que me parece más difícil de matemáticas es multiplicar y dividir” en este sentido cabe entonces afirmar que el estudio y la resolución de problemas con ambas operaciones implica un nuevo reto para el estudiante.

Pero estos retos podrán ser afrontados en la medida en que el estudiante descifre la lógica de las operaciones y su aplicación en la vida cotidiana, para que ello ocurra debe ser él quien construya sus propios procesos algorítmicos, sus propios esquemas de procedimiento, sus propios razonamientos. Ello ocurre cuando el maestro en aula de clase escucha sus voces, realiza preguntas acerca del por qué y el cómo, situación que no ocurre en aula según conversaciones llevadas a cabo con los estudiantes, donde aseguran “el profesor explica y explica varias veces lo mismo durante toda la clase, pero a mí se me olvida y no le entiendo” es por ello que se hace necesario conocer sus procesos de razonamiento con respecto a aquellos temas que ellos catalogan como “difíciles” para determinar su niveles y dimensiones de la comprensión, de esta manera el maestro podrá diseñar las estrategias a seguir.

1.4.2 Causa dos: resultados prueba SABER.

El desempeño de los estudiantes de los grados tercero y quinto de la Institución Educativa San José del Citará según los resultados de las pruebas saber de últimos años ha sido bajo, el 86% (ver Ilustración 14) y el 74% (ver Ilustración 15) de los mismos, se ha ubicado en los niveles bajo e insuficiente, lo que evidencia dificultades en el aprendizaje de los conceptos y procesos básicos que se proponen en el área, la Ilustración 14 y la Ilustración 15 presentan el porcentaje de estudiantes ubicados dentro de cada nivel.

Durante el año 2009 los estudiantes del grado quinto en su mayoría son catalogados por en los niveles insuficiente y mínimo de desempeño, lo que significa que 31 de 36 estudiantes resuelve solo aquellos problemas que involucran las situaciones aditivas y que solo 5 resuelven problemas que involucran situaciones aditivas y multiplicativas. Según la descripción de los niveles de desempeño establecidos por el ICFES[8].

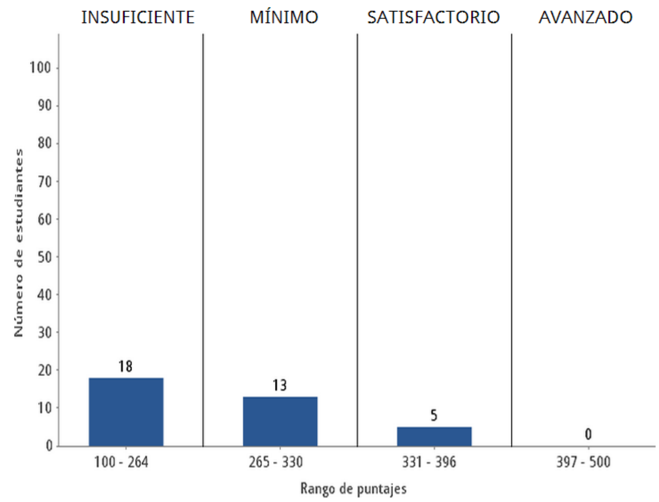


Ilustración 14. Gráfica resultado prueba saber 2009, matemáticas. Tomado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jspx

Tres años después, en el año 2012 los resultados de las pruebas son similares a los del año 2009, 24 de 30 estudiantes se ubican en los niveles insuficiente y mínimo de desempeño lo que permite inferir que 6 alcanzan un nivel satisfactorio, lo que significa que la mayoría de los estudiantes que cursan el quinto grado aún no resuelven problemas que involucran el uso de la estructura multiplicativa. Lo anterior se evidencia en la Ilustración 15

[8] Ver http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jspx

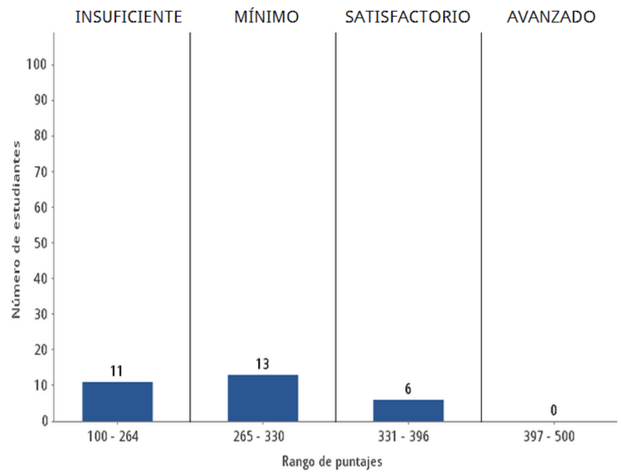


Ilustración 15. Grafica de resultado prueba saber 2012, matemáticas. Tomado de http://www2.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/consultaReporteSedeJornada.jspx

Después de observar el bajo desempeño de los estudiantes en el desarrollo de la prueba se presenta a continuación la ilustración diseñada por el ICFES donde se dan a conocer los desempeños de los estudiantes con respecto a los procesos matemáticos que allí se evalúan, en ella se evidencia que los estudiantes presentan un bajo desempeño en los procesos que tienen que ver con el razonamiento y que en el último año dichos procesos se encuentran cada vez más bajos, encontrándose muy débil el proceso de razonamiento de los estudiantes en comparación con los resultados de los demás establecimientos educativos con promedios similares en el área y grado (ver Ilustración 15).

Igualmente se hace necesario precisar que además de publicar los resultados sobre los niveles de desempeño de los estudiantes, el ICFES ha presentado los resultados de la institución con respecto a las tendencias de los estudiantes del grado quinto con respecto a tres de los cinco procesos que se plantean en los lineamientos curriculares de matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 1998). Dichos resultados permiten visualizar que los procesos de razonamiento de los estudiantes tienden a ser cada vez más bajos. (ver Ilustración 16 e Ilustración 17)

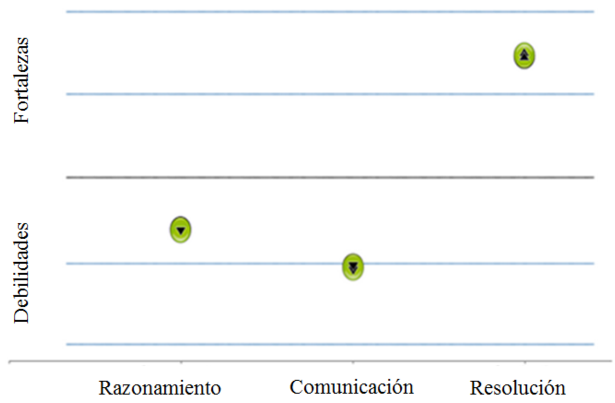


Ilustración 16. Evaluación de procesos matemáticos 2009

La ilustración anterior permite inferir que los estudiantes presentan debilidades en los procesos de argumentación y formas de comunicación, asimismo se observan fortalezas en el proceso de resolución de problemas durante el desarrollo de la prueba en el año 2009.

Paradójicamente en el año 2012 los estudiantes presentaron dificultades en el proceso de resolución de problemas acompañado de los débiles procesos de razonamiento, convirtiéndose esto en una constante, mientras que sus procesos de formas de comunicación tienden a fortalecerse. Ello se evidencia en la Ilustración 17

Ilustración 17. Evaluación de procesos matemáticos 2012

Teniendo en cuenta la información anterior, se argumenta la necesidad de realizar un estudio que tenga en cuenta la descripción de dichos procesos en los estudiantes.

1.4.3 Causa tres: los libros de texto.

A continuación, se presenta el análisis de libros de texto usados por los maestros de cuarto grado en la preparación de sus clases, allí se reflexiona acerca de la orientación que tienen estos libros hacia la estimulación y la promoción de los procesos de razonamiento en los estudiantes.

Nombre del libro: Estrategias en matemáticas 4.
Editorial: libros y libros S.A
Año:

Nombre del libro: Interactivo matemáticas 4
Autor: Editorial Santillana.
Año: 2011.

Nombre de la cartilla: Matemáticas 4
Autor: Ministerio de Educación Nacional.
Año: 2010.

Ilustración 18. Textos abordados para el análisis

En la Tabla 1 se presenta un cuadro comparativo sobre los elementos que hacen parte del razonamiento y que se encuentran presentes en los libros de texto, al igual que aquellas características que excluyen tales procesos.

Libros analizados	Elementos que aportan al razonamiento	Elementos que excluyen el razonamiento
Estrategias en matemáticas 4	Promueve la búsqueda de soluciones propias. Se incluye el razonamiento como competencia básica.	Reproducción de contenidos. Procedimientos mecánicos y automáticos.
Interactivo matemáticas 4	Propone logros relacionados indirectamente con el razonamiento.	Deja de lado los procesos matemáticos, entre ellos el razonamiento.
Matemáticas 4	Plantea la elaboración de procedimientos propios.	No incluye la argumentación y la elaboración de conjeturas.

Tabla 1. Comparativo libros de matemáticas 4°.

Se debe comentar que para el presente trabajo si bien se tuvo como soporte las situaciones planteadas por los textos anteriormente citados, es pretensión del trabajo proponer situaciones que suplan los vacíos que proponen en relación con el razonamiento y la comprensión matemática.

Por las razones expuestas anteriormente, se pretende abordar la comprensión y los procesos de razonamiento desde los planteamientos contenidos en los Estándares de matemáticas, siendo el propósito de este trabajo estudiar tanto la evolución de procesos de razonamiento como los niveles y dimensiones de la comprensión en el campo aritmético y apuntado a la resolución de las causas planteadas en el problema de investigación.

La investigación propone la solución de problemas que involucran estructuras de tipo multiplicativo en cuarto grado de Educación Básica Primaria como un medio para reconocer y describir tales procesos. Por lo tanto la pregunta que orienta este trabajo es: ¿Cómo son los procesos de razonamiento, los niveles y las dimensiones de comprensión de los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria al resolver problemas asociados a las estructuras multiplicativas?

1.5 Objetivos de la Investigación

1.5.1 Objetivo general.

Interpretar procesos de razonamiento, niveles y dimensiones de comprensión en los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria, al resolver problemas asociados a las estructuras multiplicativas.

1.5.2 Objetivos específicos.

Analizar el contenido de las explicaciones escritas y verbales dadas por los estudiantes del grado cuarto con el fin de describir los procesos de razonamiento.

Clasificar los diferentes razonamientos de los estudiantes en dimensiones y niveles de la comprensión identificando posibles evoluciones.

Establecer contrastes entre las formas de razonamiento y las dimensiones y niveles de la comprensión con el propósito de establecer posibles relaciones entre ambos procesos durante la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa.

Capítulo 2: Estudio del Objeto Matemático

Epistemología del Concepto de Estructura Multiplicativa

"Aquel que desdeña los inicios de la matemática, es como el hombre que al regresar de tierras extrañas menosprecia su casa"

H.G. Forder (1984)

El presente capítulo pretende dar una mirada epistemológica del concepto de estructura multiplicativa, siendo éste el objeto matemático abordado en la presente investigación. Para ello se tienen en cuenta características como: desarrollo histórico, aspectos matemáticos y aplicaciones; ello, podrá enriquecer los procesos de aprendizaje que ocurren en el aula puesto que se pueden imprimir en diferentes alternativas pedagógicas y enriquecer las concepciones del maestro.

El concepto de estructura multiplicativa no tiene como origen una única historia, podría decirse más bien, que existen algunas historias que se producen en tiempos similares en distintas culturas, es natural que esto suceda debido a la necesidad que surge en el contexto de utilizar y de crear distintos sistemas de conteo, de solucionar problemas prácticos propios de las matemáticas y de otros que requieren el uso de éstas de manera implícita. Tales evoluciones históricas se presentan especialmente en cuatro grandes civilizaciones, Babilonia, Egipto, India y China.

2.1 La Estructura Multiplicativa: un Recorrido Histórico

2.1.1 En la antigua Babilonia.

Los Babilonios en el año 2100-2000 a.C eran grandes aventajados en los negocios de intercambio (Brito, 1891), este consistente movimiento comercial hizo de los babilonios un pueblo desarrollado en el dominio del cálculo, de ahí que para la sistematización de sus cuentas realizaron en tablas de arcilla fundidas o quemadas al sol figuras cilíndricas, delgadas y gruesas que más adelante adoptaron la forma de triángulo. Las matemáticas de la antigua Babilonia tenían su origen especialmente en las cuentas diarias: préstamos, contratos, entre otras actividades de la vida cotidiana que requerían el uso del conteo. En la Ilustración 19 se presenta el mapa de lo que constituía la antigua Babilonia en aquel entonces.

Ilustración 19. Mapa de la antigua Babilonia. Tomado de http://www.proyectosalonhogar.com/Civilizaciones/Civ_Mesop.htm

Su sistema de conteo era sexagesimal, es decir, en base sesenta; y como eran grandes astrónomos bautizaron las doce constelaciones del zodiaco dividiendo cada una de ellas en 30 partes iguales (12 x 30 = 360), lo que dio como resultado la división de la circunferencia en 360 grados, de ellos heredamos entonces la división de una hora en sesenta minutos y un minuto en sesenta segundos (Boyer, 1987, p. 31).

Se puede inferir entonces que una primera posible aproximación a la idea de división que surgió para los babilonios fue cuando decidieron dividir el día en veinticuatro horas, una hora en sesenta minutos y un minuto en sesenta segundos.

Para resolver problemas que involucraran el uso de la división éstos definieron la siguiente fórmula (ver Ilustración **20**).

$$\frac{a}{b} = a\ \frac{1}{b}$$

Ilustración 20.Fórmula Babilonia para la división

Para desarrollar esta ecuación en Babilonia se crearon tablas de arcilla con números recíprocos que alcanzaron hasta números de miles de millones, tablas que aún se conservan en el museo Británico de Londres.

Por otro lado, para multiplicar los babilonios utilizaban unas tablas previamente construidas en plantillas de barro más resistentes que el papiro, allí estaban consignados los cuadrados necesarios para multiplicar. La fórmula[9] que emplearon se presenta en la Ilustración 21.

$$\boldsymbol{a.b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}}$$

Ilustración 21. Fórmula de la multiplicación Babilonia

[9] Se hace necesario aclarar que la presente investigación pretende abordar el estudio de la comprensión a través de los procesos de razonamiento no de los procedimientos.

Otra forma representar esta fórmula es (ver Ilustración 22).

$$a.b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Ilustración 22. Fórmula dos de multiplicación Babilonia

Ejemplo, multiplicar 16 x 14 con la segunda fórmula

Entonces, $16.14 = \frac{(16+14)^2}{4} - \frac{(16-14)^2}{4}$

Por lo tanto: $16.14 = \frac{(30)^2}{4} - \frac{(2)^2}{4}$

Esto es, $16.14 = \frac{900}{4} - \frac{4}{4}$

Finalmente… $16.14 = 224$

Como se puede observar los babilonios crearon un método de multiplicación a través del uso de los cuadrados. Lo que evidencia que a pesar de ser un método de solución no convencional y quizá más complejo que el que se usa en la actualidad, es igualmente efectivo, ya que indistintamente que se empleen una serie de razonamientos, en épocas y circunstancias diferentes; el resultado es el similar.

2.1.2 En el antiguo Egipto.

Los egipcios utilizaban un método que era descomponer la multiplicación en una serie de sumas abreviadas, duplicando cada vez el multiplicando; mientras que del multiplicador al mismo tiempo, hallaba su mitad (Boyer, 1987, p. 55) por tanto, este método no necesitaba precisamente el uso de las tablas ya que se basaba solo en sumas y duplicaciones, como se observa en la Tabla 2 y Tabla 3, por ejemplo:

Multiplicar **123 x 21**

Se escriben los números a multiplicar de forma horizontal

21 **123**

El multiplicador se divide por dos y el multiplicando se duplica, así.

Multiplicador	Multiplicando
21	123
10	246
5	492
2	984
1	1.968

Tabla 2. Ejemplo método de multiplicación egipcia

Se tachan las líneas donde el multiplicador es par y finalmente se suman los productos impares.

Multiplicador	Multiplicando
21	123
10	246
~~5~~	~~492~~
2	984
~~1~~	~~1.968~~
	2.583

Tabla 3. Segunda parte ejemplo método de multiplicación Egipcia

Por lo visto en este apartado puede asegurarse que la aritmética egipcia se basa en dos operaciones fundamentales, la división y la multiplicación por dos, por ello la división es una operación similar a la multiplicación donde se busca a través del doblamiento, el número de veces que se debe aumentar el divisor para obtener el dividendo (Boyer, 1987, p. 58).

Obviamente este método tampoco requiere del uso de las tablas de multiplicar, pero si deja ver claramente que la división consiste en ver cuántas veces, cabe un número en el otro. Tal y como se presenta en la Tabla 4

Dividendo 24	Divisor 3
1	3
2	6
4	12
8	24

Tabla 4. Ejemplo método de división Egipcia

En la actualidad se puede observar durante el desarrollo de la clase de matemáticas que los estudiantes utilizan un método similar para resolver problemas aritméticos del contexto, como por ejemplo al resolver la pregunta:

¿Cuántas chocolatinas de $300 puedes comprar con $1.500?

Al realizar preguntas de este tipo, algunos estudiantes del grado cuarto de la básica primaria empiezan a realizar los siguientes razonamientos: “una vale $300, dos valen $600, $900, $1.200, $1500” (llevan la cuenta del cociente en sus dedos) y al final dice: “puedo comprar 5 chocolatinas”.

En el ejemplo anterior puede observarse que los estudiantes procuran encontrar cuántas veces está el divisor en el cociente, similar al método de división egipcio, en lugar de efectuar algoritmos mecanizados o basarse en el recuento de las tablas de multiplicar. En algunos casos los estudiantes a pesar de hallar la respuesta correcta no son conscientes de la operación que han efectuado para llegar a la respuesta.

Es de resaltar que cada cultura ha desarrollado de manera efectiva diferentes métodos de resolución de las estructuras multiplicativas y aunque hoy día se comparte un leguaje matemático generalizado gracias a los axiomas y teoremas existentes; las matemáticas son concebidas como una construcción social, coexisten en armonía con el hombre y en determinados momentos históricos. Por lo tanto ha de ser considerada y respetada dentro del desarrollo de cada cultura.

2.1.3 Los aportes atribuidos a la India.

La matemática hindú tuvo su apogeo especialmente en los años 500-1200 después de Cristo, una de sus contribuciones fue la multiplicación por celdillas, celosías o cuadriláteros y la división por el método de galera, de igual forma algunos investigadores (Sánchez, 1998) atribuyen a esta civilización la creación del sistema decimal que actualmente es el idioma universal de las matemáticas.

En la India, la multiplicación se hacía de manera similar a como lo hacemos ahora, solo que ellos decidieron tener en cuenta las unidades y ejecutaban la operación de izquierda a derecha, para ello utilizaban tablas cubiertas de cal o harina que podían ser borradas y utilizadas de nuevo, como un tablero antiguo.

En la actualidad algunos maestros utilizan este método para evolucionar la comprensión de aquellos estudiantes que aún no identifican el valor de las unidades dentro de la operación. Para facilitar la comprensión del método de multiplicación hindú se hace necesario aplicar un ejemplo:

Multipliquemos, 348 x 432

Paso uno: se ubica el multiplicador en al lado izquierdo de la cuadrícula, colocando los dígitos de abajo hacia arriba (como se puede observar en la Ilustración 23) y el multiplicando en la parte superior de las cuadrículas de izquierda a derecha.

Dentro de las cuadrículas se coloca el valor resultante de multiplicar cada multiplicando por cada uno de los multiplicadores.

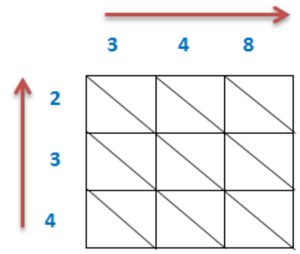


Ilustración 23. Método de multiplicación hindú, paso 1

Paso dos (ver Ilustración 24) se ubica cada uno de los factores dentro de las cuadrículas teniendo en cuenta la posición horizontal y vertical de los factores.

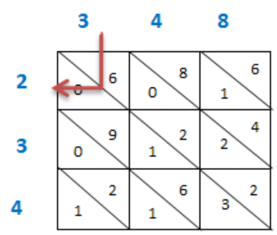


Ilustración 24. Método de multiplicación hindú, paso 2

Paso tres: se suman los números y las filas de manera transversal, como se indica en la Ilustración 25

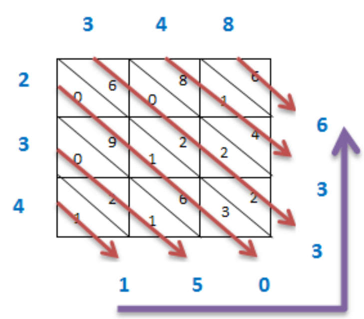


Ilustración 25. Método de multiplicación Hindú, paso 3

El resultado se lee entonces de izquierda a derecha, así:

348 x 432 = 150.336

Se puede inferir desde el ejemplo que la multiplicación por celdillas permite al estudiante omitir el trabajo mental de llevar las unidades mientras se efectúa la operación, sin embargo, este proceso no puede evitarse durante la suma.

Por otro lado, el método galera o de división larga se le atribuye a los hindúes, y se le otorga este nombre debido a que durante la organización de los números, éstos asumen la forma de un barco con sus velas extendidas (Barros y Bravo, 2011), este tipo de división era popular en su época ya que fue considerado fácil de aplicar (ver Ilustración 26) en este punto hay que tener en cuenta que antiguamente quien era capaz de dividir se consideraba un sabio.

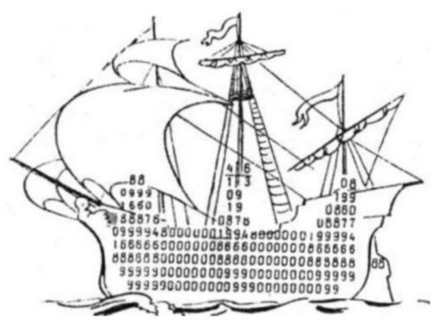


Ilustración 26. Método de división galera atribuido a los hindús. Recuperado de http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/pdf/Aritmetica%20recreativa%20-%20Yakov%20Perelman.pdf

Este método es similar al que utilizamos en nuestros días, se diferencia en el orden de los números, puede observarse (ver Ilustración 26) que el dividendo aparece en el centro, las diferencias se colocan encima de los minuendos y no debajo ya que las restas se efectúan cancelando los dígitos, y el resto aparece en la parte superior derecha y no en la inferior como se acostumbra actualmente (Risco, 2000, p. 54).

2.1.4 Los aportes de China.

El bambú es propio de la cultura china, en este sentido es lógico que ellos hubiesen utilizado este material para realizar sus conteos con dichas varitas, algunas de éstas se disponen en forma horizontal siendo correspondientes al multiplicando y otras en forma vertical adjudicadas al multiplicador, tal y como se presenta en la Ilustración 27**.**

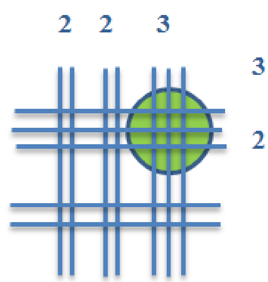


Ilustración 27. Organización baritas de bambú en China

Luego, se cuentan las intersecciones que se forman al unirse las varas horizontales y verticales y se escribe el total de los resultados de manera transversal (ver Ilustración 28).

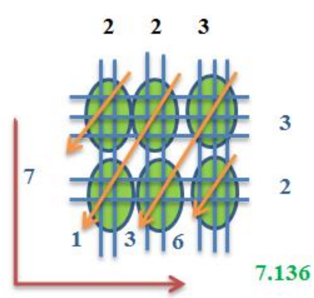


Ilustración 28. Método de multiplicación China

Este método de multiplicación no requiere de la memorización de las tablas de multiplicar, de igual forma puede observarse que en el desarrollo de dicho algoritmo se coloca en evidencia la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma suma.

a. 223 (30+2) = 223 x 30 + 223 x 2

b. (200 + 20 + 3) 30 + (200 + 20 + 3) 2 = 200 x 30 + 20 x 30 + 3 x 30 + 200 x 2 + 20 x 2 + 3 x 2

= 6000 + 600+ 90 + 400 + 40 + 6

= 7136

De esta forma aunque el método Chino para multiplicar parece sencillo, en realidad involucra una serie de propiedades que no se perciben a simple vista.

Continuando con las contribuciones atribuidas a los chinos para el estudio de las matemáticas, especialmente para efectuar y resolver operaciones básicas, ha sido la creación del ábaco (ver Ilustración 29), este recurso didáctico logró revolucionar el mundo de las matemáticas.

Ilustración 29. Ábaco antiguo[10]

La multiplicación con el ábaco se realiza de izquierda a derecha e inicialmente se separan las unidades indicando el número de veces que se señala en el multiplicador, luego se continúa el mismo proceso con las decenas, y así sucesivamente; la división considerada como la operación inversa de la multiplicación implica disminuir el número de fichas tantas veces como lo indique el divisor y así hallar el resultado del cociente.

[10] Tomado de http://peqe-2.blogspot.com/2010/04/la-evolucion-en-el-procesamiento-de.html

El ábaco permite al estudiante realizar de manera concreta los procedimientos que se llevan a cabo para la solución de las operaciones, esto es, con la ayuda de este instrumento se hacen visibles procedimientos de tipo mental, lo que permite crear una imagen de cada uno de los procesos que se realizan durante la ejecución de los algoritmos en una multiplicación o una división.

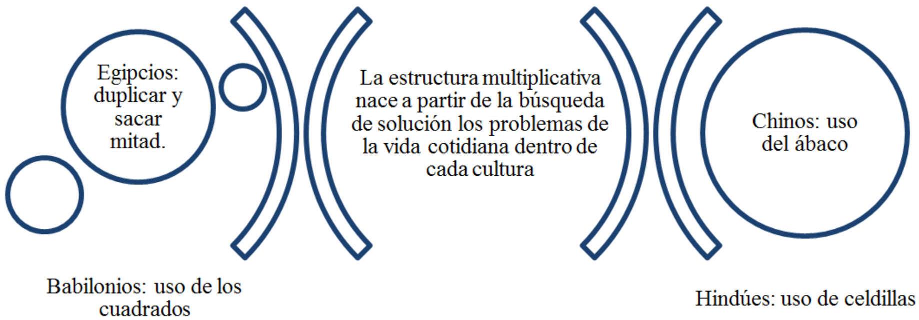


Ilustración 30. Origen de la estructura multiplicativa

2.2 Aspectos matemáticos de las estructuras multiplicativas

2.2.1 En palabras de Gerard Vergnaud.

En el contexto de la Educación Matemática, Vergnaud (1991) define las estructuras multiplicativas a partir de la teoría de los campos conceptuales, esta teoría tiene como objeto de estudio las actividades cognitivas complejas, se trata de una teoría del concepto que permite localizar y estudiar las filiaciones y rupturas que se dan en el aprendizaje.

Esta teoría tiene en cuenta las características internas que se activan durante la construcción del aprendizaje, además de los aspectos que se explicitan durante el mismo, es decir, establece relaciones entre significados y significantes (Vergnaud, 1981).

De igual manera, esta teoría plantea que un concepto no puede ser reducido simplemente a su definición o a la aplicación automática de los algoritmos, “el conocimiento racional es operatorio o no es conocimiento” (Vergnaud, 1981, p. 53), en este sentido es claro que a través del planteamiento de problemas que incluyen situaciones multiplicativas es como se da sentido a los conceptos que pretenden ser trabajados con los estudiantes.

Por lo tanto, surge el concepto de estructura multiplicativa, como el conjunto de situaciones que requieren de una multiplicación o una división, o una combinación de tales operaciones, también se incluyen los conceptos y teoremas que permiten sus soluciones.

Con respecto al análisis de las estructuras multiplicativas es completamente diferente al de las estructuras aditivas, las relaciones de base más simples no son ternarias[11], son cuaternarias[12], lo que significa que, hasta los problemas más simples de multiplicación y de división requieren de la proporción simple de dos variables una en relación a la otra.

Las relaciones expuestas anteriormente, permiten entonces plantear diferentes tipos de problemas. Dichos problemas presentan mayor o menor grado de dificultad según los valores numéricos (por ejemplo para multiplicar y dividir decimales, exclusivamente si estos son menores que uno) y según la experiencia directa de los estudiantes con este tipo de situaciones, dicha experiencia le proporcionará mayor o menor bagaje conceptual, aportando considerables herramientas durante la solución de problemas que incluyen tales situaciones multiplicativas.

Vergnaud (1981, p. 58) plantea entonces que las estructuras multiplicativas son fáciles de comprender si lo estudiantes pueden aplicarlas a situaciones reales.

2.2.2 Concepto de multiplicación y división según Freudenthal.

Para Freudenthal (1999) el mundo de los fenómenos puede organizarse a través de estructuras, los conceptos y las ideas matemáticas. El fenómeno de la cantidad, por ejemplo, es organizado a través del uso de los números, donde tiene cabida la estructura multiplicativa como parte que compone y ramifica ese extenso mundo de los números.

---

[11] Las relaciones ternarias son aquellas de tipo $a \times b = c$ en ella intervienen tres cantidades, donde una de ellas es el producto de las otras.
[12] Las relaciones cuaternarias son de la forma $a/b = c/d$ en la cual se relacionan cuatro cantidades.

En esta misma línea, Freudenthal en palabras de Godino (2002) pone de relieve la necesidad de plantear “situaciones problema que inducen a la actividad matemática, al desarrollo de maneras de actuar, que en una fase posterior se regularan mediante el discurso teórico correspondiente” (p. 26), en este sentido se propone como idea fundamental la necesidad de proponer problemas que estimulan al estudiante a la utilización de la estructura multiplicativa en sitiaciones reales, conocidas y desconocidas.

Teniendo en cuenta estas perspectivas, a continuacion se expone la definición del concepto de estructura multiplicativa según Freudenthal (1999) teniendo en cuenta que está compuesta por las operaciones: multiplicación y división.

2.2.2.1 La multiplicación.

Para Freudenthal (1999) la multiplicación es más que una suma repetida, así:

$m.n$

De igual modo, se afirma que la estructura multiplicativa es un conjunto de relaciones y que se puede expresar mediante la siguiente fórmula:

$a.b = c$ Y su inversa $c: b = a$

Complementadas con $a.b.c = d$ y $a.b = d: c$

Además define las propiedades de la multiplicación: asociativa, conmutativa, distributiva y de equivalencia.

Asociativa: Si a, b, c son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Por ejemplo:

$(3 \cdot 5) \cdot 2 = 15 \cdot 2 = 30$

3 · (5 · 2) = 3 · 10 = 30

Los resultados coinciden, es decir,

(3 · 5) · 2 = 3 · (5 · 2)

Conmutativa: Si a, b son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Por ejemplo:

5 · 8 = 8 · 5 = 40

Distributiva del producto respecto de la suma: Si a, b, c son números naturales cualesquiera se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por ejemplo:

5 · (3 + 8) = 5 · 11 = 55

5 · 3 + 5 · 8 = 15 + 40 = 55

Los resultados coinciden, es decir,

5 · (3 + 8) = 5 · 3 + 5 · 8

En cuanto a las dificultades que pueden notarse durante la construcción de estructuras multiplicativas se dice que es complicado para el estudiante establecer la relación entre la multiplicación y su operación inversa, la división, además del uso de las tablas de multiplicar en la ejecución de ambas operaciones.

Finalmente la equivalencia es expresada así:

$$a. b = c \ y \ c: b = a$$

Ejemplo:

$6.5 = 30$ y $30:5 = 6$

De igual forma Freudenthal (1999) presenta algunas formas de representar gráficamente estas propiedades (ver Ilustración 31).

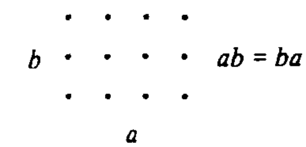


Fig. 20.

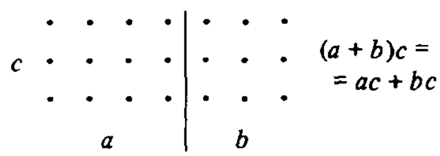


Ilustración 31. Propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación[13]

2.2.2.2 La división.

Para Freudenthal (1999) la división es un acto mental, esto se debe a que la relación entre división y multiplicación es más complicada que la existente entre la suma y la resta, dividir entonces distribuir en partes iguales, es invertir una multiplicación, el resto de la operación debe ser menor que el divisor.

Distribuir pequeñas partes por igual se da como en la multiplicación de modo intuitivo, para resolver con éxito una división se considera importante el dominio de las tablas de multiplicar.

A diferencia de la multiplicación, la división es una operación única en la cual es necesario seguir una serie de algoritmos para hallar correctamente el resultado, Freudenthal (1999) asegura que estas programaciones son fáciles de hacer en una computadora, pero el hombre no es una computadora, estos automatismos afectan seriamente la capacidad de

[13] Presentado por Freudenthal (1999, p.110).

razonamiento y de comprensión del estudiante, por ello se requiere de la utilización de fenómenos reales que le permitan al estudiante generar sus propias reglas y procesos, asimismo Freudenthal (1999) afirma entonces que los algoritmos no son un fin en sí mismos, éstos sirven para simplificar los procesos de cálculo dentro de las operaciones, de ellos puede decirse que funcionan así el estudiante los comprenda o no.

Finalmente, con respecto a la enseñanza y al aprendizaje de las operaciones, Freudenthal (1999) afirma que el uso del ábaco permite a los estudiantes comprender el concepto de transformación de las unidades a decenas, a centenas y viceversa. De igual modo afirma que con su ayuda se pueden realizar cualquiera de las cuatro operaciones.

2.3 Las Estructuras Multiplicativas en el Contexto Educativo Actual de Colombia.

En Colombia existen unos referentes diseñados para orientar la enseñanza de las matemáticas en cada uno de los grados tanto en la Educación Básica como en la Media, dichos referentes están compuestos por Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998) y Estándares Curriculares de matemáticas (2006), los primeros presentan los referentes teóricos y los conceptuales desde los cuales se percibe y se contempla la enseñanza de la matemática en Colombia y los segundos establecen una serie de indicadores y de parámetros que pretenden alcanzarse en cada uno de los ciclos de enseñanza.

2.3.1 La voz de los lineamientos curriculares de matemáticas.

En los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1996) se plantea la necesidad de desarrollar habilidades de pensamiento en los estudiantes, además de aplicar algoritmos y definir conceptos, se pretende dar paso al desarrollo de cinco procesos (formas de comunicación, formulación y ejercitación de procedimientos, resolución de problemas, modelación y razonamiento) que permiten la movilización del pensamiento[14].

De igual forma, el desarrollo de dichos procesos matemáticos está transversalmente acompañado por cinco pensamientos matemáticos a desarrollar durante el transcurso de

[14] El pensamiento es entendido como una actividad propia del intelecto donde ocurren diversos procesos mentales entre ellos el razonamiento y la comprensión.

toda la Educación Básica Primaria y Secundaria bajo el abordaje de los sistemas, entendidos como "distintas regiones de las matemáticas, los números, la geometría, las medidas, los datos estadísticos, la lógica y los conjuntos desde una perspectiva sistémica que los comprende como totalidades estructuradas, con sus elementos, sus operaciones y sus relaciones" (Ministerio de Educación Nacional, 1996, p. 6) es por ello que se denominan: pensamiento numérico y sistemas numéricos, pensamiento métrico y sistemas de medida, pensamiento aleatorio y sistemas de datos, pensamiento variacional y sistemas algebraicos, pensamiento espacial y sistemas geométricos; sin embargo, a pesar de existir una estrecha relación entre cada tipo de pensamiento y el sistema al que se asocia, se ha planteado que los sitemas son transversales al desarrollo de los cinco pensamientos.

La estructura multiplicativa permea cada uno de estos cinco pensamientos con sus respectivos sistemas, sin embargo, se encuentra especialmente adscrita al pensamiento numérico y sistemas numéricos, puesto que allí se propone como aspecto fundamental dentro de este pensamiento "la comprensión de los distintos significados y aplicaciones de las operaciones en diversos universos numéricos" (Ministerio de Educación Nacional, 1996, p. 17) y, al hablar de las operaciones se incluyen la multiplicación y la división, operaciones propias de la estructura multiplicativa.

En los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1996) consideran que una gran parte de la Educación Básica Primaria se dedica a la "comprensión del concepto de las operaciones fundamentales de adición, sustración, *multiplicación y división*[15] entre números natuarales" (Ministerio de Educación Nacional, 1996, p. 30) asegurando que la multiplicación y la división se le dificultan en mayor grado al estudiante, debido a su estructura y a la asociación de cada uno de los elementos de un conjunto, con los elementos de otro subconjunto, tal y como se refleja en la Ilustración 32, igualmente se plantean una serie de tipos de problema propios de la estructura multiplicativa.

Para la multiplicación se mencionan los problemas de tipo: factor multiplicante, adición repetida, razón y producto cartesiano, para la división se proponen dos tipos de

[15] Énfasis añadido.

problemas “más usuales”, materializados en las acciónes de repartir y agrupar. (Ministerio de Educación Nacional, 1996, p. 33).

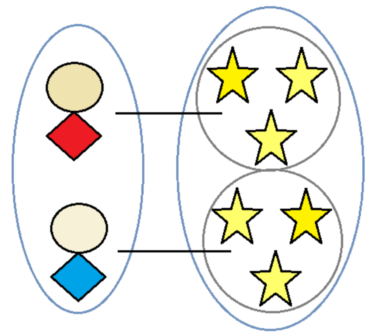


Ilustración 32. Asociación de elementos de un conjunto y de los elementos de un subconjunto en las operaciones de la estructura multiplicativa

Además de proponer diferentes tipos de problemas para abordar la estructura multiplicativa, los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1996) aseguran que es necesario trabajar ambas operaciones incluyendo no solo el uso de los números naturales sino también el uso de los racionales, al igual que la exploración de diferentes modelos “para que los estudiantes vean tanto el poder de un modelo como de sus limitaciones” (p. 34).

2.3.2 ¿Qué dicen los Estándares Curriculares de matemáticas?

Los Estándares Curriculares (2006) materializan los planteamientos y las conceptualizaciones propuestas en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1996) al contexto del aula de clase, a través de una serie de indicadores e ítems de evaluación diseñados por ciclos de enseñanza. Éstos se diseñan teniendo en cuenta “el uso y el significado de las operaciones y de las relaciones entre números, y el desarrollo de diferentes técnicas del cálculo y la estimación” (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 58). Proponiendo entonces un aprendizaje a a partir de la solución de problemas y las caracteríticas propias de cada contexto.

- Resuelvo y formulo problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.

- Interpreto las fracciones en diferentes contextos, situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones.
- Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.
- Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa, inversa y producto de medidas.
- Identifico la potenciación y la radicación en contextos matemáticos y no matemáticos.
- Uso diversas estrategias de cálculo y de estimación para resolver problemas en situaciones aditivas y multiplicativas. (p. 82).

Con respecto a lo anterior, cabe anotar que la estructura multiplicativa es un aspecto matemático que se encuentra presente dentro de los referentes de calidad propuestos por el estado colombiano con respecto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esta mirada hace parte de un proceso que ha ocurrido con el pasar de los años en diferentes culturas, teniendo en cuenta cada una de sus necesidades y sus razonamientos y concepciones propias acerca de la estructura multiplicativa.

Capítulo 3: Marco Teórico

Razonamiento y Comprensión: Convergencias y Divergencias

“Lo que los estudiantes responden no sólo demuestra su nivel de comprensión actual sino que lo más probable es que los haga avanzar”

David Perkins (1999)

Después de presentar en el capítulo anterior un recorrido epistemológico y evolutivo a la estructura multiplicativa como concepto matemático, se hace necesario dar una mirada integradora a las dos grandes categorías que motivaron la esencia y el desarrollo del presente trabajo de investigación: razonamiento y comprensión.

En el presente capítulo se pretenden desarrollar y articular ambas categorías a partir de los referentes teóricos. Para ello, se abordan comprensión y razonamiento según los aportes de la teoría de la enseñanza para la comprensión (Wiske, 1999) y de la teoría de Balacheff (2000), posteriormente, se explicita el origen de dichos postulados y se hacen evidentes los aportes de Piaget como referente de ambos autores. Acto seguido, se expone la manera cómo ambos procesos se hacen presentes dentro del aula de clase, luego de ello, se articulan cada una de las dimensiones de la comprensión con respecto a la explicación como categoría de validez y, finalmente, se abordan los niveles de la comprensión con respecto a la explicación.

3.1 El Razonamiento Como Parte del Proceso de Comprensión

La teoría de la enseñanza para la comprensión sugiere tres componentes: el conocimiento, la habilidad y la comprensión, como el material que se intercambia constantemente en el contexto educativo (Perkins, 1999). Con relación a esto, puede decirse que el razonamiento es un proceso transversal que los permea. A continuación se ampliará dicha idea.

En dicha teoría, el conocimiento se define como “información a mano” (Perkins, 1999, p. 69). Al concebirlo de esta manera, podrá relacionarse con el razonamiento ya que, la información se genera a partir de dicho proceso, y entendiendo el conocimiento como producto del razonamiento. La habilidad por su parte es entendida según Perkins (1999) como “desempeños de rutina a mano” (p. 69) lo que significa que la habilidad esta estrechamente asociada al saber hacer, para que ello ocurra el estudiante debe realizar un proceso de organización de la información que se tiene, antes de ser aplicada.

La comprensión aparece cuando conocimientos y habilidades se ejecutan en situaciones reales y diferentes, es decir, está acompañada de razonamientos evolucionados en situaciones inesperadas, desconocidas para el estudiante. En el marco de la enseñanza para la comprensión “comprender es la habilidad de actuar y pensar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe” (Perkins, 1999, p. 70). Por lo que cabe decir que está asociada a actividades de rutina, actividades que van más allá de la memoria; específicamente la comprensión esta relacionada con sortear exitosamente diferentes obstáculos, crear nuevas formas de solución, resolver situaciones desconocidas, y actuar de manera eficaz ante nuevas y diferentes circunstancias.

De este modo, comprender un tópico generativo[16] significa tener la capacidad de usarlo en el momento y la circunstancia indicada, a la hora que se requiera, cuando menos

[16]Los tópicos generativos son temas y preguntas ricos, ofrecen un centro fértil para la enseñanza para la comprensión. (Perkins, 2003, p.88)

se le espere; es la capacidad de "explicar, justificar, extrapolar, vincular, aplicar de maneras que van más allá del conocimiento y la habilidad rutinaria" (Perkins, 1999, p. 73). Esta afirmación permite asociar la teoría de enseñanza para la comprensión con los procesos de validación señalados por Balacheff (2000), en donde afirma, que la explicación "establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad" (p. 17). De esta manera, se puede decir que el razonamiento es un proceso inherente a la comprensión que la antecede y la posibilita.

En consecuencia, el currículo sugiere que es necesario desarrollar la comprensión en las escuelas "no solo memorizar hechos y cifras" (Wiske, 1999, p. 23). Es decir, no se trata de aprender de manera mecánica, lo que se pretende es aprender para desenvolverse de manera acertiva dentro de la sociedad a la que pertenece, teniendo en cuenta los constantes cambios historicos, tecnológicos y científicos que suceden en la actualidad (Wiske, 1999, p. 23), lograrlo implica analizar con minuciosidad los datos, pensar de manera crítica y no simplemente recordar determinada información. Es necesario a demás desarrollar actividades de tipo práctico que potencien el desarrollo del intelecto. Para que ello ocurra es preciso que los estudiantes argumenten, expliquen y expongan sus ideas y sus construcciones, con sus maestros y sus pares.

Es así como, según Balacheff (2000) la explicación se sitúa "al nivel del sujeto locutor" (p. 12). Esta afirmación le da a la explicación un carácter social que le permite evolucionar en la medida en que los estudiantes interactuan con otros, estas interacciones facilitan la formulación y reformulación de los razonamientos. La explicación se arraiga en los conocimientos que tiene el estudiante y en lo que constituye su racionalidad (Balacheff, 2000). Esta visión, se asemeja a los postulados de Perkins (1999) cuando asegura que "lo que los estudiantes responden no solo demuestra su nivel de comprensión actual sino que lo más probable es que lo haga avanzar" (p. 72). Este avance puede darse, ya que cuando el estudiante verbaliza sus razonamientos tiene la posibilidad de clarificar sus ideas, organizarlas y reorganizarlas de tal manera que pueda identificar argumentos imprecisos que no tienen justificación e inconsistencias en sus razonamientos, lo que se concibe como un ejercicio de auto-reflexión y auto-evaluación acerca de lo que se explica o afirma, en otras palabras, el estudiante reflexiona sobre lo que aprende.

Retomando la línea de la comprensión, ésta significa ir más allá, actividad que es propia del razonamiento, pensar una y otra vez sobre lo que se dice, lo que se hace, lo que se sabe, implica un constante ejercicio de pensar y repensar, ajustar y reajustar; es decir la comprensión es reflexiva y este proceso de reflexión indudablemente involucra el razonamiento.

La relación explícita que existe entre la comprensión y el razonamiento está enmarcada en el objetivo de construir una cultura del pensamiento en el aula, un ideal de reflexión que incluye de manera activa la participación del estudiante en sus propios procesos de aprendizaje a través de la reflexión y la autoformación, lo que sugiere al estudiante un compromiso con la reflexión y la autocrítica. Así, la clase se convierte en una constante de reflexión, socialización y continua formación.

Otra cualidad que acerca a ambas categorías: Razonamiento y comprensión, es que éstas se dan de manera personal, tanto los procesos de razonamiento como de comprensión son desarrollados o elaborados por el estudiante, teniendo en cuenta su individualidad, sus ritmos de aprendizaje y sus contextos particulares, sin perder de vista la interacción social. En este sentido puede decirse que la comprensión y el razonamiento son procesos que varían según las condiciones particulares del estudiante condición social, situaciones que proporciona el contexto, el grupo familiar, la actividad socioeconómica del lugar donde vive, por lo tanto razonar y comprender son procesos diversos, únicos

También existe una relación en la construcción de ambos procesos. La comprensión se “construye a partir de comprensiones previas y de la nueva información” (Perkins, 1999, p.87). Esto se lleva a cabo a través del razonamiento que implica procesar la información que ya se tiene con una nueva para producir otra. En ocasiones, basta solo con estos procesos de reflexión para generar una nueva comprensión, que luego se verá evidenciada en el campo de los desempeños.

De igual manera, la teoría de la enseñanza para la comprensión propone una visión que relaciona el conocimiento y la habilidad en el campo de las representaciones mentales y en la capacidad de desempeño, allí se argumenta que “lo que el estudiante adquiere no es solo una representación sino una capacidad de desempeño” (Perkins, 1999, p. 90). Dicha afirmación marca una relativa diferencia entre lo que significa el razonamiento, puesto que éste domina el campo de las representaciones mentales, mientras que la comprensión se evidencia a través de los desempeños flexibles. Haciendo del razonamiento un proceso mental intangible que se hace visible a través de la explicación y de la comprensión, un proceso que involucra además del pensamiento, la acción.

Queda claro entonces, que la comprensión requiere inevitablemente de procesos de razonamiento que deben ocurrir en el estudiante, sin embargo el que ocurran éstos procesos no significa exactamente que el estudiante ha comprendido.

3.2 La Teoría de Enseñanza para la Comprensión y la Explicación según Balacheff: un viaje a las raíces.

Despues de observar puntos de encuentro que emergen de los postulados propios de ambos autores, es necesario precisar que éstos se reunen de manera casi inseparable en los postulados del reconocido psicólogo Jean Piaget. A continuación la ampliación de esta idea.

La teoría de enseñanza para la comprensión, para desarrollar el concepto de desempeño flexible, toma como fundamento los postulados de Piaget, así lo expresa uno de sus autores: “El sicólogo suizo del desarrollo Jean Piaget determinaba la comprensión de la estructuras lógicas básicas por parte de los niños estableciendo tareas que debían realizar” (Perkins, 1999, p.72). Lo que significa entonces que según esta teoría, la comprensión se establece cuando el estudiante se enfrenta ante situaciones nuevas y reales que debe resolver; mientras que la explicación surge según Piaget (1991) como una serie de razones que nacen para justificar el por qué de una respuesta, enmarcado en el desarrollo de una situación real.

Con respecto a lo anterior, Balacheff (2000) afirma que desde la perspectiva de Piaget (1970), explicar es despejar razones para responder a la pregunta del por qué (p. 11). Por lo tanto, la explicación también encuentra sustentos teóricos en los aportes de Piaget.

En este sentido, la teoría de enseñanza para la comprensión, además de definir la comprensión como la capacidad de desempeñarse de manera flexible ante una situación, también sostiene que es posible que las respuestas de los estudiantes no solo demuestren el nivel de comprensión en el que se encuentran sino que además es probable que les permita a los estudiantes avanzar en tales niveles (Perkins, 1999, p.72). Lo que le otorga una función relevante a las respuestas y explicaciones de los estudiantes como medio que no solo permite establecer niveles de comprensión sino también promoversu evolución.

Además de esta relación, Piaget (1991) afirma que “en todos los niveles la inteligencia se intenta comprender o explicar” (p. 13) y asegura que al igual que la comprensión, las explicaciones varían considerablemente dependiendo del nivel mental en el que se encuentra el estudiante. De igual forma sostiene que la explicación “es el punto de partida del pensamiento” (Piaget, 1991, p. 34). Lo que indica la relación entre pensamiento y explicación según Balacheff (2000).

Por otra parte, Piaget insinúa que la explicación da cuenta de la actividad del estudiante, de ahí se puede inferir que la explicación puede evidenciar el nivel de comprensión en el que se encuentra el estudiante en cada una de las dimensiones[17], puesto que la teoría de enseñanaza para la comprensión propone que ésta puede ser determinada a través de los desempeños.

En conclusión, Piaget indica que la explicación da cuenta de unos procesos cognitivos que el estudiante realiza durante determinadas etapas, de una “asimilación racional” (Piaget, 1991, p.60). Lo que asocia las explicaciones de los estudiantes con sus procesos de razonamiento utilizando generalmente actividades que ponen en juego su comprensión.

Las relaciones expuestas en el apartado 3.2 se detallan en la Ilustración 33.

[17] Teniendo en cuenta el marco teórico abordado.

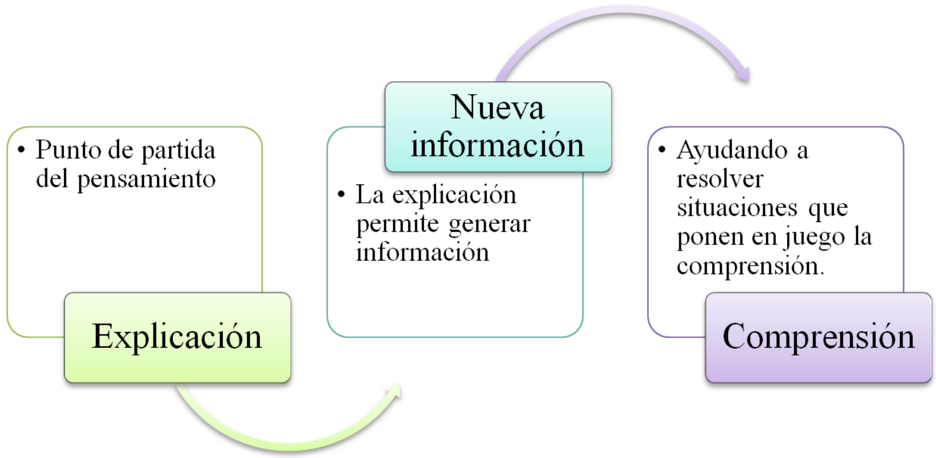


Ilustración 33. Relaciones establecidas a partir de los aportes de Piaget

3.3 La Comprensión y la Explicación en el Aula de Clase

La comprensión como objetivo, juega un papel esencial dentro del discurso de los maestros “¡lo que quiero es que entiendan!” “¿me hago entender?” “¿si comprendieron?” estas son expresiones que a menudo se utilizan dentro del aula de clase y de una u otra manera. Por otra parte el maestro es capaz de reconocer cuándo sus estudiantes han comprendido lo que él espera que comprendan y, cuándo por el contrario, el silencio de un grupo de estudiantes ante una pregunta cualquiera, significa que “aún, no han comprendido”, esto sucede a menudo durante la clase de matématicas, los estudiantes se quedan en silencio cuando el maestro después de formular una pregunta: “¿qué podemos hacer allí?”, “¿qué sigue?” y “¿qué operación realizamos?”.

Con respecto a lo anterior, Perkins (1999) plantea que los maestros “les pedimos a los estudiantes no solo que sepan sino que piensen a partir de lo que saben” (p. 71). Es decir, los maestros les piden a los estudiantes que elaboren procesos de análisis que vayan más allá de las reglas y algoritmos que se han propuesto durante la clase, que construyan sus propios métodos y sus propias formas de razonar, que comprendan, pero al parecer, finalmente, los estudiantes memorizan un cúmulo de reglas que sirven para sortear los problemas del momento, para ganar el examen y pasar el año, mientras las reglas terminan siendo sólo eso, reglas sin ningún sentido.

Comprender en el aula de clase significa expresar por medio del discurso aquella información que anda dando vueltas en la mente del estudiante, explicar lo que está pensando acerca de esa o aquella regla, proponer una nueva, validarla, reconsiderarla, socializarla, explicarla y refutarla. Consecuente con esto, “cuando se quiere evidenciar la comprensión de alguien le pedimos que haga algo, algo que ponga en juego su comprension” (Perkins, 1999, pp. 70-71). Ese algo dentro del aula se propone como una explicación, como la solución colectiva o individual de un problema, como un reto, como un desempeño, entre otros

En este sentido, al referirse a la explicación como una forma de evidenciar la comprensión de los estudiantes, se da paso a lo que expone Balacheff (2000) cuando afirma “en el momento en que la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor” (p. 12). De aquí se infiere que la explicación es un proceso interno, personal y autónomo que se construye de manera individual y social, donde se ponen en juego para su construcción una serie de conocimientos nuevos y anteriores que se encuentran “impresos” en la mente del sujeto.

En consecuencia, la explicación da cuenta de procesos de razonamiento que el estudiante ha construido o está aún construyendo, con respecto a un tema determinado[18], por ello es necesario que el maestro tenga en cuenta dichos procesos, que los conceptualice, que los “comprenda” puesto que le darán cuenta de las compresiones que el estudiante ha realizado hasta el momento, lo que posteriormente permite el diseño de actividades o de prepararación de situaciones de aprendizaje que ejerciten dichos razonamientos.

Con respecto a las situaciones de aprendizaje, tanto la teoría de la enseñanza para la comprensión como la teoría de Balacheff manifiestan que es necesario diseñar actividades dentro del aula que se conciban como retos para el estudiante, que vayan más allá de la información, y que permitan “extender, sintetizar, aplicar o usar lo que uno sabe de manera creativa y novedosa” (Wiske, 1999, p. 110). Que al mismo tiempo posibilite “despertar en los interlocutores el interés por formular una solución elaborada y discutirla” (Balacheff,

[18] Dentro de la Teoría de la enseñanza para la comprensión se denominan tópicos generativos.

2000, p. 18). Este tipo de actividades permite desarrollar y trabajar dentro del aula tanto la comprensión como el razonamiento, procesos que van de la mano en tanto que comprender implica interpretar, analizar, explicar, relacionar, comparar procesos que se hacen a través del razonamiento.

De igual modo, en ambos autores se declara la necesidad de proponer en el aula actividades que cumplan características especiales como la generalidad, es decir, “no muy complicado, pero tampoco muy simple” (Balacheff, 2000, p. 21). A lo que la teoría de enseñanza para la comprensión agrega: “los desempeños de comprensión deben poder ser abordados por todos los alumnos y, sin embargo, plantear un desafío grande como para ampliar sus mentes” (Wiske, 1999, p. 114). En otras palabras, las actividades desarrolladas en el aula deben estar encaminadas a movilizar concepciones, ideas y razonamientos del estudiante, a hacerlo partícipe en su construcción, a buscar otros ejemplos, otras formas, otras teorías.

Además de diseñar actividades potencialmente significativas, que exijan al estudiante poner en juego su comprensión y su razonamiento, también se revela la necesidad de explorar lo que trae consigo con respecto a ambos procesos, obtener información “acerca de lo que los alumnos ya saben y aquello que están interesados en aprender” (Wiske, 1999, p. 112). Esto permite diseñar actividades de manera secuencial, que no solo tengan en cuenta los conocimientos previos del estudiante, sino que además despierten su curiosidad y su interés, con respecto a esto, Balacheff (2000) explica que “debemos descubrir y tener en cuenta la racionalidad que ellos tienen inicialmente, cómo funciona y cómo puede evolucionar” (p. 5). En la medida que esto ocurra el maestro prodrá diseñar actividades, formular problemas y preguntas que promuevan la evolución de dichos razonamientos.

Otro aspecto fundamental que sugiere Balacheff (2000) para tener en cuenta dentro del aula, es el papel de la construcción social en la elaboración y refinación del razonamiento “nosotros hemos retenido la hipótesis del papel motor de la interacción social en el desarrollo de los procesos de validación” (Balacheff, 2000, p. 178). Cuando los estudiantes comparten con sus compañeros sus apreciaciones y construcciones alrededor de un tema, un problema o una situación, se nutren y enriquecen mutuamente. Ahora, la teoría de enseñanza para la comprensión asegura que “los desempeños de comprensión no son simplemente experiencias privadas sino que, más bien, dan como resultado producciones o actividades que pueden ser percibidas por otros” (Wiske, 2003, p. 114). Lo que significa que tanto el razonamiento como la comprensión son procesos de carácter social, es decir, suceden en medio de la interacción con los otros, utilizando el lenguaje como medio.

En cuanto al lenguaje, puede decirse que ambos procesos se encuentran indiscutiblemente transversalizados por éste. Con respecto al razonamiento, Balacheff (2000) afirma “un indicativo importante de estos procesos son las herramientas lingüísticas puestas en práctica” (p. 20). En esta dirección, el lenguaje es un instrumento que no solo permite explicitar los razonamientos que el estudiante ha construido a través del habla, sino también a través de una serie de signos y símbolos que incluyen el lenguaje no verbal y representacional, el lenguaje da cuenta del nivel de apropiación que el estudiante ha alcanzado con respecto a un tema o tópico determinado.

De otra parte, en la teoría de la enseñanza para la comprensión, el lenguaje permea los elementos y dimensiones de la comprensión ya que a través de él se establecen desempeños, tópicos y metas que permiten su desarrollo, de igual manera el lenguaje utilizado por los estudiantes está relacionado con las dimensiones y niveles de la comprensión que dicha teoría revela puesto que gracias a éste es posible establecer en qué nivel se encuentra el estudiante dentro de cada una de las dimensiones, finalmente la evaluación continua está propuesta y enriquecida a través del uso del lenguaje.

Para finalizar, cabe decir que el conjunto de las voces de los estudiantes relatan las raíces de sus razonamientos y por ende sus niveles y dimensiones de la comprensión. Escuchar estas voces permite reconocer y evolucionar ambos procesos, cuando el razonamiento de un estudiante se ha transformado, indiscutiblemente, éste afectará directamente su comprensión, lo que significa que ambos procesos van de la mano. Por tanto la escuela debe retomar el razonamiento como un proceso que la hace progresar, pretender refinarla sin tener en cuenta los procesos de razonamiento es una utopía. La Ilustración 34 exhibe las relaciones expuestas en este apartado.

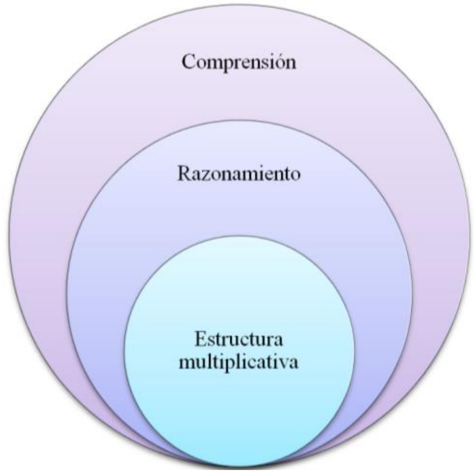


Ilustración 34. Comprensión – Razonamiento – Estructura multiplicativa

3.4 La Explicación y su Relación con las Dimensiones de la Comprensión

La comprensión entendida como un desempeño flexible, como una puesta en acción, permite al maestro diseñar una serie de actividades encaminadas a desarrollar en los estudiantes dichos procesos y a establecer si han comprendido o no, pero ¿comprenden los estudiantes de la misma manera? y ¿comprenden un mismo tópico en igual o menor grado? La respuesta a preguntas como las anteriores da origen a lo que dentro de la teoría de enseñanza para la comprensión se conoce como dimensiones de la comprensión. Estas dimensiones son: contenido, método, propósito y formas de comunicación, cada una compuesta por cuatro niveles: ingenuo, de principiante, de aprendiz y de maestría.

Del mismo modo que ocurre con la comprensión, el razonamiento se concibe más sofisticado en la medida en que aborda tres categorías de validez: la explicación, la prueba y la demostración (Balacheff, 2000), la explicación al estar arraigada en los conocimientos del estudiante permite descubrir su racionalidad, sus formas de pensar, de organizar e interpretar la información, las ideas en las que fundamentan una u otra razón, la conceptualización de estas explicaciones articuladas a las dimensiones de la comprensión, permiten identificar en qué nivel se encuentran los estudiantes respecto a un tema a partir de cada una de las dimensiones. Es por ello que se hace necesario relacionar el papel de la explicación dentro de cada una de las dimensiones de la comprensión.

3.4.1 Dimensión de contenido.

Con respecto a la dimensión de contenido puede decirse que la explicación da cuenta de las concepciones que el estudiante ha construido dentro de su entorno social, es decir permite identificar aquellas "perspectivas intuitivas o no escolarizadas" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 230) que el estudiante trae consigo y "el grado hasta el cual puede moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 230). En este sentido, la explicación permite observar cierta evolución, es decir, si el estudiante logra "distanciarse del discurso *argumentativo natural*[19] para elaborar un discurso *argumentativo formal*" (Balacheff, 2000, p. 20) que de cuenta de la construcción o apropiación de teorías más elaboradas, propias del saber científico. Desde los primeros años de vida, los alumnos construyen teorías poderosas sobre la materia, la sociedad y ellos mismos. Si bien imaginativas, estás teorías a menudo entran en conflicto con las versiones elaboradas a lo largo de los siglos por gente ilustrada en dominios como la historia, la ciencia y las artes. Las creencias no escolarizadas son robustas, incluso despues de años de escolaridad. En algunos casos siguen siendo parte de la comprensión del mundo basada en el sentido común, una comprensión que está prototípicamente orientada a lo práctico, vinculada con la inmediatez de la experiencia, es local, egocéntrica y validada en virtud de pertenecer a la colección genérica de presupuestos que la cultura comparte como "obvios".

Refinar, transformar o reemplazar estás intuiciones iniciales es un desafio central que enfrentan los alumnos cuando apuntan a comprender en profundidad el mundo que los rodea (Mansilla y Gardner, 1999, pp. 230-231).Como se ha mencionado anteriormente, en esta dimensión el estudiante podrá inicialmente utilizar explicaciones que involucren un lenguaje natural, un lenguaje propio que da cuenta de los conocimientos previos que éste posee, en la medida en que dichas explicaciones utilizan un lenguaje formal, propio de las matemáticas dan cuenta del nivel de comprensión que el estudiante ha desarrollado dentro de la dimensión de contenido.

---

[19] Esta expresión en el texto original va entre comillas. Sin embargo en este trabajo se han reemplazado dichos signos por la letra cursiva.

La comprensión además de reconocer el conocimiento construido a través del tiempo como aspecto fundamental, también reconoce que las formas y los procesos que se emplean en dicha construcción merecen ser tenidos en cuenta, por tal razón existe otra dimensión que se encarga de tales procedimientos.

3.4.2 Dimensión de método.

La dimensión de método "constituye las herramientas más válidas con las que cuentan los individuos para construir una comprensión que va más allá de la experiencia inmediata y caprichosa y del sentido común" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 232). Lo que implica que el estudiante aplique métodos confiables para construir y validar el conocimiento que circula; en este sentido, la explicación se apropia de otras herramientas del lenguaje que en ocasiones no requieren de la lengua como tal, sino que más bien "solamente se prestan para ser observados" (Balacheff, 2000, p. 20). Lo que da cabida a la utilización de signos y símbolos tanto verbales como no verbales dentro de los procesos de argumentación.

La teoría de enseñanza para la comprensión define la dimensión de método de la siguiente manera:

> Concretamente, la dimensión de los métodos evalúa la capacidad de los alumnos para mantener un sano escepticismo acerca de lo que conocen o lo que se les dice, asi como su uso de métodos confiables para construir y validar afirmaciones y trabajos verdaderos, moralmente aceptables o valiosos desde el punto de vista estético (Mansilla y Gardner, 1999, p. 232).

Relacionando esta dimensión con respecto a la explicación como categoría de validez, puede decirse que Balacheff (2000) propone que "es necesario que la situación contenga un desafío a la contradicción, lo que implica a su vez un desafío a admitir" (p. 18). Es decir, las explicaciones deben darse en medio de situaciones en las cuales el estudiante confronte sus argumentaciones, promoviendo debates alrededor de un tema que permitan asegurar un resultado o una conclusión.

Despues de reconocer que existen diferentes formas de construir el conocimiento, es necesario tener en cuenta con qué fines o propósitos ha sido orientado y fundamentado, es allí donde se consolida o se origina la dimensión de propósitos.

3.4.3 Dimensión de propósitos.

Esta dimensión es quizá una de las que directamente se relaciona con la explicación, ya que precisamente se basa “en la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reintrepretar y operar en el mundo” (Mansilla y Gardner, 1999, p. 234). En esta dimensión el estudiante utiliza su capacidad de razonar para descubrir su lugar en el mundo (teniendo en cuenta los conocimientos que ha construido), procesa la información que ya posee con una nueva para dar origen a otra información, seguidamente puede justificar, explicar, argumentar y aplicar el conocimiento construido dentro de un contexto determinado.

De ahí la necesidad de la explicación como un proceso inherente al ser humano que a través de la socialización le permite reinterpretar y replantear nuevas explicaciones. Estas explicaciones dan cuenta de su manera de pensar y por ende de la forma como se desenvuelve en el mundo, al respecto la teoría de enseñanza para la comprensión expone:

> Cuando la información deja de ser información acumulada en la mente de los alumnos y se convierte en un permiso para la acción, deben ser tomados en cuenta nuevos aspectos de la comprensión. Por ejemplo, los educadores deben considerar la capacidad de los alumnos para encontrar ocasiones de poner en juego el conocimiento y su evaluación crítica de las consecuencias de hacerlo (Mansilla y Gardner, 1999, p. 236).

Consecuente con esto, Balacheff a su modo insiste en la necesidad de conocer la naturaleza o el origen de los procesos que realizan los estudiantes y el modo como éstos se llevan a la práctica, ya que de esta manera se pueden identificar los medios que conllevan a su evolución, es por esto que “la natuaraleza de sus conocimientos y la manera como éstos se lleven a la práctica van a jugar un papel esencial” (Balacheff, 2000, p. 19).

Teniendo en cuenta las dimensiones anteriores, que se preocupan por el conocimiento y por la forma como se construye y se aplica en un contexto dado, también existe una dimensión que se encarga de evaluar cómo se comunica dicho conocimiento, a esta dimensión se le conoce con el nombre de formas de comunicación.

3.4.4 Dimensión de formas de comunicación.

La dimensión de formas de comunicación está definida dentro de la teoría de enseñanza para la comprensión, como aquella dimensión que tiene en cuenta el dominio que poseen los estudiantes con respecto a los géneros que utilizan para dar a conocer sus saberes; ademas, si los sitemas de símbolos utilizados para tal fin son efectivos y si tienen en cuenta la audiencia y el contexto en el cual se socializan los desempeños.

La explicación se puede asociar con esta dimensión cuando se aborda el componente social "a lo largo de la socialización hay diversas situaciones de interacción (no solamente escolares, por supuesto) que le permiten desarrollar y verificar formas de discurso y estrategias de argumentación eficaces" (Balacheff, 2000, p.179). Lo que en cierta medida exige al estudiante organizar su argumento teniendo en cuenta el auditorio al cual se dirige, utilizando diferentes tipos de discurso y contextualizándolo al medio donde se desenvuelve. Al igual que en la dimensión de formas de comunicación, la explicación necesariamente requiere del uso del lenguaje y de un sistemas de signos y símbolos.

Tanto la explicación como la dimensión de formas de comunicación tienen una visión social del conocimiento, el conocimiento es construido en medio de otros y, por lo tanto, debe ser compartido teniendo en cuenta ciertos criterios para que dicha comunicación sea eficaz.

> La dimensión de formas de comunicación evalúa el uso, por parte de los alumnos, de sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cinestésicos corporales, por ejemplo) para expresar lo que saben, dentro de géneros o tipos de desempeños establecidos (…)
>
> Debido a su naturaleza comunicativa, esta dimensión también subraya la capacidad de los alumnos para considerar la audiencia y el contexto como fuerzas configuradas en sus desempeños. (Mansilla y Gardner, 1999, p. 237)

De igual modo, la explicación requiere de una serie de recursos y medios lingüísticos para hacerce explícita ante una determinada comunidad y en un contexto particular.

En resumen, las dimensiones de la comprensión evalúan la pertinencia de los desempeños que se proponen a los estudiantes con el fin de hacer explícita su comprensión; la explicación por su parte está ligada a "una experiencia mental que requiere construcciones cognitivas y lingüísticas complejas" (Balacheff, 2000, p.79), las cuales anteceden a dichos procesos de comprensión, mientras más complejas sean estas construcciones más sofisticadas serán tales comprensiones (ver Ilustración 35).

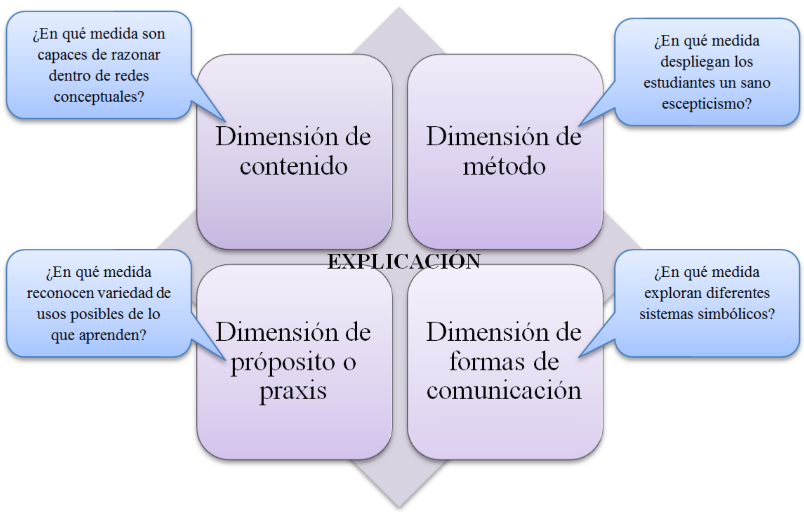


Ilustración 35. Relación explicación - dimensiones de la comprensión

3.5 Los Niveles de la Comprensión y la Explicación

Inicialmente, la cualidad que reúne ambas categorías, explicación y comprensión es su carácter evolutivo; la explicación tiene como base el uso de un lenguaje natural que paulatinamente se convierte en un lenguaje formal propio de la disciplina; de igual manera, los niveles de comprensión encuentran sus inicios en conocimientos intuitivos "naturales" adquiridos dentro de un contexto particular.

Al igual que las dimensiones, los cuatro niveles de comprensión: de ingenuo, de principiante, de aprendiz y de maestría pueden evidenciarse en el plano de las explicaciones. La explicación necesariamente está transversalizada por una serie de herramientas lingüísticas que permiten inferir la evolución de los razonamientos y las argumentaciones y al mismo tiempo permite identificar niveles de apropiación y de comprensión con respecto a los tópicos trabajados.

3.5.1 Nivel de comprensión ingenua.

Este nivel de comprensión tiene sus raíces en la intuición, se trata de "captar información que está disponible directamente en el mundo" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 239). En este nivel la explicación está fundamentada en el conocimiento "intuitivo" que posee el estudiante, en su saber común, construido a partir de la realidad, en entornos no necesariamente escolares.

En este nivel, la explicación no requiere de procesos cognitivos complejos y el lenguaje es empleado más como medio de comunicación que como medio de reflexión y de procesos de pensamiento; en esta dirección dentro del nivel ingenuo, la explicación puede denotar contradicciones y procesos particulares de razonamiento.

3.5.2 Nivel de comprensión de novato.

Los estudiantes que se encuentran en este nivel, incluyen en sus explicaciones, el conocimiento disciplinar, aunque en ocasiones, la relación con éstos sea memorística y mecánica, los estudiantes empiezan a construir argumentos utilizando un lenguaje cada vez más formal, que incluye conceptos propios de la matemática.

En la teoría de enseñanza para la comprensión los estudiantes que se encuentran en este nivel "describen la naturaleza y los objetivos de la construcción del conocimiento, así como sus formas de expresión y comunicación, como procedimientos mecánicos paso por paso" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 240). Es natural entonces, que un estudiante dentro de este nivel durante su explicación repita las reglas y algoritmos expuestos por su profesor y que al teminar espere de él cierta aprobación frente a los argumentos que propone.

3.5.3 Nivel de comprensión de aprendiz.

Este nivel propone que el estudiante debe mostrar un uso flexible de "conceptos o ideas de la disciplina" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 240). En este nivel, la explicación se basa en procesos cognitivos complejos, que exigen el uso de un lenguaje formal. "La explicación se basa en una representación disponible" (Balacheff, 2000, p.74). Lo que significa que el estudiante basa sus explicaciones en experiencias mentales ricas de significado.

3.5.4 Nivel de comprensión de maestría.

Dicho nivel de comprensión va más allá de la disciplina y de los contenidos, en este nivel el estudiante es capaz de integrar el conocimiento a situaciones de la vida real "los alumnos pueden usar el conocimiento para reinterpretar y actuar en el mundo que los rodea" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 241). La explicación en este nivel es el resultado de una larga y refinada búsqueda de argumentaciones.

En consecuencia, la explicación dentro de este nivel está fundamentada en el conocimiento científico, lo que le da un nivel superior de validez. De igual forma las explicaciones no solo podrán surgir a partir de una experiencia mental sino que además "las razones desarrolladas están ligadas a las *acciones*, eventualmente interiorizadas" (Balacheff, 2000, p.79). Lo que permite "expresar y comunicar el conocimiento de manera creativa" (Mansilla y Gardner, 1999, p. 241).

Para finalizar, es necesario resaltar que la explicación se encuentra presente en un gran número de procesos de aprendizaje; su conceptualización y análisis puede dar cuenta de los procesos de razonamiento que desarrollan los estudiantes durante la construcción de un concepto. Cuando el razonamiento y la teoría de la enseñanza para la comprensión se toman de la mano, permiten al maestro establecer las dimensiones y niveles de la comprensión, y luego formular estrategias que permitan el progreso de ambos procesos, tal y como se presenta en la Ilustración 36.

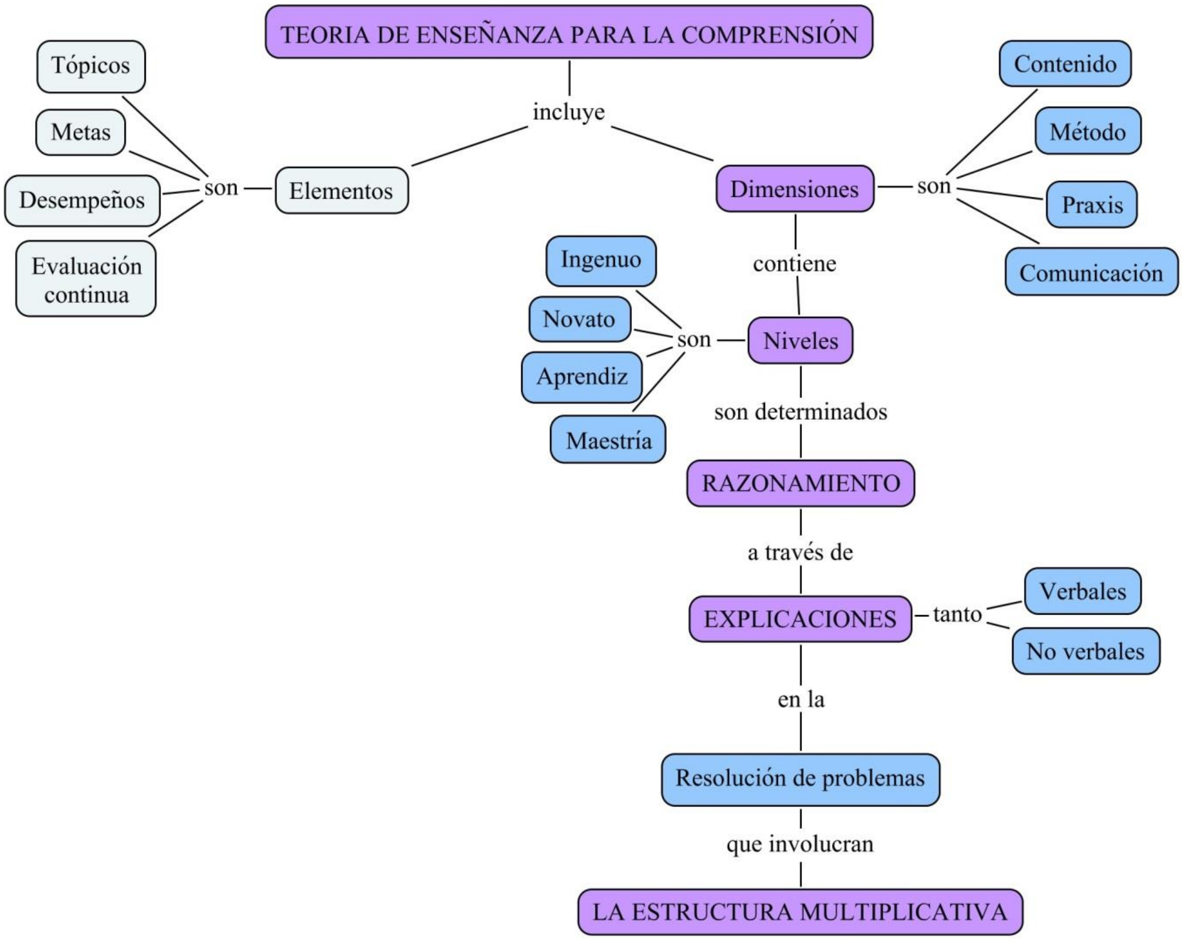


Ilustración 36. Mapa conceptual que sintetiza las relaciones de las categorías objeto de estudio

Luego de identificar los puntos de encuentro entre ambos referentes teóricos, se hace necesario exponer en el siguiente capítulo la ruta recorrida para el desarrollo del presente trabajo de investigación.

Capítulo 4: Metodología y Método

Concepciones, Caminos y Caminantes

"Mediante la razón el hombre se observa a sí mismo, pero sólo se conoce a sí mismo mediante la conciencia"

Tolstoy (1869)

En el transcurso de este capítulo se abordan las particularidades y características del diseño metodológico que orienta este proyecto de investigación. Para iniciar se da una mirada general al paradigma que guía el trabajo: el cualitativo, rico en perspectivas metodológicas que poseen sus propias orientaciones teóricas y concepciones acerca del sujeto, el objeto y la realidad; seguidamente, se hace un acercamiento al enfoque hermenéutico-fenomenológico el cual enruta el proceso de investigación donde se tienen en cuenta los supuestos que componen su estructura.

Posteriormente, se da paso al tipo de estudio dentro del proceso investigativo, el estudio de caso y, finalmente, se dan a conocer el contexto donde se desenvuelven los participantes, los instrumentos de recolección de datos y la metodología de análisis de la investigación. Esto con el objeto de fijar una ruta de trabajo (ver Ilustración 37) y de particularizar el objeto de estudio según la realidad contextual.

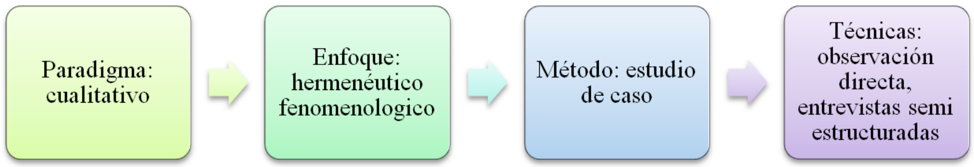


Ilustración 37. Ruta metodológica.

4.1 Metodología Cualitativa

El presente proyecto se sitúa en el paradigma cualitativo ya que interpreta procesos de razonamiento de los estudiantes del grado cuarto de la básica primaria con respecto a la solución de problemas que involucran las estructuras multiplicativas, dentro de un contexto real y particular la Institución Educativa San José del Citará, lo que implica la interacción entre los participantes de la investigación: maestro y estudiantes y, un constante intercambio de significados que ocurren dentro del campo de la subjetividad (Vasilachis, 2006).

En consecuencia, es de tener en cuenta, que los razonamientos de los estudiantes están influenciados por los conocimientos adquiridos dentro de su contexto escolar y social, por ende, la cultura cumple un papel fundamental en la construcción del razonamiento, pues éste se da en medio de una manera particular de pensar, sentir, actuar y comprender la realidad, por lo tanto, la realidad debe ser estudiada desde la interacción directa con los participantes, a partir de la observación, el diálogo y la sistematización de los datos.

4.1.1 Enfoque metodológico.

El enfoque de investigación está dirigido a proveer una serie de supuestos que permiten abordar el objeto de estudio de la presente investigación, es por ello que se opta por el enfoque hermenéutico fenomenológico como orientador de dicho proceso, por ser abierto a los cambios, intenso y profundo, además permite que nuevas categorías puedan emerger, sin abandonar su carácter riguroso donde se exige la confrontación de datos obtenidos. A continuación se da significado a cada uno de los supuestos asumidos por la presente investigación (Sánchez, 1998).

4.1.1.1 Supuesto ontológico.

Desde el punto de vista ontológico, este enfoque considera la realidad de los participantes como una "realidad epistémica" (Sandoval, 2002) construida por un sujeto cognoscente, no solo desde la mirada del investigador, sino también, desde la mirada de los demás participantes: los estudiantes, influenciados por la cultura de la ciudad de Bolívar y una manera particular de percibir, pensar, sentir y actuar. Por lo tanto, la realidad no es única, sino que hay múltiples realidades, cada uno de los participantes se encuentra inmerso en una realidad distinta a pesar de encontrar en ellas características similares. Al respecto Guba y Lincoln (2002) sostienen que no hay una única verdad que coincida con el supuesto mundo exterior para el investigador, sino múltiples realidades construidas por cada uno de los sujetos al intentar conocer.

En cuanto al concepto de hombre que aborda la investigación, en esta línea de lo ontológico, se concibe como un sujeto que piensa por sí mismo, que existe y que se encuentra influenciado por su contexto, por su realidad, al tiempo que ésta es tratada a partir de "una visión dinámica" en constante construcción y subjetiva (Sánchez, 1998, p. 67).

Por su parte, la historia es analizada desde una visión estructuralista, es decir "acentúa el fenómeno del intercambio, de la comunicación y de las relaciones" (Sánchez, 1998, p. 31), es por ello que en la presente investigación la historia está íntimamente ligada a los sujetos y a sus realidades, cada uno de los participantes lleva consigo una historia que contar. De otro lado, la relación entre los sujetos y el objeto de investigación es abordada por el supuesto gnoseológico.

4.1.1.2 Supuesto gnoseológico.

Así pues, desde el enfoque hermenéutico fenomenológico, se considera también el supuesto gnoseológico, en el cual se define la relación de sujeto-objeto en el proceso de investigación. Según Sánchez (1998, p. 66) la fenomenología centraliza el proceso en el sujeto, en la subjetividad, relacionando los modos de pensar, sentir y no al objeto como tal. En la presente investigación la relación con los sujetos es horizontal, se tienen en cuenta la edad y el grado en el que se encuentran los participantes, de igual manera se respeta cada una de sus subjetividades.

4.2 Naturaleza de la Investigación Cualitativa

La presente investigación surge de la necesidad de describir y comprender aquellos procesos que ocurren en la mente del estudiante al procesar la información y al tratar de darle sentido a los conceptos que se trabajan en las matemáticas escolares, especialmente aquellos relacionados con la comprensión de las estructura multiplicativa, por lo tanto la naturaleza de esta investigación retoma los postulados de Robert Stake donde se propone la comprensión como eje central.

En este sentido, la comprensión del objeto de estudio se da en medio de la experiencia, en medio de la interacción, el investigador se encuentra en constante contacto con los participantes, como observador activo dentro del proceso, a continuación se amplía esta idea.

4.2.1 Comprensión mediante la experiencia.

Con el fin de describir los procesos de razonamiento de los estudiantes del grado cuarto con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa, se hace necesario que el investigador se encuentre en constante interacción con los participantes, con el fin de conocer y comprender cada uno de los factores que inciden en la construcción de tales razonamientos, es por ello, que el investigador actúa durante el desarrollo del presente estudio como observador, como parte del grupo de estudiantes.

En esta investigación el razonamiento es entendido entonces como una producción humana, en la que intervienen características internas y externas como: el contexto social, la edad, el grado de escolaridad, las estrategias de enseñanza, el estado de ánimo, la motivación. Lo que se pretende es realizar una descripción de tales procesos, para lo cual se recurre a la narración de episodios (entrevistas y observaciones) dirigidos a ofrecer una comprensión próxima del caso.

4.2.2 Una apuesta por la interpretación.

La interpretación de los datos se encuentra a cargo del investigador quien se encarga de realizar las observaciones, las entrevistas e interactuar con los participantes de la investigación, es decir, la interpretación está bajo la responsabilidad de quien recopila los datos, tal y como lo sugiere Stake (1999) “los modelos cualitativos habituales requieren que las personas más responsables de las interpretaciones estén en el trabajo de campo” (p. 45), con el fin de establecer subjetividades y categorías emergentes.

Es por ello que el investigador interactua de manera constante con los participantes, escucha cada día sus formas de razonar dentro del aula y durante el desarrollo de las entrevistas, con el fin de interpretar el significado de cada uno de sus aportes, sus gestos, sus silencios que también hacen parte de sus porcesos de razonamiento y comprensión.

4.3 Método: Estudio de Casos

El objetivo de la presente investigación es describir los procesos de razonamiento elaborados por los estudiantes, escuchar sus explicaciones dentro de un contexto escolar particular, en situaciones reales, propias del aula de clase, con el propósito de comprenderlas desde la experiencia, la observación y la interacción con los participantes en un periodo de tiempo suficiente.

Para lograrlo se hace necesario implementar como método el estudio de casos, ya que éste permite realizar un estudio a profundidad, “disciplinado y cualitativo del objeto de estudio” (Stake, 1999, p. 12), en esta ocasión, describir los procesos de razonamiento en el transcurso cotidiano de la vida escolar, implica tal como lo plantea Stake (1999) “lograr una mayor comprensión del caso, apreciando la singularidad y la complejidad, su inserción en sus contextos, su interrelación con ellos” (p.26), lo que posibilita una comprensión profunda del objeto de estudio, a través de técnicas de recolección de datos que requieren de la interacción directa del investigador, los participantes y el contexto donde se desarrolla el objeto de estudio.

Según Stake (1999), el estudio de casos puede darse bajo ciertos criterios, uno de ellos, es el estudio intrínseco el cual se preocupa por estudiar un caso a profundidad, teniendo en cuenta el contexto de manera detallada, este tipo de caso viene determinado casi que por sí mismo, no pretende hacer generalizaciones sino más que más bien procura por abordar un tema de interés, se estudia “porque necesitamos aprender sobre ese caso particular” (Stake, 1999, p. 16). Igualmente, se encuentra el estudio de casos intrumental, que está direccionado desde “una necesidad de comprensión general” (Stake, 1999, p. 16) considerando que puede hacerse desde un caso particular, en este sentido el caso es un instrumento que permite la comprensión del objeto de estudio. Por último se encuentra el estudio múltiple, como su nombre lo indica se refiere a varios casos y no sólo a uno, este tipo de estudio, ya que exige de cierta coordinación entre los casos pretendiendo dar mayor representatividad.

Teniendo en cuenta lo anterior, dentro de la presente investigación se lleva a cabo un estudio de caso intrínseco - múltiple debido a que cada uno de los participantes es tomado como una entidad particular y única en el suministro de los datos. De igual manera, el tema objeto de investigación: procesos de razonamiento, es determinado por el interés del investigador, en otras palabras, proviene de una inquietud particular, de un problema que tiene su origen en el aula de clase, “el mayor interés reside en el caso concreto” (Stake, 1999, p. 42). Por lo tanto el tipo de estudio mencionado, se considera el adecuado para dar cuenta de los procesos de razonamiento de los participantes, cuyo objetivo es dar un informe descriptivo de estos y asociarlos a los niveles y dimensiones de la comprensión.

El tipo de estudio de casos (intrínseco-múltiple) requiere de una serie de características particulares para su selección, cada estudiante es un caso en sí mismo, lo que permite la descripción de procesos de razonamiento propios. En el siguiente apartado se expone el proceso de selección de los casos.

4.4 ¿Cómo se seleccionaron los casos?

En primer lugar, para la selección de los casos inicialmente se realiza una serie de observaciones dentro del transcurso cotidiano[20] de las clases de matemáticas, durante el desarrollo de dichas clases, se observan habilidades de los participantes para explicar y argumentar de manera verbal y no verbal, con el fin de identificar aquellos casos que faciliten el suministro de información y al mismo tiempo permitan la comprensión del objeto de estudio.

En segundo lugar, se realiza un estudio autobiográfico de los participantes para determinar sus habilidades, gustos, intereses y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, "el equilibrio y la variedad son importantes; las oportunidades de aprendizaje son de máxima importancia" (Stake, 1999, p. 19) dentro de la selección de los casos. El ejercicio anterior posibilita establecer características para la selección de los tres casos: habilidad, entendida como la capacidad que posee el estudiante para desempeñarse de manera satisfactoria en la solución de problemas y en el aprendizaje de los temas trabajados en el aula; y el gusto, definido en esta investigación como el placer, la afinidad y el deleite que manifiesta el estudiante por el estudio de los temas que se abordan en el área.

Otro aspecto que se ha tenido en cuenta para la selección de los casos, es el diálogo obtenido en una entrevista que incluyen la solución de problemas multiplicativos, con el fin de reconocer aquellos estudiantes que presentan capacidades verbales y no verbales para dar a conocer sus razonamientos, que pueden aportar categorías emergentes y que al mismo tiempo dan respuestas asociadas a la pregunta de investigación. De igual forma se busca seleccionar estudiantes con diferentes procesos de razonamiento, es decir, que sus argumentos y procesos de solución sean ricos en variedad.

Durante la selección de los casos también se ha tenido en cuenta, la disponibilidad de los participantes, asumida no solo en términos del tiempo sino también como la iniciativa que estos manifiestan para dar aportes de información a la investigación, al respecto Stake (1999) afirma: "si es posible, debemos escoger casos que sean fáciles de

[20] Por cotidiano se entiende todo aquello que es familiar, frecuente, conocido.

abordar y donde nuestras indagaciones sean bien acogidas" (p.17). Igualmente, por cuestiones éticas es necesario que los estudiantes se encuentren informados acerca de su papel y del propósito de la investigación, al igual que sus padres, por lo tanto el paso a seguir ha sido el consentimiento informado de los padres.

Finalmente, el estudio de caso intrínseco pretende comprender el caso en sus particularidades y centarse en su estudio, sin dar paso a divergencias, por ende, se hace necesario seleccionar tres casos particulares dentro del grado cuarto con el fin de dar representatividad a los diferentes estudiantes del curso (estudiante cuyas explicaciones se destacan entre las otras por el dominio de conceptos, estudiante con buenas explicaciones, estudiante que presenta dificultades al momento de explicar sus respuestas). Entendiendo que la tarea principal del presente estudio es comprender el caso (describir los procesos de razonamiento), al respecto se asegura "el hecho de descubrir relaciones, indagar en los temas y sumar datos nos ayudará, pero estos fines están subordinados a la comprensión del caso" (Stake, 1999, p. 71), lo que permite inferir que los tres casos están sujetos al estudio de los procesos de razonamiento.

En la Ilustración 38 Selección de los casos se presentan las particularidades tenidas en cuenta para la selección de los casos.

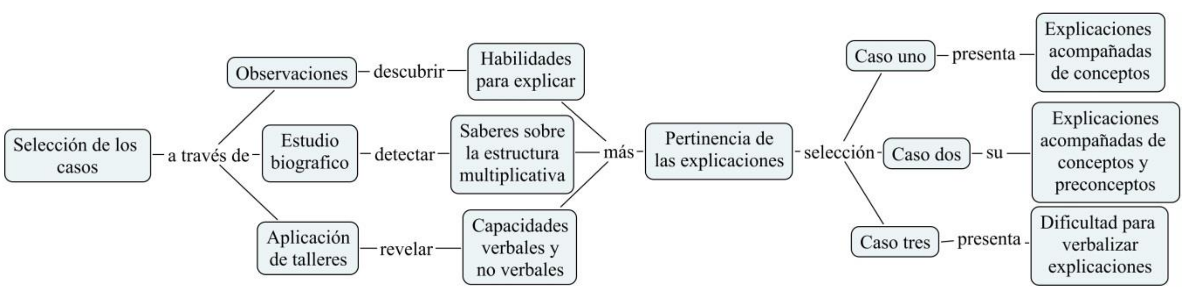


Ilustración 38 Selección de los casos

4.4.1 Los casos.

Los casos seleccionados, se encuentran inmersos en un contexto social particular, cada uno posee características propias que son dadas a conocer con el fin de identificar aquellas que aportan a la comprensión del caso que motiva la realización de este estudio, en este sentido la variedad y el equilibrio de los aportes de los participantes es importante pero las oportunidades de aprendizaje lo son aún más. A continuación se presenta entonces el contexto en el cual se ubican los participantes y posteriormente se realiza su descripción.

4.4.1.1 Contexto.

El municipio de Ciudad Bolívar, está ubicado al suroeste de Antioquia, específicamente, en cercanía al rio San Juan, cuenta con doscientos noventa y cinco kilómetros cuadrados aproximadamente, distribuidos así: suelo urbano 3,5 km^2 lo que equivale al 1.24% del área, mientras que el área rural está compuesta de 291,5 km^2, lo relativo al 98,76% del territorio contando con aproximadamente 30.568 habitantes. En la Ilustración 39 se observa un mapa del municipio, que permite observar la división política del municipio (allí se encuentran representadas sus veredas, corregimientos y zona urbana).

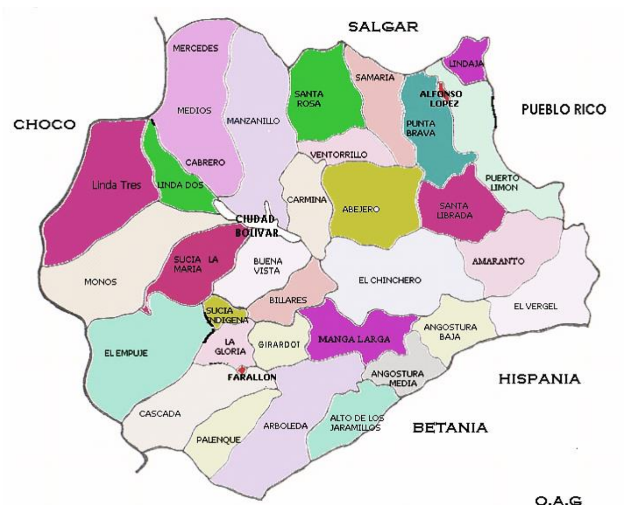


Ilustración 39. Mapa político de Ciudad Bolívar[21]

Tradicionalmente Ciudad Bolívar ha basado su economía en la agricultura, especialmente en el cultivo del café, en la ganadería y, durante los últimos años se ha proyectado como un municipio turístico. En el aspecto educativo, el municipio cuenta con el Plan Decenal de Educación (Bolívar, 2007) según un análisis realizado en dicho documento, con respecto a los resultados de las pruebas SABER, los estudiantes de Ciudad

[21] Tomado de la página web del municipio de Ciudad Bolívar http://www.ciudadbolivar-antioquia.gov.co/informacion_general.shtml

Bolívar presentan dificultades en las áreas de Ciencias Sociales y Matemáticas, en los grados 5º y 9º, ya que, la mayoría de los resultados obtenidos se encuentran por debajo del promedio nacional, departamental y regional notándose mayor dificultad en los estudiantes de la básica primaria.

En condiciones no ajenas a la realidad que circunda en el municipio, se encuentra la Institución Educativa San José del Citará con un número aproximado de mil estudiantes, atendidos en tres jornadas académicas. En la jornada de la tarde estudian los grados de la Básica Primaria, dentro de dichos grupos se encuentra el grado cuarto cero dos, compuesto por estudiantes alegres, dinámicos, espontáneos, participativos, inquietos y creativos cuyas explicaciones y argumentos dan cuenta de los conocimientos que poseen y de los que aún consideran necesitan comprender. En la jornada de la mañana realizan sus actividades académicas los estudiantes de la secundaria y en la noche se desarrolla una jornada denominada nocturna orientada a la formación básica y media de los mayores de edad.

4.4.1.2 Participantes.

Los participantes de este proyecto de investigación son tres estudiantes del grado cuarto cero dos, cuyas edades son: 9, 11 y 12 años, su participación es voluntaria, de igual modo los padres de familia han firmado un consentimiento informado.

A continuación se presenta la Tabla 5 para describir las características de cada uno de los participantes.

Casos-Estudiante	**Características observadas**
Jesús	Es un estudiante que durante el desarrollo de las clases, pregunta cuando no comprende y responde a los cuestionamientos que realiza su maestra, sus explicaciones se fundamentan en el conocimiento formal, adquirido dentro de la escuela y finalmente la maestra lo describe como un estudiante cuyas explicaciones se destacan de entre las de sus compañeros, lo considera estudioso, responsable y ordenado.

Nicolás	Es un estudiante que según su maestra, se esfuerza en dar a conocer la explicación de sus respuestas, constantemente participa en clase y manifiesta lo que piensa, sus explicaciones varían entre el conocimiento formal y el conocimiento empírico.
Regina	Es una estudiante cuyas respuestas corresponden a conocimientos adquiridos fuera del ámbito escolar, sus argumentos en ocasiones carecen de claridad, según su maestra sus explicaciones van acompañadas de conocimientos generalmente empíricos, propios.

Tabla 5. Descripción de los casos.

De esta manera se pretende describir gran variedad de razonamientos y, por supuesto, diferentes niveles de comprensión.

4.5 Acciones para la Elaboración de los Instrumentos

Para la elaboración de los instrumentos se han llevado a cabo varias acciones encaminadas a refinarlos , de tal modo que al ser aplicados se obtenga información amplia y detallada relacionada con el objeto de estudio, la validez de dichos instrumentos se ha llevado a cabo con estudiantes del mismo grado cuyas características son similares a las expuestas en la Tabla 5, lo anterior con el fin de dar mayor confiabilidad a la información suministrada por los instrumentos.

Durante la primera etapa se llevan a cabo una serie de observaciones que permiten el acercamiento a los participantes y al mismo tiempo, identificar el tipo de problemas que se proponen y se resuelven dentro del aula de clase al igual que la participación de los estudiantes en su solución, esta actividad es llevada a cabo durante un mes.

Posteriormente, en la segunda etapa, los estudiantes resuelven diferentes tipos de problema que involucran el uso de la estructura multiplicativa y consignan por escrito las explicaciones del porqué de sus respuestas. El desarrollo de esta actividad posibilita detectar que se requiere enmarcar cada tipo de problema en las distintas dimensiones de la comprensión con el fin de facilitar el análisis de los datos. A continuación la Ilustración 40 que representa la relación establecida entre los tipos de problema y las dimensiones de la comprensión.

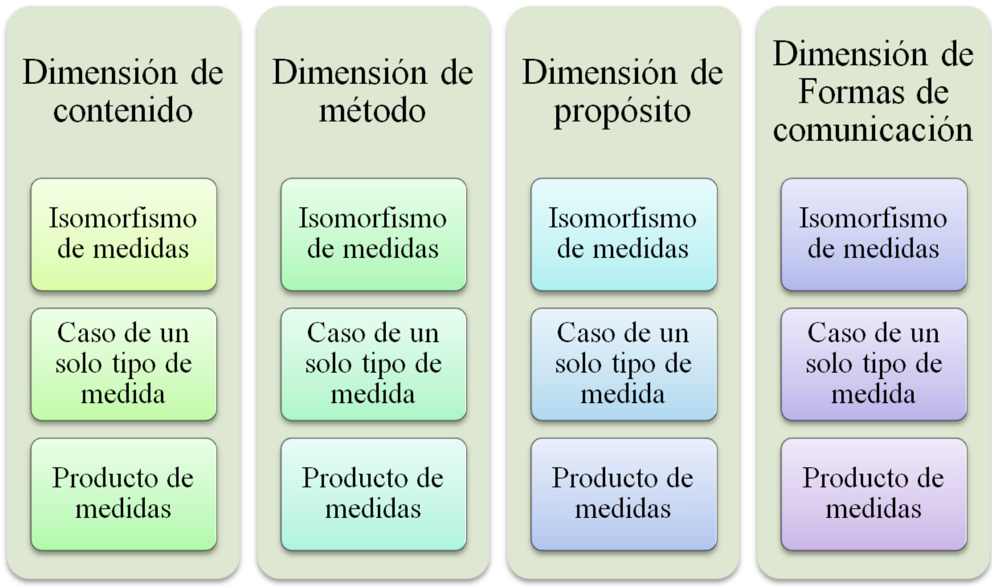


Ilustración 40. Guía para la elaboración de las preguntas para la entrevista

4.5.1 Técnicas e instrumentos utilizados.

En el estudio de caso se requiere del uso de instrumentos que permitan la recolección de información detallada con respecto al objeto de estudio, Stake (1999) asegura que las entrevistas y las observaciones son técnicas imprescindibles, por lo tanto durante el desarrollo de la presente investigación se han seleccionado ambos instrumentos para la recolección de la información.

4.5.1.1 La observación.

En cuanto a la observación, Stake (1999) plantea, que éstas conducen al investigador hacia una mejor comprensión del caso, permite dar significados interpretativos y cualitativos a los procesos de razonamiento que se construyen en el aula, en compañía del maestro y de sus pares, es decir, durante las observaciones se revelan los razonamientos que son construidos por los estudiantes desde la interacción social.

Dichas observaciones han sido realizadas en el grado cuarto cero dos (4°-02) debido a la disponibilidad manifestada por el maestro y sus estudiantes, el número de clases observadas han sido cinco en total, las fechas de encuentro ha sido definidas en común acuerdo con los participantes, esto con el fin de generar confianza y un ambiente de cordialidad entre éstos. Cabe aclarar que las observaciones se llevaron a cabo como un trabajo previo a la aplicación de las entrevistas, esto con el propósito de realizar un primer acercamiento al grupo y a los procesos de razonamiento que se hacen evidentes en el desarrollo de las clases.

Las observaciones son de gran valor en el proceso investigativo ya que permiten, además de conocer los participantes dentro de lo cotidiano; identificar el lugar, las personas, la dinámica de la institución, de los estudiantes, de los maestros y de los participantes en sí.

4.5.1.2 La entrevista.

Por su parte las entrevistas son consideradas como la posibilidad de conocer las interpretaciones y comprensiones de los estudiantes, en este sentido la entrevista “es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples” (Stake, 1999, p. 63). Por lo tanto, las que se plantean en el presente proyecto son entrevistas semiestructuradas, ya que, cada participante tiene características propias y formas particulares de razonar, dando paso a nuevas preguntas que surgen dentro del desarrollo de la entrevista, lo que permite una mayor comprensión del objeto de estudio.

Al respecto, Stake (1999) asegura que en el desarrollo de cada entrevista las preguntas que surgen no suelen ser las mismas en cada caso puesto que “se espera que cada entrevistado haya tenido experiencias únicas, historias especiales que contar” (Stake, 1999, pp. 63-64) . Se trata que en el transcurso de la entrevista se den paso a las descripciones, a las explicaciones, a las relaciones, lo que compone el objetivo de la investigación.

En la ejecución de la entrevista, se dispone de un aula de clase totalmente acondicinada con material concreto (tapas, cubos de madera, bloques lógicos, lápiz, papel, bolas de cristal, dibujos, entre otros) que puede ser empleado para la solución de los problemas, al mismo tiempo acontece en un ambiente de cordialidad donde es posible retroceder y retomar temas ya trabajados, las entrevisatas son realizadas en tres momentos con el fin de aprovechar el tiempo de concentración de los estudiantes, teniendo en cuenta las características propias de las edades en las que se encuentran.

4.6 Desarrollo de las Fases de la Investigación

La organización en el proceso de recolección de datos permite estructurar y optimizar el trabajo de campo, de modo que tal y como lo declara Stake (1999) se le atribuya a los datos el sentido y el significado que le otorgan los participantes. En el presente trabajo de investigación para la recolección de la información se tienen en cuenta las siguientes pautas: información, consentimientos informados, observaciones, primera entrevista: problemas tipo isomorfismo de medidas, segunda entrevista: Caso un solo tipo de medida, tercera entrevista: producto de medidas,

4.6.1 Información.

Inicialmente, se realiza un acercamiento con las directivas de la Institución Educativa y los maestros de los grados cuarto, este encuentro genera la posibilidad de exponer y dar a conocer el objetivo de la investigación, describir los procesos de razonamiento de los estudiantes del grado cuarto con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa y realizar su análisis a la luz de las dimensiones de la comprensión.

En esta fase de información, también se realizan talleres de acercamiento con los estudiantes con el fin de identificar procesos de razonamiento, dominio de las operaciones que involucran la estructura multiplicativa, su capacidad para resolver problemas y el gusto por el área de matemáticas. Dentro de las actividades ejecutadas se encuentran los cuestionarios, taller de resolución de problemas y autobiografías, mencionadas en la Ilustración 41.

Ilustración 41. Actividades fase de información

4.6.2 Consentimientos informados.

Las actividades realizadas durante la fase inicial de la recolección de datos, arroja información suficiente para la selección de los casos que pueden dar aportes significativos relacionados con el tema de investigación. En esta dirección, se hace necesaria la obtención de consentimiento informado de los padres ya que “es fundamental obtener un permiso escrito de los padres cuando se trata de atender personalmente a niños concretos” (Stake, 1999, p. 58).

Para ello es necesario realizar una reunión informativa con los padres de familia de los estudiantes involucrados, donde se expone el propósito de la investigación y se da paso a la aprobación y firma de los consentimientos informados. En el desarrollo de esta actividad los padres de familia se muestran interesados e incluso felices de participar según ellos en la ejecución del proyecto.

4.6.3 Las observaciones.

Las observaciones de clase se realizan en medio del ambiente cotidiano de aula, lo estudiantes juegan, charlan, estudian en el ir y venir de las dinámicas de clase; en esta etapa, las observaciones proporcionan un suministro de información interesante con respecto a la construcción de procesos de razonamiento en medio de la interacción con los otros, permiten ver el razonamiento de cada caso cuando está en compañía de los otros, en medio de sus pares y maestros.

Este proceso de observación es ejecutado durante un mes y medio, con el propósito de describir de manera detallada la dinámica del grupo y registrar el mayor número de razonamientos posibles con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa. Dichas observaciones transcurren en el desarrollo de la clase de matemáticas en previo acuerdo con la maestra, lo anterior con el fin de abordar solo aquellas temáticas que son de interés para el proyecto de investigación.

4.6.4 Primera entrevista: Problemas tipo isomorfismo de medidas.

Esta entrevista se encuentra diseñada para identificar los razonamientos de los estudiantes con respecto a la solución de problemas de tipo isomorfismo de medidas según Vergnaud (1991) en donde se relacionan cuatro tipos de cantidades, dos tipos de una medida y dos tipos de otra, un ejemplo de pregunta consignada dentro de dicha entrevista se encuentra representado en la Ilustración 42.

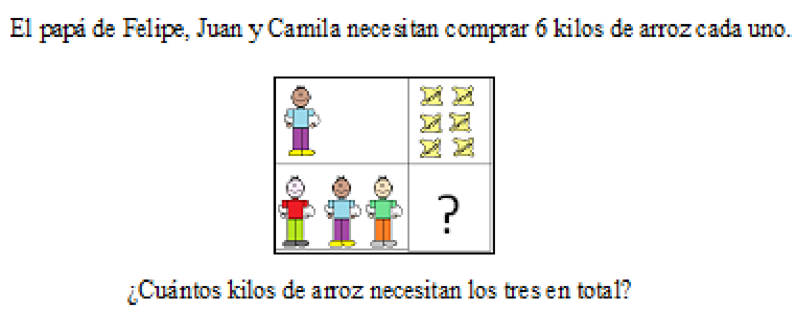


Ilustración 42. Ejemplo de problema tipo isomorfismo de medidas

Las respuestas de los estudiantes presentan características propias (dominio del conocimiento formal, experiencias propias del contexto que se encuentran presentes dentro de la construcción del conocimiento y la resolución de problemas, entre otras), cada uno emplea generalmente un proceso particular para llegar a la respuesta y sus explicaciones dan cuenta del porqué de dichos procesos.

4.6.5 Segunda entrevista: Caso de un solo tipo de medida.

En el segundo momento de la entrevista se abordan los tipos de problema relacionados con el caso de un solo tipo de medida, donde se requiere que los estudiantes hagan una distinción entre medida y escalar. Un ejemplo de pregunta incluida dentro de dicha entrevista es la siguiente:

Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel?
(materiales a utilizar: bolas de cristal)

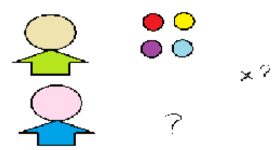


Ilustración 43. Pregunta caso de un solo tipo de medida

Al enfrentarse a este tipo de pregunta, los estudiantes se muestran activos, propositivos y creativos durante el planteamiento de procesos de solución.

4.6.6 Tercera entrevista: Producto de medidas.

La entrevista número tres está relacionada con preguntas que involucran problemas de tipo, producto de medidas; estos problemas pueden ser resueltos a través de una regla de tres, en él se encuentran incluidos dos clases de problemas de multiplicación y de división. Las preguntas de este tipo incluyen problemas como el que se presenta a continuación:

El grado cuarto está compuesto por 36 estudiantes,

la maestra quiere realizar 6 hileras con igual número de alumnos.

¿Cuántos estudiantes deben ubicarse en cada una de las hileras?

Plantea dos formas de solucionar la situación.

Ilustración 44. Pregunta tipo producto de medidas

Es común que durante la solución de este tipo de problemas los estudiantes presenten mayores dificultades al plantear la solución del problema (es decir, requieren de más tiempo para resolver el problema, realizan preguntas con el objetivo de refinar la interpretación del problema), incluso argumentan no encontrar una solución acertada. El aporte de información suministrado por los instrumentos de recolección, son analizados en el siguiente capítulo.

Capítulo 5. Análisis de los Resultados:

Tres Casos, Cuatro Dimensiones de la Comprensión, Múltiples Formas de Razonar

Las voces de los estudiantes son el sonido de su alma, de su vida
de lo que saben, lo que piensan y lo que razonan.

Rivera (2014)

En el presente capítulo se da una mirada interpretativa a los datos que emergen en el transcurso de la investigación. Como se ha mencionado en el capítulo anterior, durante el trayecto investigativo se ha dado prioridad a las voces de los estudiantes, como la manifestación de sus procesos de razonamiento, estas voces son asumidas como aquellos argumentos verbales y no verbales empleados por éstos durante la solución de un problema asociado a la estructura multiplicativa.

Teniendo en cuenta lo anterior, durante el desarrollo de la investigación se observa que los estudiantes realizan diferentes recorridos para dar solución a un mismo problema, lo que permite identificar en ellos diversas formas de argumentar (a través de gráficas, operaciones formales, expresiones verbales…) presentar y defender sus ideas, robustecer concepciones iniciales sobre el concepto de estructura multiplicativa y buscar múltiples caminos de solución a un mismo problema.

En síntesis, se interpretan procesos de razonamiento, niveles y dimensiones de comprensión en los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria, al resolver problemas asociados a las estructuras multiplicativas[22] dando cuenta inicialmente de la fase de observación y posteriormente el análisis de las entrevistas semi-estructuradas aplicadas a cada estudiante. Dicho análisis es realizado a la luz de los referentes teóricos abordados durante la presente investigación, es decir, los argumentos y las explicaciones retomados desde la mirada de Balacheff e interpretados bajo el foco de las dimensiones y niveles de la comprensión que se proponen en la teoría de enseñanza para la comprensión.

5.1 La Explicación en Medio del Aula de Clase

En el desarrollo de la etapa de recolección de datos las observaciones dan paso a explicaciones y construcciones de los estudiantes, éstas exteriorizan los modos de pensar y procesar la información, conocer estos modos de pensar y procesar la información permitirá al maestro refinar y potenciar los procesos de pensamiento dentro del aula de clase. Los datos que se presentan a continuación fueron extraídos de momentos de la clase, su análisis está relacionado con los planteamientos de Balacheff y Vergnaud, posteriormente se asocian estas reflexiones a la dimensiones y niveles de la comprensión plateados en la teoría de enseñanza para la comprensión.

5.1.1 La explicación como socialización de significados.

Es de anotar que el aula de clase es un laboratorio de argumentos. Cuando un estudiante está “pensando” sobre: ¿qué? ¿cuál? y ¿cómo?; está elaborando una serie de procesos en su mente, codificando y decodificando la información que posee para producir una nueva información, información construida a partir de los conocimientos que éste ha estructurado en la interacción con los otros, en el contexto y la información a mano que ha sido suministrada por el maestro o por uno de sus compañeros de clase.

[22] Para proteger la identidad de los participantes se emplearan los siguientes seudónimos: Laura, Jaime y Nicolás.

En este sentido la construcción de explicaciones se convierte en un trabajo colectivo, en un trabajo de socialización donde "los alumnos no solamente se apropian del problema, sino que también comparten su significado" (Balacheff, 2000. p, 8). Las palabras confusas de un compañero de clase pueden ser la luz que clarifique los pensamientos y razonamientos de quien está a su lado, esto puede evidenciarse durante la solución del siguiente problema, problema propuesto por la maestra de los estudiantes del grado cuarto durante la clase de matemáticas:

> En consecuencia del conflicto armado en Colombia se han desplazado muchas familias, Luis y su familia son una de ellas, en su finca se producían mensualmente 15 arrobas de cacao, 40 arrobas de plátano, también tenían pozos de peces, gallinas ponedoras y una huerta y un jardín en la finca, a causa de las amenazas Luis y su familia lo dejaron todo y ahora viven en una ciudad hacinados en un cuarto, la señora doña Estela, ahora hace arepas para que su hija Erica las venda, su papá es un reciclador y Luisito vende confites en los semáforos. Ya hace un año abandonaron su finca. (Observación dos)

La maestra seguidamente propone a los estudiantes resolver en pequeños grupos los problemas que emergen a partir del planteamiento anterior, la pregunta ¿Cuántas arrobas de cacao recoge Luis en un año? Es discutida por los estudiantes en sus pequeños grupos. A continuación se ilustra la conversación que ocurre entre Juan y Alejandro[23].

El siguiente apartado cuenta con una serie de abreviaturas que corresponden a los códigos que emergen durante la etapa de análisis: comunicación en el aula (Comunic. Aul), intercambio de saberes (Intercmb. Sab), explicación en el aula (Explicac. Aul), comprensión en el aula (Compren. Aul).

(104)	Los estudiantes conversaban en sus respectivos grupos mientras la maestra realizaba algunas explicaciones en cada uno.	Comunic. Aul
(105)	Entre diversas conversaciones que ocurren en el aula, se hace necesario resaltar la siguiente:	Comunic. Aul
(106)	Juan: -"¿no entiende?" pregunta a su compañero del lado.	Intercmb. Sab
(107)	Alejandro: -El estudiante balancea su cabeza de un lado a	Intercmb. Sab

[23] Los nombres que aparecen son seudónimos de los protagonistas.

otro, señalando que no.

(108) Juan: “él recoge cada mes 15 arrobas de cacao, y la profe está preguntando que cuántas recoge en el año, osea que un año trae doce meses, usted multiplica las quince arrobas de un mes por los doce meses que trae un año, en vez de sumar doce veces 15, si me entiende?” Explicac. Aul

(109) Alejandro: abre sus ojos y dice: “Ah! Si,si ya entendí, claro recoge 15 en un mes, si,si,si”. Compren. Aul

En la situación anterior puede observarse que Juan es capaz de reconocer en qué momento debe emplear la multiplicación como operación para solucionar un problema determinado dentro del aula; sin embargo, Alejandro aún no se ha percatado por qué se hace necesario emplear una multiplicación y aunque la profe ha pasado por los grupos, Alejandro aún no entiende multiplicar qué con qué y por qué. Lo anterior se deduce de la siguiente información “- Juan: ¿no entiende?- pregunta a su compañero del lado. El estudiante balancea su cabeza de un lado al otro señalando que no”. Acto seguido, la conversación con su compañero del lado le permite aclarar sus ideas y organizar la información que se ha obtenido.

Teniendo en cuenta la afirmación utilizada por Juan para aclarar las dudas de su compañero de clase, donde expresa: “él recoge cada mes 15 arrobas de cacao, y la profe está preguntando que cuántas recoge en el año, osea que un año trae doce meses, usted multiplica las quince arrobas de un mes por los doce meses que trae un año, en vez de sumar doce veces 15…” en este caso, en palabras de Vergnaud (1991) lo que el estudiante ha realizado es una correspondencia entre dos tipos de cantidades (arrobas y meses) dicha correspondencia puede representarse mediante la Tabla 6.

Meses	*Arrobas*
1	15
12	x

Tabla 6. Esquema análogo de representación

La construcción de dicha correspondencia también puede representarse de la siguiente manera, en búsqueda de la solución del problema sin utilizar la multiplicación como operación formal, tal representación, puede asociarse también a la explicación elaborada por Juan.

Meses		*Arrobas*
$\boxed{1}$	→	$\boxed{15}$
2	→	30
4	→	45
5	→	60
6	→	75
7	→	90
8	→	105
9	→	120
10	→	135
11	→	150
$\boxed{12}$	→	$\boxed{165}$
13	→	180

Tabla 7. Tabla de correspondencia que traduce un isomorfismo

En la afirmación de Juan puede inferirse que identifica o reconoce la multiplicación como una operación que permite el cálculo de ciertas cantidades, reconoce que es diferente de la suma o de la resta y que es la operación más acertada para resolver el problema que ha planteado su maestra, esto se evidencia cuando asegura "usted multiplica las quince arrobas de un mes por los doce meses que trae un año, en vez de sumar doce veces 15…" reconoce la multiplicación como una operación que se asocia a la suma y que al mismo tiempo la simplifica.

Por lo descrito en el parrafo anterior puede decirse que Juan ha tranformado sus creencias intuitivas y los conocimientos previos que le ha proporcionado su entorno se han fusionado, reformulado, "transformado o reemplazado" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 230) su pensamiento está basado en "conocimientos y modos de pensar disciplinarios" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240) propone que en lugar de realizar una suma repetida puede hacer una multiplicación que simplifique tal suma, según esto, las explicaciones de Juan dan cuenta de un nivel de comprensión de aprendiz en la dimensión de contenido que se expone en la teoría de enseñanaza para la comprensión.

5.1.2 La interacción social como facilitador de procesos.

La socialización además de aportar significados propios, en ocasiones se convierte en una construcción colectiva de razonamientos, la socialización implica entonces comprender los argumentos del otro, relacionarlos con los argumentos propios y crear nuevos razonamientos. Este ejercicio de razonar en conjunto se evidencia en un momento de la clase cuando la maestra después de realizar una actividad práctica con sus estudiantes en el patio les solicita contar el número de estudiantes que se hallan en una gráfica.

En el transcurso del presente episodio de clase se observan los siguientes códigos: comunicación en el aula (Comunic. Aul), secuencia de conteo (Secuenc. Cont) y construcción colectiva (Constr. Colec).

(56)	Al terminar la gráfica les solicitó que por favor contaran el número de estudiantes que se encuentran formados, al cabo de un momento, algunos estudiantes en forma aleatoria empezaron decir en voz alta y al tiempo:	Comunic. Aul
(57)	- Veintidós. - Veintiuno. - Veinticuatro. - Veinte.	Secuenc. Cont
(58)	Antes de lanzar estas respuestas noté que algunos estudiantes contaban uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho….hasta llegar a veintidós. Un número más pequeño de estudiantes contó dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce, dieciséis, dieciocho, veinte, veintidós	Constr. Colec
(59)	Al constatar que eran veintidós estudiantes la maestra preguntó: ¿cómo podemos representar el número de estudiantes teniendo en cuenta las filas y las columnas?	Comunic. Aul
(60)	Sumando, 4+4+4+4+4+2 da 22 dijo uno de los estudiantes	Constr. Colec
(61)	Luego la profesora interroga de nuevo: - ¿No existe ninguna otra operación para representar el número de estudiantes?	Comunic. Aul

(62)	- Si, una resta.	Constr. Colec
(63)	- Si, una resta y prestamos.	Constr. Colec
(64)	Profesora: - ¿cómo haríamos la resta? Muéstrame como.	Comunic. Aul
(65)	El estudiante miró un momento y dijo: -no es una resta porque da menos, a lo que otro agregó: - no es porque quitamos.	Constr. Colec
(66)	De inmediato un estudiante sugirió que podrían hacerlo con una multiplicación…	Constr. Colec
(67)	Pero guardó silencio cuando la profesora le pidió que le enseñara como hacerlo, en el instante, uno salió corriendo hacia el tablero y dijo:	Comunic. Aul
(68)	- Profe multiplicamos: 6 x 4 y da… 24 le ayudó la profe, y son 22. Entonces inmediatamente el estudiante agregó: le quitamos 2 y quedan 22.	Constr. Colec
(69)	La profesora siguió interrogando: -¿qué otra multiplicación podemos hacer?	Comunic. Aul
(70)	- Un estudiante corrió hacia el tablero y afirmó:	Constr. Colec

$$\begin{array}{r} 4 \times 4 = 16 + \\ 6 \\ \hline 22 \end{array}$$

(71)	Luego de esto la educadora siguió interrogando a los estudiantes acerca de cómo más podrían representarse la filas en forma de multiplicación y no hubo una respuesta diferente.	Comunic. Aul

La interacción social dentro del aula permite a los estudiantes debatir y discutir sus argumentos, estas discusiones dan origen a razonamientos cada vez más sofisticados tal y como puede observarse en el apartado anterior: los estudiantes a través del diálogo y la socialización evolucionan desde una situación de conteo (incluso de uno en uno, en algunos casos) a una multiplicación, en este sentido "la interacción social se convierte en un elemento determinante en esta toma de conciencia" (Balacheff, 2000, p. 8), la toma de conciencia le permite inferir que la resta no es la operación indicada para descubrir la cantidad de estudiantes "porque da menos, a lo que otro agregó: - no es porque quitamos" dentro de esta afirmación se encuentran implícitos conocimientos que identifican la resta como una operación que implica desagregar, quitar, disminuir, separar.

Después de llegar a estas conclusiones los estudiantes plantean la suma: “4+4+4+4+4+2 da 22” puede ser representada también a través de una multiplicación, esta asociación puede dar cuenta de la definición de la suma como una suma reiterada, definición usualmente utilizada en la escuela, estas conexiones entre operaciones proporcionan al estudiante “más formas para pensar y resolver los problemas” (Ministerio de Educación Nacional, 1998).

A la luz de las dimensiones de la comprensión (Mansilla y Gardner, 2003) la situación anterior puede relacionarse de manera directa con la dimensión: formas de comunicación, ya que en ella puede evidenciarse la forma como los estudiantes a través del uso del discurso “hacen público el conocimiento” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 237) la evolución de sus razonamientos está mediada por el lenguaje, la eficacia en la transmisión y recepción de las ideas, por actos comunicativos. Con respecto al nivel de comprensión, puede decirse que ha evolucionado ya que inicialmente las explicaciones de los estudiantes están basadas en “conocimientos intuitivos” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 239) que provienen en muchas ocasiones de acciones ensayo-error[24] como tratando de atrapar la respuesta correcta en el aire, sin embargo con la yuda de sus compañeros dichas explicaciones empiezan a destacar “conceptos o ideas disciplinarios” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240) lo que permite inferir que ha pasado de un nivel de comprensión ingenua a un nivel de comprensión de novatos.

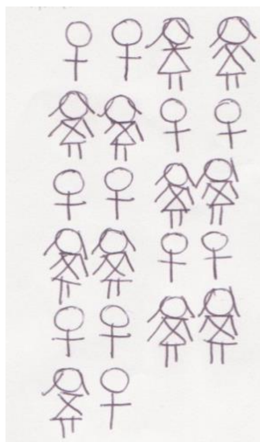
5.1.3 Múltiples razonamientos, múltiples procesos algorítmicos.

Dentro de las clases observadas, en ocasiones se presentan situaciones donde el estudiante debe recurrir a sucesiones algorítmicas para resolver un problema que requiere el uso de la estructura multiplicativa, este es el caso de Diego, quien durante la clase de matemáticas para dar solución al problema que se presenta a continuación, decidió realizar una multiplicación con un proceso algorítmico muy particular.

[24] Con esto me refiero a las situaciones donde los estudiantes sin razón ni motivo deciden proponer una explicación y luego él mismo u otro compañero comprueba que así no es.

En el siguiente apartado se encuentran códigos relacionados con las actividades de motivación (Actvid. Motv), la socialización en el aula (Socializ. Aul), razonamiento en el aula (Razonam. Aul), explicación procesos algorítmicos (Exp. Proc. Alg).

(01)	Al inicio de la sesión, la maestra realizó la siguiente actividad: Inicialmente formó a los estudiantes en el patio del colegio y les solicitó observar muy bien la organización de las filas, luego de un momento, guió a los estudiantes hasta el aula de clase. Allí la profesora reconstruyó con ellos la siguiente gráfica.	Actvid. Motv



(09)	… Después de socializar las distintas representaciones elaboradas por lo estudiantes, la maestra realizó el siguiente interrogante:	Socializ. Aul
(80)	Y si quiero colocar cinco alumnos en una fila, ¿Qué tengo que hacer para saber cuántas columnas me quedan?	Comunic. Aul
(81)	… Luego de pensar un momento, otro estudiante dice: - profe una multiplicación.	Razonam. Aul
(82)	Ésta le pide que por favor salga y la realice en el tablero. El estudiante accede y realiza lo siguiente mientras explica: 22 x 5 = 20 por que 5 x 2 = 10 y 5 por el otro 2 también da: 10. 10 y 10 da veinte, entonces	Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} 2\,2 \times \\ 5 \\ \hline 1\,0 \\ 1\,0 \\ \hline 2\,0 \end{array}$$ Proceso algorítmico.

En la situación anterior se puede observar que la respuesta de Diego hace parte del proceso de construcción que realizan los estudiantes dentro del aula de clase, su reflexión como se observará más adelante ayudará a otros estudiantes a buscar respuestas y procesos más acertados. El propósito de este apartado es realizar una reflexión en torno al proceso que Diego plantea para resolver tal multiplicación:

$$\begin{array}{c} 2\,2\ \text{x} \\ 5 \\ \hline \end{array}$$

En la solución del problema Diego reconoce que ha de comenzar por las unidades, el primer paso de su proceso es:

$$\begin{array}{c} 2\,2\ \text{x} \\ 5 \\ \hline 1\,0 \end{array}$$

Luego repite el mismo procedimiento esta vez con las decenas:

$$\begin{array}{c} 2\,2\ \text{x} \\ 5 \\ \hline 1\,0 \\ 1\,0 \\ \hline \end{array}$$

Finalmente suma ambas cantidades y obtiene como resultado un total:

$$\begin{array}{c} 2\,2\ \text{x} \\ 5 \\ \hline 1\,0 \\ 1\,0 \\ \hline 2\,0 \end{array}$$

Diego reconoce procedimientos algorítmicos en torno a la multiplicación ya que sus explicaciones están orientadas a reproducir el proceso algorítmico estándar, presentando la información en columnas, iniciando un recorrido por las unidades y planteando la suma como operación implicada dentro del proceso, de igual manera se evidencia el reconocimiento de la multiplicación como un método de cálculo diferente al de la suma y la resta, sin embargo aún no reconoce las situaciones donde éste debe ser aplicado.

En el ejercicio anterior se puede observar que Diego, ha desarrollado su propia forma de resolver la multiplicación, este algoritmo, es personal y único, con el transcurrir del tiempo y la ayuda de la socialización estos razonamientos darán paso a procedimientos más rigurosos, propios de las matemáticas. Dicha forma personal y única de construir conocimiento está relacionada con la dimensión de método propuesta en la teoría de enseñanza para la comprensión, ya que, es el estudiante quién fórmula sus propias hipótesis, sus propias maneras de construir conocimiento. Con la ayuda del tiempo y la experiencia dichas concepciones se acercaran cada vez más a los conceptos y procedimientos de los expertos (Mansilla y Gardner, 2003, p. 232) mejorando al mismo tiempo sus niveles de comprensión.

5.1.4 La multiplicación como algoritmo en el aula.

En ocasiones las explicaciones de los estudiantes están influenciadas por los procesos algorítmicos trabajados en el aula de clase, el algoritmo usualmente trabajado en el contexto escolar objeto de estudio es el siguiente: generalmente se ubican las cantidades de mayor valor en el lugar del multiplicando y la otra cifra en el lugar del multiplicador, luego de ello se efectúa la operación entre los números que corresponden a las unidades (la unidad del multiplicador deberá efectuarse con los dígitos del multiplicando) posteriormente, se realiza el mismo procedimiento con las decenas que pertenecen al multiplicador, teniendo en cuenta que ha de dejarse libre el lugar de las unidades en la segunda fila. Finalmente, se suma el producto de tantas cantidades como se requiera.

Este procedimiento es aplicado por uno de los estudiantes del grado cuarto en una de las clases que ha orientado la maestra. De igual forma se suman un nuevo código a los mencionados en apartados anteriores: problemas relacionados con la estructura multiplicativa (Prob. Est. Mul).

(118) -¿Cuántos huevos son una docena? ¿Cuántos huevos recogía Érica para la venta semanal, si llevaba cuarenta y seis docenas a la semana? Pregunta la maestra — Prob. Est. Mul

(119) Uno de los estudiantes respondió desde su asiento doce, otro asegura cuarenta y seis… — Comunic. Aul

(120) La maestra interroga de nuevo: ¿Cuántos huevos tiene una docena? — Comunic. Aul

(121) Los estudiantes responden en coro: doce. — Comunic. Aul

(122) Maestra: ¿Qué tenemos que hacer ahí? — Prob. Est. Mul

(123) Una suma… ve una multiplicación. Responde uno de los estudiantes. — Razonam. Aul

(124) Maestra: “Fernando, venga hágala” — Comunic. Aul

(125) Fernando sale al tablero y realiza la siguiente operación. — Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} 46\ \text{x} \\ \underline{12\quad\ } \end{array}$$

(126) Al tiempo que expone, dos por seis… doce, pondo el dos y llevo… uno — Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} {}^{1}\!46\ \text{x} \\ \underline{12\quad\ } \\ 2\quad\ \end{array}$$

(127) Dos por cuatro… ocho y una que llevaba nueve, pongo el nueve y sigo con el uno. — Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} {}^{1}\!46\ \text{x} \\ \underline{12\quad\ } \\ 2\quad\ \end{array}$$

(128) Una por seis… seis, pongo el seis debajo del nueve… — Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} {}^{1}\!46\ \text{x} \\ \underline{12\quad\ } \\ 9\ 2\quad\ \\ 6\quad\quad\ \ \end{array}$$

(129) Una por cuatro, cuatro. Pongo el cuatro. — Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} 46\ x \\ 12 \\ \hline 92 \\ 46 \\ \hline \end{array}$$

(130) Luego hago la suma. Durante la realización de la suma Fernando balbuceaba en voz baja y movía sus dedos. Exp. Proc. Alg

$$\begin{array}{r} 46\ x \\ 12 \\ \hline 92 \\ 46 \\ \hline 552 \end{array}$$

En la solución del ejercicio anterior, Fernando ha aplicado un algoritmo reconocido por los estudiantes que hacen parte de su grupo escolar, sin embargo se hace necesario identificar aquellos procesos que suceden en la mente del estudiante para llegar a tal algoritmo, es decir “el quehacer matemático no está en la aplicación del algoritmo, sino en los mecanismos intelectuales que nos han permitido llegar a él” (Bravo, 2005, p. 33) lo que significa que se hace necesario desentrañar de la explicación del estudiante aquello que ha sucedido en su mente para alcanzar tales explicaciones.

De igual manera, las explicaciones de Fernando dan cuenta de la trascendencia de sus “perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual puede moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 230) en este caso aunque Fernando ha transferido sus conocimientos intuitivos a procedimientos propios de la disciplina puede decirse que se dan “como procedimientos mecánicos paso por paso” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240), lo que indica un nivel de comprensión de novato dentro de la dimensión de contenido.

5.1.5 Aceptación de las explicaciones construidas en el aula.

La destreza en la realización de los algoritmos que involucran una u otra operación solo son una parte de los procesos y aprendizajes que se construyen en el aula, reconocer el mecanismo de llevarlas, ejecutar secuencias algorítmicas y proponer operaciones acertadas para resolver un determinado problema requiere también de ciertos procesos de razonamiento en el estudiante, procesos que emergen desde la interacción con los otros, desde el planteamiento de problemas y actividades de clase que promuevan la movilización de dicho razonamiento.

Esto puede inferirse teniendo en cuenta la siguiente observación de clase, donde se exponen categorías relacionadas con la explicación. Hipótesis dentro del aula (Hipót. Aula), aceptación de hipótesis (Acept. Hipót), explicaciones que involucran el razonamiento en el aula (Exp. Raz. Aul), análisis de las explicaciones y razonamientos (Anal. Exp. Raz) aceptación de explicaciones y razonamientos (Acp. Exp. Raz)

(118)	La maestra realiza la siguiente pregunta: "¿Cuántas libras de pescado vendía Luis en un mes?"	Prob. Est. Mul
(119)	-"Veinticinco" responde uno de los estudiantes casi de manera automática.	Hipót. Aul
(120)	Los demás estudiantes del curso, lo observan con un poco de asombro, mientras otros repiten "veinticinco".	Acept. Hipót
(121)	-¿Cuántas libras de pescado recogió Luis en todo el mes? -¿Qué tengo qué hacer? Pregunta de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(122)	Los estudiantes empiezan a responder de manera aleatoria: "una suma" "una resta" hasta que una voz en la multitud dice "una multiplicación".	Hipót. Aul
(123)	- ¿Qué multiplicamos? Interroga de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(124)	Una de las estudiantes levanta su mano con ansiedad y repite continuamente "yo, yo, yo"	Comunic. Aul
(125)	La maestra le da la palabra y Catalina afirma: "multiplica las 25 libras de pescado que recoge cada día por los 30 días que tiene el mes".	Exp. Raz. Aul
(126)	En ese instante la maestra pregunta: ¿quién dice que esa no es la respuesta?	Comunic. Aul
(127)	Tres estudiantes levantan la mano. La maestra interroga a uno de ellos y le pregunta. -¿Por qué no? ¿Por qué crees que no?	Anal. Exp. Raz
(128)	Porque recoge veinticinco libras en un día entonces multiplica 25 libras por cuatro semanas que tiene un mes. Explica el estudiante seleccionado por la maestra.	Anal. Exp. Raz
(129)	En ese instante los estudiantes empiezan a conversar unos con otros. Catalina intervine y afirma: No, porque quedan faltando	Exp. Raz. Aul

	las libras de los otros días. Es que él recoge esos pescados todos los días, no solamente un día. Por eso es que hay que multiplicarlo por los treinta días.	
(130)	Luego de esto de nuevo la maestra pregunta: ¿Quién cree que se puede hacer distinto? ¿Quién dice que no es así?	Anal. Exp. Raz
	Uno de los estudiantes que inicialmente manifestó su desacuerdo manifestó: Ah! Si es así, como Cata dice.	Acp. Exp. Raz

En algunos apartados de la clase anteriormente descrita, se puede identificar que las respuestas de los estudiantes inicialmente estaban sujetas al enunciado o la pregunta que realiza la maestra, sin embargo mientras avanza la clase sus respuestas son más elaboradas e incluso aceptadas por sus compañeros, quienes finalmente están de acuerdo con la posición y explicación de su compañero de clase. Estas construcciones se encuentran relacionadas con la producción de argumentos válidos, “una parte importante del aprendizaje en matemáticas está relacionado con el desarrollo de explicaciones aceptables matemáticamente, es decir, con la elaboración de argumentos válidos en matemáticas” (Balacheff y otros, 2000. p, 121)

De igual forma, en el desarrollo de las actividades programadas con los estudiantes se hace necesario trabajar la capacidad de reconocer inconsistencias en sus formas de razonar, el reconocimiento de estas inconsistencias les permite dar evolución a sus razonamientos y refinar sus niveles de comprensión, dicha actividad debe darse a nivel individual y a nivel colectivo, pues en varias ocasiones los estudiantes son pares de sus demás compañeros, es decir, el trabajo de aula es un trabajo conjunto que no solo recae sobre los hombros del maestro.

Finalmente de las observaciones realizadas en el aula de clase puede inferirse que los estudiantes construyen procesos de razonamiento cada vez más evolucionados gracias a la socialización “la experiencia crucial toma un significado diferente en la interacción social en la que ella se convierte en un medio” (Balacheff, 2000, p. 176). En un medio para discutir, para explicar, para clarar, para refutar, para construir conocimiento.

5.2 Caso I: Jesús

Jesús es un estudiante que se caracteriza por su buen rendimiento académico, la maestra asegura que "Jesús es bastante claro en sus explicaciones". En el desarrollo de las entrevistas Jesús se esforzó por dar respuesta a todas las preguntas y siempre estuvo dispuesto a la hora de su realización. En dichas entrevistas se encuentran una serie de códigos relacionados con la explicación, el razonamiento y la estructura multiplicativa.

A continuación se explicita el significado de cada una de las abreviaturas: problema relacionado con la estructura multiplicativa (Prob. Est. Mul), razonamiento dimensión de contenido (Raz. Dim. Con), pregunta que indaga por los procesos de razonamiento (Prg. Proc. Raz.), explicación de procesos algorítmicos (Exp. Proc. Alg), razonamiento estructura multiplicativa (Raz. Estr. Mul), material concreto (Mat. Concret), razonamiento dimensión propósito (Raz. Dim. Pro), construcción del proceso de razonamiento (Con. Pro. Raz), pregunta de suministro de información (Prg. Sum. Inf), suministro de información del problema (Sum. Inf. Pro), razonamiento dimensión formas comunicación (Raz. Dim. Com), razonamiento dimensión método (Raz. Dim. Mét).

5.2.1 Razonamientos asociados a la dimensión de contenido.

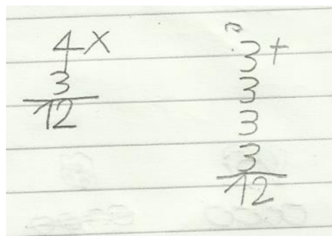
En esta categoría se dan a conocer aquellas explicaciones elaboradas por Jesús que dan cuenta de los razonamientos que éste construye con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa y que se encuentran enmarcados en la dimensión de contenido expuesta por la teoría de enseñanza para la comprensión.

5.2.1.1 Propiedad conmutativa: explicaciones cortas con sentido.

Con respecto a la estructura multiplicativa se proponen diferentes tipos de problemas, a continuación se presenta un problema de factor multiplicante[25] donde las magnitudes se amplifican o por el contrario se simplifican a través de una relación multiplicativa.

[25] Tipo de problema definido en los Lineamientos Curriculares de matemáticas (1998).

(18)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizados: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(19)	Jesús se queda pensando…luego de un momento toma el lápiz y al mismo tiempo empieza decir… se puede hacer con una multiplicación o con una suma…	Raz. Dim. Con



(20)	Entrevistador: ¿De qué otra manera puedes solucionar este problema?	Prg. Proc. Raz
(21)	Jesús: mmm… no, de ninguna otra	Raz. Dim. Con
(22)	Entrevistador: ¿Cuál consideras tú que es el factor que se repite?	Prob. Est. Mul
(24)	Jesús: el tres.	Raz. Estr. Mul
(25)	Entrevistador: ¿Quisieras hacer el ejercicio con las bolas de cristal?	Exp. Proc. Alg
(26)	Jesús: no.	Mat. Concret

Al plantear un problema que involucra el uso de la estructura multiplicativa para hallar su solución, Jesús plantea dos opciones para ejecutar tal operación “se puede hacer con una multiplicación o con una suma” tal afirmación indica una relación entre la multiplicación y la suma repetida, una de las operaciones que propone el estudiante es una suma repetida donde se aprecia el número tres como factor que se repite, puede decirse que lo que Jesús ha hecho es

Ilustración 45. Representación que ha creado Jesús en su mente

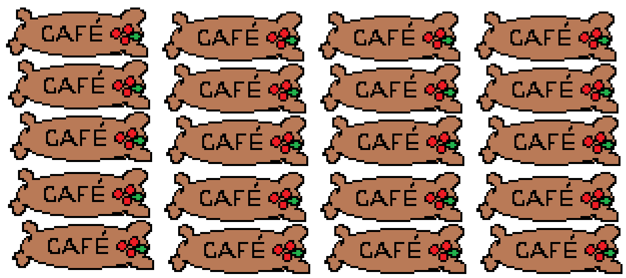
Lo que puede asociarse a la propiedad conmutativa de la multiplicación, a pesar de alterar el orden de los factores el producto es el mismo. Teniendo en cuenta lo anterior se plantea que Jesús a pesar de sus cortas y tímidas explicaciones permite vislumbrar asociaciones entre las operaciones suma y multiplicación.

Al relacionar dichas explicaciones con la dimensión de contenido expuestas en la teoría de la enseñanza para la comprensión, Jesús reconoce que el problema anterior se puede resolver con una multiplicación o una suma, sus concepciones iniciales "3+3+3+3= 12" se han transformado en "4x3=12" lo que permite ubicarlo en un nivel de comprensión de novato o de principiante, ya que maneja conceptos y procedimientos propios de la disciplina, pero dichas prácticas están fuertemente influenciadas por la escuela, al proponerle la búsqueda de otros caminos y formas de solucionar el problema, Jesús manifiesta "mmm… no, de ninguna otra" en relación a esto puede decirse que aplica los modelos provistos por la escuela y solo esos, buscar otras posibilidades y formas de solucionar el problema para él no son necesarias "entrevistador: ¿Quisieras hacer el ejercicio con las bolas de cristal? (material concreto) a lo que Jesús responde: "no".

5.2.1.2 De la imagen a la operación

Es común encontrar en los municipios del suroeste pilas organizadas de bultos o costales de café, la formulación de problemas que estén intimamente relacionados con el entorno le permite a los estudiantes: organizar la información, aplicar los conocimientos matemáticos a un contexto conocido y explicarse el cómo y el por qué surgen tales situaciones.

(116)	Entrevistador: Observa las siguientes pilas de café. Cuántos bultos[26] crees que hay en las pilas.	Prob. Est. Mul



(117)	Jesús: empieza a contar los sacos de café representados de uno en uno. – uno,dos, tres, cuatro, cinco, seis siete, ocho, nueve, diez, once doce trece, catorce, quince, dieciseis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte.	Raz. Dim. Con
(118)	Entrevistador: Puedes hacerlos a través de una operación matemática?	Prg. Proc. Raz
(119)	Jesús: Si. Con una suma o con una multiplicación.	Raz. Dim. Con
(120)	Entrevistador: Cómo las haces?	Prg. Proc. Raz
(121)	Jesús: cinco más cinco, diez. Diez más cinco… quince. Quince más cinco… veinte. Y la otra cinco por cuatro veinte.	Raz. Estr. Mul

Aunque Jesús identifica que la cantidad de los sacos se puede establecer a través de una suma o una multiplicación, inicialmente ha decidido realizar ejercicios de conteo de uno en uno para llegar a la respuesta, llama la atención que aunque los problemas planteados anteriormente eran similares a éste, es la primera vez que Jesús emplea esta estrategia para resolverlo gracias a la ayuda visual presente en la formulación del problema.

Asimismo, sus apreciaciones no se quedan solo en el ejercicio de conteo, ha transcendido esta actividad a la operación formal como tal, luego de pasar por el conteo y la suma reiterada ha avanzado hasta la multiplicación. Esto le da un nivel de comprensión de novato en la dimensión de contenido ya que aunque "las creencias no escolarizadas son robustas" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 230) Jesús ha logrado nutrirlas y modificarlas hasta llevarlas al conocimiento disciplinario.

[26] Se le llama bultos a los sacos que se utilizan para empacar los granos de café.

5.2.1.3 La explicación del algoritmo de la multiplicación

Existen diferentes formas y algoritmos que permiten resolver las operaciones propias de la estructura multiplicativa[27] (multiplicación-división), conocer dichas formas de comprender y ejecutar tales algoritmos permite inferir en qué medida los estudiantes han trascendido las concepciones intuitivas que poseen acerca de su desarrollo o los cuestionamientos que éstos hacen a los procesos que presenta la escuela.

Con el siguiente ejercicio se pretende dar una mirada acerca de la concepción, estructura y aplicación del algoritmo de la multiplicación, además de las dimensiones y niveles en los que pueden estar enmarcadas las explicaciones de dichos procesos.

(265)	Entrevistador: Explica de manera detallada el proceso algorítmico que llevarías a cabo para realizar la siguiente operación.	Prob. Est. Mul

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline \end{array}$$

(266)	Jesús: Toma el lápiz y el papel y realiza el siguiente procedimiento. Tres por seis… dieciocho, pongo el ocho y llevo uno.	Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 636 \times \\ 23 \\ \hline 8 \end{array}$$

(267)	Jesús: Tres por tres… nueve y una que llevaba diez, pongo el cero y llevo… uno.	Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1} \\ 636 \times \\ 23 \\ \hline 08 \end{array}$$

(268)	Jesús: Tres por seis… dieciocho y una que llevaba… diecinueve. Pongo el diecinueve.	Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline 1908\ + \end{array}$$

[27] Algunas de ellas están expuestas de manera detallada en el capítulo dos.

(269) Jesús: Dos por seis, doce. Pongo el dos y llevo una. Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline 1908 + \\ 2 \end{array}$$

(270) Jesús: dos por tres, seis y una que llevaba siete. Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline 1908 + \\ 72 \end{array}$$

(271) Jesús: Dos por seis doce. Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline 1908 + \\ 1272 \\ \hline \end{array}$$

(272) Jesús: Agrega el signo más (+) y empieza a balbucear ocho, dos… nueve y siete (cuenta con sus dedos) llevo uno tres… cuatro, uno Exp. Dim. Con

$$\begin{array}{r} 636 \times \\ 23 \\ \hline 1908 + \\ 1272 \\ \hline 14628 \end{array}$$

El dominio del algoritmo estándar[28] de la multiplicación en el caso de Jesús requiere de la apropiación de una serie de conocimientos previos para su desarrollo, uno de ellos es el dominio de las tablas de multiplicar, la acción de llevar y agregar, el uso del algoritmo de la suma y una serie de pasos aplicados de manera secuencial para obtener el resultado. Teniendo en cuenta estos aspectos puede decirse que Jesús con respecto a la dimensión de contenido en esta categoría, se encuentra en el nivel de novato ya que la manera casi automática como Jesús ejecuta el algoritmo, permite inferir que las ideas o conceptos aplicados en su ejecución son ensayados o practicados a menudo (Mansilla y Gardner,

[28] Se nombra así al algoritmo que usualmente se replica en las escuelas para calcular una multiplicación, donde inicialmente se establece el producto del multiplicador (unidad con todas las cifras del multiplicador) luego se realiza la misma acción con el otro multiplicador ubicado en el lugar de las decenas dejando libre en la segunda fila el espacio de las unidades, y así sucesivamente con todas las cifras del multiplicador, finalmente se suman los productos parciales y se obtiene el resultado.

2003, p. 240), en este nivel el estudiante imita los procedimientos propuestos por el maestro o por el libro de texto.

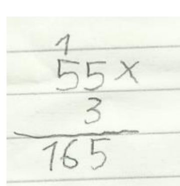
5.2.2 Razonamientos asociados a la dimensión de propósito.

Algunas explicaciones dan cuenta de los procesos de razonamiento que se construyen alrededor de la dimensión de propósito, en esta dimensión Jesús utiliza el conocimiento para explicar, interpretar, reinterpretar cada problema planteado, aunque esta dimensión está presente en la solución de un gran número de problemas, a continuación algunas explicaciones de este tipo.

5.2.2.1 La construcción de relaciones, la importancia de la experiencia.

Durante la solución de diferentes tipos de problemas Jesús ha empezado a realizar asociaciones entre los distintos problemas, tales asociaciones tienen relación con el nivel ingenuo de comprensión donde el estudiante empieza a establecer relaciones y conexiones entre ideas y conceptos (Mansilla y Gardner, 2003). Para la solución del siguiente problema Jesús ha establecido una relación entre éste y el problema solucionado en el apartado anterior.

(28)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Prob. Est. Mul
(29)	Jesús: Hummm… pues yo creo que también una multiplicación.	Raz. Dim. Pro
(30)	Entrevistador: ¿Por qué?	Prg. Proc. Raz
(31)	Jesús: Porque ahora fueron tres veces más que cuatro y… ahora son tres veces pero más que cincuenta y cinco… entonces es una multiplicación.	Raz. Dim. Pro



(32) Jesús: Saltó ciento sesenta y cinco. Con. Proc. Raz

La explicación surge generalmente de las razones y argumentos que proponen los estudiantes cuando se les interroga acerca del porqué de sus respuestas, de igual forma "ésta pretende hacer inteligibles a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor" (Balacheff, 2000, p. 12) y las relaciones que éste ha construido para llegar a ellas. En el caso de Jesús éste ha encontrado elementos similares en ambos problemas "ahora fueron tres veces más que cuatro y… ahora son tres veces pero más que cincuenta y cinco" establecer conexiones le ha permitido determinar que la operación a realizar es una multiplicación.

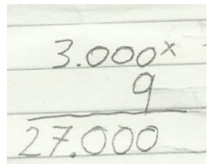
La construcción de dichas relaciones tiene que ver con la dimensión de propósito donde se evalúa la capacidad que posee el estudiante para "usar el conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 235). Jesús ha utilizado conocimientos y experiencias previas para resolver el problema, lo que lo ubica en un nivel de comprensión dentro de esta dimensión que va más allá de los conocimientos intuitivos adquiridos dentro del entorno y lo ubica en un nivel donde se "demuestra un uso flexible de conceptos o ideas de la disciplina" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240).

5.2.2.2 Del conteo a la operación formal .

Además de los problemas de factor multiplicante, existen otros tipos de problemas, uno de ellos es el de adición repetida; este tipo de problema el estudiante inicialmente escribe el multiplicador de manera sucesiva dando a conocer finalmente el resultado. A continuación se presenta un ejemplo de este tipo de problema, sin embargo Jesús no ha representado la solución a manera de suma repetida, ha utilizado sus dedos para realizar el conteo y luego lo ha representado a través de la operación formal. El conteo que ha realizado con sus dedos puede representarse a través de una suma.

(72) Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando $ 3.000 cada semana, durante 9 semanas. ¿Cuánto dinero ha ahorrado Melisa en total? Explica tu respuesta. Prob. Est. Mul

(73)	Jesús: Cuenta en sus dedos… tres mil… seis mil… nueve mil… mueve sus dedos. Luego de un momento toma el lápiz y escribe	Raz. Dim. Pro



(74)	Jesús: Nueve por cero… cero, nueve por cero… cero, nueve por cero… cero, nueve por tres… veintisiete. Veintisiete mil.	Raz. Dim. Pro

Aunque los problemas estén diferenciados por tipos, las características individuales del estudiante le permiten resolverlos de diferentes formas, la experiencia posibilita al estudiante enriquecer y refinar los procesos de razonamiento y la búsqueda de nuevas soluciones. Jesús ha utilizado los conocimientos y las experiencias anteriores para proponer una multiplicación como operación que permite la solución del problema planteado.

Emplear de manera adecuada estos conocimientos se inscribe en la dimensión de propósito ya que pone en juego la capacidad del estudiante para “usar el conocimiento en múltiples situaciones” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 235) en este sentido el conocimiento deja ser información almacenada para convertirse en conocimiento en acción, lo que ubica a Jesús en un nivel de comprensión de aprendiz donde el conocimiento es usado de manera “flexible y adecuada” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240).

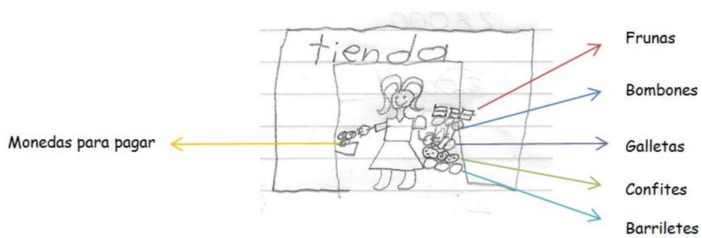
5.2.3 Razonamientos asociados a la dimensión formas de comunicación.

La dimensión formas de comunicación es transversal a las demás dimensiones, sin embargo su presencia en ocasiones se hace más evidente debido a la capacidad del estudiante para comunicar su comprensión a través de diferentes sistemas simbólicos (verbales y no verbales) durante el desarrollo de los desempeños. Teniendo en cuenta estas características se presentan a continuación ejemplos de explicaciones que dan cuenta de razonamientos que se enmarcan dentro de dicha dimensión.

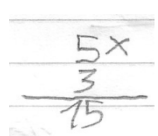
5.2.3.1 Garabatos que informan

Las explicaciones de los estudiantes en ocasiones están acompañadas de letras, números, dibujos que de una manera u otra reflejan la forma como es organizada la información. Esta labor se encuentra directamente relacionada con los procesos de razonamiento, puesto que en la presente investigación se entiende por razonamiento "la actividad intelectual no completamente explícita que se ocupa de la manipulación de la información dada o adquirida para producir nueva información" (Balacheff, 2000, p. 13). A continuación se dan a conocer las representaciones elaboradas por Jesús para resolver uno de los problemas propuestos.

(128)	Entrevistador: Luisa el lunes ha comprado 3 galletas, el martes 3 bombones, el miércoles 3 confites, el jueves 3 barriletes y el viernes 3 frunas. ¿Cuántos dulces ha comprado Luisa durante la semana?	Prob. Est. Mul
(129)	Jesús: ¿El lunes qué?	Pre. Sum. Inf
(130)	Entrevistador: Tres galletas… el martes tres bombones, el miércoles tres confites, el jueves tres barriletes y el viernes tres frunas.	Sum. Inf. Pro
(131)	Jesús: Poco a poco realiza el siguiente dibujo. Repitiendo, estas son las tres galletas, los tres bombones, estos son los tres confites, los barriletes y estas las frunas. Compró cinco por tres, quince. Quince dulces en los cinco días.	Raz. Dim. Com



(132)	Jesús: Luego de la explicación de su dibujo, realizó la siguiente operación.	Raz. Dim. Com



En el desarrollo del problema anterior puede observarse como Jesús ha utilizado además del lenguaje verbal, el lenguaje simbólico. La utilización de estos símbolos le permite organizar la información suministrada y seleccionar luego la operación que considera adecuada para dar solución al problema propuesto, esta forma de organizar la información se encuentra enmarcada en la dimensión de formas de comunicación donde “se le presta especial atención a las formas en que dicha comprensión se realiza: el proceso por el cual es comunicada a otros” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 237) en el dibujo puede verse claramente qué tipo y qué cantidad de dulces ha comprado Luisa cada día, luego de obsservar esta información Jesús ha optado por realizar una multiplicación.

5.2.3.2 La suma repetida a partir de las gráficas.

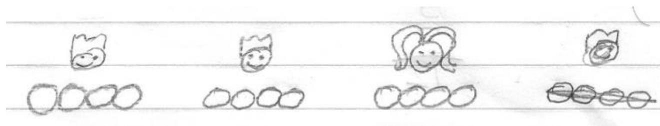
Algunos problemas ponen en juego las estrategias de solución empleadas usualmente por los estudiantes, como en el caso de Jesús, al planteársele un problema con el siguiente sistema análogo (Vergnaud, 1991). Para hacerse una imagen de ello puede observarse la Ilustración 46.

$$\begin{array}{ccc} \text{Litros} & & \text{Vasos} \\ 1 & \longrightarrow & 4 \\ 2 & \longrightarrow & x \end{array}$$

Ilustración 46. Sistema análogo de representación según Vergnaud

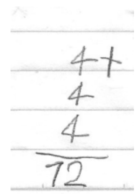
Este esquema tiene su origen en el siguiente problema.

(144)	Entrevistador: Eliza tiene un litro de jugo del cual es posible servir 4 vasos, le ha pedido a su madre que prepare otros 2 litros de jugo ya que ha invitado a algunos de sus compañeros de clase para ensayar un baile en su casa. ¿Para cuántos vasos de jugo alcanzan los 3 litros de jugo?	Prob. Est. Mul
(145)	Jesús: hum… espérate. Dibuja.	Raz. Dim. Com



Jesús: me equivoqué con éste, son solamente tres.

(146) Jesús: Luego escribe Raz. Dim. Com



(147) Jesús: salen doce vasos de jugo. Raz. Dim. Com

Este extracto permite observar el uso flexible que Jesús hace de las operaciones, para resolver problemas relacionados con la estructura multiplicativa, constantemente pasa de la multiplicación a la suma, de la suma a la multiplicación e incluso del uso de ambas a la representación icónica, los dibujos representan la imagen mental que guarda Jesús en su cabeza, la operación (suma repetida) es la verificación de lo que Jesús ha representado en el dibujo.

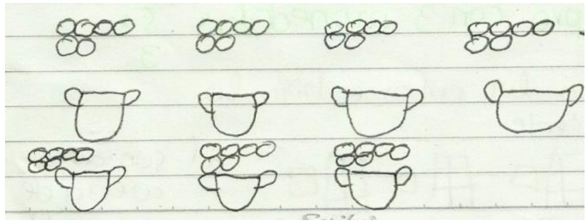
Las diversas formas de representar la información y la claridad en sus representaciones permite identificar que Jesús maneja un nivel de aprendiz en la dimensión formas de comunicación ya que esta dimensión permite la utilización de diferentes símbolos para comunicarse, de igual modo los estudiantes en este nivel, “demuestran una expresión y comunicación de conocimiento flexible y adecuada” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 241).

5.2.3.3 Dibujos, gráficas y soluciones.

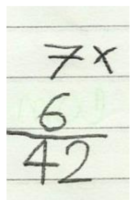
Con respecto a la dimensión de formas de comunicación se pueden observar otros ejemplos que permiten evidenciar como los estudiantes en ocasiones también se comunican a través de sus dibujos, estas formas de comunicación le permiten al estudiante crear nuevas relaciones, aclarar sus ideas, organizar la información, como se observa en la siguiente actividad.

(285) Entrevistador: ¿Cuántos dulces se necesitan para llenar 7 bolsas que contienen 6 dulces cada una? Prob. Est. Mul

(286) Jesús: Toma el lápiz y empieza a dibujar lo siguiente: Raz. Dim. Pro



(287) Luego escribe Pre. Sum. Pro



Jesús: se necesitan 72 dulces

En este sentido Jesús deja notar que en la dimensión de contenido es capaz de moverse de manera flexible en el uso y la aplicación del conocimiento, este incluye la construcción de teorías relacionadas con conocimientos propios del contexto, basados en "el sentido común" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 230) pero que al mismo tiempo se relaciona con los contenidos propios de la disciplina, característica que está estrechamente relacionada con la dimensión de propósito puesto que allí se evalúa la capacidad del estudiante para "reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 235), lo anterior permite reconocer la articulación que existe entre las dimensiones de la comprensión.

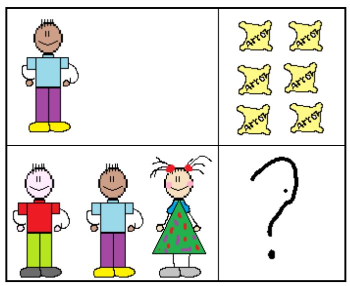
5.2.4 Razonamientos asociados a la dimensión de método.

El uso de métodos confiables en la elaboración del conocimiento es una de las particularidades que se pueden hallar dentro de esta dimensión, es por ello que cada uno de los métodos utilizados por Jesús para elaborar sus respuestas. En esta ocasión se presentan los que se consideran mejor asociados.

5.2.4.1 Representación de magnitudes proporcionales

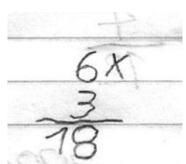
Vergnaud (1983) plantea que existen tres tipos de problemas asociados a la estructura multiplicativa uno de ellos es el isomorfismo de medidas que presenta una proporción simple y directa entre dos tipos de medida. Para resolver este tipo de problema, Jesús ha utilizado su propio método de representación y manipulación de la información.

(110) Entrevistador: El papá de Felipe, Juan y Camila necesitan comprar 6 kilos de arroz cada uno. Prob. Est. Mul



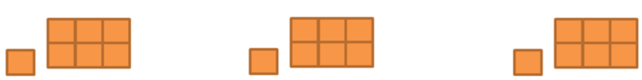
Entrevistador: ¿Cuántos kilos de arroz necesitan los tres en total?

(111) Jesús: Observa la imagen que acompaña el problema y escribe: Raz. Dim. Mét



(112) Entrevistador: ¿Por qué dices que es una multiplicación? Pre. Sum. Inf

(113) Jesús: “Porque si cada uno compra seis kilos, entonces hay que multiplicar seis por tres” piensa y un poco y luego dice “mire” toma los cubos que hay dispuestos sobre la mesa y realiza las siguientes figuras. Raz. Dim. Mét



Jesús: “Los cuadritos pequeños son los papás que van a comprar el arroz, y estos (señalando los grupos de seis cubos) son el arroz que van a comprar, entonces…tres veces seis, seis por tres”.

(114) Entrevistador: ¿Cuántos cubos hay? Pre. Sum. Inf

(115) Jesús: "uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete…. dieciséis, diecisiete, dieciocho. Hay dieciocho". Raz. Dim. Mét

Esta actividad permite observar que Jesús en la dimensión de método se encuentra en un nivel de aprendiz porque su desempeño está basado "en conocimientos y modos de pensar disciplinarios, sigue procedimientos y criterios propios de la disciplina" Jesús explica e ilustra el uso de la multiplicación en un problema de la vida diaria. Sus métodos de solución son variados y materializa sus pensamientos a través del uso de los objetos. Procura diseñar sus propias estrategias de solución y nutrirlas con procedimientos propios de la disciplina.

También permite observar elementos inmersos en la dimensión formas de comunicación. En este caso el estudiante da a conocer de dos maneras distintas una única solución, no solo se trata de diseñar nuevas formas, nuevos métodos; se trata también de darlos a conocer de diferentes maneras, de explicar y argumentar lo que ha hecho, los procesos que ha desarrollado, de ejemplificar sus resultados, de utilizar signos y símbolos de manera eficaz, coherente. Jesús ha dicho que es una multiplicación y los signos y símbolos utilizados para ello han sido acordes a lo que plantea.

5.2.4.2 Algoritmo de la división

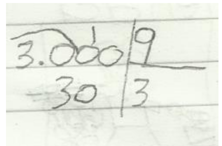
La división es la operación inversa a la multiplicación y se encuentra incluida dentro del campo conceptual de las estructuras multiplicativas, se concibe como "la más compleja de las cuatro operaciones, porque para su solución implica restar, multiplicar y búsqueda de las cifras del cociente" (Vergnaud, 1991, p. 155-156). En este sentido, se resalta la importancia del reconocimiento de los procesos algorítmicos que Jesús lleva a cabo para resolver una división.

(274) Entrevistador: Podrías compartir conmigo, el procedimiento que llevas tú a cabo para resolver la siguiente división. Prob. Est. Mul

$$3000 \,\underline{\big|\; 9 \qquad}$$

(275) Jesús: toma lápiz y papel y explica. El nueve no cabe en el tres, cojo las Raz. Dim. Mét

dos cifras, me queda treinta, tres por nueve… veintisiete a treinta tres, bajo el cero…



Jesús: ya.

(276) Entrevistador: ¿Terminaste? Pre. Sum. Inf

(277) Jesús: sí. Raz. Dim. Mét

(278) Entrevistador: ¿Cómo lo sabes? Pre. Sum. Inf

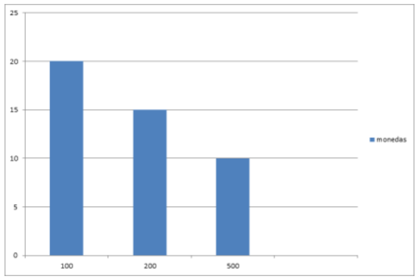
(279) Jesús: Porque ya me quedó cero, el nueve en el cero no cabe. Raz. Dim. Mét

Al comenzar a resolver la división, Jesús intenta hacerlo “con procedimientos similares a recetas que se siguen para lograr un cierto resultado” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 233) esta actividad lo ubica en un nivel ingenuo dentro de la dimensión de método ya que recurre a concepciones y construcciones propias para justificar sus respuestas y “ las bases y los origenes de tales concepciones siguen sin ser cuestionadas” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 239).

5.2.4.3 Producto cartesiano.

Dentro de los diferentes tipos de problemas que involucran la estructura multiplicativa se encuentran los problemas de producto cartesiano, éstos permiten distintas combinaciones entre dos conjuntos para dar origen a un tercero. Con el fin de observar el desempeño de Jesús al desarrollar este tipo de problemas se ha plateado el siguiente:

(285) Entrevistador: Observa la siguiente gráfica, donde se encuentran representadas el número de monedas que Claudia ha guardado en su alcancia. Prob. Est. Mul

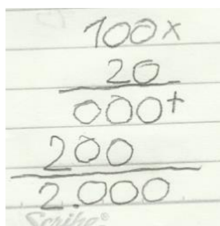


Entrevistador: Teniendo en cuenta la información que muestra la gráfica. Responde las siguientes preguntas. ¿Cuánto dinero tiene Claudia en monedas de 100 $?

(286) Jesús: mmmm… observa la grafíca detenidamente. Tiene veinte monedas de cien. Raz. Dim. Mét

(287) Entrevistador: ¿Cuánto dinero son esas veinte monedas de cien? Pre. Sum. Inf

(288) Jesús: realiza la siguinete opreación. Raz. Dim. Mét



Jesús: tiene dos mil pesos en monedas de cien.

(289) Entrevistador: ¿Por qué piensas que es una multiplicación? Pre. Sum. Inf

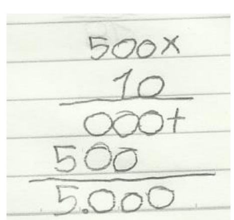
(290) Jesús: porque son veinte monedas de cien, los multiplico en vez de sumarlas. Raz. Dim. Mét

(291) Entrevistador: ¿Existe otra manera de hacer la multiplicación? Pre. Sum. Inf

(292) Jesús: no, esta es la única manera. Raz. Dim. Mét

(293) Entrevistador: entonces ¿Cuánto dinero hay en monedas de quinientos? Prob. Est. Mul

(293) Jesús: tomó de nuevo el lápiz y el papel y realizó la siguiente operación. Raz. Dim. Mét



Jesús: hay cinco mil pesos en monedas de quinientos.

El cero ha jugado un papel especial en el desarrollo del ejercicio anterior, Jesús ha decido ejecutar el algoritmo de la multiplicación tal y como lo ha ejecutado en otras ocasiones, ha decidido realizar el proceso paso a paso en ambos casos. En este caso la multiplicación simplificada por cero, no aparece. Por otro lado, Jesús ha propuesto la multiplicación como estrategia de solución para hallar la cantidad de dinero solicitada, teniendo en cuenta el valor de cada una de las monedas y la cantidad representada en las gráficas, "tiene veinte monedas de cien" lo que significa que ha leído la información inmersa en el gráfico.

Las explicaciones de Jesús, están enmarcadas en el nivel aprendiz de comprensión dentro de la dimensión de método ya que la "ve el valor de los métodos para construir conocimiento confiable" (Mansilla y Gardner, 2003, p.248) sus procedimientos son consecutivos, preestablecidos, únicos. Lo anterior se deduce de la respuesta de Jesús a la pregunta: - ¿por qúe piensas que es una multiplicación? -" porque son veinte monedas de cien, los multiplico en vez de sumarlas".

5.3 Caso II: Nicolás

Nicolás es un estudiante promedio según su maestra "sabe realizar operaciones, pero tiene muchas dificultades en lenguaje, tiene problemas al escribir, a veces es distraído". Por su parte en el desarrollo de las entrevistas siempre se caracterizó por su puntualidad y elocuencia, de igual forma afirma que el uso del material concreto dispuesto para apoyar la solución de los problemas "lo enreda", en sus palabras: "con esas cosas no, me enredo más".

Al igual que en el caso de anterior, durante los apartados de la entrevista se incluyen abreviaturas que corresponden códigos asignados durante la etapa de análisis. Problema relacionado con la estructura multiplicativa (Prob. Est. Mul), razonamiento dimensión de contenido (Raz. Dim. Con), pregunta que indaga por los procesos de razonamiento (Pre. Proc. Raz.), explicación de procesos algorítmicos (Exp. Proc. Alg), razonamiento estructura multiplicativa (Raz. Estr. Mul), material concreto (Mat. Concret), razonamiento dimensión propósito (Raz. Dim. Pro), construcción del proceso de razonamiento (Con. Pro. Raz), pregunta de suministro de información (Pre. Sum. Inf), suministro de información del problema (Sum. Inf. Pro), razonamiento dimensión formas comunicación (Raz. Dim. Com), razonamiento dimensión método (Raz. Dim. Mét).

5.3.1 Razonamientos asociados a la dimensión de contenido.

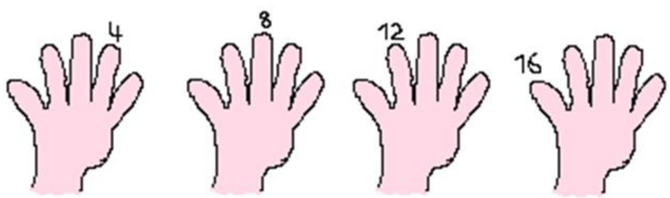
En los primeros años de escolaridad los estudiantes emplean en su discurso conocimientos propios acerca del mundo y de las cosas que lo rodean, éstos deben trascender durante el desarrollo de la vida escolar, amplificarse de tal manera que su lenguaje esté permeado por categorías formales propias de las matemáticas, Nicolás en sus explicaciones recurre a conocimientos intuitivos que han sido enriquecidos por la dinámica de la escuela.

5.3.1.1 Volver sobre los procesos.

La explicación de la validez de una afirmación permite al estudiante volver sobre sus afirmaciones, sobre la construcción de procesos y sobre sus respuestas, tal es el caso de

Nicolás al volver sobre sus respuestas pues así descubre que algo ha hecho mal, “lo que pasa es que conté mal” esto sucede después de abordar varios caminos de solución al problema planteado a continuación.

(15)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizar: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(16)	Nicolás: mmmmmm….cuenta en sus dedos y luego dice, dieciséis.	Raz. Dim. Mét
(17)	Entrevistador: ¿Por qué?	Pre. Sum. Inf
(18)	Nicolás: porque hice la cuenta vea (me enseña sus manos y agrupa los dedos) cuatro, vea cuatro va una vez, ocho más otro cuatro son ocho, más otros cuatro son doce, más los cuatro de Juan son dieciséis.	Raz. Dim. Mét



(19)	Entrevistador: Y… ¿de qué otra forma podemos saberlo?	Pre. Sum. Inf
(20)	Nicolás: Multiplicando.	Raz. Dim. Con
(21)	Entrevistador: ¿Multiplicando qué?	Pre. Sum. Inf
(22)	Nicolás: cuatro por tres.	Raz. Dim. Con
(23)	Entrevistador: ¿Cuál es el número que se repite?	Pre. Sum. Inf
(24)	Nicolás: el cuatro.	Raz. Dim. Con
(25)	Entrevistador: ¿Cuánto te da?	Pre. Sum. Inf
(26)	Nicolás: doce	Raz. Dim. Con
(27)	Entrevistador: ¿Entonces cuál es? Doce o dieciséis.	Pre. Sum. Inf
(28)	Nicolás: es doce, lo que pasa es que conté mal, no hice bien la cuenta, porque junté las de Juan con las de Luis.	Raz. Dim. Con

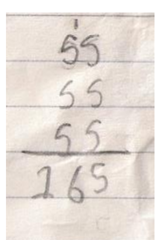
El uso de diferentes métodos y la continua búsqueda de caminos para solucionar un problema, le permiten a Nicolás reconocer y reformular sus respuestas “transformar o reemplazar estas concepciones iniciales es un desafío central que enfrentan los alumnos cuando apuntan a comprender a profundidad el mundo que los rodea” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 231) esta virtud de volver sobre sus pasos y rectificar los errores cometidos, reformular las respuestas equivocadas ubica a Nicolás en un nivel de comprensión de aprendiz, donde los conocimientos son evaluados y examinados de manera continua.

La explicación de Nicolás “es doce, lo que pasa es que conté mal, no hice bien la cuenta, porque junté las de Juan con las de Luis” la afirmación anterior da cuenta de la formulación de un nuevo razonamiento, Nicolás ha tomado la información nueva “podemos saberlo multiplicando cuatro por tres” con información anterior “vea cuatro va una vez, ocho más otro cuatro son ocho, más otros cuatro son doce, más los cuatro de Juan son dieciséis” al procesar dicha información ha tomado conciencia del error y lo ha corregido, conoce las razones del porqué se equivocó, lo que permite reformular su respuesta.

5.3.1.2 Suma reiterada.

Nicolás asocia diferentes problemas de la estructura multiplicativa a la suma reiterada de cantidades semejantes, un ejemplo de ello ocurre en el problema que se expone a continuación.

(28)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Prob. Est. Mul
(29)	Nicolás: Toma el lápiz y empieza a escribir en su cuaderno.	Raz. Dim. Mét
(30)	Nicolás: Balbucea… cinco y cinco… y cinco… llevo una…. Cinco… y una… ciento sesenta y cinco.	Raz. Dim. Con



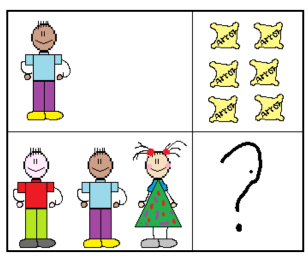
En el desarrollo de este problema Nicolás se ha quedado en los conocimientos previos e intuitivos de los que dispone para resolverlo, lo que lo ubica en un nivel de comprensión ingenuo dentro de la dimensión de contenido, ya que solo hace uso de “la información que está disponible directamente en el mundo” (Mansilla y Gardner, 2003, p.

240), pese a esto en la dimensión de propósito se encuentra en un nivel más avanzado, el nivel de novato, ya que el conocimiento aplicado permite la resolución del problema, Nicolás al sumar 55+55+55 esta sumando tres grupos de cincuenta y cinco, no meras cantidades aisladas.

5.3.1.3 Organización de la información.

Los estudiantes poseen formas particulares de representar la información, cada uno es un mundo diferente. Nicolás reconoce las operaciones aritméticas que están implicadas en el desarrollo del problema "porque se suma y se multiplica y me da lo mismo" sin embargo al solicitarle representar una de estas dos operaciones utilizando el material concreto, toma cuatro fichas y a cada una le asigna un dígito o un símbolo, dejando de lado posibles agrupaciones.

(95) Entrevistador: El papá de Felipe, Juan y Camila necesitan comprar 6 kilos de arroz cada uno. — Prob. Est. Mul



(96) Entrevistador: ¿Cuántos kilos de arroz necesitan los tres en total? — Pre. Sum. Inf

(97) Nicolás: Dieciocho. — Raz. Dim. Con

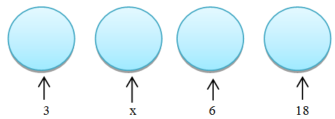
(98) Entrevistador: ¿Por qué? — Pre. Sum. Inf

(99) Nicolás: Porque se suma y se multiplica y me da lo mismo. Uno necesita seis, otro necesita seis y el otro necesita seis, entre los tres necesitan dieciocho. — Raz. Dim. Con

(100) Entrevistador: ¿Puedes representar lo que hiciste utilizando estas fichas? — Pre. Sum. Inf

(101) Nicolás: Cojo… y por ejemplo… pongo tres, tres… a ver, seis… esta es por ejemplo la multiplicación… no, no. — Raz. Dim. Con

Nicolás: Hagamos… este es el tres y este es el seis, entonces llegó tres por seis dieciocho



(102) Entrevistador: ¿Existe otra manera de representar la multiplicación con estas fichas? Pre. Sum. Inf

(103) Nicolás: No, esta es la única manera. Raz. Dim. Mét

En el desarrollo del ejercicio Nicolás ha utilizado la suma de sumandos iguales para resolver el problema, al igual que una multiplicación. Cuando éste plantea la suma ocurre que solo ha relacionado un elemento las libras de arroz (ver Ilustración 47).

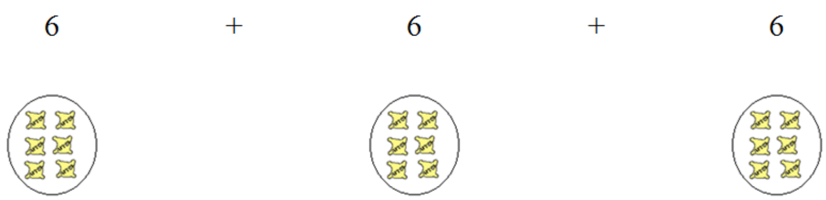


Ilustración 47. Suma de sumandos iguales

Cuando aparece la multiplicación (ver Ilustración 48) como operación que también permite la solución del problema planteado, la relación se establece entre dos tipos de conjuntos diferentes (arroz y padres que compran el arroz).

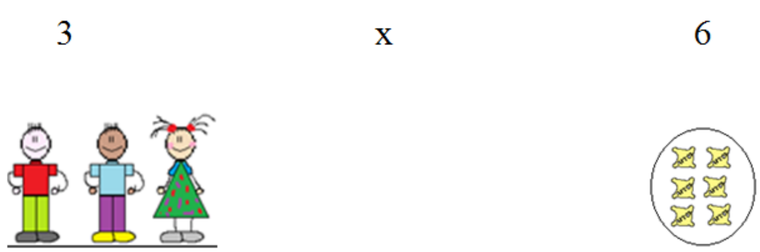


Ilustración 48. Multiplicación entre dos tipos de conjunto

Este ir y venir de Nicolás entre sus propias concepciones y los contenidos particulares de la disciplina “mezclando creencias intuitivas con fragmentos de conocimiento disciplinario" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 246) lo identifica en el nivel de principiante de comprensión dentro de la dimensión de conocimiento, con respecto a la característica específica de creencias intuitivas transformadas. Por tanto, Nicolás se encuentra en un etapa de trancisión.

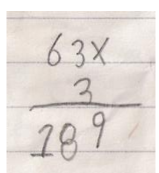
5.3.1.4 Algoritmo de la multiplicación.

La explicación en este caso se convierte en una herramienta fundamental para la identificación de los algoritmos. De manera particular el siguiente ejercicio se ha realizado la multiplicación por columnas, utilizando el papel y el lápiz.

(217) Entrevistador: Explica de manera detallada el proceso algorítmico que llevarías a cabo para realizar la siguiente operación — Prob. Est. Mul

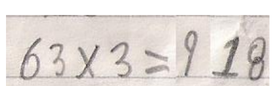
$$\begin{array}{r} 63\ \times \\ 3 \\ \hline \end{array}$$

(218) Nicolás: después de tomar el lápiz y el cuaderno, explica. Tres por tres dieciocho, pongo el ocho, llevo una. Tres por seis… ah! no aquí no (borra el ocho) nueve, tres por tres nueve… tres por seis dieciocho. — Raz. Dim. Con



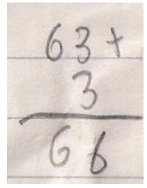
(219) Entrevistador: ¿Existe otra manera de hacer esta multiplicación? — Pre. Sum. Inf

(220) Nicolás: Sí, así de lado. Escribe en el cuaderno lo siguiente. Tres por tres nueve, tres por seis dieciocho. Da diferente. Explicación – Proceso algorítmico. — Raz. Dim. Con



(221) Entrevistador: ¿Consideras que se puede hacer de otra forma? — Pre. Sum. Inf

(222) Nicolás: Sumando, sesenta y tres más tres. Sesenta y seis. — Raz. Dim. Con



(223) Entrevistador: Entonces, ¿la multiplicación es una suma? Pre. Sum. Inf

(224) Nicolás: La multiplicación es una suma y una resta… y las tablas Raz. Dim. Con

Frente a las explicaciones de Nicolás puede decirse que sus afirmaciones están acompañadas de conceptos, ideas y conexiones “simples, frágiles” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 246) es capaz de dar ejemplos “así, de lado… Tres por tres nueve, tres por seis dieciocho. Diferente” pero estos no se relacionan con conceptos propios de la disciplina, es por ello que de acuerdo a las explicaciones Nicolás se encuentra en el nivel de comprensión ingenuo en la dimensión de conocmiento, “los ejemplos y generalizaciones están desconectados” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 247).

Con respecto a la dimensión de método, teniendo en cuenta el desarrollo del algoritmo paso a paso “tres por tres nueve, tres por seis dieciocho” Nicolás ha trascendido la aplicación del método ensayo y error en el presente ejercicio, lo que permite ubicarlo dentro del nivel de principiante dentro de dicha dimensión ya que sus métodos son aplicados de manera “mecánica” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 249), sin cuestionamientos y aunque propone la ejecución de otros métodos para dar solución al algoritmo, éstos no son acertados.

5.3.2 Razonamientos asociados a la dimensión de propósito.

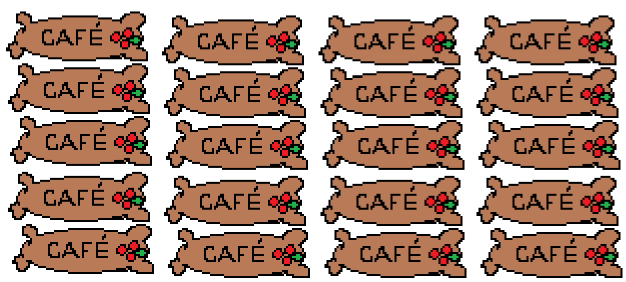
Las explicaciones de Nicolás en esta dimensión han sido orientadas a discernir su capacidad de relacionar el conocimiento construido con problemas asociados a la vida cotidiana, se trata de darle utilidad a lo que se aprende en la escuela, encontrar el sentido de multiplicar, dividir, calcular. Se trata de leer en sus explicaciones la razón del por qué y el para qué.

5.3.2.1 De lo visual a la operación aritmética.

Nicolás baja todos los días desde la finca hasta el pueblo para estudiar en el colegio, el siguiente problema, se relaciona de manera directa con el contexto donde se desenvuelve, la utilización del material visual es un mecanismo que le permite establecer relaciones entre los datos que se encuentran implícitos o explícitos dentro de un problema matemático, luego de organizar estos datos, él da paso a las operación que hace parte de la solución.

Es común encontrar en los municipios del suroeste pilas organizadas de bultos o costales de café, la formulación de problemas que estén intimamente relacionados con el entorno le permite a los estudiantes: organizar la información, aplicar los conocimientos matemáticos a un contexto conocido y explicarse el cómo y el por qué surgen tales situaciones.

(203) Entrevistador: Observa las siguientes pilas de café. Cuántos bultos[29] crees que hay en las pilas. — Prob. Est. Mul



(204) Nicolás: mmm… con una multiplicación? — Raz. Dim. Pro

(205) Entrevistador: ¿Tú qué dices? — Pre. Sum. Inf

(206) Nicolás: Si. Cinco por cuatro...   veinte. Hay veinte bultos. — Raz. Dim. Pro

A partir de la información anterior puede decirse que Nicolás ha realizado una agrupación de cantidades “cinco por cuatro veinte”, es decir cinco veces cuatro. Lo anterior dota de significado a la multiplicación como operación que puede ser aplicada en un contexto real, ¿Cuántas veces Nicolás ha contado los bultos de café que se recogen en su casa? En este sentido, los problemas que tocan la vida del estudiante son aquellos que se interpretan con mayor agilidad, le dan sentido a lo que se aprende, por lo tanto este

---

[29] Se le llama bultos a los sacos que se utilizan para empacar los granos de café.

problema se inscribe dentro de la dimensión de propósito, donde se relacionan los contenidos del área con la vida real, con la práctica, ¿para qué aprendo esto o aquello?

5.3.2.2 Del conteo a la suma repetida.

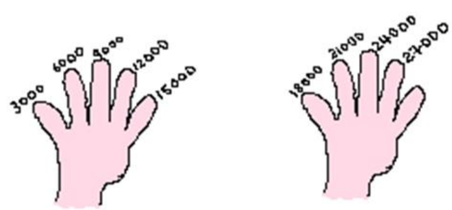
En el siguiente extracto de entrevista puede observarse como Nicolás a través de su explicación da a conocer una estrategia de solución, estrategia que se enmarca dentro de los conocimientos previos, dentro de los recursos que tiene a mano. Seguidamente Nicolás propone una operación formal que surge a partir de la explicación.

(175) Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando 3.000 $ cada semana, durante 9 semanas. ¿Cuánto dinero ha ahorrado Melisa en total? — Prob. Est. Mul

(176) Nicolás: Piensa un momento… mueve sus dedos y luego dice: veinticuatro mil — Raz. Dim. Mét

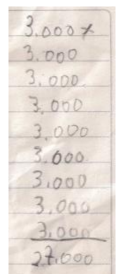
(177) Entrevistador: Explícame por favor cómo lo hiciste. — Pre. Sum. Inf

(178) Nicolás: Toma nuevamente sus dedos y explica. Porque vea, tres… va una vez, seis… va otra vez, nueve… va otra vez, doce… va otra vez, quince… va otra vez, dieciocho… va otra vez, veintiuno… va otra vez… se detiene un momento. Veinti… cuatro va otra vez… ah! me equivoqué eran veintisiete mil. — Raz. Dim. Pro



(179) Entrevistador: Podrías hacer en tu cuaderno lo que acabas de explicarme. — Pre. Sum. Inf

(180) Nicolás: Claro que sí. Tres más tres…. — Raz. Dim. Pro



Aunque los métodos de solución que aparecen en las explicaciones de Nicolás surgen a partir de su propia experiencia, es de anotar que en la teoría de la enseñanza para la comprensión "el conocimiento se convierte en una herramienta reflexiva para hacer productos, contar historias, *resolver problemas*[30], formular juicios y transformar la vida cotidiana" (Mansilla y Gardner, 2003, p.142) lo que le asigna una dimensión de propósito a los conocimientos utlizados en el momento indicado a la hora indicada, el nivel de comprensión varía según la flexibilidad de dicha aplicación y según su pertinencia.

Teniendo en cuenta lo anterior, Nicolás con respecto a la solución del problema se encuentra en un nivel de comprensión de novato pues sus explicaciones están sujetas a criterios propios, empíricos, dejando de lado los conceptos particulares de la disciplina como es el caso de la multiplicación formal como tal.

5.3.3 Razonamientos asociados a la dimensión: formas de comunicación.

La dimensión formas de comunicación de cierta manera se encuentra relacionada con la creatividad, tienen que ver con la forma como se comunica el conocimiento a los otros, cómo se explica, con cuánta claridad. Es ahí entonces donde se hace evidente la autenticidad de los procesos, el uso del lenguaje como potencializador del pensamiento.

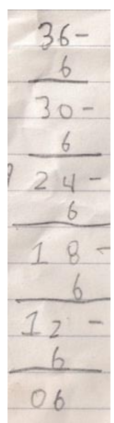
5.3.3.1 Lo tengo en la mente.

La explicación además de permitir al maestro interpretar y comprender los procesos de razonamiento que construye el estudiante en torno a los conocimientos que se van trabajando en el aula, le dan la posibilidad de verbalizar y aclarar sus ideas, la explicación "se arraiga sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad" (Balacheff, 2000, p. 12) lo que da origen a la movilización del pensamiento y a la materialización de las ideas.

(133)	Entrevistador: El grado cuarto está compuesto por 36 estudiantes, la maestra quiere realizar 6 hileras con igual número de alumnos. ¿Cuántos estudiantes deben ubicarse en cada una de las hileras?	Prob. Est. Mul
(134)	Nicolás: Cada fila… doce.	Aná. Inf. Pro

[30] En el texto original las palabras "resolver problemas" no se encuentran en cursiva, yo la he colocado con el propósito de resaltar estas palabras en el texto.

(135)	Entrevistador: Consideras entonces que son: ¿seis filas de doce?	Pre. Sum. Inf
(136)	Nicolás: Ah! No. Serian de seis, de seis cada una de las filas… seis filas de seis…	Aná. Inf. Pro
(137)	Entrevistador: ¿Cómo sabes?	Pre. Sum. Inf
(138)	Nicolás: Porque sí. Porque le quité, reste, a ver treinta y seis… no… si… menos seis.	Raz. Dim. Com
(139)	Entrevistador: ¿Cuánto te da?	Pre. Sum. Inf
(140)	Nicolás: Ay! No, no es así… no, no da.	Raz. Dim. Com
(141)	Entrevistador: ¿Entonces qué podemos hacer?	Pre. Sum. Inf
(142)	Nicolás: Quitándole… treinta y seis menos seis… da treinta… treinta menos seis, veinticuatro… así hasta llegar a seis.	Raz. Dim. Com
(143)	Entrevistador: ¿Puedes mostrarme cómo?	Pre. Sum. Inf
(144)	Nicolás: Toma el lápiz y el papel y empieza a escribir… luego dice… no me da… así no sé cómo restar… pero en la memoria sí…	Raz. Dim. Com
(145)	Entrevistador: Dime, ¿Qué tienes en la memoria?	Pre. Sum. Inf
(146)	Nicolás: Primero le resto a treinta y seis le resto seis…de treinta le saco seis, me quedan veinticuatro… ah! Siiii….	Raz. Dim. Com



En el ejercicio anterior se puede observar como Nicolás ha logrado materializar sus procesos de razonamiento, gracias a la explicación. La afirmación "no sé cómo restar, pero en la memoria si" es una evidencia del carácter ininteligible del razonamiento, aun cuando se es el dueño y su constructor. En la construcción de dichos razonamientos, intervienen varios elementos que se conectan, se asocian y se desasocian para dar origen a las explicaciones, dicha organización "se orienta hacia el descubrimiento de un nuevo saber" (Balacheff, 2000, p. 12). Cuando el estudiante logra verbalizar y exponer tales ideas, le ha dado origen a una nueva idea, una nueva conceptualización.

La verbalización de dichas ideas se encuentra inmersa en la dimensión de formas de comunicación puesto que al inicio del ejercicio, Nicolás no dispone de herramientas linguísticas para dar a conocer sus pensamientos, pero es el lenguaje, la comunicación con un interlocutor, el que le permite dar claridad a sus planteamientos; dentro de esta dimensión se ubica en el nivel de novato, ya que presenta sus ideas de manera egocéntrica, es decir, tiene en cuenta reglas del discurso propias, sin concebir aún un discurso formal.

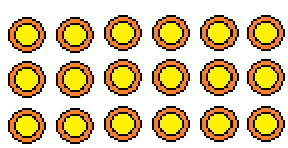
5.3.4 Razonamientos asociados a la dimensión de método.

Cuestionar el origen de los métodos y operaciones para resolver los problemas es propio de esta dimensión, al igual que la búsqueda de nuevos procedimientos y nuevas formas de darles solución. Las explicaciones enmarcadas dentro de estas características determina el nivel de comprensión de Nicolás dentro de esta dimensión.

5.3.4.1 Propiedad conmutativa.

El siguiente problema propone el uso de material concreto con el objetivo de facilitar las formas de representación de la estructura multiplicativa (distintas agrupaciones), Nicolás utiliza el material concreto para representar la propiedad conmutativa, sin realizar otro tipo de agrupaciones.

51) Entrevistador: Podrías por favor, decirme ¿qué operación podemos extraer de la organización de esta fichas? Prob. Est. Mul



52) Nicolás: Una multiplicación. Raz. Dim. Mét

53) Entrevistador: ¿Cuál multiplicación? Pre. Sum. Inf

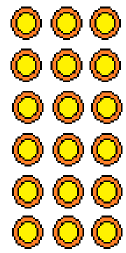
54) Nicolás: cuatro por seis, veinticuatro Raz. Dim. Con

55) Entrevistador: ¿Podrías organizar de otra forma el grupo de fichas? Pre. Sum. Inf

56) Nicolás: Después de un momento de silencio… asegura: Esta duro. Raz. Dim. Mét

57) Nicolás: Aquí van seis (señalando las filas) y aquí van tres (señalando las columnas), entonces aquí van seis (pasa algunas fichas y las ubica Raz. Dim. Mét

en las columnas) y aquí van tres (señalando las fichas que han quedado en las filas)



58)	Entrevistador: ¿Qué ves ahí? ¿Qué ha sucedido?	Pre. Sum. Inf
59)	Nicolás: Que tienen lo mismo. Dan lo mismo.	Raz. Dim. Mét
60)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de ordenar las fichas?	Pre. Sum. Inf
61)	Nicolás: no.	Raz. Dim. Mét

Teniendo en cuenta el rango denominado "construir conocimiento en dominio" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 249) propio de la dimensión de método dentro del marco de enseñanza para la comprensión y teniendo en cuenta que Nicolás ha resuelto el problema utilizando las fichas dispuestas para la solución del problema, variando solo su posición (las figura dispuesta de manera horizontal fue colocada de manera vertical) asegurando que no existe otra forma de organizar las fichas, sin intentar ningún otro tipo de posibilidades, permite relacionar la "aplicación mecánica de procedimientos" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 240) al desarrollo de la actividad anterior.

5.3.4.2 Algoritmo de la división.

La división es tomada como la operación inversa de la multiplicación, en el ejercicio que Nicolás realiza con respecto a ésta, así puede contemplarse, pero… ¿Es Nicolás conciente de ello?

227)	Entrevistador: Podrías compartir conmigo, el procedimiento que llevas tú a cabo para resolver, la siguiente división.	Prob. Est. Mul

$$123456 \,\big|\!\underline{\;3\qquad\;}$$

228)	Nicolás: Está lo que el tres en el doce, que está cuatro veces. Cuatro por	Raz. Dim. Mét

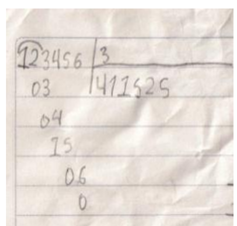
tres doce a doce cero. Bajo el tres.

123456 | 3
03   4

229) Nicolás: Esta lo que el tres en el tres que está una vez, una por tres, tres a tres cero, bajo el cuatro. Está lo que el cuatro en el tres, que está una vez, una por tres, tres a cuatro una. Bajo el cinco. Está lo que el tres en el quince, está cinco veces, cinco por tres quince, pongo el cero. Bajo el seis. Raz. Dim. Mét

123456 | 3
03   41152
  04
    15
      06

230) Nicolás: Está lo que el tres en el seis, que está tres veces… Ah! No dos veces… dos por tres seis, a seis cero. Raz. Dim. Mét

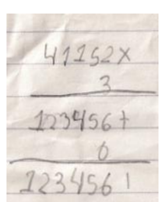


231) Nicolás: Ya miro la prueba si está bien. Raz. Dim. Mét

232) Entrevistador: No es necesario que hagas la prueba. Pre. Sum. Inf

233) Nicolás: No, yo quiero hacer la prueba. Cuarenta y uno, quince, dos… por tres… Raz. Dim. Mét

234) Nicolás: Tres por dos, seis. Tres por cinco, quince. Tres por una, tres y una cuatro. Tres por una, tres. Tres por cuatro doce. Más cero. Raz. Dim. Mét



235) Entrevistador: ¿Por qué debes sumar cero? Pre. Sum. Inf

236) Nicolás: Porque para ver si esta buena la división Raz. Dim. Mét

237) Entrevistador: ¿Cuánto vale cero? Pre. Sum. Inf

238) Nicolás: Nada. Raz. Dim. Mét

239)	Entrevistador: Entonces ¿Por qué sumas cero?	Pre. Sum. Inf
240)	Nicolás: Es que así es la prueba de la división. Pa' saber que la división esta buena.	Raz. Dim. Mét

En el desarrollo del algoritmo anterior, Nicolás ha resuelto la división utilizando una serie de procedimientos paso a paso, como si fuese una receta, esta forma de solucionar la división se asocia a la dimensión de método propuesta en la teoría de la enseñanza para la comprensión, específicamente en el nivel de principiante donde "los alumnos empiezan a comprender que los métodos son útiles para construir conocimiento, pero aplican mecánicamente los procedimientos" (Mansilla y Gardner, 2003,p. 249).

5.3.4.3 Repartir en partes iguales.

Los estudiantes generalmente construyen métodos y estrategias propias para resolver los diferentes tipos de problema, en especial los estudiantes pequeños sorprenden al entrevistador con soluciones y métodos propios, sus planteamientos se muestran influenciados por el contexto donde se desenvuelven. Esto se evidencia en el siguiente problema cuando Nicolás ha hecho uso de los conocimientos que ha adquirido en el entorno para resolverlos.

149)	Entrevistador: ¿Tú tienes hermanos?	Prob. Est. Mul
150)	Nicolás: Si. Tengo cuatro hermanas y yo soy el menor.	Raz. Dim. Mét
151)	Entrevistador: Si tú papá en tiempo de cosecha dispone de quince mil pesos, para repartirlo entre tú y tus hermanas, de a cuanto dinero les toca si es para repartirlo en partes iguales?	Pre. Sum. Inf
151)	Nicolás: Se queda en silencio dos minutos.	Raz. Dim. Mét
152)	Entrevistador: Puedes utilizar el material que esta disponible en la mesa (lápiz, papel, cubos, bloques lógicos, canicas, billetes)	Afir. Sum. Inf
153)	Nicolás: Con eso me enredo más. Guarda de nuevo silencio. Al cabo de un minuto dice, de a dos mil quinientos… a cada una de dos mil quinientos y para mi también, nos sobran dos mil quinientos y los guardamos para otra cosa. No había otra manera.	Raz. Dim. Mét
154)	Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?	Pre. Sum. Inf
155)	Nicolás: Lo hice con una suma. Sumando dos mil quinientos cinco veces… no me da los quincemil, me da doce mil quinientos y nos	Raz. Dim. Mét

sobran dos mil quinientos para otra cosa.

En el ejercicio anterior Nicolás ha utilizado una suma para resolver un problema cuya solución habitualmente es dilucidada a través de una división, lo que significa que ha utilizado métodos propios en la solución del problema. Esta búsqueda continua de soluciones se encuentra enmarcada en la dimensión de método, donde el estudiante ve "la necesidad de respaldar sus afirmaciones" (Mansilla y Gardner, 2003, p.248)con el fin de confirmar que sus respuestas son adecuadas "no de averiguar si sus creencias son correctas" (Mansilla y Gardner, 2003, p.248).

5.3.4.4 Agrupamiento o sustración repetida

Así como sucede para la multiplicación, la división presenta también ciertos tipos de problema uno de ellos son los problemas por agrupamiento o sustración repetida, donde el cociente de la divisón puede ser obtenido a través una secuencia de restas reiteradas. A continuación Nicolás resuelve un problema de este tipo:

163)	Entrevistador: El colegio cuenta con 84 estudiantes del grado cuarto. La rectora ha decidido crear tres grupos con igual número de estudiantes. ¿Cuántos estudiantes conforman cada uno de los grupos?	Prob. Est. Mul
165)	Nicolás: ¿Cuántos son?	Pre. Sum. Inf
166)	Entrevistador: ochenta y cuatro.	Afir. Sum. Inf
167)	Nicolás: Está durísimo.	Raz. Dim. Mét
168)	Entrevistador: ¿Crees que una de las operaciones: suma, resta, multiplicación y división, puedan ayudarte?	Pre. Sum. Inf
169)	Nicolás: No sé. De pronto una división.	Raz. Dim. Mét
170)	Entrevistador: ¿Qué dividirías?	Pre. Sum. Inf
171)	Nicolás: No sé.	Raz. Dim. Mét

Existen ocasiones en las que la explicación no produce ninguna solución, en el ejercicio anterior puede notarse que Nicolás guiado por la intuición plantea que la solución del problema "de pronto es una división" sin embargo él no continúa con la comprobación de esta hipótesis, el ejercicio anterior indica entonces, que los procesos de razonamiento no llevan de manera obligada a un proceso de comprensión, Nicolás ha razonado, pero con respecto a la comprensión se considera que "el uso del conocimiento por parte de los alumnos requiere considerable apoyo y depende de la instrucción de la autoridad" (Mansilla y Gardner, 2003, p.253).

En este ejercicio, Nicolás se encuadra en el nivel de novato dentro de la dimensión de método, pues, aunque posee una idea del proceso que puede utilizar, aún no identifica ni cómo ni cúando puede hacerlo.

5.4 Caso III: Regina

Regina es una estudiante que cursa el grado cuarto, su maestra asegura “Regina,, obviamente no está en el grupo de los mejores, le da dificultad comprender algunos conocimientos matemáticos”, sus explicaciones en ocasiones carecen de claridad por ello se hace necesario ahondar en sus pocesos de razonamiento.

La entrevista de Regina está acompañada de las siguientes abreviaturas: problema relacionado con la estructura multiplicativa (Prob. Est. Mul), razonamiento dimensión de contenido (Raz. Dim. Con), pregunta que indaga por los procesos de razonamiento (Prg. Proc. Raz.), explicación de procesos algorítmicos (Exp. Proc. Alg), razonamiento estructura multiplicativa (Raz. Estr. Mul), material concreto (Mat. Concret), razonamiento dimensión propósito (Raz. Dim. Pro), construcción del proceso de razonamiento (Con. Pro. Raz), pregunta de suministro de información (Prg. Sum. Inf), suministro de información del problema (Sum. Inf. Pro), razonamiento dimensión formas comunicación (Raz. Dim. Com), razonamiento dimensión método (Raz. Dim. Mét).

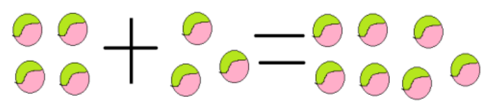
5.4.1 Razonamientos asociados a la dimensión de contenido.

La utilización de operaciones formales, de reglas y algoritmos propios de las matemáticas hace parte de la dimensión de contenido, en ella se pueden encontrar los términos y definiciones formales que se incluyen en su estudio dentro de la escuela. Poner en juego la aplicación de tales conocimientos durante la solución de problemas es fundamental para el desarrollo de explicaciones relacionadas con dicha dimensión.

5.4.1.1 Una suma o una multiplicación.

En algunos casos la multiplicación es entendida como una suma, es entonces cuando los estudiantes se enfrentan a la pregunta ¿qué es una suma? o ¿qué es una multiplicación? En el siguiente apartado puede observarse como Regina ha interpretado el problema de tal manera que considera que es posible resolverlo a través de una suma, sin embargo al final de sus explicaciones expresa “ya no sé”.

(163)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizar: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(165)	Regina: tiene siete.	Afir. Sum. Inf
(166)	Entrevistador: ¿por qué?	Pre. Sum. Inf
(167)	Regina: porque siete es más que cuatro, cuatro más tres siete.	Raz. Dim. Con
(168)	Entrevistador: Intentemos hacerlo con las bolas. ¿Quieres?	Pre. Sum. Inf
(169)	Regina: estas son las bolas de Juan (agrupa cuatro bolas) y estás son las bolas de Miguel (agrupa tres bolas) posteriormente las cuenta todas y dice: tiene siete.	Raz. Dim. Mét



(170)	Entrevistador: entonces ¿Miguel tiene siete bolas o tiene tres bolas?	Pre. Sum. Inf
(171)	Regina: Ya no sé. Yo creo que tiene siete.	Raz. Dim. Con

La utilización del material concreto y los interrogantes encaminados a indagar sobre las razones que motivan a la estudiante para dar tal o cual respuesta, provocan en ella un conflicto, una duda, una movilización, esta indecisión le permitirá buscar nuevas formas de solución, preguntarse por los procesos que ha llevado a cabo, buscar nuevos caminos, nuevos métodos de solución.

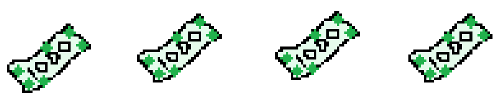
En las explicaciones de Regina se puede evidenciar que en la dimensión de contenido aun “faltan conceptos disciplinarios; prevalecen las creencias intuitivas, folclóricas o míticas” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 246). Esta idea proviene de la siguiente afirmación “yo *creo* que tiene siete”, es decir dicha conclución parte de sus concepciones de lo que ella cree. Según lo anterior Regina en esta dimensión se encuentra en el nivel ingenuo de razonamiento donde los conocimientos del medio y los conocimientos propios de la disciplina están desconectados.

Con respecto a la dimensión de método ha decidido realizar una estrategia de validación distinta a la inicialmente formulada, en dicha oportunidad ha optado por utilizar el material concreto, al finalizar se encuentra confundida “ya no sé” lo que indica que ha cuestionado sus formulaciones anteriores, sin embargo sus concepciones intuitivas le han ganado la partida por lo que concluye “ yo creo que tiene siete”, tales formulaciones la sumergen en un nivel de principiante dentro de esta dimensión.

5.4.1.2 Secuencias de conteo.

El conteo es una actividad realizada por los estudiante de manera constante, es la estrategia que inicialmente utilizan para tratar de resolver los diferentes tipos de problemas. El estudiante empieza a construir conceptos a partir de esta estrategias.

(163)	Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando $1.000 cada semana, ¿Cuánto dinero, ha ahorrado Melisa en 4 semanas?	Prob. Est. Mul
(165)	Regina: Tiene tres mil.	Raz. Dim. Con
(166)	Entrevistador: Supongamos que cada uno de estos papelitos es un billete de mil. ¿Cuántos billetes ha ahorrado Melisa? ¿Cuánta plata?	Pre. Sum. Inf
(167)	Regina: Organiza cuatro billetes en filas y afirma. Cuatro… cuatro mil.	Raz. Dim. Mét



(168)	Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?	Pre. Sum. Inf
(169)	Regina: Se demoró un largo rato y luego afirmó: Sumé, Cuatro mil; mil… mil… mil… mil. Cuatro mil.	Raz. Dim. Con

Existen procesos de razonamiento que en ocasiones se encuentran profundamente internados en la mente del estudiante, por lo tanto la elaboración de la explicación se convierte en una tarea compleja, en el caso de Regina sus largos silencios… son un indicativo del tiempo que se ha tomado en la elaboración de la explicación. Para la elaboración de una explicación tienen que ocurrir a varios procesos en la mente y esto a algunos estudiantes les toma más tiempo que a otros, la explicación por lo tanto es un proceso de construcción personal, que requiere de tiempos, elementos y relaciones subjetivas.

En el desarrollo de la solución del problema puede notarse que Regina “no va más allá de las tareas prescritas” (Mansilla y Gardner, 2003, p. 252) sus respuestas están sujetas a las tareas y a las preguntas que hace el entrevistador y la validación de sus procesos de construcción del conocimiento "depende de la autoridad externa más que de criterios racionales" (Hetland, Hammerness, Unger, y Gray Wilson, 2003, p. 262) lo que la coloca entonces en el nivel de novato dentro de la dimensión de conocimiento.

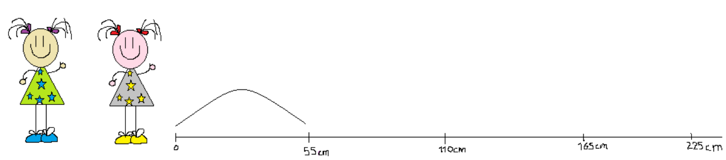
5.4.2 Razonamientos asociados a la dimensión de método.

Explorar diferentes formas de construir conocimiento se encuentra enmarcado en la dimensión de método, donde se hace necesario que la ejecución de procedimientos propios esté acompañada de explicaciones coherentes y ricas en concepciones y relaciones. Estas particularidades darán cuenta del nivel de comprensión de Regina en dicha dimensión.

5.4.2.1 Multiplicar en la recta.

Existen muchas formas de acercar los estudiantes al desarrollo y comprensión de las operaciones básicas, además del diálogo, de las explicaciones reiteradas, del uso del material concreto y didáctico, también se puede incluir el uso de la recta numérica. En la recta numérica multiplicar, es contar a saltos y dividir, es contar a saltos hacia atrás.

(163)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Prob. Est. Mul
(165)	Regina: Cuenta en los dedos… y propone… cincuenta y ocho.	Raz. Dim. Con
(166)	Entrevistador: ¿Qué tal si miramos esta recta?	Pre. Sum. Inf
(167)	Regina: bueno.	Afir. Sum. Inf
(168)	Entrevistador: Mira. Dónde crees que ha caído Tatiana.	Pre. Sum. Inf



(169)	Regina: señala el número 165 y dice: aquí.	Raz. Dim. Mét
(170)	Entrevistador: ¿Por qué?	Pre. Sum. Inf
(171)	Regina: porque uno (señalando el punto donde está el 55), dos (señalando el punto donde está el 110), tres (señalando el punto donde está el 165).	Raz. Dim. Mét

Tatiana cae aquí.

Entrevistador: ¿Sabes qué operación matemática podemos utilizar para resolverlo? Pre. Sum. Inf

Regina: No Raz. Dim. Con

Las creencias intuitivas en ocasiones acompañan los desempeños de los estudiantes durante algunos años, es tarea de la escuela transformar dichas concepciones, las explicaciones de Regina parten de tales construcciones intuitivas, en esta ocasión la "imagen habla más que mil palabras"[31] antes de observar la gráfica se propone una suma entre las cantidades presentadas dentro del problema. Sin embargo la ubicación en la recta le ha permitido marcar "tres veces más que Laura".

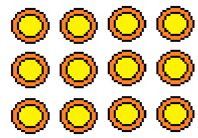
Según lo anterior Regina se encuentra en un nivel de comprensión ingenuo en la dimensión de método ya que "las cosas se ven como verdaderas por propia evidencia" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 250) a ella le basta con observar la gráfica para comprobar que Tatiana ha saltado ciento sesenta y cinco centímetros, al interrogarle sobre las posibles operaciones aritméticas que pueden estar presentes en la solución del problema, Regina responde "no sé" hallándose entonces al igual que en la dimensión anterior, en un nivel ingenuo de comprensión con respecto a la dimensión de conocimiento porque sus creecias intuitivas aun no han sido transformadas, consecuente con esto "los sistemas de símbolos son usados sin reflexión" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 254) siendo esto un indicativo de nivel ingenuo en la dimensión de formas de comunicación.

5.4.2.2 Del conteo a la agrupación.

La representación de las operaciones a través del material concreto, permite a los estudiantes hacer inferencias y representaciones con respecto a las operaciones, antes de realizar las agrupaciones los estudiantes realizan actividades de conteo. Estas etapas son necesarias en el desarrollo de la vida escolar y si sus argumentaciones evolucionan acompañadas de procesos de razonamiento repercutirán directamente en el mejoramiento de los niveles de comprensión.

[31] Dicho popular.

(163)	Entrevistador: Observa por favor, el siguiente grupo de fichas y dime ¿Cuántas fichas hay?	Prob. Est. Mul



(165)	Regina: Observa la fichas y empieza a contar… uno, dos, tres… doce.	Raz. Dim. Met
(166)	Entrevistador: ¿De qué otra forma podemos contar las fichas?	Pre. Sum. Inf
(167)	Regina: Mientras agrupa cantidades de a dos… repite dos, cuatro, seis, ocho, doce…	Raz. Dim. Con

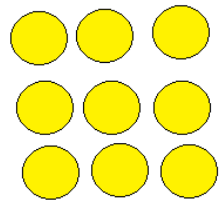
(168)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de hacerlo?	Pre. Sum. Inf
(169)	Regina: Creo que no.	Raz. Dim. Con

Sumergirse en las intrincadas redes de la comprensión implica tener en cuenta la capacidad que tiene el alumno para "dominar y usar cuerpos de conocimiento que son valorados por su cultura" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 216). Regina es una estudiante que presenta dificultades para relacionar formas de conteo con las operaciones formales que pueden representarlas, sus concepciones propias, personales son notablemente dominantes en la elaboración de sus razonamientos, lo que repercute en el desarrollo de los desempeños.

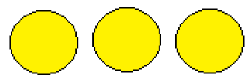
5.4.2.3 Repartir…repartir…

En ocasiones la división es asumida como una resta reiterada, en otras es concebida como una simple acción de repartir. Es el caso de Regina, en esta ocasión ha decidido utilizar el material dispuesto para buscar la solución del problema propuesto.

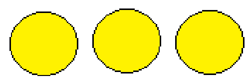
(163)	Entrevistador: Milena tiene $ 9000 para repartirlo entre ella y sus dos hermanas, ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una?	Prob. Est. Mul
(165)	Regina: Eh…toma las fichas que hay en la mesa y separa nueve,	Raz. Dim. Com



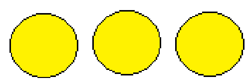
luego separa tres y dice: tres mil para una



(166) Regina: Tres mil para la otra… Afir. Sum. Inf



(167) Regina: Y tres mil para Milena. Raz. Dim. Com



(168) Entrevistador: ¿Puedes resolver este problema con una operación? Raz. Dim. Com

(169) Regina: hum… no Afir. Sum. Inf

Es de anotar que los métodos utilizados por Regina permiten la solución de los problemas, sin embargo cabe decir que dichas soluciones y métodos requieren de un tratamiento propio de la disciplina, de la identificación y uso de éstos en situaciones de la vida cotidiana, de la comunicación asertiva, de una razón o muchas razones, de múltiples porqué y múltiples explicaciones, que le permitan avanzar hacia un nivel de comprensión más avanzado.

5.4.3 Razonamientos asociados a la dimensión de formas de comunicación.

En esta dimensión se encuentran inmersos los tipos de representación, de comunicación, de relación pensamiento-lenguaje que surgen durante la solución de un problema. En este sentido cada uno de los métodos empleados por el estudiante son tenidos en cuenta dentro de la elaboración de las descripciones que se presentan dentro de la dimensión de formas de comunicación.

5.4.3.1 Formas de representación.

Las gráficas hacen parte de un proceso de representación al que se enfrentan los alumnos. En el siguiente problema Regina ha diseñado una serie de dibujos que representan los datos hallados en el planteamiento del problema; las representaciones han sido de gran utilidad para ella puesto que le han permitido resolver el problema sin utilizar ninguna operación aritmética en específico.

(163) Entrevistador: Luisa el lunes ha comprado 3 galletas, el martes 3 bombones, el miércoles 3 confites, el jueves 3 barriletes y el viernes 3 frunas. ¿Cuántos dulces ha comprado Luisa durante la semana? Prob. Est. Mul

(165) Regina: El lunes tres galletas… el martes… Raz. Dim. Com

(166) Entrevistador: El martes tres bombones, el miércoles tres confites, el jueves tres barriletes y el viernes tres frunas. Afir. Sum. Inf

(167) Regina: El martes, tres bombones… Raz. Dim. Com

(168) Regina: El miércoles…tres confites Raz. Dim. Com

(169) Entrevistador: El jueves tres barriletes… Afir. Sum. Inf

Regina: Tres barriletes. Raz. Dim. Com

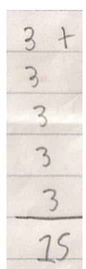
Regina: El viernes… tres frunas… Raz. Dim. Com

Entrevistador: ¿Cuántos dulces ha comprado en la semana? Pre. Sum. Inf

Regina: Eh! Cuenta en sus dedos… quince. Compró quince. Raz. Dim. Com

Entrevistador: Puedes hacer lo que hiciste con tus dedos en el cuaderno. Pre. Sum. Inf

Regina: Bueno. Raz. Dim. Com



La forma como los estudiantes se comunican hace parte de una de las dimensiones de la comprensión, esta dimensión se preocupa por la forma como los estudiantes comunican sus ideas y el uso que hacen de los símbolos y sistemas dispuestos para dar a conocer los conceptos.

En el ejercicio anterior puede evidenciarse que Regina ha mostrado una "familiaridad inicial con el sistema de símbolos" (Mansilla y Gardner, 2003, p 255) ha logrado evolucionar de un sistema de conteo y de representación a un sistema de símbolos propio de las matemáticas. Por lo tanto, Regina ha logrado trascender de un nivel ingenuo en la dimensión de formas de comunicación a un nivel de principiante en el desarrollo del problema anteriormente presentado.

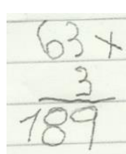
5.4.4 Razonamientos asociados a la dimensión de propósito.

Cuestionar la pertinencia, el uso, el significado de una operación durante la solución de un problema, evocar situaciones similares dentro de las cuales este conocimiento ha sido empleado de manera efectiva, tiene que ver con la dimensión de propósito donde la utilidad de los conocimientos es puesta a prueba. A continuación se presenta una descripción del desempeño de Regina dentro de esta dimensión.

5.4.4.1 El algoritmo de la multiplicación.

En ocasiones durante el aprendizaje de los algoritmos, los estudiantes se dedican a aprender de memoria los diferentes algoritmos propios de cada operación, en el caso de la multiplicación las tablas de multiplicar se convierten en una pieza fundamental del rompecabezas.

(163)	Entrevistador: ¿Para tí que es una multiplicación?	Prob. Est. Mul
(165)	Regina: Es multiplicar las cifras.	Raz. Dim. Com
(166)	Entrevistador. ¿Para qué sirve la multiplicación?	Afir. Sum. Inf
(167)	Regina: Para uno aprender, para multiplicar los números, para resolver los problemas de matemáticas.	Raz. Dim. Com
(168)	Entrevistador: Puedes resolver la siguiente multiplicación.	Raz. Dim. Com
(169)	Regina: Si pero yo no me sé las tablas. Tengo que mirar…tres por tres… nueve… pongo el nueve… tres por seis… dieciocho… pongo el dieciocho.	Afir. Sum. Inf



Con respecto a la comprensión del algoritmo, en la dimensión de propósito Regina no ha logrado relacionar "lo que aprende en la escuela y las experiencias de la vida cotidiana" (Mansilla y Gardner, 2003, p. 252) el desarrollo del algoritmo no va más allá de la simple repetición de reglas aprendidas de memoria y aplicadas en un estricto orden. Es por ello que en la dimensión de propósitos se encuentra en el nivel ingenuo de comprensión.

Este mismo nivel también aplica para la dimensión de conocimiento donde se nota el seguimiento de reglas algorítmicas previamente ensayadas, Regina concluye que la multiplicación solo sirve para "uno aprender, para multiplicar los números, para resolver los problemas de matemáticas" esta concepción la ha construido desde la experiencia, por tal motivo no encuentra ninguna otra utilidad para dicha operación aritmética.

5.5 La Triangulación: Las Explicaciones de los Estudiantes en Diálogo con la Teoría de Enseñanza para la Comprensión

En el desarrollo de las entrevistas y las observaciones se pudo determinar que cada uno de los estudiantes a pesar de encontrarse en el salón de clase, en el municipio y en un entorno social similar, cuentan con diferentes formas de argumentar, de sistematizar y representar la información lo que da cuenta de un nivel de razonamiento particular dentro de cada una de las dimensiones de la comprensión.

Esta variedad de información, permite realizar un ejercicio de triangulación de datos, entendida por (Stake, 1999) como la comparación o combinación de las fuentes de datos, por lo tanto permite "establecer un significado, no una posición" (Stake, 1999, p. 96). De tal modo que la triangulación reafirma la validez de la interpretación de los datos.

Con el fin de dar aplicabilidad a los planteamientos expuestos en el párrafo anterior, se recurre a la "triangulación de los datos y los supuestos relevantes" (Stake, 1999, p. 97) que emergen durante el análisis de las observaciones y las entrevistas, con el propósito de ofrecer una mejor comprensión acerca de procesos de razonamiento con respecto a la estructura multiplicativa y su respectiva relación con las dimensiones de la comprensión.

Se considera pertinente llevar a cabo la triangulación de los datos puesto que los métodos de recolección de información tienen el mismo objeto de estudio procesos de razonamiento y las explicaciones de los estudiantes son ricas y diversas tanto en la descripción de las observaciones como en la sistematización de las entrevistas, dicha triangulación se realiza entonces en relación con las categorías emergentes.

5.5.1 Razonamientos asociados a las dimensiones de la comprensión.

Determinar la comprensión de los estudiantes es una tarea en ocasiones dispendiosa, generalmente se asignan durante el desarrollo de los periodos académicos gran variedad de tareas que deben ser ejecutadas de manera predeterminada para ser evaluados de manera positiva o esperada al final de cada periodo escolar, pero el desarrollo de tareas, ¿realmente define el nivel de comprensión de los estudiantes? Vale la pena realizar tales cuestionamientos.

Dentro de la descripción de las observaciones y el registro de las entrevistas puede notarse que las explicaciones de los estudiantes van acompañadas de saberes concebidos, aceptados, asumidos como verdaderos, lo que en consecuencia da cuenta de los niveles de comprensión del estudiante con respecto al objeto matemático abordado: la estructura multiplicativa, dentro de cada una de las dimensiones, en ocasiones las explicaciones que surgen durante el desarrollo de un problema se encuentran enmarcadas en una o más dimensiones.

5.5.1.1 Razonamientos asociados a la dimensión de conocimiento.

Con respecto a esta dimensión se evalúa la capacidad del estudiante para transformar los conocimientos previos adquiridos en diferentes entornos: escolar, social, familiar. El empleo de teorías y conceptos propios de la estructura multiplicativa para la ejecución de los desempeños (solución de problemas), la capacidad de razonar de múltiples maneras ante la misma situación teniendo en cuenta operaciones aritméticas, algoritmos, signos y símbolos propios de la estructura.

5.5.1.1.1 Nivel ingenuo.

En este nivel se encuentran aquellas explicaciones donde “prevalecen las creencias intuitivas, folklóricas, míticas” (Masilla y Gardner, 2003, p. 246) de los estudiantes, con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa pueden hallarse explicaciones como la de Regina cuando al tratar de resolver un problema finalmente concluye “yo *creo* que tiene siete”, o cuando en lugar de realizar una multiplicación (ver apartado 5.4.1.2) recurre a conocimientos propios y decide sumar, afirmando “sumé, Cuatro mil; mil… mil… mil… mil. Cuatro mil” estas explicaciones se relacionan con algunas presentadas por Nicolás, cuando propone que “63 x 3 es lo mismo que escribir 63 + 3” (ver 5.3.1.4) o Jesús cuando a la pregunta: “Cuál consideras tú que es el factor que se repite” responde “el tres” (ver 5.2.1.1). Estos razonamientos están elaborados con información que se encuentra dispuesta directamente dentro del entorno, aún no tienen ninguna relación con el conocimiento del dominio.

5.5.1.1.2 Nivel de principiante.

Las respuestas de los estudiantes que se incluyen dentro de este nivel presentan dominio de conceptos propios del área, se basan “en los rituales de pruebas y de la escolarización” un ejemplo de ello son explicaciones como ““3+3+3+3= 3x4” (Jesús, apartado 5.2.1.1) o “cinco más cinco, diez. Diez más cinco… quince. Quince más cinco… veinte. Y la otra cinco por cuatro veinte” (Jesús, apartado 5.2.1.2) estas asociaciones se encuentran estrechamente relacionadas con el conocimiento que se construye dentro de la escuela. Por su parte Nicolás argumenta “porque se suma y se multiplica y me da lo mismo. Uno necesita seis, otro necesita seis y el otro necesita seis, entre los tres necesitan dieciocho” (ver 5.3.1.3) lo que establece una relación entre la multiplicación y la suma repetida. En la entrevista de Regina no se aprecian explicaciones de este tipo. Mientras que en las observaciones los estudiantes en sus diálogos expresan “ésta le pide que por favor salga y la realice en el tablero. El estudiante accede y realiza lo siguiente mientras explica: 22x5=20 por que 5 x 2 = 10 y 5 por el otro 2 también da: 10. 10 y 10 da veinte” Estos razonamientos son propios de esta dimensión ya que incluyen el uso de conceptos propios de la disciplina “algoritmo de la multiplicación” (ver 5.1.3).

5.5.1.1.3 Nivel de aprendiz.

Cuando en la solución del problema se presentan explicaciones donde se incluyen conocimientos arraigados al dominio disciplinar relacionados con habilidades del pensamiento pueden catalogarse como propias del nivel de comprensión de aprendiz dentro de la dimensión de contenido, un ejemplo de ello lo hace Jesús: “cuenta en sus dedos… tres mil… seis mil… nueve mil… mueve sus dedos. Luego de un momento toma el lápiz y escribe: 3000 x 9” (ver 5.2.2.25.2.1.3), en uno de los momentos descritos en las observaciones se puede traer a colación la explicación: “él recoge cada mes 15 arrobas de cacao, y la profe está preguntando que cuántas recoge en el año, osea que un año trae doce meses, usted multiplica las quince arrobas de un mes por los doce meses que trae un año, en vez de sumar doce veces 15, si me entiende?” (ver descripción observación 5.1.1).

5.5.1.1.4 Nivel de maestría.

Las explicaciones que dan cuenta de la extensión de los conceptos y teorías propias de la estructura multiplicativa prolongados más allá de la aplicación directa, pertenecen a la dimensión de maestría, dentro de las explicaciones de los estudiantes no se han observado características que puedan encuadrar dentro de dicho nivel.

5.5.1.2 Razonamientos asociados a la dimensión de método.

Los razonamientos construidos dentro de esta dimensión tienen relación con el cuestionamiento que hacen los estudiantes de sus propios procesos y la medida en la que estos son usados “tejiendo y relacionando explicaciones coherentes” (Masilla y Gardner, 2003, p. 250). Las explicaciones que respectan a dicha dimensión se encuentran presentes en cada una de las justificaciones que presentan los estudiantes acerca de los métodos de solución efectuados.

5.5.1.2.1 Nivel ingenuo.

El marco conceptual de la teoría de la enseñanza para la comprensión explica que dentro de este nivel los estudiantes “ven el mundo como inmediatamente captable, por lo tanto ningún método específico es necesario para probar las afirmaciones” (Masilla y Gardner, 2003, p. 248) según lo anterior un ejemplo de las explicaciones que se enmarcan dentro de este nivel sucede en la situación 5.4.2.1 en el caso de Regina puesto que ella no considera posible verificar su respuesta a través de una operación matemática, igual ocurre con Nicolás cuando en el planteamiento del probema se le solicita repartir quince mil pesos entre él y sus cuatro hermanas a lo que responde "… de a dos mil quinientos… a cada una de dos mil quinientos y para mi también, nos sobran dos mil quinientos y los guardamos para otra cosa. No había otra manera" (ver 5.3.4.3). Por su parte, dentro de las observaciones se evidencian métodos de solución tipo ensayo-error correspondientes a este nivel, en donde los estudiantes lanzan respuestas al aire, esperando la aprobación de su maestra o de uno de sus compañeros "es una resta" "es una resta y prestamos" "es una multiplicación" (apartado 5.1.2).

5.5.1.2.2 Nivel de principiante.

Entendiendo que el conocimiento es información que circula sobre el mundo, se pueden catalogar dentro de este nivel las explicaciones que no presentan un escepticismo evidente, "los alumnos ven la necesidad de respaldar sus afirmaciones, sin embargo es cuestión de demostrar que están acertados, no de averiguar si sus creencias son correctas" (Masilla y Gardner, 2003, p. 248), en este sentido los estudiantes empiezan a comprender la utilidad de los métodos, la dificultad radica en que son aplicados de manera mecánica (Masilla y Gardner, 2003). Inmersos en el registro de las observaciones se pueden identificar razonamientos de esta índole relacionados con la aplicación del algoritmo de la multiplicación (apartados: 5.1.3 y 5.1.4), igual sucede en el desarrollo de las entrevistas la aplicación del algoritmo parece en ocasiones una receta a seguir paso a paso transmitida de generación "el nueve no cabe en el tres, cojo las dos cifras, me queda treinta, tres por nueve… veintisiete a treinta tres, bajo el cero…" (5.2.4.2).

5.5.1.2.3 Nivel de aprendiz.

Este nivel concede al estudiante la posibilidad de ser "autocrítico" (Masilla y Gardner, 2003, p. 248) un ejemplo de ello se hace evidente durante la entrevista de Nicolás "Toma nuevamente sus dedos y explica. Porque vea, tres… va una vez, seis… va otra vez, nueve… va otra vez, doce… va otra vez, quince… va otra vez, dieciocho… va otra vez, veintiuno… va otra vez… se detiene un momento. Veinti… cuatro va otra vez… ah! me equivoqué eran veintisiete mil" (5.3.2.2). Otra característica que presentan los estudiantes cuando se encuentran en este nivel es la utilización de un solo método para resolver los problemas que involucran la estructura multiplicativa, al respecto se puede asegurar que

Regina utiliza constantemente material concreto para representar las situaciones y presentar la respectiva solución (5.4.1.1, 5.4.1.2, 5.4.2.2, 5.4.2.3) Nicolás, ha optado por las actividades de conteo y suma repetida (5.3.1.1, 5.3.1.3, 5.3.2.2, 5.3.3.1, 5.3.4.3) mientras que Jesús le asigna un valor y un significado a los métodos dentro de la formulación de soluciones tal y como puede inferirse de la situación 5.2.4.3 "porque son veinte monedas de cien, los multiplico en vez de sumarlas". En este nivel se inscriben también los razonamientos consigandos dentro de las observaciones cuyo origen radica en las discusiones que surgen alrededor de lo problemas.

5.5.1.2.4 Nivel de maestría.

El uso de diferentes métodos para resolver problemas es una de las características propias de este nivel, es por ello, que no se han considerado las explicaciones presentadas dentro de la sistematización de los datos como parte del mismo, aunque en las observaciones se describen juicios y procedimientos relacionados con múltiples métodos no siempre son argumentados de manera coherente (ver 5.2.4.2).

5.5.1.3 Razonamientos asociados a la dimensión de propósito.

Además de adquirir dominio de los conocimientos y de los métodos a través de los cuales se construyen y se hacen efectivos los conceptos, es necesario que los estudiantes descifren su utilidad, reconozcan situaciones en las que pueden ser aplicados. Esta dimensión asocia los conceptos y procedimientos con situaciones cotidianas, problemas de la vida diaria, es decir responde a las preguntas del porqué y el para qué de la estructura multiplicativa.

5.5.1.3.1 Nivel ingenuo.

Con respecto a las explicaciones propias de este nivel, inicialmente se enseñan las presentadas por Regina quien ante la pregunta "para qué sirve multiplicar" responde "para uno aprender, para multiplicar los números, para resolver los problemas de matemáticas" (5.4.4.1) esta afirmación describe particularidades de los estudiantes que se encuentran dentro del presente nivel como la "poca o ninguna relación entre lo que aprenden en la escuela y las experiencias de la vida cotidiana" (Masilla y Gardner, 2003, p. 252) sus conocimientos están enmarcados dentro de la ejecución de tareas escolares en espera de la aprobación e "instrucción de la autoridad" (Masilla y Gardner, 2003, p.253). Otros datos que pueden relacionarse con el nivel ingenuo dentro de la dimensión de propósito es la capacidad del estudiante para asociar los conocimientos, esto ocurre cuando Jesús resuleve el problema que acontece en una competencia de salto 5.2.2.1 a través de similitudes establecidas con el problema sobre las bolas de cristal 5.2.1.1 es por ello que justifica: "porque ahora fueron tres veces más que cuatro y… ahora son tres veces pero más que cincuenta y cinco… entonces es una multiplicación" (ver 5.2.2.1).

5.5.1.3.2 Nivel de novato

En el transcurso de las observaciones y las entrevistas se hacen explícitas argumentaciones de este tipo, "es que así es la prueba de la división. Pa' saber que la división esta buena" (Nicolás 5.3.4.2) esta explicación está sujeta a "rituales y tareas escolares" (Masilla y Gardner, 2003, p. 252), es decir, Nicolás asume el uso de la multiplicación como prueba fundamental para la verificación de la división; por otro lado, dentro de los datos que se describen en las observaciones se puede notar como los estudiantes gracias a la ayuda de las preguntas que propone la maestra "empiezan a conectar lo que aprenden en la escuela con las experiencias cotidianas" (Masilla y Gardner, 2003, p. 252) por ello ante la pregunta cómo se puede representar el número de estudiantes teniendo en cuenta las filas y las hileras, han surgido respuestas como: "sumando, 4+4+4+4+4+2 da 22 dijo uno de los estudiantes" (5.1.2) o cuando se interroga por ¿cuántos huevos tiene una docena? "los estudiantes responden en coro: doce" al respecto la teoría de enseñanza para la comprensión asegura "al principio, los alumnos necesitan ayuda para usar el conocimiento en situaciones nuevas pero luego son capaces de hacerlo solos" (Masilla y Gardner, 2003, p. 253).

5.5.1.3.3 Nivel de aprendiz.

Los datos suministrados por los participantes de la investigación no cuentan con explicaciones que puedan relacionarse con este nivel de comprensión, ya que no se observa una reinterpretación espontánea de la experiencia a través de percepciones adquiridas en la escuela, no existe una conexión explícita entre lo que se aprende y sus propias vidas, a pesar de que los problemas descritos (5.1, 5.2, 5.3, 5.4) se encuentran relacionados con situaciones conocidas, los estudiantes no verbalizan tales conexiones. (Masilla y Gardner, 2003).

5.5.1.3.4 Nivel de maestría.

Al igual que en el nivel de aprendiz, puede decirse que los datos expuestos dentro del presente trabajo de investigación no disponen de una relación con el nivel de comprensión de maestría en la dimensión de propósito, teniendo en cuenta que los estudiantes no consideran "el conocimiento como una herramienta para predecir y controlar la naturaleza, orientar la acción humana o mejorar su entorno social o el mundo físico" (Masilla y Gardner, 2003, p. 252).

5.5.1.4 Razonamientos asociados a la dimensión de formas de comunicación.

Teniendo en cuenta que la dimensión de formas de comunicación tiene que ver con el uso de los signos y símbolos de los que el estudiante dispone para dar a conocer sus procedimientos, métodos, procesos de solución y conocimientos de manera efectiva y creativa, se presentan a continuación los niveles de comprensión en los que se encuentran dispuestas las explicaciones de los estudiantes dentro de la investigación.

5.5.1.4.1 Nivel ingenuo.

Las representaciones encontradas dentro de este nivel se caracterizan por el uso de los sistemas de símbolos "sin reflexión, lo que da como consecuencia representaciones chatas y poco claras" (Masilla y Gardner, 2003, p. 255) esto ocurre en el caso de Nicolás cuando trata de representar a través del material concreto (no verbal) la multiplicación 3x6=18 presentada en 5.3.1.3 donde obtiene como resultado la siguiente explicación: "hagamos… este es el tres y este es el seis, entonces llegó tres por seis dieciocho" (ver 5.3.1.3), lo mismo ocurre en el desarrollo de las observaciones ante la pregunta ¿qué tenemos que hacer aquí? Realizada por la maestra. Allí "los estudiantes empiezan a responder de manera aleatoria: “una suma” “una resta”…5.1.5 tales respuestas van sin intención, sin conciencia, sin reflexión.

5.5.1.4.2 Nivel de principiante.

Los estudiantes ubicados dentro de este nivel tienden a utilizar un solo tipo de representación, además existe una preocupación especial por el uso de reglas y pautas para presentar las ideas, adoptando poca conciencia del receptor, la acción comunicativa se centra en el emisor. “Balbucea… cinco y cinco… y cinco… llevo una…. Cinco… y una… ciento sesenta y cinco” (5.3.1.2) explicaciones como esta hacen parte del nivel de principiante puesto que Nicolás manifiesta poca conciencia de quien lo escucha. Igual sucede con aportes hallados dentro de las explicaciones (5.3.1.1, 5.3.3.1) donde se expresa: “porque sí. Porque le quité, reste, a ver treinta y seis… no… si… menos seis”. Aunque tales argumentos se acompañan de descripciones más elaboradas, éstas requieren de la intervención del entrevistador.

5.5.1.4.3 Nivel de aprendiz.

En este nivel los estudiantes se mueven con flexibilidad dentro del campo de la explicación verbal y no verbal, utilizan gran variedad de instrumentos propios del lenguaje para dar a conocer sus razonamientos, los esquemas y las representaciones utilizadas son claras y tienen en cuenta el perfil del receptor. Durante la sistematización de los datos, se pueden entrever diferentes formas de comunicar y explicar. En esta dimensión el lenguaje se convierte en una herramienta poderosa de socialización del conocimiento. En el desarrollo de la presente investigación los estudiantes han utilizado de manera general el dibujo como medio para representar la información suministrada en el planteamiento del problema (ver 5.4.3.1) en ocasiones afirmaciones como “no me da… así no sé cómo restar… pero en la memoria sí” trascienden con la ayuda de los sistemas simbólicos, “Primero le resto a treinta y seis le resto seis…de treinta le saco seis, me quedan veinticuatro… ah! Siiii….” Verbalizar sus argumentos y justificaciones les permite aclara y asociar ideas y conceptos tal y como se evidencia en la sistematización y análisis de las observaciones (ver 5.1.1, 5.1.2, 5.1.4, 5.1.5).

5.5.1.4.4 Nivel de maestría.

Dentro de esta dimensión en el nivel de maestría los estudiantes son capaces de expresar y dar a conocer sus procesos de razonamiento a través de una amplia gama de instrumentos de comunicación, teniendo en cuenta el público al cual se dirigen, las normas específicas del género a utilizar, de igual manera son originales y creativos en sus presentaciones y si es necesario utilizan más de un sistema de símbolos. Dentro de las explicaciones suministradas por los estudiantes se notan características propias de este nivel, sin embargo carecen del empleo de "factores contextuales para reforzar la comunicación" (Masilla y Gardner, 2003, p. 256).

Tal y como se puede observar en los párrafos anteriores (5.5 en adelante), las explicaciones de los estudiantes dan cuenta de las dimensiones de la comprensión y sus respectivos niveles, aportan elementos interesantes que revelan características propias de esta dentro de la estructura multiplicativa, lo que a su vez le permite al maestro el diseño de actividades encaminadas a refinar tales niveles.

Capítulo 6: Conclusiones

Finalmente el Razonamiento de la Mano de la Comprensión

"Terminar a tiempo con una nota clara y resonante"

(Anónimo)

6.1 Con Respecto al Alcance de los Objetivos

El propósito de la presente investigación consiste en describir los procesos de razonamiento de los estudiantes y relacionar estos con las dimensiones y niveles de la comprensión. Durante el desarrollo de la propuesta de investigación se exponen de manera reiterada tales relaciones no solo a nivel teórico, sino también a nivel metodológico al igual que en la etapa de análisis.

En consecuencia, cabe señalar que en el transcurso de los capítulos anteriores se han abordado elementos propios de los postulados de Nicolás Balacheff (2000) acerca de la explicación con el fin de establecer su relación con las dimensiones y los niveles de comprensión expuestos en la teoría de enseñanza para la comprensión. Dando privilegio a las explicaciones como categoría de validez que hace parte de los diversos procesos de razonamiento. Es por ello que dentro de la presente investigación la interacción con los participantes permite describir tales procesos dentro de un ambiente de aula cotidiano, donde sus voces se convierten en el centro de la investigación.

Los razonamientos de los estudiantes han sido descritos teniendo en cuenta su desempeño dentro del grupo social (compañeros de aula de clase) y en entrevistas individuales, con el fin de ilustrar ambas perspectivas. Esta investigación además de relacionar las perspectivas de ambos autores (Balacheff y la Teoría de Enseñanza para la Comprensión) a nivel teórico (ver capítulo III) pretende sistematizar los procesos de razonamiento que verbalizan los estudiantes a través de sus explicaciones y asociarlos con las dimensiones y niveles de la comprensión, con el fin de dar valor a las explicaciones que construyen los estudiantes durante los procesos de enseñanza aprendizaje que se dan en el aula. Para cumplir con dicho propósito dentro de la elaboración de las conclusiones se abordan tres asuntos, el primero es la relación de las explicaciones con cada una de las dimensiones de la comprensión y los niveles, la evolución de procesos de razonamiento en el aula a través de las explicaciones y la resolución de problemas como estrategia que permite abordar ambas categorías (explicación y comprensión).

6.2 La Explicación en cada una de las Dimensiones y Niveles

Como se ha expuesto en el capítulo del marco teórico la explicación está sujeta a procesos de razonamiento que acontecen en el pensamiento, la comprensión por su parte necesita que ocurran tales procesos para hacer su aparición. En este apartado se tienen en cuenta las dimensiones y niveles de comprensión abordados en capítulos anteriores y se exponen una serie de explicaciones extraídas de los análisis que dan cuenta de cada una con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa.

6.2.1 Dimensión de contenido.

Con respecto a esta dimensión se concluye que los estudiantes manejan explicaciones orientadas a definir el significado de las operaciones que conforman la estructura multiplicativa (la multiplicación y su inversa la división), conocen de memoria la ejecución del algoritmo, en algunos casos (I-II) poseen dominio de las tablas de multiplicar, son capaces de explicar cómo se seleccionan las operaciones. Presentan dificultades para identificar el uso de la división como recurso para resolver problemas. Las explicaciones que se relacionan con la dimensión de contenido abordan temas como los que se presentan en la Tabla 8.

1. Definir significado de operaciones. **2. Manejo de los algoritmos multiplicación y división).** **3. Dominio de las tablas de multiplicar.** **4. Razones fundamentadas en la teoría para elegir una u otra operación.**	**Dimensión de contenido**

Tabla 8. Temáticas referidas a la dimensión de contenido con respecto a la estructura multiplicativa

Los niveles de la comprensión dentro de esta dimensión están sujetos a la flexibilidad y al dominio que demuestran los estudiantes al desarrollar cada uno de los desempeños. Teniendo en cuenta el análisis de las explicaciones tanto dentro de las observaciones de clase como en el desarrollo de las entrevistas los estudiantes del grado cuarto se ubican dentro de dicha dimensión entre los niveles ingenuo y principiante, ya que sus definiciones con respecto a la estructura se encuentran basadas en conocimientos adquiridos dentro del entorno, “multiplicar para saber las tablas” “multiplicar…es multiplicar las cifras” (5.4.4.1) por lo tanto divagan en sus definiciones y utilizan estrategias de conteo en lugar de las operaciones formales.

6.2.2 Dimensión de método.

Las explicaciones que caben dentro de esta dimensión se caracterizan por describir la flexibilidad en el uso de métodos confiables, en la validación de las soluciones a través de otras estrategias, en la deducción del uso de diferentes fórmulas y algoritmos, teniendo en cuenta lo expuesto, en esta dimensión se pueden caracterizar según las explicaciones diferentes métodos que permiten la solución de problemas relacionados con la estructura multiplicativa, como son: solución de ambas operaciones a través del uso del material concreto, la multiplicación como secuencia de conteo, la multiplicación como suma repetida, la multiplicación estándar, la división como secuencia de conteo, la división como resta repetida, la división como suma repetida, la división estándar. Con el fin de ilustrar tales métodos se presenta la **Tabla 9**.

Los estudiantes utilizan diferentes formas de organizar la información con el objetivo de interpretar y dar solución a los problemas, tales procesos de interpretación también hacen parte de la dimensión de método, lo que juega un papel esencial dentro de la solución del problema por lo tanto los estudiantes no solo practican diferentes métodos de solución sino también diferentes métodos de codificación.

1. Uso del material concreto. **2. Multiplicación como secuencia de conteo.** **3. Multiplicación como suma repetida.** **4. Multiplicación estándar.** **5. División como secuencia de conteo.** **6. División como resta repetida.** **7. División como suma repetida.** **8. División estándar.**	**Dimensión de método**

Tabla 9. Determinación de métodos asociados a la solución de problemas propios de la estructura multiplicativa

La determinación del nivel de comprensión de los estudiantes dentro de dicha dimensión es la capacidad que este tiene para proponer sus propios métodos de solución sin desconocer aquellos que han sido utilizados por los expertos a lo largo de la historia, esto implica cierta capacidad de cuestionar sus estrategias, es decir, realizar secuencias de conteo pero al mismo tiempo relacionarlas con la operación formal, identificar cuál de los métodos empleados puede ser más efectivo para la solución del problema o simplemente validar sus respuestas a través del uso de otro método conocido. Según los datos suministrados por las entrevistas y las observaciones los estudiantes que participan dentro del desarrollo de la investigación presentan características propias del nivel de novato y de principiante en esta dimensión ya que dentro de las estrategias usadas para resolver los problemas generalmente utilizan el conteo, la suma repetida y la resta sucesiva con el fin de dar solución a los problemas que requieren del uso de una división o una multiplicación sin asociar tales métodos a los propuestos por la matemática formal, solo Jesús ha avanzado a la dimensión de aprendiz, puesto que relaciona los distintos métodos con las operaciones formales e incluso propone hasta tres estrategias de solución para un mismo problema.

6.2.3 Dimensión de propósito.

No basta con definir conceptos y establecer métodos apropiados para la ejecución de los desempeños, se requiere también de cierta intencionalidad en la aplicación de ambas cosas, reconocer elementos de la vida propia inmersos en la construcción del conocimiento. En esta dimensión la comprensión va más allá de saber- hacer, se trata más bien de establecer conexiones entre lo que se aprende y la vida diaria, lo que significa que dentro del análisis de los datos de la presente investigación incluir aquellas explicaciones que relacionan el concepto de estructura multiplicativa y sus operaciones con la vida diaria, con situaciones que ocurren de manera paulatina o esporádica dentro de su contexto social, familiar o escolar. Algunas explicaciones que dan cuenta de tales relaciones dentro de la presente investigación son: relación del problema con el contexto, relación con situaciones anteriores, uso adecuado de la multiplicación, uso adecuado de la división (ver Tabla 10).

1. Relación del problema con el contexto. **2. Relación con situaciones anteriores.** **3. Pertinencia del uso de la multiplicación.** **4. Pertinencia del uso de la división.**	**Dimensión de propósito**

Tabla 10. Relaciones establecidas dentro de la dimensión de propósito con respecto problemas de la estructura multiplicativa

Según el análisis de los datos recolectados en el presente estudio de casos, los estudiantes entrevistados y observados pueden situarse en los niveles de comprensión ingenua y de principiante ya que relacionan problemas con situaciones de la vida familiar y de la vida cotidiana, de igual forma en ocasiones recurren a métodos y conjeturas empleadas en la solución de problemas anteriores para resolver los actuales. Sin embargo las explicaciones que dan cuenta de los razonamientos dentro de esta dimensión son poco frecuentes dentro del desarrollo de la presente investigación.

6.2.4 Dimensión de formas de comunicación.

La variedad, la creatividad y la originalidad son cualidades propias de esta dimensión de la comprensión, donde los estudiantes comparten sus explicaciones a través del empleo de dibujos, gráficas, signos, símbolos verbales y no verbales, utilizar las herramientas del lenguaje a favor del conocimiento, de los métodos y de los propósitos es particular de esta dimensión. Cabe mencionar entonces que dentro de la investigación los estudiantes han utilizado representaciones icónicas, números, símbolos, para ilustrar la información presentada en favor de facilitar la interpretación del problema y el enriquecer la claridad de las explicaciones, igualmente los estudiantes hacen uso del material didáctico con el fin de ilustrar y aclarar sus justificaciones. La Tabla 11 contiene los indicadores de comprensión que corresponden a esta dimensión según la interpretación de los datos.

1. Uso de dibujos y símbolos para representar la información. **2. Claridad en las explicaciones.** **3. Presentación de las operaciones (multiplicación-división).** **4. Material concreto empleado.**	**Dimensión de formas de comunicación**

Tabla 11. Indicadores dentro de la dimensión formas de comunicación con relación a la estructura multiplicativa

Según el análisis de los datos los casos presentados anteriormente se encuentran en el nivel ingenuo y de aprendiz dentro de esta dimensión ya que han utilizado diferentes estrategias para presentar la información y ampliar sus explicaciones, una de las técnicas más utilizadas es la representación a través de dibujos, tanto Jesús como Nicolás y Regina han acudido a diferentes tipos de recursos para dar a conocer sus respuestas con respecto a la solución de los problemas que involucran la estructura multiplicativa.

6.3 Evolución de los Procesos de Razonamiento en el Aula

Durante las observaciones que se llevan a cabo en el aula de clase, en la cual interactúan diariamente los estudiantes del grado cuarto, se puede observar como las explicaciones que se construyen alrededor de un problema son transformadas en la medida en que se da vía libre a los razonamientos, cada uno de los aportes realizados por los estudiantes lleva consigo una serie de concepciones acerca del conocimiento del mundo y de un sin número de experiencias que cada quien ha acumulado. Lo que significa entonces que los razonamientos no solo son producto de los procesos que se llevan a cabo en la mente sino también son producto de la historia de cada quien.

Por otro lado, los razonamientos construidos por un colectivo de estudiantes parecen ser una fuerza poderosa que los discursos mejor preparados por la maestra, ya que son asumidos por el grupo como una elaboración personal, como algo propio, que merece ser defendido, lo que provoca la búsqueda de argumentos que prueben su validez. En este sentido, se hace necesario que el maestro sea lo suficientemente suspicaz para realizar preguntas que movilicen el grupo de estudiantes, preguntas que los inciten a explicar, justificar, argumentar e incluso a probar sus afirmaciones.

Finalmente, la construcción social de explicaciones se considera una herramienta poderosa en la transformación y evolución del razonamiento ya que los aportes y argumentaciones de un estudiante son notablemente escuchados y considerados por sus compañeros, lo que posibilita esclarecer ideas, formular nuevas preguntas e incluso refutar aquello que se considera equivocado. El maestro en este tipo de situaciones debe asumir el papel de orientador y guía que interviene para aclarar ideas, para cuestionar explicaciones, para dirigir la construcción de los procesos de razonamiento.

6.4 Razonamiento y Comprensión: Posibles Relaciones

Durante el desarrollo de la presente investigación se ha expuesto de manera reiterada una estrecha relación entre razonamiento y comprensión, asegurando que ambos ocurren de manera articulada, sin embargo el razonamiento está presente en los procesos de comprensión pero la compresión en ocasiones se encuentra aislada aun cuando ocurran procesos de razonamiento. Esta relación se expone de manera detallada durante el desarrollo del marco teórico y durante el capítulo de análisis de la información.

En consecuencia puede observarse que escuchar las explicaciones de los estudiantes durante el desarrollo de las actividades matemáticas permite al maestro identificar procesos de razonamiento y establecer niveles de comprensión en cada una de las dimensiones propuestas en la teoría de la enseñanza para la comprensión y posteriormente diseñar actividades encaminadas a evolucionar tales procesos.

6.5 La Resolución de Problemas con Relación a la Explicación y Comprensión

La resolución de problemas es abordada en este proyecto de investigación como una estrategia que permite describir las explicaciones de los estudiantes, ya que durante su solución éstos desarrollan una serie de estrategias y procesos que requieren ser explicados para dar mayor claridad a la solución planteada. Tales explicaciones se encuentran directamente relacionadas con la comprensión.

Para que los problemas planteados puedan dar cuenta de tales razonamientos a través de las explicaciones deben ser cuidadosamente seleccionados por el maestro, además de ello es necesario que se propongan una serie de preguntas que tengan como intención estimular al estudiante para que socialice el mayor número de explicaciones posibles dentro de su solución.

6.6 Posibles investigaciones.

El razonamiento según Balacheff (2000) tiene tres categorías de validez, en el desarrollo de este proceso investigativo se ha abordado la explicación como categoría que permite identificar procesos de razonamiento en los estudiantes de cuarto grado de la básica primaria, en investigaciones futuras podrían abordarse los procesos de prueba y demostración en el ámbito de la de la Educación Básica Primaria.

Con respecto a la comprensión es posible tener en cuenta elementos de la teoría de la enseñanza para la comprensión con el fin de proponer desempeños que posibiliten refinarla a partir de la caracterización de sus dimensiones y niveles de comprensión teniendo en cuenta sus razonamientos descritos a través de las explicaciones.

Finalmente, se considera posible realizar próximas investigaciones que describan las implicaciones que ejercen las prácticas de aula de los maestros en la ejercitación y evolución de los proceso de razonamiento, la influencia de las estrategias y métodos de enseñanza.

Bibliografía

Ayllón, M. F., Castro Rodríguez, E., & Molina González, M. (2011). Invención de problemas y tipificación de problema "difícil" por alumnos de educación primaria. *Investigación en Educación Matmática XV*, 277-286.

Baez, L. (Marzo de 2010). *TIC-Salta-capital.* Recuperado el 23 de Abril de 2013, de TIC-Salta-capital: http://peqe-2.blogspot.com/2010/04/la-evolucion-en-el-procesamiento-de.html

Balacheff, N. (1987). *Processus de preuve et situations de validation.* Paris: Educational.

Balacheff, N. (1988). une étude des processus de preuve en mathématique chez des eléves the college. *Tesis Doctoral*. Grenoble, Grenoble, Francia: Université J Fourier.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* (U. d. Andes, Ed., & P. Gómez, Trad.) Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de Matemáticas.* (U. d. Andes, Ed., & P. Gómez, Trad.) Bogotá: Una Empresa Docente.

Balacheff, N., Hilton , P., Ken, C., Nesher, P., Dreyfus, T., Abreu, G., y otros. (2000). *Matemáticas y educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona: Universidad de Barcelona.

Barros, P., & Bravo, A. (Abril de 2001). *librosmaravillosos.com.* Recuperado el 16 de Abril de 2013, de librosmaravillosos.com: http://www.librosmaravillosos.com/aritmeticarecreativa/pdf/Aritmetica%20recreativa%20-%20Yakov%20Perelman.pdf

Blanché, R. (1973). Le raisonement. En R. Blanché, *le raisonement* (R. D. Bladrich, Trad., 10° ed., pág. 264). Paris: PUF.

Bolívar, M. d. (2007). *Plan Decenal de Educaión.* Ciudad Bolívar: Alcaldia de Ciudad Bolívar.

Bravo, J. A. (2005). Avatares y estereotipos sobre la enseñanza de los algoritmos en matemáticas. *Revista Ibero Américana de Educación Matemática*, 31-46.

Brito, F. G. (1891). *Historia de la civilización antigua.* México: CH. Bouret.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas.* Granada: Universidad de Granada.

Castro, E., Benavides , M., & Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca*, 4 - 22.

Crespo, C., & Farfan, R. M. (2005). Una visión epistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 287-317.

Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. *Investigación en educación matemática XV*, 351 - 360.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1999). Natural Numbers . En H. Freudenthal, *Didactical Phenomenology of mathematical structures* (págs. 73 - 132). New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow: Kluwer academics publishers .

Gallardo, J., & González Marí, J. L. (2004). *Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. El caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de numeros naturales.* Málaga: Universidad de Málaga.

García, H. A. (2005). *Salonhogar.net.* Recuperado el 14 de abril de 2013, de Salonhogar.net: http://www.proyectosalonhogar.com/Civilizaciones/sumer.jpg

Godino, J. D. (2000). Significado y coprensión de los conceptos matemáticos. *Uno: Revista Didactica de las Matemáticas*, 77-87.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Universidad de Granada.

Guba, E., & Lincoln, Y. (2002). Paradigmás en competencia en la investigación cualitativa. *Por los rincones. Antología de métodos cualitaticos en la insvestigación social.*, 113 -145.

Hetland, L., Hammerness, K., Unger, C., & Gray Wilson, D. (2003). ¿Cómo demuestran los niños que comprenden? En M. S. Wiske, *La Enseñanza para la Comprensión* (págs. 257-298). Buenos Aires- Barcelona- México: Paidós.

Iglesias, J. M. (2005). Los algoritmos tradicionales y otros algoritmos. *Iberoamericana de Educación Matemática*.

Kamii, C. (1996). La teoría de Piaget y la enseñanza de la aritmética. En C. Kamii, *Piaget los mecanismos del desarrollo y los aprendizajes escolares* (págs. 109-119). Madrid: Perpectivas.

Kilpatrick, J., Gomez, P., & Rico, L. (1998). *Educación Matemática.* Bogotá: Iberoamericana.

Lotero, L., Andrade, E., & Andrade, L. (2011). La crisis de la multiplicación: Una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y silencios. Revista latinoamericana de educación*, 38-64.

Mansilla, V. B., & Gardner, H. (2003). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. S. Wiske, *La Enseñanza para la Comprensión* (págs. 215-257). Buenos Aires- Barcelona- México: Paidós.

Masilla, V. B., & Gardner, H. (2003). ¿Cuáles son las cualidades de la comprensión? En M. S. Wiske, *La enseñanza para la comprensión* (págs. 170-215). Buenos Aires- Barcelona- México: Paídos.

Meel, D. E. (2003). Modelos y Teoria de la Comprensión Matemática: comparación de los modelos de Piere y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoria de APOE . *Revista Latinoamerican de Investigación en Matemática Educativa*, 221-278.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

MEN. (2003). *Estándares Curriculares de Competencias.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1983). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Santafe de Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas.* Santefe de Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estandares Básicos de Competencias en Matemáticas. En *Estándares Basicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 48-95). Santafe De Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Nacional, M. d. (1983). *Lineamientos Curriculares* . Bogotá: Imprenta Nacional.

Ospina, M. A., & Salgado, J. (2010). *Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo.* Bogotá: Memoria 11° encuentro de Matemática Educativa.

Perkins, D. (2003). *¿Qué es la comprensión?* Buenos Aires-Barcelona-México: Paidos.

Perkins, D., & Blythe, T. (1994). *http://www.eduteka.org/AnteTodoComprension.php*. Recuperado el 2012, de http://www.eduteka.org/AnteTodoComprension.php : http://www.eduteka.org/AnteTodoComprension.php

Piaget, J. (1987). *Psicología y pedagogía* . París: Ariel.

Plunket, S. (2004). *La naturaleza de los algoritmos escritos*. Obtenido de http://proyectomatematicasactivas.blogspot.com/search/label/Art%C3%ADculos.

Rodriguez, P., Lago, M. O., Caballero, S., Dopico, C., Jiménez, L., & Solbes, I. (2008). Eldesarrollo de las estrategías infantiles. Un estudio sobre el razonamiento aditivo y multiplicativo. *Anales de psicología*, 240-252.

Ruesga, M. P. (2003). *Educación del razonamiento lógico matemático en educación infantil.* Barcelona: Departamento de didáctica de las Ciencias Experimentales y de las matemáticas.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para Investigación Educativa.* Santa Fe de Bogotá: Cooperativa Editorial del Magisterio.

Sandoval, C. (1996). La formulación y el diseño de los procesos de investigación social cualitativa. En C. Sandoval, *Investigación cualitativa.* Bogotá: Instituto Colombiano para el fomento de la Educación Superior.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de caso.* Madrid: Morata.

Stake, R. (1999). *Investigación con Estudio de Caso.* Madrid: Morata.

Stone, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión.* Buenos Aires: Paidos.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. (U. R. Descartes, & CNRS, Edits.) *Recherches en Didáctique des Mathématiques, 10*(2, 3), 133 -170.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matematicas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria.* México: Trillas.

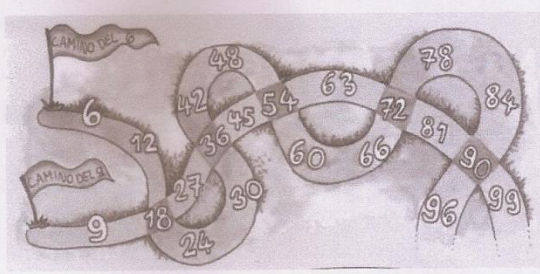
Anexos

Anexo A. Talleres previos a las entrevistas.

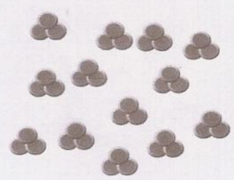
Inicialmente se desarrollaron diferentes actividades con los estudiantes con el objetivo de identificar habilidades para argumentar y explicar el porqué de sus respuestas.

¿QUÉ EDAD TIENES? 9 años

1. Después de observar la siguiente gráfica podrías decirme, ¿Cuáles son los múltiplos de los números seis y nueve?
   que todos los numeros son multiplos del 6

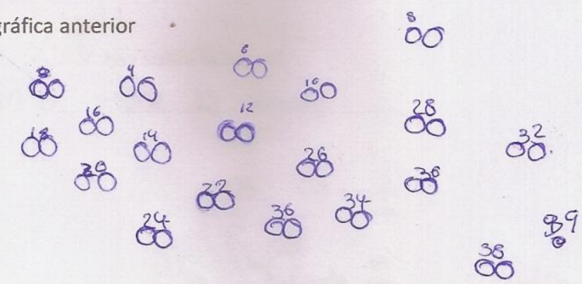


2. Quisieras decirme ¿cuántos círculos ves en la siguiente figura? 39 circulos
   cómo los contaste? de 3 en 3



3. De qué otra forma puedes contar el número de los círculos?
   de dos en dos daria 38 y les sumaria 1
   de 7 en 7
   de 6 en 6

4. Dibuja por favor otra forma de agrupar el mismo número de fichas observadas en la gráfica anterior

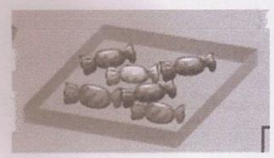


5. Cuántas patas pueden tener seis de estas arañas? 24 PATAS ¿Cómo lo sabes? POR QUE CONTE LAS PATAS

6. Podrías agrupar estos triángulos y decirme, cuántos son?

HAY 27 TRIANGULOS

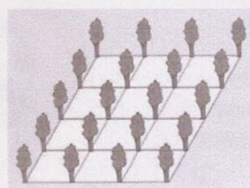
9. Si en cada caja se empacaron seis dulces. ¿Cuántas de estas cajas se necesitan para empacar 30 dulces? Escribe por favor como haces para saberlo:
tocaría de a 5 cajas
multiplique 6x5



10. Se le ha pedido a dos estudiantes Manuela y Juan José, que cuenten el número de árboles que se observan en la siguiente gráfica y ellos han realizado las siguientes operaciones tal y como se muestra a continuación.

4 X 5 = 20

5 X 4 = 20



¿Qué piensas de las deducciones que realizan Juan José y Manuela? si estan bien hechas

por qué?

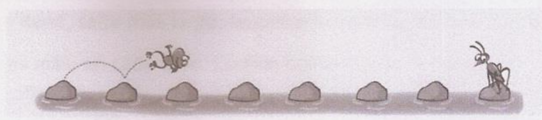
hay 20 arboles

11. Observa la siguiente caja antes de responder, ¿cuántas fichas habrá en seis cajas?
hay 42 fichas

1. .¿Qué edad tienes? 9 años

2. La rana René quiere alcanzar al grillo, cada piedra desde la que salta está enumerada, podrías decirme cuál es el número que corresponde a las piedras que faltan? 5 ¿Cómo lo sabes?

por que conte las ~~rana~~ rocas

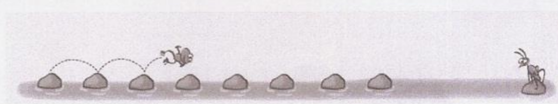


0 3 6 9

3. Cuántos saltos le faltan a la rana René, para alcanzar a grillo. 5

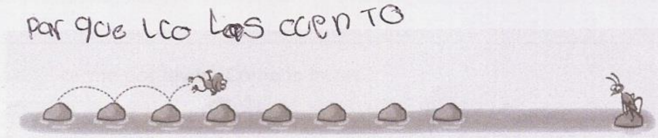
¿Qué has hecho para descubrirlo?

con tan do la rocas bien



2 4 6 8 10 12 14 16 24

4. Quisiera que me dijeras cuántas piedras le faltan a la rana René, para alcanzar al grillo. ¿Qué números le corresponden a las piedras que faltan? Cómo lo sabes? 4 por que falta para al canzar 17 18 19 par que lo los cuento

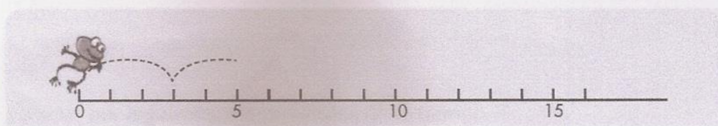


2 4 6 8 10 12 14 16 24

5. La rana René salta de tres en tres, si da cinco saltos. ¿A qué número llega?_______

Cómo lo sabes?

al ~~15~~ 9 por que sa l ta en 5 encinco



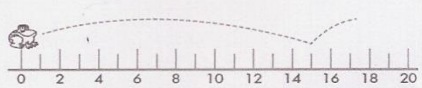
6. Ahora la rana René, salta más largo, te gustaría decirme en qué número cae, si salta dos veces más, en cada caso. Escribe como hiciste la cuenta?

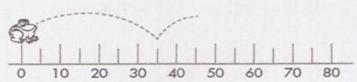
7. Primer caso

conTe de a 5

Segundo caso

70 porqce saLtamo; al 70





8. Selecciona una de las situaciones anteriores y dime por favor ¿Con qué operación crees que puede representarse mejor dicha situación?

la nomero 5 seria + suma

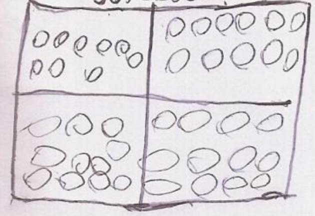
9. Podrías explicarme por favor ¿Cómo lo haces?

sumaria con 9 con el 10 parasaver

¿Qué edad tienes? — 8

1. Representa la siguiente multiplicación, **4 x 8 = 32**, podrías graficarlo por favor.

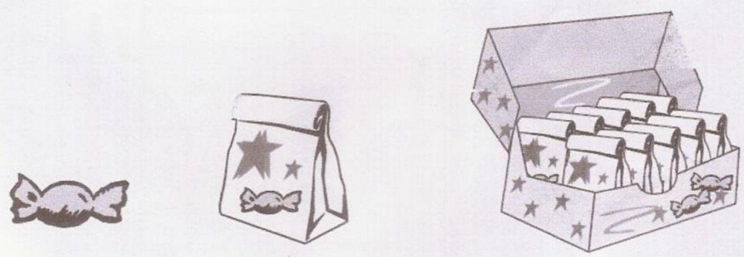
30+2=32-



2. Reparte, en partes iguales, 24 limones en seis bolsas.

4 bolsas de limones.

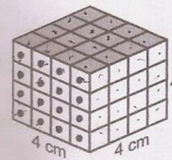
3. En una confitería se han empacado varios dulces así,



Un dulce 8 dulces en una bolsa 10 bolsas en una caja

Don Álvaro quiere comprar novecientos treinta y nueve dulces, ¿Cuántas cajas y paquetes sueltos puede comprar don Álvaro? Represente y justifica tu respuesta.

4. Miguel y Carolina decidieron construir con cubos del mismo tamaño un cubo más grande, así.

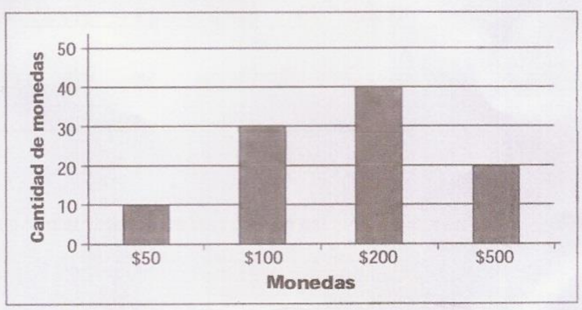


Cuál de las siguientes multiplicaciones **no** representa el número de cubos que hay en la figura y explica ¿por qué?

4 x 4 x 4 **2 x 4 x 4 x 2** **4 x 16** **3 x 4**

Por que conte todos los cubos

5. La siguiente grafica representa el número de monedas que ha recogido Juliana en su alcancía, observa por favor.



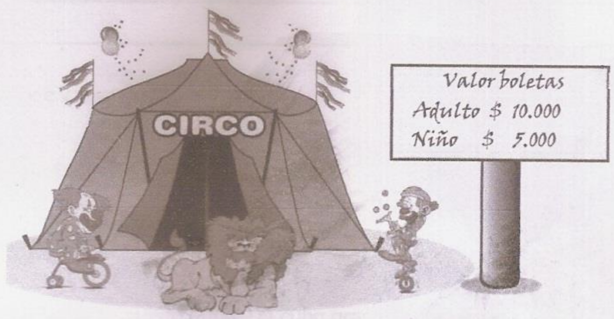
¿Cuánto dinero ha recogido Juliana en monedas de cien? 50

Si Juliana decide repartir en partes iguales el dinero que ha recolectado en monedas de quinientos entre cuatro de sus hermanos, Cuánto dinero le tocaría a cada uno? 150

Como hiciste para saberlo.

conte de cien hasta quientos y no me ~~dio~~ dió
entonces conte de ciento ~~siento~~ sicienfo hasto quiniento

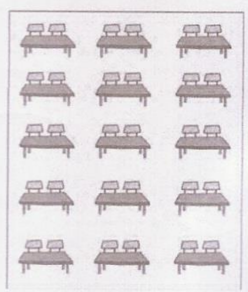
6. Los niños de cuarto grado quieren ir al circo, son 25 niños y las tarifas para el espectáculo, son las siguientes:



¿Cuál es el mayor número de boletas que se pueden obtener para el grupo con cuarenta mil pesos? 8

Como lo sabes? conte en cinco en cinco hasta cuarenta.
y Hay me dio el resultado

7. Observa la distribución de las sillas en el salón de clases:



Señala por favor la operación que mejor representa el conteo del número de sillas y dime por qué.

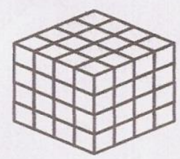
5 x 2 + 3 **5 x 3 x 2** **5 x (2 + 3)** **(5 x 3) + 2**

Por que 5x3 meda 15.

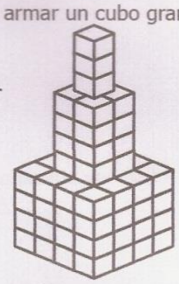
8. Observa, lee y responde.

Con 8 cubos pequeños como éste. 

se puede armar un cubo mediano como éste. 

Y con 8 cubos medianos se puede armar un cubo grande como éste. 

Observa la torre que armó Andrea.



¿Cuántos cubos utilizó Andrea para formar la figura? 24

Cómo lo sabes.

Por que sume los tres ocho.

Muchas gracias.

Anexo B. Instrumentos de aplicación.

Las entrevistas han sido diseñadas teniendo en cuenta las dimensiones y los tipos de problema correspondientes a la estructura multiplicativa, a continuación se presenta el contenido de la entrevista en forma de matriz.

PROTOCOLO DE ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA

Fecha:	Lugar:
Hora de inicio:	Hora de terminación:
Entrevistador:	Entrevistado:

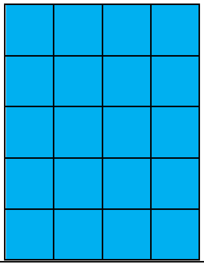
PROPÓSITO

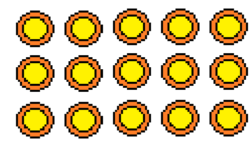
Identificar la funcionalidad que dan los estudiantes del grado cuarto a las operaciones básicas (multiplicación y división) en la vida cotidiana y algún indicativo de los procesos de razonamiento que estos crean en torno a las operaciones, los niveles de comprensión que pueden hallarse dentro de estos razonamientos teniendo en cuenta sus argumentos.

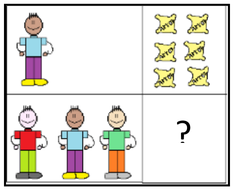
PLIEGO DE PREGUNTAS

1. ¿Podrías decirme de todas las cosas que haces, qué es lo que más te gusta hacer?
2. ¿Y en el colegio, cuáles son las materias que más te gustan?
3. ¿Te gustaría decirme, lo que piensas acerca de las matemáticas?
4. ¿Para qué crees que te sirve estudiar matemáticas?
5. ¿Quisieras contarme como ha sido tu experiencia al ir a la tienda?
6. ¿Podrías decirme: ¿Cómo haces para saber que te han dado correctamente una devuelta?
7. ¿A veces, debes hacer cuentas? ¿Cómo las haces?
8. ¿Podrías contarme si las operaciones: multiplicación y división te parecen fáciles o difíciles y explicarme ¿por qué?

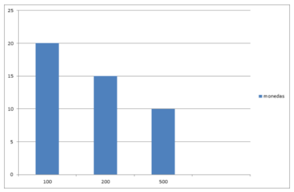
Te gustaría contarme algo más antes de terminar, quieres agregar algo.

Tipo de problema	**DIMENSIONES DE LA COMPRENSIÓN**			
	Dimensión de conocimiento	Dimensión de método	Dimensión de praxis	Dimensión formas de comunicación
Factor multiplicante	Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizar: bolas de cristal)	¿De qué otra manera puedes solucionar este problema?	Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Expresa en forma de operación aritmética la siguiente gráfica 

Adición repetida	Melisa ha estado ahorrando 3.000 $ cada semana, durante 9 semanas. ¿Cuánto dinero ha ahorrado Melisa en total? Explica tu respuesta.	Los hindúes resolverían la situación anterior de la siguiente manera. **9…………3.000** ~~**4 6.000**~~ ~~**2………12.000**~~ **1………24.000** **27.000** Si Melisa ahorra 2.000 $ cada semana. ¿Cuánto dinero habrá ahorrado durante 7 semanas?	Cada estudiante deberá organizar un grupo de tapas dispuestas de la siguiente forma.  Organiza de otra forma el mismo número de tapas y exprésalo a través de una suma.	Representa a través de un esquema mental la siguiente situación. Luisa el lunes ha comprado 3 galletas, el martes 3 bombones, el miércoles 3 confites, el jueves 3 barriletes y el viernes 3 frunas. ¿Cuántos dulces ha comprado Luisa durante la semana?

Razón	El papá de Felipe, Juan y Camila  necesitan comprar 6 kilos de arroz cada uno. ¿Cuántos kilos de arroz necesitan los tres en total?	Resuelve el problema anterior utilizando los instrumentos que prefieras dentro de la siguiente colección de objetos. El estudiante tendrá a su disposición: palitos, tapas, bolas de cristal, bloques lógicos. Luego representa lo que has hecho a través de una operación aritmética.	La siguiente actividad será realizada con un grupo de 5 estudiantes. Cada uno recibe un total de 5 dulces. Luego de ello se realizará las siguientes preguntas. ¿Cuántos dulces hay en total? Si regalo dos dulces más a cada uno de ustedes ¿Cuántos dulces tendrán en total ahora?	Explica de manera detallada el proceso algorítmico que llevarías a cabo para realizar la siguiente operación. 63 X 3 _____

<table>
<tr>
<td>Producto cartesiano</td>
<td>Observa la siguiente gráfica, donde se encuentran representadas el número de monedas que Claudia ha guardado en su alcancia.

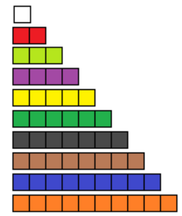


Teniendo en cuenta la información que muestra la gráfica. Responde las siguientes preguntas.

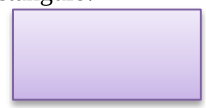
1.¿Cuánto dinero tiene Claudia en monedas de 100 $?¿Cuénto dinero en las monedas de 500?</td>
<td>Representa de manera gráfica la siguiente información y luego escribe tu respuesta.

Eliza tiene un litro de jugo del cual es posible servir 4 vasos, le ha pedido a su madre que prepare otros 2 litros de jugo ya que ha invitado a algunos de sus compañeros de clase para ensayar un baile en su casa.

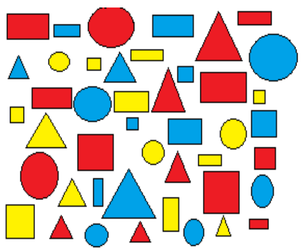
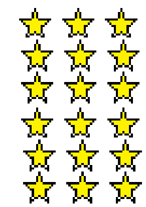
¿Para cuántos vasos de jugo alcanzan los 3 litros de jugo?</td>
<td>Se pondrá a disposición del estudiante un juego de regletas como el siguiente, para resolver la situación que se presenta a continuación.

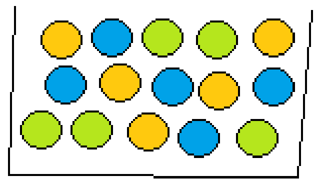


Hallar el área del siguiente rectángulo.

</td>
<td>¿Cuántos dulces se necesitan para llenar 7 bolsas que contienen 6 dulces cada una?

Representa tu respuesta.</td>
</tr>
</table>

Repartir	Reparte el siguiente número de objetos en conjuntos de a tres elementos.  ¿Cuántos conjuntos resultaron?	El grado cuarto está compuesto por 36 estudiantes, la maestra quiere realizar 6 hileras con igual número de alumnos. ¿Cuántos estudiantes deben ubicarse en cada una de las hileras? Plantea dos formas de solucionar la situación.	Después de recibir 15.000$ en billetes de mentiras el estudiante debe responder el siguiente cuestionamiento. Si te designan repartir este dinero con tus hermanos en partes iguales. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno?	Expresa la siguiente representación por medio de una división y explica como lo has hecho. 

Agrupamiento o sustracción repetida	El colegio cuenta con 84 estudiantes del grado cuarto. La rectora ha decidido crear tres grupos con igual número de estudiantes. ¿Cuántos estudiantes conforman cada uno de los grupos?	Andrés tiene el siguiente número de bolas de cristal  Desea agruparlas en cantidades iguales. ¿Cómo consideras que deben ser agrupadas? Explica tu respuesta.	Felipe y sus dos hermanos han recolectado 316 kilos de café durante una semana de cosecha. Estos kilos se los han pagado a 94.800 $ ¿Cuánto dinero le corresponde a cada uno si han decidido dividirlo en partes iguales?	Explica paso a paso como desarrollas la siguiente operación. 3.764 | 4

Anexo C. Transcripción de las entrevistas

La maestra seguidamente propone a los estudiantes resolver en pequeños grupos problemas que emergen a partir del planteamiento anterior, la pregunta ¿Cuántas arrobas de cacao recoge Luis en un año? Es discutida por los estudiantes en sus pequeños grupos. A continuación se ilustra la conversación que ocurre entre Juan y Alejandro[32].

(001)	La clase da inicio con una dinámica que pretende enunciar animales cuadrúpedos. La maestra pronuncia nombres de animales como el pollo, el caballo, el cerdo, la vaca, entre otros y los estudiantes deben aplaudir solo cuando escuchen el nombre de animales cuadrúpedos, de lo contrario no. Cuando alguien se equivoca debe sentarse y gana la última persona que este de pie.	Conducta de entrada. Cta. de Ent.
(002)	Posteriormente la maestra solicita a los estudiantes disponerse para dar inicio a la clase e inmediatamente da inicio a una serie de recomendaciones necesarias para el desarrollo de la clase. Cada uno de los estudiantes reciben un documento que incluye una serie de problemas matemáticos que requieren el uso de las estructuras multiplicativas para su solución.	Actividad inicial. Activ. Inicio
(003)	Posteriormente la maestra pide a los estudiantes que lean en parejas el uno al otro en voz alta el primer problema y al mismo tiempo solicita a los estudiantes que al finalizar hagan un comentario de ello.	Intercambio de saberes. Intercmb. Sab
(004)	El problema propuesto a los estudiantes es el siguiente: *En consecuencia del conflicto armado en Colombia se han desplazado muchas familias, Luis y su familia son una de ellas, en*	Planteamiento de problema.

[32] Los nombres que aparecen son seudónimos de los protagonistas.

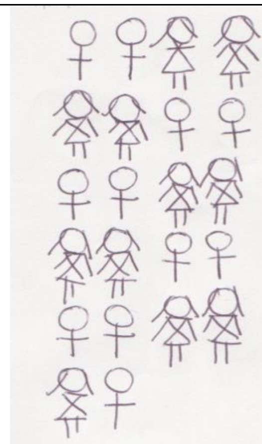
	su finca se producían mensualmente 15 arrobas de cacao, 40 arrobas de plátano, también tenían pozos de peces, gallinas ponedoras y una huerta y un jardín en la finca, a causa de las amenazas Luis y su familia lo dejaron todo y ahora viven en una ciudad hacinados en un cuarto, la señora doña Estela, ahora hace arepas para que su hija Erica las venda, su papá es un reciclador y Luisito vende confites en los semáforos. Ya hace un año abandonaron su finca. Durante el desarrollo de la lectura la maestra deja rodar un cd de música clásica.	Planto. Problm.
(005)	Luego de un momento la maestra disminuye el volumen de la música y comienza a leer en voz alta el problema mientras lo hace realiza preguntas como: -¿Cuántas libras tiene una arroba?	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(006)	Al instante una voz en medio de la clase responde: - Veinticinco.	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(007)	La maestra aprueba dicha información, repitiendo nuevamente la respuesta de los estudiantes: - Veinticinco libras tienen una arroba.	Suministro de información.
(008)	Despues de ello la maestra continua: -…Cuarenta arrobas de plátano…	Comunicación en el aula. Comunic. Aul

(009)	- Osea doce… dice una voz.	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(010)	…. La maestra prosigue con la lectura e interroga: - ¿Qué es asinados?	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(011)	Uno de los estudiantes casi inmediatamente responde: - Asinados… Osea resignados a vivir en un cuartucho donde estaban.	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(012)	La maestra interroga de nuevo: - ¿Cuántos eran?	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(013)	A lo que el mismo estudiante propone. - Eran cuatro. Papá, mamá, el hijo y la hija.	Comunicación en el aula. Comunic. Aul
(014)	Los estudiantes conversaban en sus respectivos grupos mientras la maestra realizaba algunas explicaciones en cada uno.	Comunic. Aul
(015)	Entre diversas conversaciones que ocurren en el aula, se hace necesario resaltar la siguiente:	Comunic. Aul

(116)	Juan: -"¿no entiende?" pregunta a su compañero del lado.	Intercmb. Sab
(117)	Alejandro: -El estudiante balancea su cabeza de un lado a otro, señalando que no.	Intercmb. Sab
(118)	Juan: "él recoge cada mes 15 arrobas de cacao, y la profe está preguntando que cuántas recoge en el año, osea que un año trae doce meses, usted multiplica las quince arrobas de un mes por los doce meses que trae un año, en vez de sumar doce veces 15, si me entiende?"	Explicac. Aul
(119)	Alejandro: abre sus ojos y dice: "Ah! Si,si ya entendí, claro recoge 15 en un mes, si,si,si".	Compren. Aul
(120)	La maestra realiza la siguiente pregunta: "¿Cuántas libras de pescado vendía Luis en un mes?"	Prob. Est. Mul
(121)	-"Veinticinco" responde uno de los estudiantes casi de manera automática.	Hipótesis. Aul
(122)	Los demás estudiantes del curso, lo observan con asombro, mientras otros repiten "veinticinco".	Acept. Hipót
(123)	-¿Cuántas libras de pescado recogió Luis en todo el mes? - ¿Qué tengo qué hacer? Pregunta de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(124)	Los estudiantes empiezan a responder de manera aleatoria: "una suma" "una resta" hasta que una voz en la multitud dice "una multiplicación".	Hipótesis. Aul
(125)	- ¿Qué multiplicamos? Interroga de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(126)	Una de las estudiantes levanta su mano con ansiedad y repite	Comunic. Aul

	continuamente “yo, yo, yo”	
(127)	La maestra le da la palabra y Catalina afirma: “multiplica las 25 libras de pescado que recoge cada día por los 30 días que tiene el mes”.	Exp. Raz. Aul
(128)	En ese instante la maestra pregunta: ¿quién dice que esa no es la respuesta?	Comunic. Aul
(129)	Tres estudiantes levantan la mano. La maestra interroga a uno de ellos y le pregunta. -¿Por qué no? ¿Por qué crees que no?	Aná. Exp. Raz
(130)	Porque recoge veinticinco libras en un día entonces multiplica 25 libras por cuatro semanas que tiene un mes. Explica el estudiante seleccionado por la maestra.	Aná. Exp. Raz
(131)	En ese instante los estudiantes empiezan a conversar unos con otros. Catalina intervine y afirma: No, porque quedan faltando las libras de los otros días. Es que él recoge esos pescados todos los días, no solamente un día. Por eso es que hay que multiplicarlo por los treinta días.	Exp. Raz. Aul
(132)	Luego de esto de nuevo la maestra pregunta: ¿Quién cree que se puede hacer distinto? ¿Quién dice que no es así?	Aná. Exp. Raz
	Uno de los estudiantes que inicialmente manifestó su desacuerdo manifestó: Ah! Si es así, como Cata dice.	Acp. Exp. Raz
(133)	La maestra realiza la siguiente pregunta: “¿Cuántas libras de pescado vendía Luis en un mes?”	Prob. Est. Mul
(134)	-“Veinticinco” responde uno de los estudiantes casi de manera automática.	Hipótesis. Aul
(135)	Los demás estudiantes del curso, lo observan con asombro, mientras	Acept. Hipót

	otros repiten “veinticinco”.	
(136)	-¿Cuántas libras de pescado recogió Luis en todo el mes? - ¿Qué tengo qué hacer? Pregunta de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(137)	Los estudiantes empiezan a responder de manera aleatoria: “una suma” “una resta” hasta que una voz en la multitud dice “una multiplicación”.	Hipótesis. Aul
(138)	- ¿Qué multiplicamos? Interroga de nuevo la maestra.	Prob. Est. Mul
(139)	Una de las estudiantes levanta su mano con ansiedad y repite continuamente “yo, yo, yo”	Comunic. Aul
(140)	La maestra le da la palabra y Catalina afirma: “multiplica las 25 libras de pescado que recoge cada día por los 30 días que tiene el mes”.	Exp. Raz. Aul
(141)	En ese instante la maestra pregunta: ¿quién dice que esa no es la respuesta?	Comunic. Aul
(142)	Al inicio de la sesión, la maestra realizó la siguiente actividad: Inicialmente formó a los estudiantes en el patio del colegio y les solicitó observar muy bien la organización de las filas, luego de un momento, guió a los estudiantes hasta el aula de clase. Allí la profesora reconstruyó con ellos la siguiente gráfica.	Activid. Motv

		
(143)	… Después de socializar las distintas representaciones elaboradas por lo estudiantes, la maestra realizó el siguiente interrogante:	Socializ. Aul
(144)	Al terminar la gráfica les solicitó que por favor contaran el número de estudiantes que se encuentran formados, al cabo de un momento, algunos estudiantes en forma aleatoria empezaron decir en voz alta y al tiempo:	Comunic. Aul
(145)	- Veintidós. - Veintiuno. - Veinticuatro. - Veinte.	Secuenc. Cont
(146)	Antes de lanzar estas respuestas noté que algunos estudiantes contaban uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho….hasta llegar a veintidós. Un número más pequeño de estudiantes contó dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce, catorce, dieciséis, dieciocho, veinte, veintidós	Constr. Colec
(147)	Al constatar que eran veintidós estudiantes la maestra preguntó: ¿cómo podemos representar el número de estudiantes teniendo en cuenta las filas y las columnas?	Comunic. Aul
(148)	Sumando, 4+4+4+4+4+2 da 22 dijo uno de los estudiantes	Constr. Colec

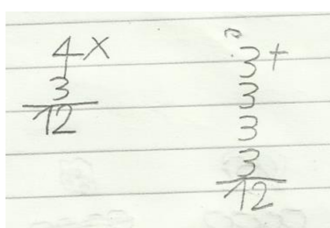
(149)	Luego la profesora interroga de nuevo: - ¿No existe ninguna otra operación para representar el número de estudiantes?	Comunic. Aul
(150)	- Si, una resta.	Constr. Colec
(150)	- Si, una resta y prestamos.	Constr. Colec
(151)	Profesora: - ¿cómo haríamos la resta? Muéstrame como.	Comunic. Aul
(152)	El estudiante miró un momento y dijo: -no es una resta porque da menos, a lo que otro agregó: - no es porque quitamos.	Constr. Colec
(153)	De inmediato un estudiante sugirió que podrían hacerlo con una multiplicación…	Constr. Colec
(154)	Pero guardó silencio cuando la profesora le pidió que le enseñara como hacerlo, en el instante, uno salió corriendo hacia el tablero y dijo:	Comunic. Aul
(155)	- Profe multiplicamos: 6 x 4 y da… 24 le ayudó la profe, y son 22. Entonces inmediatamente el estudiante agregó: le quitamos 2 y quedan 22.	Constr. Colec
(156)	La profesora siguió interrogando: -¿qué otra multiplicación podemos hacer?	Comunic. Aul
(157)	- Un estudiante corrió hacia el tablero y afirmó: $\begin{array}{r} 4 \times 4 = 16 + \\ 6 \\ \hline 2\,2 \end{array}$	Constr. Colec
(158)	Luego de esto la educadora siguió interrogando a los estudiantes acerca de cómo más podrían representarse la filas en forma de multiplicación y no hubo una respuesta diferente.	Comunic. Aul

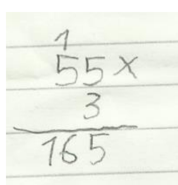
(158)	Y si quiero colocar cinco alumnos en una fila, ¿Qué tengo que hacer para saber cuántas columnas me quedan?	Comunic. Aul
(159)	… Luego de pensar un momento, otro estudiante dice: - profe una multiplicación.	Razonam. Aul
(160)	Ésta le pide que por favor salga y la realice en el tablero. El estudiante accede y realiza lo siguiente mientras explica: 22 x 5 = 20 por que 5 x 2 = 10 y 5 por el otro 2 también da: 10. 10 y 10 da veinte, entonces 2 2 x 5 1 0 1 0 2 0 Proceso algorítmico.	Exp. Proc. Alg
(161)	-¿Cuántos huevos son una docena? ¿Cuántos huevos recogía Érica para la venta semanal, si llevaba cuarenta y seis docenas a la semana? Pregunta la maestra	Prob. Est. Mul
(162)	Uno de los estudiantes respondió desde su asiento doce, otro asegura cuarenta y seis…	Comunic. Aul
(163)	La maestra interroga de nuevo: ¿Cuántos huevos tiene una docena?	Comunic. Aul
(164)	Los estudiantes responden en coro: doce.	Comunic. Aul
(165)	Maestra: ¿Qué tenemos que hacer ahí?	Prob. Est. Mul
(166)	Una suma… ve una multiplicación. Responde uno de los estudiantes.	Razonam. Aul
(167)	Maestra: “Fernando, venga hágala”	Comunic. Aul
(168)	Fernando sale al tablero y realiza la siguiente operación.	Exp. Proc. Alg

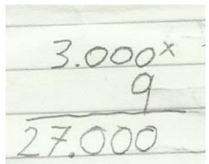
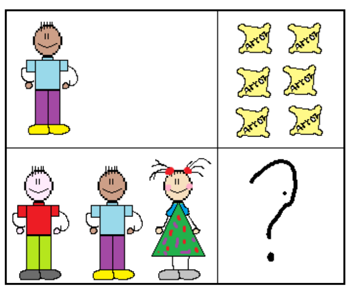
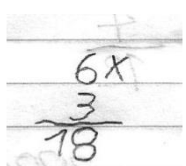
	46 x 12 _____	
(169)	Al tiempo que expone, dos por seis… doce, pondo el dos y llevo… uno 1 46 x 12 _____ 2	Exp. Proc. Alg
(170)	Dos por cuatro… ocho y una que llevaba nueve, pongo el nueve y sigo con el uno. 1 46 x 12 _____ 2	Exp. Proc. Alg
(171)	Una por seis… seis, pongo el seis debajo del nueve… 1 46 x 12 _____ 9 2 6	Exp. Proc. Alg
(172)	Una por cuatro, cuatro. Pongo el cuatro. 46 x 12 _____ 9 2 4 6 _____	Exp. Proc. Alg
(173)	Luego hago la suma. Durante la realización de la suma Fernando balbuceaba en voz baja y movía sus dedos.	Exp. Proc. Alg

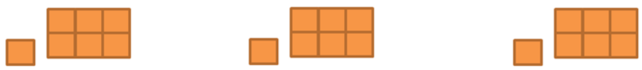
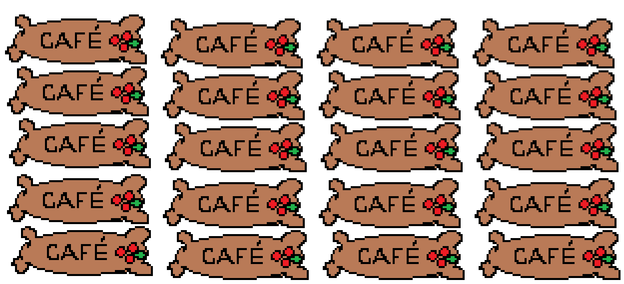
	46 x 12 ——— 9 2 4 6 ——— 5 5 2	

Entrevista caso uno: Jesús.

(01)	Entrevistador: Buenos días	
(02)	Jesús: Buenos días	
(03)	Entrevistador: ¿Cómo estás?	
(04)	Jesús: Bien.	
(05)	Entrevistador: Estas listo	
(06)	Jesús: Mueve su cabeza, señalando que si.	
(07)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizados: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(08)	Jesús se queda pensando…luego de un momento toma el lápiz y al mismo tiempo empieza decir… se puede hacer con una multiplicación o con una suma… 	Raz. Dim. Con
(09)	Entrevistador: ¿De qué otra manera puedes solucionar este problema?	Prg. Proc. Raz
(10)	Jesús: mmm… no, de ninguna otra	Raz. Dim. Con
(11)	Entrevistador: ¿Cuál consideras tú que es el factor que se repite?	Prob. Est. Mul

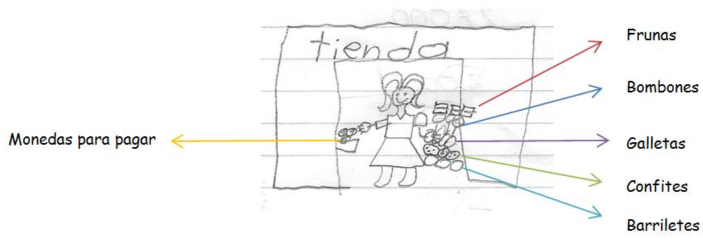
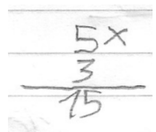
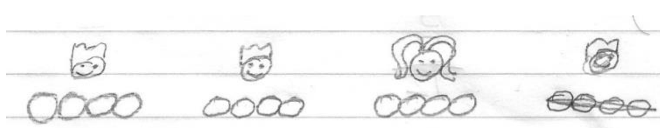
(12)	Jesús: el tres.	Raz. Estr. Mul
(13)	Entrevistador: ¿Quisieras hacer el ejercicio con las bolas de cristal?	Exp. Proc. Alg
(14)	Jesús: no.	Conclus. Entr
(15)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Prob. Est. Mul
(16)	Jesús: Hummm… pues yo creo que también una multiplicación.	Raz. Dim. Pro
(17)	Entrevistador: ¿Por qué?	Prg. Proc. Raz
(18)	Jesús: Porque ahora fueron tres veces más que cuatro y… ahora son tres veces pero más que cincuenta y cinco… entonces es una multiplicación. 	Raz. Dim. Pro
(19)	Jesús: Saltó ciento sesenta y cinco.	Con. Proc. Raz
(20)	Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando $ 3.000 cada semana, durante 9 semanas. ¿Cuánto dinero ha ahorrado Melisa en total? Explica tu respuesta.	Prob. Est. Mul

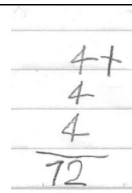
(21)	Jesús: Cuenta en sus dedos… tres mil… seis mil… nueve mil… mueve sus dedos. Luego de un momento toma el lápiz y escribe 	Raz. Dim. Pro
(21)	Jesús: Nueve por cero… cero, nueve por cero… cero, nueve por cero… cero, nueve por tres… veintisiete. Veintisiete mil.	Raz. Dim. Pro
(22)	Entrevistador: El papá de Felipe, Juan y Camila necesitan comprar 6 kilos de arroz cada uno.  Entrevistador: ¿Cuántos kilos de arroz necesitan los tres en total?	Prob. Est. Mul
(23)	Jesús: Observa la imagen que acompaña el problema y escribe: 	Raz. Dim. Mét
(24)	Entrevistador: ¿Por qué dices que es una multiplicación?	Pre. Sum. Inf

(25)	Jesús: "Porque si cada uno compra seis kilos, entonces hay que multiplicar seis por tres" piensa y luego dice "mire" toma los cubos que hay dispuestos sobre la mesa y realiza las siguientes figuras.  Jesús: "Los cuadritos pequeños son los papás que van a comprar el arroz, y estos (señalando los grupos de seis cubos) son el arroz que van a comprar, entonces…tres veces seis, seis por tres".	Raz. Dim. Mét
(26)	Entrevistador: ¿Cuántos cubos hay?	Pre. Sum. Inf
(27)	Jesús: "uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete…. dieciséis, diecisiete, dieciocho. Hay dieciocho".	Raz. Dim. Mét
(28)	Entrevistador: Observa las siguientes pilas de café. Cuántos bultos[33] crees que hay en las pilas. 	Prob. Est. Mul
(29)	Jesús: empieza a contar los sacos de café representados de uno en uno. – uno,dos, tres, cuatro, cinco, seis siete, ocho, nueve, diez,	Raz. Dim. Con

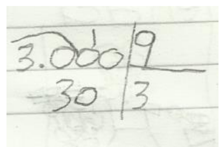
[33] Se le llama bultos a los sacos que se utilizan para empacar los granos de café.

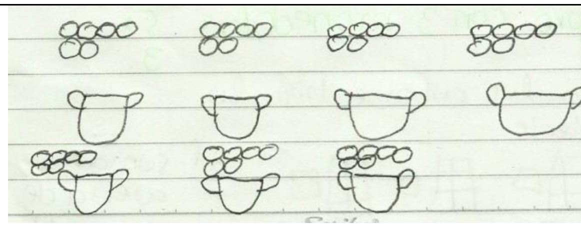
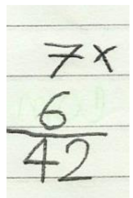
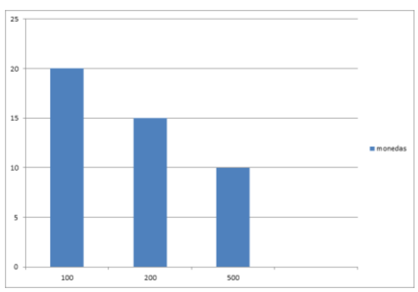
	once doce trece, catorce, quince, dieciseis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte.	
(30)	Entrevistador: Puedes hacerlos a través de una operación matemática?	Prg. Proc. Raz
(31)	Jesús: Si. Con una suma o con una multiplicación.	Raz. Dim. Con
(32)	Entrevistador: Cómo las haces?	Prg. Proc. Raz
(33)	Jesús: cinco más cinco, diez. Diez más cinco… quince. Quince más cinco… veinte. Y la otra cinco por cuatro veinte.	Raz. Estr. Mul
(34)	Entrevistador: Luisa el lunes ha comprado 3 galletas, el martes 3 bombones, el miércoles 3 confites, el jueves 3 barriletes y el viernes 3 frunas. ¿Cuántos dulces ha comprado Luisa durante la semana?	Prob. Est. Mul
(35)	Jesús: ¿El lunes qué?	Pre. Sum. Inf
(36)	Entrevistador: Tres galletas… el martes tres bombones, el miércoles tres confites, el jueves tres barriletes y el viernes tres frunas.	Sum. Inf. Pro
(37)	Jesús: Poco a poco realiza el siguiente dibujo. Repitiendo, estas son las tres galletas, los tres bombones, estos son los tres confites, los barriletes y estas las frunas. Compró cinco por tres, quince. Quince dulces en los cinco días.	Raz. Dim. Com

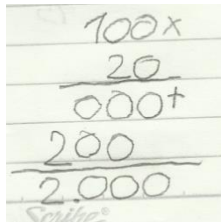
		
(38)	Jesús: Luego de la explicación de su dibujo, realizó la siguiente operación. 	Raz. Dim. Com
(39)	Entrevistador: Eliza tiene un litro de jugo del cual es posible servir 4 vasos, le ha pedido a su madre que prepare otros 2 litros de jugo ya que ha invitado a algunos de sus compañeros de clase para ensayar un baile en su casa. ¿Para cuántos vasos de jugo alcanzan los 3 litros de jugo?	Prob. Est. Mul
(40)	Jesús: hum… espérate. Dibuja.  Jesús: me equivoqué con éste, son solamente tres.	Raz. Dim. Com
(41)	Jesús: Luego escribe	Raz. Dim. Com

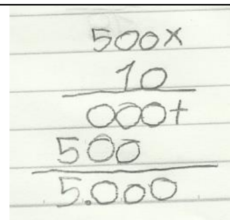
		
(42)	Jesús: salen doce vasos de jugo.	Raz. Dim. Com
(43)	Entrevistador: Explica de manera detallada el proceso algorítmico que llevarías a cabo para realizar la siguiente operación. $\begin{array}{r} 636\ \mathrm{x} \\ \underline{23} \end{array}$	Prob. Est. Mul
(44)	Jesús: Toma el lápiz y el papel y realiza el siguiente procedimiento. Tres por seis… dieciocho, pongo el ocho y llevo uno. $\begin{array}{r} {}^{1}\quad \\ 636\ \mathrm{x} \\ \underline{23} \\ 8\quad \end{array}$	Exp. Dim. Con
(45)	Jesús: Tres por tres… nueve y una que llevaba diez, pongo el cero y llevo… uno. $\begin{array}{r} {}^{11}\quad \\ 636\ \mathrm{x} \\ \underline{23} \\ 08\quad \end{array}$	Exp. Dim. Con
(46)	Jesús: Tres por seis… dieciocho y una que llevaba… diecinueve. Pongo el diecinueve.	Exp. Dim. Con

	1 1 636 x 23 1908	
(47)	Jesús: Dos por seis, doce. Pongo el dos y llevo una. 1 636 x 23 1908 2	Exp. Dim. Con
(48)	Jesús: dos por tres, seis y una que llevaba siete. 1 636 x 23 1908 72	Exp. Dim. Con
(49)	Jesús: Dos por seis doce. 636 x 23 1908 + 1272	Exp. Dim. Con
(50)	Jesús: Agrega el signo más (+) y empieza a balbucear ocho, dos… nueve y siete (cuenta con sus dedos) llevo uno tres… cuatro, uno 636 x 23 1908 + 1272 14628	Exp. Dim. Con
(51)	Entrevistador: Podrías compartir conmigo, el procedimiento	Prob. Est. Mul

	que llevas tú a cabo para resolver la siguiente división. $3000 \;\underline{\big\vert\; 9 \qquad}$	
(52)	Jesús: toma lápiz y papel y explica. El nueve no cabe en el tres, cojo las dos cifras, me queda treinta, tres por nueve… veintisiete a treinta tres, bajo el cero…  Jesús: ya.	Raz. Dim. Mét
(53)	Entrevistador: ¿Terminaste?	Pre. Sum. Inf
(54)	Jesús: sí.	Raz. Dim. Mét
(55)	Entrevistador: ¿Cómo lo sabes?	Pre. Sum. Inf
(56)	Jesús: Porque ya me quedó cero, el nueve en el cero no cabe.	Raz. Dim. Mét
(57)	Entrevistador: ¿Cuántos dulces se necesitan para llenar 7 bolsas que contienen 6 dulces cada una?	Prob. Est. Mul
(58)	Jesús: Toma el lápiz y empieza a dibujar lo siguiente:	Raz. Dim. Pro

		
(59)	Luego escribe  Jesús: se necesitan 72 dulces	Pre. Sum. Pro
(60)	Entrevistador: Observa la siguiente gráfica, donde se encuentran representadas el número de monedas que Claudia ha guardado en su alcancia.  Entrevistador: Teniendo en cuenta la información que muestra la gráfica. Responde las siguientes preguntas. ¿Cuánto dinero tiene Claudia en monedas de 100 $?	Prob. Est. Mul
(61)	Jesús: mmmm… observa la grafíca detenidamente. Tiene veinte monedas de cien.	Raz. Dim. Mét

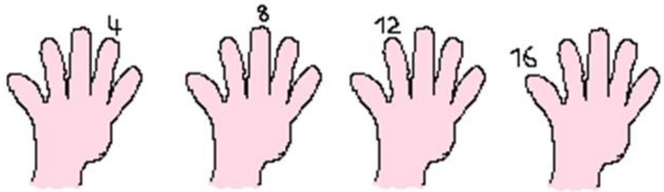
(62)	Entrevistador: ¿Cuánto dinero son esas veinte monedas de cien?	Pre. Sum. Inf
(63)	Jesús: realiza la siguinete opreación.  Jesús: tiene dos mil pesos en monedas de cien.	Raz. Dim. Mét
(64)	Entrevistador: ¿Por qué piensas que es una multiplicación?	Pre. Sum. Inf
(65)	Jesús: porque son veinte monedas de cien, los multiplico en vez de sumarlas.	Raz. Dim. Mét
(66)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de hacer la multiplicación?	Pre. Sum. Inf
(67)	Jesús: no, esta es la única manera.	Raz. Dim. Mét
(68)	Entrevistador: entonces ¿Cuánto dinero hay en monedas de quinientos?	Prob. Est. Mul
(69)	Jesús: tomó de nuevo el lápiz y el papel y realizó la siguiente operación.	Raz. Dim. Mét

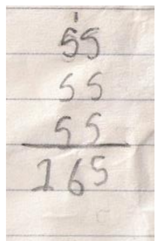
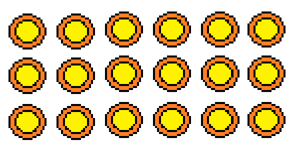
<table>
<tr>
<td></td>
<td>


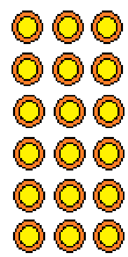
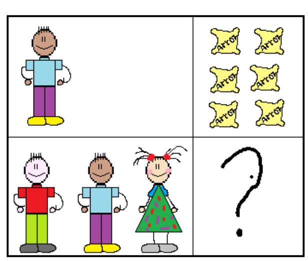
Jesús: hay cinco mil pesos en monedas de quinientos.
</td>
<td></td>
</tr>
</table>

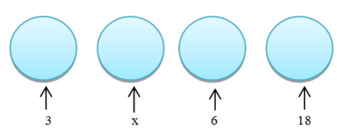
Entrevista caso dos: Nicolás

(01)	Entrevistador: Hola Nicolás ¿Cómo vas?	
(02)	Nicolás: Bien, gracias.	
(03)	Entrevistador: ¿Qué has hecho?	
(04)	Nicolás: Nada. Jugar y estudiar.	
(05)	Entrevistador: Estás listo para comenzar.	
(06)	Nicolás: Sí señora.	
(07)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizar: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(08)	Nicolás: mmmmmm….cuenta en sus dedos y luego dice, dieciséis.	Raz. Dim. Mét
(09)	Entrevistador: ¿Por qué?	Pre. Sum. Inf
(10)	Nicolás: porque hice la cuenta vea (me enseña sus manos y agrupa los dedos) cuatro, vea cuatro va una vez, ocho más otro cuatro son ocho, más otros cuatro son doce, más los cuatro de Juan son dieciséis.	Raz. Dim. Mét

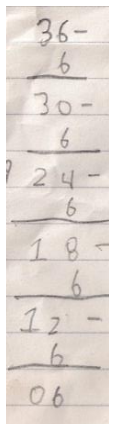
		
(11)	Entrevistador: Y… ¿de qué otra forma podemos saberlo?	Pre. Sum. Inf
(12)	Nicolás: Multiplicando.	Raz. Dim. Con
(13)	Entrevistador: ¿Multiplicando qué?	Pre. Sum. Inf
(14)	Nicolás: cuatro por tres.	Raz. Dim. Con
(15)	Entrevistador: ¿Cuál es el número que se repite?	Pre. Sum. Inf
(16)	Nicolás: el cuatro.	Raz. Dim. Con
(17)	Entrevistador: ¿Cuánto te da?	Pre. Sum. Inf
(18)	Nicolás: doce	Raz. Dim. Con
(19)	Entrevistador: ¿Entonces cuál es? Doce o dieciséis.	Pre. Sum. Inf
(20)	Nicolás: es doce, lo que pasa es que conté mal, no hice bien la cuenta, porque junté las de Juan con las de Luis.	Raz. Dim. Con
(21)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que	Prob. Est. Mul

	Laura?	
(22)	Nicolás: Toma el lápiz y empieza a escribir en su cuaderno.	Raz. Dim. Mét
(23)	Nicolás: Balbucea… cinco y cinco… y cinco… llevo una…. Cinco… y una… ciento sesenta y cinco. 	Raz. Dim. Con
(24)	Entrevistador: Podrías por favor, decirme ¿qué operación podemos extraer de la organización de esta fichas? 	Prob. Est. Mul
(25)	Nicolás: Una multiplicación.	Raz. Dim. Mét
(26)	Entrevistador: ¿Cuál multiplicación?	Pre. Sum. Inf
(27)	Nicolás: cuatro por seis, veinticuatro	Raz. Dim. Con
(28)	Entrevistador: ¿Podrías organizar de otra forma el grupo de fichas?	Pre. Sum. Inf
(29)	Nicolás: Después de un momento de silencio… asegura: Esta	Raz. Dim. Mét

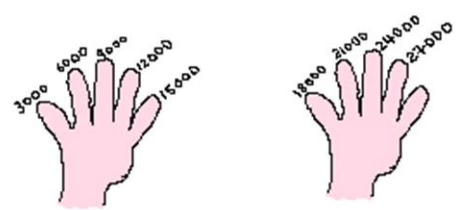
	duro.	
(30)	Nicolás: Aquí van seis (señalando las filas) y aquí van tres (señalando las columnas), entonces aquí van seis (pasa algunas fichas y las ubica en las columnas) y aquí van tres (señalando las fichas que han quedado en las filas) 	Raz. Dim. Mét
(31)	Entrevistador: ¿Qué ves ahí? ¿Qué ha sucedido?	Pre. Sum. Inf
(32)	Nicolás: Que tienen lo mismo. Dan lo mismo.	Raz. Dim. Mét
(33)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de ordenar las fichas?	Pre. Sum. Inf
(34)	Nicolás: no.	Raz. Dim. Mét
(35)	Entrevistador: El papá de Felipe, Juan y Camila necesitan comprar 6 kilos de arroz cada uno. 	Prob. Est. Mul

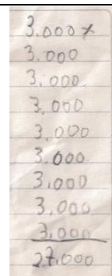
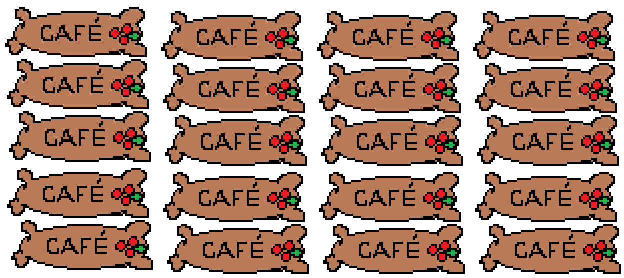
(36)	Entrevistador: ¿Cuántos kilos de arroz necesitan los tres en total?	Pre. Sum. Inf
(37)	Nicolás: Dieciocho.	Raz. Dim. Con
(38)	Entrevistador: ¿Por qué?	Pre. Sum. Inf
(39)	Nicolás: Porque se suma y se multiplica y me da lo mismo. Uno necesita seis, otro necesita seis y el otro necesita seis, entre los tres necesitan dieciocho.	Raz. Dim. Con
(40)	Entrevistador: ¿Puedes representar lo que hiciste utilizando estas fichas?	Pre. Sum. Inf
(41)	Nicolás: Cojo… y por ejemplo… pongo tres, tres… a ver, seis… esta es por ejemplo la multiplicación… no, no. Nicolás: Hagamos… este es el tres y este es el seis, entonces llegó tres por seis dieciocho 	Raz. Dim. Con
(42)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de representar la multiplicación con estas fichas?	Pre. Sum. Inf
(43)	Nicolás: No, esta es la única manera.	Raz. Dim. Mét
(44)	Entrevistador: El grado cuarto está compuesto por 36 estudiantes, la maestra quiere realizar 6 hileras con igual número de alumnos.	Prob. Est. Mul

	¿Cuántos estudiantes deben ubicarse en cada una de las hileras?	
(45)	Nicolás: Cada fila… doce.	Aná. Inf. Pro
(46)	Entrevistador: Consideras entonces que son: ¿seis filas de doce?	Pre. Sum. Inf
(47)	Nicolás: Ah! No. Serian de seis, de seis cada una de las filas… seis filas de seis…	Aná. Inf. Pro
(48)	Entrevistador: ¿Cómo sabes?	Pre. Sum. Inf
(49)	Nicolás: Porque sí. Porque le quité, reste, a ver treinta y seis… no… si… menos seis.	Raz. Dim. Com
(50)	Entrevistador: ¿Cuánto te da?	Pre. Sum. Inf
(51)	Nicolás: Ay! No, no es así… no, no da.	Raz. Dim. Com
(52)	Entrevistador: ¿Entonces qué podemos hacer?	Pre. Sum. Inf
(53)	Nicolás: Quitándole… treinta y seis menos seis… da treinta… treinta menos seis, veinticuatro… así hasta llegar a seis.	Raz. Dim. Com
(54)	Entrevistador: ¿Puedes mostrarme cómo?	Pre. Sum. Inf
(55)	Nicolás: Toma el lápiz y el papel y empieza a escribir… luego dice… no me da… así no sé cómo restar… pero en la memoria	Raz. Dim. Com

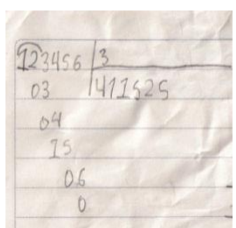
	sí…	
(56)	Entrevistador: Dime, ¿Qué tienes en la memoria?	Pre. Sum. Inf
(57)	Nicolás: Primero le resto a treinta y seis le resto seis…de treinta le saco seis, me quedan veinticuatro… ah! Siiii….  	Raz. Dim. Com
(58)	Entrevistador: ¿Tú tienes hermanos?	Prob. Est. Mul
(59)	Nicolás: Si. Tengo cuatro hermanas y yo soy el menor.	Raz. Dim. Mét
(60)	Entrevistador: Si tú papá en tiempo de cosecha dispone de quince mil pesos, para repartirlo entre tú y tus hermanas, de a cuanto dinero les toca si es para repartirlo en partes iguales?	Pre. Sum. Inf
(61)	Nicolás: Se queda en silencio dos minutos.	Raz. Dim. Mét
(62)	Entrevistador: Puedes utilizar el material que esta disponible en la mesa (lápiz, papel, cubos, bloques lógicos, canicas, billetes)	Afir. Sum. Inf

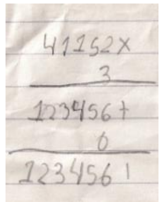
(63)	Nicolás: Con eso me enredo más. Guarda de nuevo silencio. Al cabo de un minuto dice, de a dos mil quinientos… a cada una de dos mil quinientos y para mi también, nos sobran dos mil quinientos y los guardamos para otra cosa. No había otra manera.	Raz. Dim. Mét
(64)	Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?	Pre. Sum. Inf
(65)	Nicolás: Lo hice con una suma. Sumando dos mil quinientos cinco veces… no me da los quincemil, me da doce mil quinientos y nos sobran dos mil quinientos para otra cosa.	Raz. Dim. Mét
(66)	Entrevistador: El colegio cuenta con 84 estudiantes del grado cuarto. La rectora ha decidido crear tres grupos con igual número de estudiantes. ¿Cuántos estudiantes conforman cada uno de los grupos?	Prob. Est. Mul
(67)	Nicolás: ¿Cuántos son?	Pre. Sum. Inf
(68)	Entrevistador: ochenta y cuatro.	Afir. Sum. Inf
(69)	Nicolás: Está durísimo.	Raz. Dim. Mét
(70)	Entrevistador: ¿Crees que una de las operaciones: suma, resta, multiplicación y división, puedan ayudarte?	Pre. Sum. Inf
(71)	Nicolás: No sé. De pronto una división.	Raz. Dim. Mét
(72)	Entrevistador: ¿Qué dividirías?	Pre. Sum. Inf

(73)	Nicolás: No sé.	Raz. Dim. Mét
(74)	Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando 3.000 $ cada semana, durante 9 semanas. ¿Cuánto dinero ha ahorrado Melisa en total?	Prob. Est. Mul
(75)	Nicolás: Piensa un momento… mueve sus dedos y luego dice: veinticuatro mil	Raz. Dim. Mét
(76)	Entrevistador: Explícame por favor cómo lo hiciste.	Pre. Sum. Inf
(77)	Nicolás: Toma nuevamente sus dedos y explica. Porque vea, tres… va una vez, seis… va otra vez, nueve… va otra vez, doce… va otra vez, quince… va otra vez, dieciocho… va otra vez, veintiuno… va otra vez… se detiene un momento. Veinti… cuatro va otra vez… ah! me equivoqué eran veintisiete mil. 	Raz. Dim. Pro
(78)	Entrevistador: Podrías hacer en tu cuaderno lo que acabas de explicarme.	Pre. Sum. Inf
(79)	Nicolás: Claro que sí. Tres más tres….	Raz. Dim. Pro

		
(80)	Entrevistador: Observa las siguientes pilas de café. Cuántos bultos[34] crees que hay en las pilas. 	Prob. Est. Mul
(81)	Nicolás: mmm… con una multiplicación?	Raz. Dim. Pro
(82)	Entrevistador: ¿Tú qué dices?	Pre. Sum. Inf
(83)	Nicolás: Si. Cinco por cuatro... veinte. Hay veinte bultos.	Raz. Dim. Pro
(84)	Entrevistador: Podrías compartir conmigo, el procedimiento que llevas tú a cabo para resolver, la siguiente división. 123456 | 3	Prob. Est. Mul
(85)	Nicolás: Está lo que el tres en el doce, que está cuatro veces.	Raz. Dim. Mét

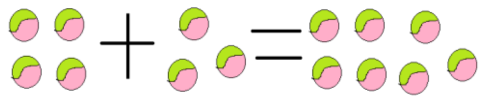
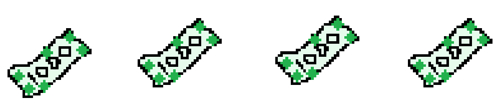
[34] Se le llama bultos a los sacos que se utilizan para empacar los granos de café.

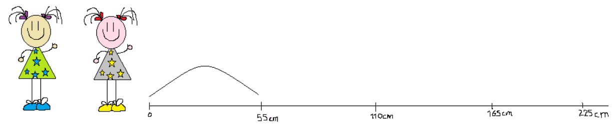
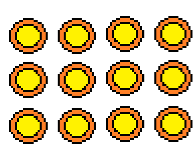
	Cuatro por tres doce a doce cero. Bajo el tres. 123456 | 3 03 4	
(86)	Nicolás: Esta lo que el tres en el tres que está una vez, una por tres, tres a tres cero, bajo el cuatro. Está lo que el cuatro en el tres, que está una vez, una por tres, tres a cuatro una. Bajo el cinco. Está lo que el tres en el quince, está cinco veces, cinco por tres quince, pongo el cero. Bajo el seis. 123456 | 3 03 41152 04 15 06	Raz. Dim. Mét
(87)	Nicolás: Está lo que el tres en el seis, que está tres veces… Ah! No dos veces… dos por tres seis, a seis cero. 	Raz. Dim. Mét
(88)	Nicolás: Ya miro la prueba si está bien.	Raz. Dim. Mét
(89)	Entrevistador: No es necesario que hagas la prueba.	Pre. Sum. Inf
(90)	Nicolás: No, yo quiero hacer la prueba. Cuarenta y uno, quince, dos… por tres…	Raz. Dim. Mét

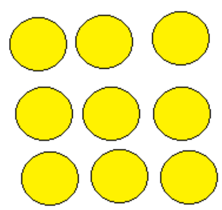
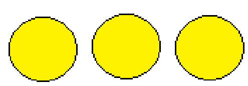
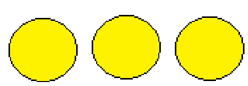
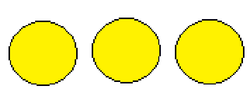
(91)	Nicolás: Tres por dos, seis. Tres por cinco, quince. Tres por una, tres y una cuatro. Tres por una, tres. Tres por cuatro doce. Más cero.  	Raz. Dim. Mét
(92)	Entrevistador: ¿Por qué debes sumar cero?	Pre. Sum. Inf
(93)	Nicolás: Porque para ver si esta buena la división	Raz. Dim. Mét
(94)	Entrevistador: ¿Cuánto vale cero?	Pre. Sum. Inf
(95)	Nicolás: Nada.	Raz. Dim. Mét
(96)	Entrevistador: Entonces ¿Por qué sumas cero?	Pre. Sum. Inf
(97)	Nicolás: Es que así es la prueba de la división. Pa' saber que la división esta buena.	Raz. Dim. Mét

Entrevista caso tres: Regina

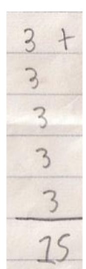
(01)	Entrevistador: Hola Nicolás ¿Cómo vas?	
(02)	Regina: Bien, gracias.	
(03)	Entrevistador: ¿Qué has hecho?	
(04)	Regina: Ah! Pues nada.	
(05)	Entrevistador: Comenzamos.	
(06)	Regina: Sí señora.	
(07)	Entrevistador: Juan tiene 4 bolas de cristal. Miguel tiene 3 veces más bolas que Juan. ¿Cuántas bolas de cristal tiene Miguel? (materiales a utilizar: bolas de cristal)	Prob. Est. Mul
(08)	Regina: tiene siete.	Afir. Sum. Inf
(09)	Entrevistador: ¿por qué?	Pre. Sum. Inf
(10)	Regina: porque siete es más que cuatro, cuatro más tres siete.	Raz. Dim. Con
(11)	Entrevistador: Intentemos hacerlo con las bolas. ¿Quieres?	Pre. Sum. Inf
(12)	Regina: estas son las bolas de Juan (agrupa cuatro bolas) y estás son las bolas de Miguel (agrupa tres bolas) posteriormente las cuenta todas y dice: tiene siete.	Raz. Dim. Mét

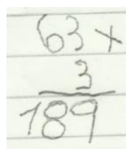
		
(13)	Entrevistador: entonces ¿Miguel tiene siete bolas o tiene tres bolas?	Pre. Sum. Inf
(14)	Regina: Ya no sé. Yo creo que tiene siete.	Raz. Dim. Con
(15)	Entrevistador: Melisa ha estado ahorrando $1.000 cada semana, ¿Cuánto dinero, ha ahorrado Melisa en 4 semanas?	Prob. Est. Mul
(16)	Regina: Tiene tres mil.	Raz. Dim. Con
(17)	Entrevistador: Supongamos que cada uno de estos papelitos es un billete de mil. ¿Cuántos billetes ha ahorrado Melisa? ¿Cuánta plata?	Pre. Sum. Inf
(18)	Regina: Organiza cuatro billetes en filas y afirma. Cuatro… cuatro mil. 	Raz. Dim. Mét
(19)	Entrevistador: ¿Cómo lo hiciste?	Pre. Sum. Inf
(20)	Regina: Se demoró un largo rato y luego afirmó: Sumé, Cuatro mil; mil… mil… mil… mil. Cuatro mil.	Raz. Dim. Con
(21)	Entrevistador: Tatiana y Laura han decidido participar en una competencia de salto. Laura ha saltado 55 cm. ¿Cuántos centímetros ha saltado Tatiana, si ha saltado 3 veces más que Laura?	Prob. Est. Mul
(22)	Regina: Cuenta en los dedos… y propone… cincuenta y ocho.	Raz. Dim. Con
(23)	Entrevistador: ¿Qué tal si miramos esta recta?	Pre. Sum. Inf

(24)	Regina: bueno.	Afir. Sum. Inf
(25)	Entrevistador: Mira. Dónde crees que ha caído Tatiana.  	Pre. Sum. Inf
(26)	Regina: señala el número 165 y dice: aquí.	Raz. Dim. Mét
(27)	Entrevistador: ¿Por qué?	Pre. Sum. Inf
(28)	Regina: porque uno (señalando el punto donde está el 55), dos (señalando el punto donde está el 110), tres (señalando el punto donde está el 165). Tatiana cae aquí.	Raz. Dim. Mét
(29)	Entrevistador: ¿Sabes qué operación matemática podemos utilizar para resolverlo?	Pre. Sum. Inf
(30)	Regina: No	Raz. Dim. Con
(31)	Entrevistador: Observa por favor, el siguiente grupo de fichas y dime ¿Cuántas fichas hay? 	Prob. Est. Mul
(32)	Regina: Observa la fichas y empieza a contar… uno, dos, tres… doce.	Raz. Dim. Met
(33)	Entrevistador: ¿De qué otra forma podemos contar las fichas?	Pre. Sum. Inf
(34)	Regina: Mientras agrupa cantidades de a dos… repite dos, cuatro,	Raz. Dim. Con

	seis, ocho, doce… 	
(35)	Entrevistador: ¿Existe otra manera de hacerlo?	Pre. Sum. Inf
(36)	Regina: Creo que no.	Raz. Dim. Con
(37)	Entrevistador: Milena tiene $ 9000 para repartirlo entre ella y sus dos hermanas, ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una?	Prob. Est. Mul
(38)	Regina: Eh…toma las fichas que hay en la mesa y separa nueve,  luego separa tres y dice: tres mil para una 	Raz. Dim. Com
(39)	Regina: Tres mil para la otra… 	Afir. Sum. Inf
(40)	Regina: Y tres mil para Milena. 	Raz. Dim. Com
(41)	Entrevistador: ¿Puedes resolver este problema con una operación?	Raz. Dim. Com

(42)	Regina: hum… no	Afir. Sum. Inf
(43)	Entrevistador: Luisa el lunes ha comprado 3 galletas, el martes 3 bombones, el miércoles 3 confites, el jueves 3 barriletes y el viernes 3 frunas. ¿Cuántos dulces ha comprado Luisa durante la semana?	Prob. Est. Mul
(44)	Regina: El lunes tres galletas… el martes… 	Raz. Dim. Com
(45)	Entrevistador: El martes tres bombones, el miércoles tres confites, el jueves tres barriletes y el viernes tres frunas.	Afir. Sum. Inf
(46)	Regina: El martes, tres bombones… 	Raz. Dim. Com
(47)	Regina: El miércoles…tres confites 	Raz. Dim. Com
(48)	Entrevistador: El jueves tres barriletes…	Afir. Sum. Inf
(49)	Regina: Tres barriletes.	Raz. Dim. Com

		
(50)	Regina: El viernes… tres frunas… 	Raz. Dim. Com
(51)	Entrevistador: ¿Cuántos dulces ha comprado en la semana?	Pre. Sum. Inf
(52)	Regina: Eh! Cuenta en sus dedos… quince. Compró quince.	Raz. Dim. Com
(53)	Entrevistador: Puedes hacer lo que hiciste con tus dedos en el cuaderno.	Pre. Sum. Inf
(54)	Regina: Bueno. 	Raz. Dim. Com
(55)	Entrevistador: ¿Para tí que es una multiplicación?	Prob. Est. Mul
(56)	Regina: Es multiplicar las cifras.	Raz. Dim. Com
(57)	Entrevistador. ¿Para qué sirve la multiplicación?	Afir. Sum. Inf

(58)	Regina: Para uno aprender, para multiplicar los números, para resolver los problemas de matemáticas.	Raz. Dim. Com
(59)	Entrevistador: Puedes resolver la siguiente multiplicación.	Raz. Dim. Com
(60)	Regina: Si pero yo no me sé las tablas. Tengo que mirar…tres por tres… nueve… pongo el nueve… tres por seis… dieciocho… pongo el dieciocho. 	Afir. Sum. Inf

Anexo D. Consentimientos informados.

Para desarrollar la respectiva ruta metodológica del presente proyecto de investigación, se pidió la debida autorización a los involucrados: Rectora de la institución, directora de grupo, padre de familia, estudiantes. A continuación la evidencia de dicho consentimiento:

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACION
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INSTITUCION EDUCATIVA SAN JOSE DEL CITARA

Ciudad Bolívar, enero de 2012.

Señores

Padres de familia

I.E San José del Citará.

Reciban un cordial saludo.

En el marco de la maestría en educación en regiones para optar por el título de Magister en Educación de la Universidad de Antioquia, se ha venido desarrollando un trabajo de investigación en el grado 4° 01 con la colaboración de la docente de aula Ángela María Arteaga, dicha investigación tiene como propósito interpretar las explicaciones que construyen los estudiantes alrededor de la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa, bajo los parámetros de la línea de investigación EDUMATH.

Teniendo en cuenta lo anterior queremos solicitar de manera formal su autorización para que su hijo (a) forme parte de esta investigación, como protagonista en el suministro de información y en la presentación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de actividades de clase como grabaciones, videos, fotos, entre otros.

Agradecidos por su atención y colaboración.

Gladys María Rivera

Gladys María Rivera González
Investigadora

Jhon Henry Durango Urrego
Asesor de Investigación UdeA

Martha Ligia Diez Maya
Rectora I.E San José del Citará

Ángela María Arteaga
Directora de grupo 4°01

Padre de familia estudiante
I.E San José del Citará

Camilo Ceballos

Estudiante grado 4° 01
I.E San José del Citará

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INSTITUCION EDUCATIVA SAN JOSE DEL CITARA

Ciudad Bolívar, enero de 2012.

Señores
Padres de familia
I.E San José del Citará.

Reciban un cordial saludo.

En el marco de la maestría en educación en regiones para optar por el título de Magister en Educación de la Universidad de Antioquia, se ha venido desarrollando un trabajo de investigación en el grado 4° 01 con la colaboración de la docente de aula Ángela María Arteaga, dicha investigación tiene como propósito interpretar las explicaciones que construyen los estudiantes alrededor de la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa, bajo los parámetros de la línea de investigación EDUMATH.

Teniendo en cuenta lo anterior queremos solicitar de manera formal su autorización para que su hijo (a) forme parte de esta investigación, como protagonista en el suministro de información y en la presentación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de actividades de clase como grabaciones, videos, fotos, entre otros.

Agradecidos por su atención y colaboración.

Gladys María Rivera

Gladys María Rivera González
Investigadora

Jhon Henry Durango Urrego
Asesor de Investigación UdeA

Martha Ligia Diez Maya
Rectora I.E San José del Citará

Angela Arteaga

Ángela María Arteaga
Directora de grupo 4°01

Ana María Parrado

Padre de familia estudiante
I.E San José del Citará

Claudia López

Estudiante grado 4° 01
I.E San José del Citará

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
INSTITUCIÓN EDUCATIVA SAN JOSÉ DEL CITARÁ

Ciudad Bolívar, enero de 2012.

Señores
Padres de familia
I.E San José del Citará.

Reciban un cordial saludo.

En el marco de la maestría en educación en regiones para optar por el título de Magister en Educación de la Universidad de Antioquia, se ha venido desarrollando un trabajo de investigación en el grado 4° 01 con la colaboración de la docente de aula Ángela María Arteaga, dicha investigación tiene como propósito interpretar las explicaciones que construyen los estudiantes alrededor de la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa, bajo los parámetros de la línea de investigación EDUMATH.

Teniendo en cuenta lo anterior queremos solicitar de manera formal su autorización para que su hijo (a) forme parte de esta investigación, como protagonista en el suministro de información y en la presentación de los resultados.

Dicha autorización se hace extensiva para recolectar algunos registros de actividades de clase como grabaciones, videos, fotos, entre otros.

Agradecidos por su atención y colaboración.

Gladys María Rivera

Gladys María Rivera González
Investigadora

Jhon Henry Durango Urrego
Asesor de Investigación UdeA

Martha Ligia Diez Maya
Rectora I.E San José del Citará

Ángela María Arteaga
Directora de grupo 4°01

Padre de familia estudiante
I.E San José del Citará

ALBERTO ROMERO LEON

Estudiante grado 4° 01
I.E San José del Citará

Anexo E. Participación en eventos.

La presente investigación ha sido presentada en diferentes eventos nacionales e internacionales lo que permite la socialización de los avances en la propuesta y su contribución en el campo de la Educación Matemática.

Participaciones nacionales

La socialización del trabajo de investigación en tales eventos ha sido denominada comunicación breve.

Comunicación breve – ponencia

El 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 14, Barranquilla, Colombia, Octubre 09 al 11 de 2013.

Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de Educación Básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo.

Resumen: En los primeros años de la básica, los estudiantes construyen sus propios procesos de razonamiento con respecto a la solución de problemas que involucran las estructuras de tipo multiplicativo, dichos procesos se hacen evidentes a través de las explicaciones que ellos construyen. Interpretar estos razonamientos es el propósito central de la investigación, lo cual permite identificar los niveles y dimensiones de comprensión alcanzados por el estudiante a la luz de la referencia teórica de Enseñanza para la Comprensión. El diseño metodológico que orienta la recolección, categorización y análisis de la información es de tipo cualitativo, de igual modo se dan a conocer algunas reflexiones que emergen a partir de la información recolectada hasta ahora.

Palabras clave: Comprensión, razonamiento, dimensiones, estructura multiplicativa, explicación.

Certificado de la ponencia:

14° ENCUENTRO COLOMBIANO de matEmática Educativa ECME - 14

La Universidad del Atlántico a través de su Facultad de Ciencias de la Educación y la Asociación Colombiana de Matemática Educativa - ASOCOLME

CERTIFICAN QUE

GLADYS MARÍA RIVERA GONZÁLEZ, JOHN HENRY DURANGO URREGO

Presentaron la Comunicación Breve titulada

PROCESOS DE RAZONAMIENTO Y COMPRENSIÓN EN ESTUDIANTES DE CUARTO GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA CON RESPECTO A LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TIPO MULTIPLICATIVO

en el 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa ECME-14, realizado en la Universidad del Atlántico (Barranquilla - Colombia) los días 9, 10 y 11 de octubre de 2013.

JANETH DEL CARMEN TOVAR GUERRA
Decana Facultad de Ciencias de la Educación
Universidad del Atlántico

GILBERTO DE JESÚS OBANDO ZAPATA
Presidente Asociación Colombiana de Matemática Educativa

UA Universidad del Atlántico — COLCIENCIAS

Participaciones internacionales

La participación en este tipo de eventos enriquece el desarrollo del trabajo de investigación, promueve el intercambio de conocimientos con maestros investigadores de otros países, ampliando las perspectivas y avances del trabajo.

Ponencia:

VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 7,8, y 9 de 2014.

Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo

RESUMEN

La presente investigación se encuentra enmarcada, en primer lugar, en el estudio de los procesos de razonamiento que manifiestan los estudiantes de cuarto (Educación Básica Primaria) con respecto a la solución de problemas que involucran la estructura multiplicativa y, en segundo lugar, en establecer la relación entre dichos procesos de razonamiento y la comprensión; para ello, se aborda la investigación a partir de tres categorías: razonamiento, materializado en las explicaciones de los estudiantes (Balacheff, 2000), comprensión desde las dimensiones y niveles a partir de la teoría de enseñanza para la comprensión (Perkins y Blythe , 2003) y, estructura multiplicativa, con el fin de proponer

diferentes tipos de situaciones problema (Vergnaud, 1991). Los fenómenos estudiados en la presente investigación son abordados a partir de una metodología cualitativa y del método estudio de caso (Stake, 1999).

Es así como, después del análisis de los razonamientos manifestados por los estudiantes a través de las explicaciones (Balacheff, 2000), puede inferirse el nivel de comprensión de los mismos una partir de las dimensiones de la comprensión, expuestas en la teoría de enseñanza para la comprensión. Lo cual permite especificar cada una de las características que poseen las explicaciones de los estudiantes, enmarcadas dentro de una u otra dimensión, es decir, el nivel de apropiación de significados que circulan en el contexto y aquellos que se derivan del saber escolar, el uso de diferentes métodos de solución de problemas, la forma como comunican los estudiantes sus razonamientos y las situaciones en las cuales aplican el uso de la estructura multiplicativa dentro de su vida cotidiana. Los niveles de comprensión dentro de cada dimensión se encuentran determinados por la capacidad de desempeño flexible que poseen los estudiantes dentro de cada situación.

Ponencia:

V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín, Colombia, Mayo 8, 9 y 10 de 2013.

Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo

Contexto: En los primeros años de escolaridad, los estudiantes construyen diferentes razonamientos en torno a la solución de problemas que involucran las estructuras multiplicativas, su interpretación permite identificar los niveles y dimensiones de la comprensión en los que se encuentran inmersos.

Objetivos: Interpretar procesos de razonamiento, niveles y dimensiones de la comprensión de los estudiantes de grado cuarto de Educación Básica Primaria, al resolver problemas asociados a las estructuras multiplicativas.

Metodología: La investigación se llevó a cabo bajo orientaciones de tipo cualitativo desde el enfoque hermenéutico fenomenológico a través de un estudio de caso.

Resultados: Los estudiantes emplean diferentes técnicas en la solución de problemas, la suma es la operación a la que recurren con mayor frecuencia tanto para la multiplicación como para la división. El contexto juega un papel fundamental en la interpretación de los problemas de tipo multiplicativo.

Conclusiones: La comprensión de los estudiantes se ubica en el nivel ingenuo y de principiante en las dimensiones de método, formas de comunicación y praxis, mientras que en la dimensión de conocimiento en un nivel de aprendiz según sus razonamientos.

Palabras clave: Razonamiento, dimensiones y niveles de comprensión, estructura multiplicativa.


V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas

UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

CERTIFICA QUE:

GLADYS MARIA RIVERA GONZALEZ

Asistió en calidad de
PONENTE

Con su presentación: "PROCESOS DE RAZONAMIENTO Y COMPRENSION EN LA SOLUCION DE PROBLEMAS DE TIPO MULTIPLICATIVO" dictado en el marco del *V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, realizado en la Universidad de Medellín los días 8, 9 y 10 de mayo de 2013

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe
Departamento de Ciencias Básicas

Memorias de eventos

La participación en los distintos eventos ha permitido realizar publicaciones alusivas al trabajo de investigación realizado.

Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo

El V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, incluye dentro de la revista de resúmenes del evento la síntesis de la ponencia relacionada con el desarrollo de la investigación.

Estado: Publicado

Revista: Resúmenes V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, 4a. edición 2013. Universidad de Medellín.

ISBN: 978-958-8815-13-8

Artículos:

Los avances en el desarrollo de la investigación y la novedad de la temática han facilitado la divulgación del trabajo de investigación a través de la publicación de artículos.

Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de Educación Básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo.

Además de la comunicación breve y de la ponencia realizada en el El 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME 14, Barranquilla, Colombia, Octubre 09 al 11 de 2013 posibilito la publicación del artículo: ***Procesos de razonamiento y comprensión en estudiantes de cuarto grado de Educación Básica con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo,*** en la Revista Científica del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Estado: publicado.

Revista: Revista Científica del Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas / ISSN 0124 2253/ octubre de 2013, p. 326 - 329 / edición especial / Bogotá, D.C.

Procesos de razonamiento y comprensión con respecto a la solución de problemas de tipo multiplicativo.

Atendiendo a la invitación de la revista Uni-pluriversidad de la Universidad de Antioquia, se ha presentado un artículo reciente sobre los avances del proyecto de investigación.

Resumen: A lo largo de su recorrido escolar los estudiantes construyen sus propios procesos de razonamiento con respecto a la solución de problemas que involucran las estructuras de tipo multiplicativo, dichos procesos se hacen evidentes a través de las explicaciones que ellos construyen. Interpretar estos razonamientos es el propósito central de la investigación, lo cual permite identificar los niveles y dimensiones de comprensión alcanzados por el estudiante a la luz de la referencia teórica de Enseñanza para la Comprensión. El presente artículo da cuenta del problema de investigación detectado en una realidad particular, de la revisión cuidadosa de antecedentes investigativos que dejan entrever la pertinencia del mismo, igualmente se esboza el marco conceptual que aborda tres categorías emergentes: Comprensión, razonamiento y estructura multiplicativa; asimismo se describe el diseño metodológico que orienta la recolección, categorización y análisis de la información; y finalmente se dan a conocer reflexiones que emergen a partir de la información recolectada hasta ahora.

Palabras clave: Comprensión, razonamiento, explicaciones, dimensiones, estructura multiplicativa.

Estado: Aprobado por el evaluador con modificaciones.

Revista: Revista Uni-pluri/versidad, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.