



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**
1 8 0 3

**MEDIDA DE ÁREA Y VOLUMEN EN CONTEXTOS AUTÉNTICOS: UNA
ALTERNATIVA DE APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN
MATEMÁTICA**

TESIS DE MAESTRÍA

**PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OPTAR AL TÍTULO DE MAGISTER EN
EDUCACIÓN EN LA LÍNEA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

**PRESENTADO POR
SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ**

CAUCASIA, ANTIOQUIA

2014

**MEDIDA DE ÁREA Y VOLUMEN EN CONTEXTOS AUTÉNTICOS: UNA
ALTERNATIVA DE APRENDIZAJE A TRAVÉS DE LA MODELACIÓN
MATEMÁTICA**



Autor

SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ

Maestría en Educación

Línea: Educación Matemática

Universidad de Antioquia - Seccional Bajo Cauca.

Asesores de Trabajo de Grado

MG. SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO

DR. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

Grupo De Investigación En Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit).

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

LÍNEA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

2014



Nota de Aceptación

Presidente

Jurado

Jurado

Caucasia, enero de 2014

DEDICATORIA



A toda mi familia y en especial a mis hijos

AGRADECIMIENTOS

Expreso mis más sinceros agradecimientos:

A Dios que es mi esperanza, refugio y fortaleza para seguir adelante en todos mis momentos.

A mi familia por su apoyo y acompañamiento durante mis estudios de maestría.

A mis asesores: Carlos Mario Jaramillo López, con su apoyo incondicional, su conocimiento y su experiencia aportó grandemente a mi fortalecimiento personal y académico; y a Sandra Milena Londoño Orrego, por su capacidad, paciencia y claridad en el momento de orientar, se convirtió en mi guía en los instantes cruciales del proceso de investigación.

A mis profesores del grupo Matemáticas, Educación y Sociedad (MES) y los compañeros del grupo Educación Matemática e Historia (EDUMATH), con quienes compartimos conocimientos y experiencias que aportaron grandemente a fundamentar mi investigación. A mis compañeros y amigos de la Maestría en Educación de la seccional Bajo Cauca, Deivis, Uriel, Juan, Gonzalo y Guillermo, y a la “pelaita” por apoyo en momentos de dificultad y cansancio, que fueron muchos a lo largo de todo el estudio de maestría.

A la Institución Educativa Divino Niño y su rectora Marta Lucía Jiménez por facilitar los espacios y apoyar el desarrollo de la investigación y a los estudiantes participantes en especial Dani, Anyi, Angélica y Pereira, por su disposición para el trabajo y sus aportes, y por ser la razón de ser en el proceso de investigación.



UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Carlos Mario Jaramillo López, Sandra Milena Londoño Orrego (Presidentes del jurado) y Joao Frederico C. A. Meyer (por videoconferencia) en calidad de Jurado del Trabajo de Investigación intitulado: "Medida de área y de volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática", presentado por el estudiante SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ, de la I Cohorte de la Maestría en Educación, Región Bajo Cauca, Línea de Formación: Educación Matemática, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (según el artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmó el acta con la calificación de APROBADO por unanimidad, luego el profesor Carlos Mario Jaramillo López, profesor adscrito a la Línea en mención y en representación del Coordinador de la Línea, delegado por el Comité de Maestría para esta función, según Acta 0114 de 2014 de dicho Comité, dio a conocer el resultado.

Atendiendo a lo estipulado en el parágrafo 1 y 2, Artículo 46 del Capítulo IX del Acuerdo Superior 122 de julio de 1997, para el presente trabajo de investigación procede recomendación de distinción a criterio de los Jurados.

Meritoria:
Sobresaliente: X

Para constancia se firma en Medellín, a los 31 días del mes de julio del año 2014.

Signature of Carlos Mario Jaramillo López
CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Presidente del Jurado

Signature of Sandra Milena Londoño Orrego
SANDRA MILENA LONDOÑO ORREGO
Presidenta del jurado

P.S.A. Signature of Joao Frederico C. A. Meyer
JOAO FREDERICO C. A. MEYER
Jurado

P.S.A. Signature of Sandra Yaned Cadavid Muñoz
SANDRA YANED CADAVID MUÑOZ
Jurado

Signature of María Nelsy Rodríguez Lozano
MARÍA NELSY RODRIGUEZ LOZANO
Jefe del Departamento de Educación Avanzada



TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN.....	12
1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	17
1.1. REVISIÓN DE LA LITERATURA	17
1.1.1. <i>Perspectivas en la enseñanza de la geometría en la resolución de problemas</i>	17
1.1.2. <i>Algunos aportes de la modelación matemática</i>	22
1.1.3. <i>La modelación matemática en el aprendizaje de la geometría: espacio, volumen</i>	25
1.2. ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACIÓN: UN ANÁLISIS DESDE LA EXPERIENCIA DOCENTE.....	27
1.3. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	31
1.4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.....	33
1.5. OBJETIVO.....	34
1.6. OBJETO DE ESTUDIO.....	34
2. MARCO TEÓRICO.....	35
2.1. ASPECTO HISTÓRICO, LA GEOMETRÍA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS	36
2.2. LA MODELACIÓN MATEMÁTICA A TRAVÉS DE LA HISTORIA	39
2.3. LA MODELACIÓN MATEMÁTICA COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE EN EL AULA	42
2.4. MEDIDA DE ÁREA Y VOLUMEN: UNA APROXIMACIÓN DESDE LOS FENÓMENOS NATURALES	51
3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN.....	56
3.1. EL PARADIGMA DE INVESTIGACIÓN.....	57
3.2. TIPO DE ESTUDIO.....	59
3.3. EL DISEÑO DE INVESTIGACIÓN	61
3.3.1. <i>El Contexto</i>	61
3.3.2. <i>Participantes de la investigación</i>	62
3.3.3. <i>Fuentes de recolección de datos</i>	63
3.3.4. <i>Momentos del trabajo de campo</i>	65
3.4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS	68
3.5. VALIDEZ DEL ESTUDIO	69
4. LA MODELACIÓN MATEMÁTICA APLICADA A UN CONTEXTO AUTÉNTICO: EL CASO DE LAS INUNDACIONES POR DESBORDAMIENTO DE UN RÍO ...	70
4.1. EL CONTEXTO AUTÉNTICO: FENÓMENO DE LAS INUNDACIONES, SU IMPACTO SOCIAL Y LAS NOCIONES MATEMÁTICAS	71
4.1.1. <i>El fenómeno y su impacto social</i>	71
4.1.2. <i>Nociones matemáticas emergentes del fenómeno de las inundaciones</i>	80
4.2. DELIMITACIÓN Y SIMPLIFICACIÓN DE LAS SITUACIONES EN EL CONTEXTO DE LAS INUNDACIONES.....	82
4.2.1. <i>Delimitación de las situaciones en el contexto de las inundaciones</i>	83
4.2.2. <i>Simplificación del fenómeno</i>	85
4.3. HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS: EL CASO DEL ÁREA Y EL VOLUMEN	117

4.3.1.	<i>Hacia la construcción de un modelo matemático: área</i>	117
4.3.2.	<i>Hacia la construcción de un modelo matemático: Volumen</i>	131
4.4.	VALIDACIÓN DE LOS MODELOS MATEMÁTICOS	156
4.5.	SOCIALIZACIÓN DEL TRABAJO	164
5. CONCLUSIONES		168
5.1.	FACTORES ASOCIADOS A UNA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS	168
5.1.1.	<i>El contexto auténtico y su implicación en la construcción de modelos</i>	169
5.1.2.	<i>Delimitación de las situaciones en el contexto: generador de modelos matemáticos</i>	170
5.1.3.	<i>Los modelos matemáticos como facilitador de alternativas de solución</i>	171
5.1.4.	<i>La Tecnología como medio de visualización del fenómeno</i>	173
5.1.5.	<i>Apropiación de conceptos matemáticos</i>	174
5.2.	SURGIMIENTO Y CONSTRUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	175
5.3.	IMPLICACIONES DEL PROCESO DE MODELACIÓN	179
5.3.1.	<i>Con relación al aula de clase</i>	179
5.3.2.	<i>Para futuras investigaciones en esta línea</i>	180
5.3.3.	<i>Divulgación del trabajo de investigación</i>	181
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		183
ANEXOS		188
	ANEXO 1: ENTREVISTA INICIAL	188
	ANEXO 2: CONSENTIMIENTO DE PARTICIPACIÓN.....	189
	ANEXO 3: EXPLORACIÓN DEL CONTEXTO	190
	ANEXO 4: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS	191
	ANEXO 5: HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS: VOLUMEN	192
	ANEXO 6: ENTREVISTA AL JEFE DE PLANEACIÓN	193
	ANEXO 7: ENTREVISTA AL ALCALDE DEL MUNICIPIO DE CAUCASIA.	194
	ANEXO 8: CERTIFICADOS	195

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Esquema relación de las matemáticas con el contexto (Biembengut y Hein, 2007).....	43
Ilustración 2: Uso inadecuado de las basuras.....	72
Ilustración 3: Deterioro de viviendas por causa de las inundaciones.....	74
Ilustración 4: Medio de transporte en el contexto de las inundaciones.....	75
Ilustración 5: Municipio de Cauca y su cercanía al río Cauca (tomado de google earth, 24 de marzo de 2013).	77
Ilustración 6: Muro de contención perpendicular al río.	79
Ilustración 7: Representación equipo de Angélica.....	80
Ilustración 8: Inundaciones en el Municipio de Cauca.....	85
Ilustración 9: Panorámica de la Institución Educativa en tiempo seco.....	86
Ilustración 10: Institución Educativa afectada. Tomado de : http://www.elmundo.com/portal/resultados/detalles/?idx=176626	87
Ilustración 11: Trabajo de campo. Medida del colegio.....	91
Ilustración 12: Cálculo de áreas inundadas.	92
Ilustración 13: Plano del colegio-Grupo de Angélica.....	94
Ilustración 14: Plano del colegio-Grupo de Dani.....	96
Ilustración 15: Inicio de inundación cancha de micro-fútbol.....	97
Ilustración 16: Inundación cancha de microfútbol.....	98
Ilustración 17: Zona inundada a 10 cm. Equipo 2 (Angélica-Pereira).....	99
Ilustración 18: Zona inundada a 10 cm. Equipo 1 (Dani-Anyi).....	100
Ilustración 19: Zona inundada 20 cm. Equipos 2 (Angélica).....	105
Ilustración 20: Zona inundada 20 cm. Equipos 1 (Dani).	106
Ilustración 21: Zona inundada a 30 cm. Dibujo equipos 2 (Angélica-Pereira).....	107
Ilustración 22: Zona inundada a 30 cm. Dibujo equipos 1 (Dani-Anyi).....	108
Ilustración 23: Inundaciones en I. E. Divino Niño.....	109
Ilustración 24: Sección inundada- Equipo 2(Angélica-Pereira).....	110
Ilustración 25: Sección regular. Equipos 2 y 1.	111
Ilustración 26: Sección irregular del patio.	112
Ilustración 27: Cálculo de área figura irregular. Equipos 2 y 1.	112
Ilustración 28: Cálculo zona de materas.	113
Ilustración 29: Área total inundada nivel del agua 30cm.....	114
Ilustración 30: Área corregida. Equipo Angélica-Pereira.	115
Ilustración 31: Comparación primera área inundada-área total. (Angélica-Pereira).....	116
Ilustración 32: Relación área-altura. Equipo 2(Angélica-Pereira).	118
Ilustración 33: Representación equipo2-Angélica.	119
Ilustración 34: Representación equipo1-Anyi.....	120
Ilustración 35: búsqueda de gráficas. Pereira.....	121
Ilustración 36: Nueva representación gráfica de área-Equipo 1(Dani-Anyi).....	121

Ilustración 37: Construcción de modelo-área. Equipos 1 y 2.	124
Ilustración 38: Modelo matemático. Equipo 2 (Pereira-Angélica).	124
Ilustración 39: Modelo matemático. Equipo 1(Dani-Anyi).	124
Ilustración 40: Prueba modelo matemático para altura de 30cm. Angélica-Pereira.	125
Ilustración 41: Modelo matemático-medida calculada. Equipo 1(Dani-Anyi).	126
Ilustración 42: Área con altura 30cm según modelo. Equipo 1. Dani.	127
Ilustración 43: Representación modelo matemático Angélica-Pereira. Geogebra.....	129
Ilustración 44: Cálculo de volumen altura 10cm. Equipo 2. Angélica.	132
Ilustración 45: Representación forma del agua en la cancha. Dani.	133
Ilustración 46: Cálculo del volumen de agua, altura 10cm. Anyi-Dani.....	134
Ilustración 47: Volumen de agua a 20cm. Equipo 2 (Angélica-Perera).....	135
Ilustración 48: Volumen de agua para altura 20cm. (Dani).....	137
Ilustración 49: Cálculo volumen patio. Altura 20cm. Dani.	138
Ilustración 50: Continuación cálculo de volumen a 20cm. Dani-Anyi.....	138
Ilustración 51. Descomposición volumen patio. Equipo 1 (Dani-Anyi).....	139
Ilustración 52. Cálculo volumen altura 30cm. Equipo 1 (Anyi-Dani).	141
Ilustración 53: Plano en planta de la Institución vista en 3D. Google Sketchup.	143
Ilustración 54. Grafica volumen vs altura. Anyi-Dani.	145
Ilustración 55: Construcción modelo matemático volumen. Angélica.	147
Ilustración 56: Cálculo modelo matemático volumen. Dani.....	148
Ilustración 57: Modelo matemático. Equipo Pereira-Angélica.....	148
Ilustración 58: Modelo matemático. Anyi-Dani.	149
Ilustración 59: Cálculo del volumen de agua a 30cm de altura. Dani.....	150
Ilustración 60: Sistema de ecuación lineal 3x3. Any-Dani.	151
Ilustración 61: Sistema de ecuación lineal 3x3. Angélica.....	151
Ilustración 62: Proceso de cálculo de las incógnitas. Pereira-Angélica.	152
Ilustración 63: Método para encontrar las constantes. Pereira.....	153
Ilustración 64: Cálculo 1 de las constantes en la función cúbica. Angélica-Pereira.	153
Ilustración 65: Cálculo 2 de las constantes en la función cúbica. Angélica-Pereira.....	154
Ilustración 66: Cálculo de las constantes a, b y c. Anyi-Dani.....	154
Ilustración 67: Modelo matemático para el volumen. Anyi-Dani.....	155
Ilustración 68: Modelo matemático. Angélica-Pereira.	155
Ilustración 69: Verificación modelo matemático. Angélica-Pereira.....	155
Ilustración 70: Entrevista estudiantes-Jefe de Planeación municipal.....	159
Ilustración 71: Entrevista Estudiantes-Alcalde.	163
Ilustración 72: Exposición del trabajo.	164
Ilustración 73: Maquetas construidas por los estudiantes.	165

TABLAS

Tabla 1. Estudio de caso cualitativo según la perspectiva de Hays (2004).....	60
Tabla 2. Exploración General: el fenómeno de las inundaciones.	78
Tabla 3. Área superficial del agua vs altura. Equipo 2 (Angélica-Pereira).....	115
Tabla 4. Volumen vs altura. Equipo 2 (Angélica-Pereira).....	142
Tabla 5. Volumen vs altura. Equipo 1 (Anyi-Dani).....	142

INTRODUCCIÓN

A través de la historia, las matemáticas han contribuido al desarrollo de los pueblos y en gran medida éstas se encuentran relacionadas con el entorno social y cultural (Caraça, 1984; Bishop, 1999). Por esto, un aspecto fundamental en el ambiente en que se habitúan los seres humanos, tiene que ver con los fenómenos naturales, en caso concreto; el de las inundaciones formadas por desbordamientos de ríos. Este problema que ha afectado a los seres humanos a través de los tiempos, ha sido incluso un factor fundamental en la aparición de la geometría a causa de las inundaciones que se produjeron en el antiguo Egipto debido al desbordamiento del río Nilo.

Sin embargo, de acuerdo con Moreno, A., Bulla, B., Giraldo, N., Mantilla, A., & Mantilla, M. (1998) & Guillen (2010) en muchos casos, las matemáticas se han fundamentado desde el concepto y la rigurosidad, sin tener en cuenta su relación estrecha con el contexto. Por lo tanto, se han generalizado como un conjunto fijo de conocimientos universalizados y acabados, donde su objetivo se limita a la aplicación de fórmulas y simbolismos que a veces carecen de significado. Las matemáticas se presentan descontextualizadas de la vida del estudiante, lo que ocasiona la desmotivación y la reproducción de contenidos de manera mecánica. Desde esta problemática se requiere una construcción del conocimiento matemático fundamentado en los contextos, con los cuales puedan interactuar los estudiantes y de esta manera facilitar la exploración de los mismos. Considerando en el campo de la Educación Matemática los fenómenos naturales que hacen parte de la cotidianidad de los estudiantes, se

espera que ellos observen las relaciones matemáticas emergentes de su contexto, con el fin de que puedan comunicar estas relaciones con significado matemático. En este sentido, la modelación matemática se convertiría en una ruta que interrelaciona la matemática y el contexto.

Este trabajo de investigación se desarrolla en el entorno de las inundaciones presentadas en una Institución Educativa, ubicada en el municipio de Caucasia por causa del desbordamiento de un Río. Esta situación se toma como una oportunidad para determinar la relación que puede emerger entre ésta y la medida del área y el volumen a través de estrategias que permitan construir un proceso de modelación matemática. Estos elementos de la modelación aplicada en situaciones dentro del contexto en el que se desenvuelven los estudiantes permiten una significación de los conocimientos matemáticos, a partir de las relaciones entre dichas medidas. Por lo tanto, nuestra investigación se centra en analizar aquellos elementos de las matemáticas que puedan emerger y relacionarse con este contexto, utilizando para la apropiación de conceptos la modelación matemática, a partir de esto, se busca que el estudiante manipule datos que lo conlleven a generar espacios de reflexión en la práctica de la matemática dentro de su entorno. (Villa-Ochoa, 2007; Biembengut y Hein, 2004; Londoño y Muñoz, 2011).

Al respecto, Biembengut y Hein (2004) afirman que la modelación matemática, está siendo amparada, como método de enseñanza en los diferentes grados de escolaridad, ya que permite a los estudiantes aprender las matemáticas aplicadas a otras áreas del conocimiento, facilitando así su capacidad para interpretar, formular y solucionar problemas.

En esta investigación se analiza la manera en qué los estudiantes de grado décimo construyen modelos matemáticos relacionados con el área superficial y el volumen de las zonas inundadas de su Institución Educativa, lo cual se convierte en un factor importante, puesto que los estudiantes a partir de un trabajo realizado en un contexto cotidiano, logran determinar dichas nociones matemáticas que permiten comprender aspectos relacionados entre las matemáticas y el ambiente de los estudiantes, lo que favorece el establecimiento de propuestas de solución y un punto de referencia para estudiar las situaciones del fenómeno en contextos más amplios y complejos tanto a nivel nacional como internacional. Para el cumplimiento de lo anterior, este proyecto de investigación, se desarrolló en cinco capítulos:

En el primer capítulo, se realizó una revisión de literatura que era relevante para los puntos de investigación que fueron: la modelación matemática en el proceso de aprendizaje de la geometría y el concepto de Área y volumen en su relación con el desarrollo de las matemáticas; el aspecto histórico, con relación a dicha modelación a través de la historia y las observaciones en torno a la solución de problemas. De esta forma se describen elementos desde la literatura importantes en la fundamentación de procesos que tienen que ver con la modelación matemática desde los contextos cotidianos. Con base a las anteriores consideraciones, delimitamos nuestro problema de investigación con la pregunta: *¿De qué manera los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico?*

En el segundo capítulo, se formula el marco teórico, que dan fundamento al presente proyecto de investigación. En él se referencian algunos aspectos históricos con relación a la geometría, a la geometría en la resolución de problemas y a la geometría aplicada a contextos.

También lo que se asume en la investigación con respecto a modelo matemático, a partir de lo referenciado por Biembengut y Hein (2004) y el contexto tomando los planteamientos de Villa-Ochoa (2010). De la misma forma la Medida de Área, teniendo en cuenta los fundamentos de (Olmo, Moreno, & Gil, 1993) y la medida del volumen según lo establecido por Vergnaud, (1981citado en Olmo et ál. 1993).

En el tercer capítulo, se presenta el diseño metodológico de la investigación, la cual se desarrolla bajo el paradigma cualitativo, mediante un estudio de caso, por ser esta la forma más adecuada de explorar, indagar y analizar cómo los estudiantes construyen esos modelos matemáticos que pueden emerger en un fenómeno de inundación por desbordamiento de ríos. Los participantes de la investigación son un grupo de grado décimo de una Institución Educativa del Municipio de Caucasia, pero centrado principalmente en cuatro estudiantes.

El cuarto capítulo, muestra los resultados de la experiencia realizada con los estudiantes, a partir de la triangulación de los datos con el marco teórico y la posición asumida como investigador. Los análisis resultan de las actividades planteadas en el tercer capítulo frente a la construcción de modelos matemáticos que los estudiantes realizan sobre las relaciones entre la medida del área y el volumen, que emergen en un proceso de inundación.

En el quinto capítulo se presentan las conclusiones generales de la investigación y las recomendaciones previas a futuras investigaciones. Como producto de este estudio, se proponen nuevos elementos para el análisis y reflexión sobre el proceso de modelación y su relación con el contexto. Además, se deja abierta la discusión referente a las contribuciones de la modelación

matemática dentro y fuera del aula de clase y las formas de interacción en el plano actitudinal y conceptual.

CAPÍTULO 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Revisión de la literatura

En la revisión de la literatura respectiva, se pudo establecer ciertas categorías con relación a diversos estudios realizados en el campo de la geometría y la modelación matemática, sirviéndonos como base para fundamentar el problema de investigación. Clasificamos las investigaciones en categorías, la primera llamada perspectivas de la enseñanza de la geometría en la resolución de problemas, una segunda categoría trata sobre aportes de la modelación matemática a grosso modo y una tercera categoría se refiere a la modelación matemática en el aprendizaje de la geometría en particular con el área y el volumen como medida.

1.1.1. Perspectivas en la enseñanza de la geometría en la resolución de problemas

La geometría es una parte importante de las matemáticas, puesto que ayuda al razonamiento métrico espacial. Para Jones (citado por Gamboa y Ballester, 2009) “ la geometría contribuye a desarrollar en los estudiantes habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente, argumentar de

manera lógica en procesos de prueba o demostración” (p. 115). Sin embargo, en muchas investigaciones se ha evidenciado la falta de apropiación de docentes que han aplazado su enseñanza o simplemente es descartada, sobre esta idea, Pérez y Guillén (2009) & Benigno y Cardozo (2008) en sus investigaciones acerca de la geometría en la Educación, mostraron como resultado que en muchos cursos de nivel medio los profesores desplazan la geometría como último tema del área e incluso se ha llegado a prescindir de ella. Por otro lado comparten la opinión de autores como (Afonso, 2003; Gamboa y Balletero, 2009 & Lluís, 1982) respecto a la necesidad ineludible de traer de vuelta la enseñanza de la geometría, a través de sus relaciones interdisciplinarias, como una herramienta facilitadora en la construcción del conocimiento y la adaptación de los contenidos, con el objetivo de crear un ambiente para ayudar a conocer de forma significativa el espacio y a la elaboración de problemas geométricos que favorecen el aprendizaje de los estudiantes. Al concluir, afirmaron que los docentes necesitan establecer su papel de mediadores entre los estudiantes y el conocimiento, y sobre todo deben reestructurar algunas formas de enseñanza tradicional como el aprendizaje memorístico de fórmulas o actividades de repetición, que promueven el aprendizaje mecánico, para que sus educandos tengan otra perspectiva acerca de la educación.

En esta necesidad de establecer nuevas concepciones, algunos investigadores como los ya mencionados, han trabajado para fortalecer la geometría a través de la resolución de problemas, y los resultados obtenidos en sus trabajos, han favorecido el mejoramiento en la apropiación de conocimientos desde la geometría por parte de los estudiantes.

Algunas investigaciones relacionadas con la resolución de problemas en matemáticas han sido trabajadas por (Abrantes, 1994; Gaulin, 2001). Estos estudios referentes a la geometría, específicamente con las mediciones, fueron desarrollados por Corberán (1996); Moreno, Bulla, Giraldo y Mantilla (1998) con los cuales estos autores abordan las nociones de perímetro, área y volumen y las dificultades que pueden surgir al trabajar dichos conceptos como la falta de tiempo o el interés de los estudiantes; además de los métodos y procedimientos empleados para enseñar y calcular estas magnitudes.

Los fenómenos naturales y sociales, pueden ser relacionados desde las matemáticas y a su vez conducir a indagar sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, las dificultades, habilidades, símbolos, percepciones, suposiciones entre otras; tal como lo afirman Godino, Batanero y Roa (2002) en su trabajo de investigación sobre las “magnitudes y su didáctica para maestros” en el cual perciben que el estudio escolar de las magnitudes área y volumen deben encerrar una matriz de personalización de las características correspondientes de los objetos, como lo son las superficies, áreas y volúmenes de cuerpos y figuras geométricas. Consideran que en la práctica, las cantidades de áreas y volúmenes, se deben medir de modo indirecto por medio del cálculo, partiendo de las medidas lineales de las dimensiones de las figuras o cuerpos, de manera que se hallan las magnitudes a partir de datos conocidos. En este campo de las matemáticas se ocupan los entes no palpables, como concepciones, proposiciones, notaciones, demostraciones, no obstante, estos son representados por medio de palabras y símbolos.

Distintas ciencias como el álgebra o la geometría estudian el entorno de los cuerpos matemáticos, que forjan como objetos absolutos, abstracciones, entes mentales, formas

gramáticas, etc. Al contrario de los educadores de esta ciencia matemática como la geometría por ejemplo, no entran en esta problemática. Solo dicen que los conocimientos indeterminados, no son arbitrarios, sino que resultan de la manera de proceder en la naturaleza perceptible que los encierra. En este sentido, si bien las matemáticas son abstractas, pueden utilizarse en las aulas con el propósito de que los estudiantes logren entender, explicar y prever diferentes fenómenos naturales y situaciones del contexto social y cotidiano, para que observen que las matemáticas son útiles y necesarias.

Moreno et ál. (1998) en su texto, “Introducción a la medida del volumen”, pretendieron lograr que los estudiantes identificarán el volumen como una propiedad de los cuerpos y logran las habilidades para medirlo. Los autores realizaron un análisis observando tres aspectos: El contenido matemático, el proceso de enseñar y el proceso de aprender. Advirtieron en su reflexión pedagógica que las estrategias que usan los estudiantes en la construcción de conceptos como cuerpo, espacio, dimensión, longitud, área, volumen, relaciones entre unidades de medida y otros, no eran las más adecuadas; puesto que no se proponen actividades que ayuden al estudiante a observar, describir, comparar, analizar y a establecer conexiones básicas para lograr un aprendizaje comprensivo de los mismos. Concluyen que no se propician momentos para que el alumno observe las propiedades y características de los cuerpos (dimensiones, forma, tamaño, material) y sucesivamente se establezcan relaciones que le puedan ayudar en el proceso de la adquisición de los procesos de medición.

De igual forma observaron que los errores que los estudiantes cometen en el campo de la geometría tienen que ver con los inconvenientes en el manejo del espacio, es decir, no tener en

cuenta la zona que era necesaria para ubicar todos los objetos. También observaron que por lo general el alumno no realiza mediciones correctas, por lo tanto le es difícil hacer estimaciones de longitudes, áreas, volúmenes y capacidades; donde tienen complicaciones en la identificación de fracciones decimales, la representación gráfica de los objetos, la comprensión del vocabulario que se utiliza y las unidades de medida.

En esta investigación Moreno et ál. (1998) ponen en evidencia que el concepto de volumen de cuerpos y su medición se ha trabajado con metodologías y procedimientos que promueven memorizar fórmulas carentes de significados y solo son usadas de forma mecánica. Por otro lado constataron que los estudiantes al utilizar términos geométricos, como dimensión, profundidad, altura, espesor, no lo hacen de la manera adecuada si no que los asocian con conocimientos errados de su significado, los cuales parecieran no ser comprendidos; por ende el concepto de medición, y el de volumen, se les hace difícil de asimilar.

Guillen (2010) en su trabajo “¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?, ¿y en la investigación?”, tiene en cuenta dos líneas de trabajo. En una de ellas observó los procesos de enseñanza/aprendizaje en cuanto a describir, clasificar, definir, particularizar, generalizar, probar en los procesos matemáticos, y, la otra, se centra en la representación de los sólidos y otras formas tridimensionales y en ‘el problema de visualización’ considerando su enseñanza y su aprendizaje. En el marco teórico de su investigación, hizo referencia a diferentes concepciones que se pueden considerar sobre la geometría y su enseñanza, así mismo frente a las dicotomías que pueden presentarse frente a la organización de los contenidos geométricos, como iniciar su estudio, el tipo de ejes temáticos

que se desarrollan y las diferentes posibilidades que se tienen para diseñar un currículo de geometría.

En la investigación la autora también muestra la riqueza que ofrece el mundo de los sólidos como argumento para la enseñanza/aprendizaje de la geometría estimando los diferentes contextos y estrategias como en este caso, la modelación matemática. Este análisis le permitió observar un amplio abanico de problemáticas para considerar como objetos de investigación en Educación Matemática. Por otro lado, reflexiona acerca de la geometría en la práctica escolar y las diferentes formas como aprenden o se enseña en las Instituciones Educativas, a raíz de esto, establecen un listado en el cual dan correspondencia a la concepción de la geometría a partir del contexto, así como la modelación del entorno y el aporte de una comprensión basada en la experiencia. La autora considera que en general se obtendrán resultados favorables en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

1.1.2. Algunos aportes de la modelación matemática

La modelación matemática ha cobrado fuerza al saber relacionar las diferentes ciencias, tales como: biología, física, química, geometría, con las matemáticas, fundamentalmente en la creación de modelos que resuelvan problemas dentro de estas ciencias, con el fin de relacionarse con amplias masas de datos o comprender, predecir y controlar procedimientos existentes, en particular en meteorología, climatología, oceanografía, astronomía; llevando a que se mejore la forma de aprendizaje de las ciencias ya mencionadas. Diversos escenarios de nuestra vida pueden verse expuestos a obstáculos que requieren de la toma de decisiones, estos necesitan ser

transformados a modelos matemáticos y observados desde las variables que en ellos influyen, Hitt, (citado por Planchart,2002) afirma que por ejemplo con el tema de las funciones se puede modelar fenómenos del entorno, a su vez se puede describir y analizar relaciones de hechos sin necesidad de hacer a cada momento una descripción verbal o un cálculo complicado, esto permite desarrollar el proceso de modelación desde contextos físicos o del entorno. Según Sierpinska (1992) “los estudiantes deberían tener las oportunidades para usar el conocimiento acerca de las funciones en la explicación de los fenómenos de su vida diaria, social y económica, o acerca de funciones encontradas en otras ciencias” (p. 43). En este sentido, se requiere de una construcción del conocimiento matemático fundamentado desde los contextos en el que interactúan los estudiantes, pues es una herramienta que facilita la asimilación de los mismos.

Para Biembengut y Hein (2004) la modelación matemática tiene una fuerte influencia como método de aprendizaje de la geometría en los diferentes niveles de educación. Afirman que la modelación matemática aplicada en cualquier área del conocimiento facilita la capacidad para leer, interpretar, formular y solucionar problemas, en esta indagación se resaltan las partes que se contraponen a una buena enseñanza de la modelación matemática, esta tiene que ver con la relación de profesores con la enseñanza tradicional que han dificultado la implementación de la modelación, en estos cambios que se presentan diariamente, educadores tienen la tarea de avanzar constantemente pues lo único que queda de ello es el conocimiento; al concluir esta investigación mostraron que la aplicación de los modelos matemáticos en la educación es un medio favorable a la práctica y desempeño del estudiante.

La experiencia como docente nos guía a conocer y ampliar la metodología apropiada para instruir al estudiantado con respecto a la geometría, esta permite desarrollar en ellos capacidades que utilizarán para tener nuevas percepciones, conceptos, interpretar y modelizar el espacio físico. Para Planchart (2005), la modelación se encuentra estrechamente relacionada con un procedimiento que compone símbolos, signos, figuras, gráficas y construcciones geométricas. También afirma que estos expresan la idea y abonan en sí mismos el modelo con el cual es posible interpretar y pronosticar comportamientos de fenómenos físicos, con esto el autor se refiere a la modelación como una representación de un objeto matemático vinculado a una situación física o “real”, aplicada para la resolución de problemas o interpretación de fenómenos.

En la actualidad, las investigaciones basadas en la modelación matemática dan cuenta que uno de los temas abordados con frecuencia es el esquema de dinamismos fundados en la modelación de contextos reales y de las ciencias, este pensamiento ha logrado trascender y avanzar de manera eficaz, tornándose en la ruta para afrontar los conflictos, insuficiencias y enaltecer las características de los aprendices. Como lo indican en su investigación Ulloa y Rodríguez (2010) el buen uso y razonamiento de una práctica en las acciones de los estudiantes, los ayudará a adquirir los instrumentos necesarios y suficientes para salir adelante en el área competitiva, auxiliándole en el logro de las bases para realizar un buen modelo matemático que llegue a brindarles información para la correcta toma de decisiones.

En un estudio realizado por Quiroz, Rendón y Rodríguez (2011) se evalúan estudiantes de sexto grado, en el cual buscan como principal objetivo identificar las capacidades de la modelación matemática que ellos desarrollan. Mencionan que para discutir sobre la modelación

matemática se debe referir a ella como un facilitador de problemas complejos en los que se miden los conocimientos, comprensiones y las habilidades creativas, esto con el fin de proponer teorías y diseñar enfoques que argumenten la forma de un fenómeno en términos matemáticos. La investigación arrojó resultados positivos ya que los estudiantes, al resolver sus actividades, demostraron que podían pasar fácilmente de un contexto particular a un modelo matemático; el cual elaboraron, se relacionaron con él, y dieron respuesta al problema planteado.

1.1.3. La modelación matemática en el aprendizaje de la geometría: espacio, volumen

El surgimiento de métodos para el aprendizaje aborda un tema importante, la creación de modelos matemáticos que lleguen a resolver problemas cotidianos, y que establezcan una relación entre el educador y el estudiante en el transcurso de la construcción del conocimiento; es significativo mencionar que con la modelación matemática específicamente apoyada en la geometría se pueden solucionar dificultades cimentadas en inundaciones teniendo en cuenta el volumen y el área, lo que conlleva por un lado la implementación de estrategias para afrontar el problema y por el otro que se pueden hacer simulaciones con medios tecnológicos que permiten observar el fenómeno y tener una visión más acertada de sus implicaciones y el impacto que produce a una comunidad, región, país, etc. En un estudio realizado por Bladé y Gómez (2006) se toma como escenario el estudio de la modelación “numérica”, el objetivo de ésta “es la puesta a punto de una herramienta para la modelación matemática del flujo de agua, con geometrías irregulares como son los cauces naturales”. En esta investigación se desarrollaron esquemas que establecieron modelos de precisión con base en crecientes con flujo variable o con particularidades.

Para Bladé y Gómez (2006), los ríos por su complejidad geométrica requieren la aplicación de modelos físicos reducidos o incorporados a una “modelación numérica”. Por esa razón implementan recursos tecnológicos para simular en una réplica el transcurso de una creciente en función a geometrías irregulares y así se presentan características del flujo hidráulico. Los autores se enfocan en las agrupaciones de ríos, las crecientes en contorno a estructuras y los desbordamientos de los ríos, demandando así a la utilización de herramientas que les proporcionaran una visión bidimensional. También se desenvuelven procesos metodológicos para la modelación en una y en dos dimensiones, asumiendo la integración de las dos para elaborar modelos que permitan tener distintas visiones donde las particularidades geométricas o del flujo así lo requieran. Para los autores es importante tener en cuenta la modelación, basándose en el cálculo numérico para así ajustar las observaciones de las figuras irregulares en contextos “reales”. Atendiendo lo anterior, se puede decir que la modelación matemática aplicada a contextos, puede ser para los estudiantes una posibilidad de recurrir a la utilización de la geometría, de manera que esté a la par con los retos y exigencias que se forman en el proceso de enseñanza- aprendizaje en la Educación Matemática actual.

En este proceso de indagación se ha verificado como algunas investigaciones en el campo de la Educación Matemática, abordan diferentes estrategias de aprendizajes, metodologías, dificultades en los procesos de enseñanza y de aprendizaje, formas de evaluación, entre muchos otros aspectos que permiten una reflexión sobre la labor docente en este campo del saber, fundamentadas como formas de pensar que tienen los seres humanos y que están presentes en todo lo que les rodea. Las matemáticas entonces deben promover en los estudiantes diferentes

perspectivas y enfoques de aplicación en otras áreas del conocimiento. Debe surgir de las necesidades presentes en el contexto escolar, social, ambiental en el que está el estudiante.

Desde la experiencia docente y a través de diferentes investigaciones se argumentan los distintos puntos de vista que aportan a la discusión sobre los procesos de enseñanza y de aprendizaje que se establece en nuestras aulas. Aunque somos conscientes que el actual estudio no es una solución a priori a la problemática que se presenta desde hace muchos años sobre la educación en el campo de las matemáticas, puede ser un punto de partida o un aporte hacia la discusión y la reflexión en caso particular del aprendizaje de los estudiantes con lo relacionado a elementos de la geometría.

1.2. Antecedentes de la investigación: un análisis desde la experiencia docente

Muchos ejes temáticos de la matemática se pueden desarrollar de manera diferente si se asume la conceptualización teórica y práctica de la geometría. En este sentido según Báez e Iglesias (citado por Gamboa y Ballester, 2009) “La geometría ha sido considerada como uno de los pilares de formación académica y cultural del hombre, dada su aplicación en diversos contextos y su capacidad formadora del razonamiento lógico” (p. 115). Es decir, la geometría cumple un papel importante a la hora de resolver problemas de la vida diaria, llevando al estudiante a motivarse en aprenderla y aplicarla. Así mismo su relación con otras áreas, entre ellas el álgebra como lo afirma Vara (2009) quien considera que hay una relación de la geometría con el álgebra cuando se dirige al estudiante para demostrar por ejemplo, el cuadrado de un binomio, por procedimientos algebraicos y con la demostración por áreas.

Se considera que en las matemáticas, especialmente en la geometría, el razonamiento lógico y la creatividad son fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje, luego la geometría se convierte en significativa en la medida que el educando la observe como parte fundamental en su vida, donde todos participan activamente en la construcción del conocimiento, en la discusión, en el trabajo colaborativo. Sin embargo y en contraste con lo presentado anteriormente, la mayoría de los estudiantes consideran las matemáticas como un conjunto secuencial de fórmulas, de teoremas y contenidos poco expuesto con la realidad y el vivir cotidiano. La geometría se ha convertido en una materia rígida y mecánica con limitaciones conceptuales para el desarrollo del razonamiento lógico y la creatividad. En este sentido, Moreno et ál. (1998) & Goncalves (2006) en sus investigaciones ponen en evidencia que el tema de volumen de cuerpos y su medición se ha trabajado con metodologías y procedimientos inapropiados, además de que se ha limitado a la conceptualización de figuras y no se fundamentan con objetos, formas y ejemplos cotidianos. Según lo anterior, el estudiante no ve la posibilidad de aplicar los conceptos geométricos en el contexto en el cual se desenvuelve. Por esto, en muchos casos, se muestra indiferente en el aprendizaje de los mismos.

Desde otra perspectiva, no hay una postura clara por parte de los docentes sobre la real importancia de la geometría dentro del currículo escolar ya que como se había dicho, en investigaciones realizadas por Pérez y Guillén (2009) & Benigno y Cardozo (2008), en muchos cursos los profesores desplazan la geometría como último contenido o se ha omitido en las aulas. Esta es clara evidencia que el pensamiento métrico-geométrico no está bien estructurado en las clases y que no se ha explorado a profundidad su importancia. En este mismo aspecto Guillén (2010) hace una reflexión si la geometría escolar se ve como información para los estudiantes

aprender, direccionadas por los libros y textos escolares, como un desarrollo informal de la geometría euclidiana o como medio para modelar el entorno, luego podemos decir que dependiendo de la concepción que tenga el docente sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, esta será aplicada en las aulas, es decir, que si para el docente la geometría es un cúmulo de fórmulas que deben ser seguidas por los estudiantes para encontrar resultados o una oportunidad para comprender, resolver y solucionar aspectos del contexto y la cotidianidad que permitan un aprendizaje significativo en el estudiante. Por lo tanto el estudiante asumirá la dinámica implementada por el docente.

Otro aspecto importante es la desarticulación evidenciada entre la geometría como tal y el entorno social y cultural en el que se encuentra el estudiante y en particular con los temas de área y volumen que en muchos casos son abordados de forma mecánica donde se muestra la figura y se plasma la fórmula para obtener los resultados, sin que esto refleje una verdadera conexión con el contexto escolar y una significación conceptual de las variables involucradas en estos contenidos. Solo se memoriza la fórmula y las tareas o actividades están limitadas a encontrar resultados operacionalizados, con problemas aislados y descontextualizados del entorno del estudiante. En este sentido se refiere Hernández (citado por García et ál. 2007) quien considera que se aprende matemática para actuar con ella misma y no para recolectar definiciones, demostraciones, procedimientos específicos, luego olvidados si no se utilizan con efectividad. No quiere decir que la información matemática no sea útil, por el contrario, obtiene gran valor en la medida que se necesita para resolver problemas.

Se puede decir que con la construcción y el conocimiento se logra realizar y trabajar la geometría a través de experiencias del estudiante, y basados en este presente, se establece el fenómeno de las inundaciones por desbordamientos de ríos como un factor importante ya que muchos estudiantes padecen este fenómeno. En nuestro contexto los estudiantes deben aprender ciertas expresiones matemáticas que les permitan hallar áreas, volúmenes, perímetros; pero pocas veces se les lleva a un trabajo de campo donde evidencien el uso de dichas expresiones.

De acuerdo con Londoño y Muñoz (2011) la modelación matemática como un descriptor de la relación existente entre el mundo real y las matemáticas, aporta la fundamentación teórica necesaria para aplicarla a contextos reales ya que para estas autoras, “incorporar y reflexionar sobre los procesos de modelación, implica una concepción de la enseñanza y aprendizaje cuyo centro no son los contenidos temáticos, sino las situaciones que potencian la construcción de conceptos en contextos particulares” (p.43). Luego a partir de la modelación matemática se alcanza establecer razonamientos que se pueden incorporar a fenómenos reales, en caso concreto el de las inundaciones. Por lo tanto se pretende abordar elementos de medida de área y volumen, puesto que en un proceso de inundación, se describen estos elementos con los cuales se puede construir conocimiento geométrico, a partir de zonas afectadas y donde se puede utilizar el proceso de modelación matemática para hacer cálculos sobre la relación de la modelación y el fenómeno que viven los estudiantes y evidenciar la construcción de aprendizajes que logran a través de estas situaciones referente a la realidad del entorno en el que están inmersos.

1.3. Planteamiento del problema

En la actualidad se ha venido incrementando el fenómeno de las inundaciones en el país, debido a múltiples factores ambientales. En particular, el Bajo Cauca [subregión del departamento de Antioquia], viene enfrentando inundaciones que afectan abundantes sectores de la población. Muchos de los estudiantes conviven con este flagelo y se ven destinados a desocupar sus viviendas y buscar albergues o familiares en épocas de invierno. Este ambiente en el que está involucrado el estudiante, podría motivar el aprendizaje de las matemáticas y en particular la geometría, puesto que es un entorno conocido y que ha sido parte inherente en el ámbito social y cultural de los estudiantes, del cual se pueden establecer elementos de las matemáticas emergentes en el contexto. En este sentido, Wagner (citado por Planas, 2002) afirma que las trayectorias individuales de los estudiantes son también el producto de las prácticas sociales y de los significados culturales desde donde ellos aprenden a interactuar con su entorno. Para Jaramillo (2011), cultura es “aquella convivencia entre los miembros de un grupo, que resulta de la comunión de sus conocimientos” (p.23). Bajo esta idea considerar el aprendizaje de las matemáticas en el contexto social y cultural del estudiante, amplía las posibilidades para que aprenda de una manera significativa los conceptos. Así mismo, Van Reewijk (citado por Giménez et ál., 2007) consideran que es muy importante contextualizar las situaciones en las matemáticas porque entre otras:

1. Ayuda a comprender que éstas son útiles y necesarias.
2. Contribuye a entender su utilidad en la vida cotidiana permitiendo el desarrollo de una actitud crítica y flexible.
3. Aumenta el conocimiento histórico de las matemáticas.

4. Despierta la creatividad y el sentido común.

De acuerdo con Giménez et ál. (2007), es fundamental orientar las matemáticas al contexto en el que está inmerso el sujeto, pues de esta forma, el aprendizaje tendría un sentido diferente. Bajo esta perspectiva el contexto juega un papel importante para la comprensión de las matemáticas desde el uso de diferentes estrategias en el tratamiento de situaciones cotidianas.

Las inundaciones que afectan a algunas Instituciones Educativas en este caso, por el desbordamiento del río Cauca han ocasionado en los estudiantes la modificación de las jornadas académicas y el desplazamiento a otras sedes o instituciones con el fin de no desescolarizar y de continuar el trabajo normal en las aulas. En cuanto a las matemáticas, las clases continúan de la forma habitual, con la aplicación de conceptos, teoremas y fórmulas, pero con problemas aislados y descontextualizados. Según Arrieta (2003) “La matemática cobra vida, tiene sentido, exactamente en contextos sociales concretos” (p. 3). Es decir, la matemática no solo podría verse de una única manera, pues es dependiente de diversas situaciones en condiciones sociales particulares.

En la escuela no se evidencia la relación de las matemáticas con los pensamientos de los estudiantes que están más bien enfocados en la problemática social que están viviendo. Por esto es primordial que se aborden nociones matemáticas en situaciones que promuevan la utilización del contexto escolar, familiar, cultural o social y que formen ciudadanos reflexivos, críticos, autónomos, participes de su propia formación, y no sobre concepciones donde lo importante sean los contenidos temáticos. Donde los procesos de modelización aportan elementos importantes en

la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas facilitando así la construcción de conocimientos en contextos auténticos.

1.4. Formulación del problema

Teniendo en cuenta las investigaciones desde la geometría como las de Guillen (2010); Godino, Batanero y Roa (2002), la experiencia como docente y el contexto escolar y social, se pretendió desarrollar una investigación que permita asociar las matemáticas al contexto a través de la modelación con la cual los estudiantes reflexionan en torno a elementos geométricos como el área superficial que emerge del fenómeno y las posibilidades de contribuir al mejoramiento de su entorno. Investigaciones producidas como las de Biembengut y Hein (2004), Villa-Ochoa (2007), Londoño y Muñoz, (2011), han mostrado que la modelación es una estrategia propicia para aproximarse a diferentes propuestas de situaciones posibles de investigar en el aula. Por esto, es importante que a partir de un fenómeno natural que afecta directamente a una población, como son las inundaciones, el docente pueda diseñar situaciones que involucren la variación y el cambio enmarcados en la articulación del pensamiento métrico y el variacional, para ser orientadas desde la modelación matemática.

Es importante para este proyecto de investigación observar la forma en la que los estudiantes reconocen aspectos matemáticos como áreas y volúmenes que emergen en un fenómeno de inundación, desde una mirada social a partir de la identificación y construcción de procesos inherentes a estos conceptos, así como la forma de hacer asociaciones, simetrías,

diferencias, cálculo de cantidades que intervienen. Basados en lo anterior se formula la siguiente pregunta:

¿De qué manera los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico?

Considerando la pregunta formulada se pretende alcanzar el siguiente objetivo y eje de estudio.

1.5. Objetivo

Analizar cómo los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico.

1.6. Objeto de estudio

Construcción de modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta los anteriores antecedentes, se considera un marco teórico que permita referenciar y configurar algunas ideas y reflexiones en torno a las siguientes temáticas relacionadas con el objeto de investigación tales como: modelo, modelación matemática, contexto auténtico, área, volumen y sujetos.

En este apartado, se detallan los diferentes elementos teóricos sobre los cuales apunta la presente investigación. El marco teórico que respalda este trabajo de investigación está fundamentado en cuatro aspectos básicos:

- ✓ El aspecto histórico relacionado con el concepto de la geometría en la resolución de diversos problemas como el de las inundaciones. La geometría aplicada en contextos auténticos.
- ✓ Modelación matemática a través de la historia.
- ✓ Modelación matemática: una teoría para el aprendizaje en el aula de clase.
- ✓ Medida de área y volumen: una aproximación desde los fenómenos naturales.

2.1. Aspecto histórico, la geometría en la resolución de problemas

De acuerdo con Caraça (1984) & Torres (2007), desde la antigüedad el ser humano se ha visto en la necesidad de contar e inventó los números; donde realizó cálculos, y concretó las operaciones; formó relaciones, y estableció las propiedades numéricamente, por este medio, el uso de la lógica y de la propia naturaleza que hacía que buscaran soluciones a las dificultades que ésta manifestaba, consiguió las herramientas adecuadas para resolver situaciones problemas que se presentaban a diario como por ejemplo las inundaciones de las tierras donde cultivaban, así fue circulando conceptos de formas, figuras, cuerpos, líneas, los que dieron origen a la parte de la matemática que se conoce con el nombre de geometría,

El origen de la geometría y su historia son muy similares a los de la Aritmética, los primeros hombres implementaron la geometría en la visión de formas geométricas a partir de la naturaleza. Según Alexandrov (1976) en esta medida, la relación de los individuos con el entorno, contribuye a una interpretación más significativa en la construcción del conocimiento. El sabio griego Eudemo de Rodas, orientó a los egipcios el descubrimiento de la geometría, ya que, según él, necesitaban medir constantemente sus tierras debido a que las inundaciones del Nilo borraban continuamente sus fronteras, en este sentido Godino y Ruíz (2002), afirma que el término geometría significa medida de tierras. Grandes pensadores como Heródoto, Estrabón y Diodoro, afirmaban que los egipcios fueron los que desarrollaron la geometría y que ellos fueron quienes le instruyeron a los griegos.

Los egipcios a razón de las inundaciones anuales, se vieron obligados, desde muy temprano a resolver problemas geométricos, a medir constantemente o habitualmente los límites de los terrenos de sus cultivos, ellos calculaban correctamente las superficies de cuadriláteros, triángulos y tenían una buena aproximación al área del círculo. Como lo menciona Torres (2007), el inicio de la Geometría Métrica se debe a los egipcios, los cuales empleaban la relación con las figuras geométricas para determinar las extensiones de sus propiedades las cuales se veían afectadas constantemente por las inundaciones del Río Nilo. Desde hace ya mucho tiempo el hombre se ha visto con la inclemente necesidad de constituir, sobre superficies, los planos tridimensionales que localizan en el espacio; como Torres lo comenta, la primera expresión del esquema técnico es del año 2450 A.C, en un dibujo de construcción que aparece esculpido en la estatua del rey sumerio Gudea, nombrada El arquitecto, y que se encuentra en el museo del Louvre de París. En esta figura, de forma representativa, se simbolizan los planos de una edificación, estos son muestra de los primeros trazos que lograron plasmar los egipcios.

La información disponible sobre la civilización desarrollada a lo extenso del Nilo es lo adecuadamente íntegra como para ser considerada la matriz del progreso que consiguió un cierto adelanto matemático. Para Torres (2007), el Antiguo Egipto es la mayor civilización tecnológica de la antigüedad. Los conocimientos científicos de los egipcios, así como sus construcciones que siguen sorprendiendo a la humanidad, además, la agricultura egipcia presentaba un gran perfeccionamiento haciendo uso de los espacios húmedos y secos del año. El Nilo se rebosaba durante el tiempo de lluvia, suministrando una productiva tierra que, con complicados sistemas de irrigación fertilizaban para el desarrollo de las siembras. (Torres ,2007).

Los egipcios lograron, con la implementación de la geometría la percepción más a fondo de las formas de la naturaleza, el volumen de líquido que pueden contener unos recipientes, la necesidad de restaurar los límites entre propiedades cercanas tras las inundaciones del Nilo, y otras experiencias y necesidades lograron que nuestros antepasados reunieran una numerosa información de conocimientos geométricos.

Por otro lado, Moreno-Armella (1996) afirma que los griegos fueron quienes incorporaron las demostraciones basadas en razonamientos. Ellos iniciaron esta tendencia, al imaginar la posibilidad de manifestar diferentes iniciaciones geométricas a partir de verdades simples y evidentes. La verdadera demostración y culminación de la geometría en la historia como una de las primeras ciencias se obtuvo en Grecia en sólo 300 años. Para González Urbaneja (2004) en su libro “Los orígenes de la geometría analítica” (1 edición), la geometría se encontraba avanzada en aquellos tiempos, hasta para los griegos la preocupación por esta ciencia era de conocimiento y práctica para medir, construir, contar, entre otras cosas. Los griegos se preocuparon por reflexionar sobre la naturaleza de los números, sobre la naturaleza de los objetos matemáticos; estos también convirtieron la geometría en una ciencia racional y constituida, con propiedades que se demuestran; ellos fueron parte importante en la evolución de la geometría ya que fueron los que la llevaron a la demostración y a la implementación de nuevos términos y de allí partió la creación de los teoremas, como el de Pitágoras.

En la actualidad se utiliza la geometría por ejemplo para realizar esquemas complejos del flujo de los caudales desbordados y para actualizar programas que calculen el perfil longitudinal del nivel del agua y del nivel de fuerza que ejerza el flujo de los caudales, como lo describen

Solís, Beaulieu y Chacón (1994), el espacio del cauce de los ríos se calcula mediante diferentes programas y modelos que ayuden a determinar el perfil del río usando la geometría mejorada del cauce, con dichos programas se podrá identificar y probar las diferentes geometrías para determinar cuáles son las extensiones o dimensiones óptimas para prevenir las inundaciones al mejor costo. Programas como estos han determinado que la geometría es una herramienta fundamental en el cálculo de un desbordamiento y de la posible prevención de esta.

2.2. La modelación matemática a través de la historia

La Modelación matemática consiste desde los tiempos remotos, y en el campo de la investigación en Educación Matemática, considerándose, entre otras cosas como la construcción de una modelación exacta y alternativa que permite, en diferentes condiciones, una relación con el entorno.

Según Israel (1996) la forma de representar el mundo con modelos matemáticos, se divide históricamente en cuatro períodos de suma importancia para la modelación; el primer período basa sus argumentos con relación en la antigua Grecia donde comenzaban los tiempos pitagóricos y pensaba que la naturaleza se describía empleando las relaciones entre números, es decir los números eran la base y una excelente manera de representar al universo. En esos tiempos las matemáticas tenían un enfoque hacia la religión y estaba sujeta a los mitos. Un segundo período comprendía la revolución científica de Galileo en la cual se dio una perspectiva diferente de la relación de las matemáticas y la representación de los fenómenos naturales. Este enfoque razona de modo que las leyes son las que presiden al mundo y su lenguaje son las

matemáticas, de allí que el trabajo del investigador es descubrir las leyes ocultas que la disciplinan. Este período lo fortalece el trabajo de Newton dando comienzo al programa mecanicista, pensada como una forma técnico-experimental. En el tercer período, después de que por varios años la teoría mecanicista de Newton estuvo presente, se consideró que todos los fenómenos de la naturaleza trascienden debido a los movimientos de los cuerpos y se consideró a la ciencia como una parte que brinda un perfil unitario e imparcial del universo. Se considera que cada teoría científica debe ser análoga y coherente entre sí. En este período la matemática pasa de ser un lenguaje separado de la naturaleza, a formar parte de esta; y por último está el cuarto período que comprende los comienzos del siglo XX, en el cual, se habla de modelos matemáticos o de matemáticas aplicadas, en plural, lo que niega el enfoque firme de la ciencia, es decir, en este período se deja atrás la teoría mecanicista y se comienza a describir la naturaleza a partir de las relaciones de las estructuras matemáticas inferiores a esta.

Una exploración sobre el origen y conocimiento de la Modelación matemática se da a conocer hasta el siglo XX en el cual se resumen dos partes de la modelación, la técnica y la teórica. La técnica según Newton, se respalda en la igualdad y los espacios; por ello es razonada como una manera técnico-experimental. En el argumento de la teoría, como James C. Maxwell dice, en esa época, estaba situada en fenómenos automáticos perceptibles y electromagnéticos no perceptibles.

Es necesario asumir, en cualquiera de los temas, que la investigación utilizada y solicitada en el modelo matemático, está basada en las necesidades del sujeto, así mismo, la dificultad y las características del proceso u objeto a modelar, lo cual obtiene sentido relacionado

y metodológico para cualquiera de los estudios o investigaciones que se ejecuten, como lo afirma Boullosa, Lague y Hernández (2009) quienes consideran que son necesarios los aspectos cuantitativos, cualitativos o los dos, es decir, dependiendo como los acontecimientos lo requieran, lo cual viabiliza la organización y clasificación por la complejidad del proceso u objeto para el modelado.

Por todo lo planteado, la generalización de la modelación como método, en la historia de la ciencia, se ha establecido por varios acontecimientos según Boullosa et ál. (2009) estos acontecimientos se obtienen por la caracterización a partir de los adelantos formados en la investigación experimental en el micromundo, del masivo progreso de la matemática y su uso por distintas ciencias, también a partir de los requerimientos en la transformación de métodos cibernéticos complicados, a través del avance obtenido por las teorías generales de los métodos y las sintomatologías, y otro aspecto importante de la caracterización es el adelanto actual de las diferentes ramas de las ciencias y en particular, en las últimas décadas, el apogeo de las ciencias sociales.

Ha sido concluyente en esto, que la modelación matemática, como método para la obtención del modelo, requiere de un transcurso con sus rutas, representaciones, signos y vías que permita abordar, así como explicar, los fenómenos de la naturaleza, la sociedad y el pensamiento. Hace falta también puntualizar, especificar y enunciar la propiedad de las relaciones que transportan al conocimiento con su definición lógica, su principio teórico, el conocimiento o ambas en función de la creación o clasificación de algún elemento que simbolice o suplante al objeto de estudio.

Para concluir, se puede decir que en la actualidad el beneficio de la modelación matemática ya no es solo para los que emplean las matemáticas aplicadas sino que se ha convertido en un beneficio para la enseñanza-aprendizaje, con otras palabras la modelación matemática es fundamental para la educación misma de las matemáticas.

2.3. La modelación matemática como estrategia de aprendizaje en el aula

En el marco de la Educación Matemática se le atribuye a la modelación, un sentido didáctico a la relación entre las matemáticas y el contexto. Esta relación puede ser traducida y representada mediante modelos matemáticos. Para Biembengut y Hein (2006) “Un modelo matemático de un fenómeno es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, el fenómeno en cuestión” (p. 2). El modelo funciona no sólo para conseguir un procedimiento, sino también para soportar otras aplicaciones o teorías. Estos autores también expresan “En la práctica, ese conjunto de símbolos y relaciones puede estar vinculado a cualquier rama de las matemáticas, en particular, a los instrumentos fundamentales de las aplicaciones matemáticas” (p. 2). En este sentido, un modelo, se considera una construcción entre varios símbolos y sus enlaces dentro de un escenario social que a grosso modo pareciera no ser matemático. Estos aspectos relevantes para la idea de modelo implican que, al usar la matemática en un contexto auténtico, se vea comprometido en este un modelo para hacer explícito mediante símbolos las relaciones implícitas en el contexto. Como también, para que un estudiante experimente a través de la producción de modelos, es decir, que describa algún fenómeno de interés, y pueda reflexionar sobre las relaciones en él existentes, es una precondición entre el sujeto y el objeto que será conocido donde éste pueda observar y explorar

el entorno o fenómeno modelado y su matemática presente, como elementos aislados pero al mismo tiempo interconectados entre sí a través de un proceso de modelación, con lo cual los estudiantes construyen modelos que reflejan una parte de la realidad del entorno, dando significado al aprendizaje, puesto que el estudiante observa y se relaciona directamente con el fenómeno natural.

Biembengut y Hein (2007) afirman que las matemáticas y realidad son dos conjuntos disjuntos y la modelación matemática es un medio de conjugarlos. La siguiente ilustración representa el proceso.

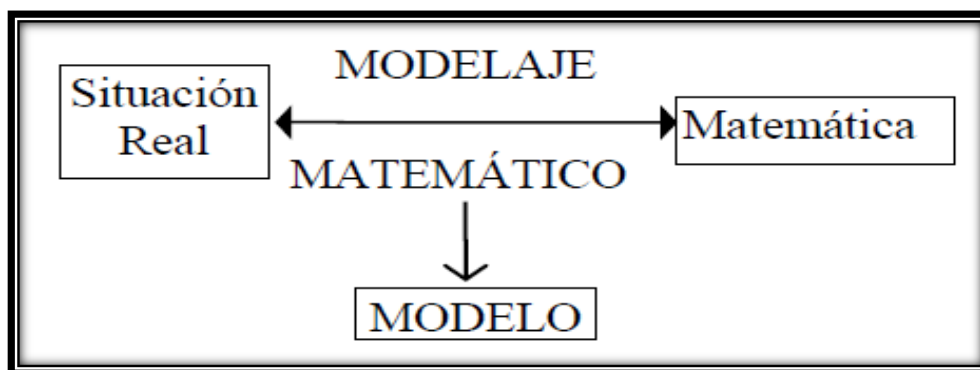


Ilustración 1: Esquema relación de las matemáticas con el contexto (Biembengut y Hein, 2007).

La ilustración anterior representa la interacción entre una situación de contexto auténtico y las matemáticas que pueden emerger, donde la modelación matemática se convierte en el proceso que relaciona dichos elementos a través de la construcción de un modelo que da cuenta de la situación.

De acuerdo con Londoño y Muñoz (2011) “un modelo constituye un conjunto de elementos relacionados, que cumplen una función de representar y describir mediante relaciones

matemáticas algún aspecto de una situación o fenómeno que se está estudiando” (p. 54). Por lo tanto, se asume que el modelo surge de la actividad matemática, en contextos dotados de significados para los estudiantes.

La modelación para Villa-Ochoa (2007) tiene que ver con la acción efectuada en la Educación Matemática, la cual procede de la acción científica del profesional que se dedica a las matemáticas aplicadas. El autor plantea: “más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un micromundo” (p.70) (contexto de relaciones y significados). Por lo tanto, la modelación ofrece las bases necesarias para que el estudiante desarrolle conocimientos y lo prepara para ir creando una condición distinta de cuestionarse y abordar los problemas de un contexto auténtico.

Méndez, Moreno y Ripa (2006) definen un contexto “como todos aquellos factores externos al alumno que influyen en su proceso de aprendizaje, con los cuales interactúa a lo largo del mismo” (p. 43). Es decir, todos los agentes que rodean al estudiante en su vida cotidiana, que intervienen en su actividad individual de aprendizaje, todo el entorno del que hace parte el estudiante es el que conforma su contexto.

Desde la mirada de Gil, Fernández y Rubio (2000) se entiende como contexto auténtico “aquel que reside en experiencias y prácticas reales en el entorno del mundo real por parte de los participantes” (p. 86). Significa que un contexto auténtico es todo ambiente existente que ocupa las prácticas y costumbres de los individuos. Al mismo tiempo se configura como el punto de inicio para el proceso de modelación matemática en el aula, el cual se considera como un

conjunto de ambientes relacionados a los contextos cotidianos, habituales y culturales de los estudiantes y de su entorno, los cuales se pueden categorizar como situaciones reales. Por esto, habitar al estudiante en contextos auténticos es un factor importante para trabajar las matemáticas que surgen de él por medio de la modelación matemática.

La modelación a partir de un contexto auténtico posibilita la integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento, el interés en el uso de éstas y el progreso en la significación de los conceptos. Para Biembengut y Hein (2007), se convierte en el incentivo para la creatividad en la formulación y resolución de problemas, la orientación a la investigación y la capacidad de uso de las máquinas electrónicas, el actuar en un grupo y presentar informes de investigación. Desde este punto de vista, la modelación aporta, además de lo expresado por Biembengut y Hein, elementos que permiten a los estudiantes formular y proponer soluciones que contribuyan a realizar nuevas lecturas del entorno y establecerse como ciudadanos críticos.

Por otro lado, Biembengut y Hein (2007) exponen que en el aprendizaje basado en la modelación matemática se hace necesaria una serie de actividades o etapas que consisten en delimitar y formular el problema, puesto que en un contexto auténtico se presenta una diversidad de variables, las cuales no se pueden abordar en su totalidad. Los autores Biembengut y Hein también consideran que en un proceso de modelación, es importante tener en cuenta el desarrollo del contenido, el concepto, la definición, las propiedades, etc., en conexión con el tema que ha generado el proceso, puesto que al abordar el contexto desde la modelación, es necesario retomar elementos propios de las matemáticas, que facilitan la comprensión del fenómeno. En este sentido, se pretende la interacción entre la teoría y la práctica: los estudiantes

tienen la posibilidad de realizar trabajo de campo, hacer mediciones y representaciones en diferentes registros y fundamentarse en elementos teóricos y conceptos matemáticos para construir modelos que les permita comprender la situación abordada.

Un conocimiento teórico relacionado con el proceso de modelación y del proceso de aprendizaje coherente con él, se ha venido desarrollando en los últimos 20 años. Esto se ha dado debido a la analogía que se puede determinar entre el progreso curricular, las experiencias en educación y las reflexiones teóricas. Blum (1993), afirma que en la actualidad se dispone de teorías, que ubican la modelación como un componente transcendental de la educación habitual de la matemática, también para examinar, predecir y entender mejor los problemas de enseñanza de los estudiantes concernientes a la modelización.

Los propósitos que se relacionan con la entrada de la modelación en la educación son favorables para la enseñanza de las matemáticas, no obstante, se pueden presentar problemas; para Trigueros (2009) estos problemas pueden obstaculizar la educación negativamente, si los educadores que la emplean no tienen una debida formación; una investigación como solución de problemas ha expresado ya las grandes dificultades que los estudiantes presentan al pretender convertir “la expresión matemática, los enunciados de los problemas verbales” (p. 76). Para esta autora el proceso de la modelación de contextos “reales” es más complicado aún, de forma que en esta situación, los estudiantes deben interpretar el contexto, establecer las variables que se creen significativas para representar de forma eficaz el problema de utilidad.

Desde otra mirada, Kaiser y Sriraman (2006) consideran que de acuerdo con el punto de vista en la cual sitúen la educación y según los objetivos de la actividad, el uso de la modelación se expondrá de distintas formas. Hasta el día de hoy, hay investigaciones con diversos puntos de vista. Existen múltiples estudios con diversas perspectivas, tanto del uso de la modelación en las investigaciones como en la aplicación en el aula de clase. Trigueros (2009) comparte el énfasis en el uso de la modelación en la Educación Matemática. En su investigación señala que: “cuando se aprenden directamente los conceptos de las matemáticas no es fácil aplicarlos a la solución de problemas” (p. 77). Este proceso, según la autora, emplea bastante tiempo, y es preciso ampliar algunas estrategias para que los estudiantes transporten sus nociones a esos procesos. A partir de una visión que se orienta en la resolución de problemas reales con sentido para los estudiantes. Con esto se busca que ellos generen estrategias para percibir el mundo en el cual viven y signifiquen los elementos representados desde los modelos matemáticos.

Las modelaciones contextuales las cuales se desenvuelven en la solución de problemas reales, tienen un objetivo central que es la relación del espacio y el problema con el sujeto que lo soluciona y con el argumento del cual el modelo se compone, para entender los fenómenos de la naturaleza misma y el entorno en el que surge la necesidad de modelación matemática.

Un modelo matemático se emplea para pronunciar relaciones, proposiciones sustantivas de hechos, variables, parámetros, formas y las relaciones entre variables y entidades u operaciones, para enseñar diferentes métodos ante escenarios difíciles de observar en la realidad. Acorde a lo indicado inicialmente, la modelación matemática y las aplicaciones se han afianzado como una estrategia de investigación, en particular de la Educación Matemática. La modelación

matemática viabiliza espacios adecuados y propios de dinamismo científico dentro del aula educativa, como lo plantea Villa-Ochoa y Ruiz (2009) quienes consideran al proceso de modelación como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias.

Para mostrarse de acuerdo al vínculo entre determinados procesos principales en la modelación matemática y la Educación Matemática se hace referencia a Biembengut y Hein (2007) quienes piensan que la modelación matemática es un transcurso que se involucra en la elaboración de un modelo; reconociendo diversas manifestaciones que demuestran el uso de modelos matemáticos en la educación, para poner en claro su uso como habilidad de enseñanza y el aprendizaje de la geometría en una preparación para estudiar y conformar profesionales que puedan solucionar problemas y analizar críticamente los resultados, que buscan alternativas, referencias pedagógicas y encuentra una modelación matemática, como lo destaca Bassanezi (2002) que afirma que dicho transcurso o proceso tiene una representación dinámica y que no solo se utiliza para la elaboración del modelo sino para su certificación, es decir, implica que la modelación sea una forma de abstracción y generalización con el fin de predecir las tendencias.

Para el docente el modelo es básicamente la habilidad de cambiar las circunstancias de la realidad en escenarios de problemas matemáticos cuya solución debe ser interpretada en el lenguaje habitual, estos autores, como los mencionados (Biembengut, Hein & Bassanezi), han presentado una diversidad de alternativas frente a la modelación matemática, por lo cual consideran un apoyo en representaciones más amplias de la Educación Matemática. De este

mismo modo se pretende conocer y mostrar, de manera significativa, ciertas cualidades de forjar la modelación matemática y otros términos asociadas a ellas.

La modelación tiene un papel que le concede importancia al desarrollo de capacidades en los estudiantes dentro del transcurso de construcción de modelos, su interpretación, razonamiento y ratificación con los respectivos escenarios reales, como lo sustentan Blum y Borromeo (2009). Cuando se modelan entornos reales u otras que se enmarcan en el desarrollo cognoscitivo de la adquisición de la percepción de función, es decir, al conocimiento de la situación, que ocasiona que el estudiante, al acercarse a fenómenos reales, examine y represente los elementos matemáticos como la importancia de objetos tales como los simbólicos, verbales, gráficos, algebraicos y numéricos. En el proceso de simulación y de modelación se origina la distinción de variables y la relación entre las variables, los cuales a su vez promueve la exploración de otras representaciones. Monk (1992) reflexionó que los modelos físicos suministran a los estudiantes una perspectiva del proceso de las circunstancias funcionales, la cual logra extender en éstos los aspectos que tienen acerca de las funciones. Por lo tanto, la modelación es una elección que permite a los docentes transmitir de una forma dinámica, eficaz y activa el conocimiento desde espacios físicos, palpables por los estudiantes y geométricos hasta la organización mental en el transcurso de la enseñanza. La modelación matemática, la matemática en contexto y la incorporación de la nueva tecnología pueden vigorizar los procesos de enseñanza-aprendizaje. La modelación de fenómenos físicos a través del uso de la computadora es necesaria para la reproducción de procesos y formación de pensamientos desde las matemáticas. Como lo afirma Hitt (1993) los procesos matemáticos son complejos en representación de encerrar el problema que se esté relacionando dentro de un contexto. Sin

embargo, a lo largo de mucho tiempo una corriente de investigadores promueve la usanza de las matemáticas planteadas desde contextos “reales” a la hora de comprender los conceptos.

Muchos investigadores defienden la idea de que cada estudiante puede elegir un tema o asunto de cualquier área de su interés, para realizar investigaciones sobre él, formular preguntas y con la orientación del profesor, elaborar diseños de un modelo matemático. De esta manera, los estudiantes se convierten en responsables de su aprendizaje y el docente se convierte en un asesor. El aprendizaje se hace más rico, considerando que el estudiante no sólo aprende las matemáticas introducidas en el contenido de alguna otra disciplina, sino que también tiene su sentido crítico y creativo. Como lo plantea Biembengut (2004) en la enseñanza formal, hay factores tales como los horarios de clase, el número de alumnos por clase y están disponibles para el profesor para el seguimiento de trabajos de los estudiantes. Debido a estas variables han adaptado el proceso de elaboración de modelos matemáticos a la metodología de enseñanza y aprendizaje.

La modelación matemática como un método para el aprendizaje de las matemáticas tiene como objetivo proporcionar al estudiante una mejor significación de los conceptos matemáticos, leer, interpretar, formular y resolver problemas específicos de cada situación. Elegir la modelación, como proceso para un aprendizaje desde lo práctico, accederá a referirse a los escenarios del entorno con modelos matemáticos que representan elementos parciales de una realidad que tiene sentido para el estudiante. Por lo tanto, el perfeccionamiento de la comprensión matemática por razón del desarrollo de dificultades reales, no se conseguiría transportando contextos habituales de manera figurada o representada, sino estableciendo

situaciones de resolución de contrariedades auténticas de utilidad para el estudiante. (Kaiser & Schwarz, 2010).

En este sentido, para Burak (2005) la modelación matemática cumple con las expectativas del estudiante puesto que esta da sentido a lo que estudia, para satisfacer sus necesidades, sus intereses y la realización o logros de sus metas. Con esto, en el presente trabajo de investigación, se pretende en los estudiantes que realicen representaciones de forma significativa a través de la modelación matemática de acuerdo a sus contextos, en este caso el de las inundaciones causadas por desbordamiento de ríos. De esta manera, la modelación ayuda al aprendizaje de las matemáticas y a entender los contextos en los cuales están habitualmente los sujetos, también a originar el avance de ciertas capacidades, aptitudes, cualidades dirigidas hacia las matemáticas, las cuales les contribuirá a formarse en una perspectiva diferente de las mismas.

2.4. Medida de área y volumen: una aproximación desde los fenómenos naturales

Alexandrov (1976), considera que los primeros hombres llegaron a las formas geométricas, a través de las observaciones que hacían a objetos de la naturaleza. El observar la luna, la superficie lisa de un lago, la rectitud de un rayo de luz. Esa relación con el objeto, observando y luego dando formas que le permitía suplir sus necesidades, es así como empieza a relacionar objetos con las formas, llegando a la noción de curva por medio de la relación de objetos con esas características como por ejemplo una olla o un vaso; o en el caso de una cuerda tensionada, una cerca alambrada, da la noción de una línea recta.

Para Olmo, Moreno, y Gil (1993), el hombre primitivo tuvo la idea de delimitar su territorio, utilizando elementos como piedras, troncos, etc. Para establecer sus dominios y dar a entender que toda esa extensión le correspondía. Con esto, es probable que haya desarrollado el concepto de superficie, reconociendo que ésta se presenta como un atributo de los objetos.

Con relación a la superficie o área, algunos autores hacen distinciones para ambos términos, las primeras, para distinguir su atributo y la segunda para su medida. En este sentido no se considera esta distinción, por lo tanto la concepción de área se asume como un atributo de un objeto que puede medirse, por ejemplo, a través de las medidas de longitud, en este caso estandarizadas en el sistema internacional de unidades como son el metro, sus múltiplos en casos de medidas muy grandes y sus submúltiplos, cuando las medidas sean pequeñas, y como unidad de medida que se puede comparar con otras superficies.

Una de las aproximaciones a la noción de área tiene que ver con la terminología utilizada para nombrarla. Por ejemplo se utilizan términos como: cara, terreno, plano, parcela, medida, suelo, extensión, etc. Otro aspecto importante sobre la aproximación del concepto de área tiene que ver con la multiplicidad de situaciones en las que ésta se presenta, por decir: un campo de fútbol, una pared, vallas publicitarias, pantallas de televisión, en algunas secciones o partes de un sólido, entre otros. Donde se puede decir que en una primera instancia, el área representa la medida de la extensión de un cuerpo, un hueco o la marca o huella dejada.

Desde el punto de vista de las matemáticas, según Corberán (1996) el área se puede manifestar como una cantidad de plano ocupado por la superficie, a través de la comparación de

áreas de superficies, mediante el uso de procedimientos de naturaleza geométrica; también como magnitud autónoma, es decir, área descompuesta de la forma de la superficie y del número que la mide, a través de comparación de áreas de superficies donde se pueda observar que superficies de forma diferente pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos geométricos y numéricos y el área entendida como número de unidades que recubren la superficie, donde se utiliza la unidad de medida en el cálculo de áreas.

Por otro lado, Olmo et ál. (1993) Consideran que para trabajar con áreas hay que tener en cuenta que pueden venir expresadas con fórmulas o de forma de expresarse por relaciones entre longitudes, es decir, una longitud en función de otra, esto es, distinguiendo el largo y el ancho en objetos de dos dimensiones y hacer las generalizaciones a figuras bidimensionales donde hay imposibilidad de distinguir estos conceptos, como en el caso de la esfera.

Freudenthal (citado por Olmo et ál.,1993) considera tres formas de aproximarse al concepto de área: una primera en repartos equitativos, desde nuestro punto de vista, lo asumimos por medida, donde se mide la cantidad a repartir, dividiendo el resultado de esa medida entre un número de partes que se desee y sucesivamente medir cada una de las partes. Una segunda forma es por comparación y reproducción, donde se toma la medida por inclusión, es decir, una superficie contenida en otra y la tercera por medida directa, donde la superficie está asociada a un proceso de medida, bien sea para hacer comparaciones, repartos o hacer valoraciones, en este caso consiste en rellenar el interior de la superficie a medir con unidades unas junto de otras y rellenando con cantidades más pequeñas cuando sea necesario.

Aproximación desde la cognición

Olmo et ál. (1993) identifican dos operaciones fundamentales de las que depende el proceso de medida, por un lado la *conservación* que tiene que ver con los objetos cuando se realizan sobre ellos transformaciones, como por ejemplo, un trapecio convertido en un rectángulo donde su área no cambia. Por otro lado, la *transitividad*, donde se usa un objeto intermediario para hacer una traslación de una medida de un objeto a otro lugar y construir así un nuevo objeto, por ejemplo al querer hacer dos rectángulos de la misma altura, se puede tomar un objeto que representa la altura del primero y ubicarlo en otro lugar, como base para la construcción del segundo rectángulo.

En el campo escolar es importante el trabajo con medidas, Olmo et ál. (1993) considera que: “aporta situaciones reales o para ejercitar el cálculo a la vez que lo conecta con la vida real y prepara a los individuos para enfrentarse con éxito a determinadas profesiones y a la vida cotidiana” (p. 64). Por lo tanto, al obtener los estudiantes datos numéricos inherentes a contextos cotidianos a partir de un trabajo con medidas, permite no solo obtener resultados cuantificados o numéricos, sino que estos tienen un significado “real” para los estudiantes.

Por otro lado, Olmo et ál. (1993) hacen una distinción entre volumen y capacidad, manifiestan que el volumen se suele entender como espacio ocupado y la capacidad como el espacio vacío que tiene la posibilidad de ser ocupado. Además enfatizan en que la capacidad depende tanto del objeto como de la sustancia a que se refiere dicha cualidad, por ejemplo algunos tienen la capacidad para almacenar líquidos y otros para almacenar sólidos, también

consideran que la capacidad de un cuerpo depende de su inclinación. En este sentido, se entiende la capacidad como espacio vacío y el volumen como espacio lleno.

Para Vergnaud (1981), el volumen se puede establecer desde dos formas, una como magnitud unidimensional, que puede ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., en función de él y de otra forma como una magnitud tridimensional, que permite medirla en función de otra magnitud, es decir, la longitud. Esto implica que ambos elementos, (área superficial y volumen) pueden relacionarse mutuamente en situaciones cotidianas, de tal forma que permita procesos de modelación, puesto que desde una situación del entorno el cual los estudiantes están familiarizados, estos elementos matemáticos que emergen a partir de las situaciones de dependencia establecidas entre la altura del nivel del agua y el área superficial o el volumen de agua, pueden construirse modelos matemáticos.

CAPÍTULO 3

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se abordan los distintos momentos en que se desarrolla el trabajo de campo, en el que se realizan y se hacen las descripciones respectivas de las técnicas de metodologías utilizadas, así como los procesos metodológicos donde se enuncia el paradigma de la investigación, y el estudio de caso aplicativo a este proceso.

Esta investigación está enmarcada en las relaciones entre el estudiante, el trabajo desde la modelación matemática, el contexto y el ambiente participativo, teniendo en cuenta, el entorno cotidiano, la comunicación y las experiencias de cada participante, como también las del grupo, aspectos propios de un estudio basado en la investigación cualitativa. El enfoque cualitativo asume una visión compuesta de experiencias autónomas, de carácter subjetivo y flexible, implicadas en un proceso de construcción dentro y fuera del aula, en este caso a través de un proceso de modelación. Se considera la pregunta de esta investigación: *¿De qué manera los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico?* Se encuentra encuadrada en las consideraciones teóricas del paradigma cualitativo, mencionado anteriormente.

Siendo coherente con lo anterior se analizan los diferentes momentos con los estudiantes bajo la premisa de ser auténticos e irremplazables. Donde el desarrollo de las experiencias será dependiente del contexto y las herramientas propias de las matemáticas disponibles, en el cual se enfocará el trabajo de campo a facilitar significados con argumentos matemáticos a las discusiones que se lleven a cabo, donde el estudiante sea el protagonista en el desarrollo de las actividades.

El estudio se desarrolló con un grupo de estudiantes de grado décimo de la Institución Educativa Divino Niño, de los cuales se observó principalmente a cuatro estudiantes, con los que se generó un compartir de experiencias, diálogos y conversaciones que formaron un clima de confianza, siendo estos aspectos fundamentales dentro del mismo enfoque de la investigación.

3.1. El paradigma de investigación

Nuestra investigación se realizó bajo el enfoque cualitativo, en términos de D'Ambrosio, (citado por Borba y Araujo, 2008) “La investigación cualitativa, también llamada investigación naturalística, tiene como objetivo entender e interpretar datos y discursos, incluso cuando involucra grupos de participantes” (P. 10). Desde esta mirada, se analizó la manera como los estudiantes del grado décimo construyen modelos matemáticos emergentes al interior de un contexto auténtico a través de la relación entre el área superficial, el volumen de las aguas que afectan el Establecimiento Educativo y la altura del nivel del agua en un punto de referencia dentro de la Institución. En este proceso de recolección de datos se evidencian las caracterizaciones sobre los procesos de descripción, observación, reflexión y análisis de las

interacciones, experiencias, formas de expresión matemática y acciones grupales e individuales emergentes en las dinámicas desarrolladas por los participantes del proceso. De esta forma se pretende que el estudiante se apropie de conceptos matemáticos y que a la vez comprenda como estos surgen del mismo contexto. Esto podría permitir que el estudiante asuma una actitud crítica frente al fenómeno y plantee alternativas de solución para minimizar sus efectos. En este sentido, según Bogdan y Biklen (1994), la investigación desde un enfoque cualitativo involucra:

1. Que la fuente directa donde se toman los datos sea el ambiente natural.
2. Que la investigación tenga un componente descriptivo.
3. Que haya más preocupación por los procesos que por los resultados.
4. Una tendencia a analizar los datos de forma inductiva.
5. El significado se convierte en un elemento de importancia dentro de la investigación.

De acuerdo con Rossman (citado por Gialdino, 2006), el proceso de investigación cualitativa supone la introducción en la vida cotidiana de la situación escogida para el estudio, además, la estimación y el intento por manifestar la perspectiva de los estudiantes sobre sus propias realidades. La investigación como proceso de enlace entre el investigador y los participantes, donde de manera descriptiva y analítica se privilegian no solo las palabras y la voz de las personas, sino su manera de actuar o de expresarse, así como la forma de trabajar individual y colectivamente.

3.2. Tipo de estudio

Según el objetivo propuesto, se pretende abordar de una manera profunda el fenómeno de un contexto auténtico, en este caso las inundaciones producidas por el desbordamiento de un río.

Esta investigación se realiza mediante un estudio de casos. Fundamentado desde los planteamientos teóricos abordados por Stake (1999) & Hays (2004), quienes sitúan este estudio en explorar, indagar y analizar las experiencias e interacciones que no han sido asimiladas y comprendidas. Este tipo de estudio permite la producción de representaciones e interpretaciones en forma reflexiva en un período de tiempo no muy extenso. Este tipo de estudio permite la producción de representaciones e interpretaciones en forma reflexiva en un período de tiempo no muy extenso. Así, el estudio se encamina a la manera como los estudiantes de grado décimo construyen modelos relativos a la medida del área y el volumen que se observa en la inundación de la Institución, según las actividades que permitan desde la geometría abordar la situación. Desde esta mirada, se pretende observar la experiencia analizadas de manera particular y no general. Según la óptica de Hays, en la forma de identificación que se quiere realizar, se forma la correspondencia entre los procesos únicos que se presentan en el grupo de participantes y la correspondencia con el contexto auténtico en el que se sitúa y se relacionan de forma directa.

Stake (1999) & Hays (2004) consideran que un caso no puede presentarse solo de forma individual, sino que puede ser sobre un grupo de personas, Instituciones Educativas, organizaciones, proceso de un programa particular u otros aspectos. Para esta investigación se consideró tomar cuatro estudiantes donde a partir del proceso de modelación desarrollado, es de vital importancia los procesos construidos por el grupo, sin que esto implique que las

particularidades no sean importantes en la construcción de modelos. Según lo anterior, se considera un proceso de construcción de conocimiento, que se refiere según Ibáñez (1992), “a la interrelación de todos los elementos que intervienen en los procesos de enseñanza-aprendizaje con una coherencia interna metodológica y por un período de tiempo determinado” (p. 13). Es decir, constituye un conjunto de temas de educación y aprendizaje que indica, cómo y cuándo educar y evaluar, que es nuestro objeto de análisis. A continuación se muestra una tabla correspondiente a las características presentadas desde el estudio de caso de esta investigación, en relación con la teoría expuesta por Hays (2004).

¿Qué?	¿Cómo?	¿Para Qué?
Experimentar con un grupo de estudiantes, un proceso de construcción de modelos matemáticos emergentes en situaciones en un contexto auténtico. Caso concreto en el fenómeno de las inundaciones por desbordamiento de un Río.	Instaurar en forma dialógica y espontánea, la significación de elementos de la modelación matemática, utilizando fuentes como la observación directa, entrevistas, documentaciones tales como actividades, dibujos elaborados por los estudiantes entre otras.	Establecer representaciones e interpretaciones en forma reflexiva con relación a la pregunta de investigación. Evidenciar las formas particulares en el que relacionan los estudiantes las medidas del área y el volumen en una situación dada. Contribuir al reconocimiento de la modelación matemática como proceso de aprendizaje en el aula de clase. Valorar la importancia de los contextos auténticos en la construcción de conocimiento matemático

Tabla 1. Estudio de caso cualitativo según la perspectiva de Hays (2004).

Por todo lo plasmado anteriormente se selecciona el estudio de casos como el punto de partida para la realización de un análisis más completo de la información recolectada en el trabajo.

3.3. El diseño de investigación

Los aspectos considerados en el diseño de esta investigación como el análisis, las fuentes utilizadas en la recolección de datos, los diferentes momentos del trabajo de campo, el contexto y la validez del estudio entre otros están fundamentados bajo los fundamentos teóricos aportados por Stake (1999) & Hays (2004).

3.3.1. El Contexto

La investigación se desarrolló en una Institución Educativa del municipio de Cauca, Antioquia, la cual tiene la particularidad de ser afectada directamente por las inundaciones debidas al desbordamiento del río Cauca. La Institución está ubicada aproximadamente a unos 80 metros de la orilla del río. Actualmente cuenta con tres sedes puesto que una de ellas fue cerrada por deterioro, siendo la inundación el principal factor. En la sede donde se realizó el proyecto de investigación funcionan los grados octavo a once, con un total aproximado de 300 estudiantes.

Los estudiantes de esta Institución Educativa pertenecen a los estratos 1, 2 y 3 donde un alto grado de ellos viven en zonas cercanas al colegio, por lo tanto son afectados directamente por el fenómeno natural.

3.3.2. Participantes de la investigación

El estudio se llevó a cabo con un grupo de 35 estudiantes del grado décimo, con quienes se desarrolló un compartir experiencias, diálogos y conversaciones que generaron un clima de confianza, ya que estos aspectos son fundamentales dentro del mismo enfoque de la investigación. Cuatro estudiantes de este grado; Dani, Angélica, Pereira y Anyi, fueron elegidos para ser analizados en el estudio de caso, de los cuales tres de ellos son afectados directamente por el fenómeno (inundación de sus viviendas). El diseño investigativo se desarrolló en diferentes momentos en un trabajo de campo; las actividades involucran a los estudiantes: mediciones en el terreno de zonas afectadas por el fenómeno, dibujo de planos y construcción de representaciones matemáticas.

Los criterios de selección de los cuatro participantes tienen que ver con la disposición para el trabajo en equipo, la responsabilidad y el interés mostrado frente a las actividades, pues manifestaron su deseo en ser parte activa del proyecto de investigación. Los criterios que se tuvieron en cuenta para la selección facilitarían la toma de información frente a las actividades, la interpretación y la argumentación en la construcción de modelos matemáticos, procesos fundamentales en el cumplimiento del objetivo de la investigación.

La participación en la investigación no sólo fue como investigador, sino también como docente del área de matemáticas, posición que permitió no solo orientar los procesos, sino también ser un observador participante.

3.3.3. Fuentes de recolección de datos

La información fue recogida a través de tres fuentes: observaciones directas (en forma grupal), entrevistas semi-estructuradas (grupal) y documentos escritos (individual y grupal). Las fuentes que se emplean para la obtención de la información es:

- *La observación participante: a través de audio, videos y apuntes.* Según Sandoval (2002) la observación participante se toma como elemento concluyente en la definición del problema de investigación, a su vez que se toma como base el contexto en el que se desenvuelven las personas. En este sentido, ser docente directo del proceso ha permitido conocer el contexto escolar y poder seleccionar de manera más acorde el tipo de caso que se iba a investigar.
- *Entrevistas.* Para Stake (1999) la entrevista es la vertiente principal para llegar a las realidades múltiples. Esta se presenta como una fuente fundamental para obtener información valiosa en el estudio de casos. En palabras de (Arias, 2006):

La entrevista más que un simple interrogatorio, es una técnica basada en un diario o conversación “cara a cara”, entre el entrevistador y el entrevistado acerca de un tema previamente determinado, de tal manera que el entrevistador pueda obtener la información que requiere. (P. 71).

Esta información fue recogida en forma de un conversatorio que permitió que de manera abierta y espontánea, los entrevistados suministraran información que podría ser importante para la investigación. Según Villa-Ochoa (2010) la entrevista se convierte en un diálogo emergente de los contextos en los cuales se indaga para comprender. Bajo esta idea se trató crear un ambiente

de confianza con el fin de que los entrevistados sintieran el encuentro como un intercambio de ideas y conceptos. Teniendo en cuenta lo anterior, se realizó tres entrevistas, una inicial, una intermedia y otra al finalizar el proceso.

La entrevista inicial se realizó con el propósito de establecer relaciones de confianza entre el grupo y el docente investigador, a su vez que se exploraba las ideas que tienen los estudiantes acerca de las matemáticas, sus relaciones diarias con ellas, y lo que pudieran decir sobre los temas de áreas, volúmenes. En la entrevista participaron los cuatros estudiantes.

La segunda entrevista tuvo la intencionalidad de explorar lo que los estudiantes piensan en general con el fenómeno de inundación, las causas y las consecuencias de las mismas. Así como de las diferentes nociones de relaciones de dependencia entre las magnitudes involucradas en contextos auténticos como lo es el fenómeno de inundación. En esta entrevista hubo participación de dos estudiantes.

La tercera entrevista realizada al final del proceso, tuvo como propósito establecer de qué manera los estudiantes construyen los modelos matemáticos a partir de las relaciones presentadas entre las áreas de las zonas inundadas y la altura con relación a un punto de referencia. A su vez se indagó sobre las posibles soluciones que plantearon los estudiantes para minimizar los efectos y las consecuencias de una inundación en el municipio. En esta tercera entrevista participaron dos estudiantes.

- *Las elaboraciones escritas: producidas por los estudiantes.* Hays (2004), considera que las elaboraciones escritas, producto de las actividades de los estudiantes, pueden ser utilizadas con el fin de comprobar y corroborar diferentes datos tomados de diferentes fuentes. Estas elaboraciones son de gran valor puesto que representan procesos derivados de las discusiones y de actividades encaminadas a la construcción de modelos matemáticos. Las elaboraciones escritas producidas por los estudiantes, permitieron los diferentes procesos a seguir para la construcción de modelos que relacionaban la medida del área y el volumen emergente en un contexto auténtico. Estos escritos de los estudiantes fueron archivados y clasificados según las actividades desarrolladas.

3.3.4. Momentos del trabajo de campo

El trabajo de campo de esta investigación se desarrolló en 6 momentos durante 12 sesiones en correspondencia con actividades relacionadas al proceso de modelación.

1. Exploración General: el fenómeno de las inundaciones
2. Delimitación a una situación particular
3. Hacia la construcción de un modelo matemático área
4. Hacia la construcción de un modelo matemático-volumen
5. Validación de los modelos matemáticos
6. Socialización del trabajo

Exploración General: el fenómeno de las inundaciones

A partir de un recorrido por las diferentes zonas afectadas por el fenómeno de las inundaciones, se propone un cuestionario donde los 35 estudiantes repartidos en 9 grupos de

trabajo donde los estudiantes contestan y explican sus apreciaciones. Esto permitió reconocer en los estudiantes habilidades para comunicar, argumentar e interpretar. Las preguntas estaban encaminadas a cómo los estudiantes perciben los problemas sociales y del medio ambiente que trae consigo un fenómeno de inundación. El cuestionario constaba de 8 preguntas, de las cuales la última tenía que ver directamente con las nociones matemáticas que se pueden determinar en una inundación. La actividad se desarrolló en dos sesiones de dos horas.

Momento dos: delimitación a una situación particular

Basado en las respuestas dadas por los estudiantes con relación a la pregunta 8 del cuestionario anterior, donde el docente investigador preguntó por las nociones matemáticas que se podrían determinar en un proceso de inundación, se piensa entonces en delimitar estas y se elaboraron preguntas que dan ideas a relaciones y dependencias entre áreas, volúmenes y alturas del nivel del agua en sectores afectados por las inundaciones, con el fin de que los estudiantes las analizaran y a partir de reflexiones frente al tema por parte del docente teniendo en cuenta el propósito de la investigación, las dificultades académicas y las variables involucradas, dieran luces para que los estudiantes tomaran una decisión de cual o cuales estudiar con mayor profundidad. La idea de una pregunta que indaga sobre la relación altura-área, es la que más llamó la atención entre los estudiantes.

Momento tres: hacia la construcción de un modelo matemático-área

En este momento, se toma la Institución Educativa como lugar para que los estudiantes tomaran los datos debido a que ésta, es afectada por las inundaciones y presenta ciertas regularidades que se pueden medir con relación al área y al volumen de las diferentes zonas

inundadas. Además por ser este espacio reconocido por los estudiantes, significativo para ellos y sobre el cual tienen conocimiento, pues es el lugar de estudio. Este momento estuvo encaminado a la construcción de un modelo matemático que permitiera establecer la medida de las áreas inundadas a partir de los niveles de altura del agua. Este apartado fue desarrollado en 8 sesiones de dos horas, puesto que las actividades implicaban medir, dibujar, calcular.

Momento 4: hacia la construcción de un modelo matemático-volumen

En este apartado, de manera análoga al momento relacionado anteriormente (área superficial) y teniendo en cuenta las nociones matemáticas vislumbradas por los estudiantes, éstos desarrollaron actividades encaminadas a la construcción de modelos matemáticos que permita el cálculo aproximado del volumen de agua con relación a los niveles de altura de la misma.

Momento 5: validación de los modelos matemáticos

Este momento consistió en mostrar el modelo a expertos, en este caso a ingenieros de la secretaría de planeación municipal con el fin de que analizaran, confrontaran con algún modelo matemático que ellos siguen para estimar el volumen o el área inundada en el municipio de Cauca, a la vez que entrevistan al Alcalde y jefe de planeación sobre las posibilidades de minimizar las consecuencias de las inundaciones.

Momento 6: socialización del trabajo

Este momento consiste en una exposición que los estudiantes hicieron entre ellos mismos y luego ante algunos docentes y representantes de comunidades afectadas por el fenómeno de

inundación, donde los estudiantes muestran sus resultados y las reflexiones sobre el proceso seguido por ellos y las soluciones que consideran importantes después de haber estudiado el fenómeno.

3.4. Análisis e interpretación de datos

El análisis de los datos se efectuó en forma paralela, es decir, de forma continua y haciendo comparaciones. Estas se realizaron con el fin de ir refinando el objeto de estudio con relación a la pregunta de investigación, así como del trabajo de campo y el proceso de análisis. Todas estas articuladas con el marco teórico. En este sentido se tuvo en cuenta los parámetros fundamentados por Hays (2004) & Londoño y Muñoz (2011) sobre lo importante de realizar la búsqueda de relaciones que se presentan y el seguimiento de un hilo conductor en todo el proceso, proporcionando sentido y significación entre los datos recogidos.

Análisis paralelo

La recolección y el análisis de la información se realizaron en forma paralela, esto es, de forma continua y comparada. Donde los estudiantes establecen el eje central del proceso. Para Londoño y Muñoz (2011) el docente investigador juega un papel primordial en el proceso de análisis de la información, por lo tanto en el desarrollo de este proyecto según la pregunta de investigación, los resultados se iban confrontando, con el fin de buscar alternativas que facilitaran el desarrollo de la investigación visualizado en el trabajo de campo y el proceso de análisis.

Categorización Emergente

Teniendo en cuenta que la investigación es cualitativa y que la pregunta está orientada a las maneras de construir modelos matemáticos, se organizan todos los resultados por momentos teniendo en cuenta los documentos escritos por los estudiantes, las entrevistas, los videos, los audios y las observaciones. De aquí se seleccionó el material más relevante. Organizada la información, se hizo una transcripción de cada uno de los momentos que permitió categorizarlos para concluir así el análisis de los resultados.

3.5. Validez del estudio

La información acumulada por las tres fuentes, fue fundamentada mediante un proceso que llamamos de triangulación. Este consiste en cruzar los datos de las entrevistas realizadas con las observaciones y los documentos escritos. Mediante un cuadro se hizo una codificación para identificar cuales se presentaban con mayor regularidad en las entrevistas, observaciones, documentos, utilizando tres colores diferentes para los códigos con el fin de diferenciar su fuente de datos. Mediante esta estrategia, se pudo verificar la pertinencia de la información recogida y corroborar las reflexiones que se habían tenido durante el trabajo de campo.

CAPÍTULO 4

4. LA MODELACIÓN MATEMÁTICA APLICADA A UN CONTEXTO AUTÉNTICO: EL CASO DE LAS INUNDACIONES POR DESBORDAMIENTO DE UN RÍO

De acuerdo con lo mencionado en el capítulo anterior, se eligieron para el análisis de la investigación cuatro estudiantes de grado Décimo de la Institución Educativa Divino Niño, la cual es afectada directamente por el fenómeno en mención. Como inicio de las actividades, se realizó un recorrido con los 35 estudiantes de este grado por las instalaciones del plantel educativo, y lugares aledaños, con el cual se identificó las zonas afectadas por el fenómeno de las inundaciones. Se discutió luego sobre las posibles matemáticas que intervienen en esos procesos. A partir de allí se indagó sobre diferentes situaciones matemáticas inherentes a un fenómeno de inundación donde el grupo unidad de análisis profundiza en una de las situaciones con el fin de construir modelos matemáticos que permita hacer generalizaciones, predecir resultados y reflexionar sobre alternativas de solución para minimizar sus efectos. La investigación se desarrolló en seis momentos los cuales fueron ya presentados en el capítulo anterior y que son detallados en este capítulo.

4.1. El contexto auténtico: fenómeno de las inundaciones, su impacto social y las nociones matemáticas

En este aspecto se tienen en cuenta dos elementos presentes en el contexto auténtico y que son importantes en la investigación, puesto que desde un proceso de inundación se afectan muchas comunidades y con ellos los terrenos, cultivos, etc. Al igual que elementos de las matemáticas evidentes en dicho fenómeno.

4.1.1. El fenómeno y su impacto social

Un contexto auténtico fue el punto de partida para que los estudiantes construyeran modelos matemáticos que les permitieran representar las relaciones entre el área superficial inundada y la altura del nivel del agua, con el fin de comprender algunos elementos del contexto y de proponer alternativas que pudieran minimizar los efectos del fenómeno en la comunidad. Ciertamente, la idea de trabajar en el contexto nace del propósito de la investigación, y a partir de las experiencias y el conocimiento del medio con que interactúan los estudiantes, se posibilitó la aproximación a las matemáticas escolares. El contexto de las inundaciones que afectan a la Institución Educativa y a la comunidad en general se convirtió en un espacio de interacción; los estudiantes hacen reflexiones de carácter social y económico acerca del fenómeno, desde una serie de preguntas que les fueron planteadas.

El siguiente episodio surge del diálogo con los estudiantes mientras se hacía un recorrido por zonas afectadas por las inundaciones. Los estudiantes observaban las calles, caños cercanos y

diferentes construcciones afectadas por la inundación anterior, ocurrida quince días antes del inicio del recorrido. Luego se discutió en el aula con relación a las preguntas planteadas conforme a lo observado.

La siguiente ilustración muestra el caño y como se observa después de una inundación.



Ilustración 2: Uso inadecuado de las basuras.

Con relación a las basuras, muchas de ellas son arrojadas a los diferentes caños, posibilitando así la obstrucción del agua produciéndose un estancamiento de las mismas. Esto conlleva al taponamiento de las alcantarillas y en épocas de invierno, facilita una mayor inundación hacia los sectores residenciales, pues el agua del río penetra por estos caños, luego las aguas fluyen en sentido contrario, hasta que se expanden alrededor de las viviendas ubicadas por el sector. Estas aguas estancadas activan la proliferación de plagas y malos olores, lo que facilita no solo la contaminación ambiental sino la activación de muchas enfermedades que afectan a niños y adultos.

Otro aspecto en el fenómeno tiene que ver según los estudiantes con la construcción de viviendas en zonas inapropiadas, aprovechando las variantes en la trayectoria del río en algunos largos períodos de verano. Según cuentan las personas mayores, nativos del municipio de Caucasia, estos sectores en la actualidad ocupados por viviendas (entre ellos la Institución Educativa), eran en un pasado pertenecientes al río, que fueron habitados por familias y donde fue construido ahí viviendas en forma de “tambos”, los tambos son casas de madera que tienen el piso construido también en madera a una altura considerable sobre el suelo, para evitar inundaciones dentro de las casas en épocas de invierno.

Con el paso del tiempo las inundaciones cada vez son más intensas, este aspecto promueve el desmoronamiento de los terrenos que están en las orillas del río. Para la gente del común esto se debe a que el río “está reclamando” sus predios, pues por estos sectores corrían sus aguas.

Desde otro punto de vista, los estudiantes consideran que las principales consecuencias tienen que ver también con el deterioro o pérdida de bienes materiales. Muchas familias tratan de salvaguardar sus pertenencias dentro de las mismas viviendas, pues no hay lugar donde hacerlo o en muchos casos las inundaciones son repentinas que no da tiempo siquiera para protegerse. Teniendo en cuenta que en algunos casos las inundaciones se han desarrollado por largos períodos de tiempo lo que facilita el deterioro y/o pérdida no solo de las viviendas, sino de los bienes y pertenencias de las personas; en algunos casos hasta la vida misma. La siguiente ilustración muestra como algunas viviendas ubicadas en las orilla del río son destruidas por el desmoronamiento del terreno.



Ilustración 3: Deterioro de viviendas por causa de las inundaciones.

Los estudiantes observan directamente como muchas viviendas son afectadas y en casos en que estas están en la orilla del Río, han sido destruidas completamente por el fenómeno. Es de notar que en el desbordamiento de los ríos, se producen constantes erosiones en las orillas, haciendo que cada vez su longitud transversal sea más extensa, lo que conlleva a que más viviendas estén en peligro inminente de colapsar.

Otro aspecto en un fenómeno de inundación tiene que ver con el medio de transporte utilizado para transitar por los barrios, pues se hace en “canoas” debido a que muchos habitantes no desocupan sus viviendas por no tener donde ir o para cuidar las pertenencias. Un caso particular tiene que ver con el cumplimiento de las jornadas académicas por parte de los estudiantes aun cuando sus viviendas son afectadas.



Ilustración 4: Medio de transporte en el contexto de las inundaciones.

Una particularidad para tener en cuenta tiene que ver que a lo largo del río, donde están las comunidades y los diferentes barrios que son afectados no tienen ningún tipo de protección, que contrarreste las aguas del río, lo que hace que sean vulnerables no solo a la inundación, sino al deterioro y destrucción de las mismas. En muchos casos los terrenos se han inundado por más de un mes, lo que modifica de manera sustancial el entorno no solo social, sino ambiental, pues al bajar el nivel de agua, quedan los terrenos cubiertos de lodo, donde la comunidad tiene que hacer jornadas de limpieza.

Luego que los estudiantes observaran directamente las consecuencias que deja la inundación en el municipio, se orientó la charla con las siguientes preguntas, que permiten identificar algunos elementos del fenómeno percibidos por los estudiantes a nivel social y económico:

1. ¿Por qué ocurren los fenómenos de inundación en el país?
2. ¿Qué factores consideras han incidido al incremento del fenómeno de las inundaciones a nivel nacional?

3. ¿Por qué crees que se inundan algunas zonas de nuestro Municipio?
4. ¿Qué consecuencias dejan las inundaciones en nuestro Municipio?
5. ¿Qué tipo de enfermedades se perciben durante y después de las inundaciones?
6. ¿Qué problemas sociales y del medio ambiente trae una inundación al Municipio?
7. ¿Cómo crees se podría solucionar el problema de las inundaciones en el Municipio de Caucasia?

Con esta actividad, se pretendió que los estudiantes reconocieran aspectos generales que se presentan en una inundación y como estos afectan a la comunidad en general. A su vez que los estudiantes, al reconocer el fenómeno y sus implicaciones en el entorno, reflexionaran y dieran sus puntos de vista al respecto, pues el trabajo no solo implicaba el reconocimiento de elementos propios de las matemáticas, sino el observar el fenómeno desde sus causas y consecuencias para crear en los estudiantes una conciencia más humanizada con relación a éste y se motiven a la promoción de acciones y soluciones que contribuyan a originar estrategias que puedan minimizar los efectos del fenómeno.

Organizados los estudiantes en grupos de cuatro, estos dialogan, reflexionan y responden las preguntas las cuales después en mesa redonda fueron socializadas. Con esta actividad los estudiantes pudieron expresarse y compartir puntos de vista con respecto al fenómeno y el impacto social que produce. A partir de sus reflexiones, se categorizaron las respuestas examinando las similitudes que se presentaron entre las consideraciones y aportes dados por ellos. Cabe resaltar la activa participación de todo el grupo. Se considera que el tema tratado, facilitó la dinámica del trabajo, pues algunos estudiantes que normalmente no participan en las

clases regulares, estuvieron diligentes e hicieron aportes importantes. Al ser los estudiantes conocedores del contexto de las inundaciones, proporcionó que expresaran sus ideas y que hubiera una participación activa de todos.

La siguiente ilustración muestra una panorámica del municipio de Caucasia y su cercanía al río Cauca. Algunas de las zonas fueron recorridas y observadas para la actividad anterior.

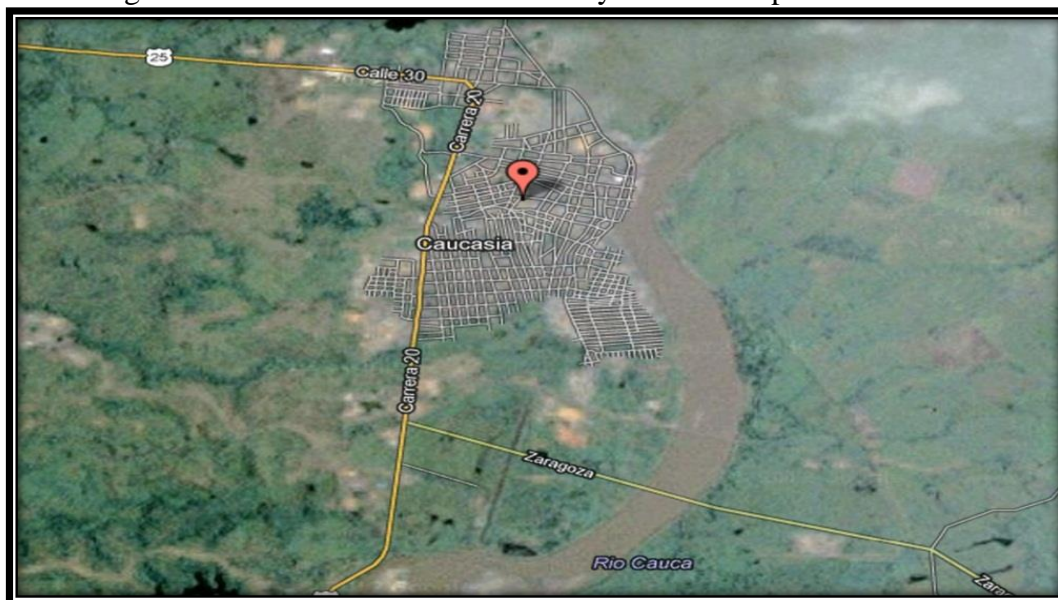


Ilustración 5: Municipio de Caucasia y su cercanía al río Cauca (tomado de google earth, 24 de marzo de 2013).

Es de observar en la ilustración todo el sector vulnerable a ser inundado en las crecientes del río, con lo cual muchas personas se ven afectadas.

Los estudiantes son conscientes de que la inundación, que cada vez se ha presentado con mayor intensidad, es un fenómeno de la naturaleza que afecta a muchas comunidades a nivel nacional e incluso a comunidades de algunos países. La siguiente tabla resume las conclusiones sociales y económicas más determinantes de los estudiantes sobre las consecuencias del fenómeno de inundación.

Preguntas	Respuestas de los estudiantes
1. ¿Por qué ocurren los fenómenos de inundación en el país?	Falta de cultura Botar los residuos a los Caños y Ríos Crecientes del Río
2. ¿Qué factores consideras han incidido al incremento del fenómeno de las inundaciones a nivel nacional?	Basuras Falta de mantenimiento alcantarillas Daños al Medio Ambiente Contaminación al Río
3. ¿por qué crees que se inundan algunas zonas de nuestro Municipio?	Cercanía al Río y a los Caños Contaminacion Alcantarillas tapadas Construcción en zonas pertenecientes al Río
4. ¿Qué consecuencias dejan las inundaciones en nuestro Municipio?	Pobreza Perdidas de enseres Deterioro de las viviendas
5. ¿Qué tipo de enfermedades se perciben durante y después de las inundaciones?	Gripas Alergias Dengue
6. ¿Qué problemas sociales y del medio ambiente trae una inundación al Municipio?	Sociales: Perdida de seres queridos Desplazamiento Ambientales: perdida de cosechas, malos olores, barro en las calles y viviendas
7. ¿Cómo crees se podría solucionar el problema de las inundaciones en el Municipio de Caucasia?	Colocando barreras de concreto en las orillas Campañas para no tirar basura

Tabla 2. Exploración General: el fenómeno de las inundaciones.

Las anteriores respuestas de los estudiantes son producto de sus experiencias y de la observación que hicieron por las diferentes zonas, pues son generadas al percibirse directamente el estado de los caños cercanos y las viviendas deterioradas, promovió dichas reflexiones en torno al fenómeno. Hay que tener en cuenta que la mayoría de los estudiantes viven en las zonas de influencia del fenómeno, y otros, en cercanías al caño ubicado en zonas afectadas por la inundación. Esto implica un conocimiento adicional sobre el impacto social y económico que han dejado las inundaciones en su municipio.

En este sentido, las entidades gubernamentales han tratado de minimizar los efectos de las inundaciones, por esto en la parte alta, en zonas deshabitadas se han construido algunos muros de contención con muchas columnas metálicas y rellenos con costales de arena en la parte más baja dentro del río. Esta especie de muro va perpendicular al río con el fin de minimizar la fuerza del agua y así disminuir las inundaciones en el casco urbano. La siguiente gráfica muestra la forma de contrarrestar la fuerza del río.



Ilustración 6: Muro de contención perpendicular al río.

Sin embargo, la estrategia utilizada para disminuir los efectos de las inundaciones en el municipio ha sido insuficiente puesto que las aguas sobrepasan el nivel del muro, destruyen los costales de arena y el muro de contención o cambia la trayectoria, dejando todo el muro en la mitad del río.

4.1.2. Nociones matemáticas emergentes del fenómeno de las inundaciones

Otro aspecto importante aparte del reconocimiento que los estudiantes hacen del impacto social y ambiental que se produce en una inundación, tiene que ver con la identificación de diferentes elementos matemáticos en este fenómeno. Teniendo en cuenta que muchos de los resultados obtenidos del diálogo con los estudiantes y de sus vivencias cuando hay inundaciones en una comunidad, son variables que pueden ser cuantificadas y de alguna manera están relacionadas con las matemáticas. Reconociendo lo anterior se les hace a los estudiantes la siguiente pregunta: *Considerando el fenómeno de inundación en el Municipio, ¿Cuáles nociones matemáticas se pueden determinar?* Con relación a la pregunta los estudiantes identifican diferentes elementos matemáticos en este fenómeno, básicamente desde las estadísticas y la geometría, puesto que muchos consideran que el saber sobre el número de viviendas deterioradas, de personas afectadas, son variables que se pueden abordar desde el punto de vista matemático. Un aspecto importante tiene que ver con la idea de área superficial de las aguas y el volumen de la misma presentada por los estudiantes como elementos matemáticos dentro de un proceso de inundación. Al respecto un grupo de estudiantes desarrollaron una idea gráfica frente al contexto y como consideran ellos son las inundaciones en el Municipio. El grupo realizó la siguiente representación.

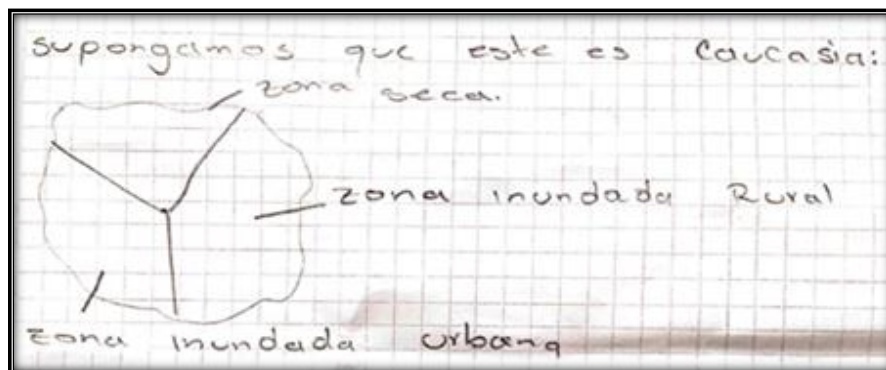


Ilustración 7: Representación equipo de Angélica.

Al reflexionar sobre la representación gráfica, los estudiantes que conforman el grupo explican que en épocas de invierno muchos sectores urbanos y rurales del Municipio se inundan.

En este modelo de representación de las áreas inundadas, producto de las reflexiones de los estudiantes sobre el conocimiento del contexto, es interesante ver cómo perciben la existencia de una correlación de zonas inundadas: comprenden que aproximadamente $\frac{2}{3}$ del área total del Municipio está inundada tanto en la zona urbana como en la rural, mientras que $\frac{1}{3}$, una pequeña cantidad de terreno, está seca. Comprenden, pues, el aspecto matemático de la proporción.

Teniendo en cuenta la actividad desarrollada, se crea en los estudiantes intereses y necesidades generados por ellos lo que les permite buscar en las matemáticas elementos de juicio que les facilite la interpretación del mundo que los rodea.

De acuerdo con Blum y Borromeo (2007), el proceso de modelación matemática puede desarrollarse mediante los siguientes momentos: 1) *Comprensión de la situación* 2) *Simplificación y estructuración* 3) *Matematización* 4) *Trabajo matemático* 5) *Interpretación* 6) *Validación* 7) *Exposición*. Por lo que en el apartado anterior, se observa el primer momento “comprensión de la situación”, ya que los estudiantes exploraron las situaciones del fenómeno de inundación desde sus relaciones con el otro, su entorno, sus experiencias habituales y la capacidad para debatir sobre lo que conocen.

Las anteriores reflexiones permiten observar el conocimiento que tienen los estudiantes del fenómeno, pues este ha sido parte de su “realidad” y más aún en particular de este grupo de estudiantes, los cuales han convivido históricamente con este factor, bien sea como individuos

pertenecientes a la Institución Educativa, la cual es afectada por las inundaciones o bien como miembros de una comunidad que es también afectada. En este sentido, el contexto se convierte en una necesidad práctica y tangible de los estudiantes, puesto que lo conocen y pueden explorar no solo desde el ámbito social y cultural sino desde las abstracciones del mismo, que conllevan a los estudiantes a observar elementos de las matemáticas no solo como estructura simbólica, sino como una forma de pensamiento social que contribuye al conocimiento del fenómeno, que a su vez genere una reflexión sobre la necesidad de aportar elementos que permita un acercamiento a posibles soluciones.

Bajo las ideas generales de matemáticas que pueden emerger dentro de un fenómeno de inundación y ante los muchos aspectos que se pueden analizar, como las personas afectadas, pérdidas de cultivos en las zonas rurales, daños en el medio ambiente, etc. Estas ideas, las cuales van encaminadas al propósito mismo de la investigación permiten entonces delimitar las situaciones y el contexto. Estos serán detallados en el siguiente apartado.

4.2. Delimitación y simplificación de las situaciones en el contexto de las inundaciones

En este tópico se presentan dos subprocesos que se tienen en cuenta a la hora de construir modelos matemáticos; estos son la delimitación de las situaciones en contexto y la simplificación del fenómeno.

4.2.1. Delimitación de las situaciones en el contexto de las inundaciones

Teniendo en cuenta los aportes de Biembengut y Hein (2006), Villa-Ochoa (2007) & Blum y Borromeo (2009), quienes consideran fundamental en un proceso de modelación matemática delimitar el problema, en este contexto particular se presenta una diversidad de variables, las cuales no son posibles de afrontar en su totalidad. Se abordan varias preguntas construidas con los estudiantes, en las cuales se evidencian situaciones de dependencia entre las variables asociadas con el contexto.

Antes de continuar con la siguiente actividad, se realizó una charla con los estudiantes, en la cual se explicó la intencionalidad de las preguntas y las posibles relaciones que se pueden establecer entre las matemáticas y el contexto, así mismo cómo diferentes situaciones del entorno, se pueden adaptar a la construcción de modelos matemáticos que permitan predecir resultados. A partir de allí se realizó una actividad, enfocada a relacionar diferentes elementos matemáticos que emergen con las inundaciones. Es así como se decide organizar por grupos de cuatro estudiantes para analizar las situaciones descritas a continuación.

1. ¿Qué se puede medir en un proceso de inundación?
2. ¿De qué depende la mayor o menor cantidad de zonas afectadas por las inundaciones?
3. ¿Qué relación podría haber entre el área de las zonas inundadas con la velocidad del agua que viene del Río?
4. ¿El área de las zonas inundadas depende de alguna forma de la altura del nivel del agua?
5. ¿Qué relación hay entre la altura del nivel del agua y el volumen de la misma?

6. ¿Se podría establecer una relación entre al área de las zonas inundadas con el volumen de agua?
7. ¿Es posible determinar una expresión matemática que permita relacionar el área de inundación con el volumen de agua contenida?
8. ¿Podría una expresión matemática determinar el área inundada a partir de la altura del nivel del agua?

Las preguntas escritas anteriormente construidas con los estudiantes, permiten establecer las relaciones que existen entre un fenómeno del entorno como son las inundaciones y las matemáticas, de acuerdo con los planteamientos de Biembengut y Hein (2007). Estas preguntas dan cuenta de las múltiples situaciones matemáticas que están presentes y las muchas variables que intervienen en contextos auténticos. Por lo tanto, establecer una situación matemática que abarque todas las variables sería muy complejo frente a la pregunta de investigación, por tanto, se hace necesario delimitar el problema; así mismo el grupo de trabajo decide iniciar la exploración de situaciones que se puedan generar de la conexión de las matemáticas y el contexto. Es así como el grupo de trabajo, a partir de las reflexiones en torno al fenómeno, el contexto, las nociones matemáticas presentes como las áreas inundadas en la zona urbana y rural, y las necesidades académicas de los estudiantes, puesto que en las clases regulares, el concepto de área y de volumen se habían abordado desde la teoría y la fórmula, por lo que se decide propiciar la consecución de modelos matemáticos. Los estudiantes eligen la pregunta: “¿Podría una expresión matemática determinar el área inundada a partir de la altura del nivel del agua?”. Así, se interactúa con las matemáticas generadas desde el estudio de un contexto: al establecerse una relación de dependencia entre el área superficial y la altura del nivel del agua, se podría saber de forma aproximada la extensión del terreno que se inunda. Lo que permite

reflexionar sobre las futuras inundaciones con el fin de mejorar las condiciones y previsiones, y además abrir el campo a la discusión sobre las alternativas que puedan minimizar el impacto social y ambiental.

La siguiente ilustración permite observar que a medida que aumenta el nivel del agua, se van inundando mayores sectores de la población, expandiéndose esta por los terrenos más planos y superficialmente las aguas forman áreas irregulares.



Ilustración 8: Inundaciones en el Municipio de Caucasia.

La ilustración anterior muestra la superficie de agua que inunda las comunidades y como esta toma diferentes formas dependiendo del terreno.

4.2.2. Simplificación del fenómeno

Se indaga con los estudiantes sobre cómo medir las áreas inundadas del municipio. Manifiestan que la forma del terreno y las grandes longitudes que habría que medir hacen que el

proceso sea complicado. Se hace una simplificación del problema. Se les propone como lugar geográfico la Institución Educativa, afectada por el fenómeno, no solo por tener referencias y datos más específicos con relación a la medida del área y el nivel del agua, la misma Institución deja marcas en las paredes después de haber ocurrido una inundación, sino porque las inundaciones en ese lugar son un contexto conocido por los estudiantes. En este ambiente, se pueden aprovechar elementos matemáticos que permitan a los estudiantes describir el fenómeno de forma más detallada. Por ejemplo, el calcular y medir áreas, perímetros, volúmenes, con los cuales se pueden establecer relaciones y dependencias que podrían analizarse a través de la modelación matemática. La siguiente ilustración muestra la Institución Educativa donde se realiza el proyecto de investigación.



Ilustración 9: Panorámica de la Institución Educativa en tiempo seco.

En la ilustración anterior se muestra la Institución Educativa que es el contexto donde se realizó la investigación.

En épocas de invierno, el contexto de las comunidades se ve afectado por el fenómeno, y la Institución y muchas viviendas son desocupadas. En este aspecto, cuando las inundaciones se prolongan, se evidencia un deterioro en la infraestructura de las mismas. La siguiente ilustración muestra una panorámica donde gran parte del municipio de Caucasia y la Institución Educativa en la cual se desarrolló la investigación, son afectados por las inundaciones debido al desbordamiento del río Cauca.



Ilustración 10: Institución Educativa afectada. Tomado de : <http://www.elmundo.com/porta/resultados/detalles/?idx=176626>

Como se observa, una gran extensión de la población del municipio es afectada y gran parte de los estudiantes de la Institución Educativa viven en estos sectores.

La actividad que se describe a continuación estuvo enmarcada en establecer relaciones entre la altura del nivel del agua tomando un punto de referencia y el área superficial de la zona

inundada, repitiendo este proceso para diferentes alturas y el cálculo de diferentes áreas de las zonas inundadas. La primera parte del trabajo consistió en encontrar esas relaciones, hacer cálculos y la estimación de medidas.

En primer lugar se indagó sobre el concepto de área que relacionan los estudiantes. Para esta pregunta se formaron dos equipos de trabajo. El equipo 1 fue conformado por Dani y Anyi, y el Equipo 2 por Pereira y Angélica. La pregunta realizada fue la siguiente: *¿Qué entiende por área?*

Los equipos plantean dos definiciones.

Equipo 1: *Se entiende por área que es el espacio que ocupa un cuerpo o un objeto.*

Equipo 2: *Depende también pues el área si es un cuadrado se halla lado por lado y si es un rectángulo es base por altura.*

Estos dos resultados ponen en evidencia la dificultad de comprender el concepto de área. El equipo 1 (Dani-Anyi) hace una aproximación más bien a la idea de volumen, mientras que el Equipo 2 (Angélica-Pereira), establece la forma de hallar por fórmula el área de dos figuras geométricas (cuadrado y rectángulo), más no se entiende el resultado de esas operaciones; esto indica que los estudiantes relacionan el cálculo más no su significación. Los resultados anteriores son clara evidencia que no hubo una apropiación de este concepto y que solo hay relaciones aprendidas de forma mecánica. Estos resultados ya fueron evidenciados por diversos autores como Abrantes (1994), Gaulin (2001), Corberán (1996); Moreno et ál., (1998), Guillen (2010) entre otros.

Al respecto, mediante una charla entre el docente investigador y los estudiantes se organizaron las ideas con el fin de que los estudiantes comprendieran mejor la situación. Sin embargo, se considera que la verdadera apropiación del mismo se establece de una forma significativa si el estudiante a partir del contexto experimenta situaciones reales que le permita construir el conocimiento. De esta forma, pretendiendo que el estudiante se apropie de nociones matemáticas y comprenda que en cualquier fenómeno del mundo “real” emergen elementos matemáticos, que permiten no solo comprender mejor la situación sino reflexionar sobre las posibles soluciones. Por lo tanto, teniendo en cuenta la pregunta de interés de los estudiantes, se establece una segunda pregunta, que trata de ir dando luces a la construcción del modelo que puede emerger de la relación altura del nivel del agua- área superficial inundada. Para esto se consideró que los estudiantes elaboraran el plano de la planta del colegio y lo dibujaran en el papel, para así ir identificando las zonas del mismo que se iban inundando a medida que aumentaba el nivel del agua. Cabe resaltar como se dijo anteriormente, que la Institución Educativa es afectada por el fenómeno de las inundaciones, la infraestructura del mismo permite que las zonas puedan ser medidas.

Los estudiantes conocen el proceso de inundación de la Institución Educativa, por experiencia conocen que ésta se inunda porque las aguas emergen por las alcantarillas que se encuentran primeramente a un lado de la cancha de microfútbol. Teniendo en cuenta este contexto, se trata de ir dando una aproximación más específica de las relaciones entre la altura del nivel del agua y el área superficial inundada. La pregunta realizada a los estudiantes fue la siguiente: *Elabora un plano de la planta del colegio e identifica las diferentes secciones que se inundan ubicando con las medidas tomadas las áreas cuando la altura del nivel del agua es*

10cm, 20cm, 30cm a partir del punto de referencia. ¿Qué forma tiene esas secciones (rectangulares, cuadradas, trapezoide, irregulares)?

Es así como los estudiantes elaboraron un plano de la planta del colegio e identificaron las diferentes zonas inundadas para diversas alturas, tomadas a partir de un punto de referencia, el cual es una pared al lado de una alcantarilla dentro de la Institución donde emerge el agua e inunda los diferentes sectores. Después de un proceso de trabajo en equipo, los grupos miden el colegio y a través del conocimiento propio del contexto, preguntas al personal administrativo y referencias fotográficas, los estudiantes dibujan dichos planos e identifican las diversas zonas inundadas a través de colores. En el proceso de medida los diferentes grupos se dividen el trabajo, hacen las mediciones, consultan datos, concretan procedimientos, lo que evidencia un trabajo colaborativo y a la vez motivante para ellos producto de sus interacciones sociales y sus relaciones con el entorno. (Jaramillo, 2011). El plano se convierte por tanto en un modelo de representación de los estudiantes donde evidencian las áreas de las zonas inundadas dependiendo de las diferentes alturas del nivel del agua en el punto de referencia.

Con esta pregunta los estudiantes empezaron a realizar la actividad ese mismo día por la tarde. Trajeron elementos como cinta métrica, regla, hojas de block, calculadoras. En el consenso de cada grupo de trabajo, se establecieron entre ellos diversas tareas para responder la pregunta, como por ejemplo el cómo realizar las actividades y bajo qué condiciones, de igual manera la forma como los participantes recogen la información y según sus habilidades, asignarse los diferentes roles en el grupo. La siguiente ilustración muestra el proceso de medida del colegio por parte de los estudiantes para representar en el plano.



Ilustración 11: Trabajo de campo. Medida del colegio.

Los estudiantes se organizaron según sus habilidades y destrezas de acuerdo a las actividades. Por ejemplo los que tenían aptitudes para el dibujo, o para realizar las medidas, asumieron esta situación. Con relación a la actividad, los estudiantes buscaron sus propias estrategias para realizar el dibujo de la mejor manera. Luego en las actividades para realizar las estimaciones y los cálculos de las áreas de las zonas inundadas y el área total del colegio, los estudiantes organizaron los grupos de trabajo y conjuntamente realizaban estos cálculos. Se evidenció en esta actividad los diferentes puntos de vista de cada integrante y las discusiones en torno a cómo llegar a soluciones. Se considera que la actividad permitió establecer en los estudiantes un trabajo en equipo y de conexión mutua.

En la siguiente ilustración se observa la organización de un equipo y el establecimiento de diferentes roles asumidos por los estudiantes.



Ilustración 12: Cálculo de áreas inundadas.

La actividad descrita anteriormente se desarrolló con todo el grupo de estudiantes de grado décimo donde se formaron grupos de cuatro estudiantes, ellos midieron el colegio y elaboraron un plano en planta, a su vez que ubicaron las diferentes zonas de éste que son afectadas, coloreando la zona inundada cuando el nivel del agua es 10cm sobre el punto de referencia. Los datos tomados por los estudiantes es producto de información suministrada por celadores, administrativos del colegio, registros fotográficos y huellas o marcas dejadas por las aguas después de haber pasado la inundación y la observación directa.

Para efectos del proyecto de investigación, se analizaron los procesos del grupo conformado por Pereira, Dani, Angélica y Anyi. Los tres primeros estudiantes son damnificados por el fenómeno de forma directa, pues sus viviendas son afectadas por las inundaciones y en épocas de invierno han tenido que desocuparlas y refugiarse en casa de familiares. En el caso de Pereira, él y su familia han ido a los albergues que se improvisan dentro de algunas instituciones no afectadas por el fenómeno o en lugares públicos como canchas y/o coliseo cubierto. Resaltando el caso del estudiante Pereira, es de notar que ha sido el más insistente en trabajar las

actividades, pues es el más conocedor del grupo con relación a las inundaciones. Sus familiares son pescadores y él colabora con la venta de pescado. Para las actividades normales de clases, este estudiante se había mostrado poco participativo.

Cuando la actividad matemática se enmarca desde un contexto representativo para los estudiantes y en el cual están inmersos, la actividad deja de ser forzada y se convierte en una fuente de motivación, y más aún si estos contextos tienen impacto social y ambiental o afectan directamente a una comunidad, pues históricamente el hombre a partir de dificultades y necesidades de resolver problemas, lo ha llevado a utilizar distintas estrategias (entre ellas matemáticas) para superarlas, como es el caso citado de las inundaciones que padecían en el antiguo Egipto por causa del río Nilo. (Torres, 2007).

Para efectos de las actividades de campo, los estudiantes construyen planos de la planta del colegio, mediante un trabajo colaborativo, haciendo procesos de medición, dibujo de planos e identificación de los sectores inundados. El hecho de que los datos fueran recolectados por los mismos estudiantes, señala un precedente distinto a los procesos tradicionales utilizados para la solución de problemas, en los cuales los datos están dados desde el principio por parte del docente, esto implica en cierta forma un retroceso en los procesos de experimentación, el cual es imprescindible si se considera generar en los estudiantes un aprendizaje significativo. Esta parte dentro del proceso de modelación fue desarrollada desde las actividades experimentales, consideradas como aquellas que involucran las experiencias de los estudiantes con relación al uso del metro, las representaciones en el plano y otras experiencias pensadas por los estudiantes para el establecimiento de estrategias de simplificación, recolección y organización de los datos

Este equipo de trabajo compuesto por cuatro estudiantes se distribuyó de la siguiente manera: dos de ellos trabajaron en el proceso de medida, es decir, uno tomaba una parte del metro y el otro de ellos tomaba el extremo del mismo. Simultáneamente el de mejor habilidad hacia el dibujo y consignaba las medidas que le eran dadas. Un último estudiante verificaba que las medidas fueran correctas y se ubicaban en el lugar correcto. Así mismo se encargaba de orientar las partes faltantes por medir.

Estas actividades de construcción realizadas por los estudiantes implican prácticas de observación y simplificación, con el fin de construir modelos que permitan describir y comprender una situación del mundo real y como esta se relaciona con elementos matemáticos. Esto implica que la utilización práctica de procesos de modelación, adjunta situaciones reales de esta índole, puesto que los estudiantes a partir de la observación directa de un fenómeno natural, que han tomado como base para relacionar aspectos matemáticos que podrían surgir de dicho fenómeno y permitir entender la importancia que tienen las matemáticas dentro del mismo.

El inicio de la actividad fue complejo puesto que los estudiantes no conocían sus destrezas, pues pocas veces desde las clases habían tenido actividades con medidas directas. Por ejemplo el que inició con el dibujo, los demás no lo entendían y el que comenzó la actividad de medida tenía dificultades con el valor medido. Los estudiantes tuvieron que planificar los roles y redistribuirse las actividades para facilitar el trabajo, sin embargo, el estar todos observando, manipulando, elaborando, corrigiendo, dialogando, hizo de la actividad no solo que aprendieran desde la parte cognitiva, sino desde el trabajo en equipo y las relaciones con el otro.

Según Londoño y Muñoz (2011) “El proceso de modelación implementado en forma grupal tiene un sentido diferente si hubiera sido individual, ya que los estudiantes valoraron la diversidad de miradas y la necesidad de llegar a un acuerdo” (p. 116). Los procesos de modelación en el aula de clase, generan precisamente en los estudiantes espacios para la discusión, la reflexión y el desarrollo del pensamiento crítico, en la medida en que las situaciones se vayan construyendo.

El grupo al que pertenece Dani elaboró el siguiente plano

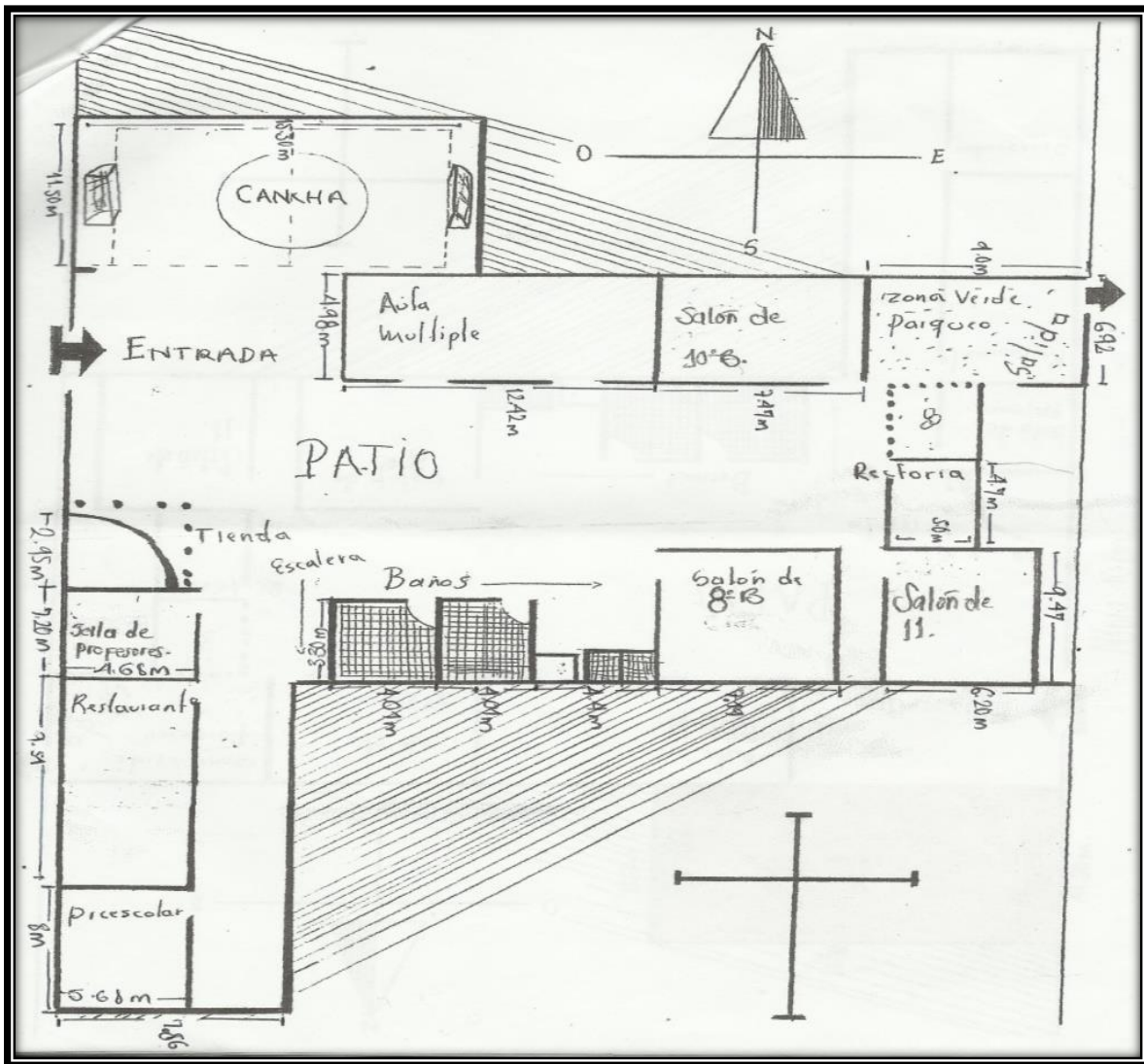


Ilustración 14: Plano del colegio-Grupo de Dani.

La representación de un modelo (el plano del colegio) se convierte en un insumo importante dentro del proceso, pues es el medio que dialoga con la matemática para construir modelos matemáticos y dar cuenta del problema planteado.

Es de destacar algunas similitudes en los dos planos elaborados por los estudiantes, tanto en las medidas tomadas como en la forma de representarlos. A partir de estos dos planos, se inicia en dos equipos de trabajo, la construcción de modelos matemáticos. El equipo 2 lo componen Angélica y Pereira quienes trabajaron con el primer plano (ilustración 13) y el segundo equipo conformado por Dani y Anyi, quienes trabajaron sobre el segundo plano (ilustración 14).

Con relación a la identificación de las secciones que primero se inundan los estudiantes ubican la cancha de microfútbol como el inicio de la inundación, pues las aguas emergen por las alcantarillas ubicadas en ese sector como lo muestra la siguiente ilustración.



Ilustración 15: Inicio de inundación cancha de micro-fútbol.

Teniendo en cuenta que a medida que el agua ingresa, inunda por completo la cancha y pasando luego por los otros sectores. La siguiente ilustración muestra el sector de la cancha inundado por completo.



Ilustración 16: Inundación cancha de microfútbol.

Con relación a la ilustración anterior, los estudiantes representan dicha situación de inundación en el plano de la planta del colegio e identifican la sección que primero se inunda con colores y así sucesivamente dependiendo de las diferentes áreas a partir de las alturas con relación al nivel del agua en el punto de referencia.

A continuación observamos el plano en planta de la Institución Educativa, donde los estudiantes identifican la cancha de micro-fútbol como la zona que primero se inunda cuando la altura del nivel del agua es 10cm con relación al punto de referencia.

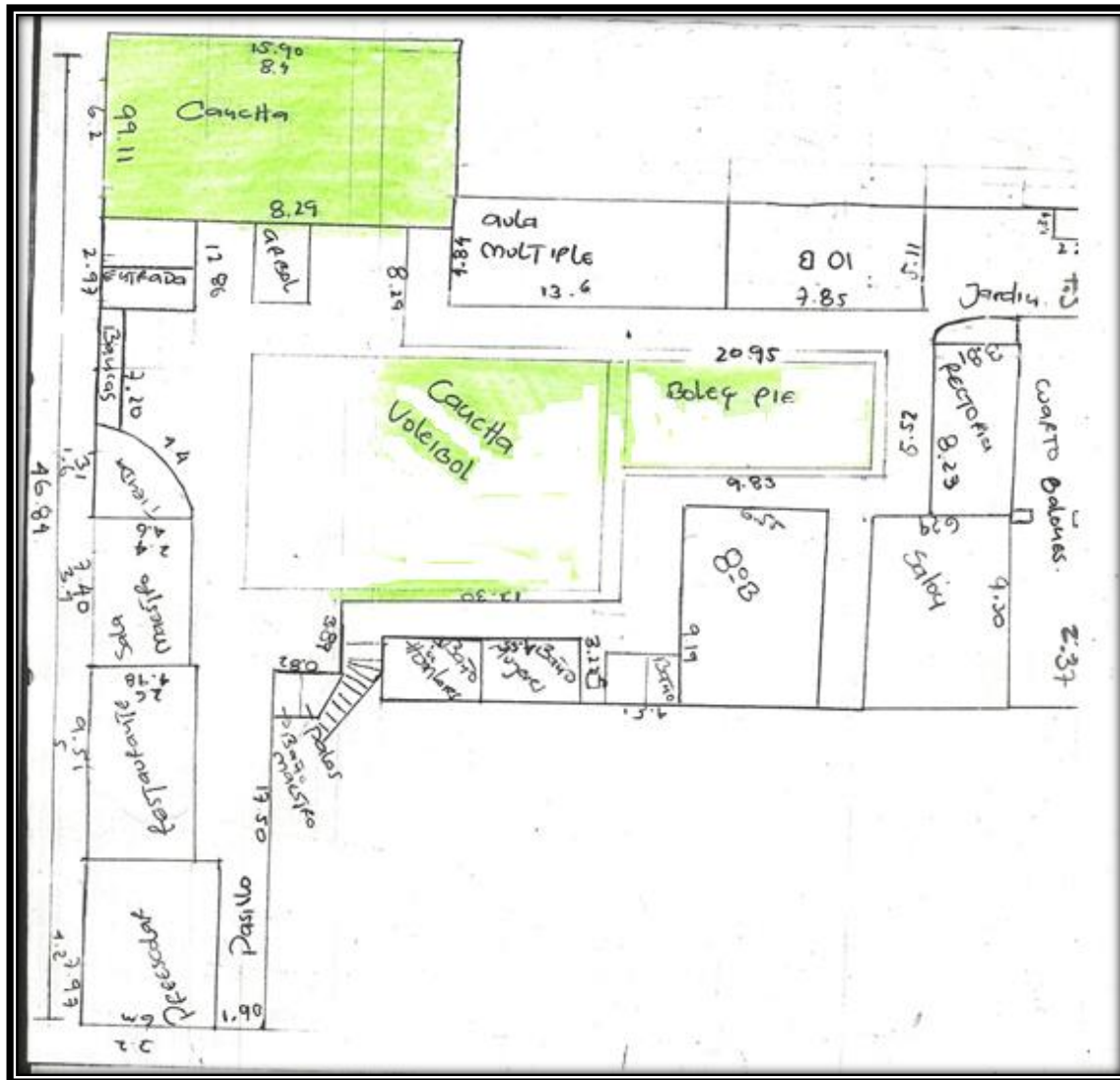


Ilustración 17: Zona inundada a 10 cm. Equipo 2 (Angélica-Pereira).

La ilustración anterior evidencia que los estudiantes colorearon con color verde el primer sector inundado cuando la altura del nivel del agua en el punto de referencia es de 10 cm. La representación siguiente muestra el plano de la planta del colegio construido por el equipo 1 conformado por Dani-Anyi donde también con color verde representan el área superficial inundada con relación a la altura del nivel del agua a 10 cm del punto de referencia.

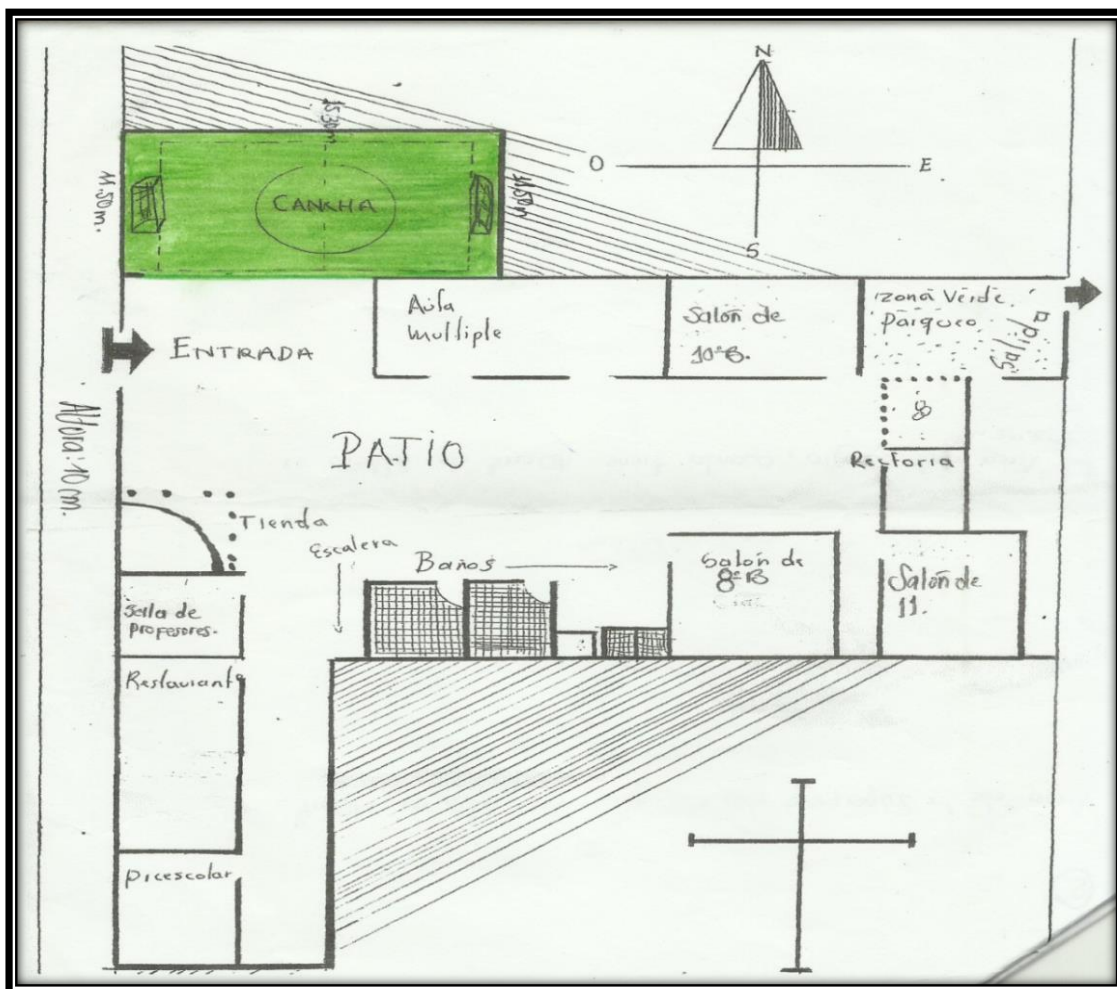


Ilustración 18: Zona inundada a 10 cm. Equipo 1 (Dani-Anyi).

Al preguntar a Dani sobre este punto de referencia responde:

Nuestro punto de referencia fue el alcantarillado que hay en la cancha y nos media, y nosotros nos mediamos por la pared que hay, ya que nosotros podíamos ver cuanta, cuando aumentaba, porque el agua pegaba a la pared y la alcantarilla está ahí, nosotros nos dábamos cuenta que a medida que el agua bombeaba la pared se iba inundando, y así inundó todo el colegio, cuando hubo la inundación (Comunicación personal, 12 de octubre de 2012).

Con relación a lo expresado por Dani, se deja ver dos situaciones, por un lado el conocimiento que los estudiantes tienen del contexto y como desde las observaciones hechas y desde la experiencia de vivir estas situaciones, le da un valor agregado y una motivación adicional al trabajo de campo y en general a las actividades.

También el estudiante al tener una visión general sobre el problema, le es más fácil adaptarse a las actividades específicas que debe realizar a través del tiempo de la investigación. Comprender un problema y saber explicarlo es parte importante en el desarrollo de las habilidades fomentadas en los participantes, debido a la exploración del contexto en el que se desenvuelve.

El hecho de que este proceso de modelación tenga como base las experiencias de la vida de los estudiantes, permite generar en ellos una actitud de participación conjunta. Este proceso realizado a través de las discusiones del grupo, permitió llegar a ideas concretas que les facilitó a los estudiantes establecer un conjunto de significados enfocados principalmente en las matemáticas.

El color verde coloreado en los planos representa la zona que primero se inunda (cancha de microfútbol) donde el nivel del agua ha alcanzado 10cm y la cancha está llena de agua por completo. Ambos equipos representaron esta altura con dicho color, situación que llamó la atención, pues la cancha esta pavimentada. El dibujo realizado por el grupo de Angélica (equipo

2), además de la cancha, muestra otra parte del colegio (patio), donde hay otra alcantarilla, asumiendo que un poco de agua también sale por allí.

Al notar que ambos equipos habían coloreado la zona inundada de 10 cm con el mismo color verde, se trató de indagar sobre el porqué la escogencia del color, el docente investigador preguntó entonces a los equipos:

Investigador: *como les pareció la experiencia.*

Dani: *interesante profe. Medir el colegio y sacar las cuentas.*

Pereira: *si profe, interesante aunque me enredé con el metro*

Investigador: *¿por qué?*

Pereira: *bueno, porque las medidas tenían metros, centímetros y el poco de rayitas, pero un compañero me explicó y ya supe.*

Investigador: *¿Cuáles rayitas?*

Pereira: *los milímetros.*

Investigador: *¿cómo hicieron para recoger la información sobre las alturas de los niveles del agua?*

Anyi: *primero le preguntamos a la Hermana (Rectora) y a don Martín (celador) y nos dijeron que primero se inundaba la cancha como a 10cm de altura del agua ya estaba toda inundada y le preguntamos que a los 20cm y que el patio también y a los 30cm todo el colegio ya estaba inundado.*

Angélica: *aja y además nosotros hemos visto cuando empieza la inundación y la hermana nos mostró unas fotos.*

Investigador: *¿Solo les preguntaron a ellos o tomaron otros datos?*

Angélica: *Vimos otras fotos que tenía la hermana y parece ahí se ve más o menos que si son 10 cm.*

Investigador: *¿Cómo identificaron las zonas inundadas?*

Anyi: *A pues con colores que era más fácil. Por ejemplo la de 10 cm de verde y la de 20 cm amarillo.*

Investigador: *¿Porque utilizaron el verde si la cancha esta pavimentada?*

Pereira: *Pues profe cuando la inundación es muy larga esa parte (cancha) se pone el agua verde y las otras (las del patio) siguen amarillas por eso nosotros las coloreamos así.*

Anyi: *si profe eso se pone verde y cuando baja el Río queda también el lodo verde.*

Todos: *aja profe.*

Con esa respuesta que es totalmente contraria a lo que normalmente se pudiera esperar, se hizo una reflexión sobre las ideas y pensamientos que tienen los estudiantes frente a las realidades que ellos vivencian. Entender los contextos y las formas de relacionarse los estudiantes con ellos podría ser un elemento por potencializar para plasmar las matemáticas a través de esas realidades. Cabe indicar que se interrumpió la entrevista por momentos y a decir verdad los estudiantes fueron observados como tratando de entender sus pensamientos y como hicieron esas representaciones que hubiera pasado desapercibida. En este sentido, la manera de los estudiantes representar con colores los estados en el que se encuentra el fenómeno y hacer esas analogías, permiten entonces reflexionar sobre la importancia de explorar las ideas de los

estudiantes, sus sentimientos, experiencias y conocimiento del contexto, es decir, indagar sobre los saberes previos de los estudiantes, para así como docentes tener mejores elementos en el trabajo desde la modelación matemática. Es de destacar que la Institución ha padecido inundaciones por largos períodos de tiempo (hasta mes y medio), entonces es razonable los colores plasmados por los estudiantes ya que el agua estancada por un largo período de tiempo se torna de color verde.

Según Londoño y Muñoz (2011) “En el proceso de modelación emergen diferentes puntos de vista de los estudiantes, puesto que cada uno ha tenido su propia experiencia, con lo cual cada estudiante hace un aporte desde su intuición, sus vivencias y sus razonamientos” (p.117). En el caso del dibujo representado con el color verde tiene un significado importante para los estudiantes, el cual, indiscutiblemente representa el producto de la experiencia vivida y el conocimiento que tienen con relación al estado del agua estancada.

En concordancia al área superficial del colegio cuando la altura del agua en el punto de referencia es 20cm, los dos equipos representaron la situación con dibujos similares al caso anterior.

En la siguiente ilustración se observa el dibujo representado por el equipo al que pertenece Angélica.

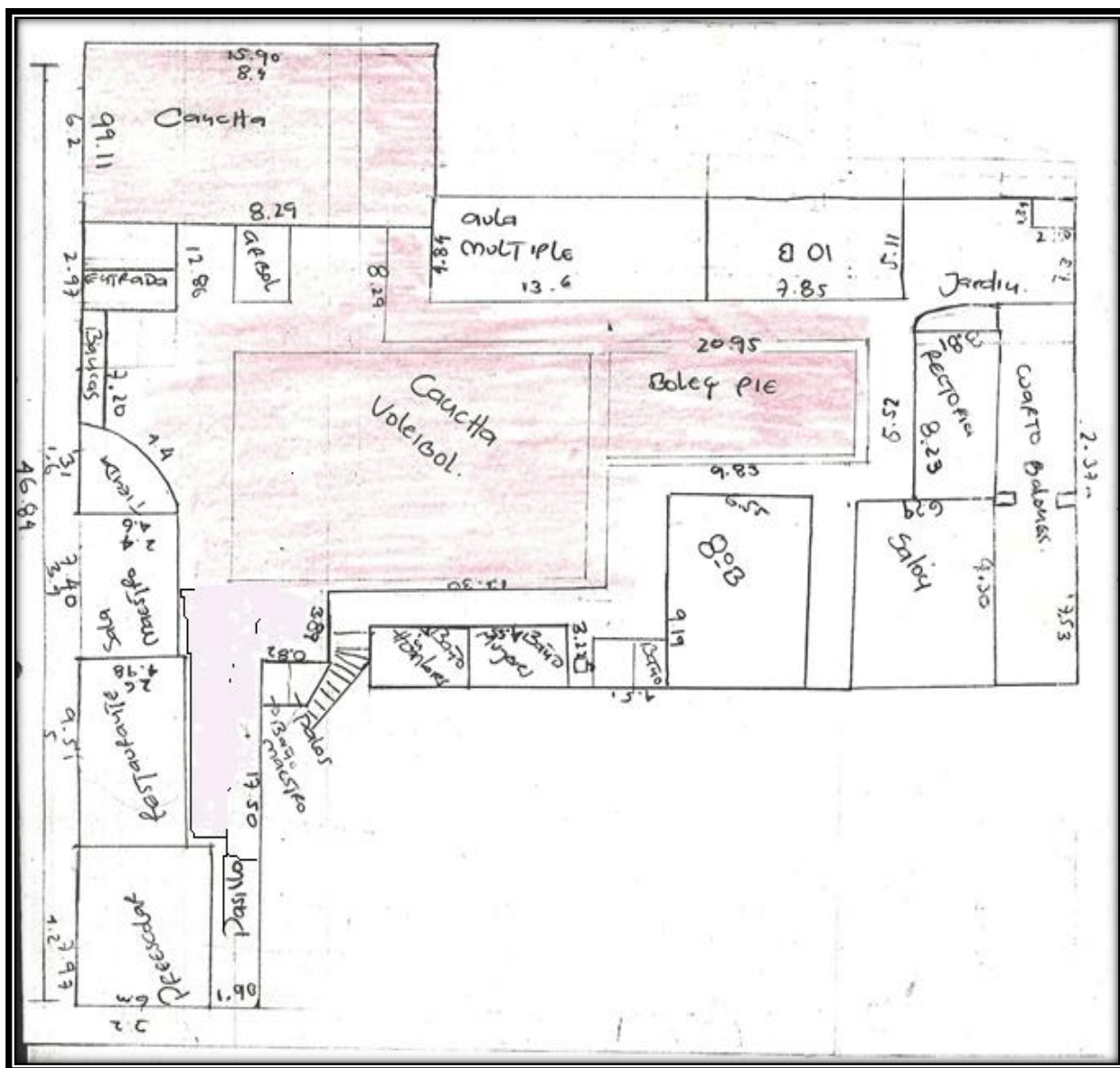


Ilustración 19: Zona inundada 20 cm. Equipos 2 (Angélica).

Este equipo de trabajo, representó con color morado toda la parte del colegio que se inunda cuando el nivel del agua en el punto de referencia es 20 cm. En la ilustración se observa que aparte de la cancha de micro-fútbol, los estudiantes dibujan el patio como zona también inundada. En este sentido consideran que a medida que el nivel del agua aumenta en el punto de referencia, esta continua expandiéndose por diferentes zonas de la Institución Educativa.

Por su parte el equipo donde está Dani hizo una representación similar, con excepción del color escogido para representar el área superficial inundada del colegio a 20 cm, como lo muestra la siguiente ilustración.

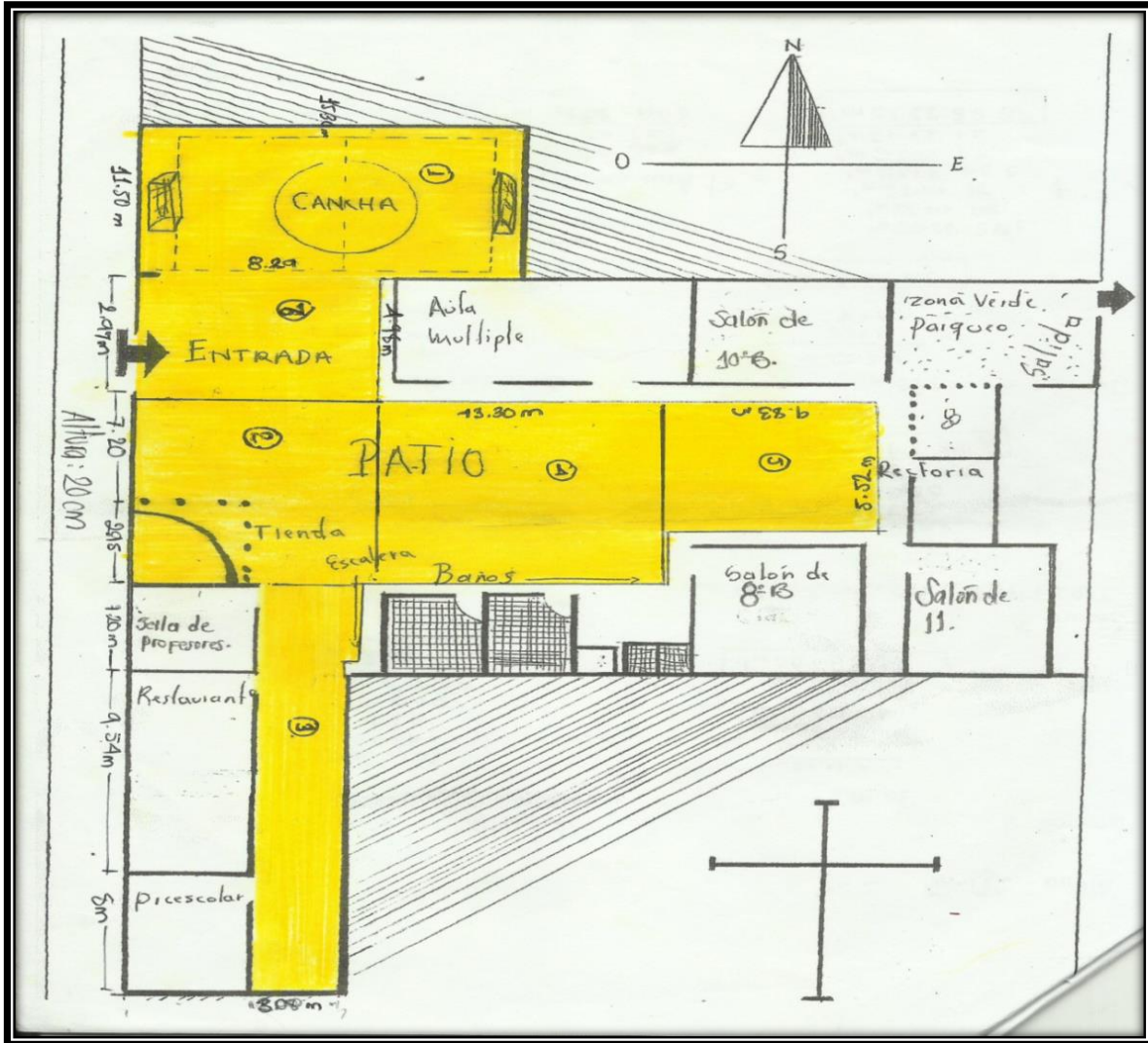


Ilustración 20: Zona inundada 20 cm. Equipos 1 (Dani).

Con relación a la zona inundada cuando la altura es 20 cm, se observa una clara similitud por parte de los dos equipos de trabajo en la selección del área del colegio afectada.

La siguiente ilustración muestra las áreas inundadas a 30cm del nivel del agua. Se destaca que el equipo Angélica-Pereira (equipo 2), no colorearon toda la superficie inundada, sin

embargo a la hora de realizar los cálculos del área a 30cm, tomaron la totalidad del área superficial del colegio y hallaron el área total de las mismas.



Ilustración 21: Zona inundada a 30 cm. Dibujo equipos 2 (Angélica-Pereira).

La siguiente ilustración muestra la Institución Educativa afectada por el fenómeno de las inundaciones, observándose ahí los niveles del agua y como estas inundan las diferentes zonas.

La siguiente ilustración muestra el dibujo representado por el equipo 1 conformado por los estudiantes Anyi y Dani.

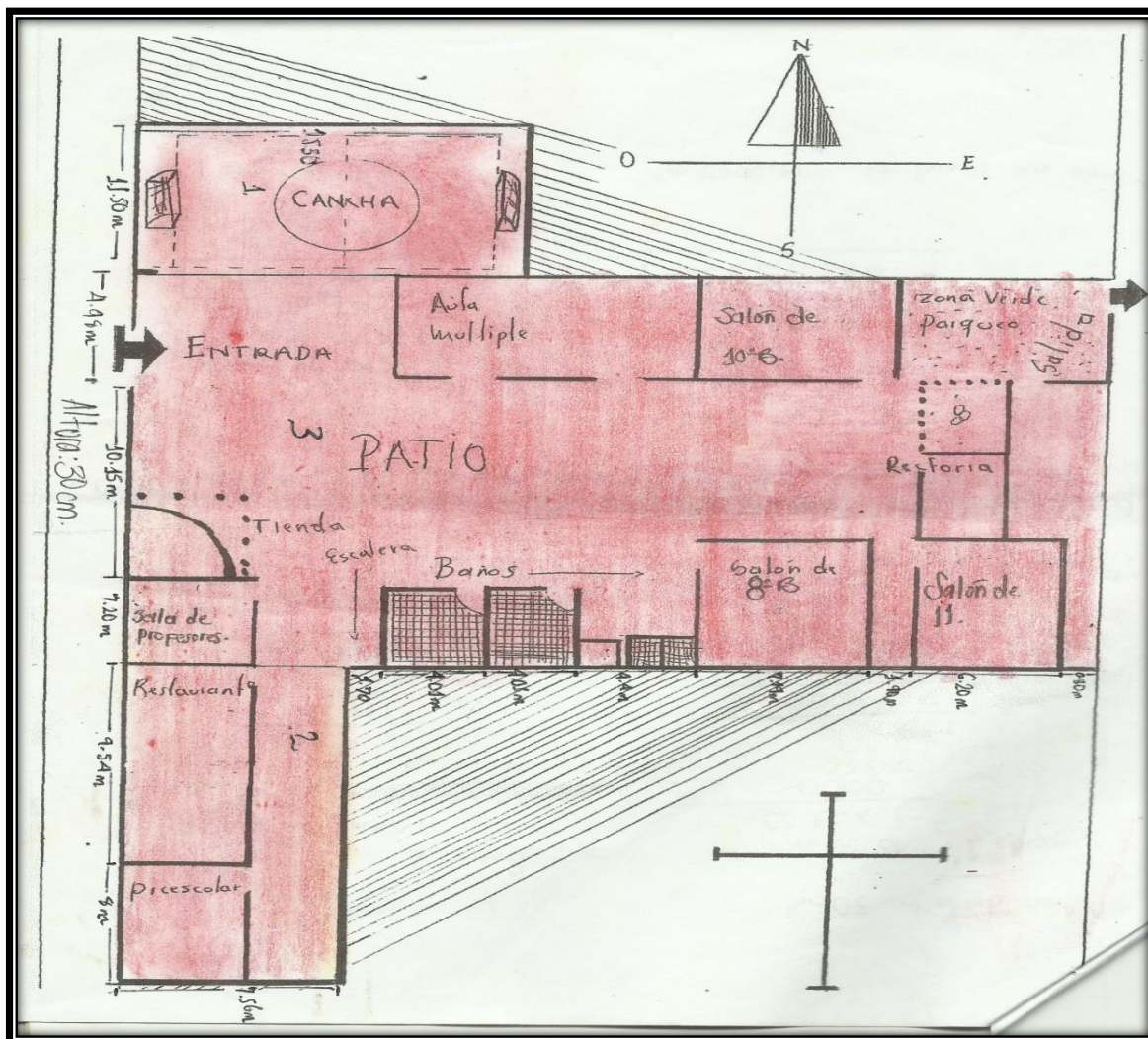


Ilustración 22: Zona inundada a 30 cm. Dibujo equipos 1 (Dani-Anyi).

Con relación a este fenómeno, cada año las inundaciones se han intensificado y la institución ha sufrido deterioro en muchas de sus partes. Sin embargo las directivas de la Institución han tratado de adecuar y hacer limpieza y mantenimiento de las zonas afectadas y por ende las alcantarillas.

La ilustración que se presenta a continuación muestra el área superficial inundada en la institución educativa cuando el nivel del agua tiene 20 cm de altura con respecto al punto de referencia.



Ilustración 23: Inundaciones en I. E. Divino Niño.

Usar una situación propia del contexto de los estudiantes, Según Londoño y Muñoz (2011), hace que, los problemas a resolver no sean ajenos a ellos, sino por el contrario les pertenecen y, sobre todo, los incitan a responder. Esto genera en los estudiantes una apropiación y una actitud de responsabilidad en el rol que deben asumir para lograr decisiones razonables sobre ellas. Además, las situaciones hacen que despierten en los estudiantes actitudes de liderazgo, argumentación y reflexión frente a los problemas que se generan de la situación de

acuerdo la complejidad que pueda presentarse. Los estudiantes al ser partícipes en procesos de modelación, se proyectan como personas autónomas en sus formas de pensar y razonar matemáticamente.

En este mismo sentido y orientado por las evidencias anteriormente mencionadas, los estudiantes calcularon las áreas inundadas a 10cm de altura, 20cm y 30cm con relación al punto de referencia. Estos resultados, fueron calculados como se especifica en la siguiente pregunta:

Si algunas de las figuras son irregulares, es decir, no tiene una forma conocida como rectángulos o cuadrados ¿Cómo hallarías el área de estas secciones?

Para resolver esta pregunta los estudiantes identifican todas las zonas inundadas, las cuales nombran por secciones y luego hacen una descomposición de las áreas irregulares, para formar rectángulos y cuadrados. La siguiente ilustración muestra el reparto que hicieron para calcular las áreas inundadas

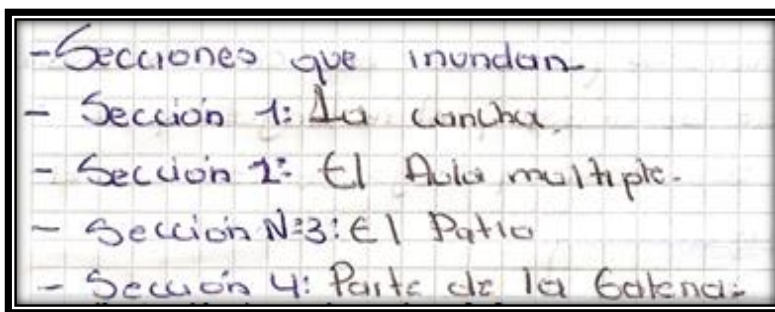


Ilustración 24: Sección inundada- Equipo 2(Angélica-Pereira).

En la ilustración 8 los estudiantes caracterizaron las secciones del colegio e identificaron cuales son regulares, las cuales calculan asociadas a un proceso de medida según los argumentos

de Freudenthal (1983), además algunas secciones por ser irregulares, los estudiantes utilizaron diversas estrategias haciendo comparaciones, traslaciones, repartos, etc. .

Al separar las secciones, los estudiantes en primer lugar ambos midieron la sección 1 (cancha) tomando el largo y el ancho y utilizando la fórmula.

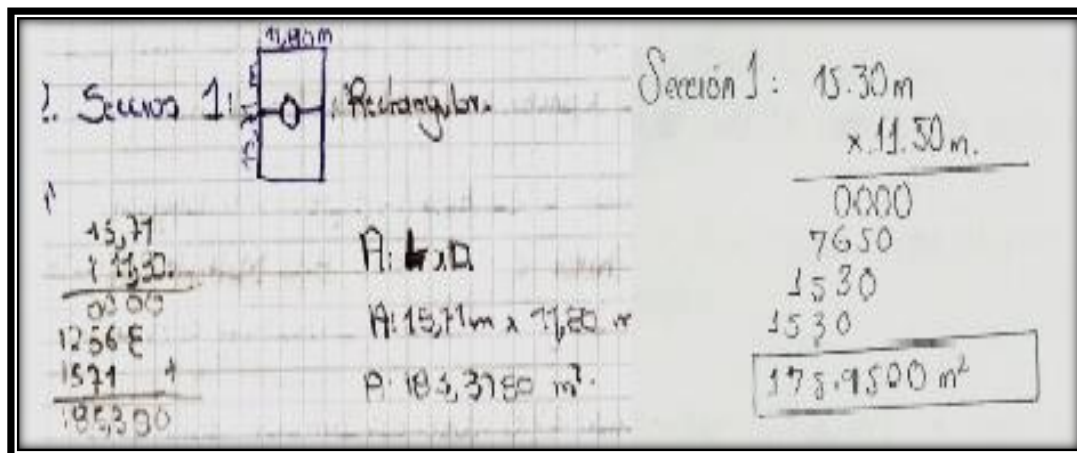


Ilustración 25: Sección regular. Equipos 2 y 1.

La ilustración anterior muestra el proceso seguido por los estudiantes para hallar el área superficial de la cancha. En el procedimiento utilizaron el área como una magnitud bidimensional, que permite medirla en función de la longitud. Luego teniendo en cuenta que la cancha es rectangular, utilizan $A = b \times h$.

Al medir el patio y calcular las áreas, los equipos 1 y 2 hicieron el proceso mostrado por (Olmo et ál. 1993) donde se hacen transformaciones y asociaciones a las figuras irregulares. La siguiente ilustración da muestra de ello.

En h: 20cm la forma que presenta es una forma irregular; que es como la formación de varios rectángulos.

Ilustración 26: Sección irregular del patio.

La siguiente ilustración muestra como los estudiantes hicieron los cálculos descomponiendo las figuras y haciendo la suma de áreas para encontrar el área superficial total.

Sección 3: PATIO IRREGULAR

Alto: 20cm

Sección 1:

Sección 2:

Sección 3:

Sección 4:

Sección 5:

Sección 6:

El Área en 20cm³ de altura es 664.3335 m²

Sección 1 del patio: 9,48 m x 9,10 m. A: 9,10 m x 9,48 m. A: 86,2680 m²

Sección 2 del patio: 9,60 m x 24,00 m. A: 24 x 9. A: 24,60 m x 9,60 m. A: 236,1600 m²

Sección 3 del patio: 4,48 m x 4,93 m. A: 4 x 9. A: 4,48 m x 4,93 m. A: 22,1024 m²

Sección 4: 7,20 m + 9,54 m + 8 m = 24,74 m. 24,74 m x 3,03 m. A: 76,3992 m²

Sección 5: 9,88 m x 5,52 m. A: 54,3636 m²

Sección 6: 4,98 m x 3,29 m. A: 16,3842 m²

Summary: 175,8500 m² + 24,1435 m² + 76,3992 m² + 54,2616 m² + 41,2392 m² + 566,7335 m² = 664,3335 m²

Ilustración 27: Cálculo de área figura irregular. Equipos 2 y 1.

En este propósito los estudiantes hicieron descomposición del patio y hallaron el área por secciones. Se observa que el equipo 2 (Angélica-Pereira) toma el área del patio y dibuja los rectángulos que formaron para sumar todas las áreas. El equipo 1 (Dani-Anyi) hace la descomposición de las áreas directamente en el plano, el cual fue numerado por secciones 1, 2, 3...

Para la sección 4 del colegio que el equipo 2 llamó “materas”, tuvieron dificultades puesto que la figura no se podía descomponer de forma directa como cuadrado y rectángulo, ya que en esta se expresaban también círculos, por tanto tuvimos que recordar el área de un círculo.

La actividad continuó después de forma normal. A continuación se ilustra la forma de la sección para calcular el área.

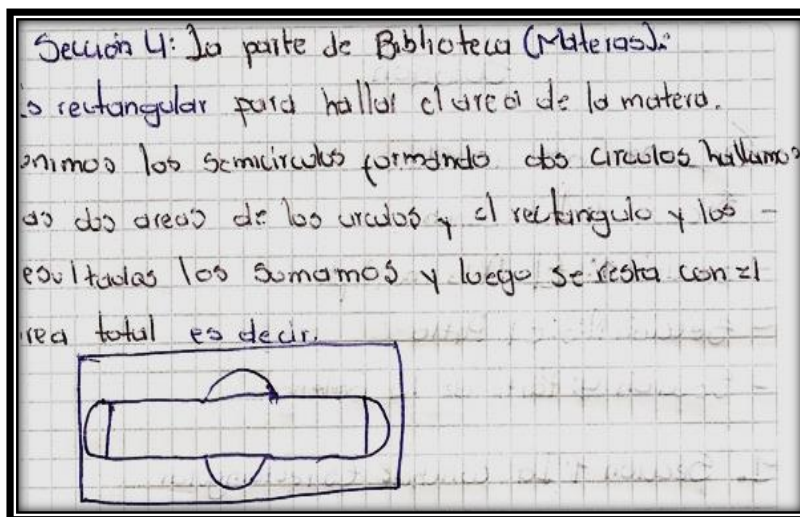


Ilustración 28: Cálculo zona de materas.

Los cálculos de los dos grupos de trabajo fueron más o menos similares, es decir calcularon a través de medidas directas en el caso de la cancha de micro-fútbol, por relaciones entre longitudes, por descomposición y conservación en el caso de la zona del patio, pues éste es de forma irregular.

Por último hallaron el área superficial del colegio, cuando el nivel del agua está a 30cm de altura con relación al punto de referencia, ya que en ese instante el colegio está totalmente inundado. La ilustración siguiente muestra los resultados del equipo 2 conformado por los participantes Angélica y Pereira.

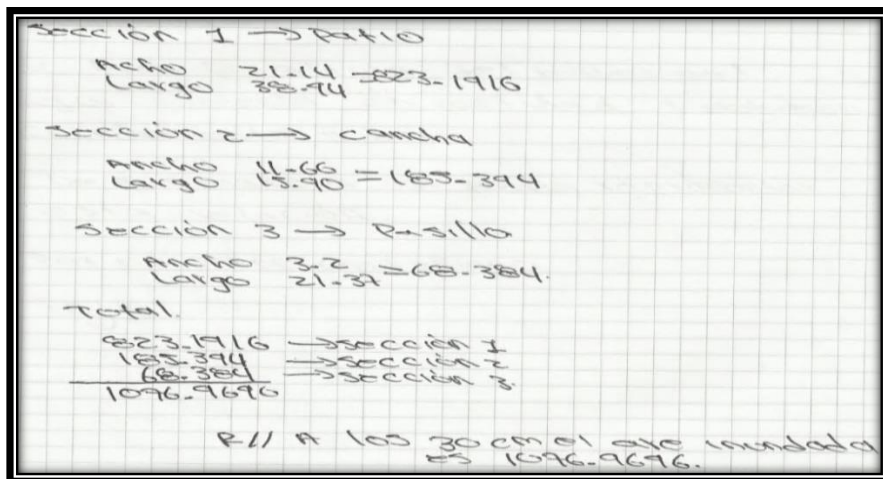


Ilustración 29: Área total inundada nivel del agua 30cm.

Teniendo los dos equipos los resultados de las áreas inundadas a 10cm, 20cm y 30cm respectivamente, se procedió a seguir avanzando en el trabajo.

Con las siguientes preguntas se pretendió que los estudiantes empezaran hacer relaciones entre las medidas y encontraran relaciones con el fin de ir acercándonos a la construcción de modelos que permitieran generalizar dichas variables. El equipo Angélica-Pereira, luego de revisar las secciones, hace corrección pues les había faltado el área sección balones, ya que estaba cerrado.

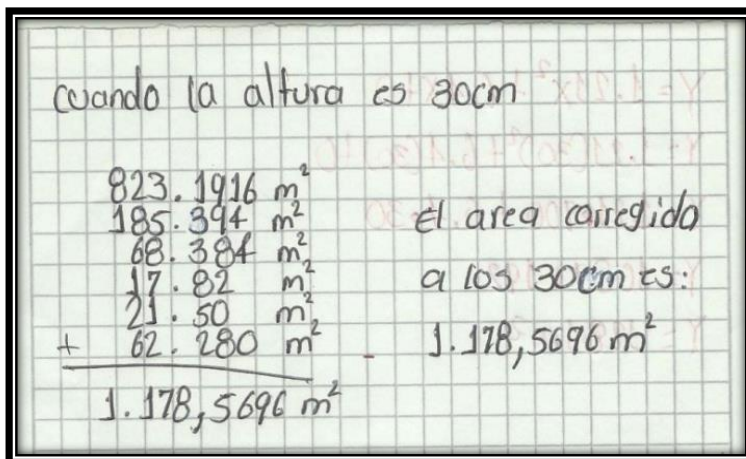


Ilustración 30: Área corregida. Equipo Angélica-Pereira.

El conocimiento del contexto por parte de los estudiantes, la interacción con su cultura media con la construcción de modelos matemáticos. La siguiente tabla resume los resultados del cálculo de las áreas de inundación dependiendo de la altura.

Altura del agua (cm)	10	20	30
Área superficial de agua (m ²)	185	612	1178

Tabla 3. Área superficial del agua vs altura. Equipo 2 (Angélica-Pereira).

Teniendo en cuenta los resultados, los estudiantes continúan avanzando en encontrar semejanzas, asociaciones y comparaciones entre las áreas superficiales encontradas. Por tanto se les formula la siguiente pregunta que intenta hacer una relación entre áreas.

¿Cuántas veces puede caber el área que primero se inunda en el área total del colegio? La siguiente ilustración muestra la manera como los equipos 2 (Angélica-Pereira), resolvieron la pregunta.

Handwritten mathematical work on lined paper. The top line shows the division: $1,178.5696m \div 185.394 =$. Below this, there are several lines of calculations: $1178.57 \div 185.41$, $66170 \cdot 6.35$, and (10550) .

Ilustración 31: Comparación primera área inundada-área total. (Angélica-Pereira).

Con relación a la ilustración anterior, el equipo angélica-Pereira, toma el área de la sección que primero se inunda como magnitud unidimensional y la compara con el área total. Esta interpretación, utilizada por el equipo 2 está asociada al proceso de medida establecido por Vergnaud (1981). El resultado muestra que el área total es 6,35 veces el área que primero se inunda. El equipo 2 realizó una resta donde muestra la cantidad de área de más que hay entre el área total y el área que primero se inunda (cancha).

Otro aspecto a tener en cuenta es la relación que se establece entre los cálculos de las áreas que realizaban en el antiguo Egipto con el fin de conocer las partes inundadas con lo cual definían en qué lugares poder cultivar, en este sentido, la incorporación de planos, los cálculos numéricos establecidos por los estudiantes para calcular cuánta área inundaba su institución educativa, permiten establecer una relación de intereses y necesidades, con lo cual históricamente el hombre ha logrado implantar y entender los contextos.

4.3. Hacia la construcción de modelos matemáticos: el caso del área y el volumen

A continuación se desglosa el proceso que utilizaron los estudiantes para construir sus propios modelos matemáticos a partir de las medidas del área superficial y el volumen de agua que emerge dentro de un fenómeno de inundación y que fueron identificados por los estudiantes como elementos de las matemáticas presentes en dicho contexto.

En este mismo sentido, el reconocer, discutir, analizar y reflexionar sobre las magnitudes que intervienen en las situaciones presentadas, fueron la base para una aproximación a la construcción de un modelo de la situación, teniendo en cuenta, el establecimiento de relaciones entre variables. Dicha aproximación se realiza inicialmente por medio de la constitución de descripciones verbales que favorecen la identificación de una relación (directa o inversa) que emerge directamente del contexto del problema.

4.3.1. Hacia la construcción de un modelo matemático: área

En este apartado se muestra la manera como los estudiantes construyen modelos matemáticos relacionados con el área superficial que inunda las diferentes secciones del colegio dependiendo de la altura del nivel del agua en un punto de referencia.

La observación directa de la situación y el conocimiento del contexto, permitió a los estudiantes establecer una correlación entre esas dos variables, pues los estudiantes han observado que a medida que el nivel del agua aumenta, esta se va expandiendo. Para evidenciar con los estudiantes la existencia de una relación de dependencia entre el área superficial y la

altura del agua en un fenómeno de inundación se les hace la siguiente pregunta: *¿Hay alguna relación entre el área superficial inundada y la altura del nivel del agua en el punto de referencia? ¿Por qué?* Los estudiantes consideran que hay dicha relación, responden:

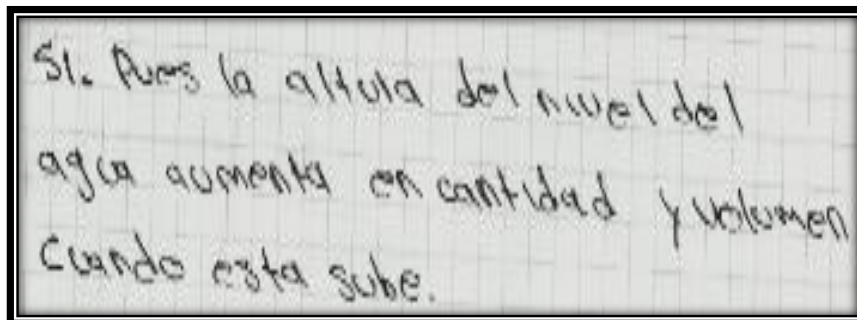


Ilustración 32: Relación área-altura. Equipo 2(Angélica-Pereira).

Al establecer los estudiantes la relación área superficial-altura, intentan observar cómo se puede generalizar matemáticamente. Los estudiantes perciben una situación de dependencia entre esas dos magnitudes, identifican que la variable dependiente es el área superficial del agua mientras que la variable independiente es la altura de la misma. Se plantea analizar si la relación que hay, de alguna manera podría direccionarse a constituir una función o aproximarse a alguna de ella, por lo tanto se les propone a los dos equipos de trabajo la siguiente pregunta:

¿De qué forma se podría representar esa relación?

Los dos equipos hacen distintas representaciones, donde intentan por diferentes formas dibujar las relaciones, pues en clases regulares se había utilizado el plano cartesiano para representar funciones lineales. De igual forma se había trabajado en el aula con los estudiantes en estadística descriptiva, los diagramas de barras e histogramas, por lo tanto, los equipos de trabajo tomaron las dos formas para construir sus representaciones. Estas formas se presentan en las siguientes ilustraciones. Primeramente la representación hecha por el equipo 2.

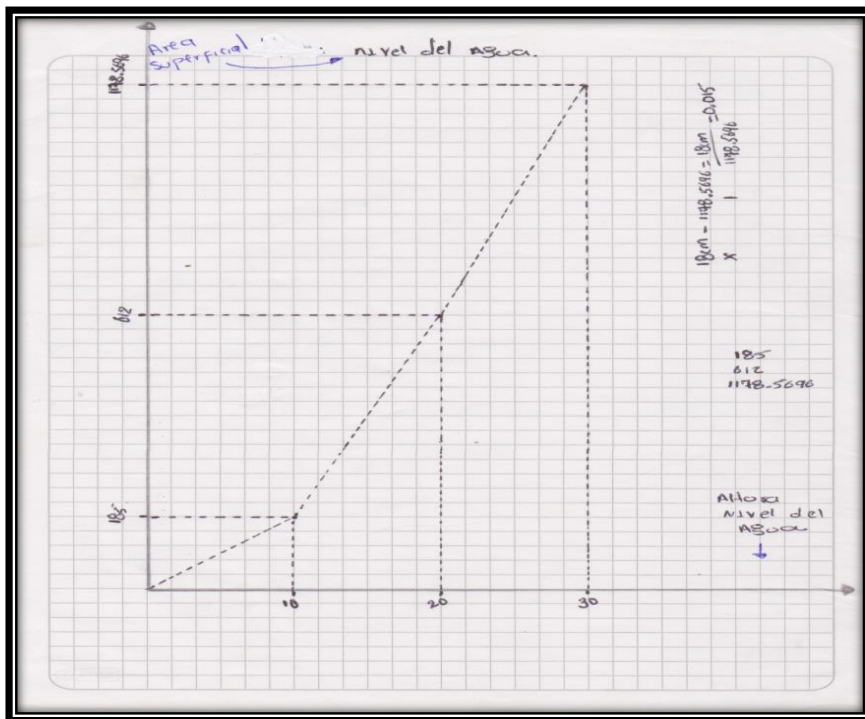


Ilustración 33: Representación equipo2-Angélica.

Esta representación del equipo 2 en el plano cartesiano muestra la forma de aproximar la gráfica a una función lineal, pues otro tipo de funciones no se había trabajado en clase. En el momento en que se graficaba. Se planteó una pregunta: *¿qué tipo de gráfica habían construido?* Un estudiante de este equipo, Pereira manifestó que: *“es una línea recta pero que está torcida”*. El equipo construyó la gráfica teniendo en cuenta una escala vertical asumida por ellos, donde cada metro cuadrado del terreno representa en el papel 0.015 cm. El equipo 1 conformado por los estudiantes Dani-Anyi, representó la relación área vs altura a través de un diagrama de barras como se muestra a continuación.

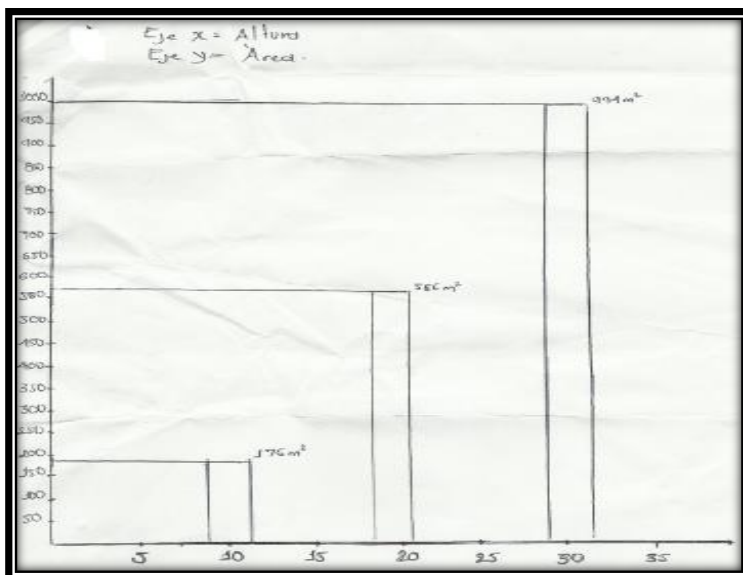


Ilustración 34: Representación equipo1-Anyi.

Ambos equipos evidenciaron que a medida que aumenta la altura del nivel del agua, el área superficial de la misma también aumentaba, expandiéndose por el terreno de la Institución. En la representación de los dibujos ambos equipos coincidieron en que el área superficial dependía de la altura, luego el área fue ubicada en el eje “y” la altura del agua en el eje “x”.

Al establecer los estudiantes la relación entre el área superficial inundada y la altura, intentan observar cómo se puede generalizar matemáticamente. Perciben una situación de dependencia entre esas dos magnitudes. Por consiguiente, se les propone: “Plantea una expresión matemática que permita relacionar las dos variables (altura y área) de tal forma que se pueda encontrar el área a partir de cualquier altura del nivel del agua en el punto de referencia”. En primera instancia, ambos grupos tienen dificultades para encontrar una expresión, pues en clase solo se había trabajado la función lineal y los sistemas de ecuaciones lineales (2 x 2), y la gráfica obtenida no se ajustaba a una línea recta, entonces se les sugiere buscar en libros y en Internet diferentes gráficas de funciones. El equipo 1 (Angélica y Pereira) encontró algunas funciones

cuadráticas, cúbicas y exponenciales, las cuales relacionaron con su dibujo. La siguiente ilustración muestra la búsqueda de uno de los integrantes de este equipo.

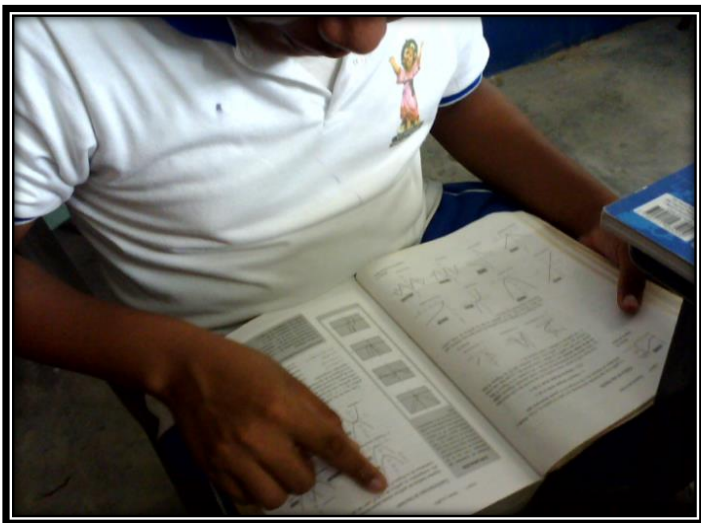


Ilustración 35: búsqueda de gráficas. Pereira.

El equipo 1 tiene dificultades en su búsqueda, pues los diagramas de barras que buscan no se parecen a los encontrados por ellos y descritos en la ilustración 34, entonces concluyen que el plano cartesiano visualiza mejor la situación anterior. Por lo tanto hacen la siguiente representación.

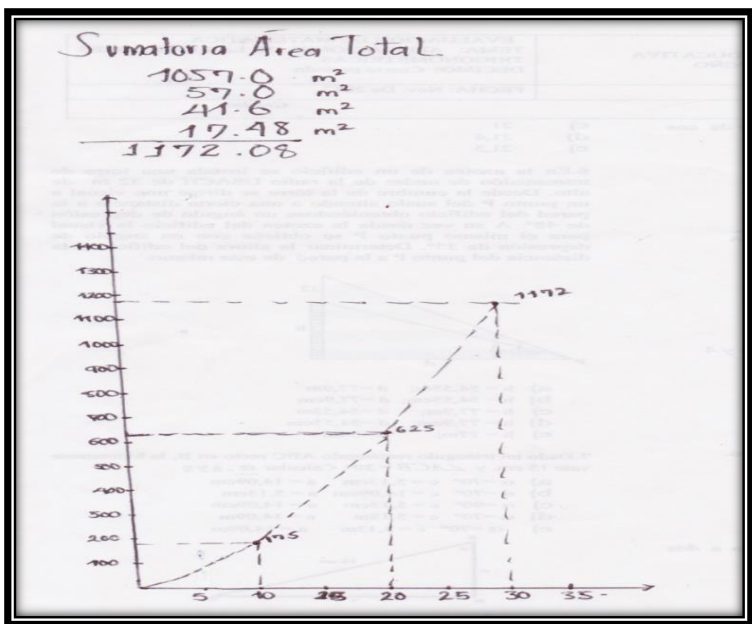


Ilustración 36: Nueva representación gráfica de área-Equipo 1(Dani-Anyi).

Hay que aclarar que esta representación tiene una corrección con relación a la gráfica de barras mostrada anteriormente por este equipo, pues no habían tenido en cuenta una parte de la Institución ubicada detrás de la rectoría (cuarto de balones), pues estaba cerrado y los estudiantes no tuvieron acceso en el momento de medir, por lo que tocó nuevamente hacer el proceso de medida en el terreno y calcular las áreas correspondientes. Luego el equipo 1(Dani-Anyi) calculó el área total del colegio en $1172,08\text{m}^2$. Para los estudiantes Dani y Anyi, la gráfica anterior es una aproximación a la función lineal, pues es el tema que se había trabajado en clase. Sin embargo, observan nuevamente que no es una línea del todo recta por lo que ambos equipos relacionan inmediatamente con la que ellos encontraron en libros e internet. Al respecto Dani comenta: *“se parecen a la que tenemos aquí”*. Refiriéndose a una de las gráficas buscadas en los libros.

En clase habitual de matemáticas se trabajó con los estudiantes la función cuadrática, su definición y propiedades, se abordó una situación matemática que relacionaba el lado del cuadrado con su área, donde los estudiantes orientados por el docente investigador lograron construir la ecuación $y=x^2$, la cual al sustituir cualquier medida del lado de un cuadrado en la variable “x”, permitía encontrar su área. Desde la perspectiva de Biembengut y Hein (2006), quienes consideran que en forma paralela se puede trabajar el contenido curricular en conexión con la pregunta a resolver. Teniendo en cuenta lo trabajado en las clases, los estudiantes observaron que la función cuadrática se ajustaba mejor a la que ellos habían elaborado, Cabe aclarar que dicho ajuste no es total con respecto a los datos, sino una aproximación realizada por los estudiantes; tal vez la gráfica obtenida no representa alguna función conocida. Por lo tanto, establecieron una analogía entre el área superficial inundada con el área del cuadrado y el lado

del cuadrado con la altura del nivel del agua. Optaron por considerar que la función dibujada con relación al área superficial inundada versus la altura del nivel del agua se ajustaba también a una función cuadrática que tiene como ecuación general $y = ax^2 + bx + c$.

Para la construcción del modelo se orientó al estudiante con algunas preguntas que pudieran darles luces para avanzar en el proceso: *¿Qué tipo de función es?* con referencia a la dibujada por los estudiantes según el ajuste realizado, *¿Cuáles son las variables dependientes e independientes involucradas?*, *¿Son conocidas dichas variables?* Se discutió cuáles eran las variables dependientes e independientes que los estudiantes habían establecido y cómo ellas ya eran conocidas en las gráficas. Según Londoño y Muñoz (2011) "...los estudiantes comienzan estableciendo las variables y las relaciones que se observan entre ellas desde el contexto particular" (p. 152). En este caso, las relaciones entre las variables obtenidas del contexto auténtico. Los estudiantes evocan entonces los temas vistos en clase y hacen deducciones a partir de las variables. Una estudiante del equipo 2, Anyi, afirma: "Si reemplazo las variables, tendré tres términos desconocidos: la a , la b y la c . Se les orientó entonces que la c es como la b de la ecuación lineal. Pereira dijo enseguida: "Entonces es cero porque la gráfica pasa por 0, 0". Por lo tanto, hicieron las sustituciones de las alturas aplicando 10 cm y 20 cm, que tomaron como variables del eje x , y las áreas correspondientes con estas alturas en el eje y . De esta forma, establecieron un sistema de ecuación lineal de 2×2 . Utilizando el método de igualación, conocido por ellos, lograron realizar los cálculos necesarios y generaron dos ecuaciones lineales con variables a y b . La siguiente ilustración muestra el proceso de los dos equipos.

$$y = a(10)^2 + b(10) + c$$

$$a(100) + b(10) + 0$$

$$y = a(20)^2 + b(20) + 0$$

$$a(400) + b(20) + 0$$

$$y_1 = 100a + 10b$$

$$y_2 = 40a + 20b$$

$$\begin{cases} 375 = 100a + 10b \\ 604 = 400a + 20b \end{cases}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$185 = a(10)^2 + b(10) + c$$

$$185 = 100a + 10b + 0$$

$$612 = 400a + 20b$$

$$185 = 100a + 10b$$

Ilustración 37: Construcción de modelo-área. Equipos 1 y 2.

Después de tener los sistemas de ecuaciones lineales (2x2). Ambos grupos utilizaron el método de eliminación por igualación, donde despejaron la misma incógnita en ambas ecuaciones y hallaron los valores respectivos de a y b . Luego reemplazaron estos valores de a y b en la función original, es decir, en la función cuadrática y así encontraron los siguientes modelos que pueden generalizar las relaciones entre el área superficial y la altura del nivel del agua en un punto de referencia. Las siguientes ilustraciones muestran los modelos matemáticos.

$$y = 1.21x^2 + 6.4x + 0$$

Ilustración 38: Modelo matemático. Equipo 2 (Pereira-Angélica).

$$y = 1.27x^2 + 4.8x + 0$$

Ilustración 39: Modelo matemático. Equipo 1 (Dani-Anyi).

Ambos equipos llegaron a la construcción de sus propios modelos matemáticos donde:

Y = área superficial inundada dada en m^2 .

X = altura del nivel del agua en un punto de referencia dada en cm.

El modelo matemático construido fue probado para las alturas de 10cm y 20cm, las áreas coincidieron con las encontradas en el terreno. Luego probaron para una altura de 30cm, para la cual los resultados fueron bastante aproximados a la medida calculada en el terreno. El equipo 2 (Angélica-Pereira) hace el siguiente cálculo.

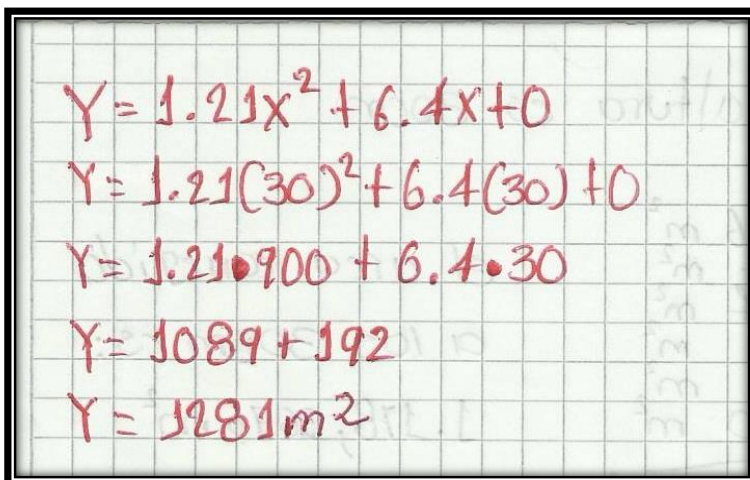

$$\begin{aligned} Y &= 1.21x^2 + 6.4x + 0 \\ Y &= 1.21(30)^2 + 6.4(30) + 0 \\ Y &= 1.21 \cdot 900 + 6.4 \cdot 30 \\ Y &= 1089 + 192 \\ Y &= 1281 m^2 \end{aligned}$$

Ilustración 40: Prueba modelo matemático para altura de 30cm. Angélica-Pereira.

En el proceso anterior se muestra que al remplazar la altura de 30 cm en el modelo matemático, se obtiene un resultado de área superficial de $1281m^2$ mientras que el área superficial medida en el terreno es de $1178,57m^2$.

Con relación a los resultados los estudiantes comparan en un plano cartesiano las dos representaciones, es decir, la medida en el terreno y la elaborada según el modelo. Observando la representación hecha por el equipo de trabajo, se mira que el desfase no es mucho, lo que indica que hay una aproximación entre el modelo matemático encontrado y las medidas calculadas por

los estudiantes en el terreno. La siguiente ilustración muestra las dos gráficas, la del modelo construido y la de la medida calculadas en el terreno.

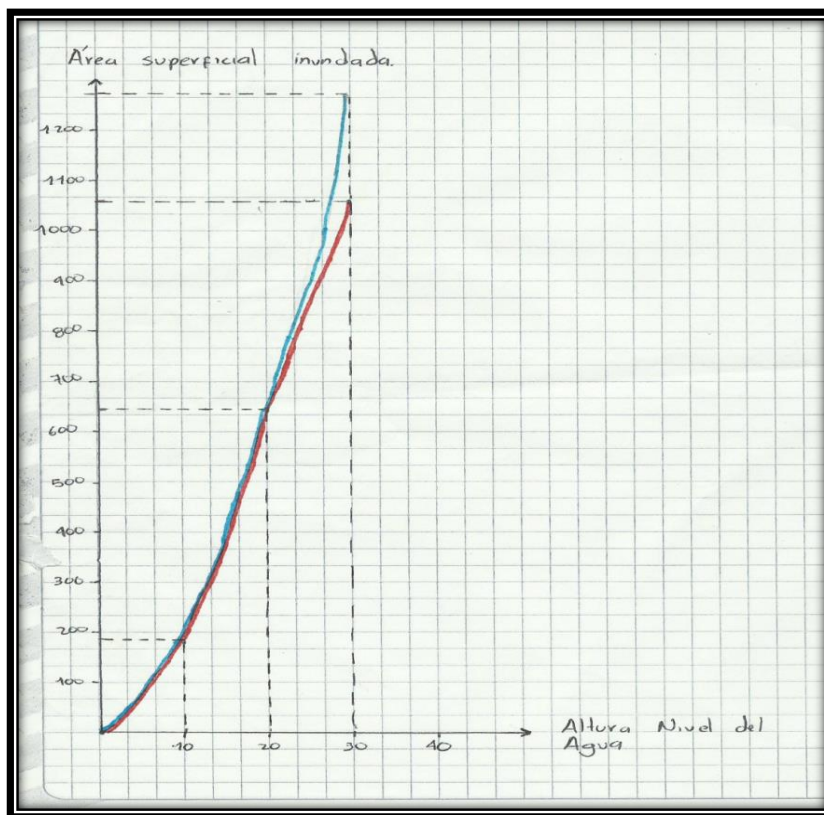


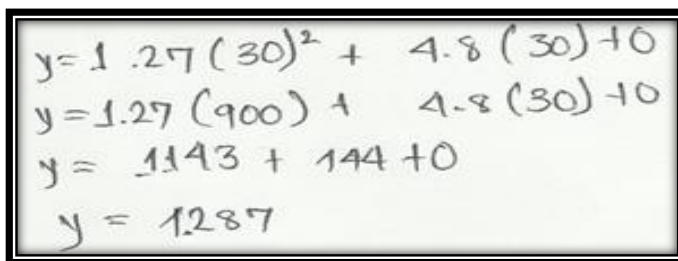
Ilustración 41: Modelo matemático-medida calculada. Equipo 1(Dani-Anyi).

En la gráfica anterior se observa la línea curva marcada de azul que representa el área superficial inundada según el modelo matemático establecido por los estudiantes Anyi y Dani; y la línea curva roja representa el valor de las áreas medidas y calculadas por los estudiantes dependiendo de la altura del nivel del agua en el punto de referencia.

Al socializar las conclusiones, Angélica afirma que: *“el resultado en la gráfica se observa que no es mucho la diferencia que hay entre las dos líneas”*. Al respecto Pereira dice: *“profé eso da casi igual. Yo creo que da más exacto porque por ejemplo la medida del cuarto de balones que está detrás de la rectoría no lo medimos bien (medida indirecta) porque estaba*

cerrado y no había llaves y la parte de las escalas nos hizo falta”. Las dos curvas se observan casi superpuestas. Los estudiantes consideran que ha habido una buena aproximación.

El equipo 1 por su parte al sustituir la altura de 30cm en su modelo matemático obtuvo el siguiente resultado.



$$\begin{aligned}
 y &= 1.27(30)^2 + 4.8(30) + 0 \\
 y &= 1.27(900) + 4.8(30) + 0 \\
 y &= 1143 + 144 + 0 \\
 y &= 1287
 \end{aligned}$$

Ilustración 42: Área con altura 30cm según modelo. Equipo 1. Dani.

Al remplazar la altura de 30cm en la ecuación encontrada, se obtiene como resultado el área superficial de 1287m^2 que comparados con los 1172m^2 calculados de forma directa, da una buena aproximación.

Otro aspecto importante tiene que ver con los resultados de las áreas inundadas cuando el nivel del agua es de 30cm según los dos modelos construidos por los estudiantes puesto que para el equipo 1 (Anyi y Dani) dicha área superficial dio como resultado 1287m^2 y para el equipo 2 (Angélica y Pereira) el área superficial fue de 1281m^2 lo que sorprendió y alegró a los estudiantes puesto que los procesos de medidas fueron diferentes y los modelos matemáticos encontrados variaron un poco en los valores de las constantes a y b , sin embargo las áreas superficiales calculadas según los modelos son muy semejantes. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos por los estudiantes, se refleja cómo a la luz de experimentar con un contexto auténtico se ve comprometido un modelo matemático, a través del cual los estudiantes pueden

observarlo y explorarlo teniendo en cuenta elementos matemáticos presentes y relacionados entre sí con dicho contexto, de acuerdo con Villa-Ochoa (2007).

Se sugirió a los equipos de trabajo que los modelos encontrados fueran graficados en el computador. Moreno-Armella & Hegedus (2008) resaltan que la tecnología es otro ejemplo de descripción representativa, especialmente cuando se usa la geometría interactiva. Se utilizó, por lo tanto, la tecnología, con el fin de que los estudiantes reconocieran y describieran el tipo de gráfica encontrada y pudieran observar otros resultados de la representación de áreas superficiales dependiendo de la altura. El modelo matemático construido por el equipo 1 fue dibujado en Geogebra, permitiendo a los estudiantes visualizar la gráfica y establecer las diferentes áreas con relación a las diferentes alturas superiores a 30 cm.

Por otro lado se sugirió a los equipos de trabajo que los modelos matemáticos encontrados fueran graficados en el computador, con el fin de que visualizaran, reconocieran y describieran el tipo de gráfica encontrada y pudieran observar otros resultados de la representación de áreas superficiales dependiendo de la altura. La siguiente gráfica muestra la representación.

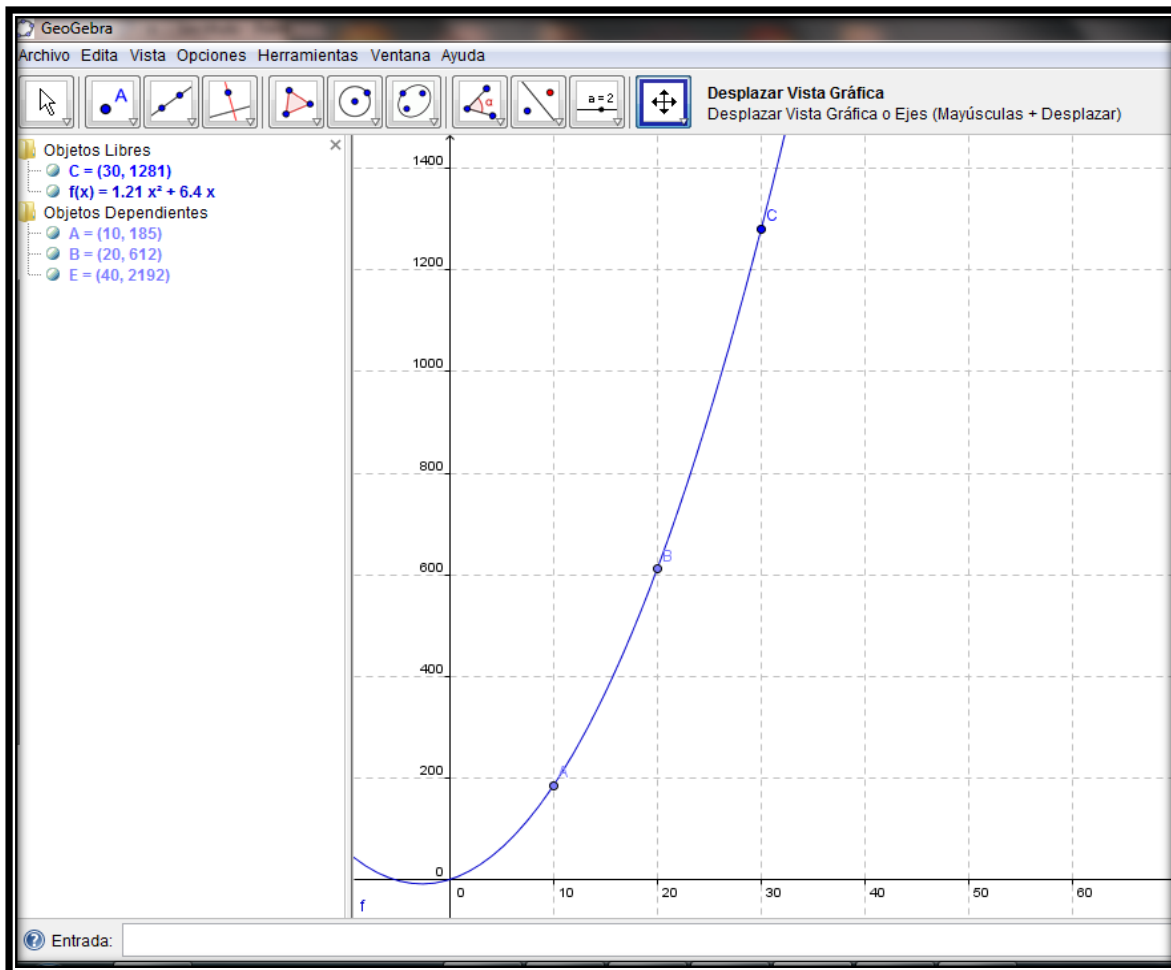


Ilustración 43: Representación modelo matemático Angélica-Pereira. Geogebra.

Los estudiantes se sintieron sorprendidos por la construcción hecha en este programa e inmediatamente visualizaron las diferentes áreas superficiales inundadas con sus respectivas alturas, lo que facilitó la exploración de nuevas áreas superficiales.

Al respecto el estudiante Dani declaró:

Me parece muy bueno profe porque solamente con dos medidas uno puede encontrar cuanta área puede haber en tanta altura, porque si en 50 uno puede, no

tiene que hacer tanto ejercicio para llegar a ese resultado, con este programa solamente uno tiene que ver donde se intersecta y de una vez tiene el resultado.
(Comunicación personal, 10 de marzo de 2013)

Con respecto a lo observado en el programa Geogebra, Angélica manifiesta:

Pues a mí la gráfica me gusta porque es una gráfica, por lo menos nosotros buscamos los primeros tres, los primeros tres porcentajes y la gráfica, el programa nos ayuda a de pronto ya decirnos el cuarto, por lo menos, no fueron los tres no buscar el cuarto el quinto y a continuación ósea ya no tendríamos que hacer ecuaciones y operaciones porque ya la gráfica automáticamente nos da esos porcentajes (Comunicación personal, 10 de marzo de 2013).

Por lo tanto, el uso de la tecnología para representar resultados permitió a los estudiantes interactuar con los registros no determinados en el papel, establecer relaciones y visualizaciones de una forma más rápida, facilitar la interpretación y simplificación. Los estudiantes observan, por ejemplo, que para la altura de 1 m (100cm), el área superficial es de 12.800 m^2 . Entonces el surgimiento del modelo les permitió prever resultados sobre las inundaciones desde alturas mayores de 30 cm e hizo que reflexionaran y conjeturaran sobre las comunidades inundadas a esa altura del nivel del agua.

Los diferentes ambientes cercanos a los estudiantes, pudo suministrar en el estudio un estado favorable sobre la importancia de la construcción de relaciones involucradas en áreas de

la modelación matemática que los estudiantes pueden abordar en su propio contexto. La modelación matemática observada desde estas experiencias, han permitido analizar que contribuye grandemente a potenciar en los estudiantes intereses por intervenir directamente en su entorno próximo. En estas circunstancias, optar por una matemática orientada a la solución de problemas y situaciones del contexto auténtico con el que interactúa el estudiante, actúa como una estrategia alternativa para la formación de personas con conocimiento en las matemáticas aplicadas, sino como ciudadanos reflexivos frente a sus propios problemas sociales, ambientales y culturales.

A continuación se muestra de manera análoga al análisis anterior, cómo los estudiantes lograron construir un modelo matemático que permitió relacionar la altura del nivel del agua con relación al volumen aproximado de agua que inunda la Institución Educativa.

4.3.2. Hacia la construcción de un modelo matemático: Volumen

La pregunta que movilizó la consecución de un modelo matemático donde se pueda predecir el volumen de agua dentro de la Institución Educativa a partir de la altura de la misma es: *¿Qué relación hay entre la altura del nivel del agua en el punto de referencia y el volumen de agua desalojada?*

De manera semejante a las actividades anteriormente desarrolladas por los estudiantes con relación a las diferentes secciones de áreas establecidas con los planos anteriores, los estudiantes inician hallando el volumen de agua para una altura de 10cm. En este sentido

calculan el volumen utilizando la formula $V = \text{largo} \times \text{alto} \times \text{ancho}$. Se les pregunta lo siguiente:
 ¿Cómo se halla el volumen de la cancha cuando la altura del nivel del agua es de 10cm?

Teniendo en cuenta la pregunta los estudiantes realizan el cálculo como se muestra en la siguiente ilustración.

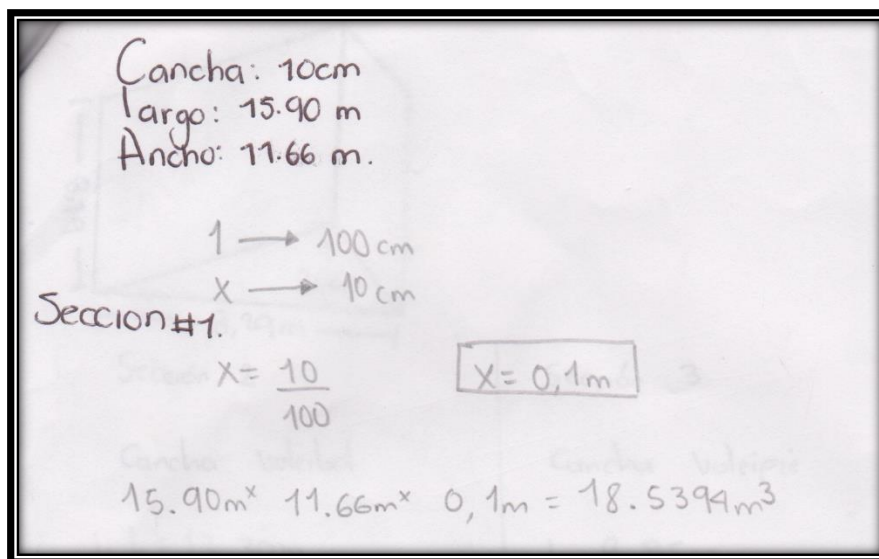


Ilustración 44: Cálculo de volumen altura 10cm. Equipo 2. Angélica.

En la ilustración anterior se observa que los estudiantes convierten la altura del nivel del agua que está en centímetros (10cm) en metros utilizando para ello una regla de tres simple. En este sentido los estudiantes dedujeron que la altura del nivel del agua era constante en toda su superficie. El docente les preguntó entonces: *¿Cuándo ven una inundación como es el agua en la orilla?* Pereira responde inmediatamente: *“el agua es bajita”*

El docente nuevamente pregunta: *¿...y qué pasa a medida que caminamos hacia el frente sobre el agua?*

Dani dice: *“cada vez que caminamos hacia delante el agua es más honda (profunda)”*

Angélica Responde:

Bueno, entonces los 10 cm se multiplicarían, se dividirían entre 100 para poder convertir esos 10 cm en metros, quedaría un 0,1 metros, entonces después de obtenido esto miraríamos la cancha ya que primero tiene una parte más bajita que ella va ascendiendo como entonces quedaría como especie de una figura triangular, a esa figura triangular habría que hallarle el área y multiplicarle el largo de la cancha para poder obtener el volumen (Comunicación personal, 10 de marzo de 2013).

Luego preguntó: ¿Cómo creen entonces que podríamos dibujar la forma del agua en la cancha?

Ambos grupos hicieron un esquema similar al que a continuación se muestra.

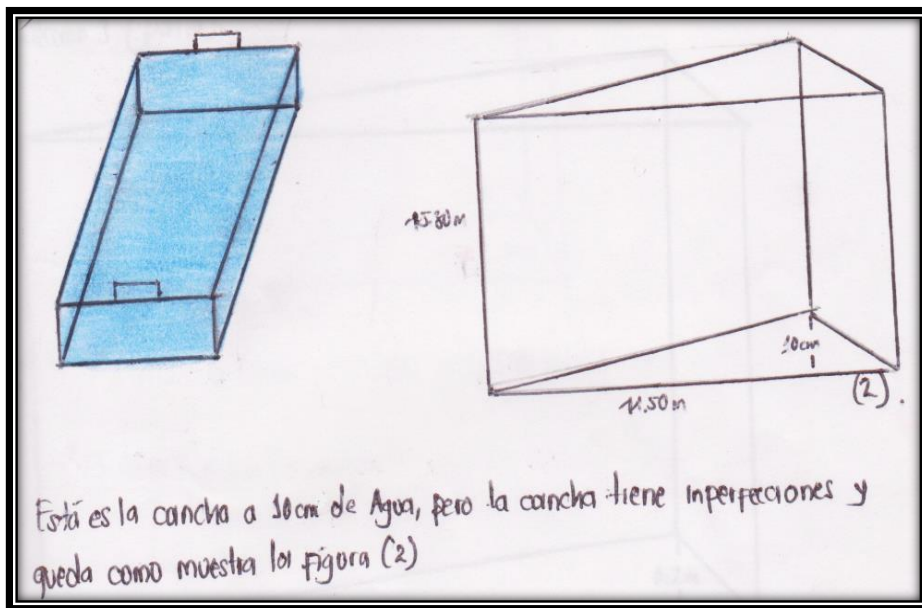


Ilustración 45: Representación forma del agua en la cancha. Dani.

Con relación a la gráfica Dani explica: “a 10 cm hallamos de la siguiente manera, como la cancha tiene imperfecciones, no es totalmente plana la base la cogimos como base de un

triángulo y multiplicamos el largo por el ancho y lo dividimos entre dos, así obtuvimos el volumen de la cancha... Si y después lo multiplicamos por el largo”.

Teniendo en cuenta esta interpretación el docente investigador les preguntó: *¿Bueno y porque utilizaron ese triángulo, es decir, como hicieron para imaginarse que ese era un triángulo?*

Dani responde: *“Porque si vemos cuando uno mete el pie en el agua primero es más alto cuando uno se va metiendo más dentro él, se va hundiendo más entonces tomamos eso como referencia, que a más altura se va bajando, se va bajando y se forma como abajo una especie de un triángulo, nosotros vemos el agua que esta plana pero por abajo es como especie de un triángulo”*

La siguiente ilustración muestra el cálculo realizado por el equipo Dani-Anyi cuando la altura del nivel del agua en el punto de referencia es de 10cm.

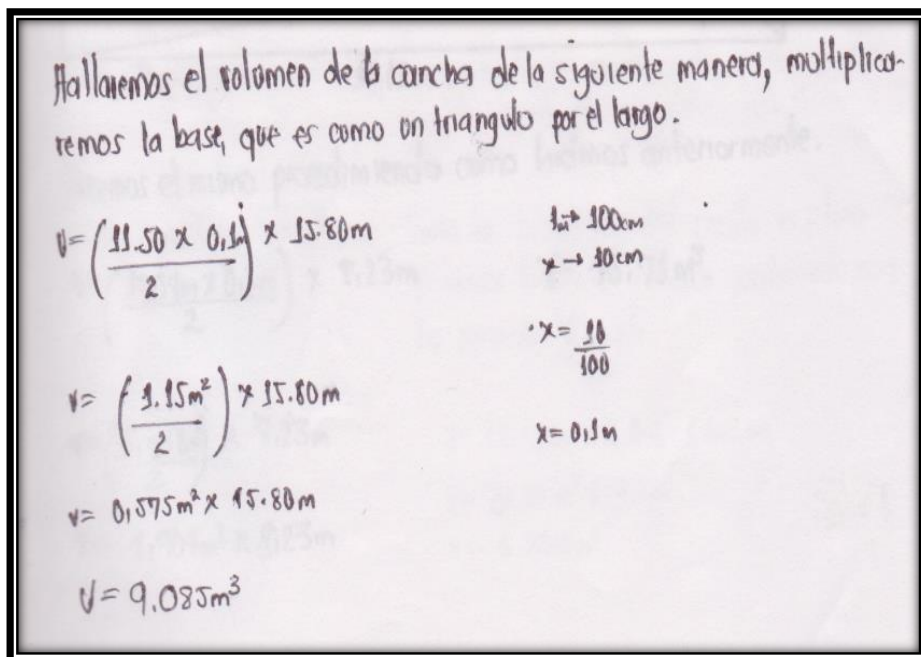


Ilustración 46: Cálculo del volumen de agua, altura 10cm. Anyi-Dani.

Al respecto los estudiantes interpretan que a medida que se avanza hacia el centro, el agua va subiendo de nivel. Lo que significa que en la orilla el agua es baja, casi a ras del piso, pero al ir hacia el centro, el nivel del agua aumenta.

La siguiente pregunta indaga entonces como los estudiantes hallan el volumen de agua a 20cm de altura con relación al punto de referencia. *¿Bueno y como hallaron el volumen del agua por ejemplo cuando la altura en ese punto de referencia de la alcantarilla era de 20 cm?*

Dani responde: *“También la tomamos por secciones porque a 20 cm todavía el colegio no se había inundado todo, la cancha la tomamos ya normal como dice la fórmula que es base por altura por largo”*

La siguiente ilustración muestra lo afirmado por el estudiante.

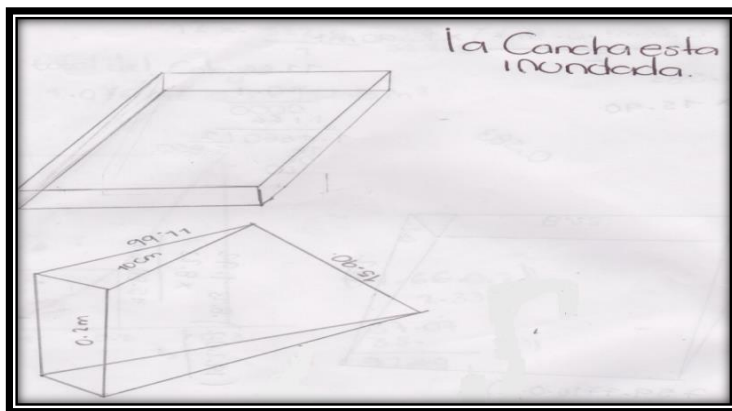


Ilustración 47: Volumen de agua a 20cm. Equipo 2 (Angélica-Perera).

Realizada la misma pregunta al equipo 2, Angélica responde:

Ósea se utilizó el mismo proceso a diferencia de que en un principio hubo un error con la cancha ya que a los 20 cm ya la cancha está totalmente nivelada

ósea que ya ahí no habría parte más baja ni más alta ya ahí se vendrían poniendo las otras secciones que serían más que todo el patio que fue dividido en dos secciones en las cuales se sacaron dos triángulos pero hay un triángulo que nunca llega a la punta porque ya que el patio es uno solo y al dividirlo en dos automáticamente queda más alzado pero se hace el mismo proceso largo por ancho a diferencia que ahora se divide por dos (Comunicación personal, 22 de marzo de 2013).

El equipo 1 (Dani-Anyi) había tenido un error inicial puesto que había tomado la forma del volumen del agua a los 20cm de altura de forma análoga al caso anterior (para altura de 10cm). Sin embargo, rectificaron que cuando el nivel del agua en el punto de referencia es 20cm, esta altura permanece constante, es decir, en forma de paralelepípedo.

Al respecto Dani afirma:

Lo hallamos por secciones ya que a 20 cm el colegio no se ha inundado totalmente. A la cancha la tomamos como dice la fórmula largo por ancho por alto porque ya está completamente inundada las otras secciones también, si las tomamos como habíamos tomado primero la cancha que nosotros veíamos que se formaban como un triángulo y multiplicamos ese triángulo por el largo de la medida que nos daba y a una parte donde también tomamos la fórmula que era largo por ancho que era el pasillo que sí es, que nosotros notamos que si es plano totalmente (Comunicación personal, 22 de marzo de 2013).

Con respecto a las palabras de Dani, la siguiente ilustración muestra el cálculo del volumen de agua en la cancha cuando la altura es de 20cm.

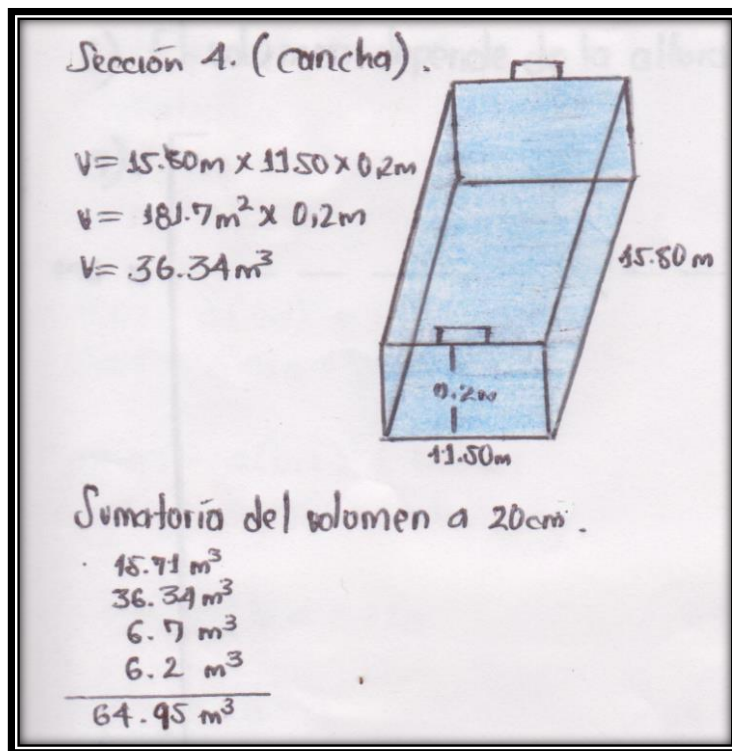
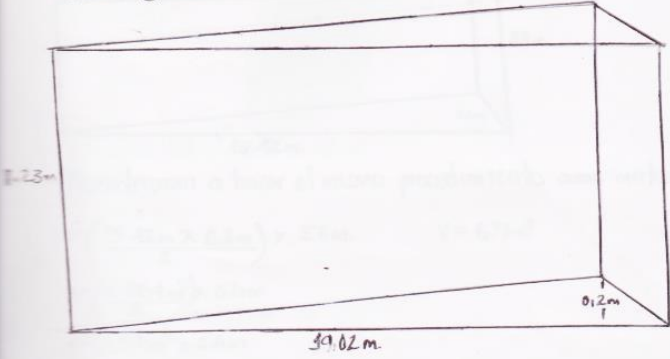


Ilustración 48: Volumen de agua para altura 20cm. (Dani)

En este sentido, los estudiantes razonan frente al volumen de agua y la forma que toma ésta dependiendo del nivel. Los estudiantes analizan que cuando el nivel del agua es de 20 cm de altura, la cancha de microfútbol es inundada de forma regular, es decir, la altura se mantiene constante en toda su área superficial, pero en las otras secciones de la Institución Educativa como el patio, el agua en la orilla es baja, lo que ellos relacionan como figura “triangular”. El pasillo es de forma similar a la cancha. En esta parte el agua no presenta desniveles, sino que la altura del nivel del agua no cambia en toda la sección. La siguiente ilustración muestra la descomposición del patio del colegio en secciones, teniendo en cuenta que el nivel en la orilla es cero, según lo expresado por Dani anteriormente.

A continuación hallaremos el volumen a una altura de 20cm de agua por secciones.

Sección 1 (patio).



Haremos el mismo procedimiento como hicimos anteriormente.

$$V = \left(\frac{19.02\text{m} \times 0.2\text{m}}{2} \right) \times 8.23\text{m} \quad V = 15.73\text{m}^3$$

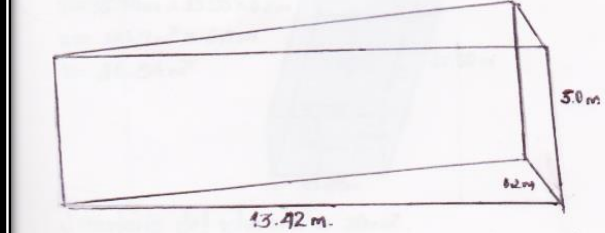
$$V = \left(\frac{3.818\text{m}}{2} \right) \times 8.23\text{m}$$

$$V = 1.909\text{m}^2 \times 8.23\text{m}$$

Ilustración 49: Cálculo volumen patio. Altura 20cm. Dani.

La siguiente sección 2 del patio fue calculada de manera igual la sección anterior teniendo en cuenta el nivel cero del agua en la orilla, como se observa en la siguiente ilustración.

Sección 2 (Restante del patio).



Procederemos a hacer el mismo procedimiento como antes.

$$V = \left(\frac{13.42\text{m} \times 0.2\text{m}}{2} \right) \times 5.0\text{m} \quad V = 6.7\text{m}^3$$

$$V = \left(\frac{2.684\text{m}^2}{2} \right) \times 5.0\text{m}$$

$$V = 1.34\text{m}^2 \times 5.0\text{m}$$

Ilustración 50: Continuación cálculo de volumen a 20cm. Dani-Anyi.

El resto de la secciones del patio fueron calculadas utilizando el mismo procedimiento anterior y luego sumaron todos los volúmenes para hallar así el volumen total de agua en la Institución cuando la altura del nivel del agua en el punto de referencia es de 20cm.

A diferencia del equipo 1, el equipo 2 hace una descomposición del volumen de agua. En la cancha por ejemplo utilizan el largo, el ancho y el alto pero en la parte que tiene que ver con el patio hacen la siguiente descomposición.

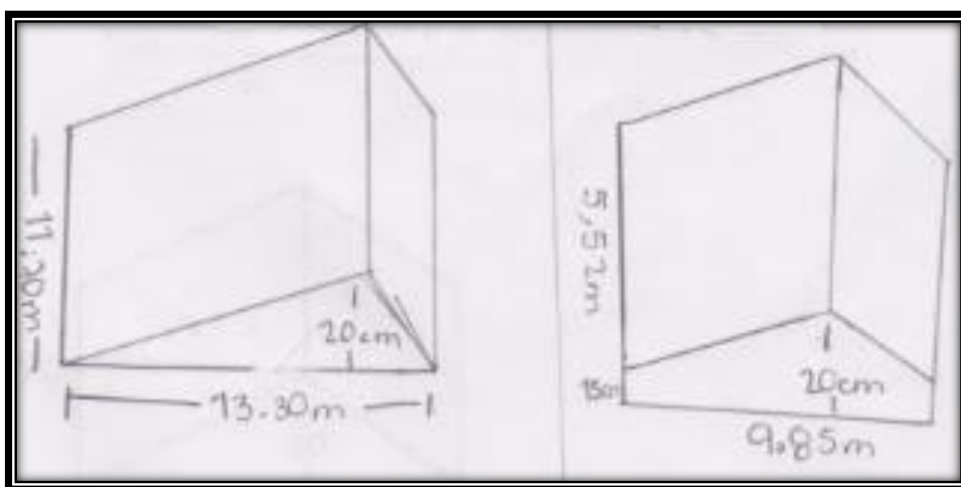


Ilustración 51. Descomposición volumen patio. Equipo 1 (Dani-Anyi).

En la ilustración anterior se observa la descomposición del patio, donde los bloques de volumen son “trapezoidales” hasta cierta medida, esto es, el largo del patio fue dividido en dos partes, la primera con dos alturas que son 15cm y 20cm y el resto en forma de semi-paralelepípedo.

Con la descomposición hecha y el cálculo obtenido, el investigador les preguntó por dichos “pedazos de volumen”: *¿... y entonces los volúmenes, que pasó con esas secciones de volúmenes que ya habían encontrado?*

Angélica responde: *“En todos esos volúmenes de las secciones, ya serían sección 1, que vendría siendo la sección de la cancha, ya después a los 20cm, ya son las otras secciones del patio que fueron de la entrada, el patio se dividió en dos partes incluyendo hasta la sección del aula múltiple y toda la parte de abajo, y se sumaron todos esos volúmenes para tener un volumen en total a los 20 cm”*

Según lo expresado por Angélica el procedimiento fue funcional y valido puesto que las secciones fueron subdivididas y luego sumadas de acuerdo con (Olmo, Moreno & Gil, 1993).

Para el caso cuando el nivel del agua es de 30cm Anyi afirma: *“Hicimos de la siguiente manera multiplicamos el área de nosotros que teníamos en el plano y multiplicamos por 30 que era la altura y la dividimos entre dos ya que el colegio tiene ciertas imperfecciones y siempre hay partes más altas, partes más profundas, entonces nosotros la dividimos entre dos para tener como un promedio de cuál era el volumen del colegio”*.

Angélica afirma:

Bueno se cogió el área total que ya se tenía y se multiplicó por 0,3 metros que en un principio cuando se pasaron los centímetros a metros daba un 0,1, pero ya que esta es a 30cm, sería 0,3m que se dividirían entre dos ya que siempre hay como una, como, pues como una superficie que siempre viene como bajando porque de todas maneras la altura es diferente, se divide entre 2 dándonos un

resultado que al igual se divide entre dos para tener ya el volumen total

(Comunicación personal, 26 de marzo de 2013).

Los estudiantes han relacionado la forma de encontrar el volumen, de forma relacionada con los planteamientos de Vergnaud (1981) donde el volumen se puede sumar o restar tomado como una magnitud unidimensional, esto es, contando las unidades de volumen o como una magnitud tridimensional que puede ser medida en función de otra magnitud como el caso de la longitud, esto implica que al asumir el volumen como magnitud tridimensional calculable se puede establecer como el producto de tres longitudes o como el producto de una superficie por una longitud. Vergnaud considera que deben trabajarse de forma coordinada los aspectos unidimensionales y tridimensionales de los volúmenes con actividades de rellenado

La siguiente ilustración muestra el cálculo realizado para encontrar el volumen de agua que inunda la Institución Educativa cuando la altura del nivel del agua en el punto de referencia es de 30cm.

Volumen a los 30 cm de Agua.

Para hallar este volumen se hará más fácil multiplicando el área por la altura y lo dividimos entre dos.

$$V = \frac{1157,92 \times 0,3m}{2}$$

$$V = \frac{347,37 m^3}{2}$$

$$V = 173,685 m^3$$

Ilustración 52. Cálculo volumen altura 30cm. Equipo 1 (Anyi-Dani).

Implica que los estudiantes tomaron el área total del colegio que ya la habían calculado en la construcción de los modelos matemáticos anteriores y haciendo una transformación a ésta formando así un área superficial en forma rectangular y basados en que en la orilla, la altura del agua es mínima, multiplicaron el área de la base por la altura y lo dividieron entre dos, es decir, formaron una especie de “semi- paralelepípedo”. Las siguientes tablas representan los resultados de los volúmenes encontrados por los dos equipos con relación a la altura del agua en el punto de referencia.

Altura del agua (m)	0.1	0.2	0.3
Volumen de agua (m ³)	9.32	69.66	185.36

Tabla 4. Volumen vs altura. Equipo 2 (Angélica-Pereira).

Altura del agua (m)	0.1	0.2	0.3
Volumen de agua (m ³)	9.09	64,95	173.48

Tabla 5. Volumen vs altura. Equipo 1 (Anyi-Dani).

Antes de iniciar la construcción de modelos matemáticos que permitan encontrar el volumen de agua que inunda la Institución Educativa, se intentó que los estudiantes visualizaran el colegio en tres dimensiones, con el fin de que observaran elementos que en papel no se pueden determinar. Como se muestra en la siguiente ilustración.

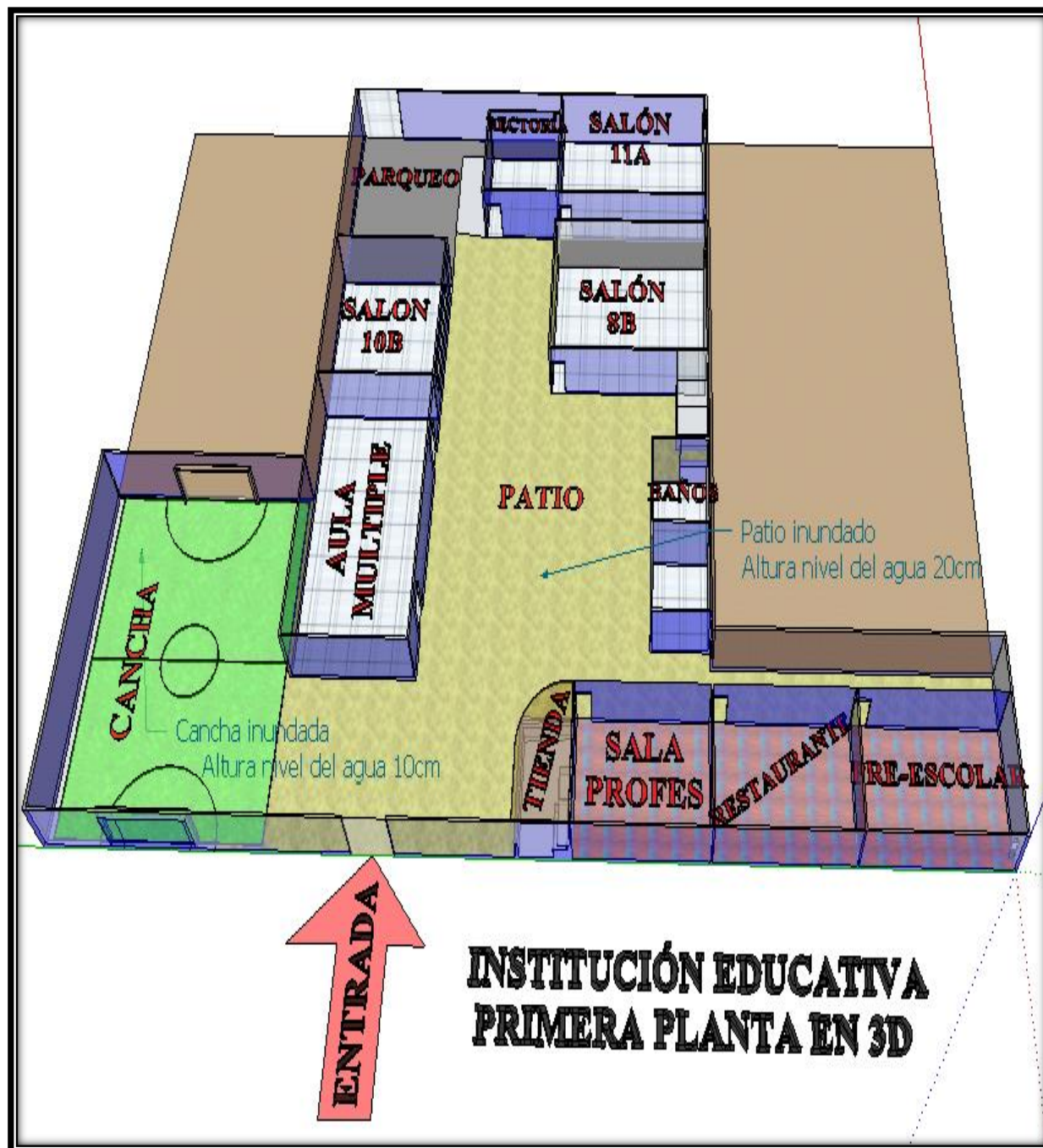


Ilustración 53: Plano en planta de la Institución vista en 3D. Google Sketchup.

En conjunto con los estudiantes se construyó un plano en tres dimensiones con el programa Google Sketchup, con apoyo de un estudiante de Ingeniería Agropecuaria quien conoce el programa de diseño y asesoró al grupo de estudiantes. Luego estos, basados en las

orientaciones, elaboraron el plano del colegio con las medidas tomadas en el terreno. Con esta actividad los estudiantes pudieron observar desde muchos ángulos y vistas la Institución Educativa e identifican las áreas inundadas a 10cm, 20cm y 30cm, con relación al punto de referencia. Esta herramienta facilitó no solo visualizar mejor el colegio, sino que los estudiantes haciendo uso del ingenio y la creatividad, exploraron muchas herramientas desde el programa tecnológico. En este aspecto, según las medidas, el programa calcula las diferentes áreas que los estudiantes compararon con las tomadas por ellos.

Es interesante en la investigación explorar elementos del contexto y llevarlos a otros espacios, con el fin de simplificar y mejorar los resultados sobre el papel. En este sentido, la experiencia fue significativa para los estudiantes quienes tienen ahora otras formas de representar medidas.

Después de construido el plano en 3D, los estudiantes inician el proceso de construcción de modelos matemáticos que permitan calcular el volumen de agua que inunda la Institución dependiendo de la altura en un punto de referencia.

Con los volúmenes anteriormente calculados en el terreno según el nivel del agua a 10cm, 20cm y 30cm, los estudiantes elaboraron representaciones de estas en el plano cartesiano.

A continuación se presenta la gráfica representada por el equipo conformado por Dani-Anyi.

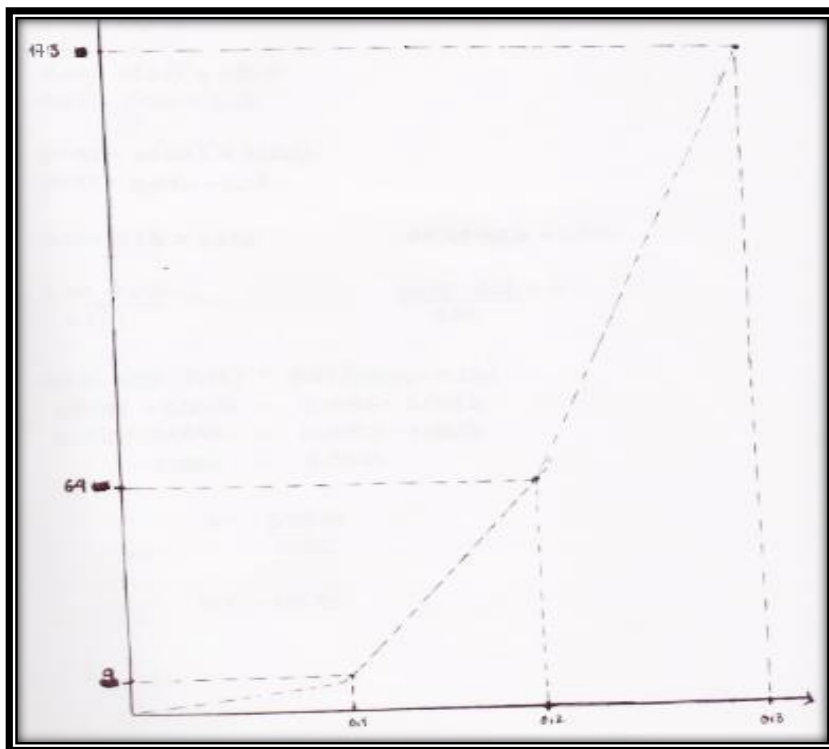


Ilustración 54. Grafica volumen vs altura. Anyi-Dani.

La grafica que relaciona estas dos magnitudes, volumen y altura. Con lo cual, Anyi afirma: *“el volumen depende de la altura... la variable independiente es la altura”*

Los estudiantes observan que la gráfica construida es similar a las encontradas cuando relacionaron el área superficial con la altura; esto significa que consideraron como una función cuadrática.

Los estudiantes al identificar la gráfica establecen el modelo matemático correspondiente tomando dos puntos y formando sistemas de ecuaciones lineales. Al respecto el docente investigador preguntó: *¿...y entonces ya con esos datos que ustedes tenían ahí en la tabla como*

hicieron para encontrar una ecuación o un modelo matemático que les permitiera dependiendo de la altura ustedes pudieran encontrar el volumen enseguida?

Angélica responde:

Bueno utilizamos una operación cuadrática, que la fórmula sería $y = ax^2 + bx + c$, eso obtendríamos unos porcentajes a 10 y a 20 cm que eran los que estaba utilizando, obteniendo un sistema de ecuación y a ese sistema de ecuación al organizarlos a 10 y a 20 se remplazarían las “x” por estos porcentajes que serían 10 o 20 llegando a obtener dos sistemas de ecuaciones que partirían en dos operaciones que llegarían hacer de igualación, al coger estas dos ecuaciones y organizarlas en la operación de igualación se despejaría la “a” que después nos daría paso a despejar la “b”, en sustitución que nos daría un modelo matemático que ya como ya tenemos a 30 a 40 que este modelo matemático se podría remplazar ya si no quieres obtener el volumen de 50 ya tendremos un proceso directo, que ya remplazamos “x “ por lo que quieran obtener sea 30, 40, 50 lo que quieran, para ver según la ecuación obtenida cual es el volumen (Comunicación personal, 28 de marzo de 2013).

Al respecto se observa en la ilustración la forma de calcular los valores de a y b utilizando un sistema de ecuaciones lineales 2×2 .

8. $Y = Ax^2 + bx + c$
 $9.32 = a(10)^2 + b(10) + 0$
 $9.32 = 100a + 10b$

$69.658 = a(20)^2 + b(20) + 0$
 $69.658 = 400a + 20b$

$9.32 = 100a + 10b$
 $10b = 9.32 - 100a$
 $b = \frac{9.32 - 100a}{10}$

$69.658 = 400a + 20b$
 $20b = 69.658 - 400a$
 $b = \frac{69.658 - 400a}{20}$

Igualación

$\frac{9.32 - 100a}{10} = \frac{69.658 - 400a}{20}$

$20(9.32 - 100a) = 10(69.658 - 400a)$

$20(9.32 - 100a) = 10(69.658 - 400a)$
 $186.4 - 2000a = 696.58 - 4000a$
 $186.4 - 696.58 = 2000a - 4000a$
 $-510.18 = -2000a$

$a = \frac{-510.18}{-2000} = 0.255$

$b = \frac{69.658 - 400(0.255)}{20} = \frac{69.658 - 102}{20} = \frac{-32.342}{20} = -1.617$

Ilustración 55: Construcción modelo matemático volumen. Angélica.

Como lo explicó Angélica, el modelo matemático lo obtuvieron formando un sistema de ecuación lineal 2x2 que permitió encontrar los valores de a y b . En este sentido al observar que para altura cero, el volumen también es cero, por lo tanto no tienen en cuenta la constante c de la función cuadrática, pues asumen que es cero. La altura del nivel del agua la toman en centímetros, mientras que el volumen está determinado en metros cúbicos.

El equipo 1 compuesto por Dani-Anyi, hacen un cálculo parecido al equipo 2 conformado por Pereira-Angélica, obtiene los valores de a y b .

La fórmula general, se puede hallar haciéndola como una ecuación cuadrática.

$$y = ax^2 + bx + c.$$

$$9,09 = a(0,1)^2 + b(0,1)$$

$$9,09 = 0,01a + 0,1b.$$

$$64,95 = a(0,2)^2 + b(0,2)$$

$$64,95 = 0,04a + 0,2b.$$

$$9,09 - 0,1b = 0,01a$$

$$64,95 - 0,2b = 0,04a.$$

$$\frac{9,09 - 0,1b}{0,01} = a$$

$$\frac{64,95 - 0,2b}{0,04} = a$$

$$0,04(9,09 - 0,1b) = 0,01(64,95 - 0,2b)$$

$$0,3636 - 0,004b = 0,6495 - 0,002b$$

$$0,002b - 0,004b = 0,6495 - 0,3636$$

$$-0,002b = 0,2859.$$

$$b = \frac{0,2859}{-0,002}$$

$$b = -142,95.$$

Ilustración 56: Cálculo modelo matemático volumen. Dani.

En este caso Dani toma las alturas haciendo conversión de centímetros a metros. De esta forma y reemplazando los valores de a y b en la función cuadrática establecieron los modelos matemáticos.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = 0,255x^2 - 1,517x$$

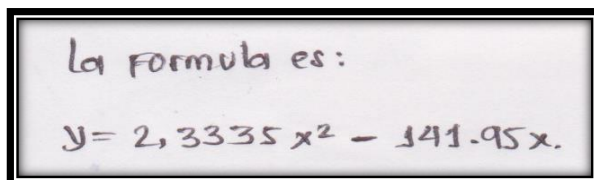
Ilustración 57: Modelo matemático. Equipo Pereira-Angélica.

Este modelo $y = 0,255x^2 - 1,517x$ construido por el equipo 2 permitió encontrar el volumen de agua que entra en la Institución Educativa dependiendo del nivel del agua en el punto de referencia. Las unidades de las variables están determinadas por:

Y = volumen de agua que ingresa a la institución. Dada en metros cúbicos

X = altura del nivel del agua en el punto de referencia. Dada en centímetros.

La siguiente ilustración muestra el modelo construido por el equipo Anyi=Dani.



La fórmula es:
 $Y = 2,3335x^2 - 141,95x.$

Ilustración 58: Modelo matemático. Anyi-Dani.

Este modelo $Y = 2333,5X^2 - 141,95X$ construido por el equipo 1, el cual permitió encontrar el volumen, tiene las unidades para la variable Y , está dada en metros cúbicos y para la variable X está dada en metros.

Esta primera parte posibilitó relacionar los elementos matemáticos de la medida del área y el volumen, a fin de establecer un proceso de modelación que permitiera predecir esas regularidades y conexiones evidentes; sin embargo, los estudiantes tienen dudas sobre la veracidad del modelo construido basado en la función cuadrática puesto que son conscientes que para calcular el volumen utilizaron una magnitud adicional, es decir, la altura del nivel del agua. Observan además en los libros que las funciones cúbicas también son curvas y conservan algunas similitudes con la función cuadrática. Además, porque al tomar el modelo construido y reemplazar la altura a 30cm, encontraron un resultado no tan esperado por ellos, pues este se alejaba del volumen medido en el terreno.

La siguiente ilustración muestra el proceso de calcular el volumen de agua cuando la altura del nivel del agua es 30cm.

$$y = 2,333.5 (0.3)^2 - 141.95 (0.3)$$

$$y = 2,333.5 (0.09) - 42.585$$

$$y = 210.015 - 42.585$$

$$y = 167.43$$

Ilustración 59: Cálculo del volumen de agua a 30cm de altura. Dani

En la ilustración anterior se observa que el volumen de agua cuando la altura de la misma en el punto de referencia es de 30cm, es de $167,43\text{m}^3$, teniendo en cuenta el volumen de agua calculado con las medidas en el terreno por este equipo de trabajo es de $173,48\text{m}^3$, lo cual los estudiantes consideraron que fue un dato bastante alejado, lo cual llenó de dudas a los equipos de trabajo.

Después de una discusión sobre los anteriores cuestionamientos, los estudiantes consideran que la función cúbica es la que más se ajusta con la gráfica encontrada por ellos debido a que después de reflexionar sobre la función cuadrática $Y = X^2$ relacionan que el grado de dicha función depende de las variables involucradas, es decir, para la función cuadrática se abordaron el área inundada compuesta por dos variables (largo y ancho) y la altura del nivel del agua, por tanto los estudiantes consideraron que el grado de la variable x es de grado dos. Para hallar el volumen analizaron las tres variables involucradas (largo, ancho y alto) que relacionaron con el grado de la variable x en la función cúbica, en la cual, el volumen se asume como una magnitud unidimensional. En este sentido, el observar las regularidades encontradas entre el

número de variables y el grado de la función, permitió que los estudiantes asumieran la función cúbica como base para construir el modelo. Este fue hallado después de formar sistemas de ecuaciones lineales 3x3 utilizando el método de igualación (forma análoga al caso del área superficial vs altura). Es de destacar que el tema era desconocido por los estudiantes, por lo que fue necesario trabajarlo en forma paralela en las clases normales. (Biembengut & Hein, 2006). La siguiente ilustración muestra un sistema de ecuaciones lineales 3x3. Teniendo en cuenta la función cúbica $Y = aX^3 + bX^2 + cX + d$.

$$\begin{aligned}
 &y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\
 &y = a(10)^3 + b(10)^2 + c(10) \\
 &9,09 = 1000a + 100b + 10c \\
 &64,95 = a(20)^3 + b(20)^2 + c(20) \\
 &64,95 = 8000a + 400b + 20c \\
 &173,48 = a(30)^3 + b(30)^2 + c(30) \\
 &173,48 = 27000a + 900b + 30c \\
 &9,09 = 1000a + 100b + 10c \\
 &64,95 = 8.000a + 400b + 20c \\
 &173,48 = 27000a + 900b + 30c
 \end{aligned}$$

Ilustración 60: Sistema de ecuación lineal 3x3. Any-Dani.

En la ilustración anterior se observa el proceso de sustitución que realizan los estudiantes con respecto a las variables x e y obtenidas por medio del cálculo numérico, pero esta vez teniendo en cuenta la función cúbica, obteniendo un sistema de ecuaciones lineales 3x3. De igual forma el equipo conformado por Angélica-Pereira, realiza el procedimiento, construyendo un sistema similar al grupo anterior como se observa en la siguiente ilustración.

$$\begin{aligned}
 &9,32 = 1000a + 100b + 10c \\
 &69,66 = 8000a + 400b + 20c \\
 &185,36 = 27000a + 900b + 30c
 \end{aligned}$$

Ilustración 61: Sistema de ecuación lineal 3x3. Angélica.

Este equipo a través de sustituir los valores de x a 10cm, 20cm y 30cm respectivamente con los volúmenes calculados a esas alturas, obtienen el sistema 3×3 .

Para efecto de cálculo de los valores de las constantes (a , b y c), los estudiantes realizan estos mediante el método de igualación como se observa en la siguiente ilustración.

Despejamos a "A" en todas la ecuaciones.

4. $9,32 - 100b - 10c = 1000a.$
 $\frac{9,32 - 100b - 10c}{1000} = a$

5. $69,66 - 400b - 20c = 8000a.$
 $\frac{69,66 - 400b - 20c}{8000} = a.$

6. $185,36 - 900b - 30c = 27000a.$
 $\frac{185,36 - 900b - 30c}{27000} = a.$

Ilustración 62: Proceso de cálculo de las incógnitas. Pereira-Angélica.

Los estudiantes despejan una variable, en este caso la a de las tres ecuaciones con el fin de utilizar el método de igualación. La siguiente ilustración muestra el procedimiento seguido por los estudiantes.

Igualemos a 4 y 5.

$$8000(9,32 - 100b - 10c) = 1000(69,66 - 400b - 20c)$$

$$8(9,32 - 100b - 10c) = 1(69,66 - 400b - 20c)$$

$$74,56 - 800b - 80c = 69,66 - 400b - 20c$$

$$74,56 - 69,66 = 800b - 400b + 80c - 20c$$

$$7. \quad \boxed{4,9 = 400b + 60c}$$

Ilustración 63: Método para encontrar las constantes. Pereira.

Los estudiantes utilizan el método de igualación dos veces y encuentran los resultados para las variables a , b y c . Primero del sistema 3×3 , llegan a un sistema 2×2 para encontrar los valores de dichas constantes. Como se muestra en la siguiente ilustración.

Igualemos a 4 y 6.

$$27000(9,32 - 100b - 10c) = 1000(-185,36 - 900b - 30c)$$

$$27(9,32 - 100b - 10c) = 1(-185,36 - 900b - 30c)$$

$$251,64 - 2700b - 270c = -185,36 - 900b - 30c$$

$$251,64 - 185,36 = 2700b - 900b + 270c - 30c$$

$$8. \quad \boxed{66,28 = 1800b + 240c}$$

Obtuvimos dos ecuaciones nuevas de la igualación de 4 y 5 - 4 y 6.

$$\left. \begin{aligned} 4,9 &= 400b + 60c \\ 66,28 &= 1800b - 240c \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{r|l} 4,9 - 400b = 60c & 66,28 - 1800b = 240c \\ \hline 4,9 - 400b = c & \frac{66,28 - 1800b}{240} = c \end{array}$$

Igualemos a 7 y 8.

$$24(4,9 - 400b) = 6(66,28 - 1800b)$$

$$24(4,9 - 400b) = 6(66,28 - 1800b)$$

$$117,6 - 9600b = 397,68 - 10800b$$

$$10800b - 9600b = 397,68 - 117,6$$

$$1200b = 280,08$$

$$b = \frac{280,08}{1200}$$

$$\boxed{b = 0,23}$$

Ilustración 64: Cálculo 1 de las constantes en la función cúbica. Angélica-Pereira.

En la siguiente ilustración se muestra el proceso seguido por los estudiantes que conforman este equipo de trabajo para encontrar las demás constantes de la función cúbica a partir de elaborar sistemas de ecuaciones lineales 2x2.

Reemplazamos el resultado de "b" en la ecuación .7.

$$\frac{4.9 - 400(0.23)}{60} = c.$$

$$\frac{4.9 - 92}{60} = c.$$

$$\frac{-87.1}{60} = c.$$

$$-1.45 = c.$$

Reemplazamos el resultado de "b" y "c" en la ecuación 4.

$$\frac{9.32 - 100(0.23) - 10(-1.45)}{1000} = a.$$

$$\frac{9.32 - 23 + 14.5}{1000} = a.$$

$$\frac{0.82}{1000} = a.$$

$$0.00082 = a.$$

Ilustración 65: Cálculo 2 de las constantes en la función cúbica. Angélica-Pereira.

De igual manera el grupo conformado por Anyi-Dani, encuentran las constantes que les permite determinar el modelo matemático.

$$b = \frac{146,21 - 24000 a}{600}$$

$$60\phi(46,77 - 25000 a) = 88\phi(146,21 - 24000 a)$$

$$2806,2 - 1500000 a = 12866,48 - 2112000 a$$

$$612000 a = 10060,28$$

$$a = \frac{10060,28}{612000} = 0,016$$

$$b = \frac{46,77 - 25000(0,016)}{880} = -0,40$$

$$c = \frac{9,09 - 1000(0,016) - 100(-0,40)}{10} = 3,31$$

Ilustración 66: Cálculo de las constantes a, b y c. Anyi-Dani.

Teniendo en cuenta el cálculo de las constantes de la función cúbica, los estudiantes presentan los siguientes modelos matemáticos.

$$y = 0,016x^3 - 0,40x^2 + 3,31x \rightarrow \text{Modelo Matemático}$$

Ilustración 67: Modelo matemático para el volumen. Anyi-Dani.

De igual forma el otro equipo de trabajo después de haber realizado los cálculos numéricos y hacer las operaciones respectivas, presenta el siguiente modelo.

$$y = 0,00082x^3 + 0,23x^2 - 1,45x$$

Ilustración 68: Modelo matemático. Angélica-Pereira.

Luego los estudiantes hacen una verificación reemplazando dichos valores en las respectivas ecuaciones cuadráticas, lo que les permitió comprobar que efectivamente el modelo matemático resulta ser una función cúbica como se observa en la siguiente ilustración.

Ecuación cúbica. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$y = 0,00082 (10)^3 + 0,23 (10)^2 + (-1,45) (10)$.
 $y = 0,00082 (1000) + 0,23 (100) + (-1,45) (10)$.
 $y = 0,82 + 23 - 14,5$.
 $y = 9,32$.

$y = 0,00082 (20)^3 + 0,23 (20)^2 + (-1,45) (20)$.
 $y = 0,00082 (8000) + 0,23 (400) + (-1,45) (20)$.
 $y = 6,56 + 92 - 29$.
 $y = 69,56$.

$y = 0,00082 (30)^3 + 0,23 (30)^2 + (-1,45) (30)$.
 $y = 0,00082 (27000) + 0,23 (900) + (-1,45) (30)$.
 $y = 22,14 + 207 - 43,5$.
 $y = 185,64$.

Ilustración 69: Verificación modelo matemático. Angélica-Pereira.

Con esta actividad los estudiantes pudieron establecer vínculos entre las expresiones que personalizan y significan el contexto particular, involucrando diversos espacios que favorecen la construcción de generalidades, el desarrollo de potencialidades para el análisis y la toma de decisiones, lo que debe componer los procesos y aspectos que forman el escenario educativo.

Establecer los conceptos matemáticos y relacionarlos con el entorno, permiten que las matemáticas dejen de ser rígidas, para establecerse como una construcción conjunta; de esta forma tiene un carácter flexible constituyéndose en un elemento importante para comprender los contextos. En este aspecto, es fundamental observar el proceso de construcción realizado en relación con el objeto de estudio y no con el objeto matemático.

La ejecución de actividades relacionadas con el proceso de modelación matemática se convirtió en una experiencia significativa para los estudiantes, puesto que pudieron experimentar con situaciones de un fenómeno natural que los afecta de forma directa. En este sentido, la modelación como estrategia de aprendizaje en el campo educativo, se constituye en otra forma de construir la matemática en la escuela.

4.4. Validación de los modelos matemáticos

Se les propone a los estudiantes consultar con diferentes entidades locales sobre cuál es el procedimiento utilizado para afrontar las inundaciones en el municipio de Caucasia, cuáles serían las posibles soluciones al problema y si han realizado cálculos de las áreas inundadas y los volúmenes de agua que afectan la comunidad en épocas de invierno. Es así, como los estudiantes visitan a entidades como la Defensa Civil, la oficina de Planeación Municipal y la Alcaldía

Municipal, donde entrevistan al Jefe de Planeación y posteriormente al Alcalde del Municipio. El siguiente diálogo se realizó entre los estudiantes Anyi, Pereira, Angélica y Dani y el Jefe de Planeación Municipal.

Estudiante: *¿por qué se dan las inundaciones?*

Jefe: *“por la construcciones en zonas bajas y orillas de caños”.*

Estudiante: *¿por qué las inundaciones cada vez se dan más fuertes?*

Jefe: *“Debido a la inconciencia del ser humano que se encarga de arrojar basuras a las fuentes de agua y a la minería que sedimenta los ríos”.*

Estudiante: *¿Cuáles han sido los años con más casos de inundación en el municipio de Caucasia?*

Jefe: *“Los años en los cuales el Municipio ha presentado más estas dificultades son en los años 2009-2010-2011 los cuales fueron afectados por el fenómeno del niño y de la niña”.*

Estudiante: *¿En qué zonas se presentan estas situaciones?*

Jefe: *“Los más afectados son los barrios del sur: Divino Niño, El Castillito, El castillo, El Poblado, El Roble, Primero de Mayo, El Caracol y Las Parcelas del Caracol”.*

Estudiante: *¿por qué el colegio Divino Niño está ubicado en esa zona del municipio de Caucasia?*

Jefe: *“por la facilidad de conseguir ese lote para la educación de las personas de escasos recursos ya que esa zona es propicia a eso”.*

Estudiante: *¿por qué no se reubica la Institución de esa zona?*

Jefe: *“la Institución está incluida en una convención de la unidad de gestión de riesgos. Se ubicarán varias Instituciones entre ellas el Divino Niño”.*

Estudiante: *¿Qué solución usted daría para minimizar la inundación en esta zona?*

Jefe:

Hay tres opciones la cuales son construir una muralla un muro de contención o un Jarillón alrededor del área propicia a la inundación. Reubicar a la gente de esta zona. Hacer levantamiento del terreno. Pero me guio por las dos primeras las cuales tendrían un costo más bajo que la última, por ejemplo, hay un convenio de construcción y de reubicación que ya se está dando (Comunicación personal, 15 de abril de 2013).

Al respecto, los estudiantes declaran que en esa dependencia del municipio no realizan los cálculos de área y de volumen del agua que inunda a las poblaciones, por lo tanto no existen modelos matemáticos. Afirman que la información que recibieron, es que la entidad encargada de censos de damnificados es la Defensa Civil. Los modelos matemáticos construidos por los estudiantes fueron dejados en la oficina de Planeación Municipal, donde el Ingeniero ubicó las zonas inundadas y verificó que el modelo matemático encontrado por los estudiantes para las áreas superficiales se aproximaran a las que afectan la población en el municipio. En este sentido, el Jefe de Planeación municipal observó un fuerte trabajo en el campo de las matemáticas; habló del trabajo realizado por los estudiantes como innovador y los resultados están bastante acertados con las zonas reales de inundación.

La siguiente ilustración muestra la charla entre los estudiantes y el jefe de planeación.



Ilustración 70: Entrevista estudiantes-Jefe de Planeación municipal.

Los estudiantes manifiestan que en Planeación Municipal consideraron que el trabajo realizado por ellos es muy importante puesto que da herramientas para predecir futuras inundaciones y hacer un balance más acorde a la realidad de las personas afectadas.

De igual forma, los estudiantes consiguen una cita con el Alcalde Municipal con el fin de que les dé información sobre la gestión que viene desarrollando, los planes que utiliza para mejorar las condiciones de los damnificados en épocas de inundación y cuáles son las alternativas de solución de la problemática que viene afectando al municipio de Caucasia desde hace mucho tiempo. Por lo tanto el grupo de estudiantes realizan al Alcalde la siguiente entrevista.

Estudiante: *¿Qué proyecto existe para la mitigación del impacto invernal en las Instituciones Educativas?*

Alcalde:

Tenemos ya el plan de desarrollo y el programa del gobierno la construcción de 8 nuevos Establecimientos Educativos incluyendo uno grande nuevo que va a reemplazar al Divino Niño actual y lo vamos a construir en el barrio Villarabia 2, también donde funciona la escuela La Victoria, se va a construir el Liceo Concejo Caucasia, Margento (Corregimiento de Caucasia), que también se inunda mucho, vamos a construir en la parte alta una nueva Institución Educativa, lo mismo en La Ilusión, Los Mellos, Palomar, Barraquillita, La Esmeralda (Otras veredas del municipio), en fin son 8 nuevas Instituciones Educativas, con esto por lo menos aliviamos un poco y vamos a evitar que en épocas de invierno que van a seguir surgiendo inundaciones ya por lo menos la población estudiantil no se va a ver tan afectada... (Comunicación personal, 19 de abril de 2013).

En esta parte, el Alcalde plantea soluciones para diferentes Instituciones Educativas tanto urbanas como rurales del municipio de Caucasia que son afectadas por el fenómeno de las inundaciones.

La siguiente pregunta realizada por los estudiantes tiene que ver con el inicio de las actividades de construcción y adecuación de las Instituciones Educativas.

Estudiante: *¿Para qué fechas se tiene pensado realizar esos proyectos?*

Alcalde: *Nosotros queremos empezar antes de diciembre de este año y hay 24 meses de plazo para terminar ósea se tiene que terminar dentro de esta administración antes de yo entregar en Enero del 2015.*

Los estudiantes conjeturan sobre la población afectada en el municipio por causa de las inundaciones.

Estudiante: *¿Teniendo en cuenta que aproximadamente el 40% de la población tanto urbana como rural sufren con las consecuencias de la ola invernal; que proyecto Municipal, Departamental o Nacionales existen para darle a esta población una mejor calidad de vida?*

Alcalde:

Estamos en unos programas de vivienda en donde vamos a reubicar 500 familias ósea el Municipio más beneficiado en Colombia en reubicación de viviendas afectadas por la ola invernal, es la población de Caucasia, ustedes escuchan por televisión que tal municipio 38, otros 5. Nosotros vamos a reubicar 500; te repito, es poquito y es mucho porque el problema ocurre en 12 500 viviendas que se inundan en el municipio de Caucasia, pero estamos en un país subdesarrollado que no tiene recursos y 500 viviendas es mucho para un municipio. Adicional a esas 500 viviendas, ya empezamos la construcción de

1000 para desplazados que también viven en esas condiciones de inundación en “Paraguay” (terreno destinado para la construcción de viviendas) y vamos a trabajar con 580 más ya para el próximo año (Comunicación personal, 19 de abril de 2013).

En este aspecto, el Alcalde da explicación sobre algunas posibilidades de minimizar el impacto del fenómeno, reubicando algunas familias más vulnerables. En esta misma línea, los estudiantes preguntan sobre las ayudas a las familias afectadas por la ola invernal.

Estudiante: En la emergencia invernal llegan al Municipio y del Municipio mismo ayudas generales como alimentos para las familias afectadas. ¿Cómo se le garantiza a la comunidad que hay transparencias y equidad en la distribución de estas?

Alcalde:

Eso ha sido muy difícil, mientras yo he sido alcalde no he tenido ningún problema con la distribución de esas ayudas que llegan y allí hay que hacer claridad que normalmente uno lo que hace es que coordina con la Defensa Civil o con los presidentes de Acción Comunal para que ellos sean los que entreguen las ayudas, pero hemos detectado de que en muchos casos algunos de esos miembros de acción comunal prefieren entregar las ayudas a sus familias y no verdaderamente a las personas afectadas y por eso, le estamos poniendo un control y ya creamos un Comité de Desastres y combinado con el comité, la

Defensa Civil y Cruz Roja para cuando ocurran estas emergencias; esas ayudas que lleguen verdaderamente a la gente que los necesita...(Comunicación personal, 19 de abril de 2013).

En este aspecto, los estudiantes indagaron con el Alcalde sobre como las ayudas que fueron recibidas, sean repartidas equitativamente y a las personas que realmente lo necesitan. La siguiente ilustración muestra la entrevista.



Ilustración 71: Entrevista Estudiantes-Alcalde.

Cabe resaltar que las anteriores preguntas fueron diseñadas en su totalidad por los estudiantes, donde se reflejan aspectos que tienen que ver con las diferentes estrategias de solución del problema. En este sentido, los estudiantes conciben la idea que el trabajo realizado con relación al fenómeno de inundación les ha permitido comprender mejor las causas y las consecuencias del mismo, permitiéndoles indagar y consultar frente a entidades locales responsables por el bienestar de los ciudadanos.

A continuación se presenta la socialización del trabajo realizada por los estudiantes, teniendo en cuenta el trabajo desde las mediciones y el aporte que ellos hacen para minimizar las consecuencias que produce el fenómeno en la población.

4.5. Socialización del trabajo

Luego de concluir todas las etapas del trabajo de investigación, los estudiantes realizan la socialización del estudio con la presencia de algunos docentes y dos representantes de la junta de acción comunal de dos barrios que son afectados por el fenómeno. Los estudiantes mediante diapositivas, audio de entrevistas y maquetas, realizan un recuento del trabajo desde la caminata por los diferentes sectores, el proceso de medida en la Institución, cálculo de los modelos matemáticos y las posibles soluciones al problema. Las siguientes ilustraciones muestran el evento.



Ilustración 72: Exposición del trabajo.

Algunas conclusiones determinantes tienen que ver con la soluciones que plantean los estudiantes. Entre ellas se destacan las relacionadas con la construcción de diques, malecones, jarillones o murallas que pueden evitar que el agua inunde las comunidades. En este sentido, los estudiantes consideran que según las inundaciones más fuertes presentadas en los años 2010 y 2011, la altura del nivel del rio supero los 2 metros en la orilla del rio, por lo tanto estiman que dichas “murallas” deben superar este nivel. La siguiente ilustración muestra las maquetas que propone algunas soluciones al problema.

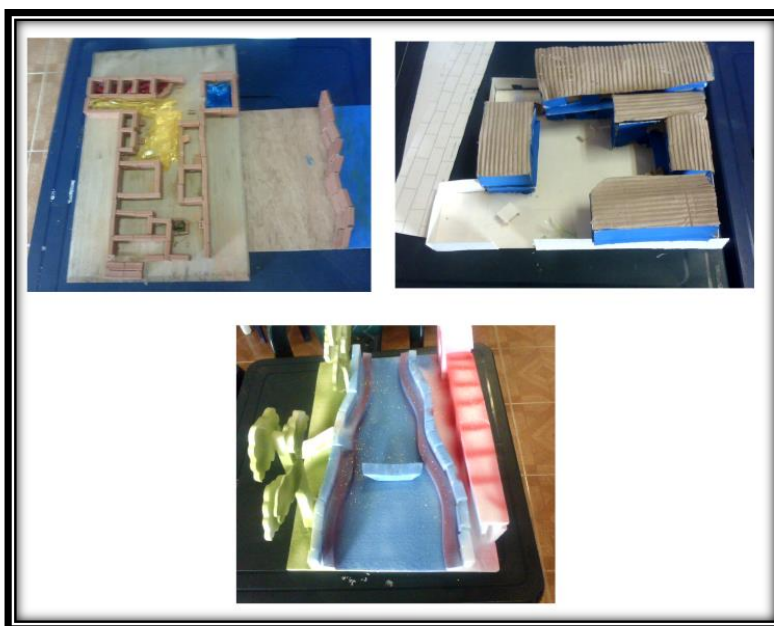


Ilustración 73: Maquetas construidas por los estudiantes.

Por otro lado, son conscientes que las inundaciones no se deben únicamente por el desbordamiento del rio a causa del invierno, puesto que han observado que cuando hay lluvias fuertes, estos barrios, incluyendo la Institución Educativa, se han inundado. Los estudiantes consideran que el mal manejo de las basuras, taponamiento de los caños y tubería con diámetro pequeño son otros factores que influyen en la agudización del fenómeno. Estas pequeñas inundaciones aunque no afectan por muchos períodos de tiempo puesto que si el río no está

crecido, las aguas se evacuan rápidamente; si es preocupante la proliferación de enfermedades debido al barro, la humedad y el deterioro de las viviendas. De esta forma los estudiantes proponen realizar campañas de aseo, concientizar a la población sobre el manejo adecuado de las basuras y realizar jornadas de limpieza de los caños, con el fin de que las aguas fluyan adecuadamente.

Los presentes de la exposición consideran muy pertinentes las propuestas de los estudiantes expositores, sin embargo consideran que es muy importante la función política de los gobernantes. En este aspecto como se vio en la entrevista al Alcalde, este adquirió un compromiso de mejorar las condiciones de los afectados y reubicación de la Institución Educativa a otra zona.

Cabe resaltar que en el momento de concluir este proyecto de investigación, la Alcaldía Municipal ha iniciado el cambio de tubería por otra de mayor diámetro en los diferentes barrios afectados. Además, adquirió un terreno para la reubicación de la Institución Educativa.

Es así como el proceso de modelación matemática contribuye al mejoramiento de los estudiantes en muchos conceptos matemáticos, en entender los contextos y observar como estos se relacionan con las matemáticas, y sobre todo, a crear conciencia social sobre las formas de solucionar problemas del entorno real de los estudiantes.

Con este estudio se contribuye al afianzamiento de la modelación matemática como un factor que permite a los estudiantes expresar, argumentar, convalidar y reflexionar sobre la

matemática y su relación con los contextos, fundamentando una construcción de significados entre ellos.

CAPÍTULO 5

5. CONCLUSIONES

En el presente capítulo, se manifiestan las principales conclusiones evidenciadas en el desarrollo del proyecto de investigación. Los resultados de la experiencia realizada con los estudiantes permiten determinar aspectos claves en la construcción de modelos matemáticos desde un contexto auténtico.

Nuestro estudio proyectó como objetivo principal: “*Analizar como los estudiantes construyen modelos matemáticos a través de la medida del área y el volumen emergentes en un contexto auténtico.*” presentamos las siguientes conclusiones:

5.1. Factores asociados a una construcción de modelos matemáticos

En el trabajo de investigación se lograron evidenciar algunos factores que fueron determinantes en la construcción de modelos matemáticos en el contexto de las inundaciones presentadas en una Institución Educativa en la cual pertenecen los estudiantes del grado décimo. Estableciéndose en este proceso elementos correspondientes con los momentos planteados por Biembengut y Hein (2006), Villa-Ochoa (2007) & Blum y Borromeo (2009), con los cuales los

estudiantes reflexionaron sobre las matemáticas que emergen del entorno en el que desenvuelven. Estos elementos son:

5.1.1.El contexto auténtico y su implicación en la construcción de modelos

Los ambientes enmarcados en el contexto de las inundaciones que afectan una Institución Educativa y a una comunidad, se convirtieron en espacios propicios y puntos de partida para que los estudiantes se aproximaran a las matemáticas escolares. Los estudiantes se motivaron a participar en la exploración de fenómenos de su contexto, con lo cual se facilita leer y comprender las situaciones del entorno matemáticamente a través de la modelación. Por lo que, este tipo de situaciones genera una conexión con las experiencias, la vida cotidiana y los conocimientos previos de los estudiantes sobre el fenómeno objeto de estudio. Con lo cual se favorece la obtención de significado sobre las nociones matemáticas mediante las actividades relacionadas con la modelación matemática. Por esta razón es importante que los estudiantes indaguen, observen, adopten y analicen las diferentes situaciones que permitan construir procesos de modelación en contextos propios de los estudiantes del cual ellos son conocedores.

Al experimentar los estudiantes en forma grupal un proceso de modelación matemática, se pudo observar la contribución a diferentes procesos de aprendizaje en el trabajo conjunto, así mismo, el fortalecimiento de los estudiantes en la interpretación de situaciones del fenómeno, la argumentación del mismo, a la vez que se promovió el establecimiento de acuerdos, consensos, ideas conjuntas a partir de las ideas individuales, por lo tanto, el papel de cada integrante de los diferentes equipos fue primordial puesto que algunos aportaron desde su experiencia y conocimiento del contexto, otros desde el conocimiento matemático y otros aportan desde la

posición del otro. En este mismo sentido, el trabajo desde la modelación matemática depende del trabajo colectivo, de la toma de decisiones y de las conclusiones adoptadas por el grupo; si bien aunque estas no sean absolutas y aplicables de forma mecánica a otros contextos, tiene un valor importante puesto que son producto de la interacción y el análisis de los estudiantes con el contexto.

5.1.2. Delimitación de las situaciones en el contexto: generador de modelos matemáticos

En primera instancia los estudiantes hacen reflexiones de carácter económico y social, a través del reconocimiento de las zonas afectadas por el fenómeno. A partir de estas reflexiones, los participantes de la investigación establecen nociones matemáticas que emergen de dicho contexto, las cuales fueron delimitadas puesto que se evidenciaron muchas variables. En este sentido hubo la necesidad de simplificar el problema donde después de una serie de preguntas construidas conjuntamente entre el docente investigador y los estudiantes, ellos seleccionan la pregunta “*¿Podría una expresión matemática determinar el área superficial inundada a partir de la altura del nivel del agua?*” donde se considera que está articulada al propósito de la investigación. Al respecto, mediante una charla se organizaron las ideas de los estudiantes con el fin de que comprendieran mejor la situación. Sin embargo, considero que la verdadera apropiación del mismo se establece de una forma significativa si el estudiante, a partir del contexto experimenta situaciones reales que le permita construir el concepto. De esta forma, pretendiendo que el estudiante se apropie de nociones matemáticas y perciba que en cualquier fenómeno del mundo “real” emergen elementos matemáticos, que permiten no solo comprender mejor la situación sino promover soluciones. Desde esta perspectiva, trascendieron de las diversas formas de identificación, selección y estructuración de estrategias para solucionar la

pregunta que se deseaba responder. El ambiente creado en torno al proyecto fue un espacio propicio para el trabajo colaborativo, pues las actividades de medición, elaboración de los planos y la construcción de los modelos matemáticos dependieron del aporte de cada integrante así como de la socialización de los resultados.

5.1.3. Los modelos matemáticos como facilitador de alternativas de solución

Los estudiantes, en su rol de investigador, exploraron, delimitaron, simplificaron el contexto y propusieron estrategias que a través de la modelación matemática, logran fundamentarse de conceptos matemáticos, pues relacionaron funciones cuadráticas y cúbicas que buscaron en diferentes medios como libros e internet, con las elaboradas por ellos. En este aspecto el trabajo permitió que los estudiantes se apropiaran no solo de nociones matemáticas, sino de reconocer aspectos del trabajo que pueden contribuir a tomar acciones para disminuir los efectos del fenómeno. Al respecto, Dani se pregunta: “¿Con qué alturas del nivel del agua el municipio de Caucasia podría experimentar una inundación completa?” Pereira, preocupado por las inundaciones en su vivienda y planteando una alternativa de solución, pregunta: “¿Cuál es la altura que se debe usar para construir una muralla que no deje pasar el agua del río?” Anyi, identificada con el problema ambiental, considera que el uso inadecuado de las basuras favorece las inundaciones. Por lo tanto, propone formar un grupo ecológico. Sobre una pregunta que se le hace a Angélica: “¿Cómo te sentiste con la experiencia de construir el modelo matemático?”, ella afirma:

Bueno, el proyecto a mi parecer me pareció un proyecto chévere y de interés, pues a pesar de que fue basado en un colegio y en unas inundaciones,

estos mismos porcentajes se podrían obtener con unos números más grandes, porque así como se le hizo a este colegio, también se le puede hacer incluso a un municipio, a un barrio, a una ciudad; serían obviamente números más grandes, pero uno se da cuenta de que sí es posible, uno se da cuenta de estos porcentajes, de esas soluciones; de pronto al hallar áreas, volúmenes y altura uno sabría qué parte se inunda primero, que soluciones habría, qué tanto sería el daño, entonces como qué bacano porque al presentarlo a unas directivas o algo, sería un proyecto que ayudaría a muchas personas, digo yo, pues, acá (Comunicación personal, 7 de junio de 2013).

Sobre la misma pregunta, Pereira responde:

El proyecto es muy chévere porque nosotros medimos el colegio y los planos también los hicimos. Yo aprendí con las medidas que me daban duro y muy chévere porque aprendí cosas nuevas con las ecuaciones y todo eso de los cálculos, entonces uno piensa que con estos modelos, si uno sabe las alturas, puede saber hasta dónde llega el agua, y se podría construir una muralla más alta que las inundaciones y así el agua no se nos mete a las casas (Comunicación personal, 7 de junio de 2013).

Dani opina: *“Los modelos nos dicen qué tanta agua puede inundar a Caucasia y me sentí bien con el proyecto porque salimos del salón, veníamos en las tardes a medir el colegio y aprendí de las funciones cuadráticas y calcular las áreas. Me gustó mucho y trabajamos todos y no fue aburrido”*.

La reflexión de los estudiantes deja ver algunas de las implicaciones de la construcción de modelos matemáticos. Proponen que podrían servir para prever inundaciones y reconocen cómo éstos, articulados con el contexto, les permite comprender tanto lo conceptual como lo contextual. Se podría utilizar los resultados para avanzar en la búsqueda de soluciones. Por lo visto sobre los estudiantes, una de las ventajas de la modelación matemática es que se puede explorar a partir de diferentes perspectivas, intereses y propósitos. En nuestro caso, la modelación matemática se concibe desde una mirada, que favorece ante todo la comprensión de nociones matemáticas en situaciones o contextos auténticos. Por lo demás, los estudiantes comienzan, por propia iniciativa, a visitar a las entidades municipales con el fin de conocer cuáles son las acciones adoptadas por éstas para contrarrestar las causas y consecuencias del fenómeno, teniendo en cuenta lo observado y analizado en el estudio.

5.1.4. La Tecnología como medio de visualización del fenómeno

Un aspecto importante dentro del trabajo con los estudiantes fue la utilización de herramientas tecnológicas con las cuales visualizaron y obtuvieron una idea general sobre el impacto del fenómeno en la comunidad, pues al observar cuanta área superficial se inundaba para alturas superiores a 1 metro, los estudiantes estimaban por ejemplo para qué altura el área

superficial del agua podría inundar todo el municipio. En este sentido, la construcción de modelos matemáticos les permitió asumir una postura crítica frente al fenómeno y como esos resultados podrían utilizarse por otras personas para prever y tomar conciencia sobre la problemática de las inundaciones en la región.

5.1.5. Apropiación de conceptos matemáticos

En cuanto a la conceptualización matemática, los estudiantes a través de las actividades desarrolladas, se apropian de la noción de medida del área entendiéndose ésta como la extensión de la superficie inundada. En el caso del volumen, viene relacionado como el espacio que ocupan las aguas. Pues en las actividades los estudiantes han clarificado el área y el volumen como magnitudes que se pueden ser comparada, medida, evaluada, aproximada, sumada, restada, etc., como magnitudes unidimensionales, pues en el caso del trabajo de campo, los estudiantes experimentaron con estas situaciones a través de la comparación de áreas y volúmenes de aguas que inundan los diferentes sectores de la Institución. Otra forma que utilizaron los estudiantes para aproximarse a los conceptos, es abordarla como una magnitud bidimensional en el caso del área y tridimensional en el caso del volumen, que permite medirla en función de la longitud. Los estudiantes han tenido la posibilidad de hacer transformaciones, asociaciones y conservaciones en el proceso de medición de las áreas y el volumen, evidenciándose la articulación del pensamiento numérico con el métrico-geométrico y el variacional. Como también, lograron usar sistemas de ecuaciones lineales 2×2 para producir modelos matemáticos a partir de la función cuadrática. Con relación al volumen de agua, a partir de sistemas de ecuaciones lineales 3×3 , encontraron las constantes fundamentadas en modelos matemáticos inherentes a las funciones cúbicas.

5.2. Surgimiento y construcción del modelo matemático

Una de las ventajas de la modelación matemática es que puede observarse a partir de diferentes perspectivas, intereses y propósitos. En el caso nuestro, la modelación matemática se ha concebido desde una mirada realista, favoreciendo la idea de situarse en un principio en la significación de nociones matemáticas en situaciones y problemas en contextos auténticos e inherentes a los estudiantes, fundamentada por la construcción de modelos matemáticos con sentido para el estudiante.

Para elaborar el modelo los estudiantes tuvieron en cuenta el contexto, los sistemas de medidas y procesos en la construcción a través del trabajo en equipo, sin embargo cada estudiante desde su experiencia, saberes previos fue construyendo de manera orientada sus propios procesos. Los resultados permiten encontrar de una forma aproximada el área superficial del agua inundada y el volumen de agua que inunda extensiones de tierra a partir de una altura determinada. Basados en ellos, se observa cómo a partir de un proceso de medida en un contexto auténtico, como el de las inundaciones, los estudiantes pudieron construir modelos matemáticos, articulando elementos variacionales como los establecidos en la relación entre el área superficial inundada y la altura del nivel del agua. Los estudiantes usaron sistemas de ecuaciones lineales para producir modelos de forma cuadrática (ver ilustración 33). Relacionaron el área superficial inundada con el área de una figura geométrica, es decir, asumieron que la función cuadrática es una forma de representar el área de un terreno. Teniendo en cuenta que, en el fenómeno de la inundación, la forma que toma el agua depende de la extensión y regularidad del terreno, estudiar tales aspectos requiere otros elementos adicionales que se podrían modelar en cursos más

avanzados, cuando se experimente con otros tipos de funciones y contextos más amplios y complejos.

El surgimiento de los modelos matemáticos durante el proceso experimentado por los estudiantes facilitó la integración de saberes previos con nuevos conocimientos. Según Londoño y Muñoz (2011), surgen como el producto de la simplificación, matematización y la validación realizada en todo el proceso para la obtención de modelos matemáticos. Estos construidos a partir de la recolección de datos y el posterior cálculo tanto del área superficial inundada y el volumen de agua a partir de un punto de referencia, permitió que a través de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 y 3×3 los estudiantes formaran ecuaciones que les permitía encontrar el área superficial y el volumen de agua que inundaba al colegio dependiendo de la altura de la misma en un punto de referencia que consistía en una alcantarilla cercana a una pared por donde emerge el agua. De acuerdo con Biembengut y Hein (2004), las ecuaciones construidas por los estudiantes, son modelos matemáticos, ya que están relacionados con elementos matemáticos que emergen de un fenómeno, en este caso, las inundaciones presentadas en una Institución Educativa.

Las ecuaciones matemáticas por si sola carecen de sentido, por lo que el modelo matemático adquiere significación tiene que ver con la relación del ambiente cotidiano del estudiante y sus experiencias con las matemáticas. Desde esta mirada, el trabajo a partir la modelación matemática va en contravía con el aprendizaje tradicional y mecánico de los estudiantes, sino que tiene en cuenta otros aspectos tales como:

- El inicio de las actividades no corresponde con las definiciones, los conceptos y las teorías, sino que se tiene en cuenta el contexto en el que interactúa el estudiante.
- Los procesos dentro de la modelación matemática cumplen trabajos de investigación y no procesos de repetición o mecanización.

En este sentido, según Londoño y Muñoz (2011) “los modelos que emergen de los contextos explorados directamente por los estudiantes, deben converger en una abstracción o representación simbólica que surge de las diversas formas de matematización individual y grupal” (p. 182). Con respecto al proceso de modelación, es posible valorar su pertinencia en la implementación de diferentes metodologías y estrategias didácticas en el aula de clases y además su papel en la interrelación del mundo “real” con las matemáticas. Sin embargo, una situación de contexto auténtico, por su complejidad, permite en el proceso de modelación considerar aspectos que tienen que ver con los posibles errores en la recolección de datos, medidas del terreno y en los planos, el cálculo de las áreas, las alturas del nivel del agua, etc., pues al ser una situación “real”, estos se encuentran sujetos a diversos factores externos propios del fenómeno, los cuales afectan de alguna forma la construcción de modelos.

La situación trabajada desde la modelación ha permitido que los estudiantes logren desarrollar algunos razonamientos en cuanto al proceso y al estudio realizado, ya que consideran que el modelo matemático encontrado podría servir para que personas en zonas de riesgo prevean futuras inundaciones, incluso podría ser presentado a directivos con el fin de plantear posibles soluciones para minimizar los efectos. Con respecto al problema en cuestión, al obtener resultados, los estudiantes reflexionaron sobre las posibles soluciones al problema, pues al ser un fenómeno natural y al estar la población construida en la ribera del río, las inundaciones son

inminentes. Con esto los estudiantes han reflexionado sobre las posibles soluciones al problema, tales como: la adecuación de caños, construcción de diques y malecones, y acciones de recolección de basuras; lo que evidencia que la actividad relacionada con la construcción de modelos va más allá de un trabajo solo desde las matemáticas. La modelación enfocada en la Educación Matemática orienta a que los estudiantes se reconozcan ciudadanos que pueden leer, criticar y proponer sobre su contexto.

Los modelos matemáticos construidos por los estudiantes se asocian a un proceso de modelación que permitió el aprendizaje de las matemáticas, implica que al abordar contextos auténticos desde la Educación Matemática, se orienta hacia una perspectiva social y cultural según lo planteado por Jaramillo (2011) y Giménez et ál. (2007), puesto que en el estudio se ha tenido en cuenta las consideraciones y disposiciones de los estudiantes, de tal manera que se favorezca la participación y dar paso a la discusión y reflexión sobre los modelos construidos colectivamente. En esta misma perspectiva somos conscientes de que la construcción de modelos refleja una realidad parcial del fenómeno, pues según Skovsmose (citado por Valero, 1999) “algunos rasgos de la realidad se quedan por fuera del alcance de las matemáticas y permanecen dentro del alcance de las descripciones del lenguaje natural y viceversa” (p.185). Sin embargo, en el presente estudio, se privilegian las formas de construir el conocimiento, de relacionarse los unos con los otros con el propósito de lograr en los estudiantes no solo una forma alternativa de asociar las matemáticas al contexto, sino que reflexionaran sobre el uso de las matemáticas a la luz del fenómeno.

5.3. Implicaciones del proceso de modelación

A continuación se presentan algunas implicaciones inherentes al proceso de modelación en el aula de clases así como las consideraciones para futuras investigaciones en el campo de la modelación matemática en contextos auténticos.

5.3.1. Con relación al aula de clase

Un aspecto importante dentro del proceso de modelación tiene que ver con el reconocimiento de los contextos antes del procedimiento formal de las matemáticas puesto que es significativo que los estudiantes reconozcan elementos dentro del mismo entorno que les permita buscar formas de representar y expresar las matemáticas emergentes de dicho contexto.

El docente dentro del aula de clases podrá efectuar tareas que tienen que ver con la delimitación y la simplificación del problema, pues cuando se trabaja en contextos, se presentan muchas relaciones entre variables y elementos de las matemáticas, las cuales no pueden abordarse en su totalidad. En este sentido, la modelación matemática puede convertirse en una alternativa en el campo de la Educación Matemática que permite construir elementos constitutivos de las matemáticas escolares y que sean significativas para el estudiante. Esto requiere entonces por parte del docente apropiarse de ambientes actitudinales, académicos, sociales y culturales que se pueden establecer en el aula. Con lo cual el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, no este limitado solo a encontrar fórmulas, teoremas, definiciones y problemas aislados, sino a una construcción social desde el conocimiento e interpretación de los contextos con el que interactúan los estudiantes.

5.3.2. Para futuras investigaciones en esta línea

El presente estudio ha favorecido a la construcción de modelos matemáticos a partir de situaciones en contextos, en este caso, el presentado por las inundaciones que afectan a una Institución Educativa y a una comunidad en general. En este sentido, la utilización del proceso de modelación como estrategia de aprendizaje de las matemáticas dentro y fuera del aula permitió la articulación de las matemáticas con el contexto así como la reflexión de los estudiantes sobre la problemática a nivel social y augurar diferentes soluciones. En un futuro se podría seguir realizando investigaciones que contribuyan a este campo del saber. Algunas de ellas fueron presentadas en capítulos anteriores (cap. 4).

El MEN (2006) considera que la modelación matemática ofrece elementos importantes para convertir el aula de clases en una micro-sociedad científica, por tanto se consideran otros elementos que se pueden explorar como son:

- Los contextos auténticos y su significación en la producción de modelos desde una perspectiva social.
- Elementos que influyen en la construcción de modelos matemáticos resueltos por los estudiantes.
- La caracterización de los caminos seguidos por los estudiantes en el proceso de modelación.

5.3.3. Divulgación del trabajo de investigación

Ponencias¹:

A nivel internacional:

- 16th International Conference of the Teaching of Mathematical Modeling and Applications-ICTMA 16. Measure of Area and Volume in an Authentic Context: Learning Through Mathematical Modeling. Universidade Regional de Blumenau. Blumenau (SC)-Brasil. Julio 14 al 19 de 2013.
- V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medida de áreas en contextos auténticos: un enfoque desde la modelación matemática. Universidad de Medellín. Mayo 8 al 10 de 2013.
- IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. Universidad de Medellín. Mayo 9 al 11 de 2012.

¹ Ver anexo 8. Certificados de participación.

A nivel nacional:

- 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa-ASOCOLME. Medida de área y el volumen en contextos auténticos: Una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática. Medellín, 11 al 13 de octubre de 2012.

A nivel local:

- Primer Encuentro Subregional "Diálogos Universidad-Región". Universidad de Antioquia. Caucaasia, octubre 1 de 2012.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrantes, P. (1994). *O trabalho de projecto e a relação dos alunos com a matemática a experiência do projecto*. Tesis de Maestría no Publicada. Lisboa: Universidad de Lisboa.
- Afonso, M. (2003). Los niveles de pensamiento geométrico de van hiele. Un estudio con profesores en ejercicio. *Tesis doctoral Publicada en <http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=1132>*. España, Universidad de la Laguna.
- Alexandrov, A. (1976). Visión General de la Matemática. En d. Alexandrov, *La Matemática: su Contenido, Métodos y Significado* (págs. 17-89). Madrid: Alianza Editorial.
- Arias, F. (2006). *El proyecto de investigación, Introducción a la Metodología Científica*. Mexico: Editorial Episteme.
- Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. Tesis Doctoral no Publicada. Departamento de Matematica Educativa*. Mexico: CINVESTAV. Recuperado el 27 de 4 de 2013, de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/arrieta_2003.pdf: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis04.html>
- Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.
- Benigno, A., & Cardozo, L. A. (2008). El rescate de la enseñanza de la geometría como un instrumento facilitador de la disciplina de matemáticas en las escuelas de enseñanza primaria y secundaria. *Universidad Federal del Paraná, Brasil*.
- Biembengut, M. S., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemáticas. *Educación Matemática, 16*(2), 105-125.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2006). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemática. *V Festival Internacional de Matematica. De Costa a Costa* (págs. 1-25). Costa Rica: Educación Matemática.
- Biembengut, M., & Hein, N. (2007). *Modelagem Matemática no Ensino*. Sao Paulo: Contexto.
- Bishop, A. (1999). *Enculturación Matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós. Temas de Educación.
- Bladé, E., & Gómezt, M. (2006). *Modelación del flujo en lámina libre sobre causas naturales. Análisis integrado en una y dos dimensiones*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya.
- Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. (E. Horwood, Ed.) *Teaching and learning mathematics in context*, 3-14.

- Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos métodos*. Porto: Editora Porto.
- Borba, M., & Araujo, J. (2008). *Investigación Cualitativa en Educación Matemática*. Mexico: LIMUSA.
- Boullosa, A., Lage, J. C., & Hernández, E. E. (2009). La Modelación Y Los Modelos Teóricos En La Ciencia. Una Concreción En La Auditoria Interna Con Enfoque De Riesgo. *centro universitario Jose Martí Pérez de Sancti Spiritus*, 45-56.
- Burak, D. (2005). Modelagem Matemática: uma metología alternativa para o ensino de matemática. *Universidade Estadual Paulista Júlio Mesquita*.
- Caraça, B. (1984). *Conceitos fundamentais da matemática*. Lisboa: Livraria Sà Da Costa Editora.
- Corberán, R. (1996). Análisis del concepto de área de superficies planas. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde primaria a la universidad. (*Tesis doctoral*), Universitat de valencia.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht. Mexico: CINVESTAV.
- Gamboa, R., & Balletero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, 113-136.
- García Díaz, M., Toledo Martín, T., Ríos Obregón, J., Rodríguez Felipe, C., & Perez Medinilla, Y. (2007). *Contextualización de modelos matemáticos. Necesidad en la carrera de Contabilid y Finanzas*. Recuperado el 24 de julio de 2012, de <http://www.ilustrados.com/tema/10175/Contextualizacion-problemas-matematicos-Necesidad-carrera-Contabilid.html>.
- Gaulin, D. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, 5-63.
- Gialdino, I. (2006). *Estrategias de investigación cualitativa*. España: GEDISA.
- Gil Escudero, G., Fernández García, J., Rubio Miguelsanz, F., & López Ramos, C. (2000). *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos: Un nuevo marco para la evaluación*. Madrid: OCDE.
- Giménez, J., Díez-Palomar, J., & Civil, M. (2007). Exclusión y matemáticas. Elementos que explican la investigación actual en el área. En U. D'Ambrosio, P. López, G. Fitzsimons, G. Knijnik, & N. Planas, *Educación Matemática y exclusión* (págs. 9-44). Barcelona: Graó.
- Godino, J. & Ruíz (2002). *Geometría y su didáctica para maestros*. Obtenido de Manual para el estudiante: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat_maestros/manual/5_Medida.pdf

- Godino, J., Batanero, C., & Roa, R. (2002). *Medida de magnitudes y su didáctica para maestros*. Obtenido de Manual para el estudiante: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat_maestros/manual/5_Medida.pdf
- Goncalves Tavares, R. (2006). ¿Por qué los estudiantes no logran un nivel de razonamiento en la geometría? *Revista Ciencias de la Educación*, 1(27), 83-98.
- González Urbaneja, P. M. (2004). *Los orígenes de la geometría analítica*. España: Fundación canaria orotava de historia de la ciencia.
- Guillen, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría?. ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, *Investigación en Educación Matemática XIV* (págs. 21-68). Lleida: Seiem.
- Hays, p. (2004). Case study research. En *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social* (págs. 217-234). Mahwah, NJ: LEA.
- Hitt, F. (1993). *Simulación de fenómenos físicos vía la microcomputadora para la formación de conceptos matemáticos*. *Memorias del quinto Simposio Internacional sobre investigación en educación matemática*. Merida: Yucatan.
- Ibáñez, G. (1992). Planificación de unidades didácticas: una propuesta de formalización en el Aula nº1. *REVISTA AULA. De Innovación Educativa*, 13-15.
- Israel, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modelisation mathématique*. Paris: Editorial Marcea S.A.
- Jaramillo, D. (2011). La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles. *Educación y Pedagogía*, 23(59), 13-36.
- Kaiser, G., & Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics Education—Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 51-76.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für der Didaktik*, 38(3), 302-310.
- Lluís, E. (1982). La Geometría en la enseñanza. notas de una conferencia. *Números* (3), 7-20.
- Londoño, S. M., & Muñoz, L. M. (2011). *La Modelación Matemática: Un Proceso Para La Construcción De Relaciones Lineales Entre Dos Variables*. *Tesis de Maestría no Publicada*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- MEN. (2006). *Estándares en Competencias Básicas*. Bogotá: Ministerio de Educación.
- Méndez, L., Moreno, R., & Ripa, C. (1992). *Adaptaciones Curriculares en educación infantil*. Madrid: Editorial Marcea.

- Monk, S. (1992). Students' understanding of a function given by a physical model. En E. Dubinsky, & H. Guershon, *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Vol. 25, págs. 175-194). Washington, DC: Mathematical Association of America.
- Moreno Armella, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 1(1), 123-136.
- Moreno, A., Bulla, B., Giraldo, N., Mantilla, A., & Mantilla, M. (1998). Introducción a la medida del volumen. *EMA*, 3(3), 254-262.
- Moreno-Armella, L., & Hegedus, S. J. (2011). The Emergence of Mathematical Structures. *Educ Stud Math*, 77, 369-388.
- Olmo, M., Moreno, M., & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: SINTESIS, S.A.
- Pérez, S., & Guillén, G. (2009). Planteamiento de un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la geometría en secundaria a través de diferentes enfoques. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (eds) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM. Santander*.
- Planas, N. (2002). Nociones Sociales Recontextualizadas en Educación Matemática: el Caso de la Competencia Comunicativa. *VI Simposio de la SEIM*, 175-186.
- Planchart, O. (2002). *La visualización y la modelación en la adquisición del concepto de función*. Recuperado el 12 de marzo de 2012, de <http://ponce.inter.edu/cai/tesis/oplanchart/inicio.pdf>
- Planchart, O. (2005). *La modelación matemática: alternativa didáctica en la enseñanza de pre cálculo*. Recuperado el 12 de marzo de 2012, de <http://cremc.ponce.inter.edu/1raedicion/modelacion.htm>.
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría no publicada. Medellín: Facultad de Educación-Universidad de Antioquia.
- Quiroz Rivera, S. A., Rendón, M. D., & Rodríguez Gallegos, R. (2011). *Las competencias de modelación matemática para el aprendizaje del cálculo de volumen con apoyo en las webquest*. Recuperado el 23 de mayo de 2013, de <http://www.virtualeduca.info/fveduca/es/tematica/41-una-escuela-para-el-futuro/98-las-competencias-de-modelacion-matematica-para-el-aprendizaje-del-calculo-de-volumen-con-apoyo-en-las-webquest>.
- Sandoval, C. (2002). Investigación Cualitativa. *Programa de especialización en teoría, métodos y técnicas de investigación social*, ICFES.
- Skovsmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. (P. Valero, Trad.) Colombia: Universidad de los Andes.
- Sierpinska, A. (1992). On Understanding The Notion of Function. En E. Dubinsky, & G. Harel (Edits.), *The concep of function: Some Aspects of Epistemology and Pedagogy* (C. Delgado G., Trad., Vol. 25, págs. 25-58). Washington, DC: MAA Notes. Mathematical Association of America .

- Solís Bolaños, H., Beaulie, N., & Chacón, J. J. (1994). *Analisis del problema de inundaciones en el rio Colorado. Turrialba, Costa Rica*. Turrialba: JACEC, MOPT.
- Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2 ed.). Madrid: Morata.
- Torres, S. M. (2007). Un paseo matematico por Egipto. *Aldadis.net la revista de educación*, (12), 28-31.
- Trigueros, G. M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.
- Ulloa, J. T. & Rodríguez, J.A. (2010). El modelo logístico: Una alternativa para el estudio del crecimiento poblacional de organismos. *REDVET. Revista Electrónica de Veterinaria*, 11(3), 1-11.
- Vara Orozco, M. (2009). El Geoespacio, un recurso para la enseñanza de la Geometría. recuperado el 14 de octubre de 2013, de <http://www.matematicaparatodos.com/variros/geoespacio.pdf>.
- Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Theoriques et Methodologiques des Recher- ches Francaises en Didactique des Mathematiques. *Conferencia plenaria o proceeding*. Proceedings of the eleventh International Conference of the Psychology of Mathematics Education.
- Villa Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2006). Modelacion en educación matemática. Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares Colombianos . *Revista virtual, universidad catolica del norte*.
- Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*(19), 63-85.
- Villa-Ochoa, J. A. (2010). *Modelación Matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación*. Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Entomatemáticas, Universidad de Medellín, Medellín.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. *Revista Virtual-Universidad Católica del Norte*(27), 1-21.

ANEXOS

Anexo 1: Entrevista Inicial

Lugar:

Fecha:

Entrevistado (a):

Entrevistador:

Esta entrevista procura:

Explorar el punto de vista del estudiante respecto al proceso de modelación con relación al volumen de agua.

Exteriorizar las ideas relacionadas con los procedimientos utilizados para encontrar el volumen de agua.

1. ¿Cómo hallaron el volumen de la cancha cuando la altura del nivel del agua en el punto de referencia es diez centímetros?
2. ¿Cómo hallaron el volumen del agua por ejemplo cuando la altura en ese punto de referencia de la alcantarilla era de 20 cm?
3. ¿Cómo hallaron ustedes el volumen ya cuando la altura del agua en ese punto de referencia era de 30 cm?
4. ¿De qué forma se representaron los volúmenes hallados?
5. ¿De qué manera encontraron un modelo matemático o una ecuación que les permitiera a ustedes que ya dependiendo de la altura ustedes pudieran encontrar cualquier volumen?
6. ¿Cómo te pareció toda esa experiencia de investigación y consecución de modelos matemáticos?

Anexo 2: Consentimiento De Participación

Yo _____ estoy de acuerdo con participar en la investigación titulada “Medida de área y volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática” que es orientada por el docente Santiago Manuel Rivera Quiroz, estudiante de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesor de la Institución Educativa Divino Niño. Entendiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo solicitar que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es analizar la manera en que estudiantes de grado décimo construyen modelos matemáticos emergentes en un contexto auténtico.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede aportar a la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio seré observado en clases regulares y extra-clases y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solamente se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial y serán usados seudónimos para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de correo electrónico santiagorq@hotmail.com

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones lunes y/o jueves de 2:00 a 4:00 de la tarde).

_____	_____	_____
Nombre del investigador	Firma	Fecha
_____	_____	_____
Nombre del participante	Firma	Fecha
_____	_____	_____
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

Anexo 3: Exploración del contexto

Realicemos una exploración del contexto a través de un recorrido por sectores aledaños a la Institución Educativa, observemos todo lo que esté a nuestro alrededor y respondamos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué ocurren los fenómenos de inundación en el país?
2. ¿Qué factores consideras han incidido al incremento del fenómeno de las inundaciones a nivel nacional?
3. ¿Por qué crees que se inundan algunas zonas de nuestro Municipio?
4. ¿Qué consecuencias dejan las inundaciones en nuestro Municipio?
5. ¿Qué tipo de enfermedades se perciben durante y después de las inundaciones?
6. ¿Qué problemas sociales y del medio ambiente trae una inundación al Municipio?
7. ¿Cómo crees se podría solucionar el problema de las inundaciones en el Municipio de Cauca?
8. ¿Considerando el fenómeno de inundación del colegio qué nociones matemáticas se pueden determinar?

Anexo 4: Hacia La Construcción De Modelos Matemáticos

1. Plantea una expresión matemática que permita relacionar las dos variables (altura y área) de tal forma que se pueda encontrar el área a partir de cualquier altura del nivel del agua en el punto de referencia.
2. ¿Qué entiende por área?
3. Elabora un plano de la planta del colegio e identifica las diferentes secciones que se inundan ubicando con las medidas tomadas las áreas cuando la altura del nivel del agua es 10cm, 20cm, 30cm a partir del punto de referencia. ¿Qué forma tiene esas secciones (rectangulares, cuadradas, trapezoide, irregulares)?
4. ¿Cuántas veces puede caber el área que primero se inunda en el área total del colegio?
5. ¿Hay alguna relación entre el área superficial inundada y la altura del nivel del agua en el punto de referencia. ¿Por Qué?
6. ¿De qué forma se podría representar esa relación?

Anexo 5: Hacia la construcción de modelos matemáticos: volumen

Teniendo en cuenta lo desarrollado en la actividad anterior y evidenciando que hay elementos de las matemáticas que emergen en el contexto, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Qué relación hay entre la altura del nivel del agua en el punto de referencia y el volumen de agua desalojada?
2. ¿Cómo se halla el volumen de la cancha a 10cm de altura?
3. ¿Cuándo ven una inundación como es el agua en la orilla?
4. ¿Qué pasa a medida que caminamos hacia el frente sobre el agua?
5. ¿Cómo creen entonces que podríamos dibujar la forma del agua en la cancha?
6. ¿Bueno y como hallaron el volumen del agua por ejemplo cuando la altura en ese punto de referencia de la alcantarilla era de 20 cm?
7. ¿Encontrar una ecuación o un modelo matemático o que les permitiera dependiendo de la altura en el punto de referencia encontrar el volumen?

Anexo 6: Entrevista al jefe de planeación

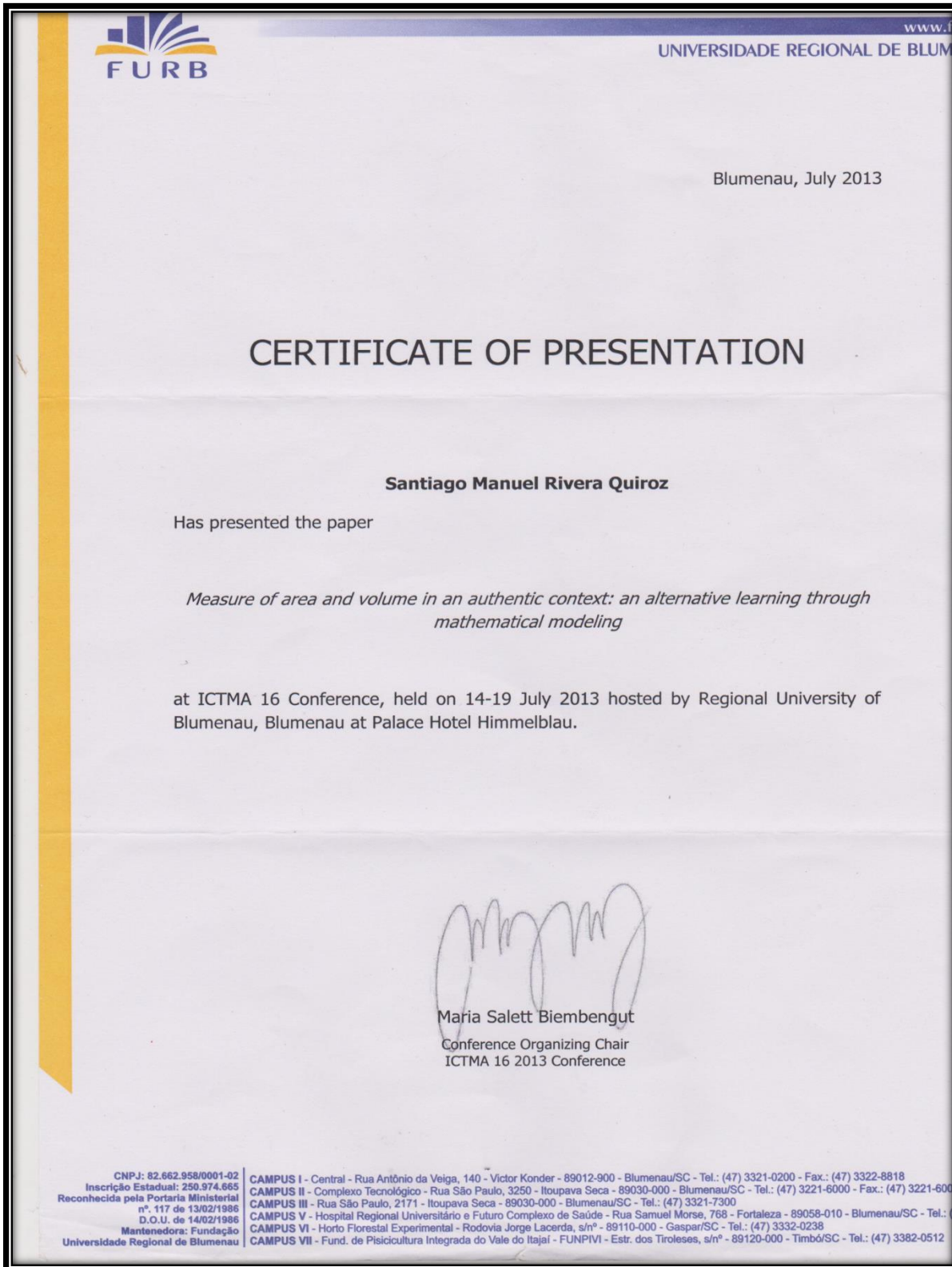
1. ¿por qué se dan las inundaciones?
2. ¿por qué las inundaciones cada vez se dan más fuertes?
3. ¿Cuáles han sido los años con más casos de inundación en el municipio de Cauca?
4. ¿Cuáles han sido o fue el año que menos afecto este fenómeno?
5. ¿En qué zonas se presentan estas situaciones?
6. ¿por qué el colegio Divino Niño está ubicado en esa zona del Municipio de Cauca?
7. ¿por qué no se reubica la Institución de esa zona?
8. ¿Qué solución usted daría para minimizar la inundación en esta zona?

Anexo 7: entrevista al Alcalde del municipio de Caucasia.

Los estudiantes elaboraron las siguientes preguntas con el fin de realizar una entrevista al Alcalde Municipal.

1. *¿Qué proyecto existe para la mitigación del impacto invernal en las Instituciones Educativas?*
2. *¿Para qué fechas se tiene pensado realizar esos proyectos?*
3. *¿Teniendo en cuenta que aproximadamente el 40% de la población tanto urbana como rural sufren con las consecuencias de la ola invernal; que proyecto Municipal, Departamental o Nacionales existen para darle a esta población una mejor calidad de vida?*
4. *En la emergencia invernal llegan al Municipio y del Municipio mismo ayudas generales como alimentos para las familias afectadas. ¿Cómo se le garantiza a la comunidad que hay transparencias y equidad en la distribución de estas?*

Anexo 8: Certificados



The image shows a certificate from FURB (Universidade Regional de Blumenau) dated July 2013. The certificate is titled "CERTIFICATE OF PRESENTATION" and is issued to Santiago Manuel Rivera Quiroz. It states that he has presented a paper titled "Measure of area and volume in an authentic context: an alternative learning through mathematical modeling" at the ICTMA 16 Conference, held from July 14-19, 2013, at the Palace Hotel Himmelblau. The certificate is signed by Maria Salett Biembengut, the Conference Organizing Chair. The bottom of the certificate contains contact information for various FURB campuses.

FURB UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU www.furb.br

Blumenau, July 2013

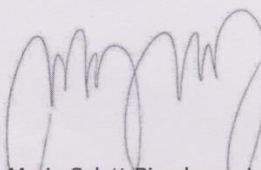
CERTIFICATE OF PRESENTATION

Santiago Manuel Rivera Quiroz

Has presented the paper

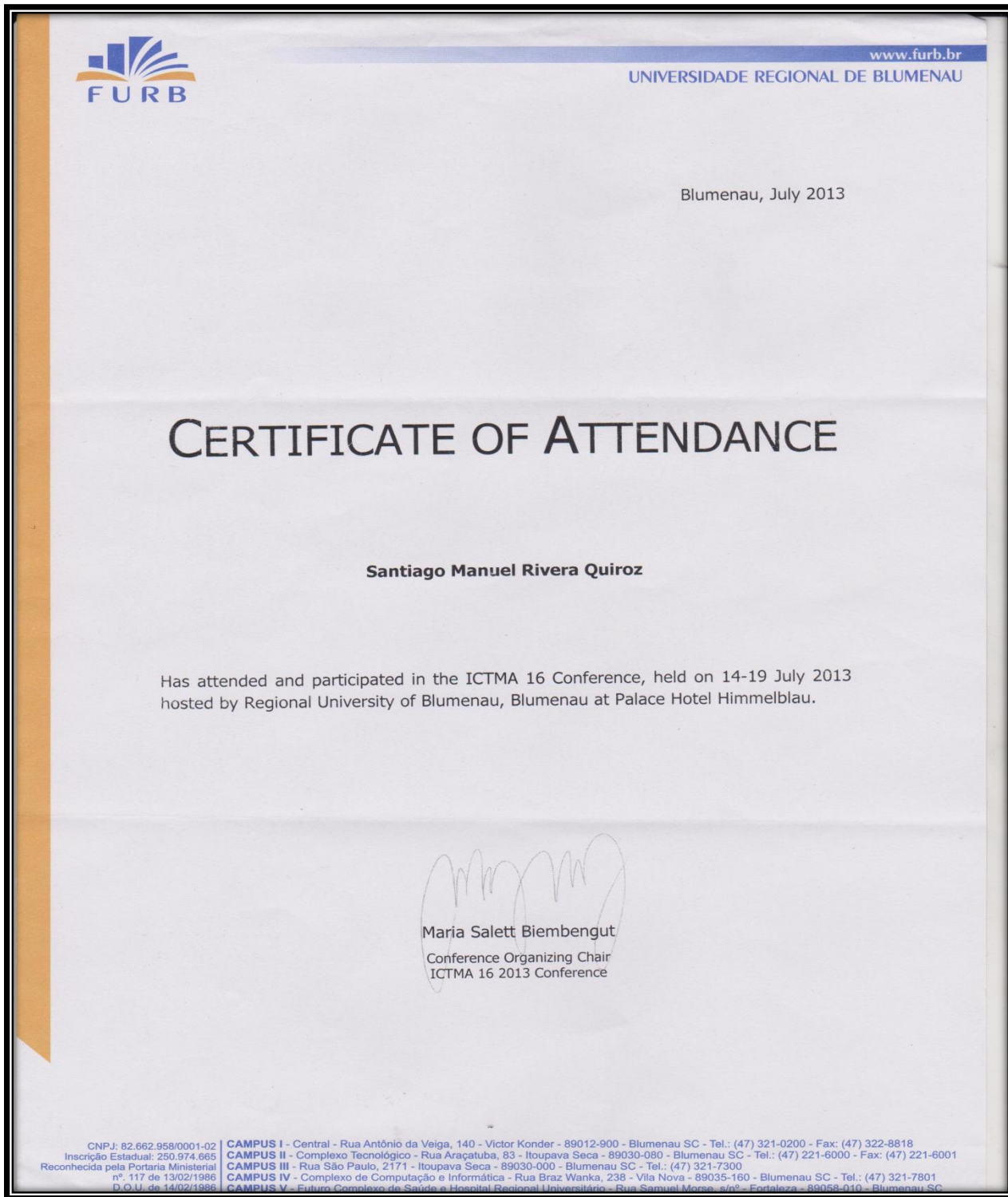
Measure of area and volume in an authentic context: an alternative learning through mathematical modeling

at ICTMA 16 Conference, held on 14-19 July 2013 hosted by Regional University of Blumenau, Blumenau at Palace Hotel Himmelblau.


Maria Salett Biembengut
Conference Organizing Chair
ICTMA 16 2013 Conference

CNPJ: 82.662.958/0001-02
Inscrição Estadual: 250.974.665
Reconhecida pela Portaria Ministerial nº. 117 de 13/02/1986
D.O.U. de 14/02/1986
Mantenedora: Fundação Universidade Regional de Blumenau

CAMPUS I - Central - Rua Antônio da Veiga, 140 - Victor Konder - 89012-900 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3321-0200 - Fax.: (47) 3322-8818
CAMPUS II - Complexo Tecnológico - Rua São Paulo, 3250 - Itoupava Seca - 89030-000 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3221-6000 - Fax.: (47) 3221-6000
CAMPUS III - Rua São Paulo, 2171 - Itoupava Seca - 89030-000 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3321-7300
CAMPUS V - Hospital Regional Universitário e Futuro Complexo de Saúde - Rua Samuel Morse, 768 - Fortaleza - 89058-010 - Blumenau/SC - Tel.: (47) 3332-0238
CAMPUS VI - Horto Florestal Experimental - Rodovia Jorge Lacerda, s/nº - 89110-000 - Gaspar/SC - Tel.: (47) 3332-0238
CAMPUS VII - Fund. de Piscicultura Integrada do Vale do Itajaí - FUNPIVI - Estr. dos Tiroleses, s/nº - 89120-000 - Timbó/SC - Tel.: (47) 3382-0512



**V Congreso Internacional
de Formación y Modelación
en Ciencias Básicas**

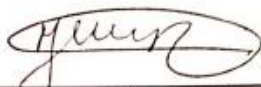


CERTIFICA QUE:

SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ

Asistió en calidad de
PONENTE

Con su presentación: "MEDIDA DE AREAS EN CONTEXTOS AUTENTICOS: UN ENFOQUE DESDE LA MODELACION MATEMATICA" dictado en el marco del V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, realizado en la Universidad de Medellín los días 8, 9 y 10 de mayo de 2013



ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe
Departamento de Ciencias Básicas



UNIVERSIDAD DE MEDELLIN

Medellín, 11 de mayo de 2012

Doctor
SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ
Ponente
IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas
Medellín

Estimado doctor Rivera,

El éxito de este **IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas**, se debe en gran parte al compromiso y profesionalismo ejercido por cada uno de los conferenciantes durante sus intervenciones, que lograron la atención y cautivaron al público asistente.

Su presencia con la ponencia: **“La medida del área y el volumen en contextos auténticos: una alternativa de aprendizaje a través de la modelación matemática”** fueron fundamental en este proceso y los organizadores estamos seguros que no nos equivocamos en elegirlo como uno de los expositores del Congreso. Su experiencia, reconocimiento y sabiduría, fueron vitales para eso.

En nombre de la Universidad de Medellín y el Departamento de Ciencias Básicas, le doy las más infinitas gracias por su aporte. Este Congreso, siempre lo recibirá con los brazos abiertos, máxime cuando usted aporta a la solución de los problemas de la sociedad y a la formación de los futuros Profesionales que tendrán en sus manos el futuro del mundo.

De nuevo mil gracias por todo y cuente con nosotros.

Cordialmente,

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento Ciencias Básicas

Nit. 890.902.920-1
Carrera 87 No. 30-65 • Teléfono: (574) 340 5555
Fax: (574) 340 5216 • Apartado Aéreo 1983
www.udem.edu.co • e-mail: udem@udem.edu.co
Medellín, Colombia, Sur América

ACREDITACIÓN INSTITUCIONAL
RESOLUCIÓN 5148 DE 2009





UNIVERSIDAD DE MEDELLIN



CERTIFICA QUE:

SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ
PONENTE

Asistió al IV Congreso Internacional de Formación y Modelación de las Ciencias Básicas, realizado los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012 en la Universidad de Medellín, con una intensidad de 24 horas.



ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica



JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas





INFORMA QUE:

SANTIAGO MANUEL RIVERA QUIROZ
C.C. 98650662

Participó en Calidad de **PONENTE** en el Primer Encuentro Diálogos Universidad- Región
Realizado en Cauca el 1 de Octubre de 2012



Dayro Quintero L.
Coordinador Maestría en Educación

