UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

Una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras a través de la comparación de áreas de figuras planas en el contexto de van Hiele

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Educación.

UBALDO RESTREPO CASTRILLÓN

Asesor(a)

Mg. SANDRA MILENA ZAPATA
Ph. D. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2014

A mi Dios, rey de reyes, por permitir realizar esta meta.

A mi familia, por ser el apoyo, la motivación y la inspiración.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

ACTA DE APROBACIÓN DE TRABAJO DE INVESTIGACIÓN
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

En la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores SANDRA MILENA ZAPATA (Presidente del Jurado), CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ en Calidad de Co- asesor, ELGAR GUALDRÓN PINTO y JOSÉ ADAM RAMOS VALENZUELA en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación titulado: ***"UNA APROXIMACIÓN A LA COMPRENSIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A TRAVÉS DE LA COMPARACIÓN DE ÁREA DE FIGURAS PLANAS EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE"***, presentado por el estudiante **UBALDO RESTREPO CASTRILLÓN** de la I Cohorte de la Maestría en Educación, Urabá, Línea: Educación Matemática, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (según artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación, se firma esta Acta con la calificación de **APROBADO** por unanimidad.

Atendiendo a lo estipulado en el Artículo 46 y correspondientes parágrafos del Acuerdo Superior 122 de 1997, para el presente Trabajo de Investigación:

NO PROCEDE DISTINCIÓN	
SE OTORGA DISTINCIÓN MERITORIA	
SE OTORGA DISTINCIÓN SOBRESALIENTE	X

Para constancia, se firma en Medellín a los 27 días del mes de febrero del año 2015.

Sandra Milena Zapata
SANDRA MILENA ZAPATA
PRESIDENTE DEL JURADO

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
CO-ASESOR

ELGAR GUALDRÓN PINTO
JURADO

JOSÉ ADAM RAMOS VALENZUELA
JURADO

RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO
COORDINADOR LÍNEA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación representa para mí, el fruto de mi proceso de formación como docente investigador y la gran admiración que siento por la academia; no dejo de reconocer que fue posible gracias a aquellas personas que me brindaron su apoyo, sus conocimiento disciplinares e investigativos, a través de sus sugerencias y orientaciones, para estas personas mi gratitud.

Durante el proceso de investigación existieron dos personas admirables, a las que agradezco inmensamente la culminación de este estudio, a mi asesora Sandra Milena Zapata que siempre estuvo de guía, comprometida y dispuesta a darme apoyo, y al profesor, Carlos Mario Jaramillo López, por ser un orientador incesante en la lucha de lograr esta meta, para ellos muchísimas gracias.

Además, quiero agradecer a todos los maestros investigadores del grupo Educación Matemática e Historia (UdeA-EAFIT) que me brindaron su tiempo, para escucharme y darme las orientaciones pertinentes que fortalecieran el trabajo de investigación y a mí como profesional.

Por otro lado, agradezco a todos mis compañeros de trabajo y estudiantes de mi Institución, y desde luego, a mi familia por su comprensión.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3
Facultad de Educación

RESUMEN

El presente trabajo de investigación se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, con el propósito de caracterizar los procesos de razonamiento exhibidos por los estudiantes, mediante la construcción de descriptores para los niveles 0, I, II, III, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través de comparaciones de áreas, desde un tratamiento cualitativo y utilizando procedimientos netamente geométricos.

Consideramos procedimientos geométricos como la percepción visual del área, la superposición, recorte, pegado, rehacer, componer, plegado de papel y construcción de figuras geométricas. En este sentido fue posible diseñar y construir mecanismos para lograr que los estudiantes establecieran relaciones de áreas de dos tipos: relaciones de igualdad, que aluden a la comprensión de que superficies distintas pueden tener igual área, y relaciones de inclusión, referidas a la comprensión de que una superficie puede estar incluida en otra de mayor área, y que puede ser el doble o la mitad de la misma.

Los anteriores elementos fueron fundamentales en el diseño de entrevistas de carácter socrático para cada nivel y que permitieron, por un lado, la construcción y validación de un conjunto de descriptores para cada uno de los niveles, y la estratificación de los procesos de razonamiento de los estudiantes que participaron del trabajo de campo, en el cual se tuvieron en cuenta el desarrollo de las mencionadas entrevistas, actividades escritas y observaciones.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

TABLA DE CONTENIDO

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

INDICE DE FIGURAS

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Facultad de Educación

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1803
Facultad de Educación

INDICE DE TABLAS

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1.ANTECEDENTES

El problema de investigación abordado en el presente estudio retoma la conceptualización de uno de los teoremas más importantes y utilizados en contextos geométricos y matemáticos. Es por esto que la presente investigación inicia con el rastreo de la evolución y utilización del teorema Pitágoras en diferentes civilizaciones, en las cuales se puede dar evidencia favorable frente a su desarrollo cultural, económico y académico de las poblaciones que lo estudiaron, comprendieron y aplicaron.

1.1.1. El teorema de Pitágoras y su incidencia en las civilizaciones antiguas.

Desde la antigüedad, las civilizaciones babilónicas, egipcias, hindúes, chinas y griegas han tenido una relación especial con el teorema de Pitágoras. Como tal, ésta conceptualización se manifiesta través del uso práctico y empírico del triángulo-rectángulo como una herramienta en las construcciones de templos, altares sagrados, casas, pirámides, delimitación de terrenos, rectificación de porciones de tierras y en la resolución de problemas geométricos de la época, entre otros.

El hallazgo de piezas arqueológicas, según afirman González (2008), Mankiewicz (2000) y Esteban (1998), permite dar cuenta del interés que las civilizaciones antiguas han puesto sobre el teorema; los vestigios encontrados y examinados por arqueólogos e historiadores, tales como la tablilla Yale, Plimpton, Tell Dhibayi y Susa, el papiro de Kahun y libros como el *Sulbasutras*, Zhoubisuanjing y de Euclides, corroboran de igual manera, como antiguas culturas apoyaban sus construcciones y creaciones en el mencionado constructo de Pitágoras.

La civilización babilónica se destacó por sus habilidades geométricas, sus aportes sobre los triángulos-rectángulos, relacionados con las tripletas geométricas, se veían además complementados con fuertes conocimientos en aritmética y álgebra.

Por otro lado, la civilización egipcia manifestó brillantes destrezas y conocimiento en la geometría, especialmente en lo relacionado con la medida de las áreas de figuras planas y volúmenes de algunos sólidos. Esta civilización además, puso en práctica el uso de las propiedades que tiene el triángulo-rectángulo, como lo afirma Gonzáles (2008):

> (…) No obstante, los egipcios conocían y utilizaban el hecho de que el triángulo de lados 3, 4 y 5 (+ o proporcionales a estos números), llamado "Triángulo egipcio", es rectángulo, para trazar una línea perpendicular a otra, a modo de "escuadra de carpintero", que era una práctica habitual de los agrimensores oficiales para recuperar las fronteras de los lindes de las tierras tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del río Nilo. (p, 107).

Es importante resaltar lo práctico que resultó el uso de cuerdas de doce nudos, con las que se formaba un triángulo rectángulo de 3, 4 y 5 unidades, para la construcción de edificaciones y pirámides, para las actividades de medición y delimitación de tierras, que además posibilitaron el desarrollo de la agrimensura.

Para el caso de la civilización griega que ha sido sin lugar a duda, precursora de las matemáticas y la astronomía, entre muchas otras ciencias se destaca que alcanzaron logros notables en la geometría, aunque eludieron, no intencionalmente, aportes significativos del conocimiento empírico de los egipcios, los cuales habían contribuido, visiblemente, a su propio desarrollo científico. De esta civilización cabe destacar una figura legendaria que ha dado validez y fundamento lógico-deductivo al teorema que lleva su nombre, el gran Pitágoras, posteriormente, Euclides da elegancia y rigurosidad a la magistral demostración teórica por parte de su antecesor.

En oriente, en la civilización de la India, se rescatan aportes importantes en la geometría, y sobre todo al umbral de la trigonometría. Aun así, su trabajo se desarrolló de forma muy similar al practicado por los egipcios con las cuerdas; ellos, no sólo utilizaron cuerdas que constituyen ternas pitagóricas de 3, 4 y 5 unidades, sino también de 5, 12 y 13 unidades, de 8, 15 y 17 unidades, de 7, 24 y 25 unidades. Éstas eran útiles en las construcciones, planificación y medición de templos sagrados. Esto se ilustra con detalles en el libro *Sulbasutra*; es importante resaltar el avance que tuvieron en la astronomía por su alto conocimiento en trigonometría.

La china, como civilización, formuló dos tratados matemáticos vinculados a dos demostraciones geométricas, concernientes al teorema de Pitágoras, el *Chou Pei Suan Ching* (300 a.C.) y el *Chui Chang Suang Shu* (250 a.C.). Allí se conservan 24 problemas matemáticos que implican la resolución de triángulos-rectángulos.

Es así como se evidencia la incidencia que tiene el teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de las civilizaciones, y cómo impacta y favorece el desarrollo y evolución de distintas culturas. En todas ellas se ha dado de una forma claramente práctica y empírica, donde el uso de artefactos ha permitido la construcción de edificaciones y delimitaciones de tierra; estas acciones habituales llevaron a los griegos a transcender esta práctica hasta un tratamiento teórico y la construcción del concepto matemático formal. Dicha situación se evidencia con el tratado matemático y geométrico llevado a cabo en el libro *Los Elementos de Euclides*, el cual es citado por Esteban (1998), cuando hace referencia a la formulación original del teorema de Pitágoras, donde se enuncia que: *"En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el lado opuesto del ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman ese ángulo recto" (p.49).*

El teorema de Pitágoras ha tenido una relación práctica, empírica y formal en las diferentes culturas, desde antaño hasta el presente, constituyéndose como una herramienta importante en el desarrollo de las matemáticas. Si se hace un recuento desde el punto de vista del desarrollo del pensamiento matemático, González (2008) refiere lo siguiente:

> El análisis histórico de la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se puede dividir en tres estadios de desarrollo matemático. En el estadio inicial, puramente aritmético y empírico práctico, se obtienen resultados numéricos concretos para los lados del triángulo. En el estadio siguiente, aritmético geométrico, se obtienen leyes generales de formación de los lados. Finalmente se penetra en la profundidad del pensamiento matemático, las demostraciones de los resultados generales de los estadios precedentes. Las dos primeras etapas corresponden a las civilizaciones orientales aludidas, mientras que a la tercera etapa sólo contribuyeron los griegos, particularmente Pitágoras y Euclides (p. 105).

1.1.2. El teorema de Pitágoras como objeto de matemático.

El teorema de Pitágoras es un concepto de gran importancia en el campo de las matemáticas y en diferentes áreas del conocimiento. De hecho, ha sido objeto de estudio en muchas investigaciones, desde distintos enfoques y con objetivos que buscan fortalecer la comprensión del concepto, sus aplicaciones e historia.

Universidad de Antioquia
Facultad de Educación

Existen diferentes estudios que a través del tiempo se han dedicado a recopilar todas las posibles demostraciones asociadas al teorema de Pitágoras, entre ellas se encuentra el estudio desarrollado por Loomis (1940), plasmado en su libro *The Pythagorean Proposition,* éste es el resultado de una recopilación minuciosa, concienzuda y exhaustiva de variadas demostraciones del teorema de Pitágoras, construidas a lo largo de la historia por diferentes autores. Loomis realiza una clasificación de 370 demostraciones ilustradas, de tipo algebraico, geométrico, dinámico y cuaterniónico, que ofrecen diferentes perspectivas del teorema y que para el presente trabajo de investigación permite la construcción de un referente; para efectos del presente estudio, se retoman dos demostraciones de tipo geométrico, una dada por Sócrates y otra por Bhaskaras, el primero toma el triángulo-rectángulo isósceles, y el segundo, el triángulo rectángulo escaleno.

Otro trabajo tomado en cuenta para el presente estudio es la tesis doctoral de Corberán (1996); la investigación, lleva a cabo sus estudios con estudiantes de educación básica secundaria y de nivel universitario, la mencionada investigación se aplicó a estudiantes que estaban en sus últimos cursos; ellos realizaron un test como prueba diagnóstica para determinar el grado de comprensión del concepto de área, a partir de esa prueba se diseñó una unidad didáctica para 24 estudiantes de 4º grado de secundaria, enmarcada en las fases de aprendizaje del modelo educativo de van Hiele; luego se emplea un pos test que ha posibilitado evaluar la unidad diseñada, corregir los errores de los estudiantes y ampliar su comprensión del concepto de área, potencializando y facilitando el paso de los estudiantes de un nivel de razonamiento a otro. En el concepto de área se abordaron los siguientes aspectos: concepciones, unidad de medida, concepto de conservación, relación área perímetro, bidimensionalidad, utilización de fórmulas, comparaciones y significado geométrico del teorema de Pitágoras. Las conclusiones obtenidas en este trabajo, hacen alusión al interés de trabajar el área como magnitud autónoma, porque disocian la forma de la superficie y el número que la mide, evitando confusiones del área y otras propiedades de la superficie.

En otras conclusiones, Corberán (1996) afirma que: “la facilidad con la que los alumnos se han familiarizado durante la experimentación con los procedimientos geométricos estudiados en la unidad de enseñanza permite pensar en la viabilidad de trabajarlos en el nivel de primaria” (p.352).

Parece ser que emplear procedimientos geométricos, desde la primaria, permite reconocer desde la visualización y lo procedimental el área como una cantidad de espacio ocupado por una región y el área como una magnitud autónoma. Estos aspectos son importantes para comprender procesos de comparación de áreas de figuras planas, ya sea estableciendo relaciones de igualdad o de inclusión; de esta manera el primer proceso se refiere a polígonos distintos que conservan la misma área y el segundo, evidencia relaciones donde, el área de un polígono puede ser el doble o la mitad de otro.

La implementación de nuevas formas de enseñar el concepto de área, conduce a cambiar las prácticas didácticas que han llevado al estudiante a la incomprensión del concepto, ésta misma en ciertas ocasiones, puede atribuirse a la conceptualización del área como producto de dos dimensiones lineales, que emplean fórmulas de figuras planas; para Corberán (1996) este componente es importante, igualmente reconoce que no puede limitarse, que más bien, debe complementar procesos geométricos y analíticos asociados al concepto, de esta manera la autora manifiesta que:

> Si bien como ya hemos comentado anteriormente el objetivo de la enseñanza del área no debe limitarse al estudio de las fórmulas, la experimentación ha demostrado que su conocimiento es necesario para poder realizar con éxito y

comprensión tareas de comparación de áreas, planteadas en un contexto geométrico (. . .) (p. 352).

Según lo anterior, es importante resaltar que la conceptualización del área, no solo se debe tratar como el producto de dos dimensiones lineales, sino como la cantidad de plano ocupado por la superficie, para ello también es relevante reconocer la existencia de actividades y procedimientos que faciliten procesos de comprensión para abordar el área como el número de unidades que recubren una superficie.

En suma, el estudio realizado por Corberán et al. (1994), diseña una guía metodológica, que ha buscado la consecución de dos objetivos: el primero, relacionado con las habilidades de razonamiento para los niveles II y III, en el marco del modelo de van Hiele y el segundo, con aprendizaje de conocimientos geométricos. Estos dos aspectos toman en cuenta objetos de estudio como triángulos, cuadriláteros y generalidades de los polígonos. En este estudio se accede y da uso, a la metodología pretest y postest para comparar ambos resultados y obtener conclusiones al respecto. El primero, se aplica para obtener información sobre el conocimiento de cada uno de los estudiantes y el nivel de razonamiento en que se encontraban, en el marco del modelo de van Hiele; el segundo, para comparar si hubo o no un progreso en su razonamiento al nivel siguiente, después de realizar las actividades de las fases de aprendizaje. De acuerdo con los datos e información obtenida se ha permitido constatar, para la presente investigación, que el pretest y el postest, pueden ser utilizados como parámetro para la medición de los resultados obtenidos por la unidad didáctica y para evaluar cualquier propuesta relacionado con los polígonos, en el contexto de van Hiele. Con la intervención realizada se observó un moderado incremento de los estudiantes clasificados en el nivel 3.

A continuación se subrayan los aportes de la investigación titulada: Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de una serie, vía áreas de figuras planas, que ha sido desarrollada por Jurado y Londoño (2005). En la misma, han señalado las características de una entrevista socrática, enmarcada en el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón. Este trabajo cimenta la importancia de la entrevista socrática como una herramienta metodológica para lograr un avance, en los niveles de razonamiento en relación a cualquier objeto matemático que tenga un componente visual geométrico. El trabajo en sí, hace una extensión del modelo de van Hiele a conceptos del análisis matemático, a través de comparación y sumas de áreas permitió promover la comprensión de la noción de límite. Por lo tanto, se determinaron unos descriptores de nivel, la clasificación del entrevistado y la construcción de un test sobre el concepto de suma de una serie de términos positivos. El trabajo ha sido realizado con estudiantes de grado 11º y primer semestre de universidad.

Por su parte, Vargas y Gamboa (2012), proponen y desarrollan una guía didáctica para la comprensión del teorema de Pitágoras y su recíproco, con apoyo y uso tecnológico del software GeoGebra. El trabajo fue desarrollado con dos grupos de noveno grado pertenecientes a un colegio de Costa Rica, el estudio se aborda desde las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele, a través del desarrollo de actividades secuenciales para realizar la comparación entre el nivel de razonamiento alcanzado por los participantes que estudiaron el teorema de Pitágoras con el apoyo del software Geogebra y aquellos que lo hicieron con un enfoque tradicional. El estudio como tal arroja las siguientes conclusiones:

El uso de software de Geometría contribuye a motivar al estudiante, con el aporte que proporciona la herramienta en favor de la visualización, de hecho, se percibe que los juicios emitidos por los participantes acerca de las situaciones analizadas son acertados en comparación con aquellos que usaron solamente lápiz y papel. Con relación al modelo, Vargas y Gamboa (2012) afirman:

(…) en cuanto al modelo de razonamiento planteado por van Hiele, en el sentido de que la organización del lenguaje se va construyendo de forma conjunta con la estructuración geométrica visual y abstracta del pensamiento. Por lo que el profesor tendrá que conocer el nivel de dominio del lenguaje geométrico de sus alumnos, para adaptarse a este, y procurar que él avance en complejidad hacia uno más estructurado y abstracto (p. 116).

De hecho, la forma de utilizar el lenguaje es un aspecto fundamental para detectar el nivel de razonamiento, porque deja ver la red de relaciones presente en el razonamiento de un estudiante, frente al concepto matemático. Cuando el estudiante incorpora a esa red de relaciones un nuevo concepto, será posible que avanzase a otro nivel, y por supuesto, que logre respuestas elaboradas, precisas y refinadas con relación al objeto de estudio en cuestión.

Siguiendo con el rastreo bibliográfico realizado en el marco del concepto mencionado, encontramos el trabajo desarrollado por Alfonso López (2007), titulado: Las Fases del Modelo Educativo de van Hiele para el Teorema de Pitágoras, el cual se enmarca en el modelo mencionado, específicamente en su componente prescriptivo, referido a las fases de aprendizaje.

En este trabajo se propone mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes de grado 8º y 9º, mediante un conjunto de actividades secuenciales reguladas por los descriptores de fases. En la investigación se caracterizan cada una de las fases del modelo de van Hiele, propendiendo por el avance de un nivel al inmediatamente superior, para la comprensión del teorema de Pitágoras. La metodología utilizada se basa en un estudio experimental, a partir del método Histórico–Hermenéutico; como instrumento de recolección se utilizó la encuesta y la entrevista socrática. Los datos analizados determinaron que la quinta parte de los estudiantes accedieron al nivel tres de razonamiento. Además, este estudio pone de manifiesto la importancia de la visualización geométrica para el proceso de razonamiento sobre el componente algebraico.

Otro aspecto que se destaca, son las propiedades bajo el esquema y uso de la entrevista socrática, en el proceso de razonamiento del estudiante. La investigación desarrollada por López (2007), enmarcada en el componente prescriptivo del modelo de van Hiele y correspondiente a las fases de aprendizaje, ha proporcionado que los estudiantes accedan de un nivel a otro, específicamente del nivel II al III, para la comprensión del teorema de Pitágoras; este estudio además, se constituye en un punto de partida para la presente investigación, pues toma el aspecto descriptivo del modelo, es decir, los niveles de razonamiento, para observar la comprensión del teorema de Pitágoras, a partir de las comparaciones de áreas de figuras planas con estudiantes de quinto grado. Por lo tanto, como parte del producto final, se propone, la construcción de descriptores de nivel 0, I, II, III, por los cuales, un estudiante debe pasar para lograr comprender el objeto de estudio.

1.2. CONTEXTUALIZACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La conceptualización del área de figuras planas, abordada desde el aspecto cualitativo, no ha sido necesariamente una opción de enseñanza para los docentes de primaria y secundaria, pues la mayoría de ellos enfocan este trabajo desde el aspecto cuantitativo del área, es decir, como el producto de dos dimensiones, que se asocia a la utilización de fórmulas dadas.

Este hecho puede ser desventajoso, pues cuando se aborda el área de manera inadecuada, se desconoce la posibilidad de realizar actividades de carácter geométrico; un aspecto necesario para introducir la comparación de áreas de figuras planas o poligonales, las cuales permiten comprender, por un lado, la equivalencia entre las áreas de polígonos distintos, y por el otro, la relación de área doble, triple o mitad entre dos o más polígonos de distintas superficies.

En concordancia con lo anterior, el tratamiento del área desde lo cualitativo ha dejado de ser un aspecto relevante en la enseñanza del concepto, este hecho implica entonces el descuido de procedimientos geométricos importantes para la comprensión de los conceptos asociados a este campo de la matemática, los cuales permiten, según Corberán (1996):

> (…) facilitar la comprensión de la conservación del área de una superficie, propiciar la comprensión de las propiedades del área, colaborar en la disociación del área de la forma y del perímetro de la superficie, por otro lado, resolver y simplificar situaciones numéricamente imposibles y complejas, jugando un papel primordial en la comprensión de las interpretaciones numéricas del área (p. 44).

Sumado a lo anterior, el aspecto cualitativo del área concibe este concepto como el espacio ocupado por una región, el cual se relaciona con la porción del plano, y también, como una magnitud autónoma, donde cualquier polígono puede cambiar de superficie, a través de recorte y pegado, doblaje, construcciones geométricas, y seguir conservando el área. En este sentido es valioso realizar tareas de comparación de áreas de superficies, mediante el uso de procedimientos geométricos.

Para las relaciones entre las áreas existe un objeto matemático bastante interesante que permite la realización de múltiples actividades que han conllevado a la realización de procedimientos geométricos, al comparar polígonos de igual, menor o mayor área. La investigación hace mención al teorema de Pitágoras, porque permite realizar una descripción de un proceso de razonamiento, desde lo más simple hasta lo más complejo, abordando una variedad de procedimientos de comparación, para la comprensión del área desde un componente geométrico.

Por otro lado, desde la experiencia profesional docente en primaria, se observa que los estudiantes de 5º grado, a pesar de tener nociones del concepto de área, presentan dificultades para comparar áreas de superficies de figuras planas. Los estudiantes, con frecuencia, no argumentan la equivalencia del área de una superficie cuando ésta sufre un cambio, además, no disocian el área de la forma de la superficie y se dejan llevar por la apreciación visual, manifestando el poco uso de procedimientos geométricos, que para Corberán (1996) permiten comparar áreas de superficies, a partir del análisis de los elementos de los que depende ésta.

Es así como los estudiantes no comprenden con facilidad procedimientos geométricos, tampoco acuden a mecanismos como recorte y pegado, descomposición de superficie, reconfiguración de una figura geométrica en otra, estimación, superposición de figuras, reconstrucción de figuras geométricas para mejor visualización del área, entre otras técnicas, que permiten establecer relaciones entre áreas de distintos polígonos,

Es importante resaltar, con relación a la comparación de áreas, las afirmaciones de Corberán (1996) frente a algunos investigadores:

> Han observado cómo los alumnos se dejan guiar por su percepción visual a la hora de emitir juicios en tareas de comparación de áreas, llevándoles en la mayoría de las ocasiones a conclusiones erróneas. Concretamente éstos últimos, que trabajaron con estudiantes de primaria comprobaron que rara vez los niños utilizan argumentos lógicos en tareas donde un elemento físico de una superficie cambia (por ejemplo una dimensión), pesando realmente en ellos su percepción. (p.30).

De hecho, los estudiantes no razonan correctamente cuando se presentan situaciones de comparación entre áreas, por ejemplo, el caso en el que el área del cuadrado puede ser igual al área del triángulo, el área del rectángulo igual al área del paralelogramo, o también, el área de una superficie puede ser el doble, triple o mitad de otra.

El proceso de comparación de áreas es una técnica que permite relacionar dos o más áreas de figuras geométricas; con el presente estudio se busca enfatizar implícitamente en un concepto matemático rico en elementos, características, propiedades y conceptos de figuras geométricas planas como es el teorema de Pitágoras, sin lugar a duda, un objeto matemático con un fuerte componente visual geométrico, que facilita el razonamiento de los estudiantes en los procesos de comparación. Cabe agregar, que en el teorema de Pitágoras existe una relación especial de equivalencia entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos y la hipotenusa, esto facilita realizar una comparación entre áreas para establecer relaciones de igualdad o equivalencia de figuras planas.

Sintetizando, el pretendido con esta investigación, es acercarse al concepto de área desde un tratamiento cualitativo, utilizando procedimientos meramente geométricos, basados en la comparación de áreas de figuras planas, y que a través de procesos de razonamiento, el estudiante establezca relaciones de equivalencia o igualdad y de inclusión entre las áreas de las diferentes superficies; logrando primero, que todo ello permita consolidar el concepto de área y la comparación de éstas, y segundo, encontrar la relación especial que existen entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo-rectángulo, respecto al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa, lo cual se constituye en un acercamiento al teorema de Pitágoras.

Por lo anterior, formulé la siguiente pregunta de investigación

¿De qué manera razonan los estudiantes de quinto grado, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, a partir de procesos de comparación entre áreas?

En consecuencia, la anterior pregunta de investigación, dirige la atención de la investigación del trabajo, hacia el siguiente propósito que ha orientado este estudio.

1.3. OBJETIVOS

1.3.1. Objetivo General.

Caracterizar los procesos de razonamiento de los estudiantes de 5° grado, mediante la construcción de descriptores para los niveles 0, I, II y III, cuando se aproximan a la comprensión del Teorema de Pitágoras, a partir de la comparación de áreas, en el contexto del modelo de van Hiele.

1.3.2. Objetivos Específicos.

Diseñar un guion entrevista de carácter socrático para una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras desde el tratamiento geométrico del área, que permita identificar los descriptores y poder clasificar al entrevistado en algunos de los niveles.

Hipotetizar un conjunto de descriptores de nivel para la orientación de la construcción de actividades, que permitan avanzar en los niveles de razonamiento frente a una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras.

Definir los elementos teóricos que orientarán el diseño de un guion entrevista y una actividad escrita para la básica primaria, que permitirán determinar el nivel de razonamiento de un estudiante, en cuanto a una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través de la comparación de áreas.

Determinar los descriptores finales para ubicar a cada estudiante en uno de los niveles de razonamiento de van Hiele para lograr una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, utilizando la comparación de áreas desarrollados desde procedimientos netamente geométricos.

1.4. JUSTIFICACIÓN

Este trabajo de investigación destaca varios aspectos importantes para la educación matemática y el currículo: el modelo educativo de van Hiele para el razonamiento, los descriptores de nivel de van Hiele respecto a una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante comparaciones de áreas, la conceptualización del área desde un tratamiento cualitativo; el diseño de actividades escritas fundamentadas en el contexto de la entrevista socrática.

1.4.1. ¿Por qué enmarcar el trabajo de investigación en el modelo educativo de van Hiele?

El modelo de van Hiele es una propuesta educativa que según los lineamientos curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación (MINEDU, 1998) “describe con bastante exactitud la evolución del pensamiento desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales" (p. 38).

El modelo educativo inició en 1957 con la disertación de los esposos van Hiele, el campo de la geometría era su prioridad para mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes a través de acciones intencionadas enmarcadas en las fases de aprendizaje y se constituyeron en los principales objetivos del modelo. Éstos mismos han sido propuestos en muchos trabajos de investigación en los que el modelo de van Hiele se convierte en su marco teórico. En la actualidad y gracias a diferentes estudios de nivel de maestría y doctoral, se ha demostrado que es posible extender el modelo a conceptos del análisis matemático, sólo sí los mismos, tienen un componente visual geométrico asociado.

El modelo propone una estructuración jerárquica del razonamiento, primero inicia desde el reconocimiento de elementos básicos y objetos matemáticos de connotación visual geométrica, sin aún establecer relación con otros elementos; segundo, la identificación de elementos del objeto matemático por el cual está constituido; tercero, la acción de establecer relaciones no sólo con los elementos, sino con las propiedades del objeto, llegando a clasificar y definir; cuarto, relacionar axiomas, teoremas y poder hacer demostraciones, hasta llegar finalmente a una comprensión de la estructuras axiomáticas del objeto matemático a nivel teórico.

1.4.2. ¿Por qué el interés por el teorema de Pitágoras?

El estudio ha tomado como objeto matemático, el teorema de Pitágoras. En la presente investigación se han tenido en cuenta tres consideraciones importantes asociadas y concordantes con éste: la primera de ellas es el concepto de área, aspecto importante para el establecimiento de comparaciones y relaciones, mediante procedimientos geométricos; el segundo aspecto a considerar, es la riqueza que tiene los objetos geométricos inherentes al teorema, como lo son los triángulos-rectángulos, los cuadrados y sus propiedades, que además facilitan realizar artificios geométricos para establecer comparaciones; la tercera y última consideración importante es la variedad de demostraciones que existen respecto al teorema, con base en éstas, se han tomado dos de tipo geométrico, para la investigación, las cuales hacen alusión al triángulo-rectángulo, isósceles y escaleno.

Haciendo una reflexión en torno al aspecto curricular, se ha podido aseverar que el teorema de Pitágoras es un concepto que permea el currículo matemático desde distintos pensamientos: numérico, variacional, métrico y geométrico. En este sentido, cabe analizar que, aunque el teorema de Pitágoras aparece explícito en los estándares básicos de competencias matemáticas, de los grados 8º y 9º, donde, según el Ministerio de Educación Nacional (MINEDU, 2003) el estudiante debe reconocer y contrastar propiedades y relaciones geométricas utilizadas en la demostración de teoremas básicos (como para este caso Pitágoras y Tales), en realidad los conceptos asociados a éste y que posibilitan su comprensión, son estudiados desde los primeros años de escolaridad, por dicha razón se ha privilegiado y fomentado este trabajo en la escolaridad primaria, buscando una forma de transcender en un concepto que está implícito en el teorema de Pitágoras, la relación y comparación de áreas de figuras geométricas planas. Por tanto la presente investigación se emprende desde un modo de aproximación al objeto de estudio, diferente y sencillo para los estudiantes.

Es así como el trasfondo de este estudio consiste en hacer un acercamiento al teorema de Pitágoras en el grado 5º, a través de comparaciones de áreas, valiéndose de técnicas y de procedimientos geométricos como los comentados anteriormente, los cuales permiten conocer dos propiedades importantes del área: la conservación del área de la superficie y la suma de áreas; accediendo a la compresión de las relaciones de equivalencia de áreas que existen entre el cuadrado construido sobre la hipotenusa y la suma de los dos cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo.

La investigación se esfuerza en saber cómo razonan los estudiantes de 5 grado, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante la comparación de áreas. Es interesante el proceso a través del cual se induce al estudiante a que encuentre la relación de equivalencia de áreas que existen en el contexto del teorema de Pitágoras, teniendo en cuenta los diferentes procedimientos que se realizan en las comparaciones de áreas de figuras planas.

Por otro lado, conviene decir que los estudiantes ya tienen un concepto aproximado del área, como también el reconocimiento de algunas figuras geométricas como triángulos, rectángulos y cuadrados, así como sus respectivas propiedades. Sin embargo, la comparación de áreas de figuras planas en un contexto geométrico, no aparecen explícitos en los estándares de primaria y secundaria, ni en editoriales destacadas; son pocos los docentes que apelan a esta técnica para que se establezcan entre las áreas relaciones de igualdad o de inclusión.

Haciendo una revisión detallada de los estándares se halla que en éstos, el trabajo con el área y las propiedades asociadas debe ser exhaustivo y concienzudo, pues este concepto es básico para estudios posteriores; para la presente investigación dicha conceptualización del área es fundamental, dado que la misma posibilita la comprensión del teorema de Pitágoras, que aunque no se trabajó explícitamente, si se pretende que su estructura subyacente sea comprendida a través de relaciones comparativas y establecidas entre las áreas.

Dicho lo anterior, los estudiantes que terminan el ciclo de primaria han tenido experiencias en el contexto de la geometría y el reconocimiento de las propiedades de figuras planas. Por esto entonces, resulta oportuno que desde la básica primaria se realice de manera significativa un acercamiento al teorema de Pitágoras, a través de las comparaciones de áreas de figuras planas, desde métodos y situaciones de carácter geométrico, como medio pertinente para lograr una aproximación a su comprensión.

Resumiendo, este estudio ha sido oportuno porque en él se hipotetizaron y validaron unos descriptores desde el nivel 0 hasta el III enmarcados en la comprensión del teorema de Pitágoras, permitiendo para futuros investigadores y profesores la construcción de un módulo de instrucción que promueva a los estudiantes pasar de un nivel a otro. Y por otro lado, se consolida el concepto de área, fortaleciendo al estudiante en procedimientos geométricos, con los cuales puede hacer comparaciones, establecer relaciones y comprender cómo se conserva el área de una superficie al experimentar un cambio en su forma, y de esta manera justificar si el área de una figura cualquiera es el doble, la mitad o igual a otra.

En el aspecto curricular, según el Ministerio de Educación (MINEDU, 1998), resulta interesante observar la fuerte relación que tiene este concepto matemático con los procesos generales presentes en toda actividad matemáticas. Lo que se busca afirmar es la existencia de una relación, primeramente, con el razonamiento que está cimentado en el marco teórico, con la comunicación que está inmersa en todo el proceso de la entrevista socrática, con el lenguaje, con la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, los cuales hacen alusión a las relaciones de áreas de figuras planas y procedimientos geométricos, y finalmente, con la modelación que está inmersa en todo el proceso de construcción del teorema de Pitágoras, como un modelo de amplia significación geométrica.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se abordaron los referentes teóricos, las características y la descripción del modelo educativo de van Hiele, en el cual se ha enmarcado la presente investigación, cuyo objeto de estudio se centra en el teorema de Pitágoras y retoma como propuesta de investigación la caracterización del razonamiento para una aproximación al mencionado teorema, desde una perspectiva geométrica.

2.1. MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

En este capítulo se analiza en detalle el modelo educativo de van Hiele, su estructura y características principales, como también la ruta metodológica que orientó este estudio.

2.1.1. Reseña histórica.

El campo de la geometría ha sido a través del tiempo uno de los componentes de la matemática que ha recibido poca atención desde los procesos de enseñanza. Consecuencia de ello son las dificultades para ser instruida comprensivamente y por ende, ha generado en el aprendizaje de los estudiantes afectaciones para la apropiación de dicho conocimiento en gran medida. Éste, no es un problema que aqueja solamente a los actuales docentes, pues desde hace un poco más de medio siglo, los esposos holandeses Marie van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, (1986) dos profesores de matemáticas del nivel de secundaria, también manifestaron preocupación por esta situación, ello, los motivó a estudiar la problemática de la enseñanza/aprendizaje de la geometría a fondo, de manera concienzuda, convirtiéndolo en objeto de investigación y que llegaría a ser traducido en la propuesta de un modelo educativo.

A continuación se describe cómo van Hiele (1986) empieza el interés por ahondar en el tema:

> Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban al máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de que yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: “No es tan difícil, pero ¿por qué nos los explicó usted de forma tan complicada?” En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento. (p. 30).

Parece ser que el modelo ha surgido a causa de los problemas cotidianos que se manifestaban en el aula de clase, cuando abordaban conceptos matemáticos, pero más precisamente geométricos. Para los van Hiele, aspectos como la experiencia docente, los procesos de observación llevados en el aula y su interrelación con las situaciones que se presentaban con los estudiantes, todos los años, fueron los que propiciaron reflexiones sobre cómo estaban llevando a cabo el proceso de enseñanza, de esta manera logran determinar y concluir, que los razonamientos de los estudiantes se estratifican por niveles con relación a un objeto geométrico. En consecuencia la formulación inicial del modelo de van Hiele (1986) expresa la consecución de un nivel de razonamiento por parte del estudiante, de la siguiente forma:

> Primero presenté mi descubrimiento de la siguiente forma: Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aun así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el estudiante alcance un nivel superior de pensamiento (…) Se puede ver mi intento por librarme a mí mismo de no ser capaz de dar suficiente instrucción; también se puede ver la solución: una adecuada serie de ejercicios. En realidad, se ha puesto de manifiesto que al cambiar los libros de texto todas las dificultades podían desaparecer. Así que mi introducción a los niveles no era sólo una afirmación sino también un programa. (p. 40).

Estos planteamientos se cristalizaron en una tesis doctoral que ha permitido la construcción de un modelo educativo pertinente para la geometría, el cual ha sido utilizado por los investigadores en educación matemática y profesores del área; que han visto en él, una oportunidad de promover las capacidades y habilidades de razonamiento de una persona en el ámbito matemático. Este modelo ha presentado modificaciones importantes, debido a múltiples estudios investigativos que han permitido un refinamiento y mejoramiento, y además, también han posibilitado su extensión a conceptos del análisis matemático, específicamente aquellos que tienen en su estructura una componente visual–geométrica.

Se puede apreciar entonces que, este modelo teórico es completo, puesto que describe por un lado, cómo se produce la adquisición de las habilidades de razonamientos y por otro lado, señala la forma de proceder para favorecer el proceso de aprendizaje en el estudiante.

2.2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo educativo de van Hiele, propuesto por los mencionados esposos, fue desarrollado en el año 1957, en el campo de la geometría, no obstante, en las últimas décadas se han presentado trabajos de investigación que han permitido extender el modelo, logrando importantes avances en otros campos matemáticos.

El modelo de van Hiele contempla tres componente fundamentales, uno de ellos es el descriptivo, dado por los niveles de razonamientos, que hacen una estratificación que permite definir cómo están razonando los estudiantes con respecto al objeto matemático; el otro componente es el prescriptivo, dado por las fases de aprendizajes, constituye un conjunto de acciones propuestas de manera secuencial, que favorecen condiciones para que un estudiante mejore y progrese al siguiente nivel de razonamiento; por último, la percepción o *insight*, que está relacionada con la actuación competentemente en los hechos requeridos en una nueva situación o mediante la aplicación intencional de un método que resuelve la situación. De dicho componente, un estudiante entiende lo que está haciendo, cómo lo está haciendo y por qué lo está haciendo.

Las ideas fundamentales del modelo teórico creado por los esposos van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1999) se enuncian de una manera resumida:

1) Se pueden encontrar varios niveles diferentes de perfección en el razonamiento de los estudiantes.

2) Si una relación matemática no puede ser expresada de forma comprensible para el nivel de razonamiento actual de los estudiantes, es necesario esperar a que éstos alcancen un nivel de razonamiento superior para presentársela.

3) No se puede enseñar a una persona a razonar de una determinada forma. Pero sí se le puede ayudar, mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas, a que llegue lo antes posible a razonar de esa forma (p. 305).

2.3. COMPONENTES DEL MODELO

El modelo educativo de van Hiele está estructurado en tres componentes fundamentales, ya anteriormente mencionados, a continuación son descritos de manera detallada.

2.3.1. Los niveles de van Hiele.

Constituyen el aspecto descriptivo del modelo, pues estratifica en niveles los procesos de razonamiento construidos por los estudiantes, de esta forma permiten caracterizar al individuo desde la forma de razonar frente a un concepto geométrico y su progreso en la comprensión a través de la experiencia, así, cada persona se puede clasificar según el grado de razonamiento. Esta estratificación del pensamiento, inicia desde un nivel básico hasta uno formal, con miras a la consecución de un nivel abstracto o teórico. Ciertamente, los niveles de razonamiento son el conjunto de características principales que define los modos de razonar de un estudiante, cuando manifiesta distintas formas de concepción de un concepto geométrico específico a través de distintas actividades.

De otro lado, Llorens (1994), uno de los autores que enmarcó su trabajo en el modelo de van Hiele, propone cambiar la nomenclatura original tomando cinco niveles, además de, agregar un nivel anterior al primero propuesto, denominado nivel cero o predescriptivo; sin embargo, lo verdaderamente esencial e interesante de este trabajo, es la descripción de los niveles y sus características.

El presente estudio retoma la descripción de los niveles de van Hiele propuestos por Llorens (1994), estos son: Nivel 0 o predescriptivo, nivel I o de reconocimiento visual, nivel II o de análisis, nivel III o de clasificación, o de relación, nivel IV o de deducción formal.

2.3.1.1.Nivel 0 o predescriptivo.

En este nivel la comprensión es básica, en él un estudiante inicia la construcción del concepto, es decir, reconoce los elementos básicos de estudio para comprender un concepto particular.

2.3.1.2. Nivel I o de reconocimiento visual.

En este nivel los razonamientos de los estudiantes, frente a conceptos mediados por un componente geométrico, se caracterizan porque estarán en condiciones de:

- Describir el aspecto físico de las figuras.
- Reconocer las figuras como un todo, se le dificulta encontrar partes, sólo hace descripciones irrelevantes de atributos arraigados al tipo físico o visual.

- Percibir las figuras de una forma particular, como objetos geométricos individuales, sin encontrar características ni propiedades que los relacionen con otra figura de su misma clase.
- Hacer comparaciones de figuras basándose en su forma global con otros objetos que se encuentran en su entorno cotidiano, utilizando expresiones como “se parece a (…) “es como (…)” “tiene la forma de (…)”.
- Relacionar su entorno con figuras triangulares, rectangulares, cuadradas, circulares.
- Aprender vocabulario relacionado con figuras geométricas sencillas.

2.3.1.3. Nivel II o de análisis.

En este nivel, los estudiantes están en condiciones de establecer relaciones entre las propiedades aprendidas, el razonamiento geométrico de un estudiante se caracteriza porque estará en condiciones de:

- Reconocer los elementos constitutivos de una figura geométrica, es decir, las partes que la conforman.
- Reconocer algunas propiedades de la figura mediante la observación y la experimentación.
- Hacer comparaciones de figuras mediante el uso explícito de las propiedades de sus elementos.
- Definir una figura geométrica basándose en sus propiedades.

Por otro lado, cabe anotar que en este nivel se evidencia en los estudiantes lo siguiente:

- No relacionan unas propiedades con otras, porque las conciben de forma aislada e independiente.
- No establece relaciones entre distintos tipos de figuras.
- No admiten una clasificación de las figuras, debido a la dificultad de establecer relaciones entre las propiedades geométricas de las mismas.

2.3.1.4.Nivel III o de clasificación.

Para este nivel, los estudiantes están en condiciones de hacer clasificaciones de las figuras, apoyados en sus propiedades, sus razonamientos geométricos se caracterizan por estar en condiciones de:

- Relacionar unas propiedades con otras, reconociendo que éstas pueden ser equivalentes.
- Desarrollar secuencias de proposiciones para suponer que una propiedad se deriva de otra.
- Clasificar figuras geométricas, teniendo en cuenta el ordenamiento de sus propiedades.
- Dar definiciones de un concepto geométrico de manera formal.
- Comprender y realizar implicaciones sencillas en un razonamiento formal, es decir, comprende la demostración instruida por el profesor, o por los libros de textos, pero es incapaz de reproducirla por sí mismo; esto se debe a que no relaciona o encadena los diferentes pasos de una demostración, porque lo ven de forma aislada.

- Demostrar de manera informal, sus razonamientos lógicos, se apoyan en la manipulación y experiencia, esto es, puede demostrar un teorema de manera informal, partiendo de razonamientos lógicos apoyados en la observación, manipulación y experiencia.

En este nivel, se evidencia que los estudiantes, además:

- Presentan dificultad para relacionar lo que han comprendido con otros sistemas lógicos que pueden tener cierta relación y semejanza.
- No reconocen la necesidad del rigor y formalización en las demostraciones generales.

2.3.1.5. Nivel IV o de deducción formal.

Este nivel se caracteriza por el tratamiento formal y la presencia del rigor en los razonamientos expuestos por los estudiantes frente a conceptos de tipo geométrico; en cuanto a la caracterización de los razonamientos presentados por un estudiante, cabe mencionar que en este nivel, está en condiciones de:

- Comprender la estructura axiomática de las Matemáticas: incluye la pertinencia de utilizar axiomas, definiciones y teoremas.
- Realizar, comparar y contrastar demostraciones diferentes de un mismo teorema. La demostración que se realiza es de tipo formal.
- Utilizar un lenguaje propio y preciso, característico del rigor matemático.
- Conocer propiedades como la consistencia, la independencia y la completitud de un sistema deductivo.

van Hiele (1986), señala que en este nivel predomina el aspecto teórico, puesto que es difícil hacer un discernimiento como en los niveles anteriores. Por lo tanto, este trabajo de investigación no tomará este nivel para la construcción de descriptores relacionados con el concepto objeto de estudio.

2.3.2. Las fases de aprendizaje.

Según el modelo de van Hiele, para lograr pasar de un nivel de razonamiento a otro inmediatamente superior, es fundamental que el estudiante inicie un programa instruccional, en este generalmente, se llevan a cabo un conjunto de actividades secuenciales diseñadas y pensadas en el marco de los niveles y acordes con los descriptores definidos para cada uno de ellos. Por lo anterior, debe existir entonces una clara correspondencia entre los descriptores de nivel y cada una de las fases de aprendizaje, de este modo, las actividades propuestas en cada fase deben propender por la comprensión del objeto de estudio correspondiente al nivel de aprendizaje. El paso satisfactorio por las 5 fases existentes debe garantizar al mismo tiempo el progreso en dos niveles adyacentes, esto debe implicar que se proponga un plan organizado y orientado por descriptores de fases para cada actividad, hasta llegar a integrar todos los conceptos y relaciones del objeto en cuestión a una nueva estructura y dominio de pensamiento, es decir, al nivel siguiente de razonamiento. De esta forma, las fases de aprendizaje, referidas a un aspecto predescriptivo del modelo, desempeñan un papel didáctico para la enseñanza y favorece las experiencias de aula para analizar el concepto objeto de estudio.

De acuerdo a lo anterior, las fases de aprendizaje acogen el papel didáctico de la enseñanza del objeto matemático, propiciando en el estudiante experiencias significativas reflejadas en todas las actividades, donde, en un periodo determinado, el estudiante ha de experimentar un cambio de actitud frente al razonamiento, logrando el progreso entre niveles consecutivos.

Los esposos van Hiele en su modelo educativo, proponen 5 fases de aprendizaje: fase 1 o de información, fase 2 o de orientación dirigida, fase 3 o de explicitación, fase 4 o de orientación libre, fase 5 o de integración. A continuación se presenta una descripción de las fases mencionadas.

2.3.2.1. Fase 1: Información.

Al comienzo de toda actividad, es importante tener en cuenta qué cualidades tienen los estudiantes, cómo razonan frente al concepto matemático a trabajar, para darle la información pertinente de lo que se va a realizar y el material que se usará o se construirá, frente a esto, Zapata y Sucerquia (2009), señalan que:

> El profesor interactúa con los estudiantes (en doble vía) conversando acerca de los objetos de estudio; en esta fase el profesor da a conocer el objeto de conocimiento que se estudiará, el tipo de trabajo que se realizará y da alguna explicación de los tópicos a ser estudiados. Esta fase también permite indagar por los conocimientos previos de los estudiantes y por su nivel de razonamiento, pues es esencial saber qué grado de conocimiento tienen con respecto al concepto objeto de estudio, esto se hace prestando especial atención a las intervenciones de los estudiantes, sus interpretaciones y el uso del lenguaje (p. 49).

Cabe decir que en la fase de información, el profesor interrelaciona con los estudiantes, con el fin de conocer, por un lado, el razonamiento, los conocimientos previos, el lenguaje, las debilidades y dificultades respecto al objeto de estudio a trabajar, y por otro lado, para proporcionar los materiales que se necesitan y la información de cómo se desarrollará el trabajo.

2.3.2.2. Fase 2: Orientación dirigida.

Para esta fase, se presentan todos los elementos y propiedades del concepto, claro está, que esto depende del nivel de razonamiento en que se encuentre el estudiante. En esta fase, Zapata y Sucerquia (2009), aluden a ciertas características importantes que son mencionadas a continuación:

> Concretamente, en esta fase se busca que el estudiante descubra, comprenda y aprenda los conceptos y propiedades del objeto de estudio en cuestión, es por esto que las actividades deben ser especialmente diseñadas para lograr este fin, de modo que constituyan una serie de experiencias significativas para lograr procesos de razonamiento avanzado, el cual nuevamente, será mediado y evidenciado por el lenguaje. (p. 50).

De igual manera, van Hiele (1986.) señala que "las actividades (de la segunda fase), si se seleccionan cuidadosamente, constituyen la base adecuada de pensamiento de nivel superior" (p. 97).

Parece ser que esta fase es fundamental en este proceso, y lo ideal es hacer las actividades suficientes y precisas, que abarquen las propiedades y relaciones del concepto y el lenguaje adecuado; que permiten la construcción de los elementos básicos de la red de relaciones que deben conformarse para el siguiente nivel. Esto se logra a partir de actividades significativas que orienten a los estudiantes necesariamente para comprender los conceptos y propiedades del objeto matemático.

2.3.2.3. Fase 3: Explicitación.

En esta fase se hace un alto en el proceso, con el fin de realizar una revisión y socialización del trabajo llevado a cabo hasta ahora, teniendo en cuenta la estructura interna del objeto matemático. Los estudiantes explican, exponen y explicitan lo que han aprendido a través del lenguaje, al intercambiar experiencias, en cuanto a la resolución de las actividades. En este mismo sentido, Zapata y Sucerquia (2009), afirman que "durante esta fase, los estudiantes comienzan a formar las relaciones del sistema estudiado, es esencial que hagan explícitas las observaciones que infieren del concepto abordado" (p. 50). Significa entonces, que el profesor debe propiciar un ambiente de dialogo y reflexión frente a las ideas de los estudiantes, como también, la justificación clara de sus argumentos, y la aprehensión de un nuevo vocabulario menos informal.

2.3.2.4. Fase 4: Orientación libre.

En esta fase, los estudiantes aplican los conocimientos y habilidades adquiridos anteriormente, teniendo en cuenta las propiedades y conceptos, referentes al campo de estudio, que den vía libre a la exploración de nuevas alternativas para la solución de un problema, con el fin de ampliar, aún más, las posibilidades de resolver de distintas formas las situaciones problemas. Esta es una forma de perfeccionar el conocimiento y destreza para el fortalecimiento de la comprensión. Sin embargo, es conveniente, según Zapata y Sucerquia (2009), tener en cuenta que los problemas propuestos en la mencionada fase:

> Deben representar situaciones nuevas, con varias alternativas que permitan llegar a su solución, no puede tratarse de problemas que simplemente exijan la aplicación directa de un concepto, porque en esta fase las actividades deben permitir la consolidación de los conceptos estudiados, mediante el establecimiento de las relaciones que los vincula (p 51).

2.3.2.5. Fase 5: Integración

En esta fase, los estudiantes deben conseguir la integración de los conceptos estudiados, el establecimiento de las relaciones y propiedades que subyacen en el concepto objeto de estudio, y la consecución de las habilidades para utilizar métodos adecuados que solucionen el problema, mediante actividades que busquen comparar, combinar y materializar los conocimientos ya aprendidos. Al respecto, Corberán et al. (1994), menciona concretamente que "las actividades que se planteen, no deben tener como objetivo producir conocimientos nuevos, sino que deben ayudar a organizar los que ya se han aprendido" (p. 28).

En esta fase se consolida una nueva estructura del pensamiento, debido a la construcción de la red de relaciones necesarias, las cuales contienen todos los conceptos abordados y fortalecidos desde el **"**uso de un lenguaje matemático adecuado y a la ampliación, modificación y establecimiento de vínculos significativos que contengan los elementos representativos del concepto objeto de estudio**".** (Zapata y Sucerquia, 2009, p. 51).

A continuación se presenta de una forma gráfica la relación existente entre las fases y los niveles de razonamiento.

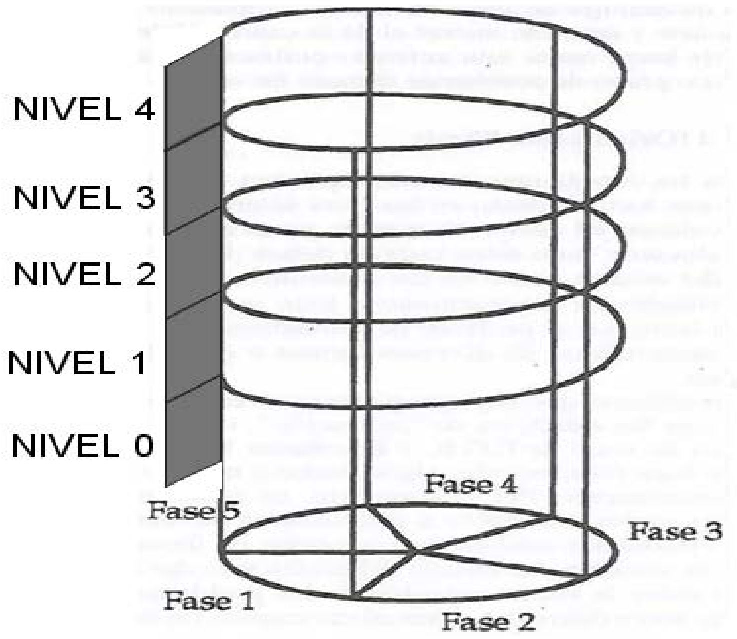


Figura 1. Esquema de niveles y fases de aprendizaje.

Propuesta por Corberán et al. (1994, p.27). Se incluyen un nivel anterior, acogiéndonos a la nomenclatura de Llorens (1994).

2.3.3. Insight.

Este componente, perteneciente a la descripción del modelo de van Hiele, es promovido por los niveles de razonamiento y las fases de aprendizaje, consiste en la actuación competentemente ante los hechos requeridos en una nueva situación o mediante la aplicación intencional de un método que resuelve la situación; de hecho, un estudiante entiende lo que está haciendo, cómo lo está haciendo y por qué lo está haciendo. En tal sentido, el modelo de van Hiele se interesa por incitar y desarrollar en el estudiante el *insight*. De acuerdo con lo anterior, es posible afirmar que un estudiante manifiesta *insight*, cuando:

- Actúa competentemente en una situación que no es familiar.
- Procede correcta y adecuadamente ante una situación en una forma competente.

- Comprenden lo que está haciendo, por qué lo está haciendo y cuando hacerlo.
- Aplica conscientemente un método para solucionar un problema.

El *insight* es una forma de comprensión, incluso es válido decir que estos dos conceptos son relativamente sinónimos y que tienen algo en común, para ambos se espera que ocurra una actuación competente del individuo para resolver un problema ante una situación nueva. A continuación se presenta la conceptualización dada por van Hiele acerca de la comprensión.

2.4. CARACTERÍSTICAS Y PROPIEDADES DEL MODELO EDUCATIVO

van Hiele identificó, en los niveles de razonamiento, ciertas características, Jaime y Gutiérrez (1990), describen las más importantes: La jerarquización y secuencialidad, la relación entre el lenguaje y los niveles, la continuidad del paso por los niveles y, la globalidad y localidad.

2.4.1. La jerarquización y secuencialidad de los niveles.

Los cuatro niveles de razonamiento que puede manifestar una persona presentan una graduación sofisticada. Por lo tanto, cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior, esto indica que un estudiante no tendrá la capacidad de razonamiento en un nivel *n*, sin antes haber razonado en el nivel *n-1*.

De hecho, Jaime y Gutiérrez (1990), afirman otro aspecto importante en la jerarquización y secuencialidad de los niveles, cuando se refieren a lo siguiente: “Los niveles de Van Hiele tienen una estructura recursiva, ya que en los niveles I, II y III hay determinadas habilidades que están siendo usadas implícitamente por los estudiantes y cuyo uso explícito se aprende en el nivel N+1”. (p. 311).

Cabe agregar, que las habilidades que se dan por parte del estudiante son diferentes, según el nivel en que se encuentra va adquiriendo destreza y práctica de lo que aprende, y esto se hace explícito en su nivel de razonamiento consecutivo. La tabla ilustra lo mencionado anteriormente:

Tabla 1. Estructura recursiva de los niveles de van Hiele.

NIVELES	**ELEMENTOS EXPLÍCITOS**	**ELEMENTOS IMPLÍCITOS**
Nivel I	Figuras	Partes y propiedades de las figuras
Nivel II	Partes y propiedades de las figuras	Implicaciones entre propiedades
Nivel III	Implicaciones entre propiedades	Deducción formal
Nivel IV	Deducción formal de teoremas	

Tomado de Jaime y Gutiérrez (1990, p. 312). Se aprecian los distintos niveles propuesto por lo teóricos y como atraviesan por los elementos explícitos e implícitos respectivamente.

2.4.2. Relación entre el lenguaje y los niveles.

Existe una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento, debido a que cada nivel tiene un lenguaje correspondiente y un vocabulario que se refina con relación al anterior; de acuerdo con Jaime y Gutiérrez (1990) “a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje especifico, (…) y dos personas que razonan (y que interpretan los argumentos del otro) en diferentes niveles no podrán comprenderse” (p. 315). Así que, si el docente le habla a un estudiante en un nivel que no es el adecuado para él, éste no lo entenderá. No obstante, el docente se debe acoplar al nivel del estudiante para que haya una correcta comunicación y comprensión.

La relación entre lenguaje y niveles de razonamiento se hace evidente cada vez el estudiante estructura su lenguaje con miras al formalismo, y aunque este proceso es gradual, sí se hace manifiesto un refinamiento en el lenguaje cada vez que hay un progreso en los niveles. Todo lo anterior está, además, permeado por la creación de redes de relaciones, que permiten el establecimiento de conexiones entre los conceptos y la vinculación con nuevos posibilitando la comprensión en un proceso de aprendizaje; de esta manera, cabe anotar que cuando se habla de red de relaciones respecto a un objeto matemático, precisamente, se constituyen en una sucesión de situaciones y conceptos vinculados entre sí (Jurado y Londoño 2005, p. 18), esto a su vez, va expandiéndose, incluyendo nuevas relaciones y conceptos, que lo hace más amplio y complejo. Asimismo, algo similar afirma Jaime y Gutiérrez (1990), cuando alude que una la red de relaciones está conformado por una estructura mental, en la que los vértices son los conceptos y las líneas de conexión entre los distintos vértices son las relaciones que guardan los conceptos entre sí.

Por lo tanto, la estructura mental del estudiante parece manifestarse en una red de relaciones, donde, a medida que se va avanzado en su aprendizaje respecto a un objeto matemático específico, éste también, desarrolla habilidades en los razonamientos en los distintos niveles. El cual se refleja por una nueva estructura, por supuesto más amplia, fina y extensiva, absorbida por la estructura anterior.

Según las consideraciones anteriores, un estudiante en el nivel I posee una limitada red de relaciones, no tiene aún conexiones, es muy simple e independiente; mientras que en nivel II, su red se amplía un poco más, con cierta conexión limitada correspondiente a elementos y propiedades, pero aún independiente; en el nivel III, la red de relaciones está integrada a diversas subredes, aquí se establece una conexión lógica e informal; en el nivel IV la red está integrada a la anterior y a otras subredes asociadas a otras nuevas relaciones. Las conexiones que se establecen son formales y abstractas.

2.4.3. La continuidad del paso por los niveles.

Los niveles, además de presentar un grado de sofisticación en el razonamiento y un lenguaje específico, también presentan una forma gradual y de transición para cambiar o pasar de un nivel a otro. Cabe decir que, el razonamiento de los estudiantes se da de manera progresiva y continua, sólo que hay un tiempo de transición para la consecución del siguiente nivel.

2.4.4. Globalidad o localidad.

Esta característica indica que un estudiante o individuo puede razonar en distintos niveles respecto cualquier objeto matemático distintos. Parece ser, según Gutiérrez y Jaime (1995), que:

Una persona tiene el mismo nivel de razonamiento en todos los conceptos de geometría. Las investigaciones parecen indicar que eso no sucede, que el nivel de razonamiento es local, o sea que si un individuo razona a cierto nivel en un concepto, por ejemplo, "polígonos", es posible que razone en otros niveles en otro concepto, por ejemplo, "isometrías".(p.33).

Así que, el nivel de razonamiento depende de la experiencia que haya tenido el estudiante frente a cada uno de los conceptos matemáticos.

2.5. PROPIEDADES DE LOS NIVELES

Por otro lado, Usiskin (1982), en sus estudios, sugiere que los niveles de van Hiele deben cumplir con unas propiedades específicas, estas son descritas a continuación

2.5.1. Propiedad 1: Secuencialidad fija.

Esta propiedad alude que cada estudiante debe progresar de un nivel a otro a través de una secuencialidad fija, según Usiskin, (1982) “Un estudiante no puede estar en un nivel *n* de van Hiele sin haber superado el nivel *n-1*” (p. 5).

2.5.2. Propiedad 2: Adyacencia.

Esta propiedad señala que los niveles de van Hiele tienen una estructura recursiva, según Mayberry (1981), “el objeto de percepción del nivel *n-1* se convierte en el objeto de pensamiento del nivel *n*” (p.1). Esta propiedad indica que en los niveles de van Hiele se dan diferentes habilidades y destrezas, que están siendo utilizadas implícitamente por el estudiante, sin embargo, éste sólo lo hace consciente y explícito en el nivel siguiente.

2.5.3. Propiedad 3: Distinción.

Esta propiedad establece, como lo refiere Jaramillo (2003), que "El nivel *n* requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel *n – 1*, esto es, la percepción de una nueva estructura" (p. 22)**.**

2.5.4. Propiedad 4: Separación.

Esta propiedad indica que Mayberry (Citado por Jaramillo, 2003) "dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de razonamiento matemático" (p. 22).

2.5.5. Propiedad 5: Cada nivel tiene su lenguaje.

Esta propiedad muestra que hay una relación estrecha entre el lenguaje y cada uno de los niveles, dado que cada nivel manifiesta un lenguaje típico y particular, según la red de relaciones que haya adquirido el estudiante frente al concepto matemático, pues de esto depende su capacidad para dar argumentos válidos y pertinentes. Es fundamental recalcar, así como afirman Jurado y Londoño (2005), que:

> Es importante no confundir nivel con la habilidad de resolver algunos ejercicios o de contestar algunas preguntas. Un estudiante puede aparentar un

nivel de razonamiento superior al que realmente posee, si ha aprendido a realizar rutinariamente actividades que se pueden identificar como propias de un nivel superior. El caso típico es el que se deriva del aprendizaje memorístico de algunos estudiantes universitarios quienes saben hacer derivadas y límites, reproducir sus definiciones, pero no comprenden ninguno de los conceptos. De esta deficiencia tenemos la culpa los docentes, debido a los procesos de evaluación en los que prevalecen las habilidades rutinarias y la memoria, en vez de comprobar que se han entendido y asimilado los conceptos. (p.13).

Así que, se pueden encontrar estudiantes que aparentemente razonan en un determinado nivel superior al que verdaderamente tiene, sabiendo que el ejercicio habitual y la práctica rutinaria de actividades pueden llevar al estudiante a desarrollar un aprendizaje memorístico, donde el esquema procedimental para la solución de un problema lo saben correctamente, pero en la comprensión del concepto se identifican deficiencias, pues la argumentación no es suficiente. No obstante, es importante que el docente evalúe al estudiante a partir de preguntas cimentadas en el razonamiento.

2.5.6. Propiedad 6: Consecución.

Esta propiedad considera que el progreso o movilización del razonamiento de un nivel al siguiente, se hace de manera gradual, por lo tanto, las habilidades, destrezas, características y conocimientos propios de un nivel de razonamiento determinado no se da de manera brusca, existe un tiempo de transición, donde el estudiante, poco a poco, revela cualidades y habilidades entre un nivel y otro. Sin embargo, hay estudios que, según Jaramillo (2003);

Jurado y Londoño (2005), afirman que el carácter regresivo puede exhibirse en un nivel de razonamiento, más aun, cuando todavía no se ha apropiado completamente de un nivel, en otras palabras, que el estudiante ante una pregunta que requiera argumentos, lo más probable, es que si no tiene adquirido el nivel determinado, responda con el lenguaje y las habilidades adquiridas en un nivel anterior, para asegurarse y de hecho, responder con más comodidad.

Una forma de representar la consecución de un nivel a otro, se ve manifestado en la siguiente gráfica, la cual tiene en cuenta el período de transición entre dos niveles simultáneos, esta acción niega el hecho del paso de un nivel a otro de forma brusca.

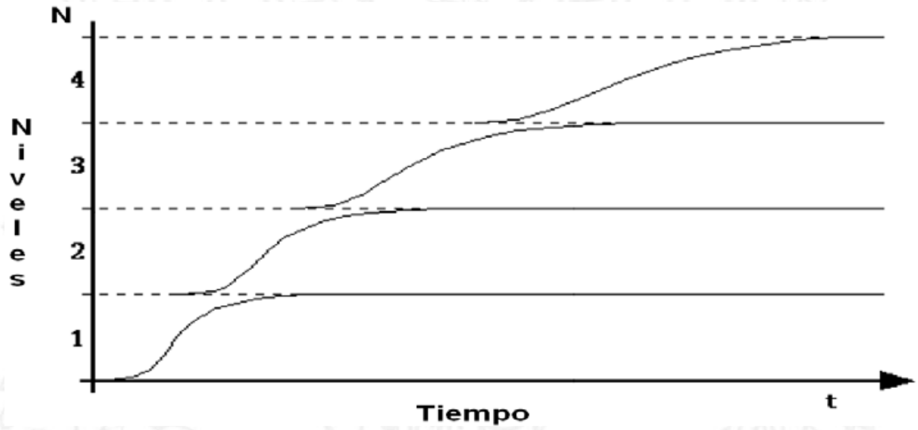


Figura 2. Consecución en la adquisición de los niveles de van Hiele.

Tomado de Jaime y Gutiérrez (1993, p.17)

2.6. CONCEPTO DE COMPRENSIÓN

Un concepto específico respecto al tópico de la comprensión, en el ámbito geométrico, dado por van Hiele (1957), plantea lo siguiente:

> Se dice que un niño tiene comprensión en un determinado campo de la geometría cuando, a partir de los datos y relaciones geométricas que se le suministran, es capaz de llegar a una conclusión en una situación con la que nunca se había enfrentado antes. El niño suele ir averiguando su adquisición de comprensión de la siguiente manera: "Ah, ya lo veo, o sea que si (…)". Y a continuación formula un nuevo teorema. Lo característico de la comprensión es pues que se van tanteando nuevas situaciones (p. 1).

Cabe decir que, la comprensión es un proceso que se va adquiriendo a medida que el profesor suministra información sistemática, organizada y significativa, y que a través de actividades que contemplan situaciones críticas y problemáticas el individuo se desenvuelva de manera eficiente, utilizando un método que solucione la situación dificultosa con ideas precisas y concluyentes.

2.7. INVESTIGACIONES REALIZADAS EN EL CONTEXTO DE VAN HIELE EN EL CAMPO DE LA GEOMETRÍA

La propuesta del marco educativo de van Hiele, fue difundida por Wirszup (1974), en un informe sobre el currículo de matemáticas en la enseñanza elemental de la Unión Soviética, donde manifestó la importancia de la enseñanza de la geometría desde este marco educativo. Esto promovió trabajos de investigaciones en este campo, además, cambios en el diseño del currículo.

Entre las contribuciones sobre la confiabilidad de este modelo, se deben destacar, según Gutiérrez y Jaime (1995), tres proyectos importantes desarrollados entre 1979 y 1982, en los Estados Unidos, puesto que, dieron grandes aportes a este modelo y sirvieron como base para estudios posteriores. Los trabajos realizados fueron el proyectos de Brooklyn (Fuys y otros, 1988), el de Chicago (Usiskin, 1982) y Oregón (Burger y Shaughnessy, 1990). A continuación se presenta una descripción de cada uno de los trabajos:

2.7.1. Proyecto Chicago: "Van Hiele Levels and achievement in secondary school geometry".

Este proyecto fue realizado por Zalman Usiskin (1982) y su propósito principal fue "analizar la habilidad de la teoría de van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría en la escuela secundaria" (p. 8). Del mencionado proyecto se obtuvieron los siguientes resultados:

- El quinto nivel de razonamiento no existe o no se puede identificar, en este mismo sentido, van Hiele determina que los niveles después del IV, son difíciles de detectar, solo tienen un valor teórico, el cual en la vida escolar deja de ser práctico.
- Identifica una de las propiedades de los niveles "secuencialidad fija" queriendo decir que "Un estudiante no puede estar en un nivel *n* de van Hiele, si no ha pasado a través del nivel *n.*
- Este estudio afirma que hay "Decisiones arbitrarias respecto al número de respuestas correctas necesarias para obtener un nivel, pueden afectar al nivel asignado a muchos estudiantes" (Usiskin, 1982, p. 80).
- Los niveles de razonamientos parece ser que "son un buen predictor de los resultados actuales en geometría y un razonable buen predictor de resultados posteriores" (Usiskin, 1982, p 89).

2.7.2. Proyecto Oregon: “Assessing children’s intellectual growth in geometry”.

El proyecto de investigación fue dirigido por William Burger, de la Universidad del Estado de Oregón. Este estudio se centró, esencialmente, en responder tres preguntas, las cuales son las siguientes:

1. ¿Son los niveles de van Hiele útiles para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes en las tareas de geometría?
2. ¿Pueden los niveles ser caracterizados operacionalmente por la conducta de los estudiantes? ¿Puede un procedimiento de entrevista ser desarrollado para revelar los niveles predominantes en el razonamiento en una específica tarea de geometría?

Este proyecto evidenció positivamente las respuestas a las tres preguntas nombradas anteriormente:

- Los autores enfatizaron en la importancia de utilizar la entrevista clínica como un instrumento adecuado, para detectar los niveles de razonamientos.
- Burger y Shaughnessy (citado por Jaramillo, 2003, p. 27) indica que “los niveles aparentan ser estructuras complejas envolviendo el desarrollo de conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchos ambientes de tareas”, también, señala en la misma página que: “la oscilación entre niveles de razonamiento pre-encontrados en un estudiante, presumiblemente entre un período de transición entre un nivel y el siguiente, indica que los niveles son más bien dinámicos que estáticos, como teorizó Van Hiele”.

2.7.3. Proyecto Brooklyn "Geometric thinking among adolescents in inner city schools".

Este proyecto se realizó en Brooklyn College y fue dirigido por Davis Fuys y Dorothy Geddes. Se desarrolló con estudiantes de 6º y 9º grado. El proyecto incluía cuatro tareas para realizar, las cuales son las siguientes

1. La traducción al idioma inglés de los textos originales de van Hiele y el desarrollo de una documentación más detallada sobre la versión conductista de los niveles.
2. El desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para utilizarse en la entrevista clínica
3. Entrevistas con estudiantes participantes de sexto y noveno grado.
4. La evaluación del contenido geométrico de tres series de libros de textos empleados en las escuelas, teniendo en cuenta, los niveles de razonamiento.

Por otro lado, se destacan los siguientes resultados:

- El cuarto nivel de van Hiele puede ser caracterizado operacionalmente por la conducta de los sujetos y permite describir en los estudiantes el nivel de entrada y el "nivel potencial" del proceso de razonamiento en las actividades geométricas.
- Existen periodos de transición entre los niveles, por lo tanto, un estudiante estará cambiando alternativamente entre el nivel *n-1* y *n* de razonamiento.

- Burger y Shaughnessy (citado por Jaramillo, 2003, p.28) indican que, "(…) Los niveles parecen ser complejas estructuras que envuelven los desarrollos de ambos, conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchas de las tareas".

Los tres proyectos aportaron una nueva forma de enseñanza de la geometría, valorando la importancia del marco teórico de van Hiele y promoviendo trabajos de investigación ulteriores. Cabe mencionar que estos trabajos hacen parte de un campo netamente geométrico, sin embargo, existen trabajos de investigación enmarcados en el modelo de van Hiele, pero fuera del ámbito geométrico.

2.8. TRABAJOS DE INVESTIGACIÓN FUERA DEL ÁMBITO DE LA GEOMETRÍA

A continuación son presentados algunos trabajos de investigación que han extendido el modelo educativo de van Hiele fuera del ámbito geométrico, hasta campos como el análisis matemático, donde es posible encontrar conceptos con un componente visual-geométrico característico y que se constituyen en un mecanismo para generar procesos de razonamiento.

2.8.1. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Judy Land.

La memoria titulada "Appropriateness of the van Hiele model for describing students' cognitive processes on algebra tasks as typified by college students' learning of functions", presentada en 1991, en la Universidad de Boston, abordó, según (Navarro, 2003), los siguientes objetivos:

> Definir operacionalmente la conducta de los estudiantes en cada nivel usando el modelo de Van Hiele para el tema de las funciones exponenciales y logarítmicas. Determinar si las respuestas de los estudiantes a una entrevista escrita pueden ser caracterizadas de acuerdo con los niveles. Formular unos descriptores de niveles que describan el conocimiento y el meta-conocimiento con relación a las funciones exponenciales y logarítmicas. Explorar el uso de fases para facilitar el recorrido de los estudiantes desde un nivel a otro (p. 29).

Este estudio se extiende para la aplicación de los niveles de van Hiele en conceptos específicos del álgebra. Se diseñó un instrumento para evaluar el nivel de razonamiento de los estudiantes y enunció descriptores de nivel para el tema de estudio

2.8.2. Memoria para optar al grado de doctor presentada por José Luis Llorens Fuster

En el año 1994, en la Universidad Politécnica de Valencia, José Llorens presentó su memoria titulada: “Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación Local”, para optar al título de Doctor. Uno de los grandes logros de este estudio fue llevarse el mérito de extender el modelo de van Hiele, a otro campo de las matemáticas, es decir, al análisis matemático, direccionando de este modo, una nueva mirada, que sirvió de base a nuevas investigaciones.

El objeto de estudio elegido en esta disertación fue "Aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto". A continuación, se presentan algunos de los objetivos del estudio:

- Caracterizar, mediante los descriptores de los niveles I, II y III, la aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local en su contexto de concepto de recta tangente en una curva en un punto del plano.
- Diseñar un modelo-guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento descritos.
- Comprobar, mediante la administración de una prueba adecuada y el oportuno tratamiento estadístico, que es posible detectar esos niveles en ciertas muestras de estudiantes, al mismo tiempo que se automatiza la adscripción de esos estudiantes en su correspondiente nivel de razonamiento.

Cabe destacar otro aspecto muy importante realizado por Llorens (Citado por Navaro, 2003) el cual es el siguiente:

> La utilización de un asistente matemático permitió al autor usar un método de visualización "la ampliación sucesiva de imágenes" mediante el cual consiguió romper el concepto imagen preconcebido de los alumnos, que según los trabajos de Vinner se podría resumir diciendo que *"la tangente toca a la curva pero no la corta"*, sustituyéndolo por otro en el cual la tangente a una curva en un punto A *"es la recta a la que tiende la curva cuando se magnifica en un entorno de A"* (p.30).

Por lo tanto, parece ser que, la utilización de la teoría de Vinner con relación a la visualización de figuras geométricas, favoreció al progreso en el nivel de razonamiento, y además, al ajuste de los conceptos imagen y definición según Vinner con el modelos de van Hiele.

Por otro lado, cabe destacar ciertas diferencias entre el trabajo de Llorens y Land, al respecto, Navarro (2003) menciona lo siguiente:

> La memoria de Land se centró en el estudio de las habilidades de tipo operacional de los alumnos y no en el pensamiento de los mismos, lo cual la diferencia sustancialmente de los trabajos realizados con posterioridad en el campo del Análisis Matemático. Fue LLorens quién abrió el camino para la extensión del modelo de van Hiele, en un área diferente de la geometría, al estudiar los procesos de razonamiento de los estudiantes en un concepto no geométrico (p. 30).

Así que, el estudio de Land (1991), se centró en las habilidades y destreza de los estudiantes frente a la conceptualización de funciones exponenciales y logarítmicas, mientras que los estudios de Llorens (1994), en conceptos evidentemente relacionados con procesos infinitos como la aproximación local.

2.8.3. Memoria para optar al grado de doctor presentado por P. Campillo Herrero.

El trabajo de Pedro Campillo Herrero, titulado “La Noción de Continuidad desde la Óptica del Modelo de van Hiele”, presentado en 1999 en la Universidad Politécnica de

Valencia, estriba en una propuesta metodológica que busca la asimilación del concepto de continuidad de Cauchy en los niveles básicos, caracterizado por los descriptores de nivel I, II y III, además, utiliza el método de la visualización como mecanismo para utilizar el *"estiramiento"* de una curva, con el fin de construir un concepto de imagen geométrico con relación al control de una curva para crear en el estudiante la noción de "*curva controlable*".

Esta propuesta de investigación propone, según Zapata y Sucerquia, (2009), dos objetivos:

- El diseño de un modelo guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento que estudiamos.
- La detección de los niveles de razonamiento de los estudiantes, y la automatización de la adscripción a los mismos, mediante una prueba escrita y el tratamiento estadístico correspondiente (p. 65).

El trabajo confirmó la eficacia de la entrevista clínica y de tipo socrático, para la detección de niveles de razonamiento, también diseñó y ejecutó una prueba escrita, para grupos numerosos (Navarro, 2003), que permitió identificar el nivel en que se encontraban los estudiantes.

2.8.4. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Andrés Felipe de la Torre Gómez.

En la Universidad de Valencia, en el año 2000, el Profesor Andres Felipe De la Torre Gómez presenta la memoria para optar al grado de doctor, titulada "La modelización del espacio y el tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele". El trabajo se centra en los siguientes objetivos:

- Caracterizar mediante descriptores de los niveles I, II y III, en el marco del modelo de van Hiele, para conceptos de aproximación local en su manifestación de recta tangente en una curva en un punto del plano.
- Diseñar un modelo-guión para una entrevista semiestructurada, que permite la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento descritos.
- Verificar que es posible detectar niveles de razonamiento en una muestra de estudiantes seleccionada, al mismo tiempo que se automatiza su adscripción en su correspondiente nivel de razonamiento.

Este trabajo propone dos aspectos importantes, mencionados por Navarro (2003) quien indica lo siguiente:

> Proporciona una propuesta metodológica para la asimilación del concepto de equipotencia de agregados infinitos de puntos, para estudiantes del último ciclo de la escuela secundaria y de los primeros cursos de universidad, y prepara a los alumnos para comprender la modelización del espacio y el tiempo, (p.31).

En este trabajo se realizó una entrevista de carácter socrático para detectar los niveles de van Hiele y determinar los descriptores de los mismos, además, se realizó una actividad escrita, resultado de la entrevista y en la que se refinaba cada componente de acuerdo a las necesidades y construcciones elaboradas a través de la intervención.

2.8.5. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Pedro Vicente Esteban Duarte.

Pedro Vicente Esteban presentó en el año 2000 su memoria, titulada "Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía el modelo de van Hiele" para optar al título de doctor, en la Universidad Politécnica de Valencia. En este trabajo se aborda el concepto de recta tangente a una curva en un punto, para promoverlo a través de la visualización, el cual se ha denominado “el haz de secantes” y “un mecanismo del zoom”.

Uno de los objetivos fue la caracterización mediante descriptores de niveles I, II y III del concepto de aproximación local, confirmando la aplicación del modelo educativo de van Hiele. Se utilizó la entrevista clínica semiestructurada y de carácter socrático. Este instrumento fundamenta el diseño de una prueba escrita, con el fin de corroborar los resultados a un grupo más extenso y poder evaluar su razonamiento.

Por otro lado, se plantea otro objetivo, comparar los resultados que se obtienen al abordar el concepto por medio del zoom y del haz de secantes en estudiantes con características semejantes, que concluyó la importancia de introducir en los dos instrumentos (entrevista clínica y actividad escrita) estos dos mecanismos de visualización. Además, se llegó a otra conclusión, en este caso, que el contexto gráfico que el ordenador proporciona mediante el mecanismo de zoom, promueve mejor la comprensión para los estudiantes en comparación con aquellos que no lo aplican.

2.8.6. Memoria para optar al grado de doctor presentada por Carlos Mario Jaramillo López.

La memoria presentada, en el año 2000, en la Universidad politécnica de Valencia, titulada: "La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele" por Carlos Mario Jaramillo López, para optar el título de Doctor, tuvo como objetivos principales, según Zapata y Sucerquia (2009), los siguientes:

- Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de la noción de serie convergente en concordancia con el modelo de van Hiele y visualizado a través de la imagen de longitud de curvas planas (zig-zags).
- Diseñar un modelo guión para una entrevista semiestructurada que permita la clasificación del entrevistado en uno de los niveles de razonamiento que proponemos.
- Comprobar, mediante una prueba escrita y el oportuno tratamiento estadístico, que es posible la detección de estos niveles y que coincide con los descritos, al mismo tiempo, que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.

Este trabajo utilizó una forma de visualización, la noción de longitud de una curva plana "zigzag", permitiendo favorecer al proceso del razonamiento infinito, debido a que se rompen los conceptos equivocados de lo infinito.

2.8.7. Memoria para optar al grado de doctora presentada por María de los Ángeles Navarro Domínguez.

La memoria titulada: “Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica”, presentada en la Universidad de Sevilla por María de los Ángeles Navarro Domínguez (2002), abordó los siguientes objetivos:

1. Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento del proceso de convergencia de una sucesión, en concordancia con el modelo educativo de Van Hiele, analizando las pautas de razonamiento del alumnado universitario y preuniversitario, seguidas en el estudio de este concepto. (…)
2. Proporcionar una propuesta metodológica que nos permita introducir el proceso de convergencia de una sucesión de forma que el alumno construya el concepto a partir de la visualización elegida, y que propicie en el alumno la formación de un concepto imagen adecuado para la convergencia de sucesiones (Navarro, 2002, p. 16).

La tesis propone abordar la convergencia de una sucesión, estrictamente, desde la componente visual, con el fin de evitar problemas de comprensión. De hecho utilizó “una nube de puntos” como un conjunto de puntos en el plano, que permitiera desde la visualización la formación de un concepto de imagen adecuado al objeto en cuestión.

Navarro (2003) proporciona un aporte importante a los trabajos realizados fuera del ámbito geométrico, en este caso, al análisis matemático, estos se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Persiguen la creación de un concepto imagen adecuado a un concepto matemático (no a una técnica, o a una demostración) en un entorno manipulativo visual, a través de una entrevista socrática.
2. Los prerrequisitos que necesita el alumno (nivel 0) son hechos sobre figuras geométricas simples, de fácil aceptación por el entrevistado.
3. Se evita el lenguaje matemático utilizando palabras del lenguaje corriente, pero asignando progresivamente mayor precisión a las palabras usadas.
4. Se construye y utiliza un solo mecanismo de trabajo, en cada caso el que se considera más adecuado.
5. Se les entrena en el uso de cuantificadores lógicos, sin hacerlo de una forma explícita (p.33).

Además, se puede agregar dos características relevantes que tienen una estrecha relación con la metodología de trabajo de investigación, las cuales son: la realización de la entrevista clínica de tipo socrático, y una actividad escrita como resultado de las entrevista realizadas a los estudiantes, el primero y el segundo; evalúan la detección de los niveles de razonamiento y su progreso.

2.9. ESTUDIO HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

La realización de un estudio histórico y epistemológico del objeto matemático en cuestión, ha permitido reconocer cómo los pueblos desarrollaron y concibieron el teorema de Pitágoras desde lo práctico, empírico e informal; desde su estructura matemática y demostrativa, hasta su argumentación lógica y formal, como también desde su aplicabilidad en otros conceptos matemáticos y otras ciencias.

Analizar los componentes históricos y epistemológicos en relación al teorema de Pitágoras, permitió conocer las distintas formas posibles de facilitar la comprensión del mismo, y el hecho de que exista una diversidad de demostraciones para éste favorece el bagaje de posibilidades que permitieron estimular reflexiones en el estudiante sobre su proceso de razonamiento.

En la actualidad, el teorema de Pitágoras es un legado de gran valor histórico y cultural que ha dejado a la humanidad perpleja, inquieta y asombrada por su grandeza. Se presume que este teorema constituye un objeto matemático invaluable y que ha permitido el desarrollo de otros conceptos matemáticos aplicados a la trigonometría, la geometría y la física, además, ha permitido la demostración de otros teoremas, como también, la aplicación tanto en la cotidianidad como en la solución de ejercicios matemáticos.

Este estudio se ha realizado con el apoyo en la técnica de rastreo bibliográfico que fundamenta algunas reflexiones acerca del teorema de Pitágoras, abordado desde un contexto histórico y epistemológico; su evolución e impacto en prominentes civilizaciones de la historia permiten fundamentar las razones por las cuales es concebido uno de los objetos de estudio más relevantes en el campo de la educación matemáticas, y allí radica la importancia de que sea comprendido por los estudiantes.

Las distintas civilizaciones aportaron significativamente al desarrollo de este concepto, desde el uso práctico, en acciones como las construcciones de edificios, la medición y delimitación de terrenos, las construcciones de tumbas y altares religiosos y la solución de problemas matemáticos, hasta el uso formal y riguroso, que se evidenciaba en su estructura lógica, y que llevó al desarrollo de otros conceptos en el campo de las matemáticas y otras disciplinas.

El teorema de Pitágoras ha sido acogido con mucha atención en las civilizaciones antiguas como una herramienta empírica y necesaria en el quehacer práctico del ser humano; para los pueblos de la antigüedad es reconocido como una expresión matemática importante para solucionar problemas geométricos, es aceptado como el umbral que formaliza la práctica lógico-deductiva en las matemáticas.

A continuación se describirá de manera detallada la incidencia del teorema en cada una de las civilizaciones que hicieron mayor aporte a su formalización y rigurización.

2.9.1. El teorema de Pitágoras en la civilización Babilonia.

Existe evidencia de que los babilonios conocían y dominaban el teorema de Pitágoras, desde hace más de mil años, incluso antes que el propio Pitágoras; según Mankiewicz (2000), se ha demostrado este hecho gracias a un examen arqueológico realizado a ciertas tablillas de arcilla con texto cuneiforme, encontradas en la zona de Babilonia; la tablilla conocida con el nombre de Plimpton 322, conservada en la Universidad de Columbia, fue descifrada en 1945 por Neugebauer y Sachs. Además, González (2008) afirma que la tablilla estaba fechada entre los años 1900 y 1600 a. C. y manifiesta tener registros de cuentas de operaciones comerciales, como también, una descripción empírica de números pitagóricos que dan cuenta de ternas pitagóricas.

A continuación se muestra la tablilla, con cierta simbología que refleja el registro sistemático de algunas acciones intelectuales y mercantiles.

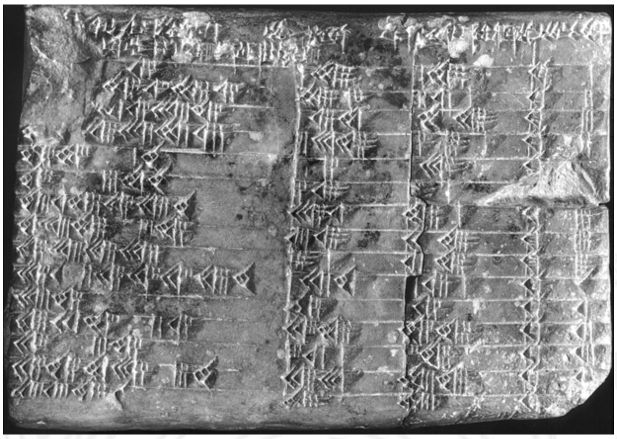


Figura 3. Tablilla Plimpton 322, tomada de la plataforma de la Universidad de Columbia.

De esta tablilla, algunos datos numéricos fueron descifrados y en ellos se logra abstraer una clara relación con las ternas pitagóricas. Según González (2008) los babilonios encontraron expresiones matemáticas para representar las ternas pitagóricas, se valieron del álgebra y la aritmética para deducirlas, a partir de la siguiente ecuación:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Además, tomaron dos enteros sexagesimales regulares cuyos divisores únicos son 3, 4 y 5, los cuales son divisores primos de 60, y dos elementos u y v, que guardaban la relación $u > v$. Con estas condiciones formaron las siguientes ecuaciones para a, b y c,

$$\mathrm{a} = 2uv, \qquad \mathrm{b} = u^2 - v^2, \qquad \mathrm{c} = u^2 + v^2$$

que permiten encontrar los tres lados del triángulo rectángulo. Estas tres ecuaciones comprueban la veracidad de las ternas Pitagóricas.

Siguiendo con lo anterior, para los números $u = 12$ y $v = 5$, obtendremos los valores $a = 120$, $b = 119$ y $c = 169$; los valores b y c se encuentran en la tablilla Plimpton, sin embargo la *c* no aparece. De una manera amplia, González (2008) ilustra en la siguiente tabla la relación descrita anteriormente, para los números desde el 1 hasta el 15, estos son presentados a continuación:

Tabla 2. Algunas ternas pitagóricas

u	v		a	b	c
12	5		120	119	169
64	27		3456	3367	4825
75	32		4800	4601	6649
125	54		13500	12709	18541
9	4		72	65	97
20	9		360	319	481
54	25		2700	2291	3541
32	15		960	799	1249
25	12		600	481	769
81	40		6480	4961	8161
2	1		60	45	75
48	25		2400	1679	2929
15	8		240	161	289
50	27		2700	1771	3229
9	5		90	56	106

Deducción completa de las ternas pitagóricas, según tablilla Plimpton 322.

Igualmente, hay otra tablilla de arcilla recuperada por los arqueólogos, la tablilla YALE YBC 7289, conservada en la Universidad de Yale (González, 2008). Esta tablilla está fechada hacia 1600 a. C., el artefacto muestra un cuadrado, los triángulos rectángulos resultantes de trazar las diagonales y números escritos en el sistema de numeración sexagesimal babilónico que están basados en potencias de 60.

Figura 4. La tablilla YALE (YBC) 7289 de 1600 a. C.

Es admirable observar un caso particular de la relación aritmética entre la longitud de los lados del cuadrado y las diagonales (Gonzales, 2008), cuando se hace la aplicación primitiva del teorema de Pitágoras, donde en la diagonal horizontal aparece un número que expresado en término modernos sería 1; 24, 51,10, para el cual el punto y coma representa la separación entre la parte entera y la parte fraccionaria y la coma representa las sucesivas posiciones decimales. A continuación, en la siguiente expresión se aprecia la transición del sistema babilónico al decimal:

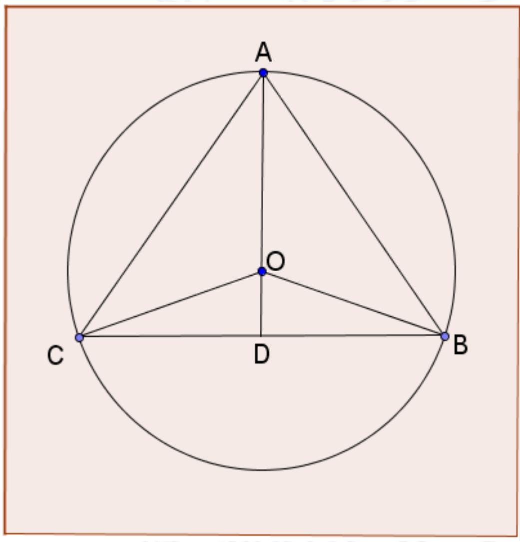
$$1;24,51{,}10 \; = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \cong 1{,}414213 \cong \sqrt{2}$$

En la parte superior de la tablilla aparece 30 y en la parte inferior aparece $42;25{,}35$, indica que:

$$42;25,35 \cong 30 \times 1;24{,}51{,}10 \quad \text{esto es} \quad 30 \times 1{,}414213 \cong 42{,}426389$$

Existe, también, otro artefacto de arcilla llamado tablilla SUSA fue descubierto por el geólogo y naturalista británico W.K Loftus, a un par de millas de Babilonia, en la ciudad de

Susa actual país de Irán. Según lo que describe Esteban, Ibáñez y Ortega (1998), la tablilla describe uno de los ejemplos más antiguos relacionado con el teorema de Pitágoras y cuyo enunciado es el siguiente: “Hallar el radio de círculo circunscrito al triángulo de lados 50, 50, 60” (p. 18), este problema es, ante todo, un indicio de que ya conocían y utilizaban el teorema.



Se tiene el triángulo isósceles ABC, donde:

$AC = AB, \quad CD = BD, \quad AD = h, \quad CO = x$

O es el punto medio de la circunferencia

Por tanto se tienen las dimensiones 50,50 y 60 unidades.

Significa entonces que:

AC=50 AB=50 y BC=60

Figura 5. Problema planteado y resuelto en la tablilla SUSA.

Para este problema, es claro que la solución requirió de procesos como los presentados a continuación: encontrar la altura h, se establece la relación $AD^2 = AC^2 - CD^2$, en la cual ya subyace el teorema de Pitágoras.

$$AD^2 = 50^2 - 30^2$$

$$AD^2 = 2500 - 900$$

$$AD^2 = 1600$$

$$AD = \pm\sqrt{1600}$$

$$AD = 40$$

A continuación se halla el radio $x = CO$

$$x^2 = DO^2 + CD^2$$

$$x^2 = (40 - x)^2 + 30^2$$

$$x^2 = 1600 - 80x + x^2 + 900$$

$$x^2 = 2500 - 80x + x^2$$

$$x^2 - x^2 + 80x = 2500$$

$$80x = 2500$$

Luego tenemos:

$$x = \frac{2500}{80} \qquad \text{donde} \quad x = 31{,}25 \qquad \therefore \qquad \text{radio } (r) = 31{,}25$$

De igual forma, (Esteban, et al., 1998) señalan que en 1962, arqueólogos encontraron en Telí Dhibayi, cerca de Bagda unas 500 tablillas de arcilla, las cuales estaban relacionadas con transacciones comerciales y cuestiones administrativas, pero una en particular presentaba un problema geométrico, éste proponía calcular los lados de un rectángulo conociendo su área y su diagonal. Es así como plantean el problema y la siguiente solución: “Hallar la longitud y anchura de la figura, dada su área 0; 45 (0,75) y su diagonal 1; 15 (1,25). (p. 19)”

Para resolver el problema, la tablilla sigue los pasos siguientes (los resultados se dan en el sistema sexagesimal y, entre paréntesis el decimal):

1. Multiplicar el área por 2: Resultado 1;30 (1,5).
2. Elevar al cuadrado la diagonal: Resultado 1;33, 45 (1,5625).
3. Restar (1) de (2): Resultado 0; 45 (0,0625).
4. Hallar la raíz cuadrada de (3): Resultado 0;15 (0,25).
5. Dividir por 2 (4): Resultado 0;7, 30 (0,125).

6. Hallar la cuarta parte de (3): Resultado 0;0, 56, 15 (0,015625).

7. Sumar el área a (6): Resultado 0; 45, 56, 15 (0,765625).

8. Hallar la raíz cuadrada de (7): Resultado 0; 52, 30 (0,875).

9. Longitud = Resultado en (5) + Resultado en (8) = 1.

10. Anchura = Resultado en (8) – Resultado en (4) = 0; 45 (0,75)

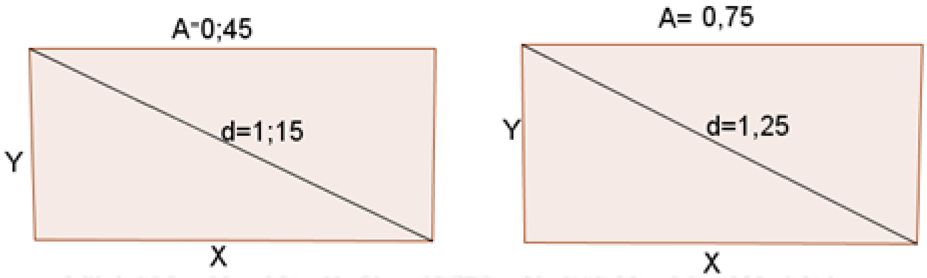


Figura 6. Esquema geométrico comparativo desde el sistema sexagesimal y sistema decimal.

El procedimiento anterior, parece ser muy difícil, por la falta de operaciones y expresiones. Sin embarago, se presenta una solución más conocida y actualizada:

$$xy = A, \qquad A = 0.75, \;\; A = \frac{3}{4}; \;\; A \text{ es el área del rectángulo}$$

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$\text{esto es} \quad x^2 + y^2 = (1{,}25)^2, \qquad \text{además } 1{,}25 = \frac{5}{4}$$

$$\text{tenemos que } xy = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$$

$$\text{luego } y = \frac{3}{4x} \quad y \quad x^2 + y^2 = \frac{25}{16}$$

$$\text{reemplazando } y = \frac{3}{4x} \quad \text{se obtiene} \quad x^2 + \left(\frac{3}{4x}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

$$\text{entonces} \quad x^2 + \frac{9}{16x^2} = \frac{25}{16}$$

$$\text{de donde se obtiene} \quad 16x^4 + 9 = 25x^2$$

$$\text{esto es} \quad 16x^4 - 25x^2 + 9 = 0$$

haciendo un cambio de variable, donde $x^4 = z^2$, se obtiene

$16z^2 - 25z + 9 = 0$, esto es

$$(16z - 9)(z - 1) = 0 \quad \therefore \quad z = \frac{9}{16} \quad \text{y} \quad z = 1$$

$$\text{Ahora } z = x^2 \text{ entonces} \quad x = 1, \quad y = \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{4} \quad y = 1$$

2.9.2. El Teorema de Pitágoras en Egipto.

Existen dos grandes papiros y varios fragmentos de otros que describen las matemáticas del antiguo Egipto, estos tienen que ver con problemas resueltos y edificaciones vinculados a templos religiosos; uno de ellos es el Papiro de Rhind o Papiro Ahmes, que según (Esteban et al., 1998) se remonta al año 1650 a. C., estos contienen 87 enunciados de problemas aritméticos y geométricos relacionados con el cálculo de áreas de triángulos, rectángulos, trapezoides, círculos, como también del volumen del cilindro, pirámides y primas.

Figura 7. El papiro matemático de Rhind (1650 a. C.).

Fuente tomada de:The british Museum.

El papiro de Moscú según (Esteban et al., 1998), fue escrito en el siglo XVIII a. C. Son cuatro rollos que contienen cálculos de volumen de objetos y edificaciones de los templos. Estos papiros tienen un alto valor matemático, sin embargo, no mencionan el teorema de Pitágoras ni tampoco las ternas Pitagóricas.

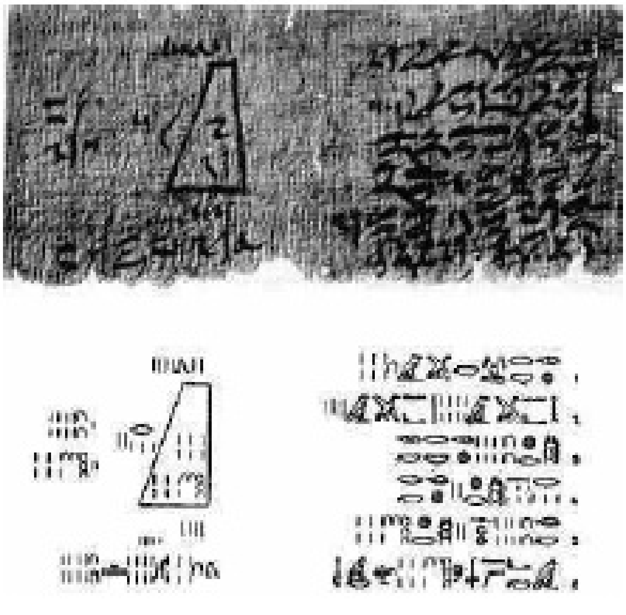


Figura 8. Papiro de Moscú. Escrito en el siglo XVIII a. C.

Otro de los documentos que fue hallado en Kahun, en el año 2000 a. C., es el papiro de la XII Dinastía que deja de manifiesto cuatro expresiones aritméticas respecto a las relaciones entre los tres lados del triángulo rectángulo, que hace, evidentemente, alusión a las ternas Pitagóricas. A continuación se presentan los cuatros casos numéricos donde se establecen relaciones pitagóricas para a, b y c.

$$1^2 + (\frac{3}{4})^2 = (1\frac{1}{4})^2$$

$$8^2 + 6^2 = (10)^2$$

$$2^2 + (1\frac{1}{2})^2 = (2\frac{1}{2})^2$$

$$16^2 + 12^2 = 20^2$$

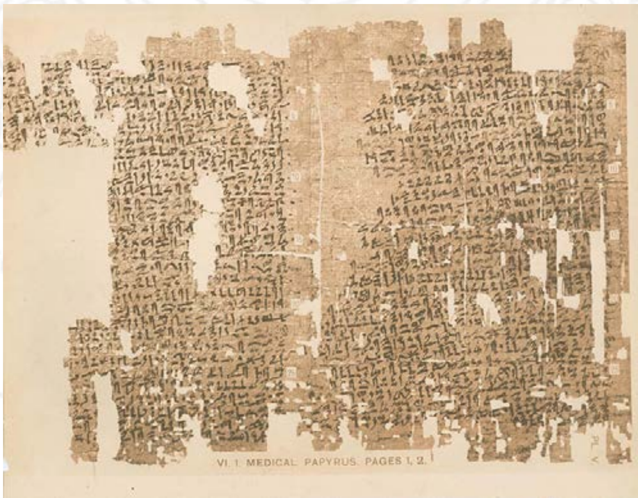


Figura 9. Papiro de Kahun,.

Imagen tomada de Wikipedia 2013

Los egipcios ya conocían y utilizaban el triángulo rectángulo de lados 3,4 y 5 utilizados por los agrimensores oficiales como escuadra para trazar las líneas perpendiculares y paralelas entre sí, con el fin de formar trazos que guarden cierta estética, orden, comodidad y perspectiva en sus diseños, para construir edificaciones casi perfectas y aprovechar el área y el volumen entre ellos. Además, se hacían otras prácticas habituales con el triángulo rectángulo en tiempo de inundaciones, provocados por el río Nilo, con el objetivo de recuperar los linderos y la delimitación de tierras. En este sentido estas prácticas empíricas y habituales permitieron el surgimiento de la profesión de “arpedonata” que significa tenedor de cuerdas; este método consistió en tomar una cuerda y hacer 13 nudos y luego estirarlos hasta formar lados de 3, 4 y 5 del rectángulo.

Se muestra a continuación una de las acciones que hacían los egipcios con el uso de las cuerdas que formaban un triángulo rectángulo, quizás de distintas dimensiones.

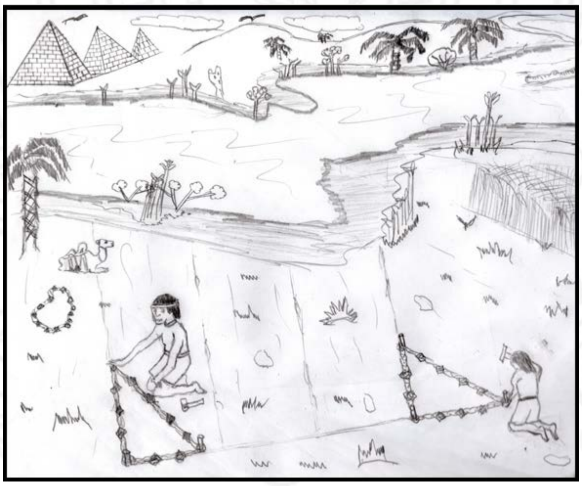


Figura 10. Representación del oficio de los argonautas o tenedores de cuerdas en Egipto.

2.9.3. Teorema de Pitágoras en la India.

La civilización india se destacó en las matemáticas por el desarrollo de conocimientos tanto aritméticos como geométricos; respecto al triángulo rectángulo, se caracterizan por el uso de cuerdas establecidas por tripletas pitagóricas con dimensiones en prakramas (unidad de longitud) de lados 3, 4, 5; 15, 36, 39; 12, 5, 13; 15, 8, 17; 12, 35, 17. Utilizaban un método similar al de los egipcios, para trazar líneas perpendiculares y paralelas, con el fin de construir altares y templos con exactitud y precisión. Maza (2000). Estos altares tenían formas diferentes: cuadrado, rectángulo, triángulo, círculo, trapecio u otras figuras, como por ejemplo, forma de halcón, todas ellas tenían una intención y significado.

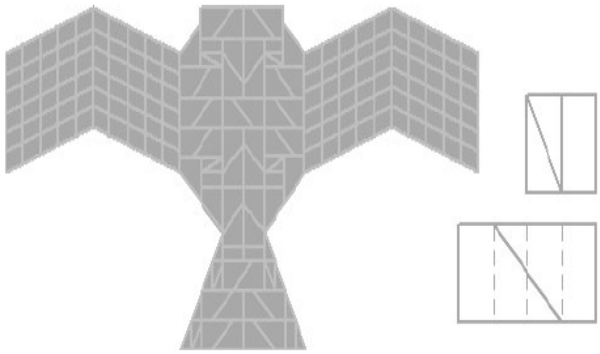


Figura 11. Altar en forma de halcón

Esta cultura antigua de dominio Ario, comprendido alrededor de 1500 años a. C., se dio en el periodo llamado védico "porque en ese tiempo empezaron a redactarse los vedas en lenguaje Ario por excelencia, que es el sánscrito" (Maza, 2000, p. 163). Los vedas son cuatro recopilaciones que describen los pensamientos de esta tribu. Cabe resaltar que dentro de ese documento, existe un apartado que tiene recopilado un conjunto de conocimientos matemáticos llamado sulvasutras; con referencia a lo anterior, Mankiewicz (2000) considera que: "las matemáticas de dicho período están recogidas en el sulvasutras, parte de aprendices de los vedas, libro sagrado del hindú, donde el concepto sulva significa cuerda utilizado para realizar mediciones de los templos y altares sagrados" (p.23).

Así que, era muy parecido a lo que hacían los egipcios para sus trazos, mediciones de terrenos y construcciones de edificaciones, sin embargo, ellos lo hacían, más precisamente, para las construcciones de los templos sagrados.

A continuación se muestran los trazos de los altares trapezoidales del Sulvasutra de Apastamba (siglo V a.C.) con indicación de las ternas pitagóricas, utilizadas en la construcción de un ritual.

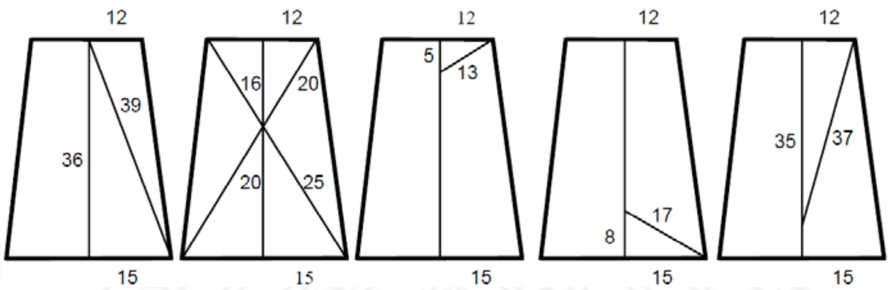


Figura 12. Trazado de ternas Pitagóricas en los altares trapezoidales.

Existen versiones que citan textualmente el teorema de Pitágoras, y fueron escritas alrededor del año 800-600 a.C. como lo indica Mankiewicz (2000), donde registra a Baudhayana diciendo:

> La cuerda que se estira a través de la diagonal de un cuadrado produce un área que dobla la del cuadrado original" posteriormente Katyayana da una explicación más genérica "la cuerda de la diagonal de un rectángulo representa un área como la que los lados vertical y horizontal representan juntos (p.23).

Esto parece indicar que eran hábiles y conocedores de muchas propiedades del triángulo rectángulo, así lo demuestran en los diseños de altares y templos. Además, fueron capaces de deducir algunas ternas pitagóricas útiles para el uso de las cuerdas de diferentes longitudes.

c – b = 1			c – b = 2			c – b = 3		
a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	8	15	17	15	36	39
5	12	13	12	35	37			
7	24	25						

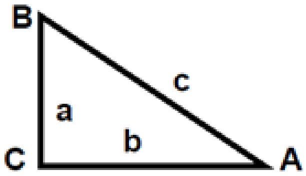


Figura 13. Ternas Pitagóricas perteneciente a los Hindúes.

2.9.4. Teorema de Pitágoras en China.

Existe un antiguo texto matemático chino, el *zhou bi suan jing*, llamado también, Chou Pei Suan Ching, que fue escrito entre el 500 y el 200 a. C. Este documento relaciona hace alusión a una conversación establecida por dos ilustres personas, Zhou Kung y un noble llamado ShangKao (Mankiewicz, 2000), donde dialogan acerca de las propiedades de un triángulo rectángulo, y las relaciones geométricas que se establecen allí.

El teorema de Pitágoras fue conocido como gougu, este se demuestra a partir de un componente geométrico, en el que se usaba un proceso de acumulación de rectángulos, acompañado de un diagrama que muestra el método para el triángulo con lados 3, 4, 5. Sin embargo, Liu Hi muestra una demostración geométrica usando el principio de complementariedad externa-interna, Mankiewicz (2000), en el que dos cuadrados más pequeños se cortan para formar un cuadrado mayor, la expresión fue la siguiente y se usó en numerosos problemas:

$$gou^2 + gu^2 = xian^2 \qquad (\ a^2 + b^2 = c^2 \ )$$

A continuación se presenta un esquema que expresa la demostración del teorema de Pitágoras llamada Diagrama de la hipotenusa

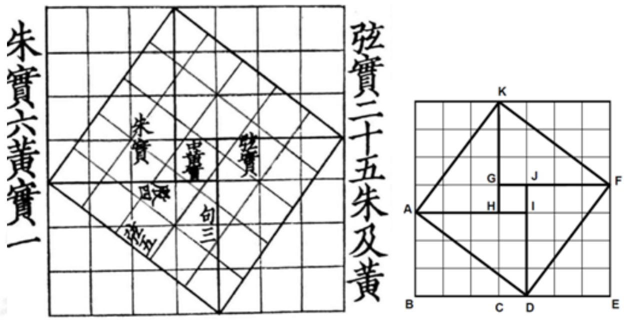


Figura 14. Demostración geométrica del teorema pitagórico tratado por Chou Pei Suan Ching.

Hay otro documento, el Chui-Chang Suang-Shu, llamado Jiu Zhang Suan Shu, que contiene 246 problemas, de los cuales algunos se basan en el teorema de Pitágoras, vale la pena citar el famoso problema llamado el “bambú roto” que refiere lo siguiente:

> Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura. (p.110).

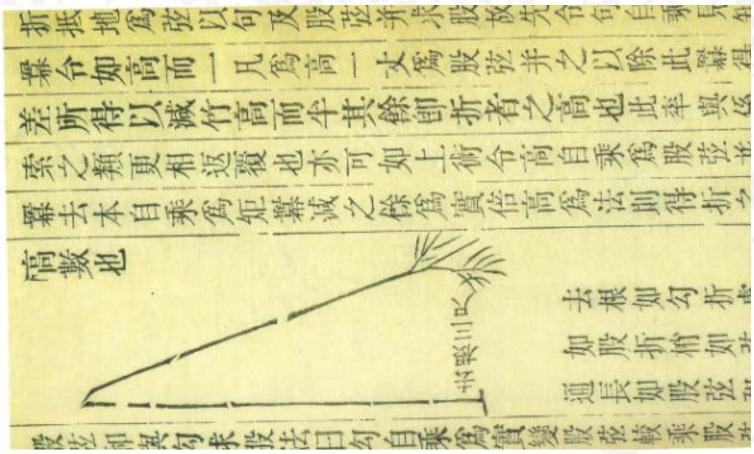


Figura 15. Representación gráfica del problema el bambú roto.

Aquí se combina el teorema de Pitágoras con la resolución de ecuaciones cuadráticas, donde el problema implica aplicar la ecuación $x^2 + 3^2 = (\ 10 - x)^2$

2.9.5. El teorema de Pitágoras en el mundo Griego.

En la civilización griega se destaca una figura legendaria, él le dio la validez, la rigurosidad y el fundamento lógico-deductivo al teorema que lleva su nombre, el gran “Pitágoras” (580-500 a. C.) que según Mankiewicz (2000) fue contemporáneo con Buddha, con Confucio, Mahavira y Lao-zi. Señalan (Esteban et al, 1998) que fue contemporáneo, también, con Tales de Mileto.

Conforme lo dicho por Esteban et al, (1998) y Mankiewicz (2000), Pitágoras después de obtener profundos conocimientos de culturas como la egipcia y la babilónica, se marchó a Crotona al sur de Italia, a la isla de Silicia, allí fundó una comunidad secreta de culto órfico que tuvo una enorme influencia debido a las tradiciones platónicas.

La escuela pitagórica adoptó la razón y la inteligencia como la verdadera forma de obtener el conocimiento y no a través de la experiencia, pues la observación y los sentidos pueden dar resultados falsos. Este pensamiento hizo revolucionar la geometría. (Esteban et al, 1998), sin embargo, el objetivo de los pitagóricos respecto a las matemáticas ha sido acuñado como:

> Establecer un sistema coherente en el que todos los resultados se siguiesen directamente de un número reducido de axiomas o postulados. La geometría pitagórica se convierte así en el arquetipo de todos los sistemas deductivos y es, por tanto, la primera matemática genuina. (p.37).

Por otro parte, resulta oportuno resaltar aquel momento de júbilo que sintió Pitágoras, al haber hallado y demostrado el teorema que lleva su nombre y lo llevó a la inmortalidad, el famoso teorema de Pitágoras. Señala González (2008) refiriéndose a Pitágoras:

> Según relatos de diversos escritores –Plutarco, Vitrubio, Ateneo, Diógenes Laercio, Proclo y otros–, Pitágoras calibró el alcance de la demostración del teorema al que la historia bautizaría con su nombre y entusiasmado por el hallazgo ordenó una hecatombe –el sacrificio de cien bueyes a los dioses– como muestra de alegría y gratitud. (p. 112).

Este descubrimiento geométrico agregó estatus, respeto, admiración y reconocimiento a Pitágoras, llevando a los pitagóricos a tener más seguidores y creyentes de su filosofía.

En el pueblo griego hubieron algunos filósofos que se destacaron por el teorema de Pitágoras, que proporcionaron un cambió y surgimiento de un nuevo sistema numérico que causó incertidumbre, los irracionales, dando un nuevo paso a la medida geométrica, a lo infinito que éste encierra. Además, fue el germen que proporcionó el desarrollo de una nueva geometría, dotado de axiomas, postulados y definiciones que permitieron demostrar de una manera lógica y consistente las demostraciones de los teoremas como los presentados por Euclides.

2.9.6. Las demostraciones de Pitágoras en el pueblo griego.

Existen algunas formas que Pitágoras posiblemente haya usado, al realizar sus demostraciones como disecciones geométricas, comparaciones de áreas y principios de la proporcionalidad, pero limitado a cantidades inconmensurables.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Loomis, (1968) y González (2008) coinciden con una prueba empírica que tiene en cuenta la disección y la comparación de áreas, esta se presenta a continuación: Al comparar las áreas de las dos primeras figuras, se observa que los dos cuadrados iniciales son congruentes y de área $(a+b)^2$; en el primero, se encuentra inscrito un cuadrado de área c^2, y en el otro, se encuentran inscritos dos cuadrados, uno de área a^2 y de área b^2 respectivamente; el cuadrado de área c^2 es igual a la suma de las áreas de los cuadrados a^2 y b^2. Obsérvese que, la sustracción de las áreas de los 4 triángulos rectángulos escalenos, iguales a las áreas de los 2 rectángulos, se traduce a la siguiente expresión $\left(2ab = 4\left(\frac{ab}{2}\right)\right)$, en ambos cuadrados de área $(a+b)^2$, por lo tanto, al comparar las áreas de los cuadrados resultantes queda demostrado el teorema de Pitágoras como la figura dada a la derecha y su proceso matemático formal.

$$(a+b)^2 - 2ab = c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = c^2$$

$$a^2 \cancel{+ 2ab} + b^2 \cancel{- 2ab} = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

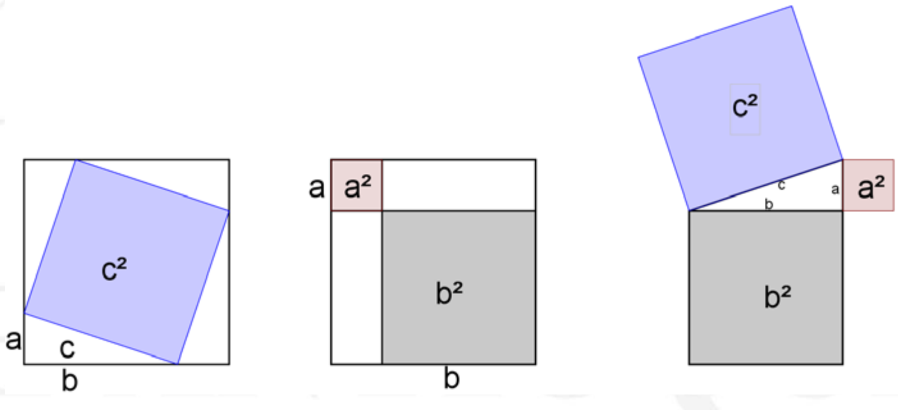


Figura 16. Demostración visual dada, presuntamente por Pitágoras

Lo anterior, también es posible demostrarlo de manera formal al igualar dos ecuaciones, la primera, pertenece al cuadrado inicial de área S_1, conformada por el cuadrado inscrito y sus 4 triángulos rectángulos escalenos, donde tiene la siguiente área total:

$$S_1 = \mathrm{c}^2 + (4\frac{ab}{2}) \;\; \rightarrow \;\; S_1 = \mathrm{c}^2 + 2\mathrm{ab} \rightarrow S_1 = (a+b)^2$$

La segunda figura, es un cuadrado que tiene la misma área que el anterior, su área total es $S_2 = \mathrm{a}^2 + b^2 + 2\mathrm{ab}$, luego, igualamos las dos áreas $S_1 = S_2$ y se obtiene que:

$$\mathrm{c}^2 + \cancel{2\mathrm{ab}} = \mathrm{a}^2 + b^2 + \cancel{2\mathrm{ab}} \text{ De donde } \quad \mathrm{c}^2 = \mathrm{a}^2 + b^2$$

Otra forma para demostrar el teorema de Pitágoras, utilizando la teoría de la proporcionalidad, a través de la semejanza de triángulos, es presentada a continuación:

El triángulo ABC, AHC y BHC, de la siguiente figura:

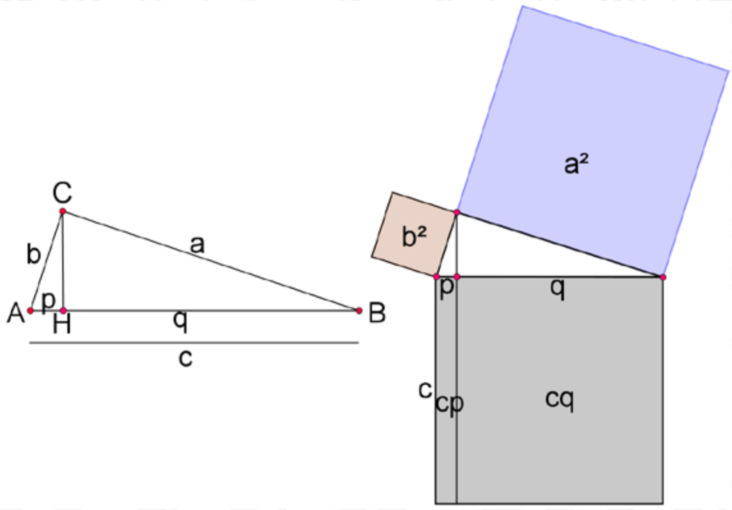


Figura 17. Demostración dada, supuestamente por Pitágoras.

Sea el triángulo rectángulo ABC. El segmento CH es la altura relativa a la hipotenusa, que determina los segmentos p y q, proyecciones de los catetos a y b respectivamente.

Entonces, por semejanza entre ABC y AHC

$$\frac{b}{p} = \frac{c}{b}$$

Donde

$$b^2 = c.p$$

Ahora se tiene que, por semejanza entre ABC Y BHC

$$\frac{a}{q} = \frac{c}{a}$$

Donde

$$a^2 = c.q$$

Sumando a^2con b^2, se obtiene:

$$a^2 + b^2 = c.p + c.q$$

$$\mathrm{a}^2 + b^2 = c.p + c.q$$

Ahora, aplicando la propiedad distributiva,

$$\mathrm{a}^2 + b^2 = c(p + q)$$

Reemplazando $(p + q) = c$, se obtiene

$$\mathrm{a}^2 + b^2 = c(c)$$

Esto es:

$$\mathrm{a}^2 + b^2 = c$$

Muchos historiadores coinciden en que Pitágoras demostró el teorema, que lleva su nombre, de diferentes formas; sin embargo, siempre buscó la manera de no caer en las razones inconmensurables, porque según González (2008):

> La aparición de la inconmensurabilidad sometió el pensamiento pitagórico a un doble desafío, uno filosófico ya que la irracionalidad atentaba contra el sincretismo aritmético-físico que establecía la preeminencia del número como

esencia del Cosmos y otro matemático ya que a partir de entonces en geometría era imposible medir siempre con exactitud. (p. 112).

Por lo tanto, llevó a los Pitagóricos a una crisis filosófica, arraigados a la doctrina del misticismo numérico, que exaltaba a los números enteros, implícito (los racionales), como la esencia de todas las cosas, como lo más sagrado, pues para ellos explicaban la razón de las acciones de cosas y su forma física, la naturaleza del ser, la funcionalidad del mundo, es decir, dilucida toda la cosmología. En este mismo sentido, todo se desequilibra con las cantidades inconmensurables, como son los números irracionales; se cree que éstas fueron, inicialmente, reconocidas por la diagonal del cuadrado de lado 1, cuyo valor es $\sqrt{2}$, la sección aurea o número de oro $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, y el pentagrama místico. Significa entonces que los pitagóricos no pudieron expresar esa cantidad no conmensurable como razones de dos enteros. Surgieron entonces, sistemas extraños, otro conjunto numérico que no podían explicar y expresar. Esto produjo un nuevo giro, donde el uso y razón de los números enteros perdía contra la imponente magnitud geométrica, llevando a la secta Pitagórica al decaimiento y hacia una forma de ver lo infinito.

2.9.7. El teorema de Pitágoras en la academia de Platón.

Existe una demostración muy sencilla del teorema de Pitágoras y se inicia a partir de la construcción de un cuadrado y su diagonal, es un caso particular del triángulo rectángulo isósceles, éste surgió en el diálogo que establece Sócrates (300 a.C.) con el esclavo del Menón (82d–83e), donde se plantea el problema de la duplicación del cuadrado. En comentario de González (2008) la razón de este el problema es la siguiente:

Sustentar la doctrina de la reminiscencia y la inmortalidad. Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo son de índole aritmética, pero "resultando la imaginación aritmética inexacta", Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico (p. 113).

En este orden de ideas se pueden citar a Londoño y Jurado (2005), cuando se refieren a lo anteriormente mencionado:

El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los Diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea éste la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de Sócrates sino por propia reflexión. (p. 26).

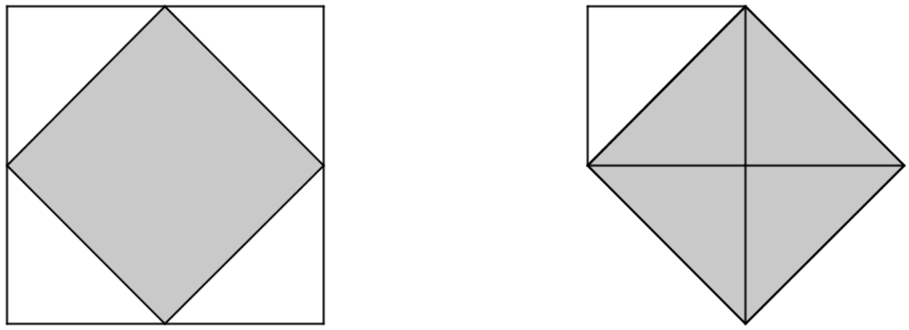


Figura 18. Soluciones de la duplicación del cuadrado.

El problema de la duplicación del cuadrado tratado por Sócrates relaciona completamente el triángulo rectángulo isósceles, permitiendo ver fácilmente desde la visualización la demostración del teorema de Pitágoras. Según la figura anterior, a la izquierda; se observa un cuadrado sombreado inscrito en otro cuadrado sin sombrear, los vértices del cuadrado inscrito coinciden con los puntos medios del cuadrado sin sombrear; a la derecha se observa un cuadrado sombreado, uno de sus lados coincide con la diagonal un cuadrado sin sombrear. En esta última figura, obsérvese que sobre la diagonal del cuadrado sin sombrear se construye un cuadrado sombreado de área doble al cuadrado sin sombrear. Esto se logra a través de procedimientos geométricos, mediante la construcción de diagonales. Las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles y sus diagonales permiten comparar el área y establecer la relación de igualdad que existe entre ellas, evidentemente, se logra observar que el área del cuadrado, a su vez, se dividen en dos triángulos isósceles de igual área.

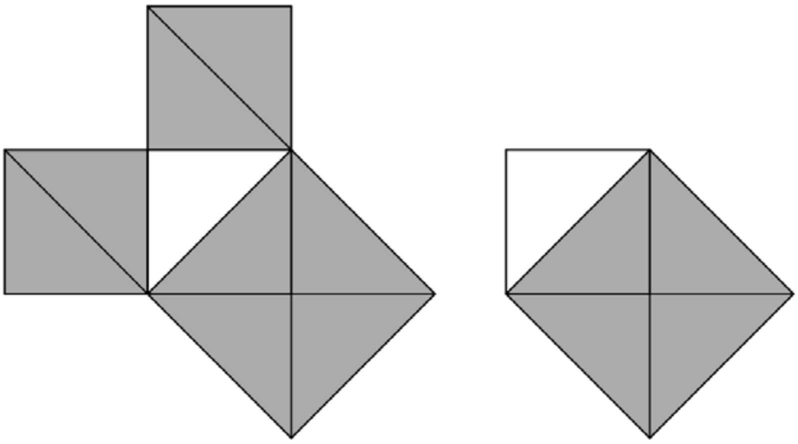


Figura 19. Relación entre las áreas del triángulo rectángulo isósceles y el cuadrado.

Parece ser que Sócrates utilizó un método que explica la necesidad y el porqué de sus preguntas, a continuación De la Torre (2003) expone:

> El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a des-cubrir, a des-velar, la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz. (p.101).

Así que esta forma de preguntar permite provocar confusión y duda al entrevistado sobre sus propias concepciones, llevando a confrontar sus ideas previas con las ideas nuevas que surgen producto de su meditación y reflexión, una forma de problematizar las ideas. En términos generales, busca llevar al estudiante a un estado donde cree saber la respuesta, reflexiona y reconsidera no saber nada, produciendo una contradicción interna, pero con la finalidad de motivar a encontrar la verdad. Ciertamente es importante este tipo de indagación para este trabajo, porque permite de alguna forma establecer un dialogo inquisitivo que estimula el razonamiento.

Resulta oportuno aclarar que Platón apoya la doctrina de la reminiscencia y la inmortalidad, así lo afirma González (2008) cuando alude lo siguiente:

> Sócrates y un esclavo mantienen una conversación, en la que mediante una concatenación de preguntas de aquél, entrelazadas heurísticamente con las respuestas de éste, se resuelve el problema. Las primeras respuestas del esclavo son de índole aritmética, pero "resultando la imaginación aritmética inexacta", Sócrates reconducirá el diálogo, induciendo un tratamiento exclusivamente geométrico. (p.113).

Esta forma de indagar permite que el entrevistado encuentre la verdad de sus conceptos, que guarda oculto en su alma, y que mediante su pensamiento, y guiado por un dialogo inquisitivo, encuentre la verdad, fruto de toda la reflexión que experimentó durante la entrevista.

Por otro lado, considerando otros aportes de Platón, este encontró la forma de expresar las ternas Pitagóricas a partir de una ley de formación, (Gonzáles 2008);

m	a	b	c
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37

$$a = 2\mathrm{m}$$
$$b = m^2 - 1$$
$$c = m^2 + 1$$

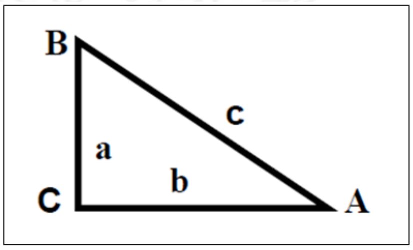


Figura 20. Ternas Pitagóricas expresadas por Platón.

2.9.8. El Teorema de Pitágoras en los estudios de Euclides.

En Grecia hubo otro gran erudito matemático, que sin duda alcanzó la fama, Euclides (325-225 a. C.) que con su trabajo, la más importante y singular obra de las matemáticas, titulada “los elementos”, dio un aporte significativo a la geometría.

Se considera que los Elementos fue, según Mankiewicz (2000), un libro de texto por excelencia, es un compendio de trabajo que recoge resultados de otras fuentes para ponerlos en una estructura organizada que ha sido el modelo deductivo y lógico para presentar teorema y demostraciones.

Euclides, sin lugar a dudas, le dio al teorema de Pitágoras la connotación formal, con cuidadosas proposiciones y elementos de la geometría plana que justifica cada paso de su demostración. De hecho, según González (2008) se basó de los siguientes tópicos y propiedades geométricas:

- La construcción de cuadrados sobre segmentos (I.46).
- Ángulos adyacentes que suman dos rectos (I.14).
- El primer teorema de congruencia de triángulos (I.4).
- La relación entre triángulos y paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas (I.36, I.41).
- Los paralelogramos que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas tienen la misma área.

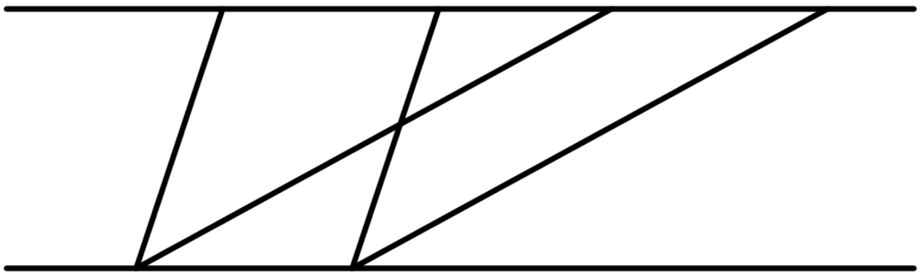


Figura 21. (Elementos, I.36).

- "Si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y están situados entre las mismas paralelas, el área del paralelogramo es el doble de la del triángulo".

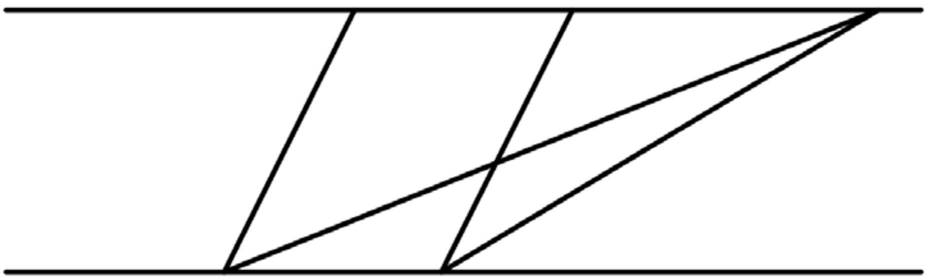


Figura 22. (Elementos, I.36).

La demostración del el teorema de Pitágoras en la proposición I.47 de "Los Elementos" de Euclides, lo enuncia de la siguiente manera: "En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto".

A partir del compendio realizado de trabajos anteriores, y precisa González (2008), que anuncia y demuestra el Teorema de Pitágoras de una forma precisa, elegante y con un bagaje de conocimiento geométrico más pertinente. Es en realidad una demostración netamente geométrica basándose en las comparaciones de áreas, a través de procedimientos geométricos. A continuación se presenta su demostración a partir de las propiedades anteriores y de otros temas.

Dada la figura presentada a continuación:

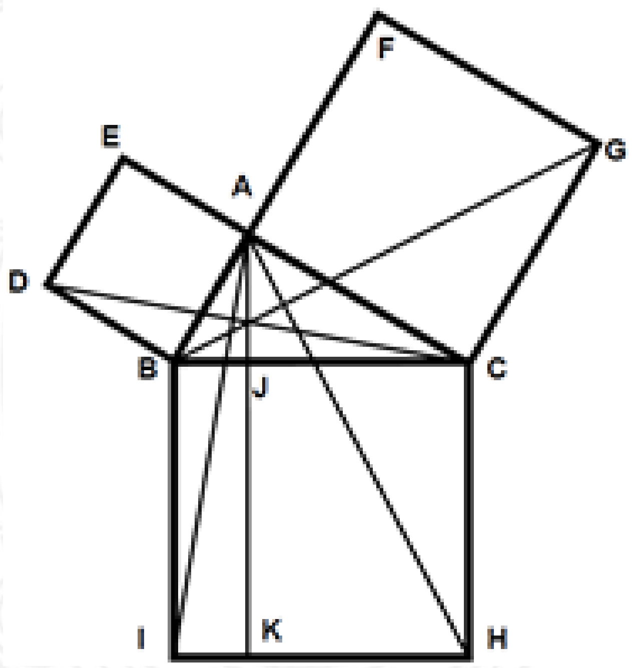


Figura 23. Demostración del teorema de Pitágoras planteada por Euclides

Se tiene que:

1. Los triángulos DCB y ABI son iguales ya que AB=BD, BI=BC y el ángulo B del triángulo DCB es igual al ángulo B del triángulo ABI.
2. El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.
3. El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI ya que tienen la misma base y están situados entre las mismas paralelas.

De modo que se verifica:

1. ▭BIKJ = 2⊿ABI = 2ΔDCB = □ABDE.

Razonando de forma análoga se tiene:

2. ▭CHKJ = 2⊿AHC = 2⊿BCG =□ACGF.

De donde resulta:

3. □ABDE + □ACGF = ▭BJKI + ▭CJKH

Por lo tanto,

4. □ABDE + □ ACGF = □ BIHC.

Así que Euclides con su gran ingenio, explicó lógicamente este teorema con un procedimiento más formal, basándose a la comparación de áreas de figuras planas, justificando paso por paso, a través de propiedades y teoremas que él ya conocía relacionados con las áreas de triángulos y paralelogramos mediantes paralelas, y otros elementos elementales de la geometría plana. Es determinante cómo Euclides agudiza su talento utilizando elementos netamente geométricos, sin acudir a lo aritmético y algebraico, ni tampoco a la relación de proporciones, para llegar a la demostración de este legendario teorema.

3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo, se describe el paradigma de investigación, el método y su respectiva fundamentación, además, se presentan los instrumentos que mediaron el estudio, su propósito y el análisis de la información.

3.1. PARADIGMA

Este trabajo de investigación se establece desde una perspectiva cualitativa, dado que intenta comprender, interpretar y explicar, de una forma detallada y profunda, las realidades y las experiencias, referentes a los procesos de razonamiento expuestos por los estudiantes.

El estudio ha analizado los hallazgos obtenidos a lo largo de la investigación, desde los fenómenos cotidianos, de las experiencias vividas, los comportamientos, emociones y sentimientos, (Strauss y Corbin, 2002). En este mismo sentido, desde la realidad y la experiencia de las personas, pretendemos analizar detalladamente qué tipo de razonamiento exhiben los estudiantes cuando se aproximan a comprender el teorema de Pitágoras, desde los niveles 0, I, II, III de razonamiento.

Los razonamientos manifiestos por los estudiantes, se logran evidenciar a través de su participación en actividades como entrevistas, producciones escritas, socializaciones y observaciones; en todas éstas prevalece un componente que posibilita definir, si existe un nivel de apropiación conceptual significativo, frente a las construcciones mentales llevadas a cabo por un estudiante cuando se aproxima a la conceptualización teorema de Pitágoras, dicho componente es el lenguaje, para el cual, su nivel de refinamiento indica si se logran o no los procesos de razonamiento esperados. De acuerdo con lo anterior, cabe anotar, que el papel del lenguaje es crucial en este proceso, pues cuando es amplio y diversificado permite que el estudiante demuestre su nivel de comprensión al momento de exhibir sus razonamientos frente a un concepto.

Actividades como las mencionadas anteriormente, se constituyen además, en instrumentos a través de los cuales se obtienen los datos necesarios para realizar el proceso de triangulación y análisis de la información, que a su vez, contribuyen en gran medida a la validez y confiabilidad del estudio; es de anotar, que este proceso siempre esta mediado por tres componentes que definen significativamente el objeto de la investigación: la pregunta, el objeto de estudio y el objetivo, los cuales focalizan y delimitan todas las actividades llevabas a cabo durante el proceso investigativo.

El estudio cualitativo, en el cual se fundamenta la presente investigación, ha sido argumentado, de acuerdo con lo propuesto por Strauss y Corbin, (2002) "(…) para obtener detalles complejos de algunos fenómenos tales como sentimientos, procesos de pensamiento y emociones, difíciles de extraer por otros métodos de investigación más convencionales" (p. 13).

En relación con la afirmación anterior, este trabajo ha posibilitado el análisis detallado del fenómeno, en este caso, los procesos de razonamiento en las personas, enfocándose en la manera cómo razonan los estudiantes del grado quinto, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante el establecimiento de comparaciones entre áreas, en un contexto geométrico.

3.2. TIPO DE ESTUDIO

La presente investigación ha hecho uso del método estudio de caso, puesto que, permite comprender de una forma amplia y detallada la singularidad de cada individuo, a partir de un análisis profundo enfocado en los razonamientos expuesto por cada estudiante, cuando se aproximan a la comprensión del concepto objeto de estudio.

El estudio de caso, según Stake (1999) se puede definir como, "(…) el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes" (p. 11); y señala además que, aunque "el estudio de caso es una base pobre para poder generalizar. Sólo se estudia un caso, o unos pocos casos, pero se estudian en profundidad (…)" (p. 19).

Por lo tanto, resulta oportuno considerar que este método es pertinente para el trabajo, a razón que concede compresión para la unicidad, el contexto individual y para enfatizar en la singularidad de cada caso, a través de un proceso detallado de concepciones y relatos reflexivos por parte de los estudiantes, producto de sus razonamientos, y manifestados en cada una de las actividades en relación al objeto de estudio. Es evidente entonces, que el estudio de caso, puede tener uno o unos pocos participantes, para profundizar, analizar y comprender sus procesos de razonamiento, lo que sucede con ellos y cuál es el momento en que razonan frente al concepto.

Por otro lado, Stake (1999) señala varios tipos de casos: el estudio colectivo de caso, estudio instrumental de caso y estudio intrínseco de caso, aun así, este trabajo de investigación opta por el primero dado: el estudio colectivo de caso, porque se toman varios casos particulares, donde cada caso es un instrumento que permite aprender sobre un fenómeno particular. Además, entre ellos debe encontrarse una relación coordinada respecto al objeto de investigación. De la misma manera, se ocupa por trabajar con tres casos de forma individual, a la vez que, se va guardando la misma relación con lo que se quiere investigar, en este caso, el razonamiento de los estudiantes sobre el objeto de estudio en cuestión.

Para la presente investigación se escoge a tres participantes, para los cuales sus razonamientos son evidenciados a través de las actividades propuestas durante el estudio, que han sido objeto de análisis e interpretación respecto la caracterización de los niveles en qué razona cada uno y cómo se logra el avance al nivel inmediatamente superior, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través de procedimientos comparativos entre áreas.

3.3. CONTEXTO

La investigación ha sido realizada en una institución educativa de carácter público del municipio de Apartadó, ubicada en un lugar urbano. El colegio está en un proceso de plan de mejoramiento, acogido por el programa “Todos a aprender” auspiciado por El Ministerio de Educación Nacional, debido a bajo niveles de competencias en las pruebas censales (grado 11º, 9º y 5º). El colegio atiende a la población estudiantil que va desde el estrato 0 hasta el estrato 2, sin ninguna distinción, con alto énfasis en la inclusión social.

En relación al trabajo de investigación allí elaborado, el estudio mismo ha procurado una caracterización de los procesos de razonamiento de tres estudiantes de grado 5º, buscando que construyeran una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras. Es de señalar, que el estudio parte de una necesidad reflejada, esencialmente, por la dificultad manifiesta en pruebas censales por los estudiantes para comparar áreas de figuras planas. Ellos establecían nulamente una relación adecuada cuando se hace comparación de áreas y figuras como triángulos y cuadrados, paralelogramos y rectángulos, para ese momento disciernen inadecuadamente, que el área de una figura geométrica podría ser el doble o la mitad de otra.

El presente estudio toma como objeto de análisis un concepto que ha trascendido a través de los tiempos y que encierra elementos y propiedades enriquecedoras para hacer procesos geométricos, por medio de procedimientos de carácter comparativo y relacional entre áreas, de forma significativa. El trabajo se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, mediante la construcción de descriptores de nivel, que permiten estratificar el grado compresión que los estudiantes logran en relación al objeto de estudio en cuestión.

3.3.1. Participantes.

En el trabajo de campo participaron tres estudiantes del grado 5°, de una institución educativa perteneciente al municipio de Apartadó. Los estudiantes se han caracterizaron por pertenecer a un nivel socioeconómico bajo. En lo académico, ellos se distinguen por su participación en los eventos que han de ver con actos culturales, académicos y sociales; son niños muy alegres y emprendedores, con disposición y motivación manifiestas para aprender.

Por otro lado, la elección de los participantes en la investigación, se hizo en dos etapas: la primera fue la de indagar con los docentes de matemáticas de 5º grado, acerca del desempeño de los estudiantes en el área de geometría, posteriormente, se hace extensa la invitación a 18 estudiantes, de los cuales 15 de ellos asistieron. En la segunda etapa, se asignaron dos actividades, en función con el reconocimiento de algunos elementos y propiedades del triángulo, rectángulo y cuadrado; la siguiente, tenía que ver con la conceptualización del área y la superficie. Se realiza una observación participante donde se ha propuesto por actividad una serie de preguntas que se van leyendo en voz alta, para después ir recolectando las respuestas por parte de ellos en forma oral y escrita. El objetivo ha sido el de realizar una observación detenida de las intervenciones de los participantes y conocer sus escritos respecto a los temas trabajados, ello con el fin de apreciar, la forma cómo expresan sus ideas, el entendimiento de las preguntas, lo acertado en las respuestas, su razonamiento y la actitud en clase. De este trabajo se seleccionaron tres estudiantes para nuestro estudio, los cuales tienen como seudónimo: Andrés, Santiago y Sara.

La institución educativa cuenta con una planta física en buen estado, tiene segundo piso, con 41 aulas escolares, tres salas de sistemas, tres placas polideportivas, una biblioteca, tres comedores estudiantiles, dos aulas virtuales, un laboratorio de matemáticas. En lo que respecta a la planta docente, la institución cuenta con 105 maestros, seis coordinadores, un rector. Imparte clases a 3.600 alumnos aproximadamente, los cuales están distribuidos en cuatro jornadas: mañana, tarde, nocturno y sabatino. Además, cuenta con 5 personas para servicios generales y 4 para el servicio de seguridad y vigilancia de tiempo completo.

3.4. FUENTES DE RECOLECCIÓN DE DATOS

En esta investigación la fuente de recolección utilizada fue la observación, la entrevista y el material escrito.

3.4.1. Observación.

Sé utilizó la observación como método de recolección de información (Stake, 1999), dado que conduce a una mejor comprensión del caso, permitiendo por un lado, planificar con detalles, resaltando las categorías o el tipo de actividades que son representativas de los temas, y por otro lado, trabaja con episodios de relación única para formar una historia o una descripción única del caso.

Resulta importante indicar que esta clase de fuente de información registra cada acontecimiento, comprobando cada suceso o situación que pasa por el sujeto, y que según Stake (1999) manifiesta una descripción relativamente incuestionable para posteriores análisis e informe final.

Por lo tanto, es pertinente esta fuente de investigación, en el sentido mismo que permite la confirmación de las categorías emergentes a partir de las actividades de los participantes, a la hora de entrevistarlos, de analizar sus actividades escritas, de su desenvolvimiento en cada situación, sus gestos y movimientos. La observación fue recolectada en audio, videos, y apuntes escritos, con previa autorización de los acudientes de los participantes. En suma se han transcrito en formato digital, para su respectivo análisis.

3.4.2. Entrevistas.

La entrevista, según Stake (1999), es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples. El entrevistador necesita tener un plan previo bien detallado de muy buenas preguntas y buenos informantes que tengan el nivel adecuado, para conseguir una buena entrevista.

Se destaca para este caso, la utilización de la entrevista socrática, puesto que se adapta al modelo educativo de van Hiele y permite a través de las preguntas semi-estructuradas, tener una experiencia de aprendizaje individual con el estudiante, lo cual conduce, desde cierta parte, a un logro en la evolución en su razonamiento, y por otra, a detectar el nivel de razonamiento en que se encuentra el participante, (Jaramillo y Campillo, 2001). Esto ha posibilitado en la investigación, la reformulación de descriptores y sus niveles, según hipótesis previas sobre ellos, y desde luego ir mejorándolos y perfeccionándolos cada vez más.

Se han realizado entrevistas de tipo semiestructurada a cada una de los estudiantes, respecto a una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras. En el transcurso de las entrevistas se les hizo una serie de preguntas que progresivamente los llevaron a razonar respecto al objeto en cuestión, con ayuda de la visualización. Esto ha concedido una experiencia de aprendizaje para avanzar en su nivel de razonamiento. En las entrevistas se hizo uso del registro en voz y audio para grabar la información y transcribirla.

3.4.3. Documentos escritos.

Las producciones escritas, como un documento donde se narran las construcciones y se da cuenta del emerger de sus argumentos, han sido aprovechadas en la presente investigación, con el ánimo de ratificar los datos en relación con otras fuentes. Además, las actividades escritas, fomentan la reflexión y bajo la característica de ser preguntas abiertas, alejadas de respuestas lacónicas, que facilitan el hacer un mejor análisis de sus razonamientos. Todos los trabajos escritos se escanearon y archivaron de forma digital.

3.5. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El análisis de esta investigación inicia de la siguiente manera:

a) Comienza con la primera actividad realizada con algunos estudiantes de los diferentes grupos de 5° grado. Se hizo una lectura del análisis de la observación y el material escrito producido por ellos, con el propósito de elegir los tres estudiantes para el estudio de caso.

b) La trascripción, lectura y el análisis de los datos por las actividades escritas correspondientes al nivel, 0, I, II, III de razonamiento, se hicieron, primero para triangular.

c) La información entre las demás fuentes de datos, y segundo, verificar descriptores hipotéticos, teniendo en cuenta la forma de razonar, frente a la comprensión del concepto objeto de estudio en cuestión. Además, las actividades escritas contribuyeron al mejoramiento de las entrevistas.

d) La transcripción, lectura, análisis e interpretación de las entrevistas individuales se hicieron para los niveles 0, I, II, y III de razonamiento. La entrevista fue transcrita, analizada e interpretada, en apoyo a la refinación de los descriptores y preguntas, con el fin de reestructurar nuevamente la entrevista y aplicarlo al siguiente caso, es decir, que la primera entrevista, se realizaban las correcciones de fondo, con el objetivo mejorar las preguntas de la entrevista y los descriptores de nivel; esto siempre se hacía a medida que iban avanzado en el razonamiento. Por tanto, cada vez que se realizaba una entrevista resultaba en una mejor comparada con la anterior. Cabe recalcar que este proceso de refinamiento de preguntas dio dos resultados significativos para la investigación: el diseño de un guion entrevista de carácter socrático y el diseño de una actividad escrita apoyada en la entrevista.

e) La lectura y el análisis de las observaciones hechas en cada una de las acciones o actividades realizadas en las entrevistas, producción escrita y en momentos de participación. Estas observaciones fueron en algún momento tomadas en videos para dar más fuerza y apoyo sobre la evidencia a las notas de las distintas observaciones.

f) El análisis conjunto de cada una de las fuentes de información, se ha hecho mediante la triangulación de cada uno de los métodos de estudio de caso, es decir, la observación, entrevista y material escrito, con el fin constatar categorías emergentes de mayor fuerza y frecuencias con las preestablecidas, permitiendo una mejor interpretación y conclusión para el estudio. En realidad, esta estrategia de triangulación como lo denomina Stake, (1999) se puede utilizar “para conseguir la confirmación necesaria, para aumentar el crédito de la interpretación, para demostrar lo común de un aserto” (…). (p.

98). Siguiendo con lo anterior, esto favorece a una coherencia lógica de los resultados destacando su validez.

Es indispensable agregar que, para cada nivel de razonamiento se hizo su respectiva triangulación; esto consistió en analizar y comprobar descriptores hipotéticos establecidos y las categorías emergentes, en las diferentes fuentes de información, analizando la relación que guardan entre sí y su correspondencia. Este proceso ha permitido caracterizar el razonamiento en cada uno de los niveles en cuanto a la comprensión del concepto objeto de estudio.

3.6. CAMINO METODOLÓGICO

El trabajo realizado en esta investigación ha seguido una forma secuencial, este proceso esta enumerado por doce momentos relevantes en que en los que se tomaron decisiones y tareas metodológicas, iniciando desde la selección de los participantes hasta la culminación del análisis.

1. Primero que todo, antes del trabajo de campo, se hicieron ciertas apreciaciones relevantes para orientar las actividades dirigidas y las fuentes de información, aquí me refiero al marco teórico, más precisamente, la parte descriptiva del modelo que estriba en los niveles de razonamiento. Este proceso se ha fundamentado en la construcción de descriptores hipotéticos en cada uno de los niveles 0, I, II, III, respecto a la aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante la comparación de áreas.
2. Se seleccionaron tres estudiantes del grado 5, producto de una actividad escrita que se desarrolló en la institución, en tiempo extracurricular. Fue realizada en colaboración con cada

docente 5º, donde han invitado a los estudiantes a participar de una actividad diagnóstica, con el fin de conocer sus concepciones y razonamientos de algunas figuras geométricas planas como triángulo, rectángulo y cuadrados, y además, el área y superficie de figuras planas. Los estudiantes asistentes fueron 15 en total.

3. La realización de una entrevista semiestructurada de carácter socrático para el nivel 0, con cada uno de los participantes. Es de aclarar que no se hizo de forma paralela, primero, se hizo el proceso de análisis e interpretación de la entrevista transcrita, refinamiento de preguntas y descriptores para ir refinando el instrumento. Aquí se hicieron notas de observación para cada una de las entrevistas.

4. Se da inicio con la actividad escrita perteneciente al nivel 0 de razonamiento, para todos los participantes, con el fin de constatar algunas respuestas de la entrevista previa y avances en su razonamiento. Se resalta, en este caso, la entrevista previa, con énfasis socrático, ya que proporciona al entrevistado, una experiencia de aprendizaje, una forma de interactuar con las ideas previas, con ideas nuevas y aporta información relacionada al tema en cuestión, orientación de un método familiar, el uso del lenguaje y un dialogo inquisitivo, pues, esto permite al estudiante una evolución en su razonamiento, (Jaramillo y Campillo, 2001). Por lo tanto, se ha ejecutado una actividad escrita para analizar, de cierta forma, el avance en su razonamiento y afirmar su aprendizaje. Además, mejorar preguntas y tener en cuenta inquietudes y dificultades, para aclararlas, nuevamente, con la una nueva sesión de la entrevista socrática.

5. Se hizo un análisis de los datos preliminares proporcionados por los datos de la entrevista, actividad escrita y observaciones, para ir triangulando, y al mismo tiempo reforzando y enriqueciendo descriptores, consolidando las interpretaciones y conclusiones de su razonamiento en este nivel, para cada uno de los casos.

6. Se realiza la segunda entrevista de carácter socrático a cada uno de los estudiantes escogidos, ésta tuvo en cuenta los descriptores de nivel I, se hace de nuevo con los pasos similares y procesos de la entrevista anterior, (Entrevista, análisis de la información, mejoramientos de los descriptores como las preguntas, después de, se toma el siguiente caso) y así sucesivamente. Es importante anotar que, este proceso de refinar descriptores y preguntas da sentido y mejora la entrevista; también, se hicieron nuevas observaciones detalladas a los participantes.

7. El trabajo que después ha sido impulsado es una actividad escrita para los participantes; la misma, tuvo en cuenta los descriptores de nivel I de razonamiento. Aquí se han analizado los datos, se tuvieron en cuenta las categorías que emergieron para contrastar con los descriptores hipotéticos correspondiente a este nivel, este proceso facilitó refinar descriptores y, también, preguntas. Se hicieron nuevos apuntes de observaciones de esta actividad.

8. Se hizo una nueva entrevista socrática para el nivel II de razonamiento, la cual hace más énfasis con otras preguntas, más detenimiento, análisis, sus respectivas conclusiones y mejoras, semejante al proceso anterior, para luego ser usado en otro caso, y así llegar hasta los tres participantes. Desde luego, se tuvo en cuenta las observaciones en cada una de las entrevistas.

9. Se realiza la actividad escrita perteneciente al nivel II de razonamiento para los participantes, se toman los apuntes respectivos, cuando la pregunta se entendía inadecuadamente, para reformularla y después un nuevo análisis con más detenimiento para ir renovando preguntas y mejorar descriptores.

10. Para el nivel III de razonamiento, se realiza una nueva entrevista iniciando, por su puesto, con preguntas introductorias, de ambientación, retomando ideas previas referentes al nivel anterior hasta llegar a hacer preguntas de clasificación donde se han relacionado

propiedades. Se hace selección de estas mismas, se enriquecen y se refinan los descriptores propuestos.

11. Se efectúa una actividad escrita para reafirmar conceptos, ideas, preguntas y avances en el razonamiento. Igualmente, se elaboran los análisis y las interpretaciones, y su correspondiente relación con los descriptores hipotéticos de nivel III de razonamiento, además de las notas de observaciones. De esta forma se da por finalizado esta etapa, que resulta en un trabajo de campo con los tres estudiantes.

12. Se concluye con la realización de la codificación y categorización de la información para describir el proceso de razonamiento de los tres estudiantes en cada paso por los niveles 0, I, II, III. respecto al acercamiento al teorema de Pitágoras mediante la comparación de áreas presentada en el capítulo 4, análisis de información.

3.7. ENTREVISTA SOCRÁCTICA

A continuación se presenta la entrevista socrática resultado del proceso de refinamiento gracias a la intervención y trabajo de campo.

3.7.1. Niveles, descriptores de niveles y actividades

Los descriptores de nivel de van Hiele son un conjunto de acciones principales, que tienen características propias y expresan de manera condensada, los fundamentos conceptuales que debe poseer un estudiante respecto a un objeto de estudio; permitiendo reconocer cada uno de los niveles de razonamientos al abordar una actividad matemática. En este sentido, los descriptores de nivel conllevan a reconocer en qué nivel de razonamiento se encuentra el alumno con relación a un determinado concepto matemático.

Es necesario aclarar que durante el proceso de razonamiento, existe un estado de transición para pasar al nivel siguiente, y simultáneamente, está limitado por descriptores de separación, que es aquel razonamiento en que el estudiante todavía está en proceso de comprensión de dicho concepto, pues pertenece a nivel siguiente, sin embargo, se hace implícito en el nivel anterior "*n*", pero explícito en el nivel siguiente "*n + 1*", Por consiguiente, es necesario que el estudiante evidencie explícitamente este pensamiento al nivel inmediatamente superior.

El proceso de razonamiento de un estudiante es evidente a través de actividades intencionadas, dirigidas y guiadas por descriptores de nivel para observar su desempeño; estas actividades pueden ser un test, un cuestionario con preguntas abiertas, y desde luego, una entrevista semiestructurada con las particularidades que se han descrito en esta investigación.

Por lo tanto, en la aplicación del modelo de van Hiele se hace necesario establecer una serie de descriptores para cada uno de los niveles desde 0, I, II, y III, con el fin de detectar la validez de cada una de ellos, los cuales promueven, en los estudiantes, una aproximación al teorema de Pitágoras a partir de la conceptualización del área.

Del mismo modo, cabe anotar que estos descriptores van en correspondencia con las actividades diseñadas por niveles, los cuales deben ser jerárquicos, recursivos, secuenciales y formulados de manera tal que permitan caracterizar su progreso en el razonamiento, frente al objeto matemático en cuestión, como resultado de un proceso escalonado, gradual y sistémico.

A continuación se procede a presentar la entrevistas y los descriptores de nivel 0, ya depurados y refinados, respecto al objeto de estudio en cuestión.

3.8. ENTREVISTA NIVEL 0

Este nivel es vital en la construcción del conocimiento, dado que lleva al estudiante a un reconocimiento de los elementos básicos de estudio para comprender un concepto particular.

3.8.1. Descriptores de nivel 0.

Las actividades que el estudiante desarrolla en este nivel presentan un conjunto de características nombradas de descriptores; permiten establecer si al estudiante ha desarrollado los procesos de razonamiento conveniente para este nivel. A continuación se exponen los descriptores:

0.1. Diferencia visualmente una superficie de otra.

0.3 Compara superficies para determinar su mayor o menor tamaño.

0.2 Reconoce que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes.

0.4 Afirma sin demasiadas dudas que un segmento:

- Puede ser igual o no a otros segmentos.
- Se puede dividir en dos partes iguales (punto medio).

Por otra parte, se ha determinado que para este nivel 0, un descriptor de separación y que el estudiante debe saber para el nivel siguiente.

3.8.2. Descriptor de separación nivel I.

Se le dificulta reconocer un triángulo entre un conjunto de figuras planas.

3.8.3. Objetivo del nivel 0 de razonamiento

Los siguientes objetivos van en correspondencia con lo que el estudiante comprende sobre los elementos: punto medio, segmento, superficie de figuras planas. Estos objetivos son:

- Diferenciar visualmente una superficie de otra.
- Comparar superficies para determinar su mayor o menor tamaño.
- Reconocer que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes.
- Reconocer un segmento y su punto medio.

3.8.4. Actividades propuestas para el nivel 0.

En este nivel 0 se propone algunas actividades, a continuación se hace una descripción de cada una de forma muy breve, en la que resalto sus características y propósito.

La actividad número 1 ofrece a los estudiantes la posibilidad de exhibir los conocimientos previos respecto a conceptos como: superficie de figuras planas, punto medio, congruencia de segmentos.

La siguiente actividad tiene como propósito favorecer el razonamiento de los estudiantes de nivel 0 cuando se abordan algunos conceptos básicos de geometría plana como punto medio, congruencia de segmentos y superficie.

Tabla 3. Primer descriptor del nivel 0

Entrevista 1, nivel 0. La entrevista contiene preguntas relacionadas al primer descriptor. **“**Diferencia visualmente una superficie de otra**”**

Descriptor 0.1 del nivel 0.

1. Observa estas figuras en el papel. Con lápiz, ¿Podrías pintar lo que crees es la superficie

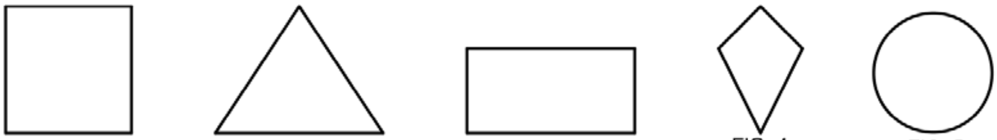


FIG 1 FIG. 2 FIG. 3 FIG. 4 FIG. 5

Figura 24. Reconocimiento de superficie.

2. Describe la superficie la figura 1, 2, 3, 4 y 5.

Tabla 4. Segundo descriptor del nivel 0

Entrevista 2, nivel 0. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el segundo descriptor. **“**Compara superficies para determinar su mayor o menor tamaño**”**

Descriptor 0.2 del nivel 0.

1. Recorta las cuatro figuras siguientes para luego comparar las superficies.

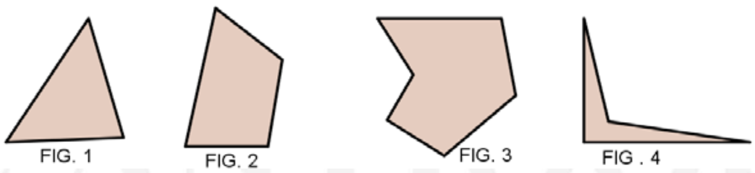


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3 FIG . 4

Figura 25. Comparación de superficies.

2. Señala la figura de mayor superficie.

3. Señala la figura de menor superficie.

4. Al comparar las figuras ¿Qué tuviste en cuenta?

5. ¿Crees que es posible que una figura tenga la misma superficie que otra? ¿Por qué?

6. Observa a continuación cada par de figuras planas detenidamente y define, ¿Cuál de los pares de figura tiene mayor superficie? Justifica tu respuesta.

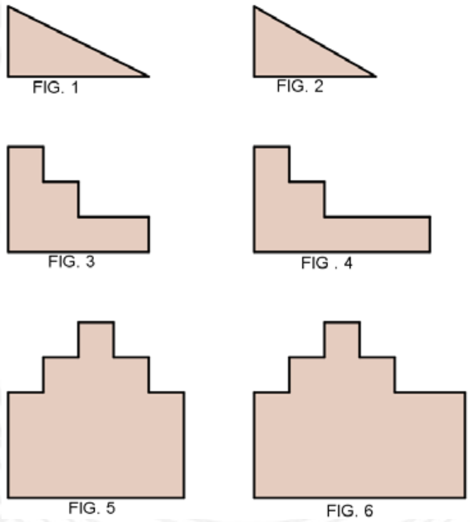


Figura 26. Comparación de superficie de figuras.

Tabla 5. Tercer descriptor del nivel 0.

Entrevista 3, nivel 0. La entrevista contiene preguntas relacionada con el tercer descriptor. "Afirma sin demasiadas dudas que un segmento: • Puede ser congruente o no con otros segmentos. • Puede ser igual o no con otros segmentos. • Se puede dividir en dos partes iguales (punto medio)

Descriptor 0.3 del nivel 0.

1. Observa los cuatro segmentos iguales que se presentan a continuación.

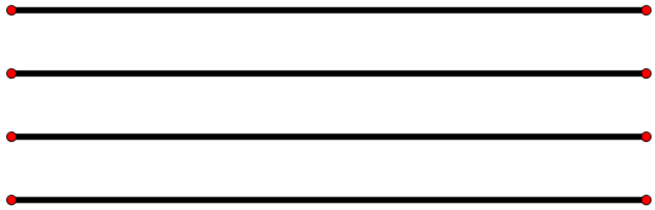


Figura 27. Segmentos congruentes.

Nota: Se representan 4 palillos de igual medida como segmentos y plastilina.

Tabla 6. Aporte de información sobre segmento

APORTE DE INFORMACIÓN

Un **segmento** es una línea limitada por dos puntos o extremos. Tiene inicio y tiene final.

2. ¿Se podrían construir figuras planas con los segmentos? Dibuja algunas.
3. ¿Qué figuras planas podrías construir con los siguientes 4 segmentos? Dibuja algunas.

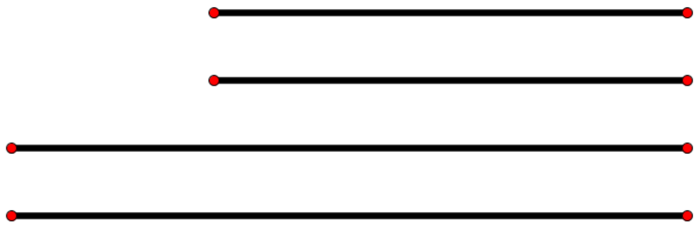


Figura 28. Segmentos congruentes dos a dos.

Nota: Se representa 4 palillos como segmentos y plastilina.

4. A continuación se presenta una figura construida por segmentos, teniendo en cuenta algunas figuras que construiste anteriormente con los palillos y la que te presento a continuación, ¿Se pueden considerar los segmentos como lados de figuras planas?

Figura 29. Figura plana construida con segmentos

5. Observa la figura a continuación, se han trazado dos segmentos que unen los vértices no consecutivos.

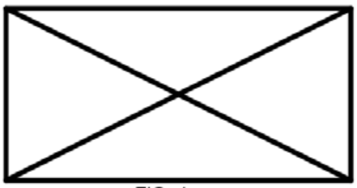


Figura 30. Diagonales del rectángulo como segmentos.

6. Los segmentos trazados ¿son iguales?
7. Observa los siguientes segmentos y ubica el punto que va en la mitad del segmento.
8. El punto que va en la mitad del segmento, se llama punto medio del segmento, ¿Cómo logras identificar el punto medio?

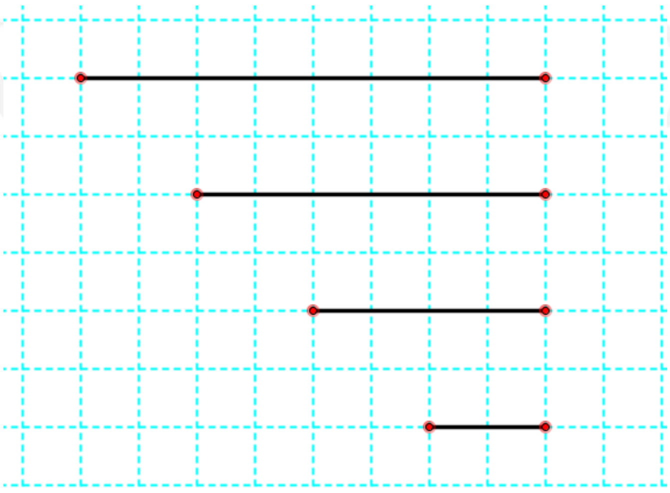


Figura 31. Punto medio del segmento.

9. A continuación se presenta un segmento con puntos A y B en sus extremos, estos se escriben y se simbolizan de la siguiente manera $\overline{AB}$.

Figura 32. El segmento.

10. Ubica el punto medio y lo nombras como punto C.

11. Ahora bien, ubica otro punto medio pero del segmento $\overline{AC}$.

12. Luego, ubica otro punto medio del segmento $\overline{BC}$.

13. Según lo anterior, ¿el segmento $\overline{AC}$ tiene la misma medida que el segmento $\overline{BC}$? ¿Por qué?

14. Observa la siguiente figura.

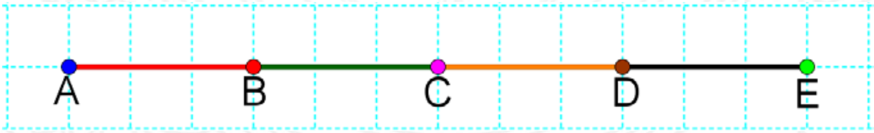


Figura 33. Segmento $\overline{\text{AE}}$ dibujado en cuadrícula

15. El segmento de color rojo $\overline{AB}$ tiene igual medida que el segmento $\overline{BC}$, ¿es cierto?

16. ¿Es correcto afirmar que el punto medio entre el punto A y el punto C es B?

17. Ubica en el siguiente segmento $\overline{AE}$, el punto medio del segmento de $\overline{AD}$

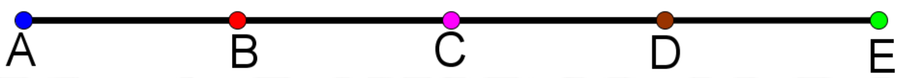


Figura 34. Puntos entre segmento $\overline{\text{AE}}$.

18. Observa las figuras que se presentan a continuación. ¿Cómo podrías hallar el punto medio del segmento trazado en cada figura plana?

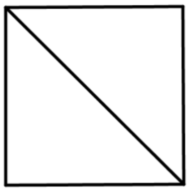


FIG. 1

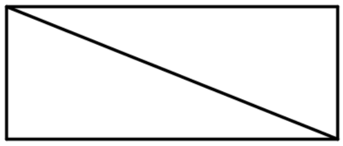


FIG. 2

Figura 35. Diagonal y su punto medio.

19. Observa la figura 1 y 2

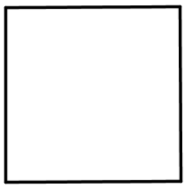


FIG. 1


FIG. 2

Figura 36. Punto medio de los lados del cuadrado y rectángulo.

20. ¿Cómo encontrarías el punto medio de cada lado de la figura 1?

21. Encuentra el punto medio de los lados de la figura 2.

22. Traza dos segmentos que una los puntos medios de la siguiente figura.

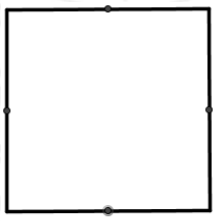


FIG. 1

Figura 37. Puntos medio del cuadrado.

23. ¿Qué ocurrió con la superficie de la figura 1?

24. ¿Son iguales los dos segmentos trazados por el punto medio de la figura 1?

25. Traza dos segmentos que unan los puntos medios a la figura 2

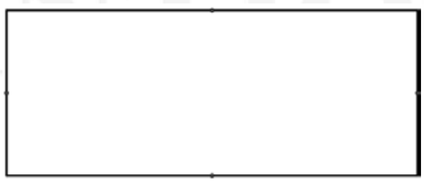


FIG. 2

Figura 38. Puntos medio del rectángulo.

26. ¿Qué ocurrió con la superficie de la figura 2?

27. Los dos segmentos trazados por el punto medio de la figura 2 ¿Son iguales?

28. Traza cuatro segmentos en la figura 1 y traza cuatro segmentos a la figura 2, de manera que dividan las superficies en partes iguales.

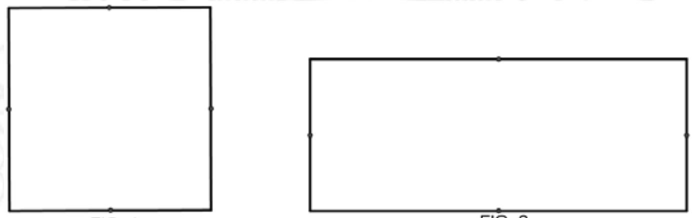


FIG. 1 FIG. 2

Figura 39. Puntos medios y vértices de los ángulos del cuadrado y rectángulo.

Tabla 7. Cuarto descriptor del nivel 0

Entrevista 4, nivel 0. La entrevista contiene preguntas relacionadas al cuarto descriptor. **“**Un estudiante reconoce que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes**”**

Descriptor 0.4 de nivel 0.

1. Observa las superficies en las siguientes figuras. En la superficie de la figura 1 se hicieron varios trazos de segmentos, y luego cortes con tijeras como muestra la figura 2, 3, y 4.

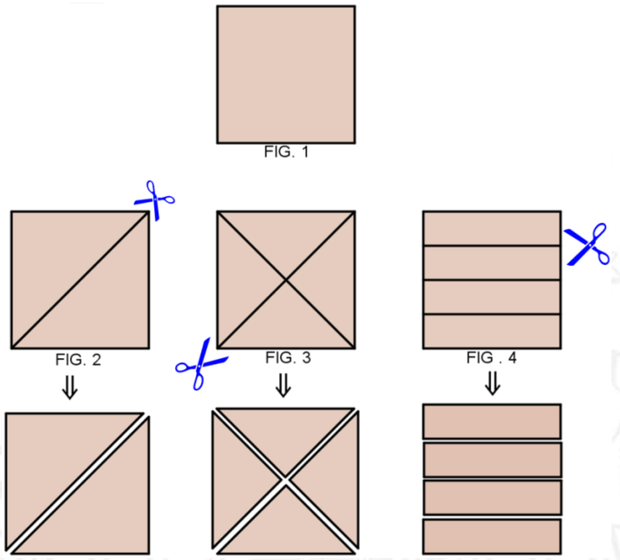


Figura 40. Descomposición de superficie en partes más pequeñas.

2. Según el corte en la figura 2, ¿Es posible que las dos superficies sean iguales?
3. Los cortes de la figura 3, ¿Es posible, también que las cuatro superficies sean iguales?
4. Según los cortes de la figura 4, ¿Es posible que las 4 superficies sean iguales?
5. Observa a continuación la figura 1, se hizo un corte que dividió la superficie en dos partes iguales. ¿Es posible que la figura 1, se reconstruya en otra superficie, como la figura 2?

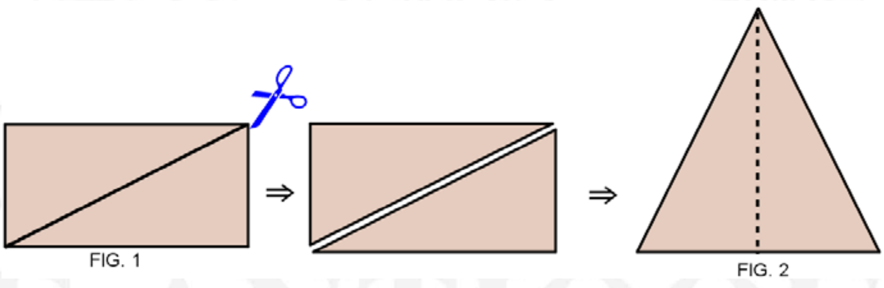


Figura 41. Diagonal del rectángulo y altura del triángulo rectángulo isósceles.

Nota. Entregue una tijera y las dos figuras planas semejantes a las anteriores de igual área.

Aclaración: En caso de no responder o dudar. Se le entrega la figura plana, lápiz y tijeras se le indica hacer lo siguiente:

6. Traza el segmento indicado con el lápiz y luego recorta la figura por toda la línea, ahora trata de reacomodar la figura como la figura 2, ahora responde ¿es posible que la figura 1, haciendo un corte por el segmento, se reconstruya en otra superficie, igual a la figura 2?
7. Observa las figuras planas presentadas a continuación.

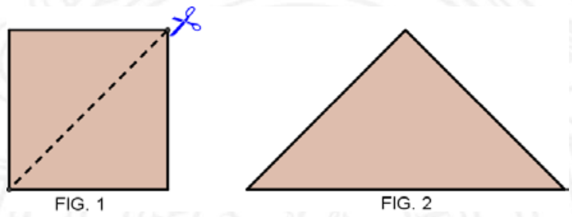


Figura 42. Diagonal del cuadrado y altura del triángulo.

8. Si se hiciera un corte por los trazos marcados en su interior y luego se construyeran otras figuras, ¿cómo sería la superficie de la figura construida?
9. ¿Consideras entonces que, es posible que la superficie de una figura plana pueda convertirse en otras superficies diferentes?
10. De las siguientes figuras ¿Cuáles podrían tener superficies iguales?

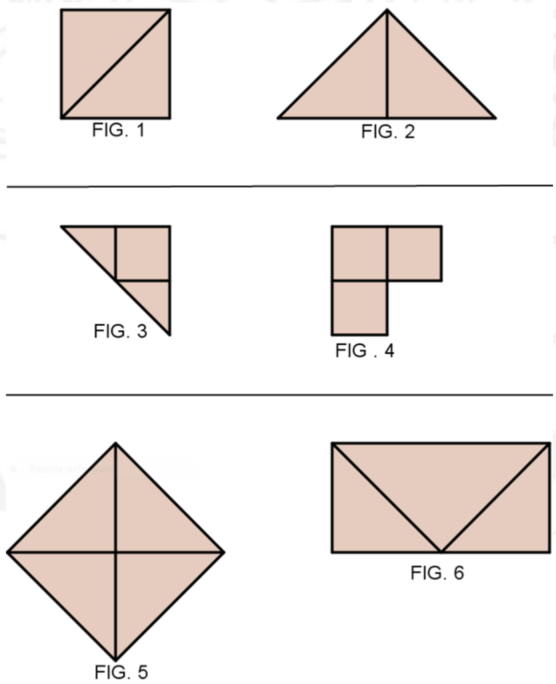


Figura 43. Comparación de superficie con corte y pegado.

3.9. ENTREVISTA NIVEL I

En este nivel hay una presencia de información visual relacionado con la percepción de los objetos, teniendo en cuenta su forma global. No hay reconocimiento de algunos elementos importantes que permitan hacer definiciones respecto a la figura presentada. Por lo tanto, las actividades que el estudiante desarrolla están apoyadas para este nivel por los siguientes descriptores:

3.9.1. Descriptores de Nivel I.

1.1 Reconoce el triángulo entre todas las figuras geométricas planas.

1.2 Reconoce el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas.

1.3 A través de la geometría del doblado de papel, el estudiante:

- Puede construir dos o más triángulos de igual superficie.
- Puede construir dos o más rectángulos de igual superficie
- Puede construir dos o más cuadrados de igual superficie.

1.4 Establece una relación entre la superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales.

1.5 Determina la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas.

Por otro lado, se nombran descriptores que separan los dos niveles de razonamiento y aunque se relacionen implícitamente en el nivel I, se hacen explícitos en el nivel II, esto se debe a la ampliación de su estructura mental, y por ende, a su vocabulario refinado y formalizado.

3.9.2. Descriptor de separación del nivel II.

- Al estudiante se le dificulta reconocer un triángulo rectángulo isósceles y escaleno.
- Al estudiante se le dificulta realizar comparaciones de área de las figuras planas como la cantidad de plano ocupado por la superficie, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos.

3.9.3. Objetivo del nivel I de razonamiento

Los siguientes objetivos corresponden con lo que el estudiante debe conocer respecto a la comprensión acerca del triángulo, cuadrado, rectángulo, la igualdad de superficie que se generan a partir de medianas y diagonales, y construcciones de figuras a partir de la geometría del doblado de papel.

- Reconocer el triángulo entre todas las figuras geométricas planas.
- Reconocer el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas.
- Establecer una relación entre la superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales.
- Determinar la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas.
- Construir dos o más triángulos de igual superficie, a partir del doblado de papel.

- Construir dos o más rectángulos de igual superficie o dos o más cuadrados de igual superficie, mediante el doblado de papel.

3.9.4. Actividades propuestas para el nivel 1.

En nivel I, se proponen actividades que tienen que ver con la entrevista de carácter socrático. Están estrechamente ligadas y las observaciones permiten corroborar los descriptores planteados anteriormente. Una de ellas es una entrevista que permite a los estudiantes la posibilidad de exteriorizar sus razonamientos frente a la visualización de algunas figuras geométricas planas como son: el cuadrado, triángulo y rectángulo; además de las relaciones que existen entre sus superficies cuando se trazan diagonales y medianas, y la importancia del doblado de papel en este nivel.

La siguiente actividad tiene el propósito de analizar el razonamiento de los estudiantes cuando exploran las figuras triangulares, cuadradas y rectangulares desde su percepción; la construcción y relación de otras figuras cuando se trazan diagonales y medianas. Además, de la implementación del doblado del papel para relacionar y comparar las figuras a partir del resultado de su doblez. La entrevista está dividida por varias sesiones que corresponde a cada uno de los descriptores de nivel nombrados anteriormente.

Tabla 8: Primer descriptor del nivel 1

Entrevista 1, nivel 1. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el primer descriptor. **“Reconoce el triángulo entre todas las figuras geométricas planas”**

Descriptor 1.1. del nivel 1.

1. En las siguientes figuras geométricas ¿hay triángulos? Señala cuatro.

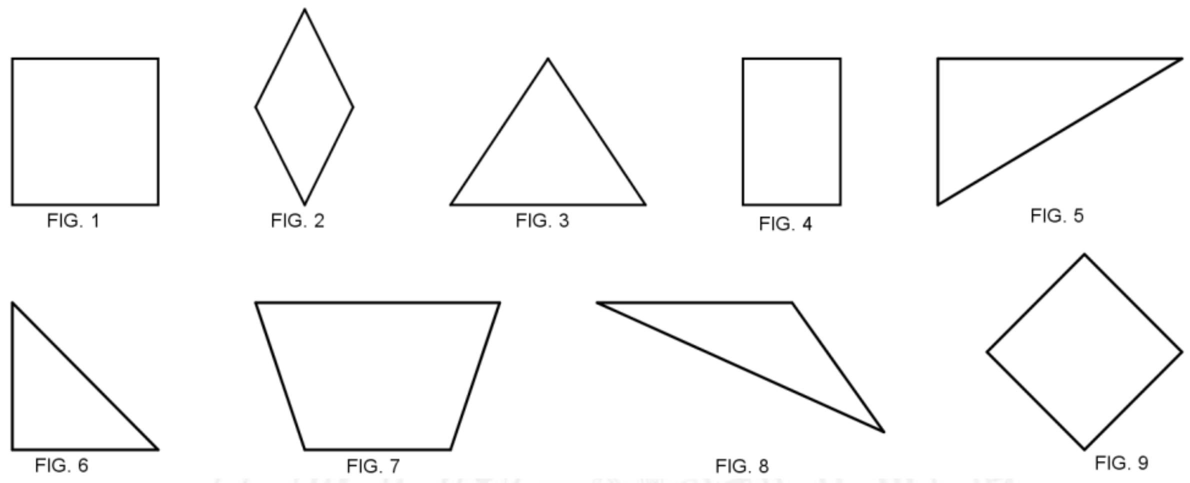


Figura 44. Figuras geometricas elementales.

2. Describe una de las figuras que señalaste.
3. ¿En qué se diferencian las figuras señaladas con los demás figuras?
4. ¿Es posible que un triángulo puede tener dos lados iguales?
5. Dibuja el triángulo con dos lados iguales.
6. Un triángulo ¿puede tener los tres lados desiguales?
7. Dibuja un triángulo de lados desiguales.
8. ¿Es posible, también, que tenga tres lados iguales?
9. ¿Se puede concluir que si los lados de un triángulo son diferente sus ángulos también?
10. ¿Es posible que con tres lados se construya un triángulo?

Nota. Si la respuesta es un sí, se inicia con un diálogo socrático, donde se plantea al estudiante una situación (contra ejemplo), para hacerlo dudar y que reflexione que no todas las veces se cumple, debe darse cuenta que la suma de las longitudes de dos lados del triángulo debe ser mayor que la longitud del otro lado. Se debe entregar el material necesario para que el estudiante haga construcciones que lo pongan a razonar sobre la respuesta que dijo.

Se entrega al estudiante tres palillos, (donde uno de ellos tiene mayor longitud que los otros dos juntos) con los tres palillos que se asemejan a tres lados construye un triángulo.

11. ¿Es posible construir un triángulo con los tres palillos?
12. Luego se le entrega tres palillos donde la suma de dos de ellos es mayor que el otro palillo.
13. Construye, nuevamente, un triángulo.
14. ¿Es posible construir un triángulo?
15. Ahora observa los tres primeros palillos, toma dos palillos y únelos de manera que formes uno solo, ¿Es mayor que el otro palillo?
16. Ahora observa la siguiente situación, se le entrega los tres últimos palillos. Toma dos de los palillos y únelos de tal manera que formen uno solo, ¿Es mayor que el otro palillo?

Nota. Se le da cierta información para que reacomode lo que ahora sabe y razone

Si observas detenidamente, en la primera situación, donde se te dijo que formaras un triángulo con los tres palillos y no fue posible, la suma de cualquiera de los dos palillos fue menor que el otro, sin embargo, en la segunda situación, donde se te dijo que formaras un triángulo con los tres palillos, esta vez fue posible construir el triángulo, donde la suma de cualquiera de los dos palillos es mayor que el otro palillo.

17. Podrías decir entonces, ¿Por qué con los tres primeros palillos, en la primera situación, no fue posible construir el triángulo y en la segunda situación, sí fue posible?

18. Ahora piensa acerca de la pregunta anterior, ¿Es posible construir un triángulo, dado tres lados?

19. ¿Debe cumplir cierta condición?

Tabla 9. Segundo descriptor del nivel 1

Entrevista 2, nivel 1. La entrevista contiene preguntas relacionadas al segundo descriptor. “Reconoce el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas”

Descriptor 1.2. del nivel I.

1. Observa detenidamente las siguientes figuras geométricas. Señala tres cuadrados.

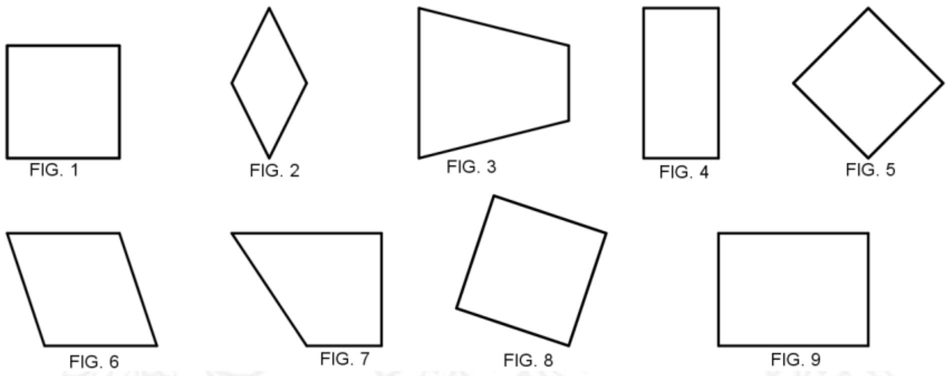


Figura 45. Figuras geometricas de cuatro lados (cuadriláteros)

2. ¿Cómo justificas que las figuras geométricas que señalaste, son en verdad cuadrados?

3. ¿Es correcto decir que un cuadrado tiene sus lados opuestos iguales y sus ángulos opuestos iguales?

4. ¿Qué objetos cotidianos se parecen al cuadrado?

5. ¿En qué se diferencia con las demás figuras geométricas?

6. Dibuja un cuadrado. Se le entrega una hoja, escuadra y lápiz.

7. Ahora, me gustaría hablar de otra figura geométrica, “el rectángulo”

8. Nombra dos rectángulos que reconozcas en las figuras anteriores.

9. Dibuja un rectángulo. Se le entrega una hoja, escuadra y lápiz.

10. ¿Qué objetos cotidianos se parecen al rectángulo?

11. Observa las dos figuras geométricas siguientes.

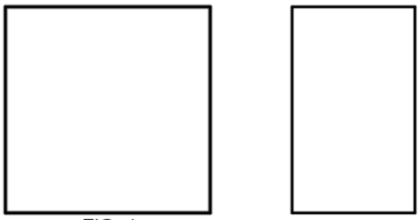


FIG. 1 FIG. 2

Figura 46. Diferencia entre el cuadrado y rectángulo

12. ¿En qué se diferencian las dos figuras geométricas?

13. ¿En qué se parecen estas figuras geométricas?

Tabla 10. Tercer descriptor del nivel 1

Entrevista 3, nivel 1. La entrevista contiene preguntas relacionadas al tercer descriptor. “Establece una relación entre a superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales”

Descriptor 1.3. de nivel I.

1. Observa el siguiente cuadrado

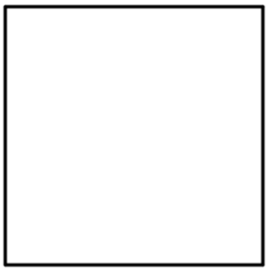
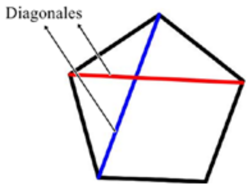


FIG. 1

Figura 47. Superficie del cuadrado

2. Traza una diagonal en el cuadrado. Se le entrega una escuadra o una regla. Se le da información escrita y visual al estudiante, en caso, que no conteste la pregunta

Tabla 11. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN:
Diagonal: es todo segmento que une dos vértices no consecutivos de una figura geométrica.


Aporte de información de la diagonal

3. ¿En cuántas partes se dividió la superficie del cuadrado?
4. ¿Ahora, qué forma tienen las dos superficies?
5. Las dos superficies, ¿son iguales?

Nota: en caso de decir que no, se le entrega un cuadrado hecho de cartón paja o cartulina plana con su respectiva diagonal, y una tijera.

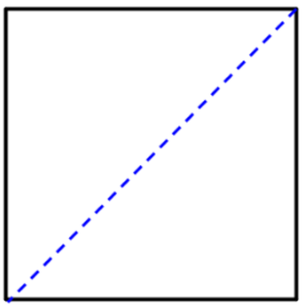


Figura 48. Recorte del cuadrado por la digonal

6. Recorta el cuadrado por la diagonal, ahora compara y coloca una figura encima de la otra.

7. ¿Entonces, es correcto afirma que son iguales las dos superficies?

8. ¿Quiere decir entonces que al unir dos superficies triangulares iguales, como muestra la siguiente figura, se forma una superficie de forma cuadrada?

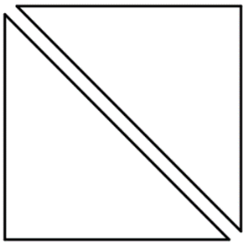


FIG. 2

FIG. 1

Figura 49. Dos triángulos que forman un cuadrado.

9. ¿Es posible concluir que la superficie de un triángulo, como la figura mostrada a continuación, es igual a la mitad de la superficie del cuadrado?

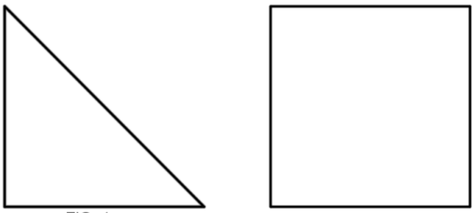


FIG. 1 FIG. 2

Figura 50. Comparacion de la superficie del triángulo y el cuadrado.

Nota: En caso de decir que no, se le entregan las dos figuras recortadas (el triángulo y el cuadrado igual al anterior) en cartón paja.

10. Coloca encima del cuadrado de manera que coincidan dos lados.

11. ¿Corresponde la figura del triángulo a la mitad del cuadrado?

12. Ahora observa el siguiente cuadrado, contesta la siguiente proposición.

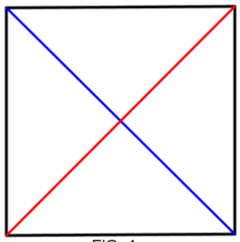


FIG. 1

Figura 51. Diagonales del cuadrado.

13. Si una diagonal trazada en un cuadrado divide en dos superficies iguales, entonces, dos diagonales trazadas ¿en cuántas partes iguales crees que divide cuadrado?

14. Observa las figuras a continuación, ¿Quiere decir entonces que al juntar los cuatro triángulos, de manera que todos coincida con los mismos lados, se puede formar un cuadrado?

FIG. 1

Figura 52. Descomposicion del cuadrado en cuatro triángulos.

15. Ahora observa los dos rectángulos. Se le entrega las dos figuras en cartulina plana blanca y regla.

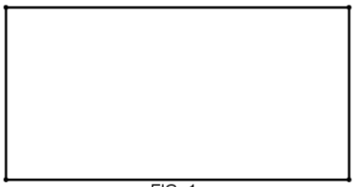


FIG. 1

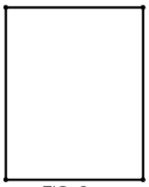


FIG. 2

Figura 53. Rectángulos de bases diferentes.

16. Traza una diagonal en la figura 1 y 2, ¿Es correcto decir que la diagonal dividió en dos superficies iguales a los dos rectángulos?

17. ¿Qué forma tienen las dos superficies divididas en partes iguales en cada rectángulo?

18. ¿Entoces es cierto decir que la superficie de un triágulo en la figura 1 y 2 es la mitad del rectángulo?

19. Ahora, observa la figura 1, las diagonales formaron otras figuras dentro del rectángulo, ¿Qué figuras son?

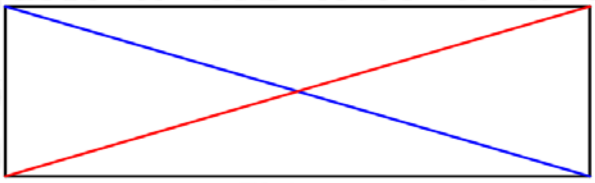


FIG. 1

.*Figura 54.* Diagonales coloreadas del rectángulo

20. Observa la siguiente figura, para las superficies de las figuras sombreadas y no sombreadas, formadas dentro del rectángulo, ¿existen algunas figuras iguales?

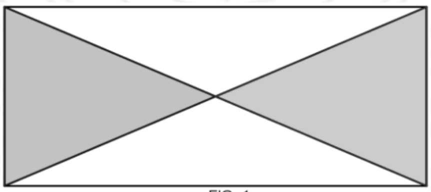


FIG. 1

Figura 55. Triángulos sombreados y no sombreados dentro del rectángulo.

21. ¿Entonces, es correcto afirmar que las dos diagonales trazadas en un rectángulo no forman triángulos iguales como en el cuadrado?

Tabla 12. Cuarto descriptor del nivel I

Entrevista 4, nivel I. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el cuarto descriptor. “Determina la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas”

Descriptor 1.4. del nivel I.

1. Ahora observa el siguiente rectángulo.

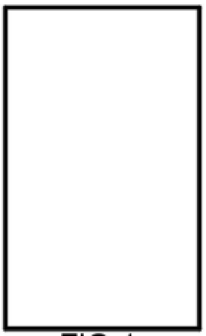
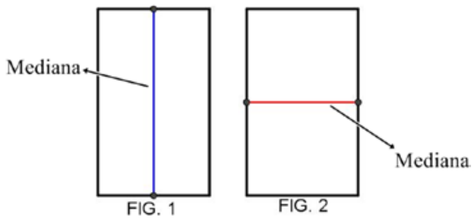


FIG. 1

Figura 56. Rectángulo para trazar medianas.

2. Traza una mediana en el rectángulo.

Tabla 13. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN:
Mediana de un rectángulo y cuadrado: es un segmento que une los dos puntos medios de los lados opuestos de un rectángulo o cuadrado, y divide la superficie en dos superficies iguales.
 FIG. 1 FIG. 2

Aporte de información sobre mediana del cuadrado y rectángulo

3. ¿Qué procedimiento haces para trazar la mediana?

4. ¿Consideras que la mediana que trazaste en el rectángulo, divide en dos partes iguales la superficie?

5. ¿Qué formas tienen las dos nuevas superficies?

6. ¿Quiere decir entonces que una de las partes de la superficie es la mitad del rectángulo?
7. Ahora traza, nuevamente, la otra mediana del rectángulo.
8. ¿En cuántas partes se dividió la superficie del rectángulo?
9. Las superficies formadas al trazar la segunda mediana, ¿Qué forma tienen?

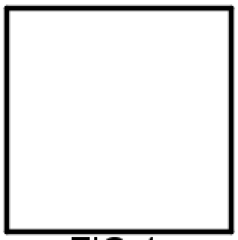


FIG.1

Figura 57. Cuadrado para trazar medianas.

10. Traza una mediana en el cuadrado.
11. En este caso, ¿qué procedimiento haces para trazar la mediana?
12. ¿Consideras que la mediana que trazaste en el cuadrado divide en dos partes iguales la superficie?
13. ¿Qué formas tienen las dos nuevas superficies?
14. ¿Quiere decir entonces que una de las partes de la superficie es la mitad del cuadrado?
15. Ahora traza, nuevamente, la otra mediana del cuadrado.
16. ¿En cuántas partes se dividió la superficie del cuadrado, nuevamente?
17. Las superficies formadas al trazar la segunda mediana, ¿qué forma tiene?
18. ¿Se puede concluir entonces, que las medianas del cuadrado, siempre dividen en cuatro superficies iguales?
19. Ahora observa el rectángulo y el cuadrado, dibujado en la cuadricula. Al comparar las dos superficies, el rectángulo es más grande que el cuadrado, ¿es eso cierto?

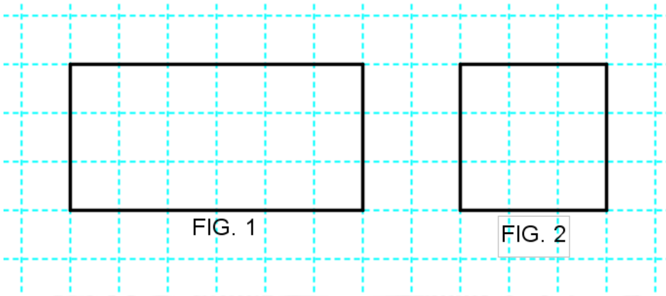


Figura 58. Construcción de rectángulo y cuadrado en hoja cuadriculada.

20. ¿Es posible, que la superficie del rectángulo presentado, sea el doble que la superficie del cuadrado?

Nota. En caso de decir que no, se entregan las dos figuras en cartulina plana y una tijera, tal como se muestra en la figura 1 y 2. Inicia con el dialogo socrático:

Traza la mediana del rectángulo en forma vertical.

21. Ahora recorta el cuadrado.
22. Ahora, coloca el cuadrado sobre el rectángulo, de manera que cubra una de las partes dividida por la mediana.
23. ¿Cubrió por completo la mitad de la superficie del rectángulo?
24. ¿Es pues, la superficie del rectángulo el doble que la superficie del cuadrado?
25. Entonces, ¿se puede decir que la superficie del cuadrado es la mitad del rectángulo? ¿Por qué?

Tabla 14. Quinto descriptor del nivel I.

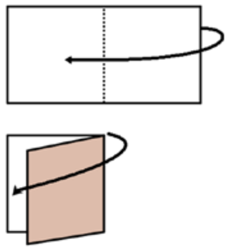
Entrevista 5, nivel I. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el quinto descriptor. A través de la geometría del doblado de papel, el estudiante: • Puede construir dos o más rectángulos de igual superficie o dos o más cuadrados de igual superficie a partir de la mediana. • Puede construir dos o más triángulos de igual superficie a partir de la diagonal

Descriptor 1.5. del nivel I.

Tabla 15. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN

El doblado de papel: es una técnica que permite representar elementos geométricos planos en una hoja de papel a través de su doblez, como el plano, la recta, segmento, puntos y figuras geométricas.



Antes de iniciar la entrevista, refuerza un poco en el manejo acerca del doblado de papel. Explica un poco, que se está haciendo cuando se dobla el papel, haz figuras geométricas con los entrevistados.

Aporte de información doblado de papel

1. Toma la hoja de papel de forma rectangular.

Se le entrega una hoja de papel de color, y de superficie rectangular al estudiante. Nota: la hoja de color debe permitir ver los dobleces que se hacen.

2. Mediante el doblado de papel, traza una mediana.
3. ¿Qué ocurrió con la superficie del rectángulo?
4. Señala con un lápiz los puntos medios de los lados donde trazó la mediana.
5. ¿Qué figura se formó?
6. Ahora, toma otra hoja rectangular.

   Nota. *D*ebes cerciorarte de que sea el doble de la superficie de un cuadrado.

7. A partir del doblado del papel, traza una mediana similar a la figura mostrada a continuación.


FIG. 1

Figura 59. Hoja rectangular de superficie doble de un cuadrado.

8. Las figuras formadas por la mediana en el papel, ¿son cuadrados?
9. ¿Se puede afirmar que la mediana formó dos cuadrados de igual superficie?
10. ¿Se puede considerar que la superficie del rectángulo es el doble de la superficie del cuadrado?
11. Ahora traza la otra mediana mediante el doblado de papel.
12. Las cuatro superficies que se formaron en la hoja rectangular ¿son iguales?
13. Mediante el doblado de papel comprueba si las cuatro superficies son iguales.
14. ¿Qué forma tienen las cuatro superficies?
15. Toma la hoja de papel de forma cuadrada. *Se le entrega una hoja de papel de color, y de superficie cuadrada al estudiante.*
16. Mediante el doblado de papel, traza una mediana, señala con un lápiz los puntos medios de los lados donde trazó la mediana.
17. El cuadrado ¿se dividió en dos partes iguales?
18. ¿Qué figuras se formaron?
19. Ahora haz otro doblez, de manera que trace la otra mediana del cuadrado.
20. Las cuatro superficies formadas en la hoja cuadrada, ¿qué forma tiene? ¿son iguales?
21. Comprueba mediante el doblado de papel si son iguales.
22. Ahora toma otra hoja de papel de forma rectangular.

Se le entrega una hoja de papel de color, y de superficie rectangular al estudiante.

23. Mediante el doblado de papel, traza una diagonal.

24. La hoja rectangular se dividió en dos superficies triangulares iguales, ¿es eso cierto?
25. ¿Entonces se puede afirmar que la superficie de un triángulo es la mitad del rectángulo?
26. Ahora traza otra diagonal mediante el doblado de papel.
27. Ahora se formaron cuatro triángulos, ¿se puede considerar que son iguales?
28. Ahora toma una hoja cuadrada.
29. Mediante el doblado de papel, traza una diagonal.
30. La hoja cuadrada se dividió en dos superficies triangulares iguales, ¿es eso cierto?
31. ¿Entonces se puede afirmar que la superficie de un triángulo es la mitad del cuadrado? ¿por qué?
32. Ahora traza otra mediana mediante el doblado de papel.
33. Ahora se formaron cuatro triángulos, ¿se puede considerar que son iguales?
34. Ahora toma una hoja cuadrada y una hoja rectangular.
35. A través del doblado de papel traza las medianas y las diagonales en cada hoja.
36. Los triángulos que se formaron en la hoja rectangular son ocho, ¿es cierto?
37. Los triángulos que se formaron en la hoja cuadrada son ocho, ¿es cierto?

3.10. ENTREVISTA NIVEL II

Para este nivel, el estudiante reconoce los elementos y propiedades de los objetos geométricos, a través de la manipulación y observación. Sin embargo, no relacionan muy bien unas propiedades con otras, puesto que son independientes y aisladas.

3.10.1. Descriptores del nivel II.

En este nivel es necesario que las actividades que el estudiante realice estén cimentadas en los siguientes descriptores:

2.1. Reconoce un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos.

2.2. Reconoce el rectángulo y el cuadrado, y sus propiedades, además de sus elementos constitutivos.

2.3. Establece comparaciones entre áreas de figuras planas, como la cantidad de plano ocupado por la superficie, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos.

2.4. Construye cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares.

2.5. Reconoce que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas.

2.6. Reconoce que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales.

2.7. Afirma sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, mediante el trazo de sus medianas.

A continuación se nombran descriptores de separación para diferenciar los dos niveles e indicar el punto de partida para el nivel III. Es importante recalcar que estos descriptores permiten la transición al siguiente nivel por ser fundamental a la hora de establecer comparaciones entre las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo cualesquiera.

3.10.2. Descriptor de separación del nivel III

- Se le dificultad comprender que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.
- Tiene dificultad para entender que sobre la diagonal de un rectángulo con área doble a la de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.

3.10.3. Objetivo del nivel II de razonamiento

El objetivo es analizar el razonamiento del estudiante cuando realiza tareas de reconocimiento de triángulos rectángulos distintos; de comparación de las áreas de superficies distintas, utilizando métodos geométricos para igualar superficie y poder establecer si el área es igual, mayor o menor y de la construcción de cuadrados a partir de la diagonal de otro cuadrado inicialmente dado.

- Reconocer un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos.
- Reconocer el rectángulo y el cuadrado, y sus los elementos constitutivos como: lados paralelos y perpendiculares, diagonales, lados congruentes, ángulos rectos, agudos y medianas.

- Establecer comparación de área de las figuras planas como la cantidad de plano ocupado por la superficie, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos.
- Reconocer que dos o más figuras planas con diferentes superficies, pueden tener igual área.
- Construir cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares en hojas cuadriculadas y en blanco.
- Reconocer que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, a partir del trazo de sus diagonales y medianas.
- Reconocer que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, a partir del trazo de sus diagonales.
- Afirmar sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, a partir del trazo de sus medianas.

3.10.4. Actividades propuestas para la el nivel II.

En el nivel II, se proponen dos actividades como en los anteriores niveles, donde la primera es una entrevista y la segunda, es una actividad escrita.

La actividad 1, contribuye a que el estudiante manifieste su razonamiento frente al análisis de las propiedades que existen en un el triángulo rectángulo, la comparación de áreas de figuras planas desde lo geométrico y las relación de áreas de cuadrados construidos sobre la diagonal de otro cuadrado.

Tabla 16 Primer descriptor de nivel II

Entrevista 1, nivel II. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el primer descriptor. **“Reconoce un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos”**

Descriptor 2.1. Nivel II.

1. Observa el siguiente cuadrado. ¿Cuántos grados miden cada ángulo?

Al estudiante se le entrega el cuadrado siguiente y un transportador para que mida los ángulos internos del cuadrado, en caso de necesitarlo.

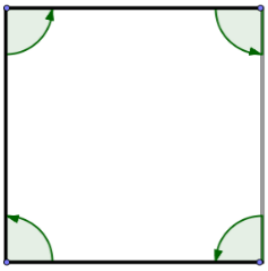


FIG. 1

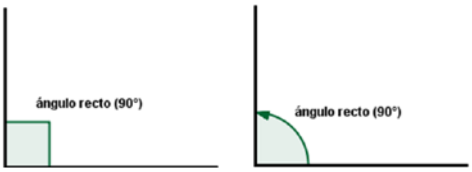
Figura 60. Ángulos de un cuadrado.

2. Ahora dibuja un cuadrado.

Nota. Se le entrega una hoja cuadriculada, lápiz, borrador y una escuadra.

3. Dibuja los cuatro ángulos con el lápiz.
4. Ahorra, borra dos lados consecutivos del cuadrado.
5. ¿Qué figura se formó?
6. Describe la figura.
7. Observa el ángulo que está formado por dos líneas rectas que se interceptan en un punto llamado vértice Sabes ¿cómo se le llaman esas las dos líneas?

Tabla 17. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN
Líneas perpendiculares: son dos líneas que forman un ángulo de 90°. Si son cuatro líneas perpendiculares forman cuatro ángulos rectos. 

Aporte de información sobre líneas paralelas

8. Ahora en la misma figura, traza un segmento de manera que forme un triángulo.
9. A continuación te presento las siguientes figuras triangulares similares a la que construiste, pues tienen diferentes tamaños.

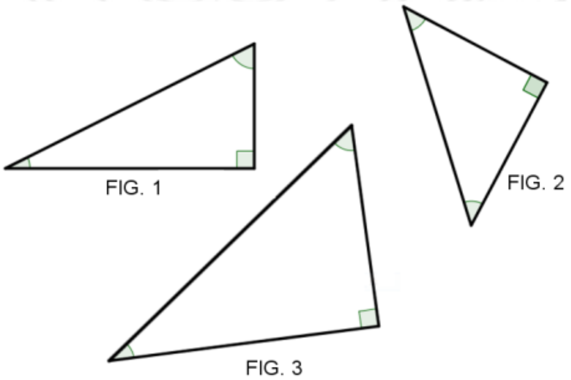


Figura 61. Triángulos rectángulos.

10. Señala en cada figura triangular los lados o líneas perpendiculares.
11. Observa las siguientes figuras, son líneas perpendiculares, nombra objetos que representen o tengan formas perpendiculares.

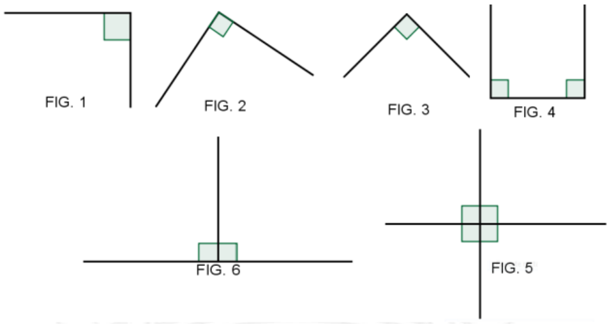


Figura 62. Lineas perpendiculares

12. ¿Cuál de los siguientes lados resaltados de rojo en el triángulo, no son perpendiculares?, ¿nómbralos?

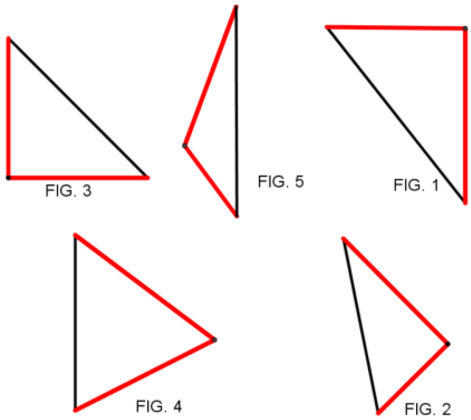


Figura 74. Identificación de lados perpendiculares del triángulo rectángulo

13. En las siguientes figuras triangulares, existe un triángulo especial, éste posee un ángulo recto o de 90˚. ¿cuáles son?

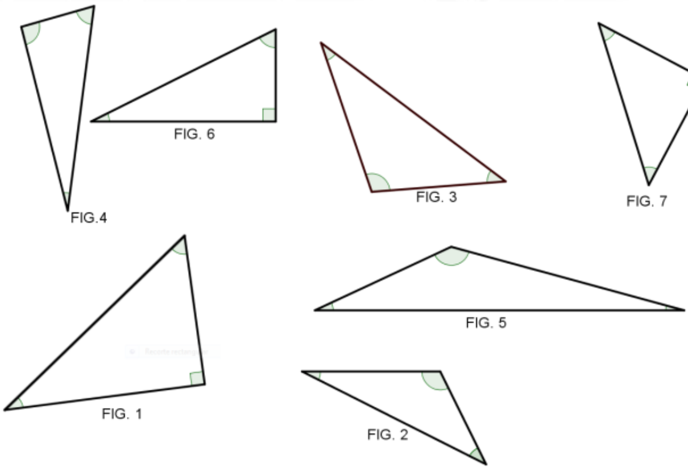


Figura 63. Identificacion de ángulo recto en un triángulo

14. ¿Sabes cómo se llaman los triángulos que nombrastes?

Nota. En caso de no saber la respuesta, se le brinda la siguiente información

APORTE DE INFORMACIÓN

A estos triángulos se le llaman **triángulos rectángulos:** son figuras geométricas de tres lados y tiene un ángulo que mide 90°, es decir, un ángulo recto, como muestra la flecha.

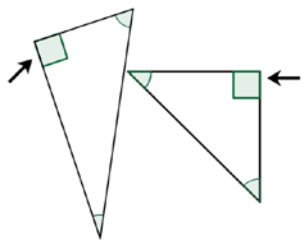


Figura 64. Aporte de información de triángulos rectángulos

15. A continuación se muestra un conjunto de triángulos rectángulos que conforman las figuras del grupo A.

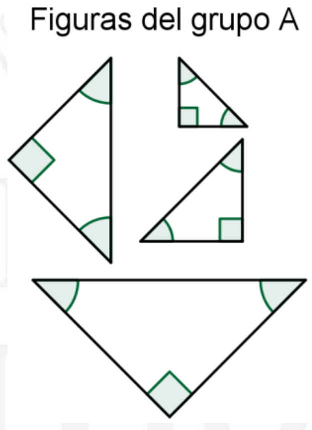


Figura 65. Conjuntos de triángulos rectángulos isósceles

.

16. Observa detenidamente el ángulo recto representado con un cuadro en cada uno de los triángulos rectángulos.

17. Ahora compara los lados que forman el ángulo recto, ¿son iguales?

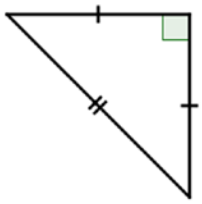
18. ¿Sabes cómo se llaman los triángulos rectángulos de las figuras del grupo A?

Nota. En caso de no saber, se da un aporte de información.

Tabla 18. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN

Un triángulo rectángulo isósceles, además de tener un ángulo recto, tiene dos lados iguales.



Aporte de información de triángulos rectángulos isósceles

19. A continuación te entrego un cuadrado donde se dibujan los ángulos rectos parecidos a la siguiente figura, ahora traza una diagonal y recortalo por la linea dibujada.

Nota: Se le entrega un cuadrado hecho de cartón paja, lápiz y tijeras para su respectivo corte.

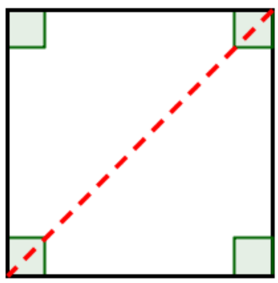


FIG. 1

Figura 66. Recorte del cuadrado

20. Observa una de las partes, ¿Es un triángulo rectángulo isósceles?

21. ¿Es correcto decir que al trazar o cortar la superficie de un cuadrado, se forman dos triángulos rectángulos isósceles?

22. Observa los dos ángulos no rectos en cada triángulo rectángulo isosceles. ¿son iguales?

Nota. Se el entrega un transportador para que mida los dos ángulos si es necesario.

23. Entonces, ¿cuántos grados miden cada ángulo no recto del triángulo rectángulo isósceles?

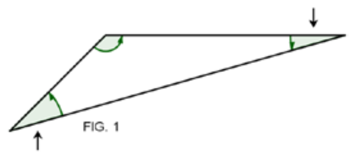
24. Quiere decir entonces que ¿uno de los ángulo mide menos de 90 grados?

25. ¿Sabes, cómo se llama esa clase de ángulo?

Tabla 19. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN

Ángulo agudo: es aquel ángulo que mide más de 0˚ y menos que 90˚, como muestra la flecha.



Aporte de información de triángulos rectángulos escaleno

26. O sea que ¿un triángulo rectángulo isósceles, además de tener un ángulo recto, dos lados iguales¿ tiene dos ángulos agudos iguales?

27. Se puede concluir que ¿la suma de los dos ángulos agudos del triángulo rectángulo isósceles es igual a un ángulo recto?

28. A continuación se muestra un conjunto de triángulos rectángulos que conforman las figuras del grupo B.

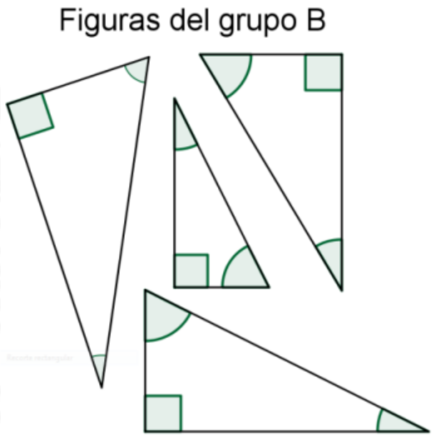


Figura 67. Triángulos rectángulos escalenos

29. Observa el ángulo recto de cada uno de los triángulos rectángulos.

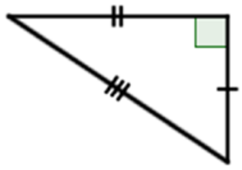
30. Ahora compara los dos lados que forman el ángulo recto, ¿son iguales?

31. ¿Son diferentes?

32. ¿Cómo se llaman los triángulos rectángulos de la figura del grupo B?

Nota. En caso de no responder la pregunta, se brida la siguiente información.

Tabla 20. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN
Un triángulo rectángulo escaleno, además de tener un ángulo recto, tiene sus lados desiguales. 

Aporte de información triángulo rectángulo.

33. Al estudiante se le entrega un rectángulo, para que trace una diagonal y lo recorte por ella.

Nota: Se le entrega un rectángulo hecho de cartón paja, lápiz y tijeras.

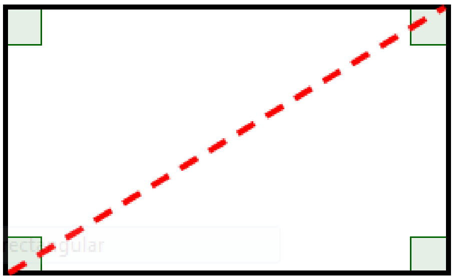


FIG. 1

Figura 68. Rectángulo para recortar.

34. Observa uno de los triángulos obtenidos, ¿Es un triángulo rectángulo escaleno?

35. ¿Es correcto decir que al trazar o cortar por la diagonal la superficie de un rectángulo, se forman dos triángulos rectángulos escalenos?

36. Ahora observa las siguientes figuras, los dos triángulos rectángulos escalenos forman un rectángulo y los dos triángulos rectángulos isósceles forman un cuadrado.

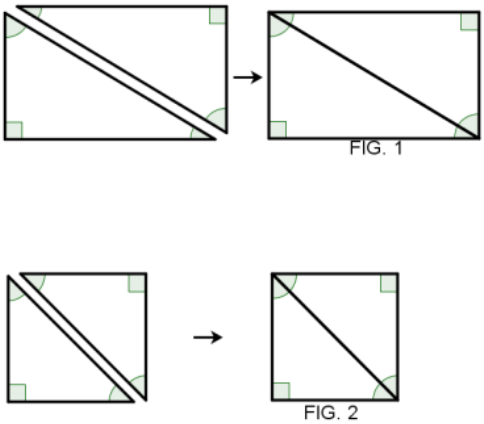


Figura 69. Formación de rectángulos y cuadrados con triángulos rectángulos.

37. Los dos ángulos agudos de cada triángulo rectángulo escaleno, mostrado en la figura 1, ¿son iguales?

Nota. Se el entrega un transportado para que mida los dos ángulos si es necesario.

38. En la figura 1, formada por dos triángulos rectángulos escalenos, parece ser que los ángulos agudos son desiguales y en la figura 2, formadas por dos triángulos isósceles los ángulos son iguales, ¿Porqué ocurre esa diferencia?

Nota. Se le entrega al estudiante una hoja de papel de color de forma cuadrada y rectangular.

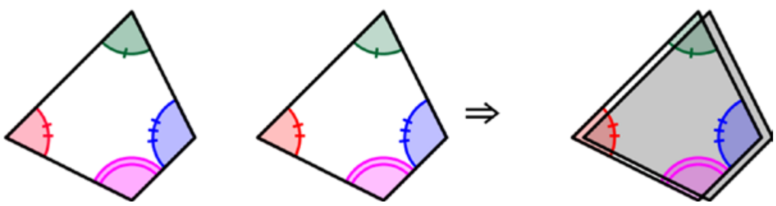
39. Ahora toma una hoja cuadrada, a través del doblado de papel, traza una diagonal. ¿Qué clase de triángulos rectángulos se formaron?

40. Los triángulos rectángulos que se formaron ¿son congruentes? ¿Sabes qué son figuras congruentes?

Tabla 21. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN.

Figuras geométricas congruentes son toda figura que tiene el mismo tamaño y la misma forma. En este caso, si superpongo los triángulos y coinciden exactamente, entonces se dice que los dos triángulos son congruentes.



Aporte de información sobre figuras congruentes.

41. Nuevamente, te pregunto los triángulos rectángulos que se formaron al doblar por la diagonal, ¿son congruentes? ¿Cómo comprobaste que son triángulos congruentes?

42. Si las figuras son congruentes, entonces ¿tienen la misma área?

43. Ahora traza otra diagonal, ¿Qué clase de triángulos rectángulos, nuevamente, se formaron?

44. Toma una hoja rectangular, a través del doblado de papel, traza una diagonal. ¿Qué clase de triángulos rectángulos se formaron? ¿Son congruentes los dos triángulos?

45. Para resumir, toma en cuenta los conceptos y propiedades que se han tratado anteriormente. Ahora observa los siguientes triángulos rectángulos, nombra los triángulos rectángulos escalenos y los triángulos rectángulos isósceles.

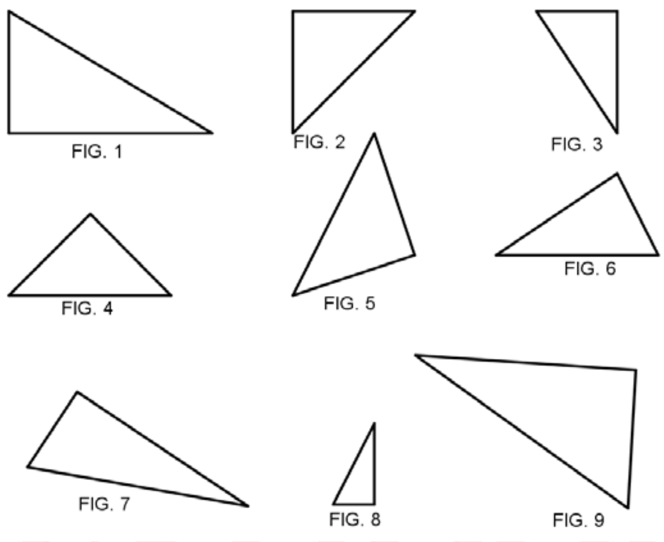


Figura 70. Reconocimiento de triángulos rectángulo isósceles y escalenos.

46. ¿Qué figura plana se pueden construir con dos triángulos rectángulos escalenos que sean congruentes?

47. ¿Qué figura plana se pueden construir con dos triángulos rectángulos isósceles que sean congruentes?

Tabla 22. Descriptor 2 de nivel II.

Entrevista 2, nivel II.
La entrevista contiene preguntas relacionadas con el segundo descriptor del nivel 2.
“Reconoce el rectángulo y cuadrado, y sus propiedades, además de sus elementos constitutivos”

Descriptor 2.2. de nivel II

48. Observa los siguientes lados de cada rectángulo de la figura 1 y 2 en la cuadrícula.

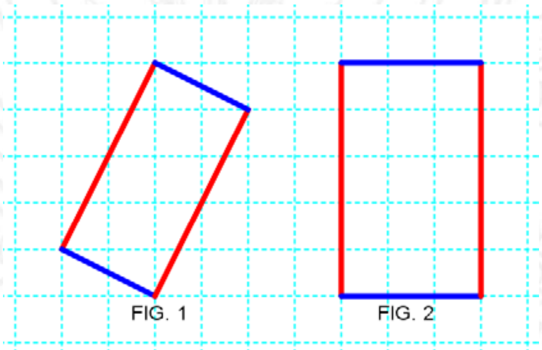


Figura 71. Lados paralelas del rectángulo.

49. Los lados opuestos, de colores rojos ¿son congruentes?

Tabla 22. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN.
Dos lados o segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

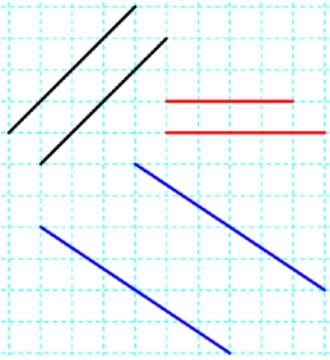
Aporte de información sobre segmentos congruentes.

1. Los lados opuesto de color rojo ¿son congruentes?
2. Los lados opuestos, de color azul ¿son congruentes?
3. Los lados consecutivos, rojo y azul, ¿son congruentes?
4. los lados opuestos del rectángulo, tienen una relacion especial, son lineas paralelas.¿Sabes que son líneas paralelas?

Tabla 23. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN:

Líneas paralelas: son líneas que siempre se mantienen en la misma distancia, si las líneas se alargaran o prolongaran nunca se encontrarían o se interceptarían. Ejemplo: las líneas con el mismo color son paralelas.



Aporte de información sobre líneas paralelas

5. Es correcto decir, entonces, que todo rectángulo, ¿tiene lados paralelos y sus lados opuestos son iguales?
6. Ahora observa los siguientes rectángulos de la figura 1, 2, 3 y 4. ¿Los ángulos de cada rectángulo miden 90˚?

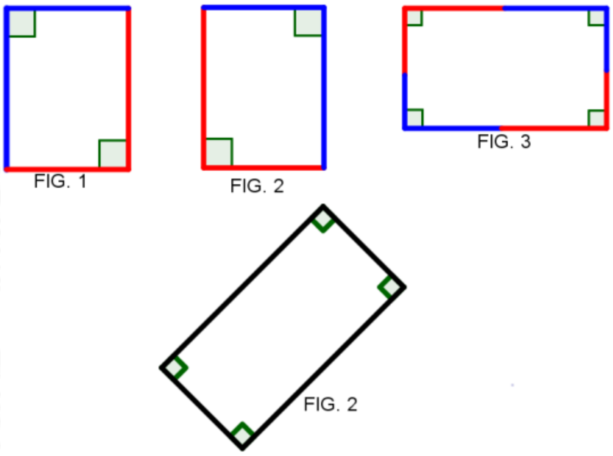


Figura 72. Lados perpendiculares del rectángulo

7. Los lados consecutivos del rectángulo ¿son de medidas diferentes?

Nota. *S*e aclara que los lados consecutivos son los lados que siguen uno del otro en el rectángulo.

8. Ahora observa detenidamente los lados consecutivos del rectángulo de la figura 1 y 2, es decir, el par de lados de color rojo y el par de lados de color azul. ¿forman ángulos rectos?
9. ¿Entonces, es correcto decir que cada par de lados consecutivos de un rectángulo forman, siempre, un ángulo recto?
10. ¿O sea que los dos lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares?, ¿por qué?
11. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un rectángulo?
12. Observa los siguientes lados de cada cuadrado de la figura 1 y 2 en la cuadrícula.

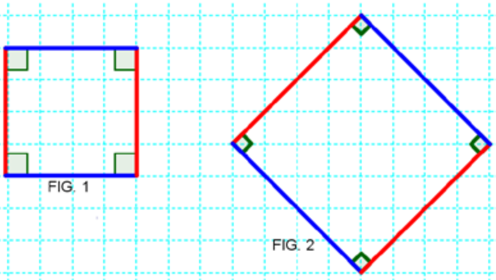


Figura 73. Lados opuestos del cuadrado.

13. Los lados opuestos de cada cuadrado de color azul ¿son congruentes?
14. Los lados opuestos de cada cuadrado de color rojo ¿son congruentes?
15. Las dos lineas azules ¿son lados paralelos? ¿por qué?
16. Las dos lineas rojas, ¿son lados paralelos?
17. Ahora observa los lados consecutivos de colores rojos del cuadrado de la figura 1, 2, 3 y 4., ¿forman un ángulo recto?

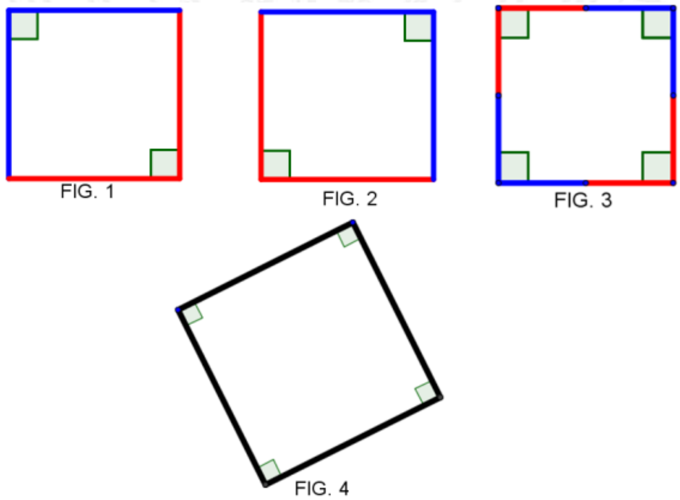


Figura 74. Lados consecutivos de del cuadrado

18. ¿O sea que los dos lados consecutivos de un cuadrado son perpendiculares? ¿Explica por qué?
19. ¿Cuánto suman los ángulos internos de un cuadrado?

Tabla 24. Tercer descriptor del nivel II

Entrevista 3, nivel II.
La entrevista contiene preguntas relacionadas al tercer descriptor.
“Establece comparación de área de las figuras planas para reconocer que dos o más figuras planas con diferentes superficies, pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos”

Descriptor 2.3. del nivel II.

1. La figura 1, es un trapecio, el cual mediante un procedimiento geométrico, se ha transformado en otra figura geométrica, figura 2.

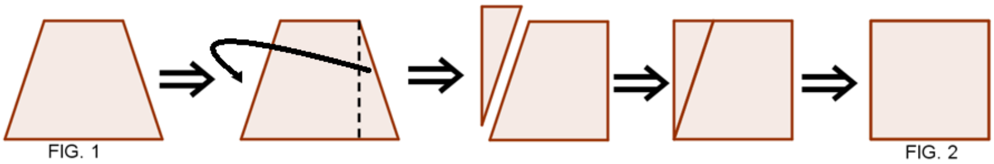
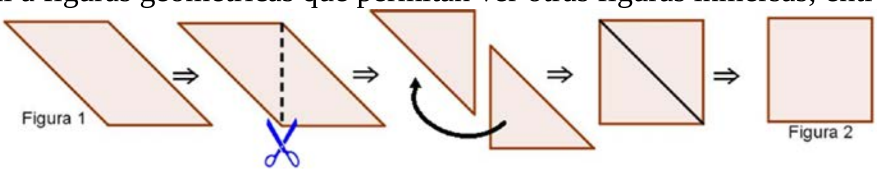


Figura 75. Transformación de una figura en otra por procedimiento geométrico.

Tabla 25. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN:

Procedimiento geométrico: es una técnica que permite transformar una superficie en otra para luego compararla. Una forma de hacerlo es recortar una figura y trasladarla a otra parte de la misma figura. Otra forma, es realizar construcción de líneas paralelas, altura, mediana, diagonal a figuras geométricas que permitan ver otras figuras inmersas; entre otras.



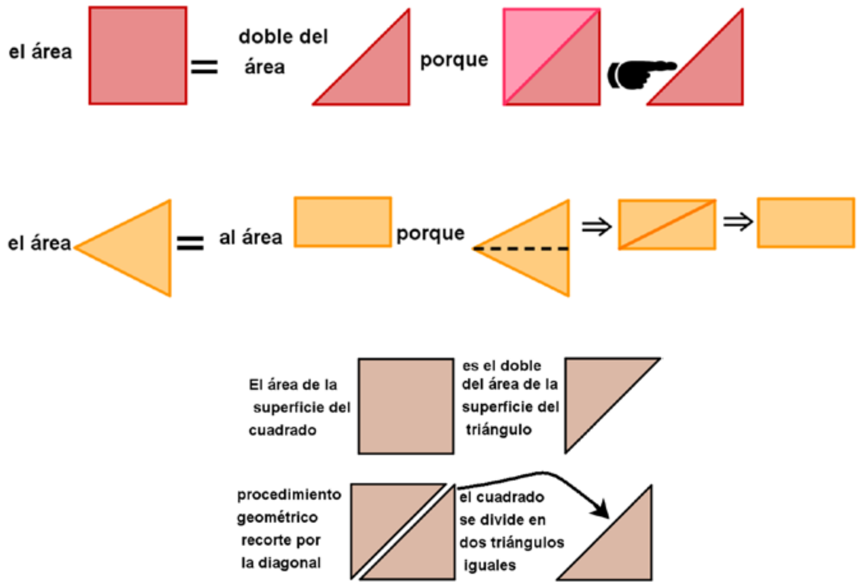
Aporte de información de procedimiento geométrico

2. Según lo anterior, se puede concluir que ¿cualquier superficie de una figura plana se puede transformar en otra? explica ¿por qué?

Tabla 26. Aporte de información

APORTE DE INFORMACIÓN:

Comparación de áreas de superficies: es establecer una relación de igualdad, o desigualdad entre áreas de figuras geométricas. El **área** se define como la cantidad del plano ocupado por la superficie, utilizando procedimientos geométricos. Ejemplo:



Aporte de información comparación de áreas como cantidad del plano ocupado por la superficie

2. Observa las figuras y analiza la siguiente situación, acerca de la comparación de área de dos superficies distintas. Inicialmente la figura 1 y 2 tienen diferentes superficies, ¿es eso cierto? ¿Qué clase de superficie tienen las dos figuras?

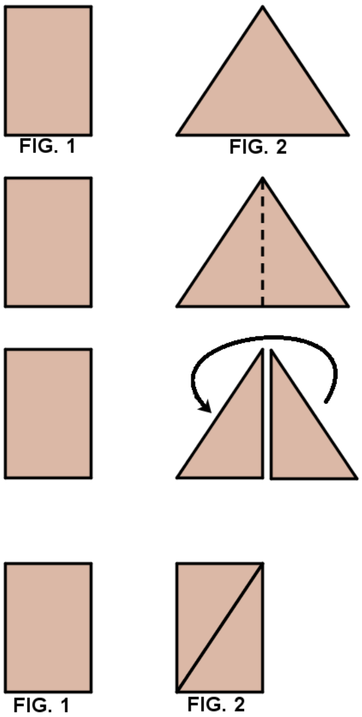


Figura 76. Proceso de comparación de área del rectángulo y triángulo

3. Ahora, se comparan las áreas para saber si son iguales, entonces se realiza un procedimiento geométrico de recorte y pegado con la figura 2, para transformarla en la superficie de la figura 1. ¿Se hizo correctamente ese procedimiento?
4. Finalmente, resulta un rectángulo como muestra la figura 2, ¿Es congruente o igual al rectángulo de la figura 1
5. ¿Entonces se puede concluir que el rectángulo de la figura 1 tiene igual área que el triángulo de la figura 2?
6. ¿Explica por qué llegaste a esta conclusión?
7. A continuación encontrarás un conjunto de pares de figuras 1 y 2, las figuras 2 han sido cortadas como se señala en la gráfica.

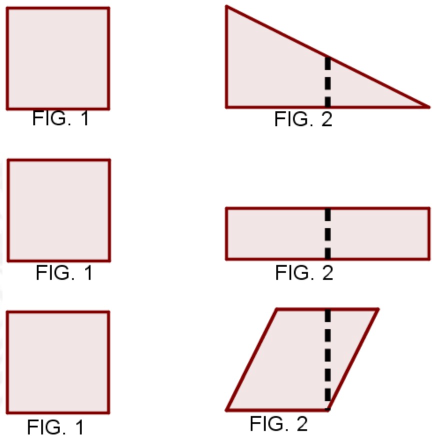


Figura 77. Reconfiguración de la forma de la figura 2 en la fugura 1.

8. Si comparas cada par de figuras 1 y 2 ¿Es posible afirmar que tienen la misma área? ¿Por qué?

9. En el barrio donde vive Tomás se encuentran dos parques, 1 y 2, él quiere saber en cuál hay más espacio para jugar y correr con sus amigos. A continuación, se presentan los planos, obsérvalos y ayúdale a Tomás A definir ¿En cuál parque hay más área para jugar?

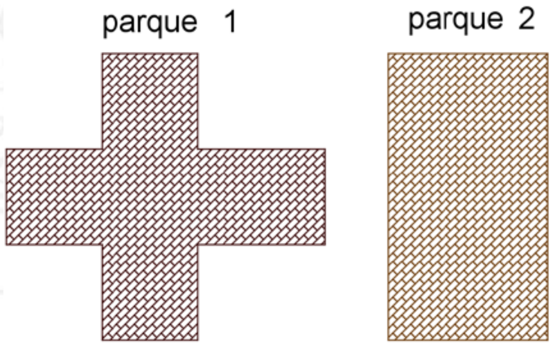


Figura 78. Representación de dos parques en forma de figuras geometricas.

Nota. Se entrega una tijera para que proceda hacer algún procedimiento geométrico como: estimación; superposición; recorte y pegado; descomposición conveniente de la superficie; reconfiguración por complementariedad de formas de las partes en la que se ha dividido la superficie.

10. Doña Juana quiere comprar dos telas para hacerse algunos vestidos, el señor de la textilería le muestra dos cortes, uno de color azul y otro de color rosado, que tienen la misma cantidad de tela, pero no tienen la misma forma, sin embargo, ella está confundida porque cree que está siendo engañada. El señor le explica pero aún no entiende. ¿De qué manera explicarías a Doña Juana que las telas tienen la misma cantidad?

FIG. 1 FIG. 2

Figura 79. Representación de dos telas con diferentes formas.

Nota. Se entrega lápiz y tijeras, para realizar algún procedimiento geométrico

11. Entonces, cuando se habla "la misma cantidad de tela" ¿Es correcto concluir que se está refiriendo a que las telas tienen igual área?

12. Las figuras A y B representan dos pisos cubiertos de la misma baldosa. ¿Tiene el piso A la misma cantidad de baldosas que el piso B?

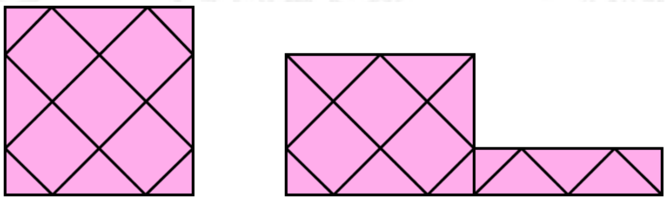


FIG. 1 FIG. 2

Figura 80. Representacion de pisos con baldosas de diferentes formas.

13. ¿Qué procedimiento utilizaste para dar respuesta a la pregunta anterior?

14. ¿Es posible utilizar otros procedimientos geométricos para averiguar si tienen o no igual área? ¿Cúales?

15. Analiza la siguiente situación, imaginas que estas dos son tortas de forma cuadrada y triangular, el pastel triangular ya tiene un corte hecho con un cuchillo

por la señora de la tienda, como muestra la figura y tú estás muy hambriento, ¿Cuál preferirías comer para quedar satisfecho? ¿Por qué?

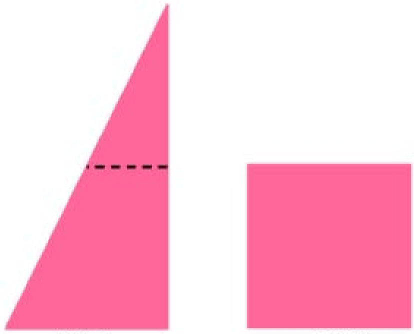


FIG. 1 FIG 2

Figura 81. Representación de pasteles en forma rectangular y cuadrada

16. Un estudiante del grado 5 utilizó vinilo de color naranja para pintar el rectángulo y el triángulo hechos de cartón paja, ¿crees que necesitó la misma cantidad de pintura en ambas figuras? ¿Por qué?

FIG. 1 FIG 2

Figura 82. Representacion del rectángulo y triángulo en cartón paja.

Nota. En caso de decir que no, se procede a establecer un dialogo socrático. Se entrega al estudiante regla, tijera y lápiz.

17. Toma el rectángulo y traza una diagonal, ¿se dividió en dos partes iguales?
18. Recorta la figura que trazaste por diagonal. Ahora, arma los dos trozos o pedazos un triángulo. ¿De cuántas formas se puede formar un triángulo?
19. Forma un triángulo similar al otro triángulo, ¿es posible?
20. Coloca la figura formada sobre el otro triángulo. ¿Son iguales las figuras?
21. Entonces, ¿tienen la misma área? Entonces, ¿necesitó la misma cantidad de pintura?

22. ¿Si se necesitó la misma cantidad de pintura, también se necesitó la misma cantidad de cartón paja? ¿Por qué?

23. La superficie de la figura 2, se ha transformado en la figura 1, por el procedimiento de recorte y pegado, tal como se indica en la figura. ¿Poseen la misma área?

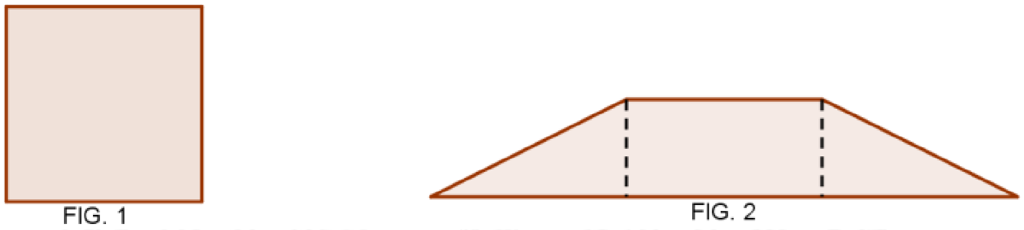


Figura 83. Reconfiguración de la superficie del trapecio en la supeficie del cuadrado.

24. Observa el par de figuras 1 y 2 dadas a continuación. ¿Es correcto afirmar que las dos superficies tienen igual área?

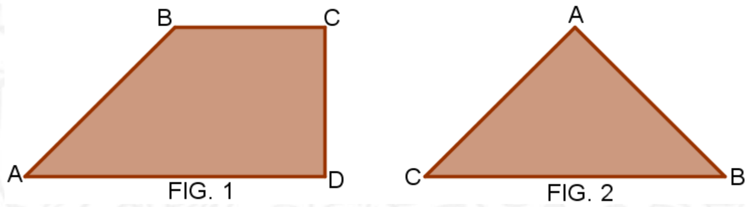


Figura 84. Comparacion de la superficie del trapecio y la superficie del triángulo.

Nota. En caso de decir que no, se inicia un dialogo socrático. Sugerencias: Se le entrega papel donde están las figuras, lápiz y tijeras.

25. La figura 1, es un trapecio. Traza una diagonal desde B hasta D.

26. Ahora compara el triángulo ABD de la figura 1 con el triángulo ABC de la figura 2. ¿Son iguales?

Nota. En caso de decir que no, se recortan los dos triángulos ABD Y ABC y que compare.

27. El otro triángulo BCD incluido en la figura 1. ¿Está sobrando?

28. Por lo anterior, se puede concluir que el área de la figura 1 es mayor que el área de la figura 2, ¿es eso cierto? ¿Por qué?

29. Ahora compara la figura 1, es un triángulo ABC, con la figura 2, es un rectángulo CDEF. ¿las áreas del triángulo y el rectángulo son iguales? ¿Por qué?

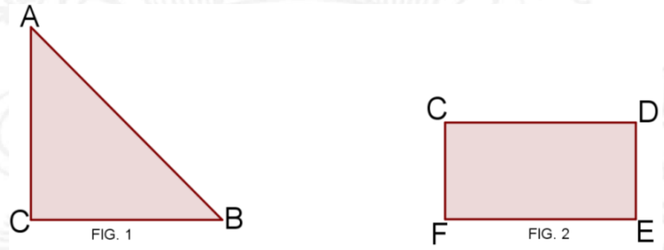


Figura 85. Comparacion de áreas del triángulo y el rectángulo.

Nota. En caso de que se le dificulte responder correctamente, se inicia un diálogo socrático. Se le entrega la hoja donde están las dos figuras, lápiz y tijeras.

30. Traza el punto medio entre A y B.

31. Ahora traza el punto medio entre A y C.

32. Une los dos puntos medios con un segmento.

33. Recorta con una tijera el segmento trazado.

34. Ahora traslada la figura que obtuviste al recortar, de manera que se transforme en la superficie del rectángulo de la figura 2.

35. ¿Es posible concluir que el área de la superficie del triángulo es igual al área de la superficie del rectángulo?

36. Explica por qué tienen igual área las dos figuras.

37. Ahora observa esta nueva figura, parecida a la anterior. ¿Es el área sombreada igual al área sin sombrear? ¿Por qué?

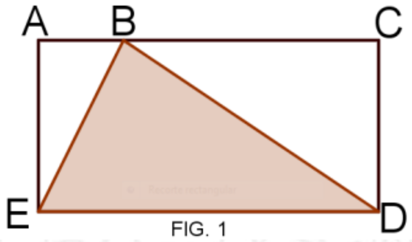


Figura 86. Triángulo escaleno sombreado inscrito en un rectángulo.

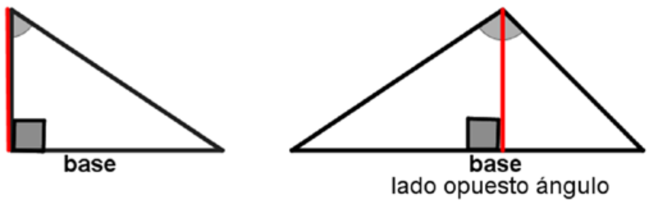
Nota. En caso de que se le dificulte responder correctamente, se inicia un dialogo socrático. Se le entrega la hoja donde están la figura, regla o escuadra y lápiz.

38. Traza un segmento perpendicular a ED, que pase por el vértice B. (traza la altura del triángulo sombreado BDE) ¿el segmento trazado es igual al lado AE?

Tabla 27. Aporte de información.

APORTE DE INFORMACIÓN.

Altura del triángulo: es un segmento perpendicular que inicia por el vértice del ángulo y finaliza en el lado opuesto al ángulo, llamado base. La línea roja representa la altura de los dos triángulos.



Aporte de información sobre la altura del triángulo

39. La figura sombreada se dividió en triángulos. hay dos triángulos sombreados y dos no sombrado dentro del rectángulo. ¿Es correcto?

40. Observa los dos triángulos pequeños, el sombreado y el no sombreado. ¿los dos triángulos forman un rectángulo?

41. ¿Puedo decir que el segmento que comparten es la diagonal del rectángulo?

42. ¿Los dos triángulos son congruentes?

43. ¿Respecto al área que concluyes? Cómo es el área de los otros dos triángulos grandes.

44. ¿Los dos triángulos tienen igual área?

45. Si los dos triángulos pequeños tiene igual área y los otros dos triángulos grandes tienen igual área, ¿entonces el área sombreada y no sombreada tienen igual área?

46. ¿El área sombreada es igual al área no sombreada? ¿Por qué? Explica más detalladamente.

47. Ahora analiza, respecto a la figura anterior, ¿Crees que es necesario trazar la altura del triángulo sombreado para observar mejor y darte cuenta de que el área del triángulo sombreado es la mitad del área del rectángulo?

48. En el rectángulo ACDE, esta inscrito un triágulo rectángulo BDE, compara el área sombreada con el área sin sombrear. ¿Son iguales? ¿Por qué?

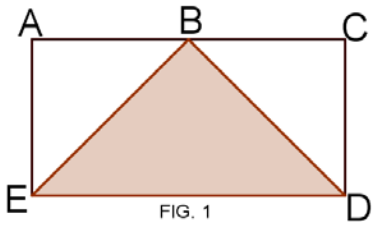


Figura 87. Triángulo isósceles sombreado inscrito en un rectángulo.

49. En el siguiente gráfico, hay una figura sombreada inscrita en el rectángulo; la figura 1 es igual a la figura 2. La figura 1 no tiene trazadas las medianas del rectángulo, mientras que la figura 2 sí, ¿Es mayor el área sombreada o el área sin sombrear? ¿Por qué?

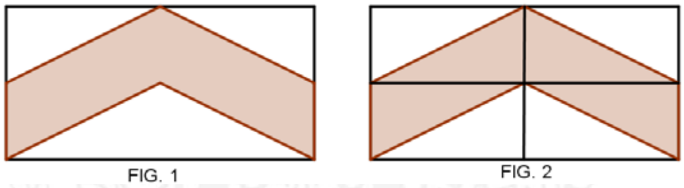


Figura 88. Áreas sombreadas en rectángulos.

50. ¿Crees que el procedimiento realizado en la figura 2, al tener trazadas las medianas, te facilitó comparar las áreas de las superficies sombreadas y no sombreadas?

51. Para las figuras presentadas a continuación ¿Aceptas que el área de la figura 1 es cuatro veces el área de la figura 2?

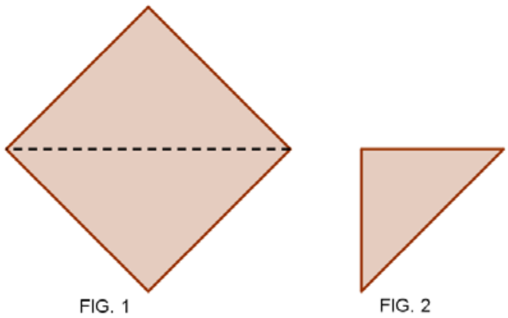


Figura 89. Comparación de áreas de triángulos.

52. Ahora compara las áreas de las figuras dadas a continuación. ¿El área de la figura 1 es el doble del área de la figura 2?

53. ¿Cuántas veces el área de la figura 2 está contenida en el área de la figura 1?

54. Observa y compara la figura 1 y 2, ¿Cuál es la relación entre las áreas de la figura 2 y 1?

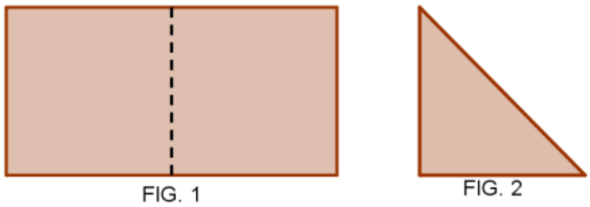


Figura 90. Comparación de áreas de un rectángulo y un triángulo.

55. ¿O sea que el área del rectángulo contiene el área del triángulo rectángulo en 4 veces?

56. Para las figuras dadas a continuación, el área del triángulo rectángulo escaleno, que es la figura 2, está contenida en la figura 1, ¿Cuántas veces?

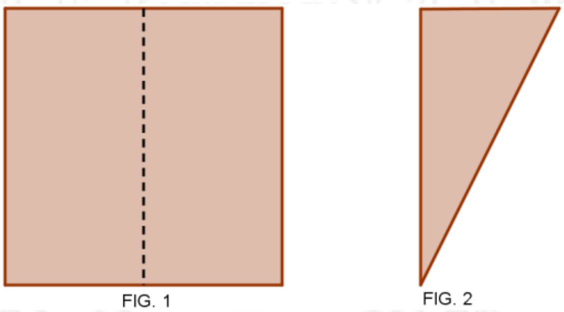


Figura 91. Comparación de áreas de un cuadrado y un triángulo

57. A continuación se muestran tres figuras en una secuencia, ¿Qué ocurrió en la figura 3?

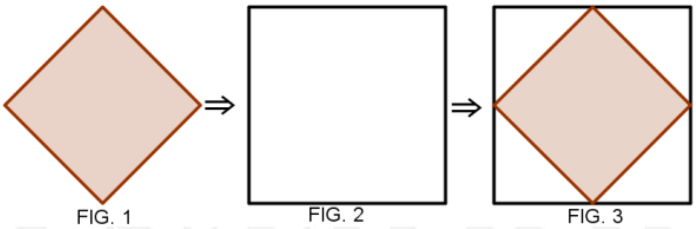


Figura 92. El área del cuadrado como mitad de otro cuadrado

58. El cuadrado sombreado inscrito en el cuadrado de la figura 3, ¿corresponde a la mitad del área del cuadrado no sombreado?

59. El cuadrado de la figura 1 es igual al cuadrado sombreado en la figura 3, ¿es correcto?

60. El cuadrado de la figura 2 corresponde al cuadrado no sombreado de la figura 3, ¿es cierto?

61. Ahora observa los vértices del cuadrado inscrito, ¿se interceptan en los puntos medios del cuadrado no sombreado?

62. En la figura tres hay 4 triángulos rectángulos isósceles no sombreados. ¿Son congruentes?

63. ¿Se puede formar con los cuatro triángulos no sombreados de la figura 3 el mismo cuadrado sombreado de la figura 3?

64. Entonces, respecto a la figura 3, ¿el área del cuadrado sombreado es el doble del área del cuadrado no sombreado? ¿Por qué?

Nota. Si aún tiene duda, respecto a la pregunta, se le plantea la siguiente situación:

Se le entrega lápiz, regla, tijeras y una cartulina plana con las figuras 1 y 2.

50. Ubica la figura 1 sobre la figura 2, similar al cuadrado sombreado de la figura 2, planteada anteriormente. ¿Es la misma situación de la figura 3?

51. Ahora, traza una diagonal a la figura 1 y traza las 2 diagonales de la figura 2.

52. Ahora, recorta por la diagonal de la figura 1, y con los dos trozos trata de recubrir la superficie de la figura 2, de manera que coincida con dos triángulos rectángulos de la figura 2. ¿Qué puedes concluir?

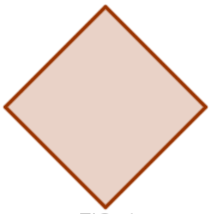


FIG. 1

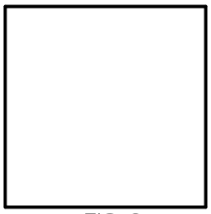


FIG. 2

Figura 93. Comparacion de dod cuadrados de distintas áreas.

53. Ahora responde nuevamente, ¿es el área del cuadrado de la figura 1 igual al doble del área del cuadrado de la figura 2?

54. Ahora, observa los dos cuadrados en la figura 1 y 2, dibujados en una cartulina plana cuadriculada. Traza un diagonal al cuadrado de la figura 2 y contesta, lo siguiente. ¿El área del cuadrado de la figura 1 corresponde a la mitad del área del cuadrado de la figura 2?

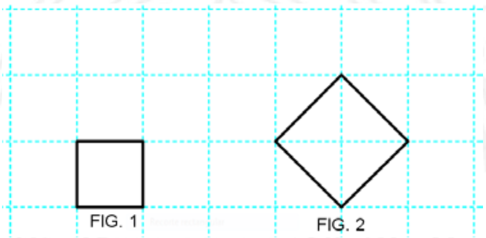


Figura 94. Comparacion de cuadrados en cuadrículas.

55. Puedes entonces, afirmar que ¿es el área del cuadrado de la figura 2 es el doble del área del cuadrado de la figura 1?, ¿qué contesta a esto? ¿Por qué?

Tabla 28. Cuarto descriptor del nivel II

Entrevista 4, nivel II. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el cuarto descriptor. **“**Construye cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares”

Descriptor 2.4 del nivel II.

1. Observa las figuras

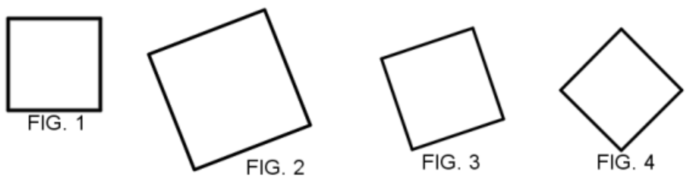


Figura 95. Reconocimientos de cuadrados en diferentes posiciones

Las figuras anteriores, son cuadrados que están en posiciones diferentes. Ahora, con ayuda de la cuadrícula, construye en cada uno de los segmentos un cuadrado.

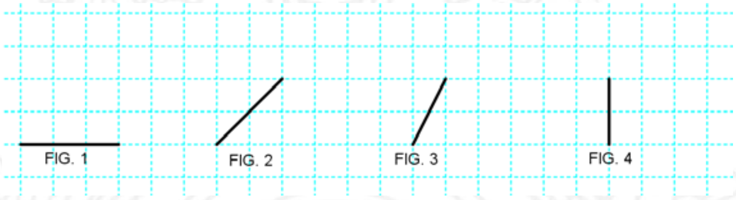


Figura 96. Construcción de cuadrado sobre segmento en cuadrícula.

2. Ahora, sin cuadriculada, construye en cada uno de los segmentos, nuevamente, un cuadrado.

Figura 97. Construcción de cuadrado sobre segmento.

3. ¿En qué situación es más fácil construir el cuadrado, en la hoja con cuadricula o la hoja sin la cuadricula? ¿Por qué?

4. Observa la siguiente secuencia en la construcción del cuadrado

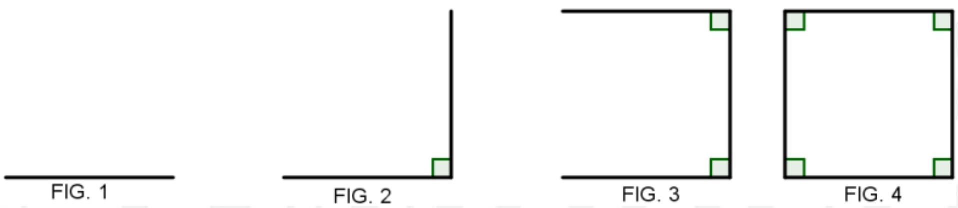


Figura 98. Construcción de un cuadrado sobre un segmento.

5. ¿Es correcto decir que sobre un segmento se puede construir cualquier cuadrado?

6. Observa los siguientes rectángulos.

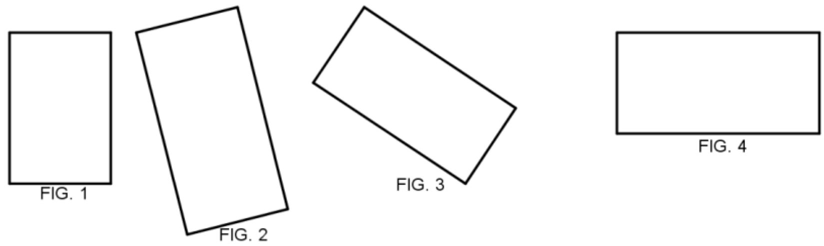


Figura 111. Rectángulos en diferentes posiciones.

7. Con ayuda de la cuadricula, construye en cada uno de los segmentos un rectángulo.

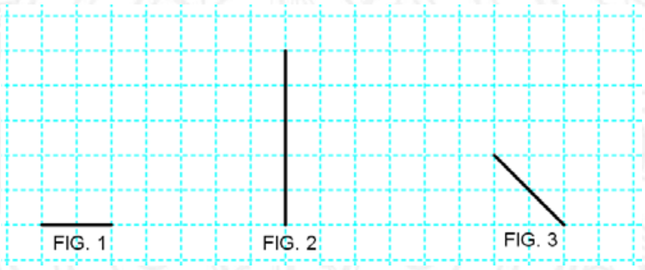


Figura 99. Segmentos para construcción de rectángulo.

8. Dados los siguientes cuadrados, construye otros cuadrados congruentes sobre las figuras dadas a continuación. Estas construcciones las harás como se indica: Para la figura 1, construye el cuadrado sobre el segmento superior; para la figura 2, construye el cuadrado sobre el segmento *a*; para la figura 3, construye el cuadrado sobre el segmento AD.

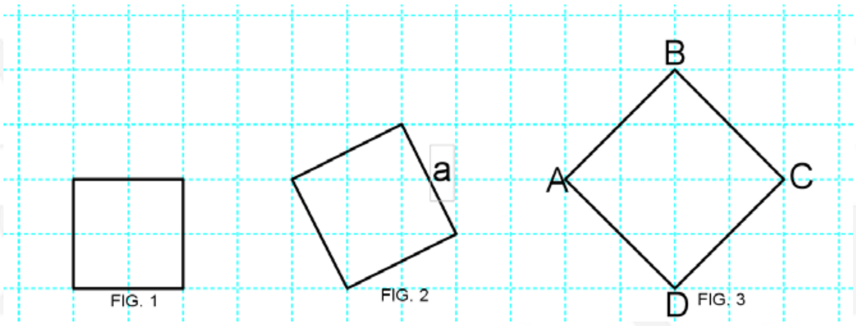


Figura 100. Construcción de cuadrados sobre un lado del cuadrado dado.

9. ¿Siempre es posible construir un cuadrado congruente sobre los lados de otro cuadrado?

10. Dados los siguientes rectángulos, construye un cuadrado sobre el lado “**a**” de la figura 1 y 2.

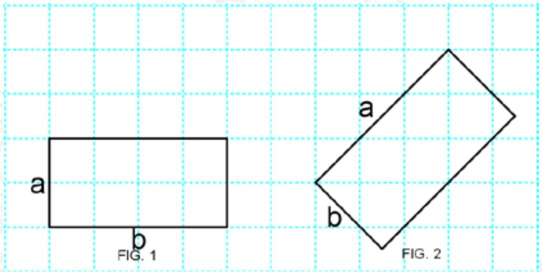


Figura 101. Construcción de cuadrados sobre lados del rectángulo.

11. Dados los triángulos rectángulos, construye un cuadrado sobre el lado a, el lado b y el lado c” de las figuras 1, 2 y 3.

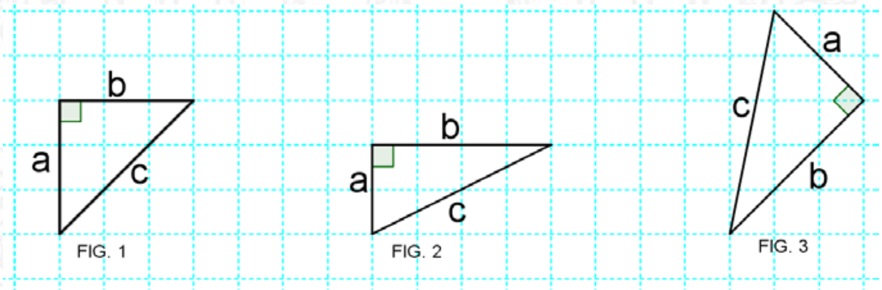


Figura 102. Construcción de cuadrados sobres triángulos rectángulos

12. Con ayuda de la cuadricula, construye cuadrados sobre las diagonales de las siguientes figuras.

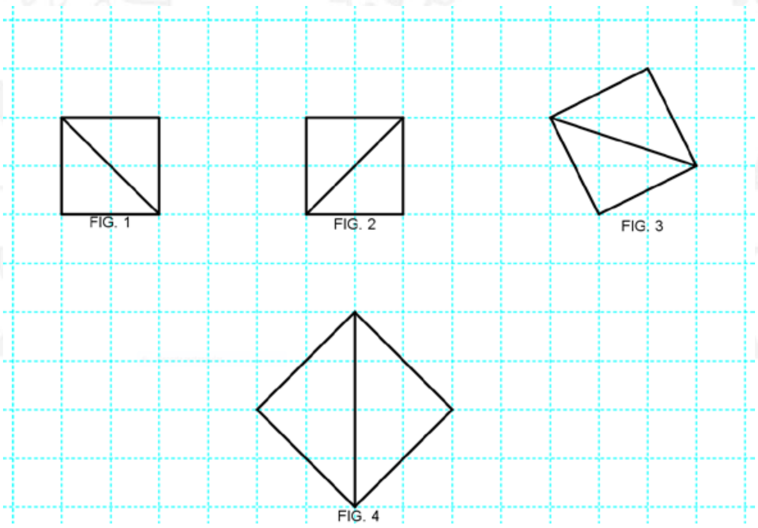


Figura 103. Construcción de cuadrados sobre diagonal de cuadrado dado.

13. El cuadrado construido sobre la diagonal ¿tiene un área mucho más grande que el cuadrado inicial? ¿Por qué?

14. Con ayuda de la cuadricula, construye sobre la diagonal del rectángulo un cuadrado

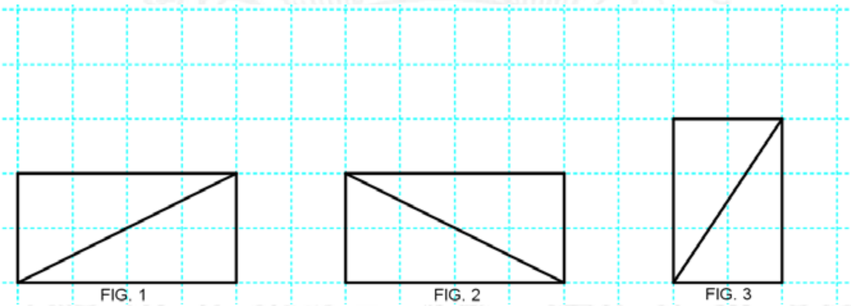


Figura 104. Construcción de cuadrados sobre diagonal de rectángulos

15. Es el área del cuadrado construido sobre la diagonal es mayor que el área del rectángulo? ¿Por qué?

16. Ahora sin cuadricula, construye un cuadrado sobre la diagonal de las figuras 1 y 2.

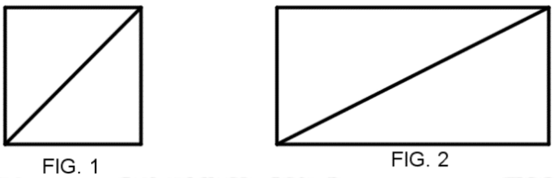


Figura 105. Construcción de cuadrado sobre diagonales.

Tabla 29. Quinto descriptor de nivel II

Entrevista 5, nivel II. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el quinto descriptor. **“Reconoce que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales”**

Descriptor 2.5 del nivel II.

1. Observa las siguientes figuras, ¿Qué podrías decir sobre la siguiente secuencia?

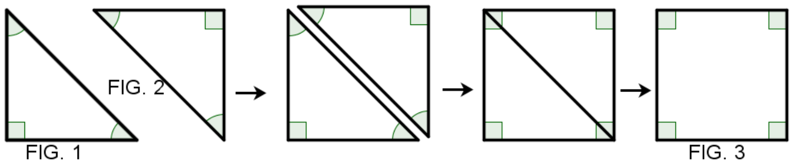


Figura 106. Formacion de cuadrados con dos triángulos rectangulos congruentes.

2. ¿Es correcto concluir que dos triángulos rectángulos isósceles forman un cuadrado?

3. ¿Podrías decir por qué se forman dos triángulos rectángulos isosceles con un cuadrado?

4. Observa el siguiente cuadrado, traza una diagonal, ¿es posible generar dos triángulos rectángulos isósceles de igual área? ¿Por qué?

5. Ahora traza otra diagonal,

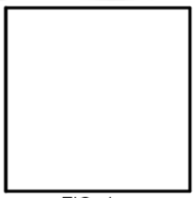


FIG. 1

Figura 107. Cuadrado para generar triángulo congruentes.

6. ¿Se generaron cuatro triángulos rectángulos isósceles congruentes? ¿por qué?

7. Entonces las áreas de cada triángulo rectángulo formado por las dos diagonales ¿son iguales?

Tabla 30. Sexto descriptor de nivel II.

Entrevista 6, nivel II. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el sexto descriptor. **“Reconoce que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas”**

Descriptor 2.6 del nivel II.

1. Observa las siguientes figuras, ¿puedes hacer una descripción detallada acerca de la secuencia de los siguientes triángulos rectángulos escalenos?

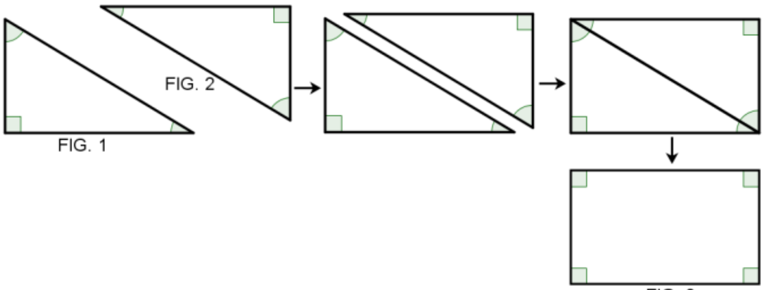


Figura 108. Construccion de un rectángulo a partir de dos triángulos rectángulos escalenos

2. Según la secuencia, ¿dos triángulos rectángulos escalenos unidos por el lado más largo forman un rectángulo?
3. Observa el siguiente rectángulo, al trazar una diagonal, ¿Es posible generar dos triángulos rectángulos escalenos de igual área?

FIG. 1

Figura 109. Construcción de triángulo rectángulo escaleno a partir de un rectángulo.

4. ¿Cómo puedes argumentar que tienen igual área?

5. Ahora trazas otra diagonal. ¿Es posible generar cuatro triángulos rectángulos escalenos de igual área?

6. Ahora traza, las dos medianas del rectángulo, ¿Cuántos figuras congruentes se formaron? ¿Qué puedes concluir si se trazan las dos medianas y las dos diagonales? rectángulo?

Tabla 31. Séptimo descriptor de nivel II

Entrevista 7, nivel II. La entrevista contiene preguntas relacionadas con el séptimo descriptor. Afirma sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, mediante el trazo de sus medianas.

Descriptor 2.7 del nivel II.

1. Toma una hoja, y a partir del doblado de papel, traza una mediana al rectángulo.

Nota. Se le entrega una hoja rectangular de manera que su área sea el doble de un cuadrado. Debe asegurarse que tome la hoja en sus manos de manera como muestra el dibujo.

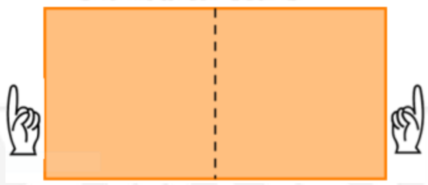


Figura 110. Representación de hoja rectangular

2. Dobla la hoja por la mediana completamente con el fin de formar una nueva figura, ¿qué figura se formó con el doblez?

3. Ahora, abre la hoja nuevamente en la posicion inicial y observa la mediana que trazaste, ¿Es correcto afirmar que la mediana formó dos cuadrados de igual área?

4. ¿Quiere decir entonces, que la superficie de la hoja es igual doble del cuadrado formado por la mediana?

5. ¿Es posible, a partir de la superficie de un rectángulo, formar dos cuadrados congruentes o de igual área?

6. Observa las siguientes figuras, ¿Puedes dar una descripción detallada de la secuencia, respecto a la figura 1, 2, 3 y 4?

Figura 111. Rectángulo de área doble de un cuadrado.

7. ¿Se puede afirmar que en todo rectángulo, al trazar una mediana, se

8. ¿Forman dos cuadrados de igual área? ¿Por qué?

Nota. En caso decir que sí, proceder a un dialogo socrático.

9. Construye un rectángulo, uniendo, sólo los puntos azules.

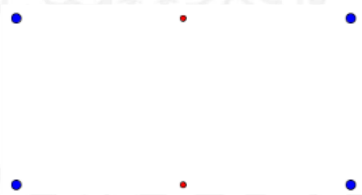


Figura 112. Construcción de rectángulo dado puntos.

10. Ahora une los puntos rojos con un segmento, el segmento formado es la mediana del rectángulo ¿es eso cierto?

11. La mediana dividió el rectángulo en dos cuadrados congruentes, ¿correcto?

12. Construye un rectángulo, uniendo los puntos negros de la figura, luego traza una mediana, uniendo los puntos medios del rectángulo que están de color rojo.

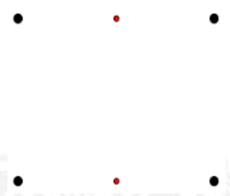


Figura 113. Construcción de cuadrado dado puntos.

13. Las figuras formadas por la mediana del rectángulo ¿son cuadrados

14. Al trazar una mediana al rectángulo, ¿siempre es posible formar dos cuadrados de igual área?

15. Ahora observa las siguientes secuencias y los lados de la figura 1, 2 y 3.

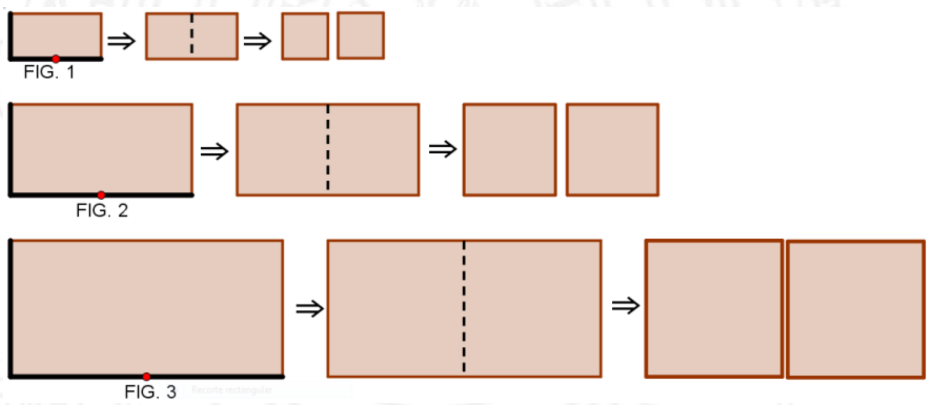


Figura 114. Lados del rectángulo igual a lados de dos cuadrados.

16. ¿La altura del rectángulo es la mitad de la base del rectángulo?

17. ¿La base del rectángulo es el doble de su altura?

18. En la siguiente hoja o cartulina plana cuadriculada hay un rectángulo formado por dos cuadrados, ahora dibuja otro rectángulo, diferente a la figura 1, que también sea formado por dos cuadrados.

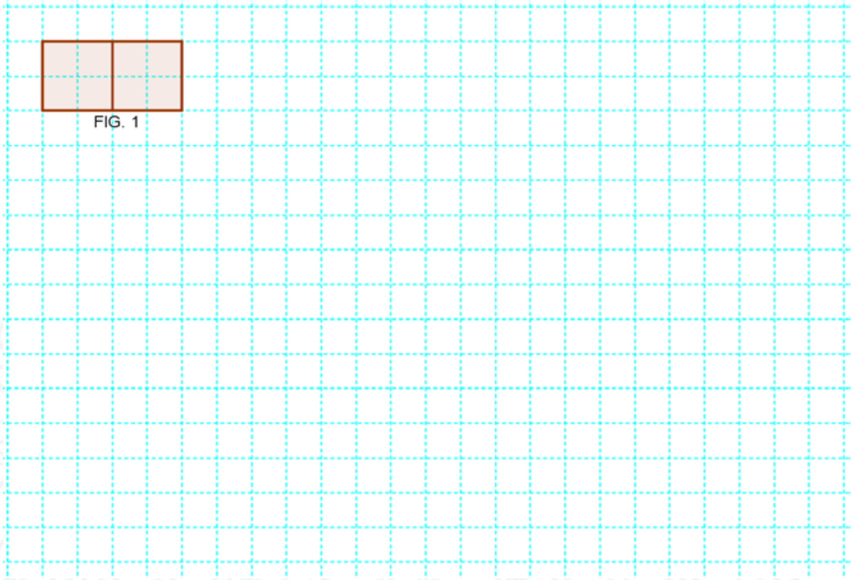


Figura 115. Construcción de rectángulos de área doble de un cuadrado.

19. ¿El rectángulo que formaste corresponde a dos veces el área del cuadrado?

20. Ahora forma un rectángulo más grande en la cuadrícula de manera que sea el doble del área de un cuadrado

21. ¿Qué tuviste en cuenta en el momento de dibujar el rectángulo?

22. ¿Qué condición debe tener un rectángulo para formar dos cuadrados de igual área al trazar su mediana?

23. Ahora observa las secuencias de las siguientes figuras y contesta.

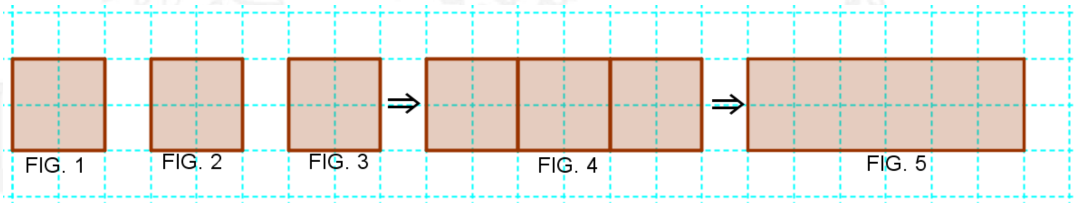


Figura 116. Construcción de un rectángulo de área triple que un cuadrado

24. ¿Qué paso en la figura 4? ¿Que se formó?

25. ¿Es posible afirmar que el área del rectángulo de la figura 5 es el triple del área del cuadrado de la figura 1?

26. ¿O sea que rectángulo es una figura de área triple a la del cuadrado?

27. En la siguiente cuadrícula, construye un rectángulo de área triple a la de un cuadrado.

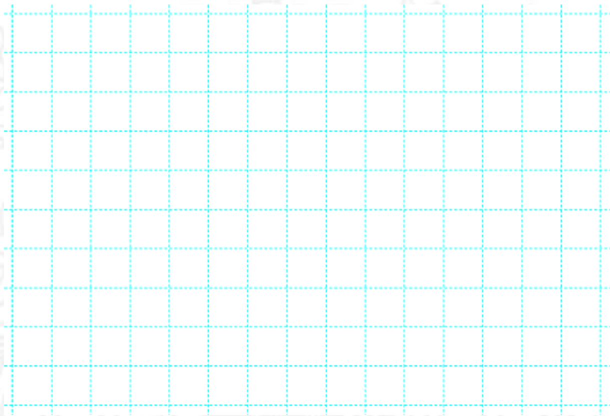


Figura 117. Construcción de un rectángulo de área triple de un cuadrado.

28. Finalmente, construye un rectángulo de área doble de un cuadrado y un construye un rectángulo de área triple de un cuadrado, sin utilizar cuadrícula.

3.11. ENTREVISTA NIVEL III.

En este nivel, el estudiante relaciona unas propiedades con otras, estableciendo clasificaciones y relaciones que existen entre ellas, llegando a dar definiciones sobre el concepto en cuestión.

3.11.1. Descriptores de nivel III

A continuación se nombran los siguientes descriptores para este nivel:

3.1 Comprende que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.

3.2 Entiende que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado, es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.

3.3 En la construcción del triángulo rectángulo isósceles, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

3.4 Establece la relación de igualdad que se presenta en un triángulo rectángulo escaleno donde la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud (catetos), es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud (hipotenusa), a través de las comparaciones de áreas.

3.11.2. Objetivo del nivel III de razonamiento.

Los objetivos apuntan a cada uno de los descriptores y permiten exhibir el razonamiento sobre las relaciones y propiedades que se establecen entre las áreas de los cuadrados construidos sobre un triángulo rectángulo isósceles y escaleno. Estas construcciones tienen como punto de inicio, la construcción de un cuadrado, a partir de la diagonal del rectángulo o del cuadrado inicialmente dado o construido. A continuación se presentan los objetivos que guiaron las actividades propuestas:

- Comprender que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.

- Entender que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.
- Comprender las relaciones de igualdad de áreas cuando los dos cuadrados de lados de menor longitud construidos sobre un triángulo rectángulo isósceles es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor, mediante las comparaciones de áreas.
- Establecer la relación de igualdad que se presenta en un triángulo rectángulo escaleno donde la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud (catetos), es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud (hipotenusa), a través de las comparaciones de áreas.

3.11.3. Actividades propuestas para la el nivel III.

Las actividades presentadas a continuación tienen que ver con una entrevista de tipo socrático y una actividad escrita que permitieron establecer los descriptores finales. La actividad 1, para este nivel III, permite que el estudiante manifieste su razonamiento frente a las relaciones de áreas y propiedades que se establecen en un triángulo rectángulo escaleno e isósceles, mediante la comparación de áreas de figuras planas.

Tabla 32. Primer descriptor del nivel III.

Entrevista 1, nivel III. La entrevista contiene preguntas relacionadas al primer descriptor. **"Comprende que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado"**

Descriptor 3.1. del nivel III.

1. Observa los siguientes cuadrados. Compara la diagonal del cuadrado de la figura 1 con un lado del cuadrado de la figura 2. ¿son iguales?

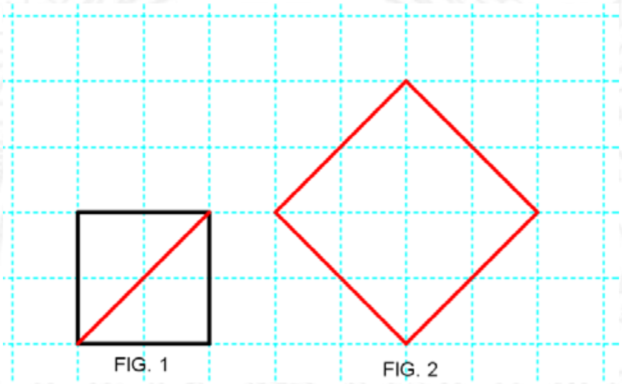


Figura 118. Comparación de dos cuadrados.

2. Observa a continuación las mismas figuras anteriores, sin embargo la figura 2 tiene dos diagonales.

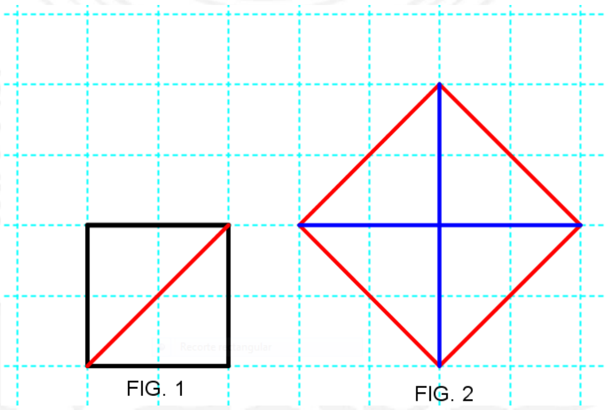


Figura 119. Comparación de dos cuadrados con diagonales.

3. ¿Es cierto decir que un triángulo rectángulo isósceles formado por las dos diagonales de la figura 2 es congruente con un triángulo isósceles del cuadrado de la figura 1 formado por la diagonal? ¿Por qué?

4. ¿Quiere decir entonces que el área del cuadrado de la figura 1 corresponde a la mitad de área del cuadrado de la figura 2?

5. Observa los siguientes cuadrados similares a la situación anterior. Ahora compara, nuevamente la diagonal del cuadrado de la figura 1 con un lado del cuadrado de la figura 2. ¿Tienen la misma medida?

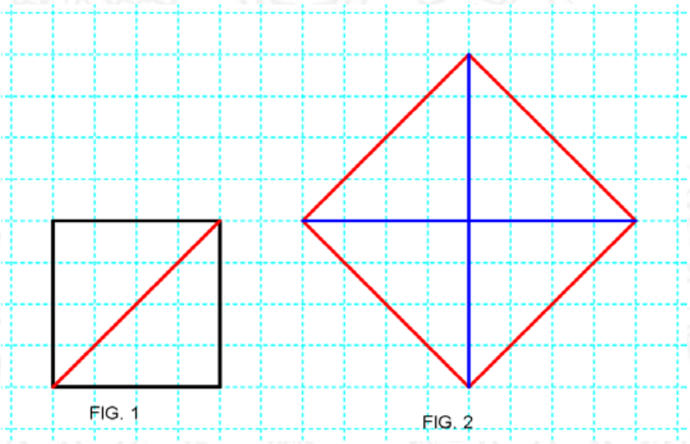


Figura 120. Comparación de dos cuadrados con diagonales.

6. Ahora compara los triángulos rectángulos isósceles del cuadrado de la figura 1 formado por la diagonal con los triángulos rectángulos de la figura 2 formado por las diagonales. ¿son congruentes?

7. ¿Entonces, se puede concluir que el área del cuadrado de la figura 2 es el doble del área del cuadrado de la figura 1?

8. Si la diagonal de un cuadrado es igual a un lado de otro cuadrado. ¿Qué puedes concluir?

9. Hay un cuadrado dibujado en la cuadrícula, construye otro cuadrado pero que sea de área doble al dibujado.

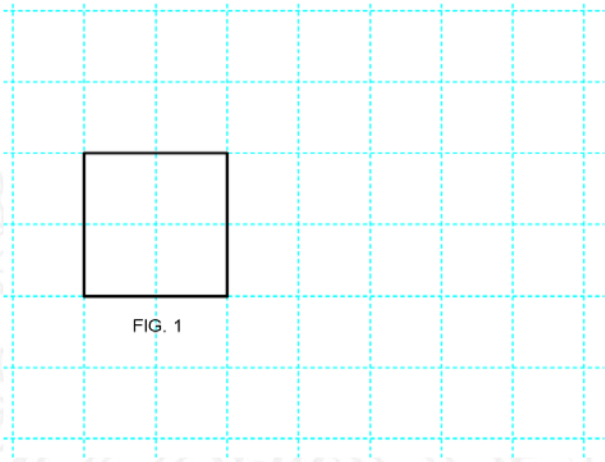


Figura 121. Construcción de un cuadrado de área doble.

Nota. En caso de no saber cómo iniciar, empieza estableciendo algunas preguntas que le puedan ayudar a razonar uno poco.

10. Traza un segmento en cualquier parte de la cuadrícula, pero debe medir lo mismo que la diagonal del cuadrado dibujado, puede ser paralela a la diagonal del cuadrado dibujado (ayúdate con la cuadrícula)
11. Ahora, construye sobre el segmento un cuadrado.
12. Ahora, comprueba si es un cuadrado de doble área que el cuadrado dibujado, utiliza procedimientos geométricos.
13. Ahora con el siguiente cuadrado, pero dibujado sin cuadricula. construye un cuadrado de área doble al cuadrado dibujado. ¿Cómo lo harías?

Nota. Se le entrega una regla ciega o una regla de cartón o un papel, escuadra y lápiz.

Figura 122. Construcción de un cuadrado de área doble.

Nota: En caso de tener dificultades, se empieza estableciendo algunas preguntas que permitan razonar uno poco.

14. Mide la diagonal del cuadrado, con la regla ciega o cartón o papel, marca las distancia con dos puntos.
15. ¿Crees que se necesita una regla normal para medir la diagonal en centímetros o milímetros?
16. Ubica los dos puntos con la ayuda de la regla ciega o de cartón en la posición que tú quieras y traza un segmento, ¿correcto?
17. Dibuja un cuadrado sobre ese segmento.
18. ¿Comprueba que es el doble del cuadrado dibujado?
19. ¿Qué es lo más importante que debes tener en cuenta para construir un cuadrado de área doble?
20. Ahora analicemos, la siguiente situación. Observa el siguiente cuadrado dibujado en la cuadrícula.

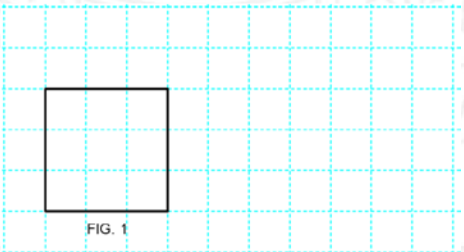


Figura 123. Construcción de un cuadrado de área doble en la misma posición.

21. Con el cuadrado anterior, construye un cuadrado de área doble al cuadrado dibujado, pero éste debe estar en la misma posición del cuadrado construido, es decir, como las posiciones de los cuadrados presentados a continuación.

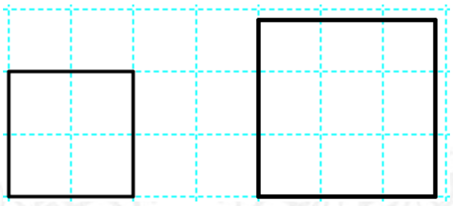


Figura 124. Cuadrado de área doble en la misma posición.

22. ¿Qué tuviste en cuenta para construir un cuadrado de área doble?

23. Analicemos las siguientes figuras y compara la figura 1 y 2.

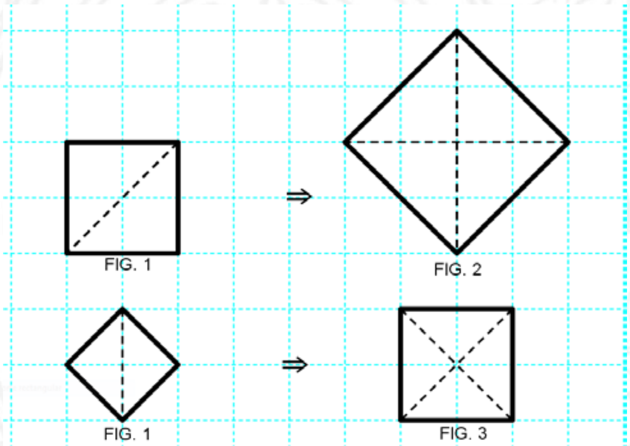


Figura 125. Comparación de cuadrados sobre cuadrículas.

24. ¿Es cierto que el área del cuadrado de la figura 1 es la mitad del área del cuadrado de la figura 2?

25. El cuadrado de la figura 1 ¿Es la mitad del cuadrado de la figura 3, ¿Es eso cierto? ¿Por qué?

26. Si es posible construir un cuadrado de área doble al cuadrado inicial o dado, entonces, también es posible construir un cuadrado que sea la mitad del cuadrado dado, como vemos en la siguiente situación. Observa el cuadrado dibujado en la cuadrícula. Construye un cuadrado que sea la mitad del cuadrado dado.

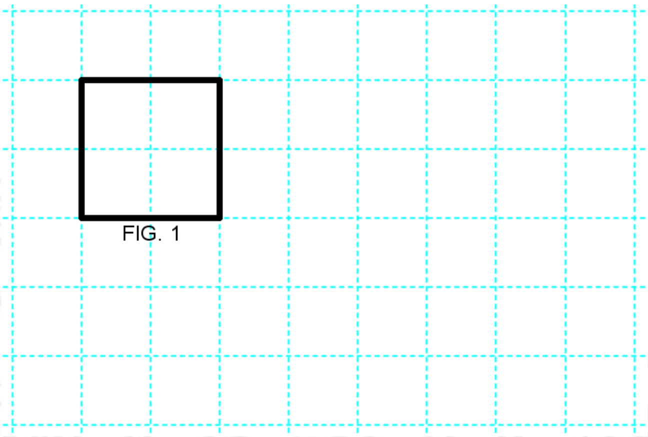


Figura 126. Construcción de un cuadrado siendo la mitad del área del cuadrado dado.

Nota. En caso de tener dificultades, se empieza estableciendo algunas preguntas que permitan razonar uno poco.

27. Encuentra la medida de la mediana o la medida del lado del cuadrado dado.
28. Traza un segmento que tenga la misma medida del lado o la mediana de cuadrado dado, ¿correcto?
29. Ahora, el segmento construido debe ser la diagonal del nuevo cuadrado.
30. O simplemente construye un cuadrado donde su diagonal tenga la misma medida que la mediana o el lado del cuadrado dado. Ayúdate con la escuadra y la cuadrícula.
31. Ahora comprueba si el cuadrado construido es la mitad del área del cuadrado dado anteriormente.
32. Ahora analiza lo siguiente, para construir un cuadrado de área doble, ¿qué se debe hallar primero la diagonal o el lado del cuadrado dado?
33. Y para construir un cuadrado que sea la mitad del cuadrado dado, ¿qué se debe hallar primero, la diagonal o el lado del cuadrado?
34. A continuación se muestra un cuadrado con su diagonal dibujado en la siguiente cuadrícula. Construye un cuadrado sobre la diagonal del cuadrado inicial.

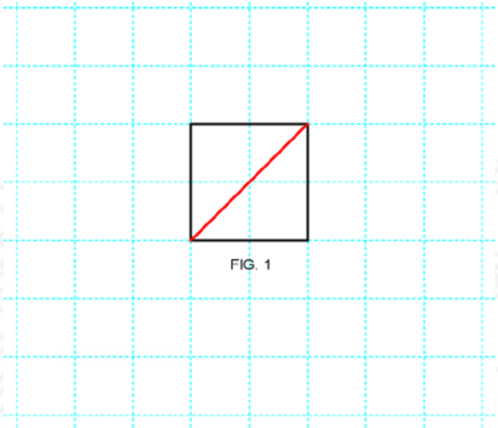


Figura 127. Construcción de un cuadrado de área doble sobre la diagonal.

35. Ahora, contesta las siguientes preguntas:

36. Hay un cuadrado inicial y otro cuadrado construido. ¿Los diferencias?

37. Y la diagonal del cuadrado dado es igual a la medida lado del cuadrado construido, ¿es cierto?

38. ¿El cuadrado construido es el doble del cuadrado inicial? ¿Por qué?

Nota. En caso de tener dificultades, se empieza estableciendo algunas preguntas que permitan razonar uno poco.

39. Construye un cuadrado a partir de la diagonal del cuadrado dado.

40. Ahora termina de construir las diagonales del cuadrado que construiste.

41. Compara el cuadrado dado y el cuadrado construido, teniendo en cuenta el número de triángulos rectángulos isósceles de igual área que tiene cada uno.

42. ¿Cuántos triángulos rectángulos isósceles tiene el cuadrado construido?

43. ¿Cuántos triángulos rectángulos isósceles tiene el cuadrado?

44. ¿Qué puedes concluir respecto al área de los dos cuadrados? ¿el cuadrado construido es el doble del cuadrado dado?

45. Ahora construye cuadrados a partir de la diagonal del cuadrado inicial o dado.

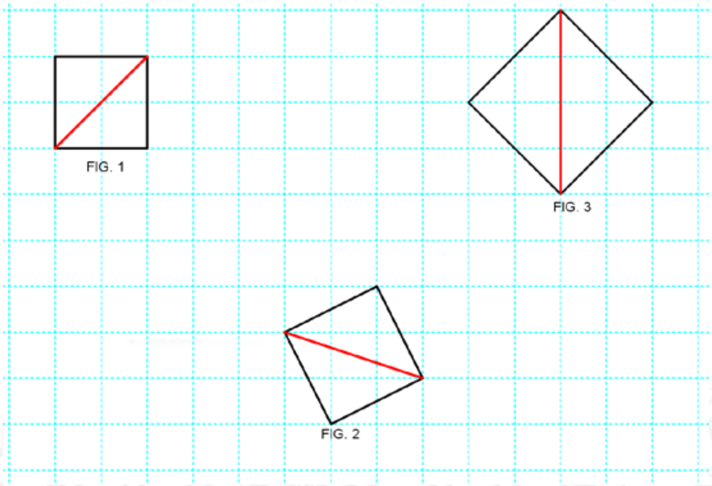


Figura 128. Construcción de cuadrados de área doble sobre la diagonal

46. El cuadrado construido sobre la diagonal del cuadrado inicial, ¿tiene el doble del área que el cuadrado dado?

47. ¿O sea que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de cualquier cuadrado?

48. Observa las siguientes figuras

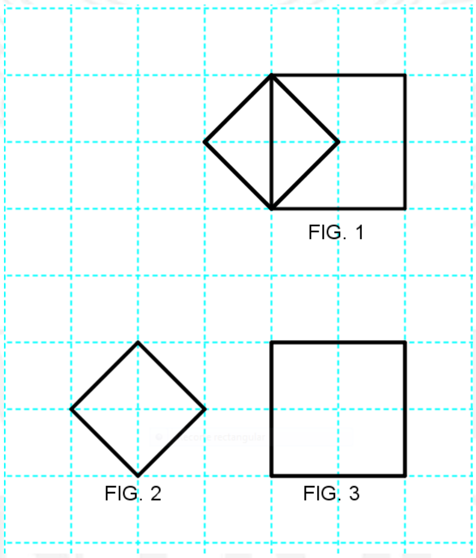


Figura 129. Comparación de cuadrados.

49. ¿Cuántos cuadrados logras ver en la figura 1?

50. En la figura 1 ¿logras ver una cuadrado igual a la figura 2?

51. En la figura 1 ¿logras ver un cuadrado igual a la figura 3?

52. El área de la figura 2 es la mitad del área del cuadrado de la figura 3, ¿es cierto?

53. O sea que el área del cuadrado que tiene como diagonal un lado del otro cuadrado, ¿es la mitad del cuadrado mayor?

54. Observa el siguiente cuadrado dibujado sobre la cuadricula, ahora construye un cuadrado donde un lado del cuadrado dado debe ser la diagonal del cuadrado construido. Compara el cuadrado construido con el cuadrado dado, ¿es la mitad del área del cuadrado dado?

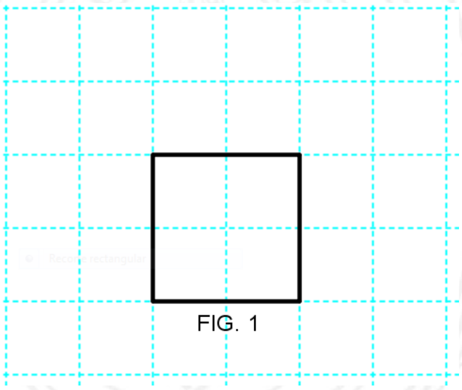


Figura 130. Construcción de un cuadrado de área doble.

55. ¿Es posible construir un cuadrado que sea la mitad del área de cuadrado dado donde un lado del cuadrado dado debe ser la diagonal del cuadrado construido?

56. Ahora en la siguiente hoja cuadriculada, dibuja un cuadrado y su diagonal, luego construye a partir de la diagonal del cuadrado un cuadrado de área doble que el cuadrado inicial.

57. Ahora, dibuja a mano alzada un cuadrado y su diagonal, y construye a partir de la diagonal del cuadrado un cuadrado de área doble que el cuadrado inicial.

Tabla 33. Segundo descriptor del nivel III

Entrevista 2, nivel III. La entrevista contiene preguntas relacionadas al segundo descriptor. **“Entiende que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área”**

Descriptor 2.2. del nivel III

1. Juguemos un poco con figuras de rompecabezas parecidos al tangram..

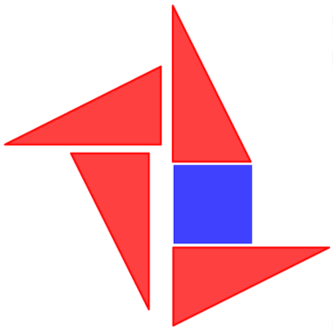


Figura 131. Figuras geométricas para formar cuadrado.

2. Primero que todo, toma un triángulo rectángulo escaleno y un cuadrado, compara su área, ¿son iguales?

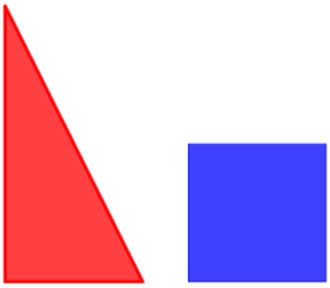


FIG. 1 FIG. 2

Figura 132. Comparación de áreas de triangulo rectángulo escaleno y cuadrado.

3. ¿Qué procedimiento y utilizaste para comprobar sus áreas?
4. Bueno, ahora arma un rectángulo con todas las figuras.
5. Con los cuatro triángulos rectángulos escalenos arma un cuadrado.
6. Ahora tienes un reto mayor, arma un cuadrado con todas las figuras.
7. Observa la siguiente figura y contesta.

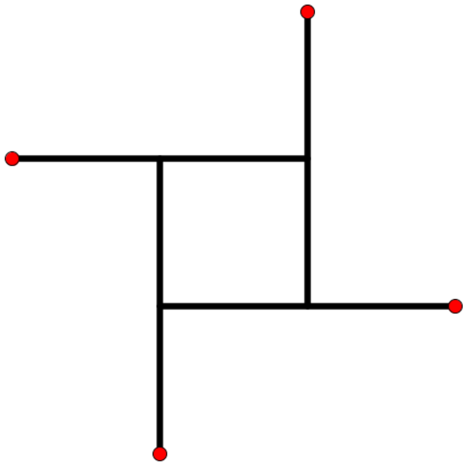


FIG. 2

Figura 133. Construcción de un cuadrado.

8. ¿El lado del cuadrado corresponde a la mitad del segmento?

9. ¿Quiere decir entonces, que cada segmento es el doble del lado del cuadrado?

10. ¿Son segmentos congruentes?

11. ¿Cada segmento es perpendicular con los segmentos con los que se corta?

12. ¿Cada segmento se intercepta en con el otro segmento en su punto medio?

13. Ahora, une con segmentos cada uno de los puntos mostrados en los extremos de los otros segmentos, de manera que formen triángulos rectángulos escalenos.

14. ¿Los segmentos construidos corresponde a los lados de un cuadrado?

15. Observa el siguiente cuadrado con dos puntos en cada lado. Une los puntos no consecutivos con segmentos de manera prolongada hasta encontrarse nuevamente, inicia del punto rojo. ¿Qué figura geométrica se construyó?

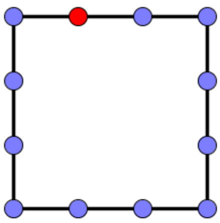


FIG. 1

Figura 134. Construcción de un cuadrado inscrito en otro.

16. Observa la siguiente figura, es un cuadrado, se construyó a partir de cuatro rectángulos y un cuadrado.

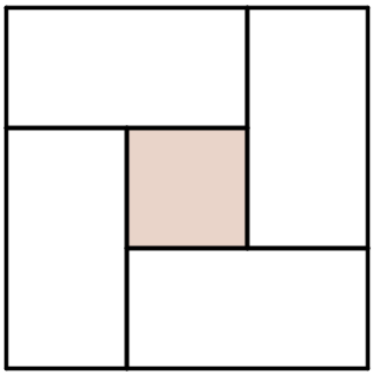


FIG. 1

Figura 135. Comparación de rectángulos y cuadrados.

17. ¿Son congruentes los rectángulos?

18. ¿El lado del cuadrado corresponden a la mitad del lado del rectángulo?

19. ¿Qué relación hay entre el área del cuadrado sombreado y el área del rectángulo?

20. Ahora observa el siguiente cuadrado formada por 4 rectángulos y un cuadrado de superficie menor. Uno de los rectángulos tiene una diagonal, construya un cuadrado trazando las diagonales de los demás rectángulo.

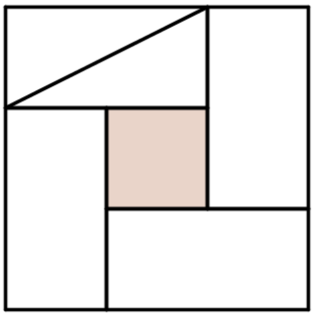


FIG. 1

Figura 136. Construcción de un cuadrado a partir de la diagonal de un rectángulo.

21. En la siguiente figura, hay un cuadrado unido por uno de sus lados a un triángulo rectángulo escaleno. Al interior del cuadrado hay un triángulo rectángulo escaleno pintado de café, pinta todos los triángulos rectángulos que hay en cuadrado

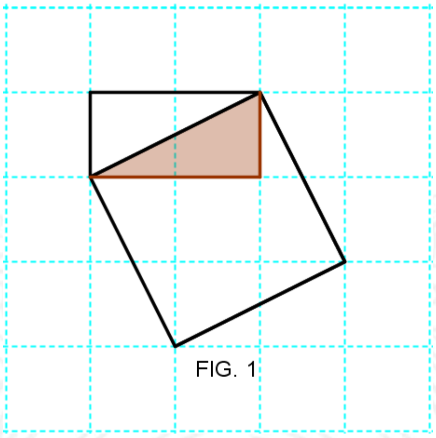


Figura 137. Cuadrado y Triángulo rectángulo escaleno.

22. ¿Cuántos triángulos rectángulos escalenos pintaste en el cuadrado?

23. Compara el área del cuadrado de la figura 1 y el área del cuadrado de la figura 2. ¿Cuántos cuadrados de la figura 1 podrían formarse con el cuadrado de la figura 2?

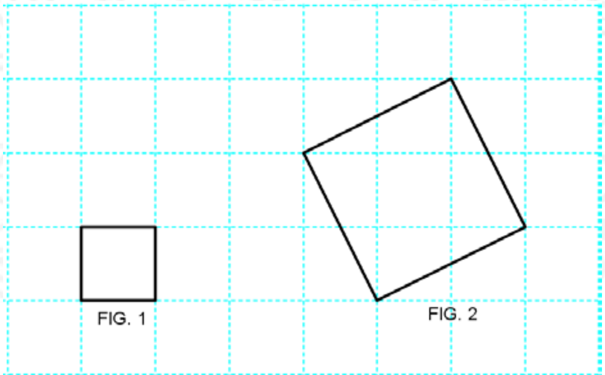


Figura 138. Comparación de cuadrados

24. Ahora compara el área del triángulo rectángulo escaleno de la figura 1 y el área del cuadrado de la figura 2. Si recubrieras con el triángulo rectángulo escaleno toda la superficie del cuadrado, ¿Cuántos trozos de triángulos rectángulos escalenos necesitarías? ¿Por qué?

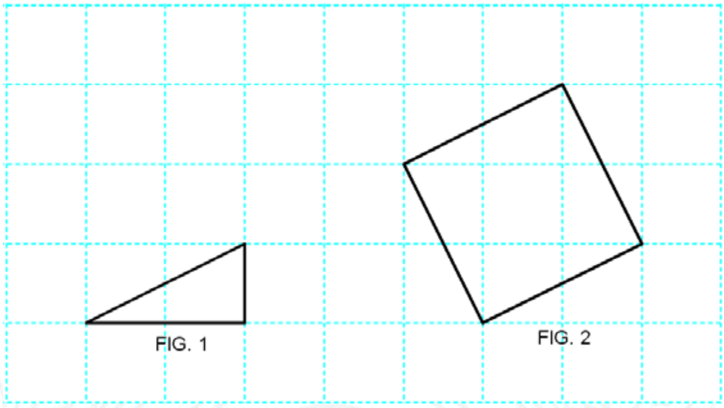


Figura 139. Comparación de triángulo rectángulo escaleno y cuadrado

25. Ahora compara el área del rectángulo de la figura 1 y el área del cuadrado de la figura 2. ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo y el área del cuadrado?

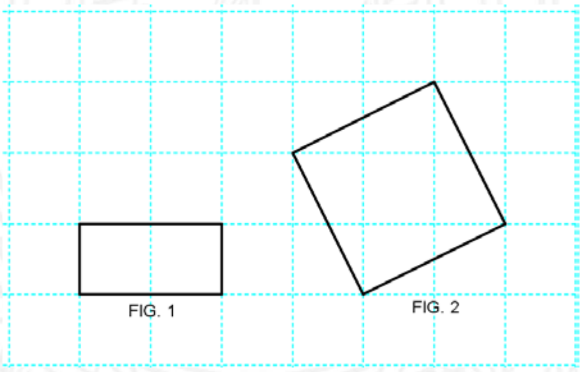


Figura 140. Comparación de rectángulo y cuadrado.

26. En la siguiente situación hay dibujado dos figuras iguales en una cuadricula, ahora observa detenidamente y contesta.

27. ¿Cuántos cuadrados logras ver en la figura 1?

28. ¿Cuántos rectángulos logras ver en la figura 1?

29. ¿Cuántos triángulos logras ver en la figura 1?

30. ¿Es la diagonal del rectángulo un lado del cuadrado en cualquiera de las dos figuras?

31. ¿El lado más largo del triángulo rectángulo escaleno, es un lado del cuadrado en cualquiera de las dos figuras?

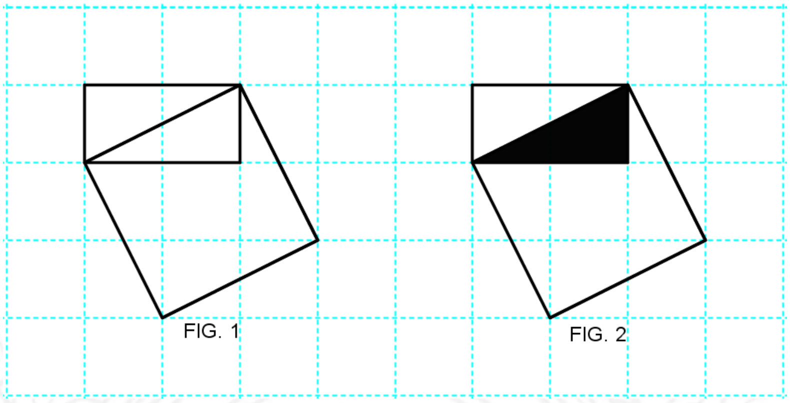


Figura 141. Relación de la diagonal del rectángulo con en lado del rectángulo.

32. En los siguientes cuadrados construidos en cuadrícula, construye un cuadrado a partir de la diagonal del rectángulo.

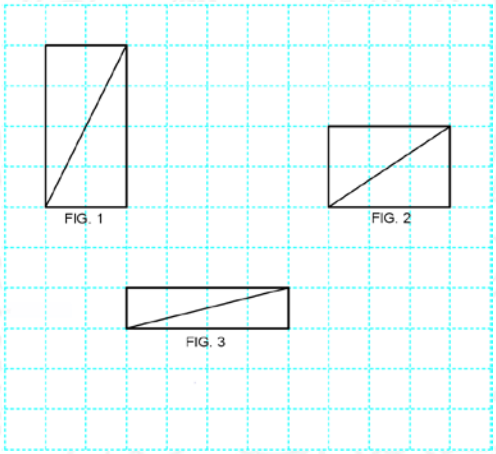


Figura 142. Rectángulos y diagonales.

33. Dibuja triángulos rectángulos escalenos iguales a los triángulos rectángulos escalenos formados por la diagonal del rectángulo inicialmente dada.

34. En la siguiente cuadricula haz lo siguiente:

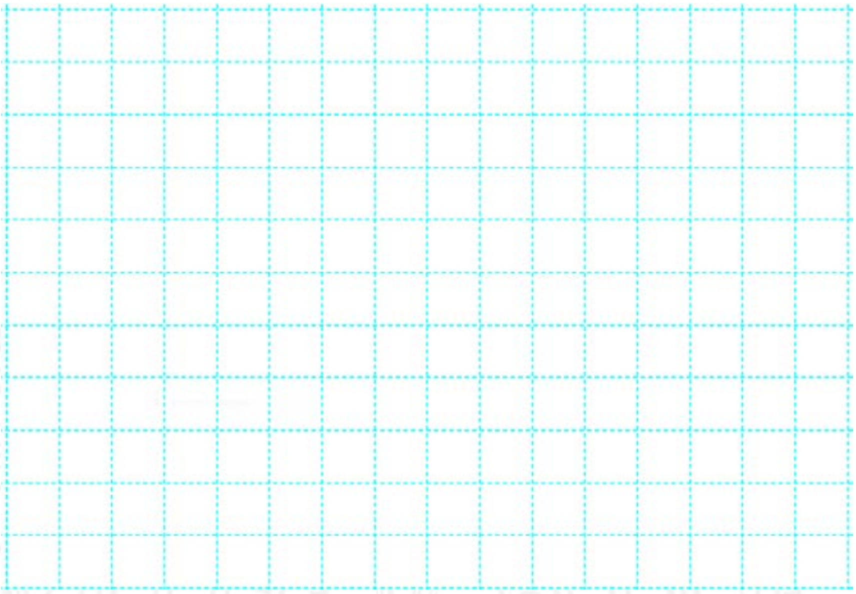


Figura 143. Cuadrícula para la construcción secuencial de cuadrados.

35. Dibuja un rectángulo de área doble de un cuadrado.

36. Traza una diagonal al rectángulo.

37. Construye un cuadrado sobre la diagonal del rectángulo

38. Ahora dibuja los triángulos rectángulos escalenos iguales a los dos triángulos rectángulo escalenos formado por la diagonal del rectángulo inicial.

39. Compara el área del rectángulo inicial y el área del cuadrado construido sobre la diagonal del rectángulo, ¿el área del cuadrado construido es el doble que el área del rectángulo dado? ¿Qué dices al respecto?

40. ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo inicial y el cuadrado construido sobre la diagonal?

Tabla 34. Tercer descriptor del nivel III.

Entrevista 3, nivel III.
La entrevista contiene preguntas relacionadas al tercer descriptor En la construcción del triángulo rectángulo isósceles, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Descriptor 3.3 del nivel III.

1. En las siguientes graficas se muestran cinco figuras formadas con 4 triángulos rectángulos isósceles congruentes.

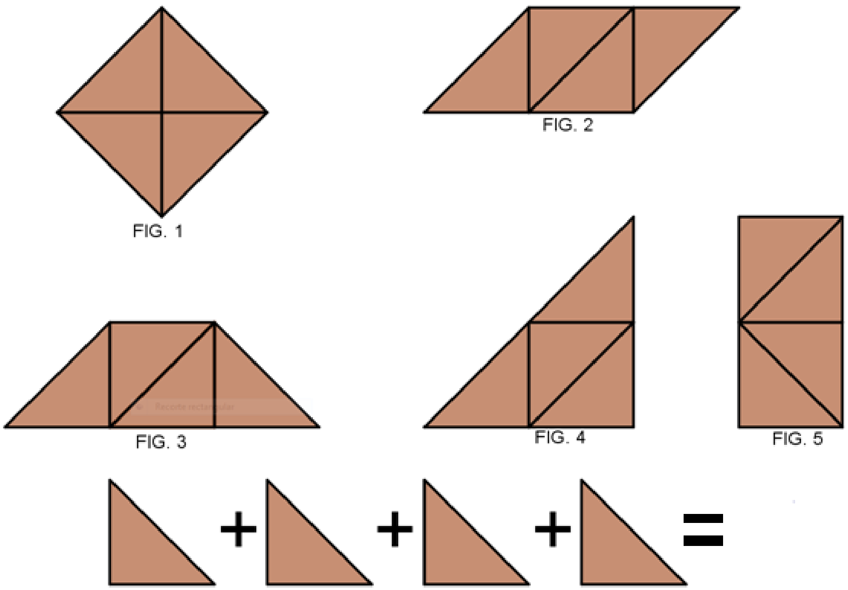


Figura 144. Propiedad aditiva del área para triágulos rectángulos isósceles.

2. ¿Es correcto afirmar que el área del cuadrado de la figura 1 es 4 veces el área de uno de los cuatro triángulos rectángulos isósceles?

3. El rectángulo de la figura 1, ¿es 4 veces el área uno de los cuatro triángulos rectángulos isósceles?

4. ¿Es la suma de las áreas de los cuatro triángulos rectángulos isósceles igual al área de las figuras 1, 2, 3, 4 y 5?

5. En las siguientes graficas se muestran tres figuras formados por 4 triángulos rectángulos escalenos congruentes y un cuadrado.

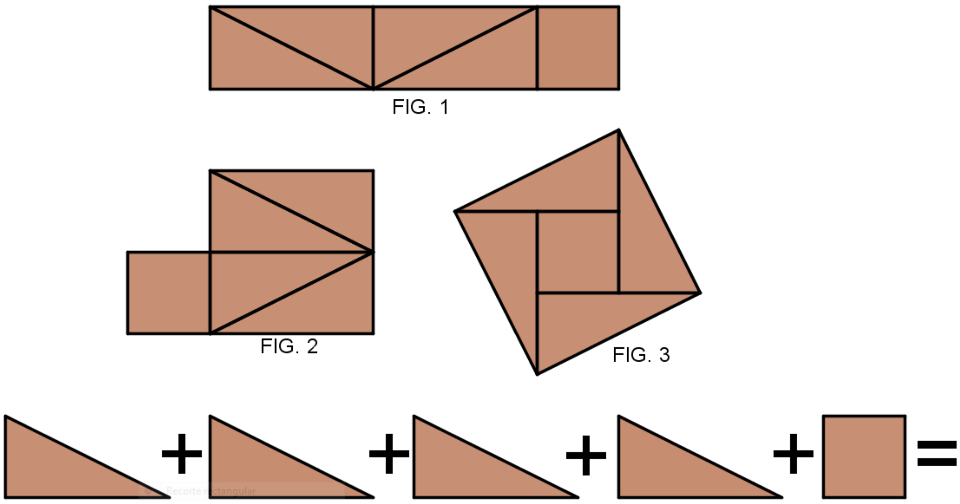


Figura 145. Propiedad aditiva del área triágulos rectángulos escalenos.

6. ¿Los cuatro triángulos y el cuadrado que forman las figuras 1, 2 y 3, tienen la misma área? ¿Por qué?

7. El rectángulo de la figura 1, ¿es 5 veces el área del triángulo rectángulo escaleno? ¿Por qué?

8. El cuadrado de la figura 3 ¿es cinco veces el área del cuadrado pequeño?

9. ¿Es la suma de los cuatro triángulos rectángulos y el cuadrado igual al área de las figuras 1, 2 y 3?

10. ¿El área de la figura 1, 2 y 3 equivale al área de 5 cuadrados o de 5 triángulos rectángulos escalenos?

11. Ahora analiza la siguiente situación. En la figura 1 se realizaron dos cortes, y se dividió en tres partes, la figura de área A, la figura de área B y la figura de área C

12. En este caso, ¿el área también se dividió en tres partes diferentes?

13. Según el dibujo, se reorganizó y se formaron dos figuras distintas, la figura 2 y 3. ¿correcto?

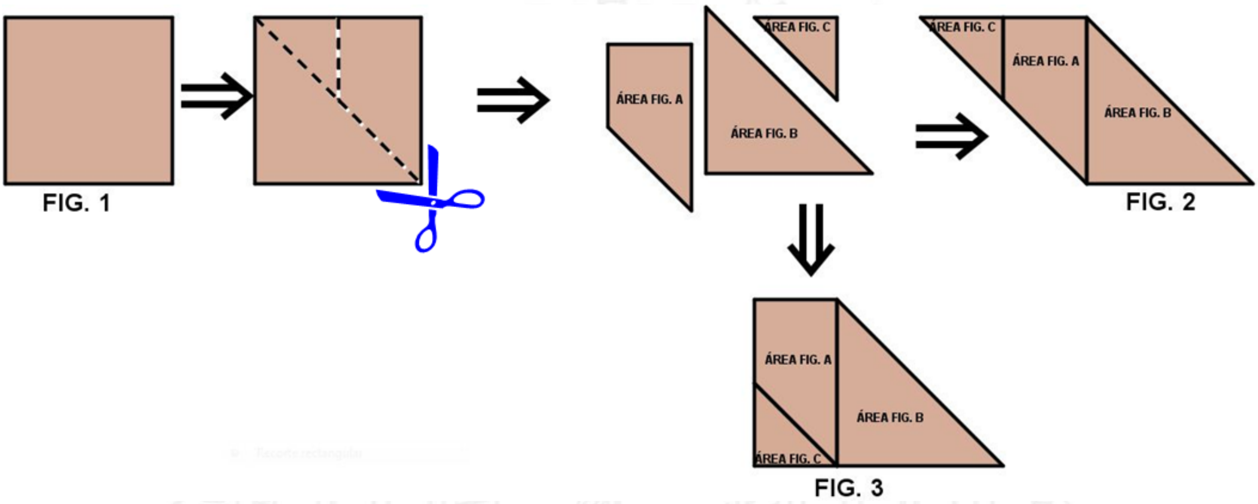


Figura 146. Propiedade de la disección del área.

14. ¿La superficie de la figura 1 es diferente a la superficie de la figura 2, ¿Por qué?

15. ¿Y el área de la figura 1 es igual al área de la figura 2? ¿Por qué?

16. ¿Y el área de la figura 1 es igual al área de la figura 3? ¿Por qué?

17. Ahora compara el área de la figura 2 y el área de lafigura 3, ¿Son iguales?

18. Al sumar el área de la figura A con el área de la figura B y el área de la figura C el resulatado es la figura D, ¿o sea que el área siempre se conserva aunque se divida en partes y se vuelva a reconstruir en otra superficie?

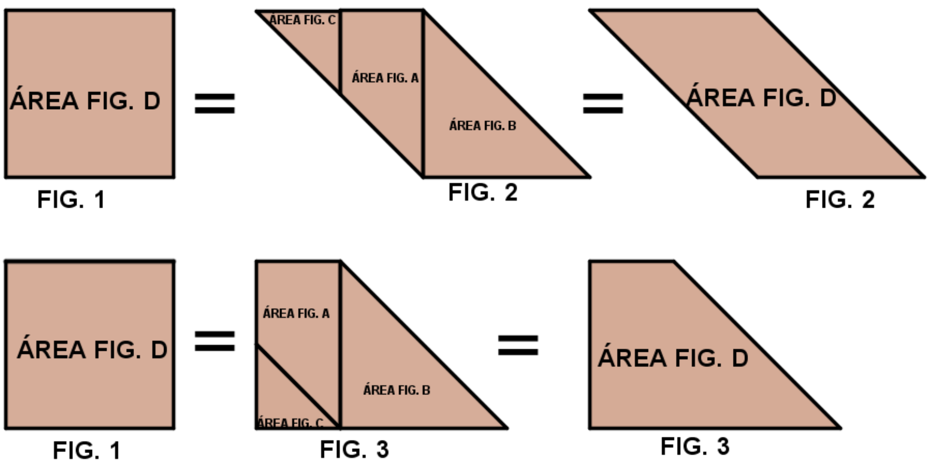


Figura 147. Propiedade de la disección del área 2.

19. Ahora se plantea otra situción, observa las figuras que se muestran a continuación.

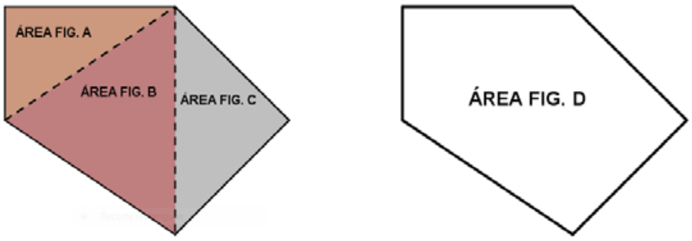


Figura 148. Representación de la Propiedad aditiva del área.

20. El área de la figura D se dividio. en tres partes diferentes, el área de la figura A, el área de la figura B y el área de la figura C. ¿La suma de las áreas de las figuras separadas es igual al área de la figura completa? ¿Por qué?

21. Analiza la siguiente situación, respecto a las transformaciones que tiene la superficie y el área. Observa, si una superficie como el rectángulo de la figura 1 se corta en tres partes, ¿entonces el área se divide en tres partes?

FIG. 1

Figura 149. Rectángulo.

22. La siguiente figura, se dividió en el área de la figura A, B y C.

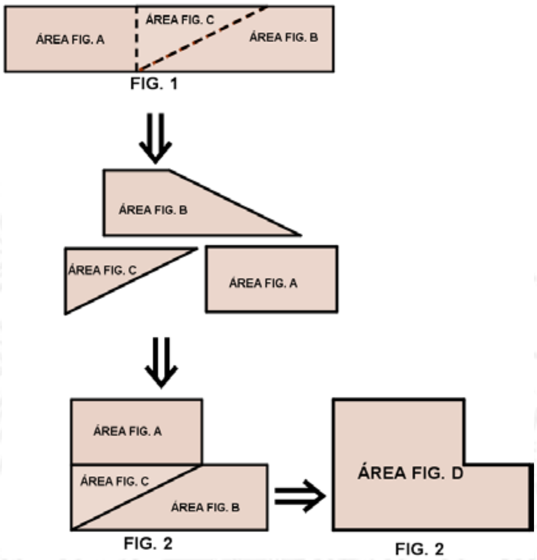


Figura 150. Conservación del área de una figura plana al transformarse en otra.

23. Ahora las tres partes se reorganizaron para formar otra superficie, como la figura 2, ¿El área sigue siendo la misma o diferente?
24. La cantidad de la superficie de la figura 2 sigue siendo la misma cantidad de superficie que la figura 1? ¿Sigue ocupando el mismo espacio?
25. Entonces, se puede afirmar que si el área de una figura cualquiera, se corta en varias partes y luego se forma otra nueva superficie, ¿la suma de las áreas de esas partes siempre será la misma? ¿Ocurre lo mismo siempre que un área es dividida para formar superficies distintas?
26. En la siguiente situación, las construcciones se van a hacer por partes según las preguntas y las instrucciones. Utiliza regla y escuadra en la cuadrícula.

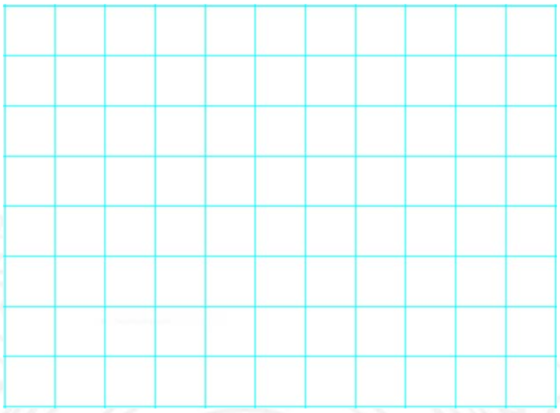


Figura 151. Cuadrícula para construcción de figuras planas.

27. Construye un cuadrado cualquiera en el centro de la cuadrícula.

28. Traza una diagonal al cuadrado.

29. Construye sobre la diagonal del cuadrado otro cuadrado.

30. Por otro lado, en otra hoja cuadriculada, haz la construcción que llevamos hasta ahora, sólo para que respondas las siguientes preguntas.

31. Ahora pinta el cuadrado inicial completo de color rojo y el cuadrado construido de color amarillo. Observa la superficie triangular donde se mezclan los dos colores, ¿Qué color tiene esa parte?

32. ¿Es un triángulo rectángulo? ¿Por qué?

33. ¿Qué clase de triángulo rectángulo es?

34. Ese triángulo rectángulo que se nombra, ¿es la mitad de cuadrado inicial?

35. Ese triángulo rectángulo que se señala ¿en cuántas partes recubre al cuadrado construido?

36. ¿Por qué se formó el triángulo rectángulo que comparten ambos cuadrados?

37. Analiza lo siguiente: compara el área del cuadrado inicial y el área del cuadrado construido y utiliza un procedimiento geométrico necesario para responder la pregunta, ¿Qué relación hay entre el área del cuadrado construido y el área del cuadrado inicial? ¿Es mayor, menor, igual, el doble, la mitad?

38. Retoma la construcción que se había dejado anteriormente. Construye dos cuadrados sobre los lados "libres" del cuadrado inicial.

39. Observa los dos triángulos rectángulos formados por la diagonal, pinta de rojo el triángulo rectángulo cuyos lados coinciden con los lados de los cuadros construidos.

40. Ahora observa detenidamente los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, compara el cuadrado construido sobre el lado más largo del triángulo rectángulo y uno de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo, y contesta ¿Qué relación hay entre estas áreas?

41. ¿Crees que es posible que los dos cuadrados iguales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo cubran completamente la superficie del cuadrado mayor construido también sobre el lado mayor del mismo triángulo?

Nota. *E*n caso de decir que no, establezca un dialogo socrático. Entregar regla y tijeras.

42. Construye lo que hiciste en la cartulina plana cuadriculada, recorta los dos cuadrados iguales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo. Ahora con los dos cuadrados recortados trata de cubrir la superficie del cuadrado mayor, ¿Cómo harías para cubrir completamente el cuadrado mayor construido sobre el lado más largo del triángulo rectángulo? ¿Qué podrías concluir respecto a las áreas de los dos cuadrados? Entonces, ¿es posible que los dos cuadrados iguales cubran el cuadrado mayor.

43. Ahora, realiza la construcción que hiciste anteriormente en cartulina plana sin cuadrícula. Pinta el triángulo rectángulo donde los cuadrados están construidos sobre sus lados.

Nota: Se le entrega transportador, lápiz, lápiz de color rojo y cartulina plana.

44. Dibuja tres cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles en la cartulina plana sin cuadrícula. Ahora nombra cada cuadrado construido sobre el triángulo rectángulo como figura A, figura B y figura C, pero la figura C debe ser el cuadrado mayor.

45. ¿Entonces que puedes concluir respecto a las áreas de los cuadrados construidos sobre el triángulo rectángulo? ¿Escribe una operación matemática de manera que exprese esa relación entre las áreas de los cuadrados?

46. Ahora haz una construcción de tres cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles en la cartulina plana sin cuadrícula, pero a mano alzada.

47. Ahora, observa las dos figuras que están en posiciones diferentes, una construida en cuadrícula y otra sin cuadrícula, las construcciones son parecidas a la actividad anterior. Ahora construye un cuadrado, a partir de los puntos medios de los lados del cuadrado mayor construido sobre el lado más largo de la figura 1, de manera que esté inscrito en el cuadrado.

48. Razona sobre la manera de mostrar que las áreas de los dos cuadrados iguales construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles es igual al área del cuadrado construido sobre el lado mayor del mismo triángulo rectángulo isósceles.

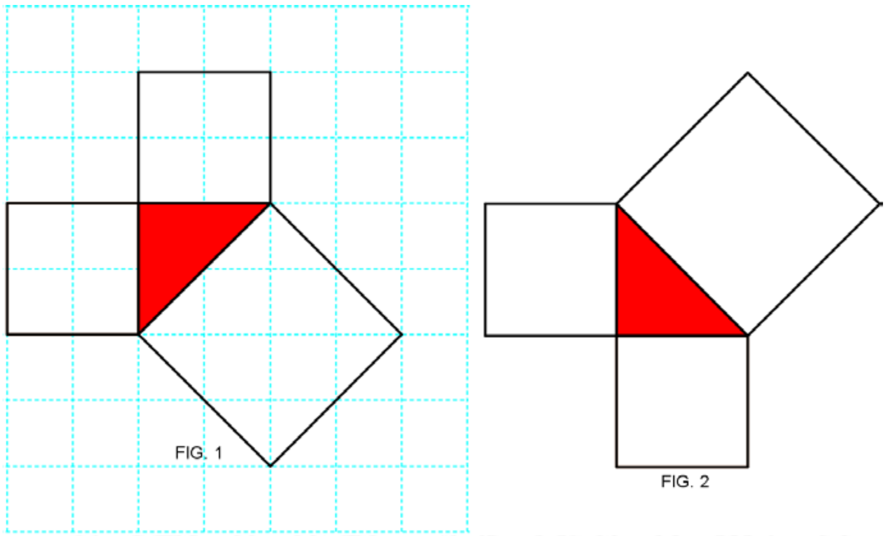


Figura 152. Áreas de cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo.

49. Realiza lo mismo en la construcción de la figura 2.

50. Observa las siguientes figuras. Utilice procedimientos geométricos para encontrar relaciones entre áreas.

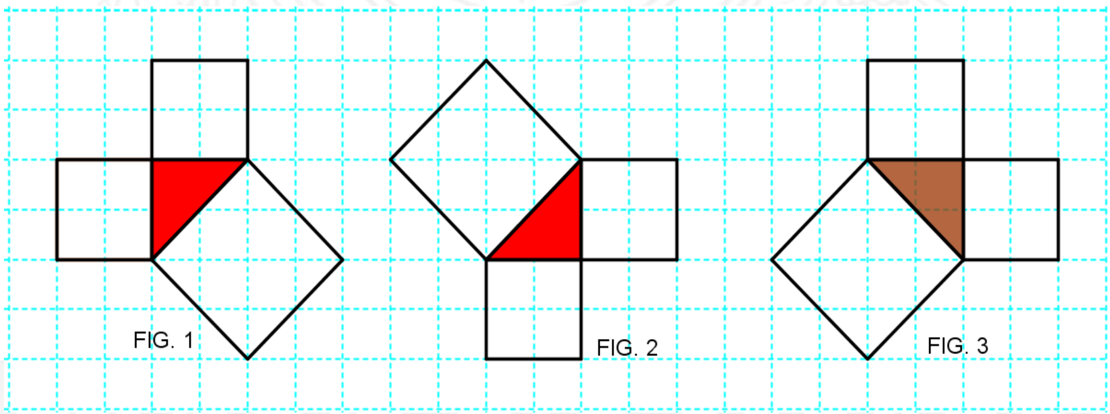


Figura 153. Aproximación del teorema de Pitágoras a partir de las comparaciones de áreas.

Tabla 35. Cuarto descriptor del nivel III.

Entrevista 4, nivel III. La entrevista contiene preguntas relacionadas al cuarto descriptor. **“En la construcción de un triángulo rectángulo escaleno, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud”**

Descriptor 3.4. del nivel III

1. Ahora veamos otro caso, relacionado al anterior utiliza regla y escuadra.

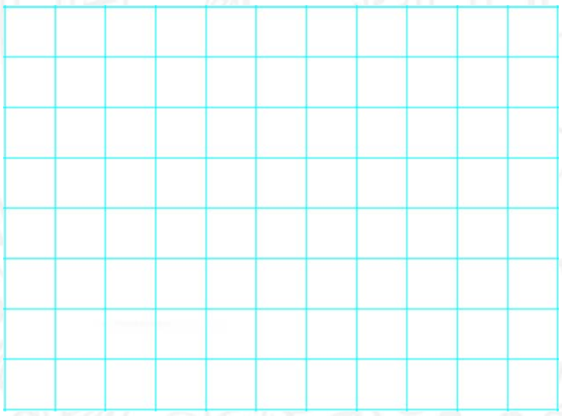


Figura 154. Cuadrícula para construcción de figuras planas.

2. Construye, en el centro de la cuadrícula, un rectángulo que tenga el área doble de un cuadrado.
3. Traza una diagonal al rectángulo.
4. Construye sobre la diagonal del rectángulo un cuadrado.
5. Por otro lado, en otra hoja cuadriculada, haz una nueva construcción igual a la que llevamos hasta hora, es precisamente para que responda las siguientes preguntas.
6. Ahora pinta el rectángulo inicial completo de color rojo y el cuadrado construido sobre la diagonal de color amarillo. Observa la superficie triangular donde se mezclan los dos colores.

7. ¿Esa misma superficie lo ocupa el rectángulo inicial y el cuadrado construido?
8. Ese triángulo rectángulo que se nombra, ¿es la mitad del rectángulo?
9. Ese triángulo rectángulo que se señala ¿en cuántas partes recubre al cuadrado construido?
10. Ahora analiza lo siguiente: compara el rectángulo de área doble del cuadrado y el área del cuadrado construido, y busca un procedimiento geométrico que te ayude para responder las preguntas. ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo y el área del cuadrado construido sobre la diagonal?
11. Retoma la construcción nuevamente en la otra cuadrícula.
12. Ahora construye un cuadrado sobre el lado mayor del rectángulo
13. Ahora construye, un cuadrado sobre el lado corto del rectángulo.
14. Ahora pinta el triángulo rectángulo escaleno en cuyos lados se encuentran construidos los tres cuadrados, ¿Cómo son los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno?
15. Analizar lo siguiente, en otra hoja cuadriculada igual a la anterior, haz la misma construcción que hiciste anteriormente. Construye una mediana en el cuadrado mediano, ¿qué ocurrió con la superficie del cuadrado?
16. Ahora traza otra mediana en los dos rectángulos formados por la mediana inicial sobre el cuadrado mediano. ¿Qué debo hacer para construir cuatro triángulos rectángulos escalenos iguales en el cuadrado donde se trazó la mediana y se formaron dos rectángulos?
17. Compara el cuadrado mediano construido sobre el lado de arriba del triángulo rectángulo y el cuadrado grande construido sobre la diagonal del rectángulo y contesta lo siguiente, ¿Qué relación hay entre las áreas de los dos cuadrados? ¿Son iguales?

Nota. En caso de estar confundido, se le muestra las siguientes figuras relacionada a la pregunta

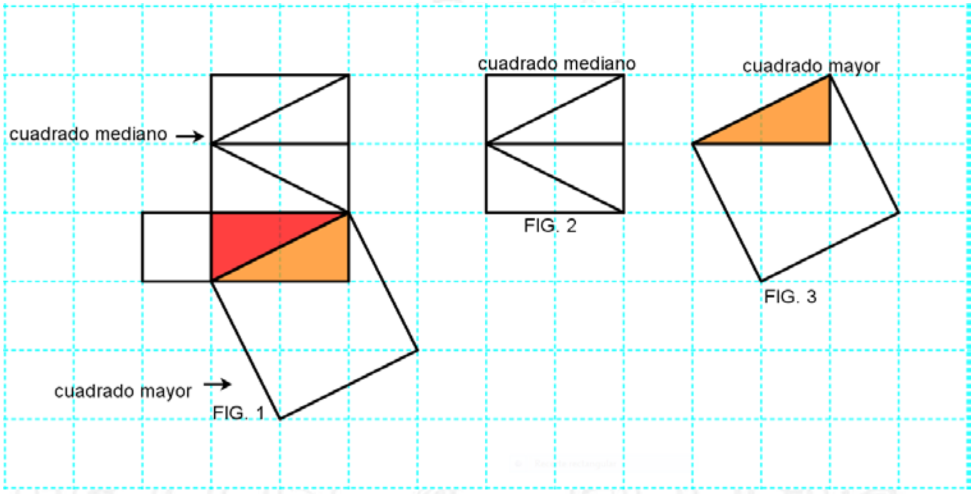


Figura 155. Comparación de área del cuadrado mediano y el cuadrado mayor.

18. Observa la figura 2 y 3, corresponde al cuadrado mediano y al cuadrado mayor El triángulo rectángulo de color naranja dibujado en el cuadrado mayor, ¿Es congruente con el triángulo rectángulo que hay en el cuadrado mediano formado por la mediana y la diagonal?
19. Entonces, ¿cuántos triángulos rectángulos de ese mismo tamaño pueden caber en el cuadrado mayor? Dibújalo. ¿Qué sobró?
20. Con el triángulo rectángulo construido en el cuadrado mayor, ¿puedo formar un cuadrado como el que sobró? ¿Es decir, haciendo cierto corte será posible hacer con el triángulo, un cuadrado igual al que sobró?
21. ¿Puedo afirmar para el cuadrado mayor que su área es 5 triángulos rectángulos?
22. ¿Y también 5 cuadrados del tamaño del cuadrado sobrante?
23. ¿En qué se diferencia el área del cuadrado mayor y el área del cuadrado mediano?
24. ¿Qué relación hay, entonces, entre las áreas del cuadrado mayor y el área del cuadrado mediano?

25. Ahora sigamos nuevamente con las preguntas respecto a las construcciones que llevabas anteriormente. Compara el cuadrado pequeño y el cuadrado mediano, ¿Cuál es la diferencia de áreas entre el cuadrado pequeño y el cuadrado mediano?
26. Se llegó a una situación donde tú debes analizar mucho y valerte de algún procedimiento y propiedades del área. Las preguntas que vienen son similares a las que se hicieron construcciones anteriores, cuando los cuadrados estaban construidos sobre un triángulo rectángulo isósceles.
27. Ahora bien, compara los dos cuadrados, el mediano y el pequeño, con el cuadrado mayor, los tres están construidos sobre los lados del triángulo rectángulo, comprueba si es posible que los dos cuadrados construidos sobre los lados menores del triángulo rectángulo escaleno pueden formar un cuadrado de igual área al cuadrado construido sobre el lado mayor del mismo triángulo.
28. De acuerdo a lo anterior, responde ¿Qué relación hay entre las áreas de los dos cuadrados construidos sobre los lados menores del triángulo rectángulo con el área del cuadrado grande construido sobre el lado de mayor del triángulo rectángulo?
29. Ahora, realiza dos construcciones iguales a la anterior sin cuadrícula, en una hoja en blanco.
30. Ahora, nombra cada cuadrado construido sobre el triángulo rectángulo con la figura A, figura B y figura C, la figura C debe ser el cuadrado mayor.
31. Ahora, toma una construcción y recorta el cuadrado de la figura A y el cuadrado de la figura B, y luego trata de recubrir completamente el área de cuadrado C.
32. ¿Qué puedes concluir respecto a las áreas de los cuadrados construidos sobre el triángulo rectángulo? ¿Escribe una operación matemática de manera que exprese esa relación entre las áreas de los cuadrados?

33. Ahora, haz tres construcciones iguales a la que hiciste, Hazlo en la cuadrícula, en una hoja en blanco y a mano alzada.
34. Esta relación especial que hay entre las áreas de los cuadrados construidos en un triángulo rectángulo se cumple en otra clase de triángulos.

4. ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

4.1. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

El proceso de análisis de información de los datos recolectados en este capítulo, se fundamenta principalmente, en la categorización que se hizo a cada uno de los tres estudiantes y participantes del trabajo de investigación. En el desarrollo del presente análisis teórico sobre cada caso particular se exponen algunas respuestas significativas para su análisis relacionadas con la entrevista; también se toma con alta valoración la realización de una actividad escrita después de cada entrevista y la observación que siempre fue una constante, pues ha permitido, según Stake (1999) conducir al investigador hacia una mejor comprensión del caso.

La categorización realizada se sustenta en la información recolectada y generada desde las diferentes actividades desarrolladas por los estudiantes, durante el proceso de razonamiento manifiesto en cada nivel del modelo educativo de van Hiele, y por supuesto, va en correspondencia con los descriptores de nivel planteados desde la teoría y otros desde la experiencias.

Por lo tanto, la categorización se enmarca en los niveles y en efecto, está relacionada directamente con los descriptores de nivel que se propusieron y que fueron refinados durante el desarrollo de las actividades. Es importante resaltar que los descriptores de nivel son el material principal en el análisis de la información, debido a que son las guías para todas las actividades y las construcciones de las categorías.

4.1.1. Análisis de la primera actividad.

Se convocó a una actividad general a los estudiantes destacados de quinto grado en matemáticas y que tienen un gusto por esta área, especialmente en geometría, para desarrollar una actividad escrita, donde se socializaban algunas respuestas de las dadas por ellos mismos. De esta manera, se observa en los estudiantes aspectos como: Lenguaje verbal, experiencia y concepciones frente al tema.

Para esta actividad se han tenido presente dos temas: las figuras planas, relacionadas precisamente con características y algunas propiedades del cuadrado, rectángulo y triángulo-rectángulo, esto se abordó desde la exploración de un prisma triangular recto hecho con pitillos y denominado “esqueleto”, y otro, hecho, con cartulina plana llamado “cuerpo” con el fin de despertar interés en los participantes. Por otro lado, el segundo el tema fue el área de figuras planas relacionado con la cantidad de plano ocupado por la superficie y el área relacionado con el número de unidades que recubren la superficie, con el fin de conocer su percepción e intuición frente a esta. Durante el progreso de esta actividad se tuvo en cuenta algunas categorías para seleccionar tres estudiantes de quince que se presentaron ese día, éstas fueron: Reconocimiento de los elementos y propiedades del cuadrado, reconocimiento de los elementos y propiedades del rectángulo, reconocimiento de los elementos y propiedades del triángulo rectángulo, el lenguaje, destreza y habilidades, motivación por el área, y el razonamiento geométrico exhibido por los participantes.

Figura 156. Actividad escrita explorando prisma triangular recto

Durante la observación de la actividad cinco estudiantes se mostraron muy interesados, con mucha participación, sus respuestas eran buenas, se mostraban ciertos avances en su razonamiento respecto al tema de cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, se desenvolvieron muy bien. En un receso, hubo la oportunidad de hablar con cada uno, y finalmente, de acuerdo a las reflexiones de las observaciones, el análisis de la actividad escrita, diálogos con su profesor y profesora acerca del desempeño del estudiante, y desde luego, el consentimiento de sus padres en este trabajo, fueron seleccionados tres estudiantes: dos niños y una niña. Para este estudio, los tres participantes tomaron a bien la sugerencia de cambiar sus nombres, así que los tres participantes son Santiago, Andrés y Sara.

Es importante resaltar que los estudiantes seleccionados mostraron, respecto a su razonamiento, una aproximación o transición para el nivel II con respecto a los temas dichos anteriormente. Por lo tanto, este nivel es apropiado para avanzar en los procesos de razonamiento relacionados con el objeto matemático en cuestión. Además en el nivel II, según van Hiele (1957), cuesta mucho más alcanzar este nivel que el primero. Parece ser, que encontrar un estudiante que reconoce el rectángulo por su apariencia a una puerta o a un tablero, es de algún modo, un estudiante que no ha avanzado mucho, mientras que encontrar un estudiante que reconozca un rectángulo por sus características y propiedades, es más complejo, por ejemplo, si este reconocimiento se hace, es porque sus lados opuestos son iguales y paralelos, sus cuatro ángulos son rectos, sus lados consecutivos son perpendiculares, una diagonal divide un rectángulo en dos triángulos congruentes, una mediana divide el rectángulo en dos superficies de igual área y relaciona figuras geométricas para establecer si son congruentes o no respecto a la correspondencia de sus lados y ángulos, se podrá considerar que dicho estudiante razona en un nivel II.

4.2. ANALISIS DE LOS PROCESOS DE RAZONAMIENTO

A continuación, se realiza la descripción de los procesos de razonamiento exhibidos por los estudiantes en el paso por cada uno de los niveles y mediados por los descriptores correspondientes a cada uno de ellos.

4.2.1. Análisis del proceso de razonamiento de Santiago cuando avanza por cada uno de los niveles.

El estudiante que se hace llamar Santiago del grado quinto, de una Institución educativa del Municipio de Apartadó, fue seleccionado para participar en el trabajo de investigación, pues mostró entusiasmo en esta asignatura, su participación en la primera actividad fue muy activa y sus apreciaciones y percepciones fueron muy buenas. Este estudiante se caracteriza por ser extrovertido, inquieto, expresivo, habilidoso a la hora resolver problemas y preocupado por aprender.

Para el análisis de información en la comprensión del objeto matemático y de investigación se tuvo en cuenta la triangulación metodológica (Stake, 1999), porque atiende a elementos como la observación, la entrevista y la revisión de documentos.

Por lo tanto, la triangulación realizada entre la entrevista individual y su producción del material, la actividad escrita y la observación fueron pertinentes a la hora de hacer una interpretación lo más acertada posible sobre la realidad del estudiante, frente a su razonamiento. Durante la entrevista hubo momentos en los que cada estudiante realizaba construcciones con el material que se le daba como dibujos, cortes con tijeras para formar figuras, trazados de líneas en las figuras planas, construcciones con el doblado de la hoja de papel, construcciones en cuadrículas, entre otros.

Las actividades realizadas, como la entrevista individual fueron extensas, se tienen en cuenta algunos aportes verbales y construcciones escritas, además de la actividad escrita y descripciones de observaciones. A continuación se relacionan algunos apartes significativos respecto a las construcciones que se hicieron durante la entrevista y la actividad escrita.

A continuación se muestra algunos apartes significativos respecto a las construcciones que hizo Santiago, durante la entrevista y la actividad escrita que afirman un progreso en el razonamiento en el nivel III, para los descriptores 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4.

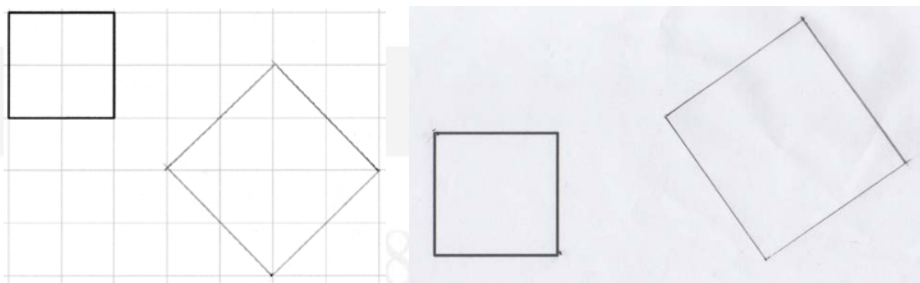


Figura 157. Construcción de un cuadrado de área doble de otro cuadrado por Santiago.

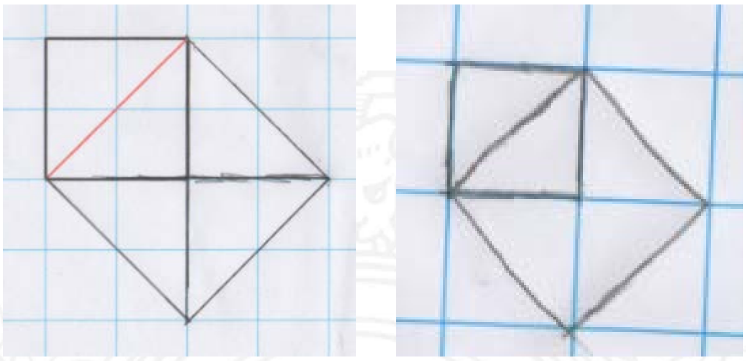


Figura 158. Construcción de un cuadrado de área doble sobre la diagonal.

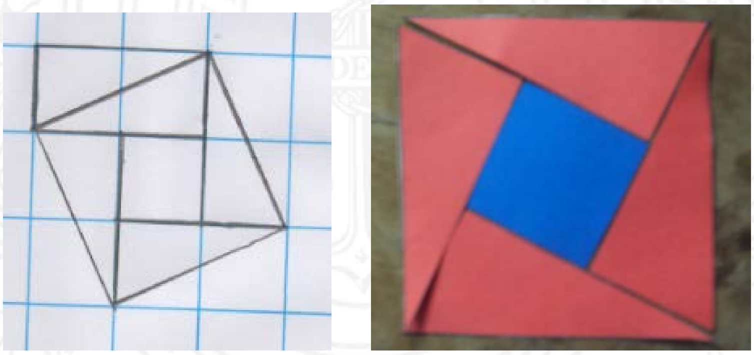


Figura 159. Construcción de un cuadrado y el puzzle de un cuadrado.

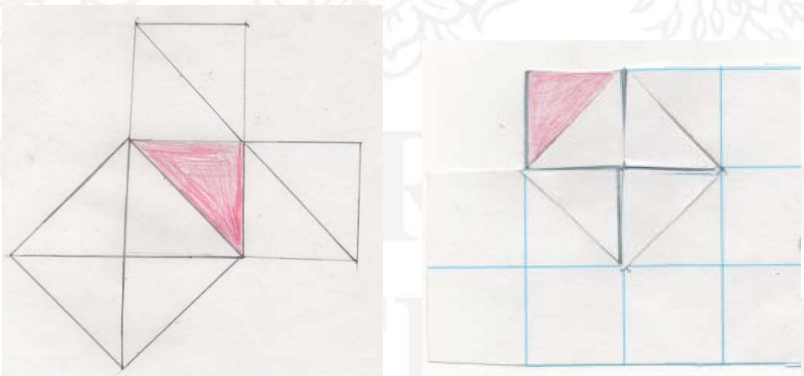


Figura 160. Construcción con cuadricula y sin cuadricula.

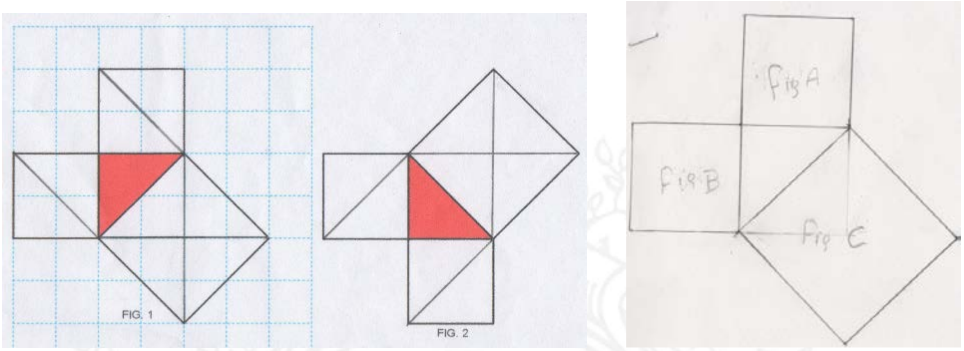


Figura 161. Cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo Isósceles.

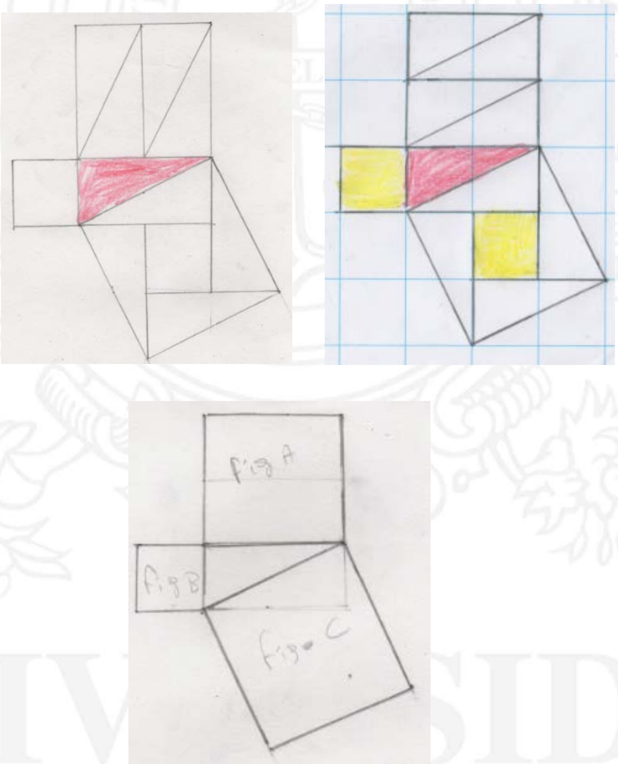


Figura 162. Cuadrados construidos sobre lados de un triángulo rectángulo escaleno.

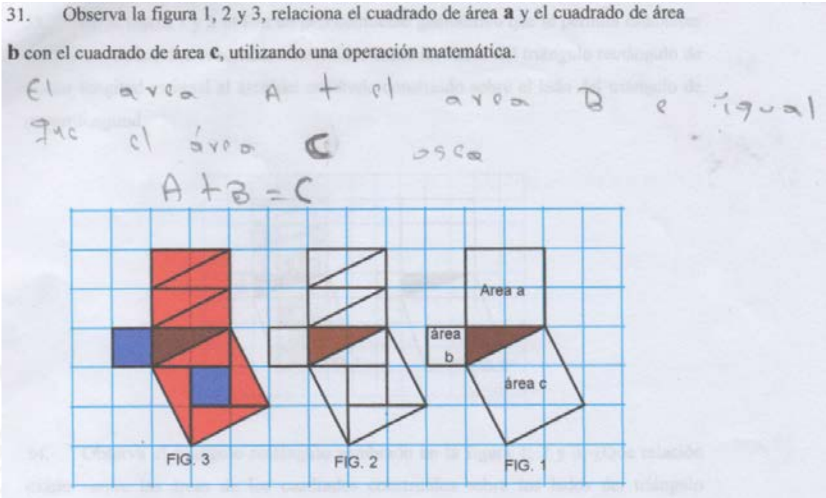


Figura 163. Respuesta de actividad escrita por Santiago.

De acuerdo a las actividades relacionadas con las construcciones hechas por el estudiante, mostradas anteriormente, los aportes verbales dados por la entrevista hecha en cada nivel, y la actividad escrita, se logró, suficiente información para concluir y validar los instrumentos.

4.2.1.1. Análisis de los descriptores del nivel 0.

0.1 Diferencia visualmente una superficie de otra.

De acuerdo a la observación y la respuesta que dio cuando se le dijo que pintara lo que cree que era la superficie de las cinco figuras planas, él procede a pintar lo que estaba encerrado, dentro de la figura, además en la actividad escrita coloreo las superficies de color rojo, demostrando que tiene nociones de lo que cree es la superficie. Por otro lado cuando se le solicita que describiera la superficie de las figuras tanto en el material producido durante la entrevista con la forma de la figura, argumenta de la siguiente forma:

"la figura 1 tiene superficie de forma cuadrada, la figura 2 tiene forma de triángulo, la figura 3 tiene forma de rectángulo, la figura 4 tiene forma de un cometa y la figura 5 tiene forma circular". En la actividad escrita también se refiere a la superficie por su forma.

A continuación se muestra la categoría relacionada al descriptor.

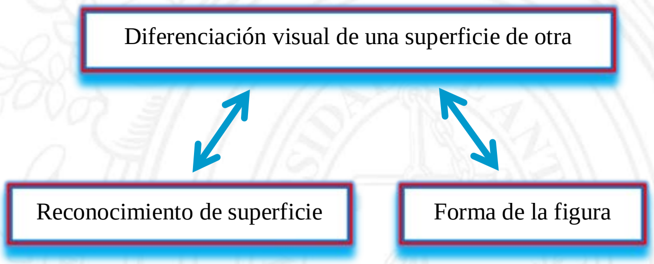


Figura 164. Descriptor y categorías de Santiago.

0.2 Compara superficies para determinar su mayor o menor tamaño

Para Santiago, comparar superficie respecto a las figuras presentadas en la primera pregunta, durante la entrevista no fue difícil, afirmó que la figura 3 era de mayor tamaño y la figura 4 de menor tamaño. Cuando se le presentó cada par de figuras muy parecidas y se le pidió que definiera cual era de mayor tamaño, Santiago, identificó cada una de ellas y encontró ciertas diferencias respecto a sus lados y superficie.

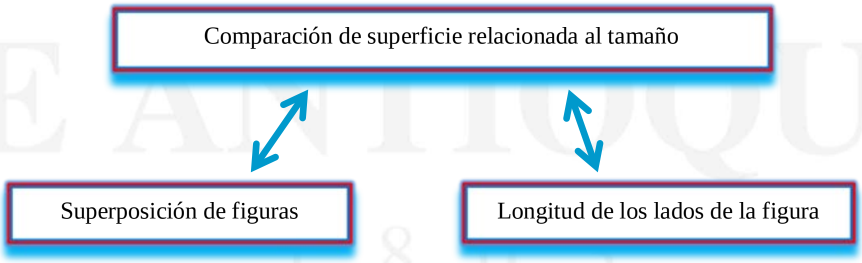


Figura 165. Descriptor 0.2 y categorías de Santiago.

0.3 Afirma sin demasiadas dudas que un segmento puede ser igual o no a otros segmentos, además se puede dividir en dos partes iguales (punto medio).

Al principio Santiago no recordaba el concepto de segmento, debido a eso se hace un aporte de información con un ejemplo gráfico. Santiago logra reconocer cuando dos o más segmentos son o no iguales. Santiago realiza algunas figuras con palillos de igual medida y de diferentes medidas. Afirma que con segmentos se construyen figuras y con palillos también, por lo tanto logra relacionar palillos con segmentos, y a su vez, con los lados de las figuras. Respecto al punto medio del segmento, lo ha relacionado con la mitad del segmento. Inicialmente el segmento estaba dibujado en cuadrícula, fue mucho más fácil para encontrar el punto medio, luego sin cuadrícula, acudió a la regla y también a una aproximación o estimación visual.

Otra forma de encontrar el punto medio, en este caso, el segmento que divide en dos partes iguales una superficie rectangular o cuadrada, fue trazando otro segmento que une los dos vértices opuestos (la diagonal). Tanto en la entrevista como en la actividad escrita y la observación logra determinar el punto medio como el punto que divide en dos partes iguales un segmento.

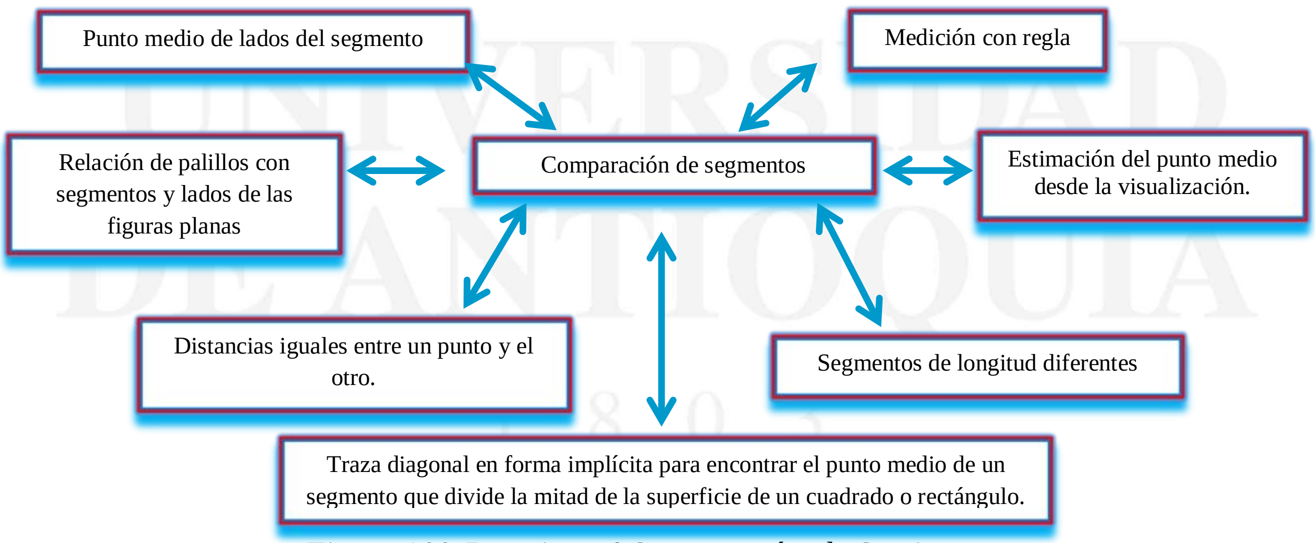


Figura 166. Descriptor 0.3 y categorías de Santiago.

0.4 “Un estudiante reconoce que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes”

El estudiante pudo percibir que una superficie se puede dividir en partes iguales, pues tienen, de algún modo el concepto de simetría y fracción, elementos claves para reconocer la mitad de una figura. Reconoció que el cuadrado estaba dividido en dos, y cuatro partes iguales, por lo tanto argumentó que “dos superficie pueden ser iguales, según el trazo o corte de la figura “pueden dividirse en cuatro partes iguales también”.

Santiago afirma que una superficie puede transformarse en otras superficies, si se hace un corte con tijera.

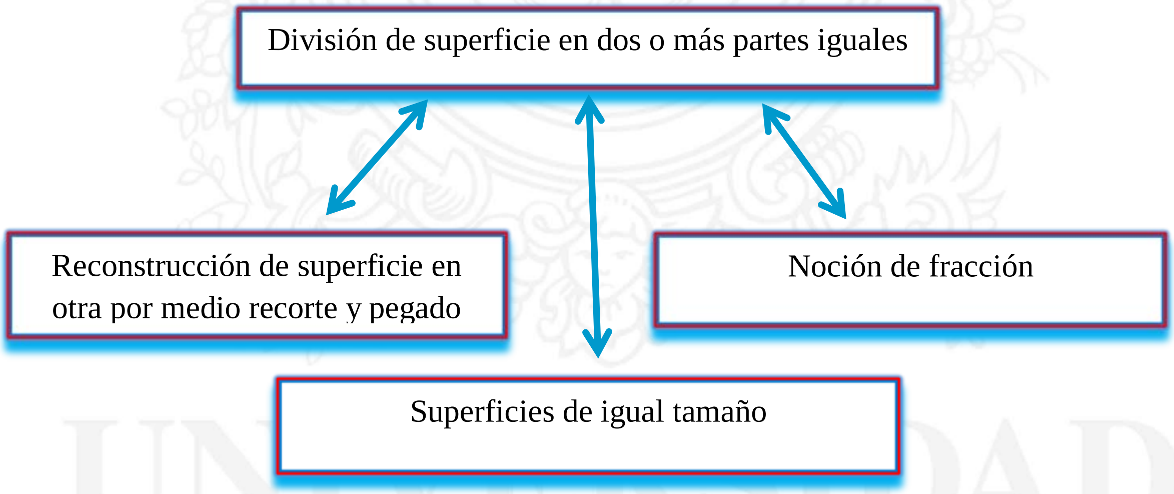


Figura 167. Descriptor 0.4 y categorías de Santiago.

4.2.1.2.Análisis de los descriptores del nivel I

Para Santiago el reconocimiento del triángulo fue muy fácil, identificó claramente los 4 triángulos entre los cuadriláteros, afirma claramente que tiene tres lados. Hubo un momento que se le pregunta si con tres lados se puede construir un triángulo, afirmó que sí; sin embargo, dado que no siempre se puede hacer, se procede a establecer un dialogo socrático, con el fin de lograr mejorar su razonamiento, y encontrar la razón o la condición por la cual es posible o no. Después de entablar el dialogo, logró identificar la condición que deben tener los tres palillos para construir un triángulo.

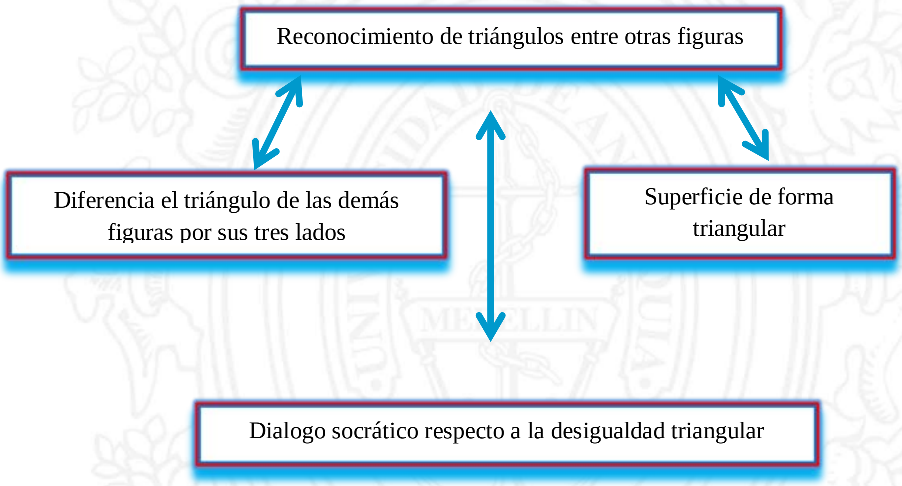


Figura 168. Descriptor 1.1 y categorías de Santiago.

1.1 Reconoce el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas.

Santiago reconoció el cuadrado y el rectángulo entre los cuadriláteros, afirmó que los cuadrados tienen parecido a una ventana o una pantalla de computador y el rectángulo a una puerta, diferenció sus lados y ángulos por su tamaño.

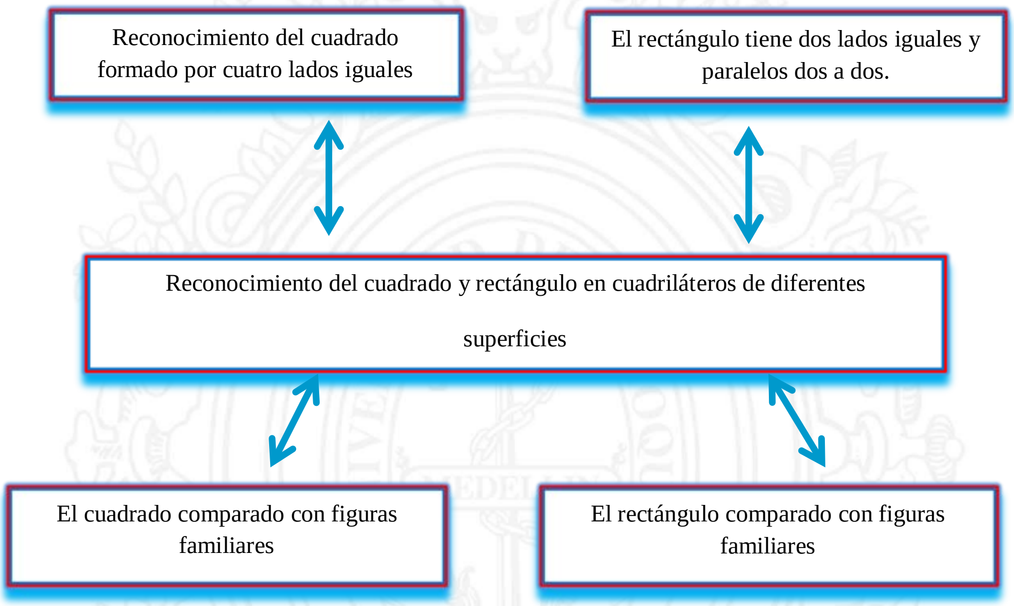


Figura 169. Descriptor 1.2 y categorías de Santiago.

1.2 Establece una relación entre la superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales.

Inicialmente, durante la entrevista Santiago manifestó no tener claro el concepto de diagonal, por lo tanto, se proporciona un aporte de información respecto a la diagonal. Para él fue muy fácil comprender que la diagonal divide el cuadrado o el rectángulo en dos triángulos iguales. Supo que al recortar el cuadrado o rectángulo por una de sus diagonales se dividida en dos partes iguales, y una de esa partes era la mitad de un cuadrado o rectángulo. Además, en la actividad escrita afirmó también lo mismo, argumentando que siempre una diagonal divide al rectángulo en dos triángulos iguales. De hecho, Santiago afirma que al trazar dos diagonales en el cuadrado se forman cuatro triángulos iguales, pero en el rectángulo no.

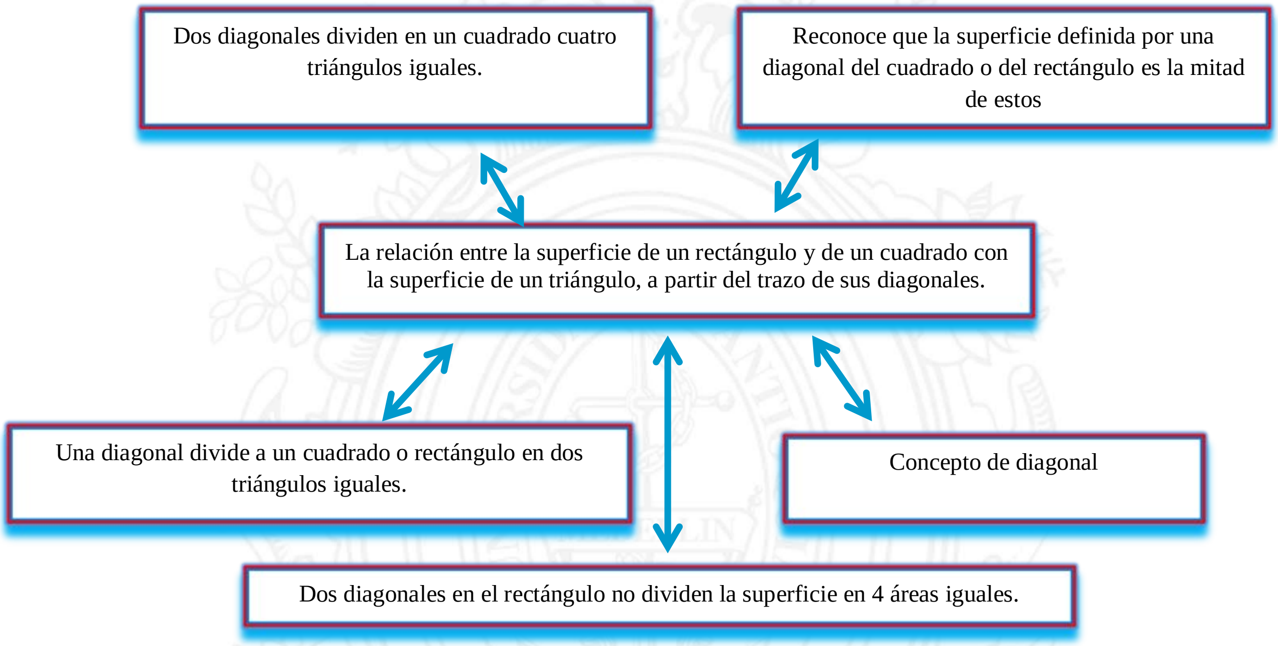


Figura 170. Descriptor 1.3 y categorías de Santiago.

1.4 Determina la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas.

Santiago, en el transcurso de la entrevista requirió de un aporte de información con relación a la mediana, pues manifestó no reconocerla. Santiago, al trazar la media, primero trata de ubicar el punto medio de los dos lados opuestos del cuadrado o rectángulo y luego procede a realizar la linea. Afirma que una diagonal divide al cuadrado en dos rectángulos iguales y dos medianas en cuatro cuadrados iguales: en el rectángulo reconoce que dos medianas dividen la superficie en cuatro rectángulos iguales. Además tanto en la entrevista y actividad escrita como en la observación, argumenta que la mediana del rectángulo lo puede dividir en dos cuadrados de igual superficie, reconociendo que es posible construir un rectángulo que sea el doble de un cuadrado.

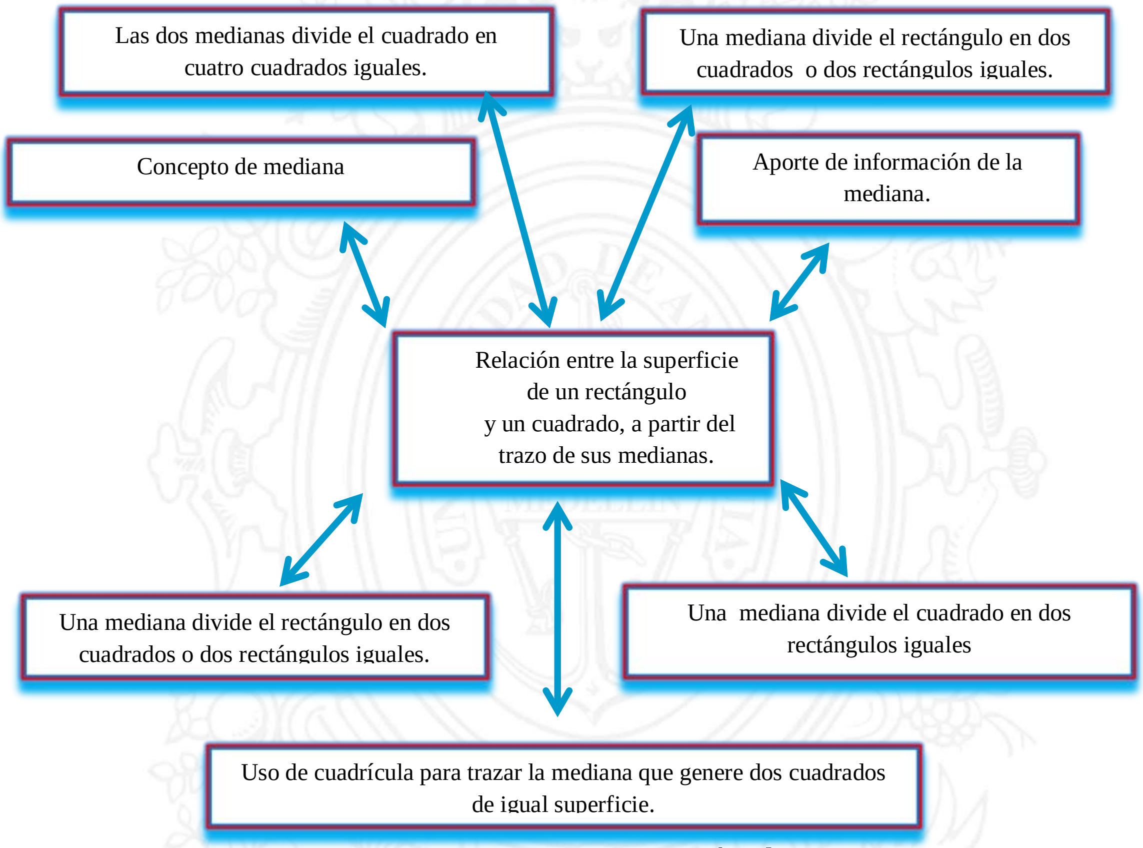


Figura 171. Descriptor 1.4 y categorías de Santiago.

1.5 A través de la geometría del doblado de papel, el estudiante: puede construir dos o más rectángulos de igual superficie o dos o más cuadrados de igual superficie a partir de la mediana y puede construir dos o más triángulos de igual superficie a partir de la diagonal.

Al iniciar la entrevista se hizo un aporte respecto al manejo del papel y una inducción para manipularlo y construir dobleces de diferentes formas. Esta técnica es un mediador didáctico que permite demostrar conceptos geométricos.

Santiago logró relacionar un doblez con el lado de un cuadrado y de un rectángulo, también con la construcción de una mediana o diagonal. Se mostró muy entusiasmado con la actividad, demostraba por medio del doblado de papel que un cuadrado, un triángulo o rectángulo son iguales; además, cuando una figura es la mitad de la otra. Esta técnica permite que Santiago refine el concepto de mediana y diagonal y reconozca en forma implícita la congruencia entre las figuras y sus lados. Cabe resaltar que el estudiante tuvo dificultad para clasificar de manera exitosa los triángulos, que resultan del doblez de la diagonal del rectángulo y el cuadrado.

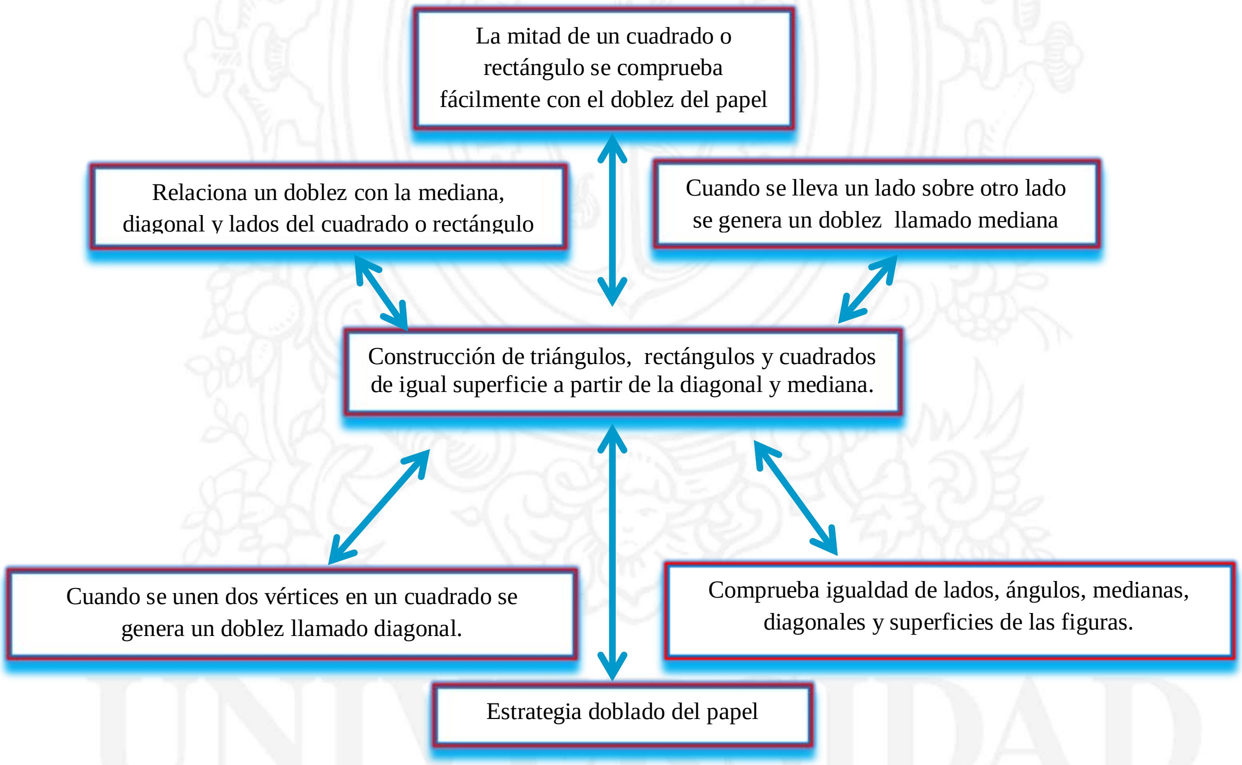


Figura 172. Descriptor 1.5 y categorías de Santiago.

4.2.1.3. Análisis de los descriptores del nivel II

2.1 Reconoce un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos.

Durante la entrevista, Santiago manifestó medir de forma adecuada un ángulo del cuadrado, afirmando después, que todos los ángulos miden 90 grados. Presentó dificultad para reconocer líneas perpendiculares, pues no recordaba que un triángulo rectángulo tenía dos líneas perpendiculares. Sin embargo, se dio un aporte de información y de esta manera logro relacionar el ángulo de 90 grados o recto con la formación de líneas o lados perpendiculares y un aporte de triángulo rectángulo. De esta forma, logró relacionar los ángulos rectos, con la formación de lados perpendiculares y luego el reconocimiento de un triángulo rectángulo entre triángulos, esto se evidenció en la entrevista y la actividad escrita. Cuando a Santiago se le habla del triángulo-rectángulo isósceles y escaleno, los cuales no diferenciaban muy bien pues sabía que eran triángulos rectángulos, manifestó haberlo escuchado.

Desde luego, se dio un aporte de información, y más adelante manifestó plenamente la diferencia entre triángulo-rectángulos isósceles y escalenos y el ángulo en común entre ellos. Por otro lado, afirma también que al trazar una diagonal al cuadrado se divide en dos triángulos rectángulos donde el ángulo agudo es igual a 45º y la suma de los dos ángulos agudos es igual al ángulo recto.

Santiago, también, afirma que al trazar una diagonal se divide en dos triángulos rectángulos escalenos; por otra parte, al hablarle de congruencia de figuras geométricas y no entender, se aportó información respecto a la congruencia de figuras planas, fue un momento propicio por que se estaba utilizando el doblado de papel, este hecho, hizo explicito para

Santiago que al hacer el doblez de la diagonal a un cuadrado o rectángulo se divide en dos triángulos congruentes por tener igual lado e igual ángulo correspondiente. Argumentó que con dos triángulos rectángulos isósceles se puede formar un cuadrado, siempre y cuando sean congruentes, de igual forma ocurre con el rectángulo, también deben ser congruentes los dos triángulos rectángulos escalenos.

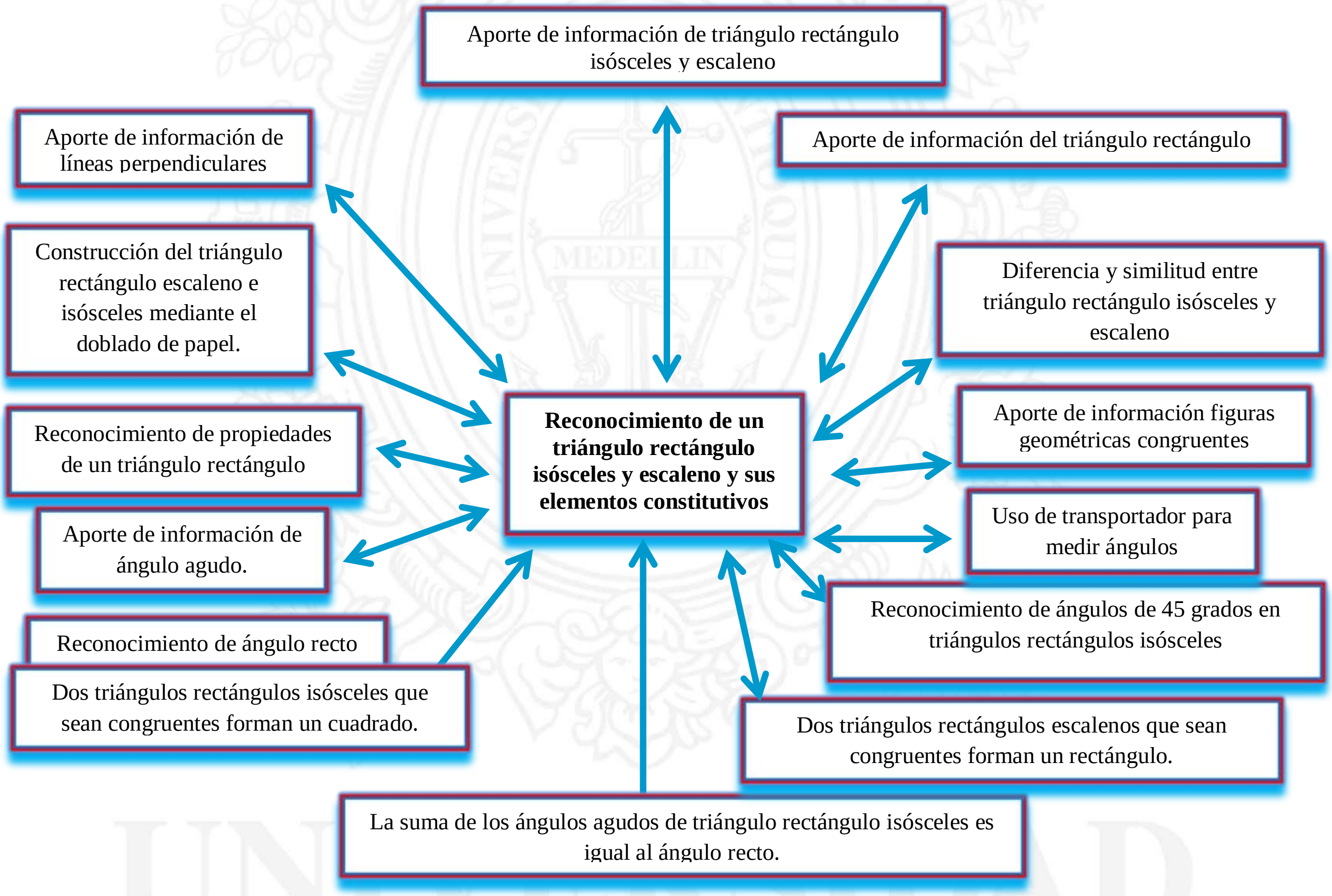


Figura 173. Descriptor 2.1 y categorías de Santiago.

2.2 Reconoce el rectángulo y cuadrado, y sus propiedades, además de sus elementos constitutivos.

El estudiante Santiago logró establecer relaciones de congruencia con cuadrados y rectángulos. Se dio un aporte para líneas paralelas, y logró relacionarlo con los lados opuestos de un cuadrado o rectángulo; afirmó que los lados consecutivos de un cuadrado o rectángulo eran perpendiculares, porque formaba un ángulo recto. Afirma que la suma de los ángulos internos de un cuadrado o rectángulo es igual a 180 grados. Santiago logra reconocer un rectángulo y cuadrado por los elementos y propiedades que los caracteriza.

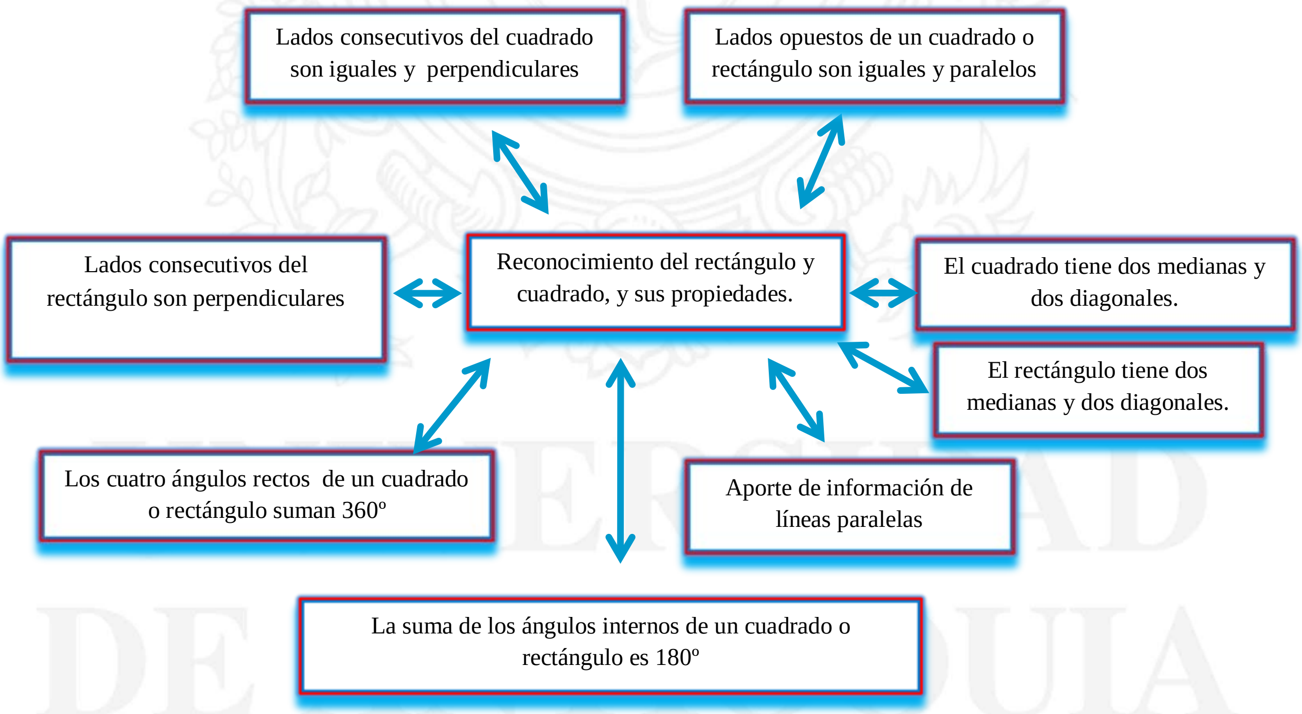


Figura 174. Descriptor 2.2 y categorías de Santiago.

2.3 Establece comparación de área de las figuras planas para reconocer que dos o más figuras planas con diferentes superficies, pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos.

Para Santiago, hubo una confusión entre superficie y área, no la diferenciaba claramente, se dio un aporte de información respecto al área estos componentes. Sin embargo, hubo momentos de confusión, se debía establecer la diferencia, para ello se estableció un dialogo socrático, que lo llevo a sacar la siguiente conclusión: “dos figuras tienen superficies diferentes pero tienen igual área”. Algunas veces Santiago acudió a métodos o procedimientos geométricos para poder comparar el área, utilizó el recorte y pegado para igualar superficies y comparar medidas. En una actividad donde se recortó un cuadrado en tres partes y con ellas se formaron cuatro figuras diferentes, Santiago afirmó que la superficie de las cuatro figuras eran diferentes y tenían igual área, porque se estaban utilizando las mismas figuras recortadas.

También utilizó trazos de medianas, diagonales y alturas para establecer comparaciones. Respecto a la altura de un triángulo, Santiago no tenía idea, aun así se dio el aporte de información y un ejemplo con el fin de que lo adaptara con sus conocimientos previos más fácilmente. En muchos casos se utilizó el dialogo socrático para lograr en el estudiante un razonamiento que incite al riesgo, contradicciones, confusiones y estimularlo a que encuentren un método para resolver la situación y pudieran crear sus propias conclusiones.

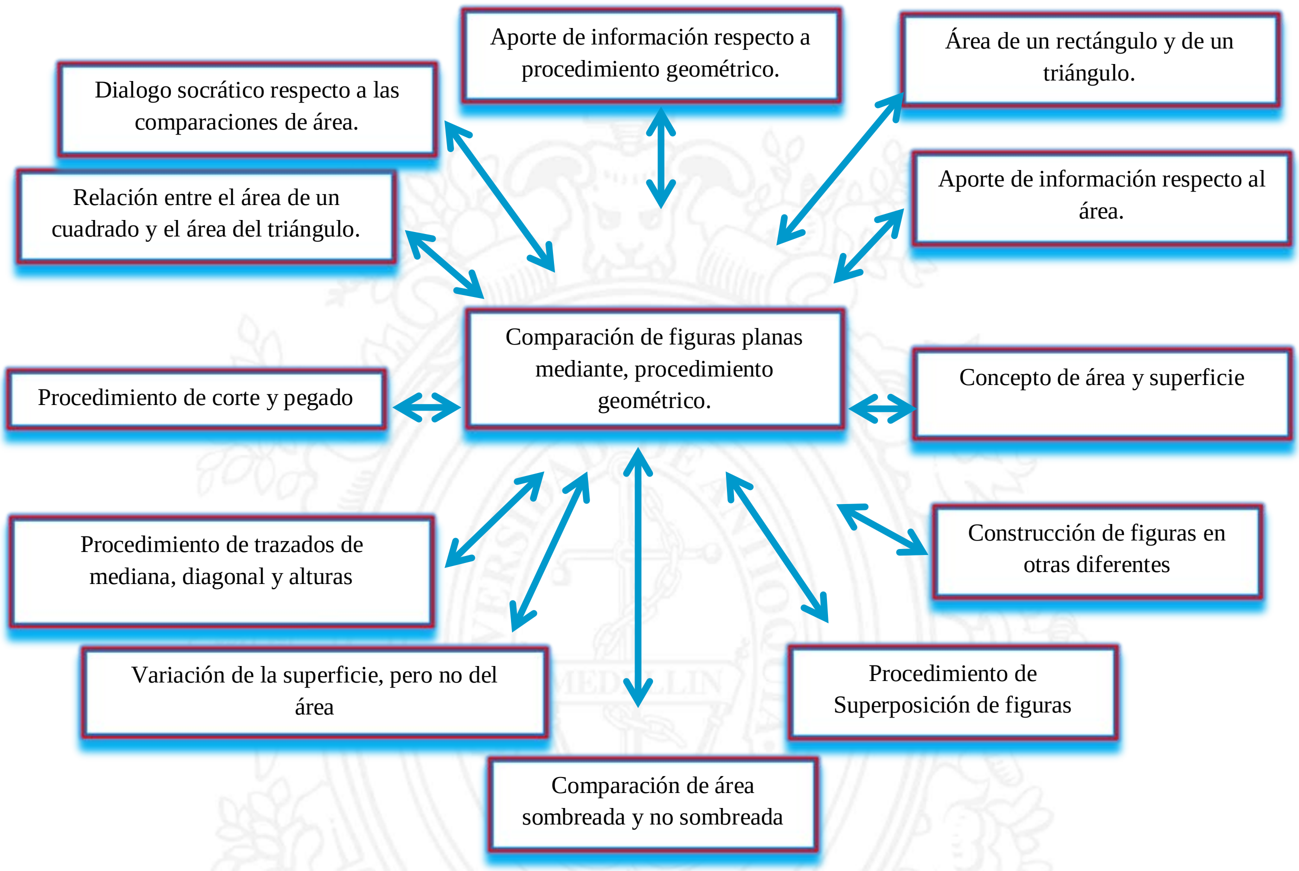


Figura 175. Descriptor 2.3 y categorías de Santiago.

2.4 Construye cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares.

Santiago, en la entrevista, logra construir cuadrados y rectángulos fácilmente sobre segmentos construidos en cuadrícula en posiciones diferentes; construye cuadrados sobre lados de cuadrados, de rectángulos, de triángulos en cuadrículas, también lo hace sobre la diagonal. No obstante, en este mismo sentido, las construcciones de cuadrados sin cuadrícula, Santiago utilizaba la escuadra. Algo interesante es que no media con los milímetros y centímetros sino que marcaba los dos puntos extremos del segmento o lado con la regla y utilizaba esa dimensión para hacer cualquier cuadrado, además de la escuadra.

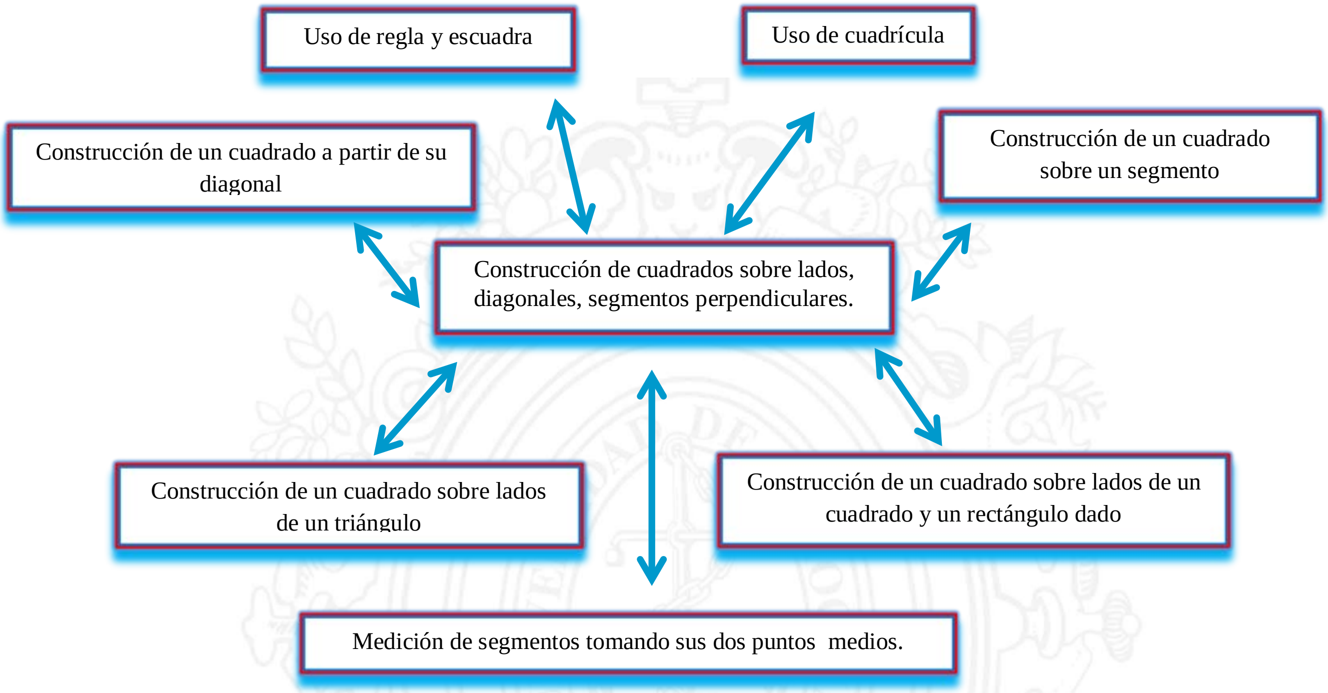


Figura 176. Descriptor 2.4 y categorías de Santiago.

2.5 Reconoce que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales.

Santiago reconoce que un cuadrado se divide en dos triángulos rectángulos isósceles de igual área al trazar una diagonal y cuatro triángulos rectángulos isósceles de igual área al trazar dos diagonales.

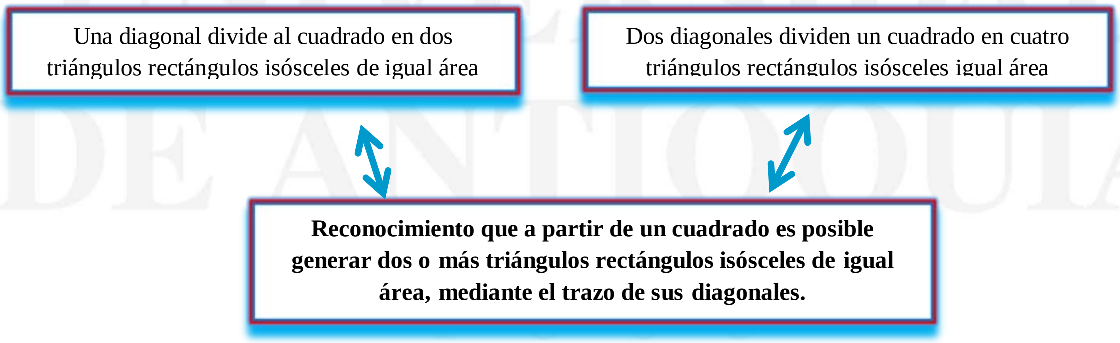


Figura 177. Descriptor 2.5 y categorías de Santiago.

2.6 Reconoce que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas.

Santiago reconoce que un rectángulo se divide en dos triángulos rectángulos escalenos, de igual área al trazar una diagonal y cuatro triángulos no rectángulos al trazar dos diagonales Cuando Santiago trazó dos diagonales y dos medianas argumentó que formaron ocho triángulos rectángulos de igual área; fue fácil para él hacer estas apreciaciones, debido a conceptos relacionados con el triángulo rectángulo escaleno que se han tenido en cuenta en el proceso de razonamiento durante entrevistas anteriores.

Una diagonal divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos escalenos de igual área.

Dos diagonales no es posible que el rectángulo se divida en cuatro triángulos rectángulos escalenos

Reconocimiento que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas.

Dos diagonales y dos medianas dividen al rectángulo en ocho triángulos rectángulos escalenos

Figura 178. Descriptor 2.6 y categorías de Santiago.

2.7 Afirma sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, mediante el trazo de sus medianas.

Hay un momento en el que a Santiago se le presentó una hoja rectangular para que trazara una mediana, fue bastante fácil para él, y afirmó que el área de rectángulo (hoja de papel) se había dividido en dos cuadrados de igual área. Argumenta también que no siempre se forma un cuadrado de área doble, también se forman dos rectángulos de igual área. También, Santiago hizo construcciones de rectángulos de área doble en cuadrícula; logró reconocer las condiciones de un rectángulo para que tenga el área doble de un cuadrado, estableció que la base del rectángulo debe ser el doble de la altura. Asimismo para Santiago, también fue fácil construir un rectángulo de área triple de un cuadrado en la cuadrícula, se observó que él contaba los cuadritos de la base y de la altura, y luego trazaba las dos alturas para construir los tres cuadrados.

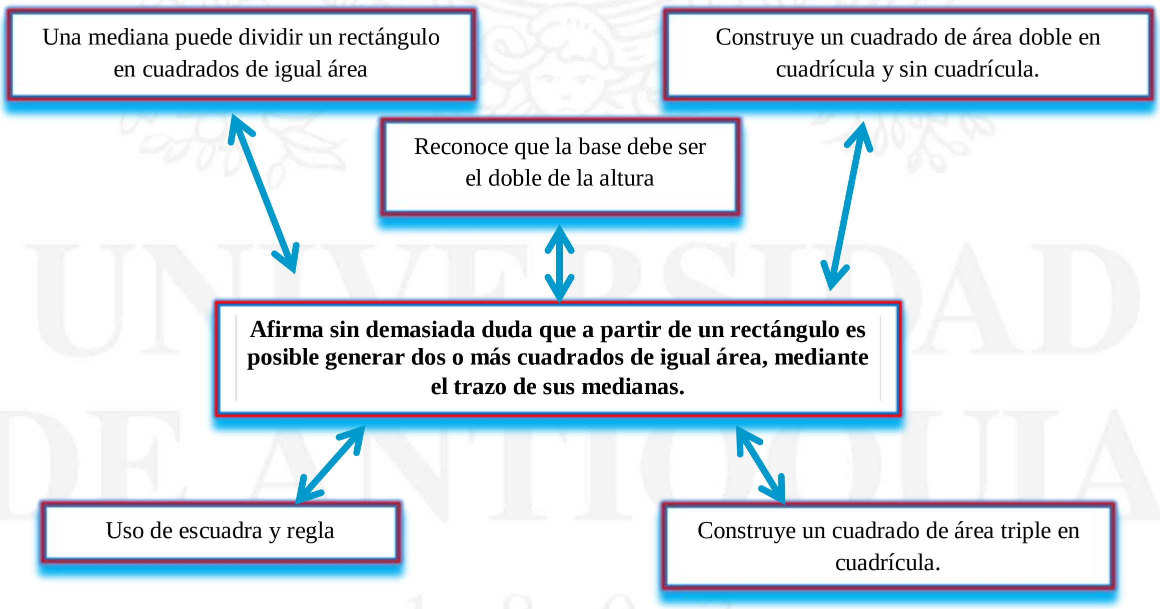


Figura 179. Descriptor 2.7 y categorías de Santiago.

4.2.1.4. Análisis de los descriptores de nivel III:

3.1 Comprende que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.

Durante la entrevista inicial, Santiago compara dos cuadrados, y logra relacionar el área de uno de los cuadrados como el doble del área del otro. Encontrar la relación de área entre los dos cuadrado fue fácil para él por el uso de la cuadrícula, es de anotar que a Santiago se le proporcionaron los medios para que razonara inicialmente y encontrara la razón para realizar un cuadrado de área doble, se estableció un dialogo inquisitivo y logró encontrar la condición suficiente para realizar un cuadrado de área doble al cuadrado inicial, argumentando lo siguiente: “para construir un cuadrado de área doble se debe tener en cuenta la longitud de la diagonal del cuadrado presentado”.

Construyó un cuadrado de área doble separado del cuadrado inicial en cuadrícula, además, realizó un cuadrado de área doble sobre la diagonal del cuadrado dado, con cuadrícula y sin cuadrícula. Él se dio cuenta que al trazar las dos diagonales del cuadrado construido se observan cuatro triángulos rectángulos isósceles igual a los dos triángulos rectángulos isósceles del cuadrado dado, esto también se logró en la actividad escrita.

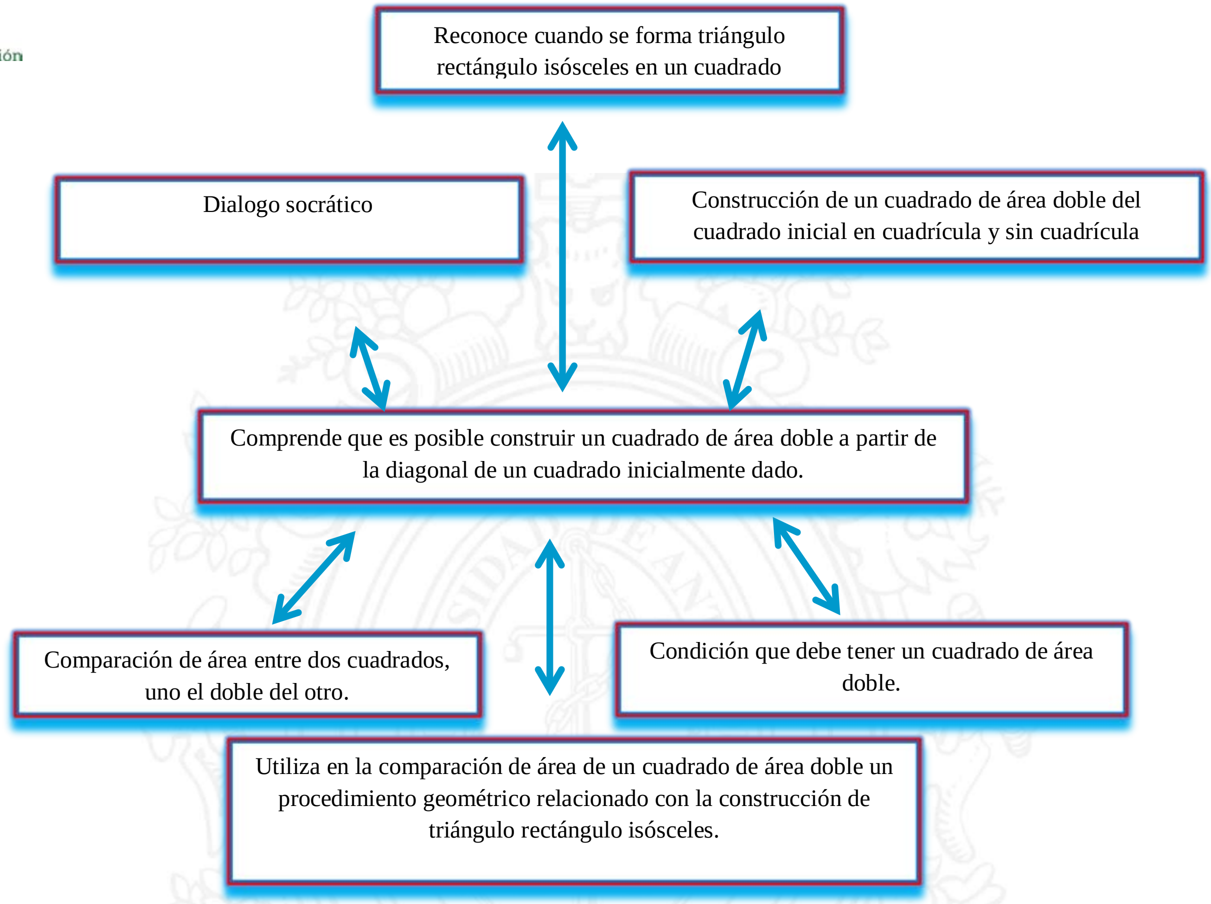


Figura 180. Descriptor 3.1 y categorías de Santiago.

3.2 Entiende que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.

Durante la entrevista se inició primordialmente familiarizando a Santiago con un cuadrado formado con cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado, Santiago formó un cuadrado con las figuras presentadas (las cinco figuras).

Santiago reconoció que el cuadrado y los cuatro triángulos rectángulos escalenos tienen igual área. En diferentes situaciones se comparó el cuadrado con diferentes figuras, como: cuadrado, triángulo rectángulo escaleno, rectángulo; finalmente construyó un cuadrado sobre la diagonal del rectángulo de área doble de un cuadrado, y comprendió que el cuadrado construido era de área doble del rectángulo inicial.

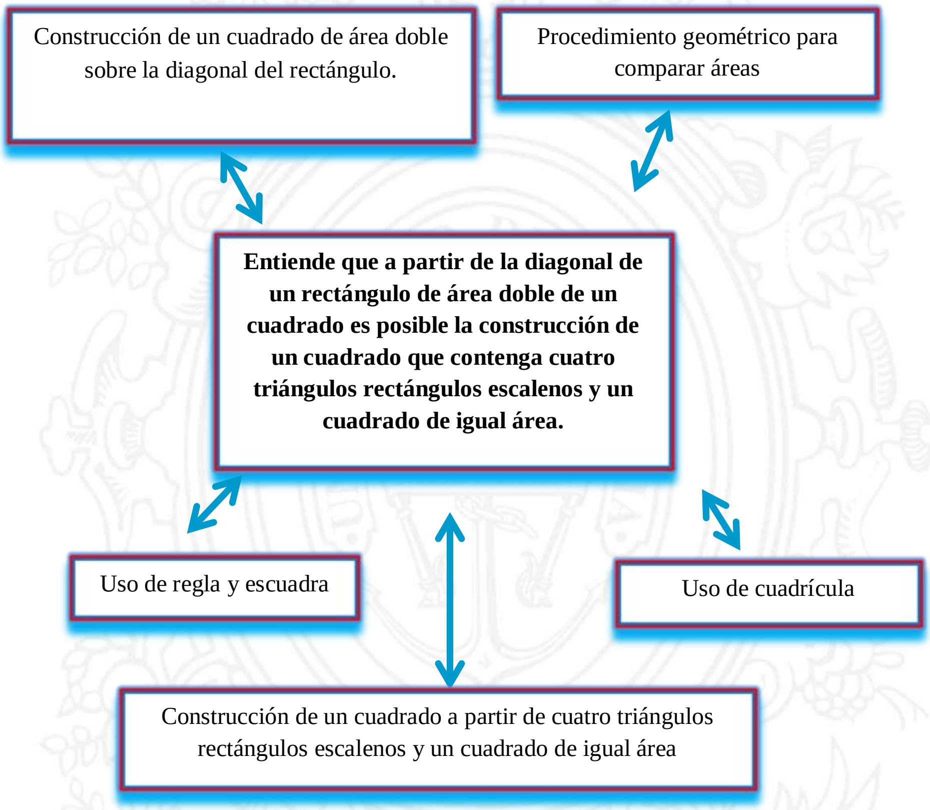


Figura 181. Descriptor 3.2 y categorías de Santiago.

3.3 En la construcción del triángulo rectángulo isósceles, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Cuando a Santiago se le presentaron cuatro figuras formadas por cuatro triángulos rectángulos isósceles de igual área, reconoció que, el área de la superficie separada es igual al área de la superficie completa. Se consiguió que Santiago comprendiera la propiedad aditiva del área. Fueron muchas las entrevistas relacionadas con la suma de las áreas.

Por otro lado, Santiago, durante el proceso de construcción de un cuadrado de área doble sobre la diagonal del cuadrado inicial y los dos cuadrados construidos sobre los lados del cuadrado inicial, logro reconocer el triángulo rectángulo isósceles y los tres cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles, el cual fue pintado de rojo por Santiago. La construcción de los cuadrados, se hizo sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles, e inicialmente en cuadrícula de cartulina plana cuadriculada y en cartulina plana sin cuadrícula, y la entrevista de tinte socrático. Finalmente Santiago estableció la relación de área entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo isósceles, argumentó escribiendo que el área de la figura *a* más el área de la figura *b* es igual al área de la figura *c*, y justificó que el área de los dos cuadrados iguales, era igual al área del cuadrado grande, utilizó como procedimiento geométrico la construcción de diagonales para formar triángulos rectángulos isósceles y corte y pegado para cubrir el cuadrado grande.

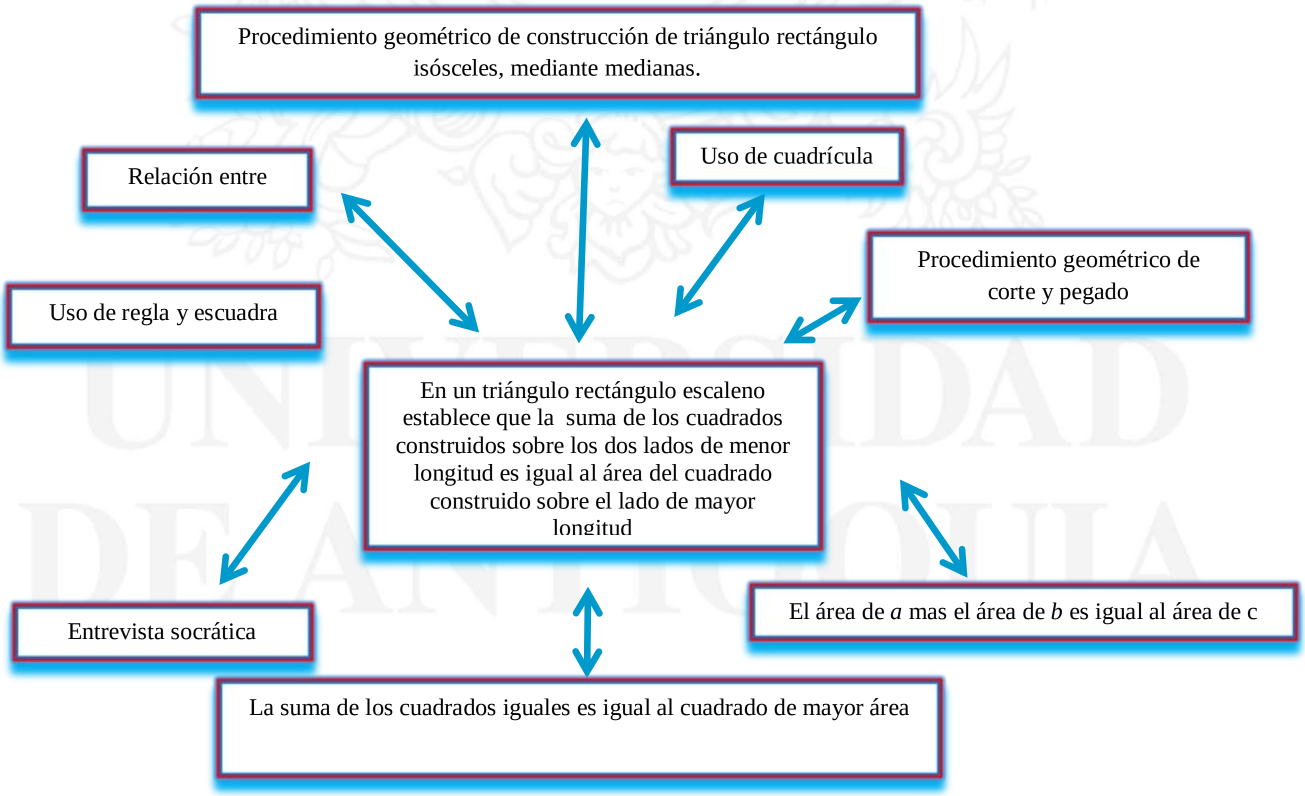


Figura 182. Descriptor 3.3 y categorías de Santiago.

3.4 En la construcción de un triángulo rectángulo escaleno, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Durante la entrevista se realizaron varias construcciones similares a las anteriores, sobre hojas cuadriculadas, se construyeron cuadrados sobre los lados de un triángulo rectángulo escalenos. Se hicieron preguntas relacionadas a los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno con cuadrícula y sin cuadrícula, donde, realizó recorte y pegado de los dos cuadrados menores sobre el cuadrado mayor; en la conclusión de las actividades, Santiago comprendió la relación que se establecen entre las áreas los cuadrados construidos en un triángulo rectángulo isósceles, pues, a través de este procedimiento o método logró comparar las áreas, utilizó la construcción de triángulos rectángulos escalenos en el cuadrado mayor y en el cuadrado mediano y concluyó que el cuadrado pequeño más el cuadrado mediano formado por cuatro triángulos rectángulos escalenos, es igual al cuadrado grande formado por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos escalenos.

De esta forma, Santiago comprendió la operación de suma de áreas, afirmó que el área de la figura *a* más el área de la figura *b* es igual al área de la figura *c*.

Santiago, entre sus conclusiones afirmó que el cuadrado pequeño más el cuadrado mediano es igual al cuadrado grande.

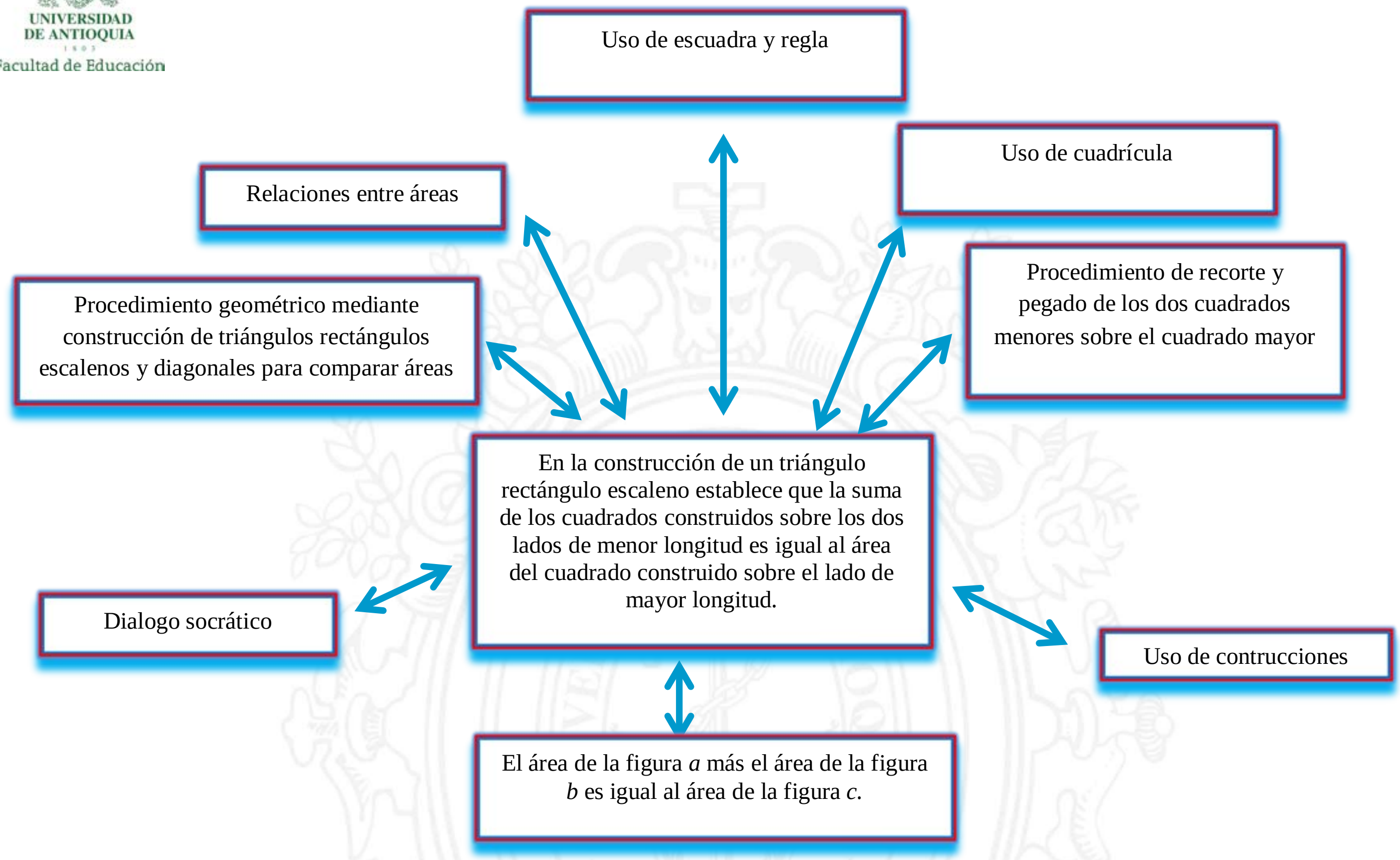


Figura 183. Descriptor 3.4 y categorías de Santiago.

4.2.2. Análisis del proceso de razonamiento de Andrés cuando avanza por cada uno de los niveles.

El estudiante que se hace llamar Andrés del grado quinto de una Institución educativa del Municipio de Apartadó, hizo parte del trabajo de investigación. Fue un estudiante que se caracterizó por ser muy responsable, manifestó una capacidad crítica admirable, además fue muy dedicado durante el trabajo de campo. Este estudiante realizó las actividades como: entrevistas, actividad escrita y la observación que brindaron información acerca de la comprensión del objeto matemático.

A Continuación, relaciono las construcciones que realizó Andrés durante el desarrollo de la entrevista para el nivel III referido a los descriptores 3.1, 3.2, 3.3 y 3,4.

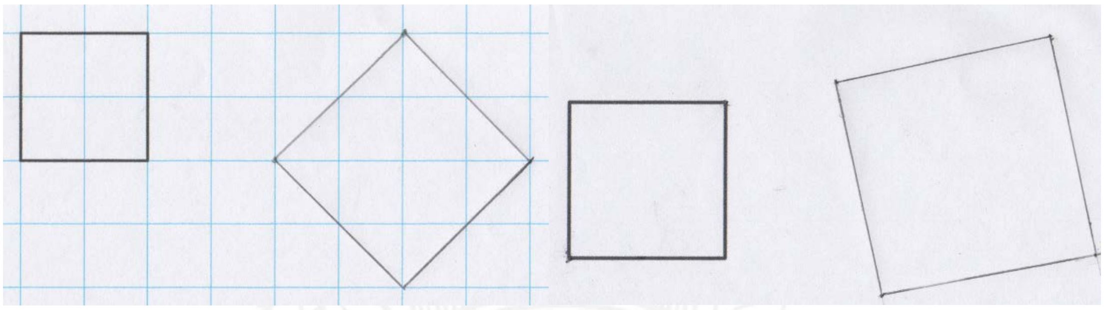


Figura 184 Construcción de un cuadrado de área doble de otro cuadrado por Andrés

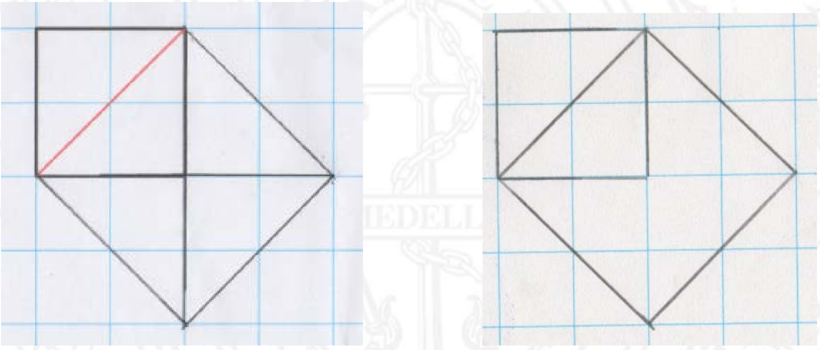


Figura 185. Construcción de un cuadrado de área doble sobre la diagonal de un cuadrado.

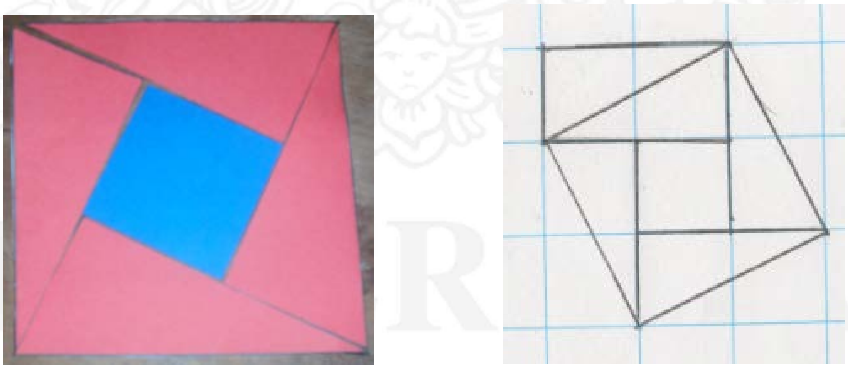


Figura 186. Construcción de un cuadrado de área doble y el puzzle de un cuadrado.

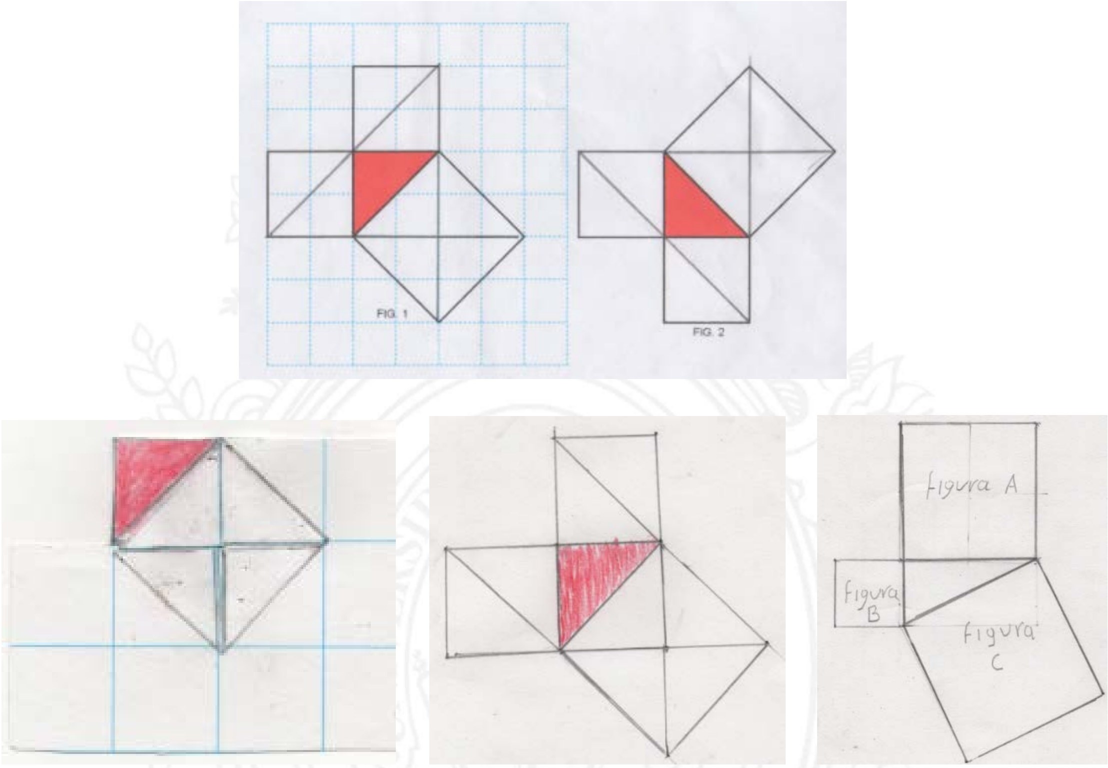


Figura 187. Cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo Isósceles.

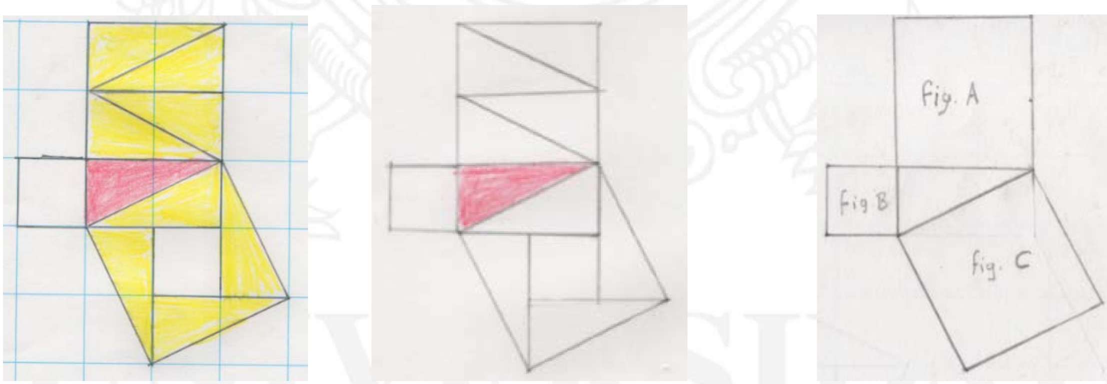


Figura 188. Cuadrados construidos sobre lados de un triángulo rectángulo escaleno por Andrés.

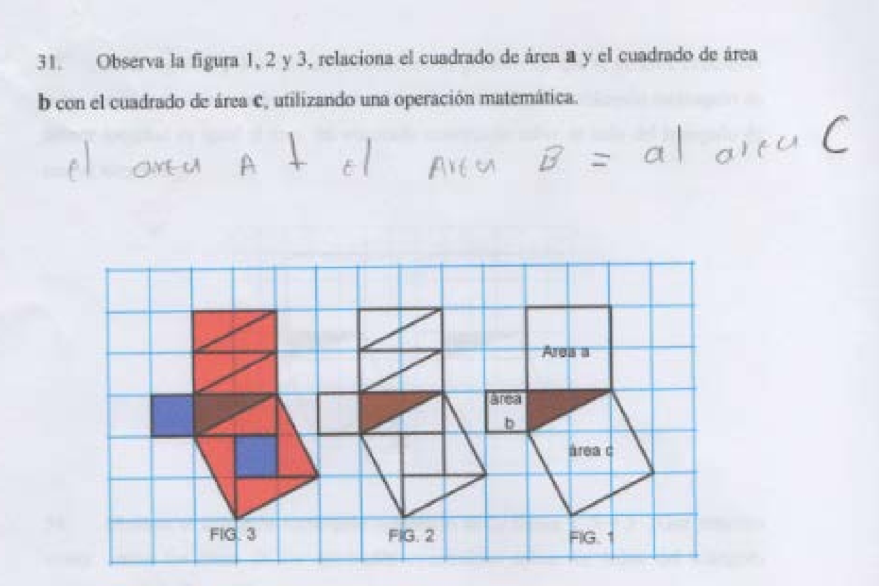


Figura 189. Respuesta de actividad escrita por Andrés.

4.2.2.1. Análisis de los descriptores de nivel 0

0.1. Diferencia visualmente una superficie de otra.

Durante la entrevista, Andrés reconoció la superficie de las cincos figuras planas y procedió a pintar con lápiz cada uno de ellas; en la parte escrita pintó la superficie de color rojo claro, logró visualizar la superficie de la figura y la diferencia con otra, pero sin definirla. Haciendo un acercamiento del concepto, Andrés, relacionó la superficie como la forma de la figura, pues hizo algunas apreciaciones al describir como eran algunas figuras según lo que conocía de las ellas., es decir la “figura 5 tiene una forma de círculo”.

Diferenciación visual de una superficie de otra

Relación de la superficie directamente con la figura plana.

Percepción acerca la superficie como la parte cerrada de la figura.

Figura 190. Descriptor 0.1 y categorías de Andrés.

0.2. Compara superficies para determinar su mayor o menor tamaño.

Andrés compara la superficie de forma directa, no necesitó recortar las figuras para saber cuál era de mayor o menor superficie, logró identificarla desde la visualización e intuición de él mismo. En la actividad escrita, identificó las dos figuras, la menor como la figura 3 y la mayor como la figura 4.

Comparación de superficies

Superposición de las figuras.

Comparación directa de superficie

Figura 191. Descriptor 0.2 y categorías de Andrés

0.3 Afirma sin demasiadas dudas que un segmento puede ser igual o no con otros segmentos. Se puede dividir en dos partes iguales (punto medio).

Para Andrés, el segmento lo había escuchado en clase de geometría, pero no recordaba su concepto, debido a esto se da un aporte de información. Andrés, relacionó segmentos con palillos y como lados de las figuras planas; pues logró reconocer que con segmentos se construyen figuras planas y con lados también.

Para el punto medio del segmento, Andrés desarrolló un método sencillo que no habían hecho los otros participantes, consistió en llevar un punto extremo al otro punto extremo del segmento por medio del doblez del papel para encontrar el punto medio. Además, ubicó muy bien el punto medio en el segmento construido sobre la cuadrícula, hizo estimaciones para ubicar el punto medio, ubico el punto medio en los lados de las figuras planas. De acuerdo a las apreciaciones realizadas durante la entrevista y la actividad escrita, concibe el punto medio como la mitad entre los dos extremos del segmento.

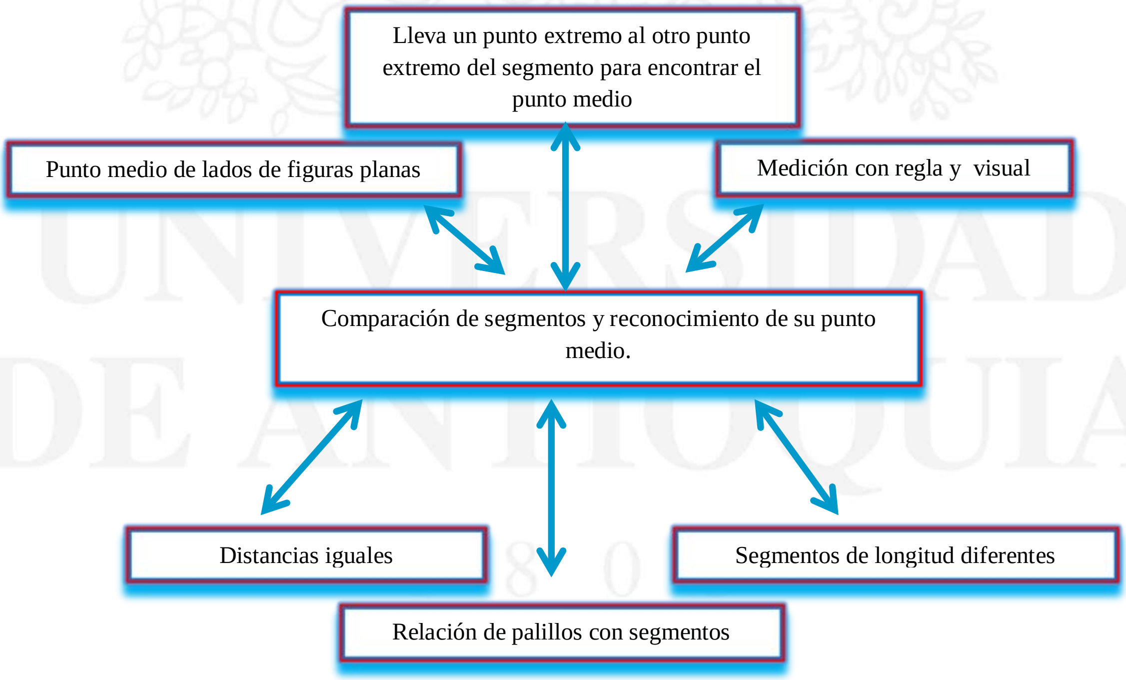


Figura 192. Descriptor 0.3 y categorías de Andrés.

0.5 “Un estudiante reconoce que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes”

Andrés se da cuenta que una figura plana se puede dividir en dos partes iguales, en cuatro partes iguales y en formas diferentes. Afirmó que una superficie puede ser igual a otra si se realiza un corte, de manera que cambie de posición; en la actividad escrita, él explica lo siguiente: “la figura si se recorta y se une correctamente puede armar la otra figura igual”.

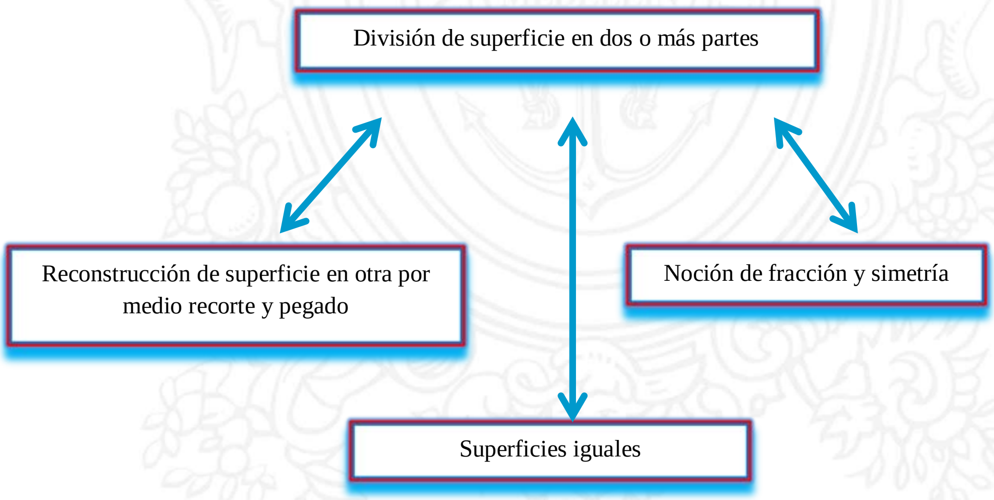


Figura 193. Descriptor 0.4 y categorías de Andrés.

4.2.2.2.Análisis de los descriptores del nivel I

A continuación, relaciono algunas construcciones durante la entrevista y la actividad escrita.

1.1 Reconoce el triángulo entre todas las figuras geométricas planas

Para este caso, Andrés reconoció el triángulo entre las demás figuras, diferencia un triángulo de la otra figura por su forma y sus lados que son tres. Hubo un momento de dificultad cuando se realizó la siguiente pregunta ¿Es posible que con tres lados se pueda construir un triángulo? Andrés afirmó que sí. Sin embargo se procedió a realizar un dialogo socrático para lograr cambiar la posición errónea, de manera fácil con construcciones de palillos donde le primero es posible formar un triángulo y el segundo no es posible, por más que intente, este contraejemplo inicia un desequilibrio cognitivo en el estudiante e inicia a encontrar la razón de por qué no es posible, finalmente logra razonar y argumentar que no todas las veces es posible construir un triángulo, que depende de la longitud de sus lado.

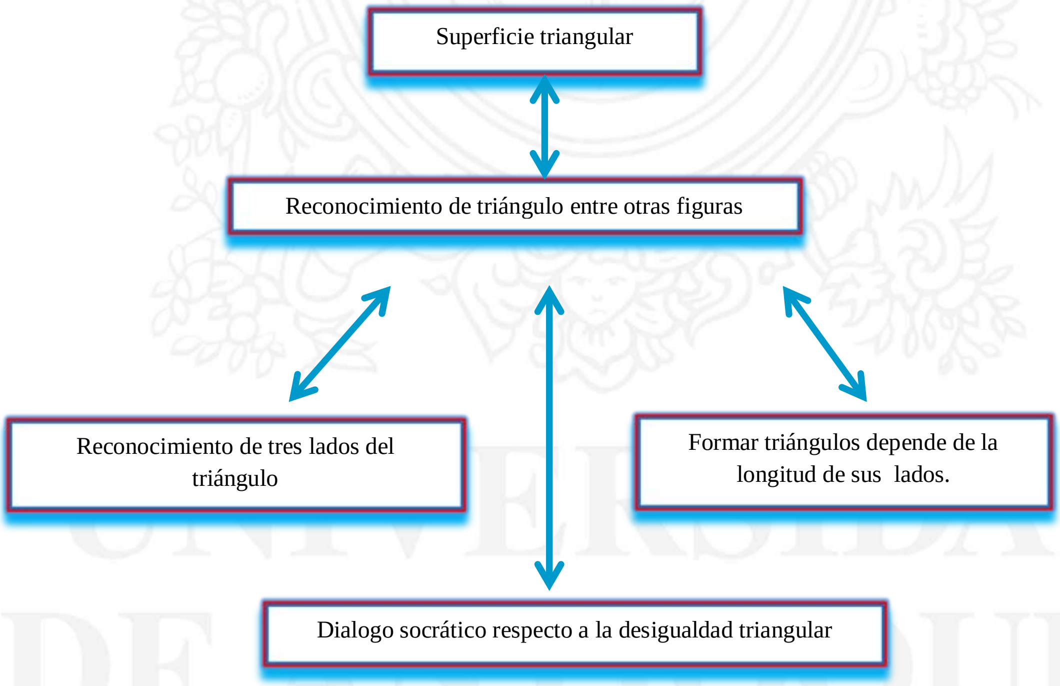


Figura 194. Descriptor 1.1 y categorías de Andrés.

1.2 Reconoce el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas.

Para Andrés, reconocer un cuadrado y rectángulo fue fácil, además reconoció las figuras por su forma y por algunas de sus características. Realiza el dibujo del cuadrado y rectángulo adecuadamente con el uso de escuadra; afirma que un rectángulo se parece a un tablero y un cuadrado a una baldosa, afirma que los lados opuestos del rectángulo y cuadrado son iguales.

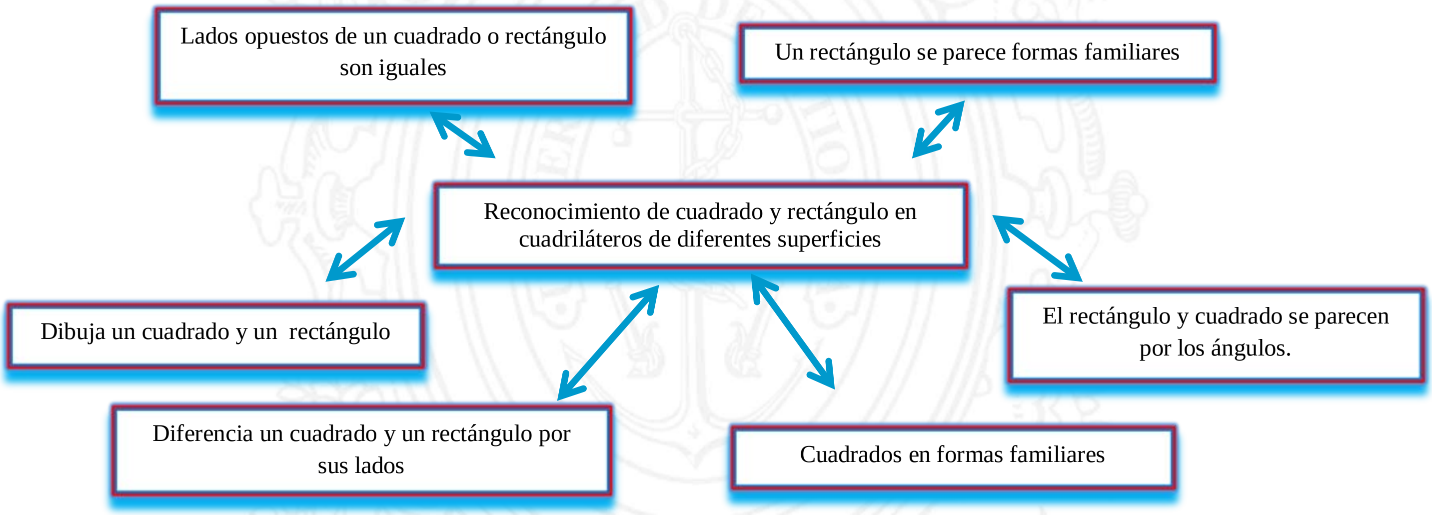


Figura 195. Descriptor 1.2 y categorías de Andrés.

1.3 Establece una relación entre la superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales.

Se dio un aporte de información con relación a la diagonal, pues no recordaba ese concepto, hizo recortes con tijeras sobre la diagonal de rectángulos y cuadrados manipulando la figura, sobreponiéndola una encima del otro, de esta forma se dio cuenta y reconoció que una diagonal divide en dos triángulos iguales al cuadrado o rectángulo y que el triángulo es la mitad del cuadrado o rectángulo y dos diagonales, dividen en cuatro triángulos iguales el cuadrado.

Por otro lado, se logran concebir los conceptos como por ejemplo: cuando dos diagonales se trazan por el rectángulo, ¿siempre se forman cuatro superficies triángulares iguales? Andrés, argumenta que “no, en el rectángulo no se puede, se forman cuatro triángulos, dos triángulos son iguales y los otros dos también son iguales”. Afirmó, además, que “al trazar dos diagonales en un rectángulo se forman cuatro triángulos donde dos a dos son iguales”.

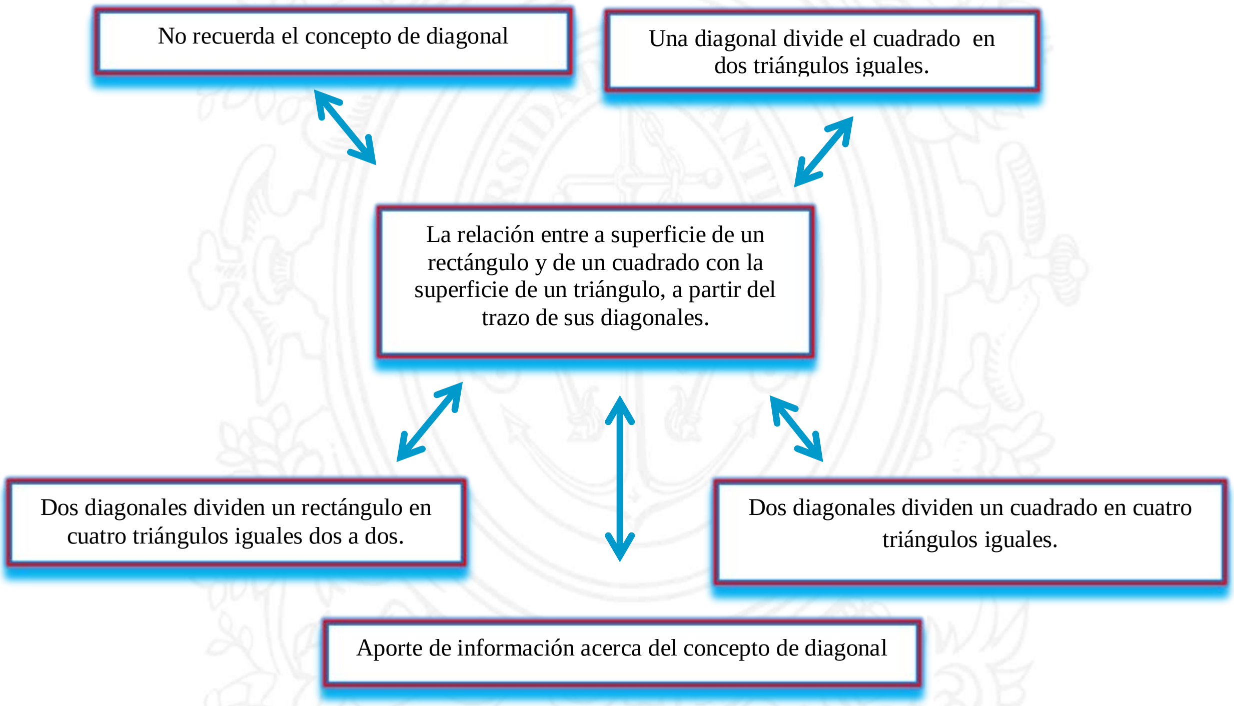


Figura 196. Descriptor 1.3 y categorías de Andrés.

1.5 Determina la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas.

Andrés no reconocía la mediana de un cuadrado y de rectángulo, por lo tanto, se dio un aporte de información. De acuerdo a la información suministrada Andrés da cuenta que la mediana divide al cuadrado y al rectángulo en dos rectángulos iguales, y que una parte es la mitad del cuadrado o del rectángulo. Además utiliza los puntos medios como punto de partida para trazar las medianas. De hecho, logró identificar que un rectángulo, también se puede dividir en dos cuadrado iguales, la cuadrícula le permitió ser consciente de ese hecho.

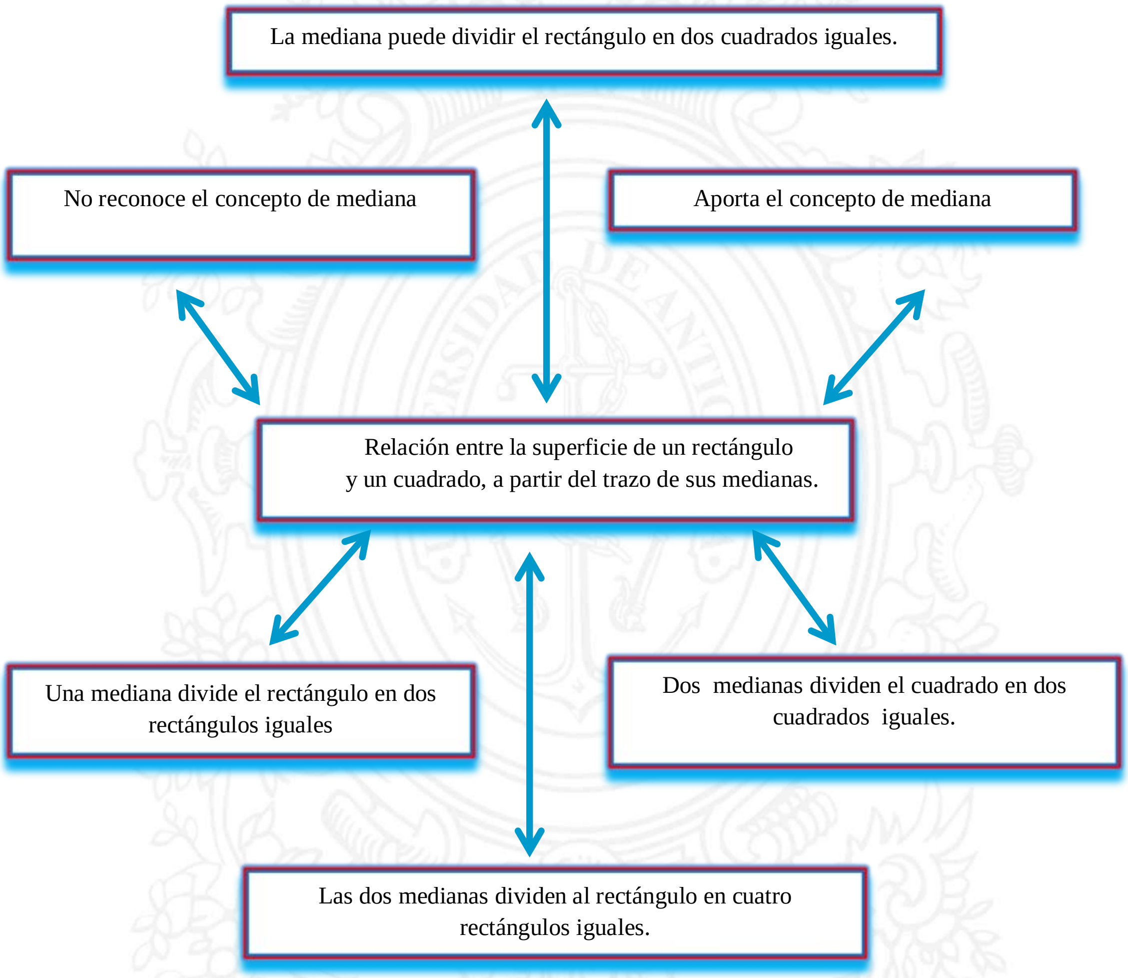


Figura 197. Descriptor 1.4 y categorías de Andrés.

1.5 A través de la geometría del doblado de papel, el estudiante: puede construir dos o más rectángulos de igual superficie o dos o más cuadrados de igual superficie a partir de la mediana y puede construir dos o más triángulos de igual superficie a partir de la diagonal.

Andrés logro manipular muy bien el plegado de papel para construir medianas y diagonales, pues logro relacionar un doblez con las líneas que construye la mediana y diagonal, evidenció la congruencia en forma implícito, pues comprobaba que un ángulo era igual al otro y también sus lados; esta experiencia relacionada con la geometría del doblado de papel, logra en Andrés reafirmar el concepto de diagonal y mediana. Logra reconocer cuadrados, rectángulos y triángulos con el doblez del papel, encontró más fácilmente el punto medio de los lados de la hoja o lado del cuadrado o rectángulo, argumenta también que se puede construir dos cuadrados a partir de una mediana del rectángulo. Además manifestó avance en la prueba escrita respecto a las medianas y diagonales del rectángulo o cuadrado.

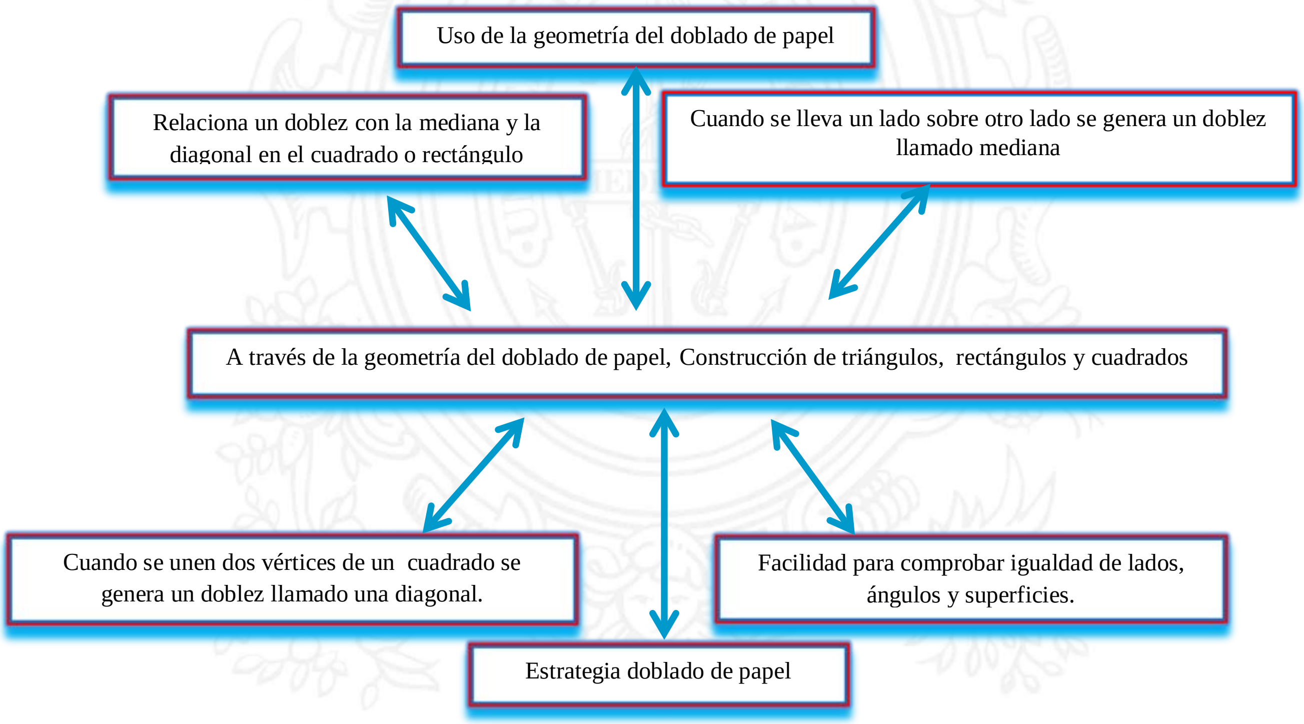


Figura 198. Descriptor 1.5 y categorías de Andrés.

4.2.2.3.Análisis de los descriptores del nivel II

2.1 Reconoce un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos.

Durante la entrevista se dieron seis aportes de información en forma sistemática y ordenada, estos conceptos permitieron que Andrés razonara un poco más y ampliara su lenguaje; logró identificar triángulos rectángulos isósceles y escalenos.

Concluyó por medio del doblado de papel que, una diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles y una diagonal al rectángulo divide en dos triángulos rectángulos escalenos. Finalmente, argumentó que con dos triángulos rectángulos isósceles que sean congruentes, se construye un cuadrado y que dos triángulos rectángulos escalenos que sean congruentes se construye un rectángulo.

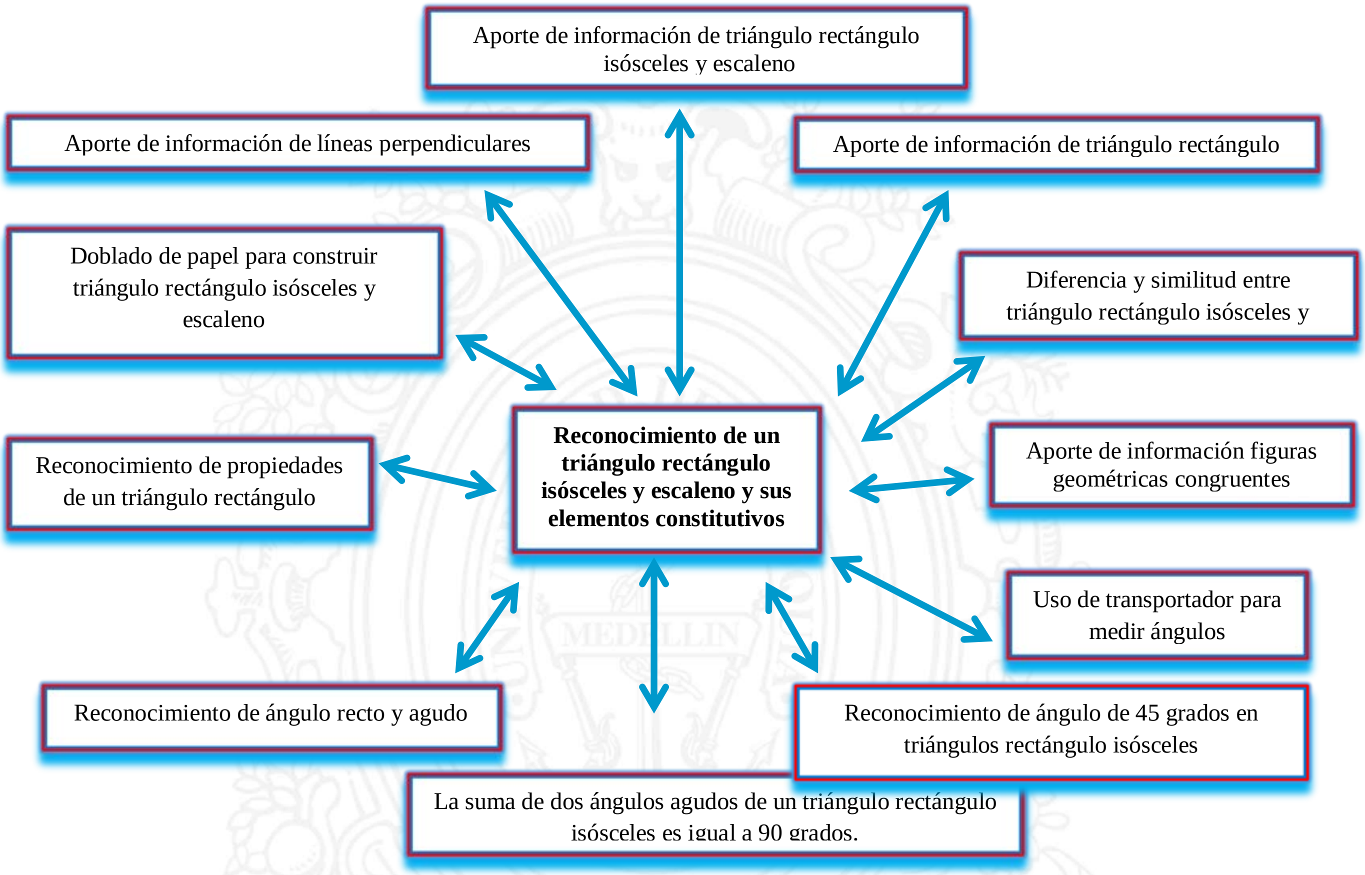


Figura 199. Descriptor 2.1 y categorías de Andrés.

2.2 Reconoce el rectángulo y cuadrado, y sus propiedades, además de sus elementos constitutivos.

Andrés, inicialmente, no entendía la palabra líneas congruentes y líneas paralelas, afirmó que no había entendido la pregunta. Por lo tanto, se hizo un aporte de información. Después de este aporte, Andrés puede reconocer un cuadrado y un rectángulo por sus propiedades, logró reconocer que un cuadrado tiene sus lados opuestos congruentes y paralelos al igual que el rectángulo; que los lados consecutivos del cuadrado, también son congruentes y perpendiculares porque forman un ángulo recto. Los lados consecutivos de un rectángulo son perpendiculares, y además comprendía que un cuadrado o un rectángulo se dividen en dos triángulos rectángulos congruentes, mediante su diagonal, y que la mediana divide el cuadrado y el rectángulo en dos iguales. También, afirmó que la suma de los ángulos del cuadrado y del rectángulo es igual a 180 grados.

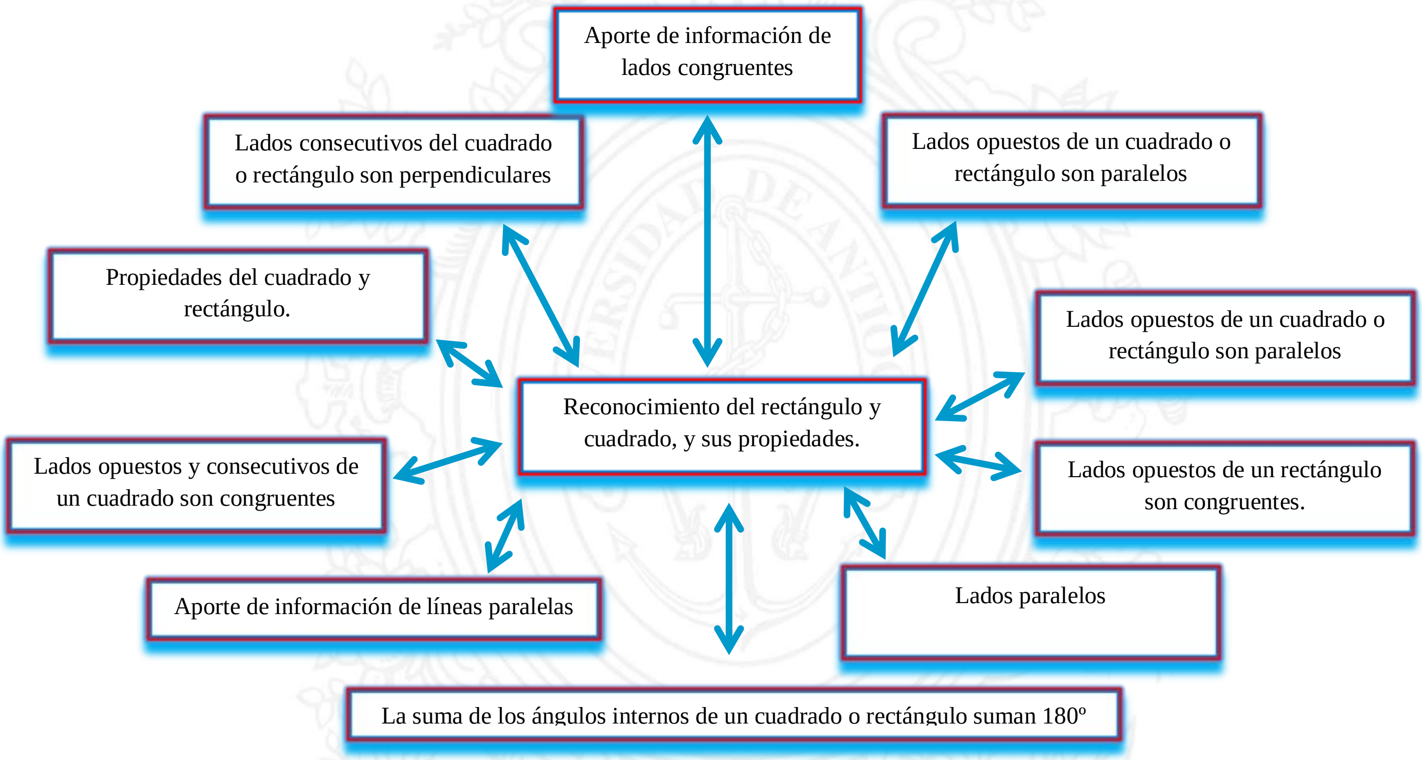


Figura 200. Descriptor 2.2 y categorías de Andrés.

2.3 Establece comparación de área de las figuras planas para reconocer que dos o más figuras planas con diferentes superficies, pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos

Para Andrés se aclaró el concepto de procedimiento geométrico y comparación de áreas desde el concepto del área como la cantidad de plano ocupado por la superficie como un aporte de información. Inicialmente, hubo confusión respecto al área y la superficie, pero finalmente, a través de las múltiples actividades de la entrevista, Andrés, logra comprender que el área no cambia, siempre es la misma, aunque la transformen en otra figura, pero la superficie si puede cambiar de forma. Por lo tanto, Andrés, desarrolló mecanismos para transformar una figura para que sea congruente con otras, de este modo logra determinar si es mayor, menor, igual. Andrés logró comparar varias figuras durante la entrevista. Sin embargo, hubo momentos que no lograba comparar, uno de esos fue cuando se le presentó una figura sombreada, un rectángulo dibujado en un triágulo rectángulo, y compara si el área sombreada con el área sin sombrear eran iguales.

Fue pertinente, por un lado, el aporte de informacion de la altura de un triángulo, por otro lado un dialogo socrático para lograr razonar frente a esta situación, y encontrar el metodo para resolver el problema, simplemete era trazar una altura al triángulo para concluir que el área del cuadrado sombreado es igual al área no sombreada. Andrés, de acuerdo a las observaciones, experiencia de la entrevista, construcciones hechas durante la entrevista y la actividad escrita, logra reconocer que una figura se puede transformar en otra, pero su área es la misma, lo que cambió fue la superficie, como afirmó en una de las preguntas.

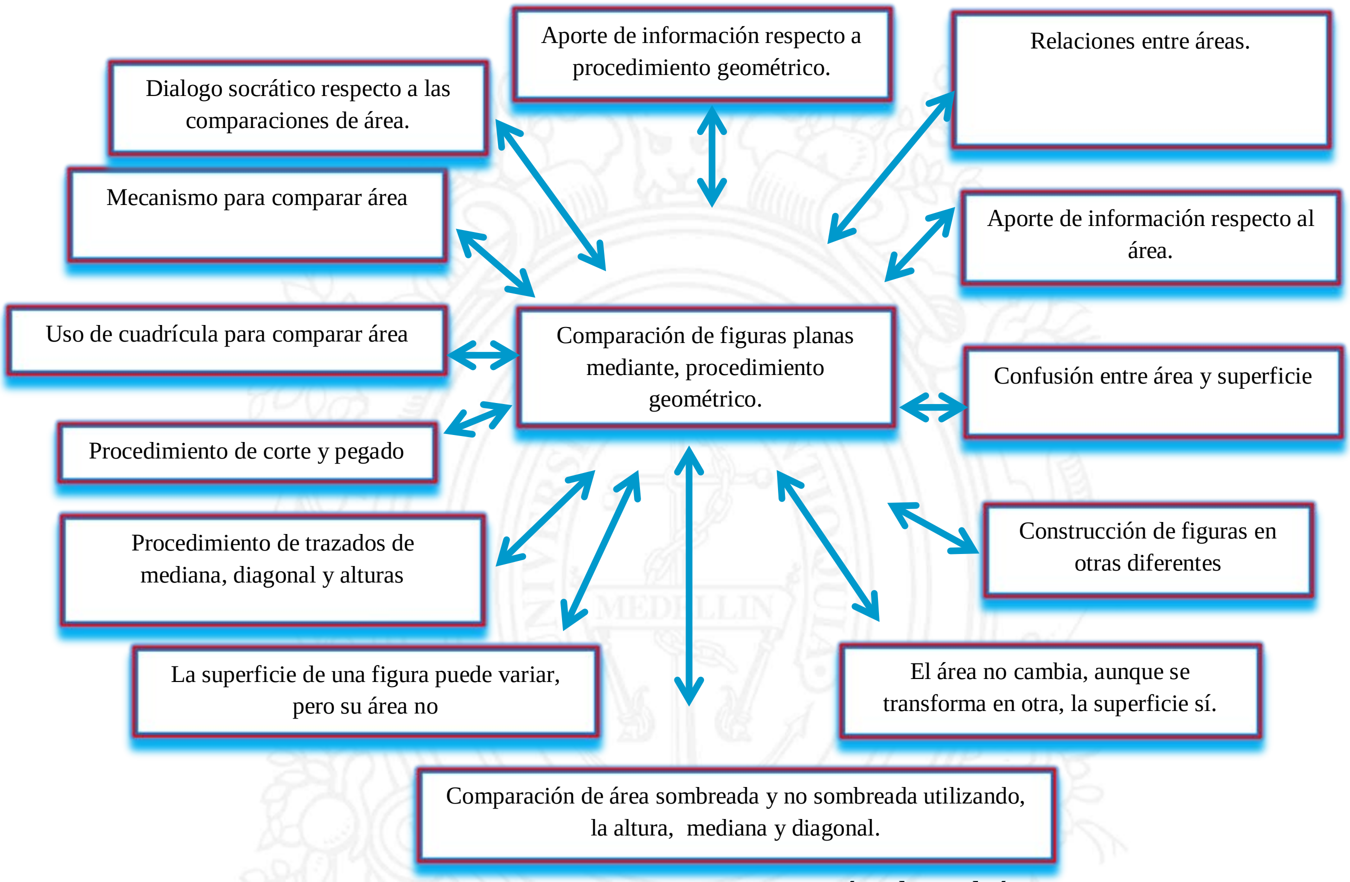


Figura 43. Descriptor 2.3 y categorías de Andrés

2.4 Construye cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares. Para Andrés, las construcciones de cuadrados, de rectángulos sobre segmentos fueron fáciles. Logra construir cuadrados sobre lados de triángulos.. Además sobre la diagonal del cuadrado y rectángulo, construye cuadrados.

Para Andrés fue necesario observar cuadrados en diferentes formas, no estandarizadas, para lograr reconocer cuadrados en diferentes posiciones.

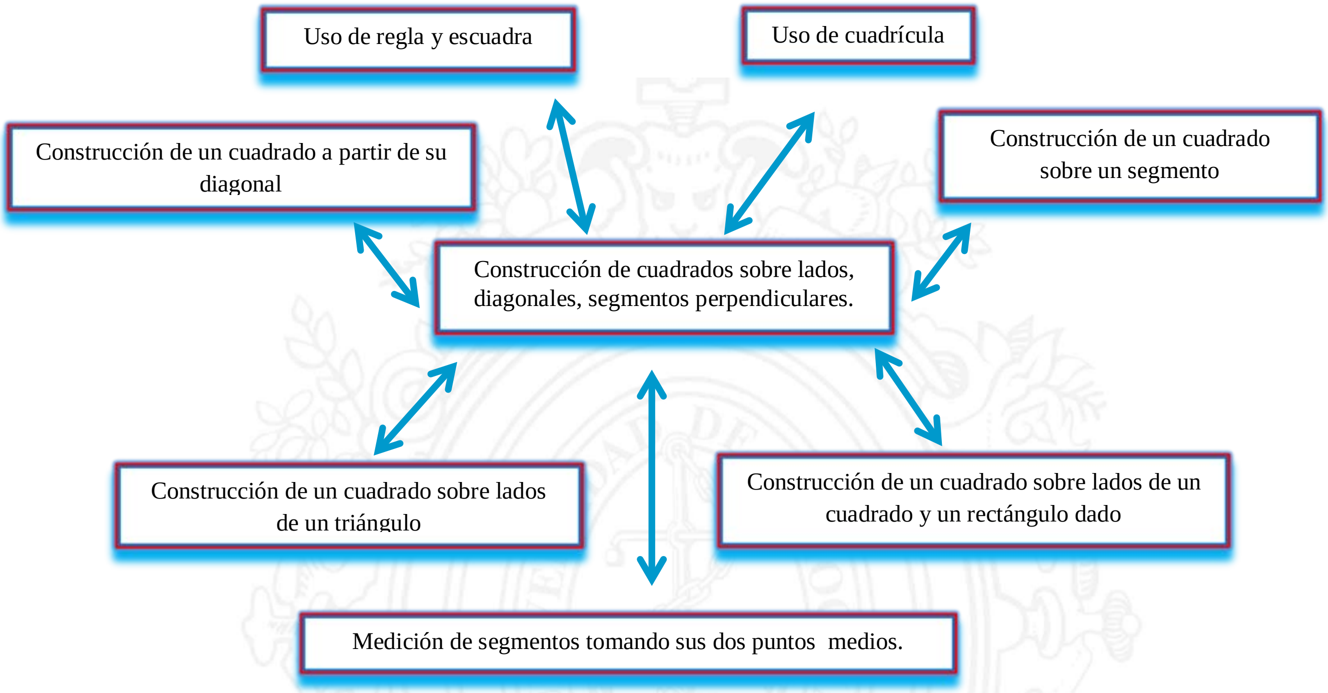


Figura 44. Descriptor 2.4 y categorías de Andrés

2.5 Reconoce que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales.

Durante la entrevista, Andrés, logró reconocer que una diagonal divide un cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles; así también ha reconocido que esos triángulos son congruentes. También, manifiesta que con dos diagonales el cuadrado se divide en cuatro triángulos rectángulos isósceles de igual área.

Una diagonal divide al cuadrado en dos triángulos rectángulos isósceles de igual área

Dos diagonales dividen un cuadrado en cuatro triángulos rectángulo isósceles igual área

Reconocimiento que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales.

La diagonal divide al cuadrado en dos triángulos congruentes.

Figura 201. Descriptor 2.5 y categorías de Andrés.

2.6 Reconoce que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas

Andrés, reconoció durante la entrevista y la actividad escrita que la diagonal trazada divide al rectángulo en dos triángulos rectángulos escalenos de igual área, y logró establecer, que dos medianas y dos diagonales dividen el rectángulo en ocho triángulos escalenos de igual área.

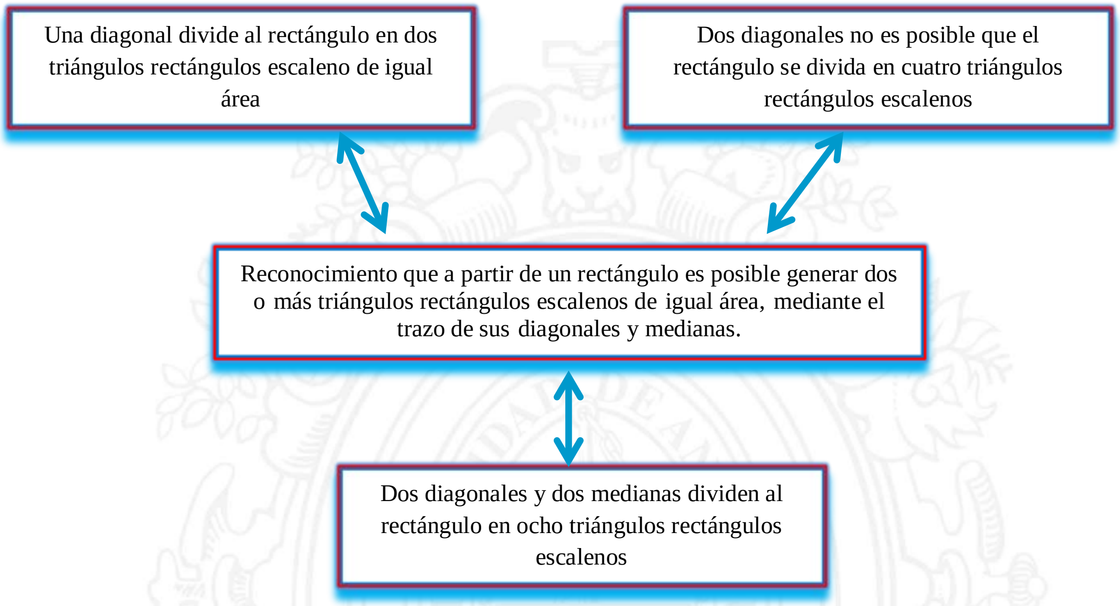


Figura 202. Descriptor 2.6 y categorías de Andrés.

2.7 Afirma sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, mediante el trazo de sus medianas.

En la entrevista, Andrés mencionó durante la manipulación del papel que al trazar un doblez que sea la mediana el rectángulo se dividió en dos cuadrados de igual área; de este modo, logró afirmar que la base del rectángulo es el doble de la altura, cuando el rectángulo es el doble de un cuadrado. Cuando a Andrés se le presentó el rectángulo en la actividad escrita logró trazar la mediana que lo divide en dos cuadrados de igual área.

Con base en ello, reconoció, en una pregunta relacionada con una secuencia durante la entrevista, que es posible que un rectángulo sea el triple de un cuadrado. En la actividad escrita logró establecer la relación que existe entre un cuadrado y un rectángulo de área triple al cuadrado dado.

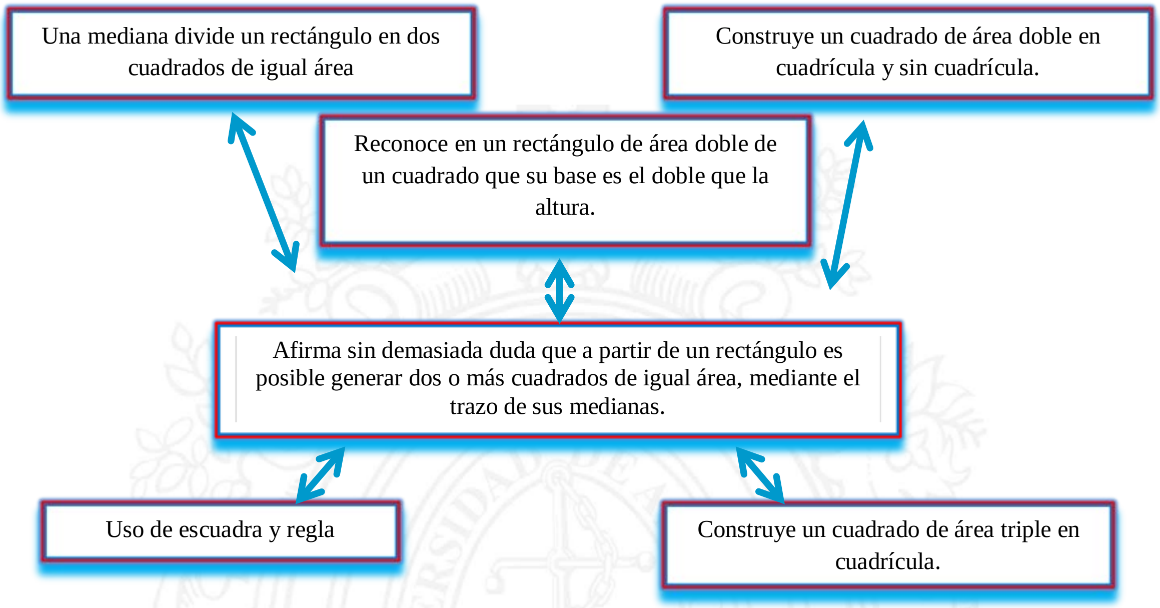


Figura 203. Descriptor 2.7 y categorías de Andrés.

4.2.2.4. Análisis de los descriptores del nivel III

3.1 Comprende que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.

Durante la entrevista, Andrés trata de establecer la relación de igualdad de área entre dos cuadrados, para ello, tiene en cuenta las diagonales. En conclusión, afirma que uno de los cuadrados es dos veces el cuadrado del otro; hubo un momento de dificultad para construir un cuadrado de área doble, se estableció un dialogo socrático, que permitió razonar, por un lado, la construcción del cuadrado de área doble, y por otro lado, la condición para construir un cuadrado de área doble, (la longitud de la diagonal).

Logró reconocer que para construir un cuadrado de área doble sólo hay que identificar la longitud de la mediana. Andrés construyó cuadrado de área doble en cuadrícula y sin cuadrícula, sobre la diagonal del cuadrado.

Entre las conclusiones manifiestas por el estudiante se observa que la forma de establecer la relación de área del cuadrado inicial y el construido es comparar el número de triángulos rectángulos isósceles construidos en ambos cuadrados. Esto también se evidenció en la actividad escrita.

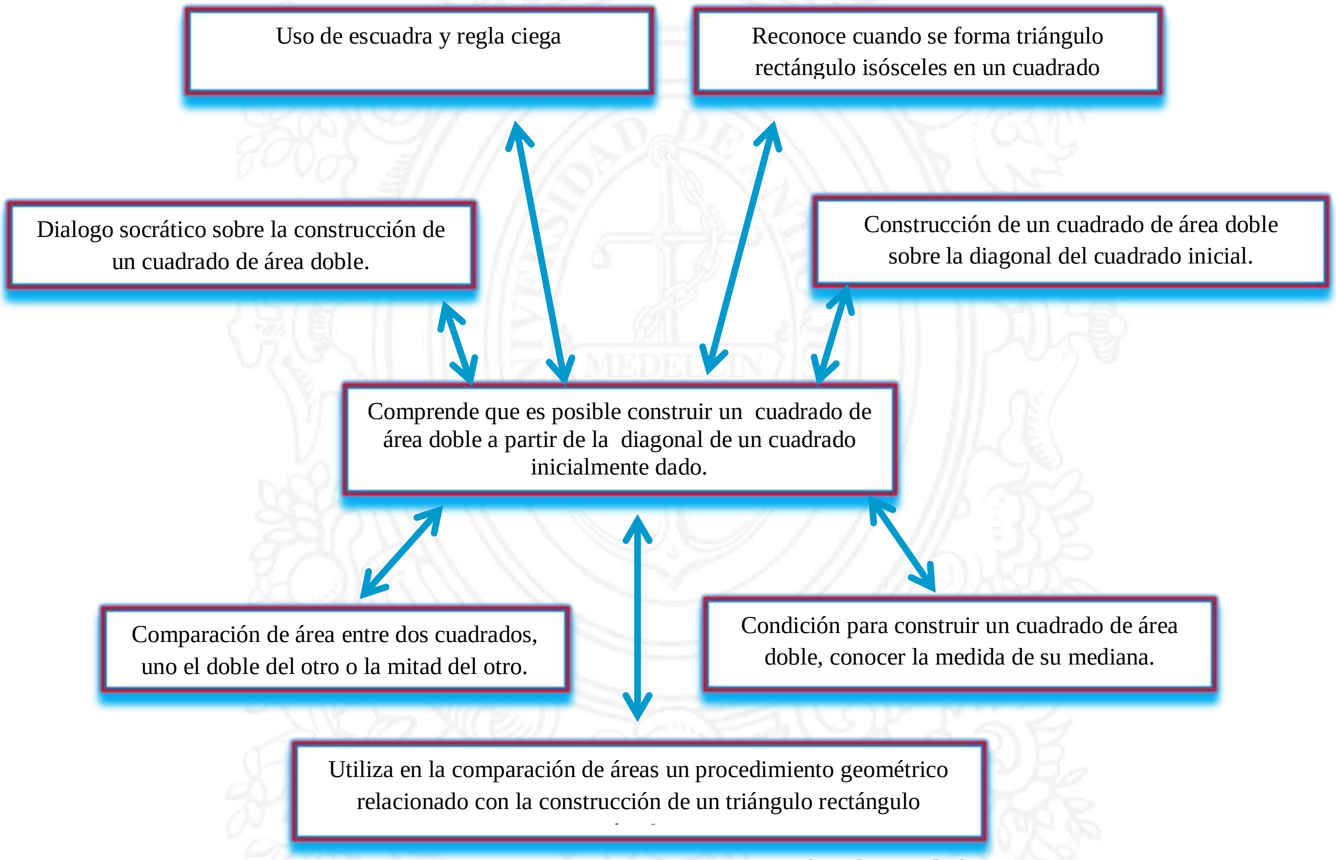


Figura 204. Descriptor 3.1 y categorías de Andrés.

3.2 Entiende que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.

La entrevista inició armando figuras con cinco piezas formadas por cuatro rectángulos escalenos y un cuadrado. Andrés armó un cuadrado con las cuatro figuras y luego, formó otro cuadrado, pero con las cinco figuras; Andrés reconoció que es posible construir un cuadrado con cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado. En otra entrevista relacionada con el cuadrado que contiene cinco figuras geométricas (4 triángulos y un cuadrado) se establecieron comparaciones, donde, Andrés logró utilizar la cuadrícula para comparar mejor.

Cuando a Andrés se le pregunta sobre la relación hay entre las áreas del rectángulo inicial y el cuadrado construido sobre la diagonal del rectángulo, argumentó: el rectángulo cabe dos veces y medio en el cuadrado construido. Logró reconocer que en este caso no se da que el rectángulo dado es el doble del cuadrado construido.

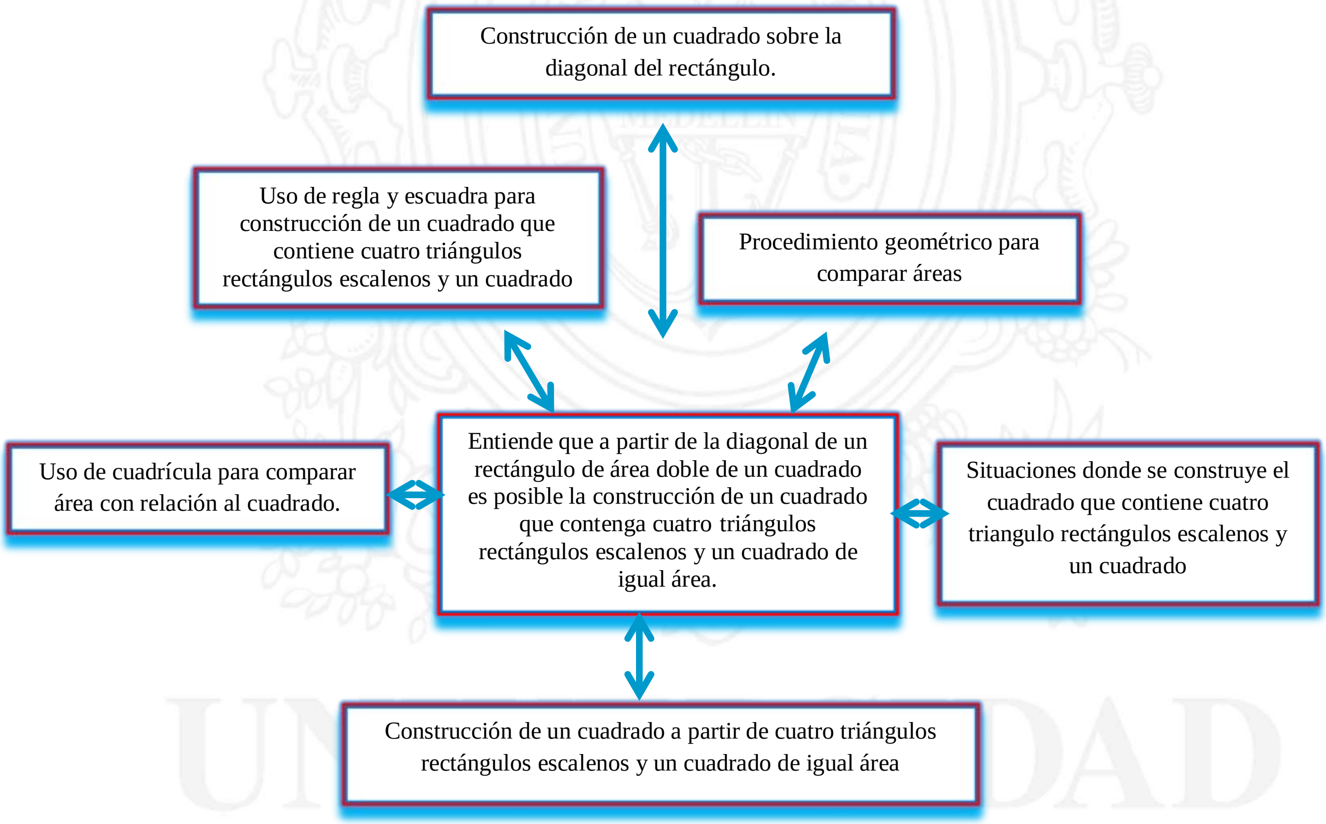


Figura 205. Descriptor 3.2 y categorías de Andrés.

3.3 En la construcción del triángulo rectángulo isósceles, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Andrés, inició nuevamente a razonar respecto a la suma áreas, teniendo en cuenta la propiedad aditiva del área. Durante la entrevista, Andrés logró relacionar la suma de áreas de figuras iguales con la figura completa.

En ese mismo tiempo de la entrevista, Andrés, construyó un cuadrado de área doble sobre la diagonal del cuadrado inicial; eso se hizo, con el fin de construir sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles tres cuadrados.

Andrés, logró reconocer que los dos cuadrados construidos sobre los dos lados iguales del triángulo rectángulo son de igual área. Afirmó que uno de los cuadrados iguales es la mitad del cuadrado grande y logró comprender que el área de los dos cuadrados iguales construidos sobre los dos lados del triángulo rectángulo es igual al cuadrado grande construido sobre el lado mayor del triángulo.

Adicional a lo anterior, afirmó que el área de la figura *a* más el área de la figura *b* es igual al área de la figura *c*.

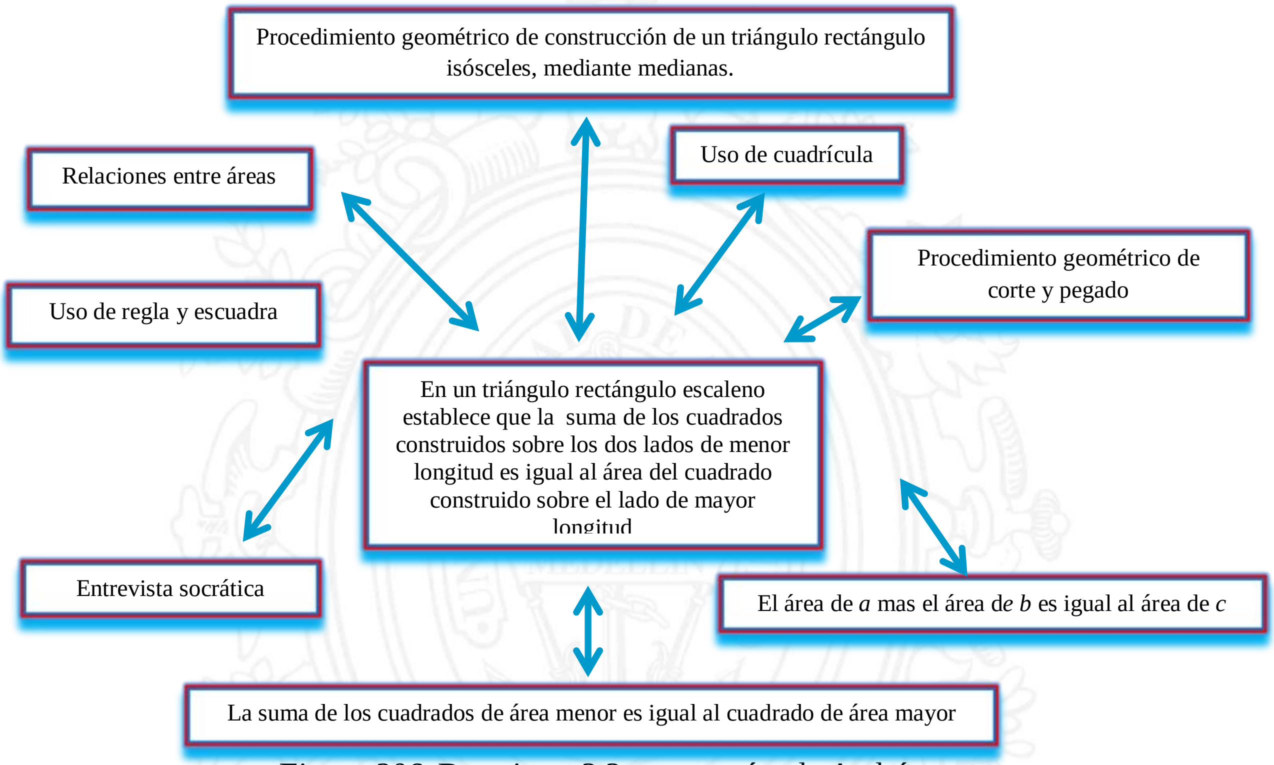


Figura 206. Descriptor 3.3 y categorías de Andrés.

3.4 En la construcción de un triángulo rectángulo escaleno, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Durante la entrevista, Andrés construyó un rectángulo de área doble de un cuadrado, construyó un cuadrado sobre la diagonal del rectángulo dado. Sobre lo último construyó tres cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo escaleno; la construcción se hizo sobre una cuadrícula.

Cuando se le pregunta qué relación existe entre el área de los dos cuadrados construidos sobre los lados menores del triángulo rectángulo con el área del cuadrado grande construido sobre el lado mayor del triángulo rectángulo, Andrés resume afirmativamente que el área de la figura *A* más el área de la figura *B* es igual al área de la figura *C*.

Andrés realizó la tercera construcción, primero, construyó una rectángulo de área triple, después, dibujó sobre la diagonal del rectángulo un cuadrado, finalmente, construyó tres cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo pintado de color café.

Andrés buscó la forma de establecer una relación entre las áreas del cuadrado pequeño y mediano con el área del cuadrado grande, pues debía buscar un procedimiento geométrico que relacionara la suma de las áreas de los dos cuadrados menores y el cuadrado mayor. No pudo encontrarla, pero él sabía que era posible. Sin embargo se estableció un dialogo socrático para que razone y pueda encontrar un método que relacione las área de manera explícita.

Finalmente, construyó tres rectángulos en el cuadrado mediano, logrando relacionar las figuras construidas con cada uno de los cuadrados y evidenciando el logro de los descriptores que permiten definir que se consigue una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras.

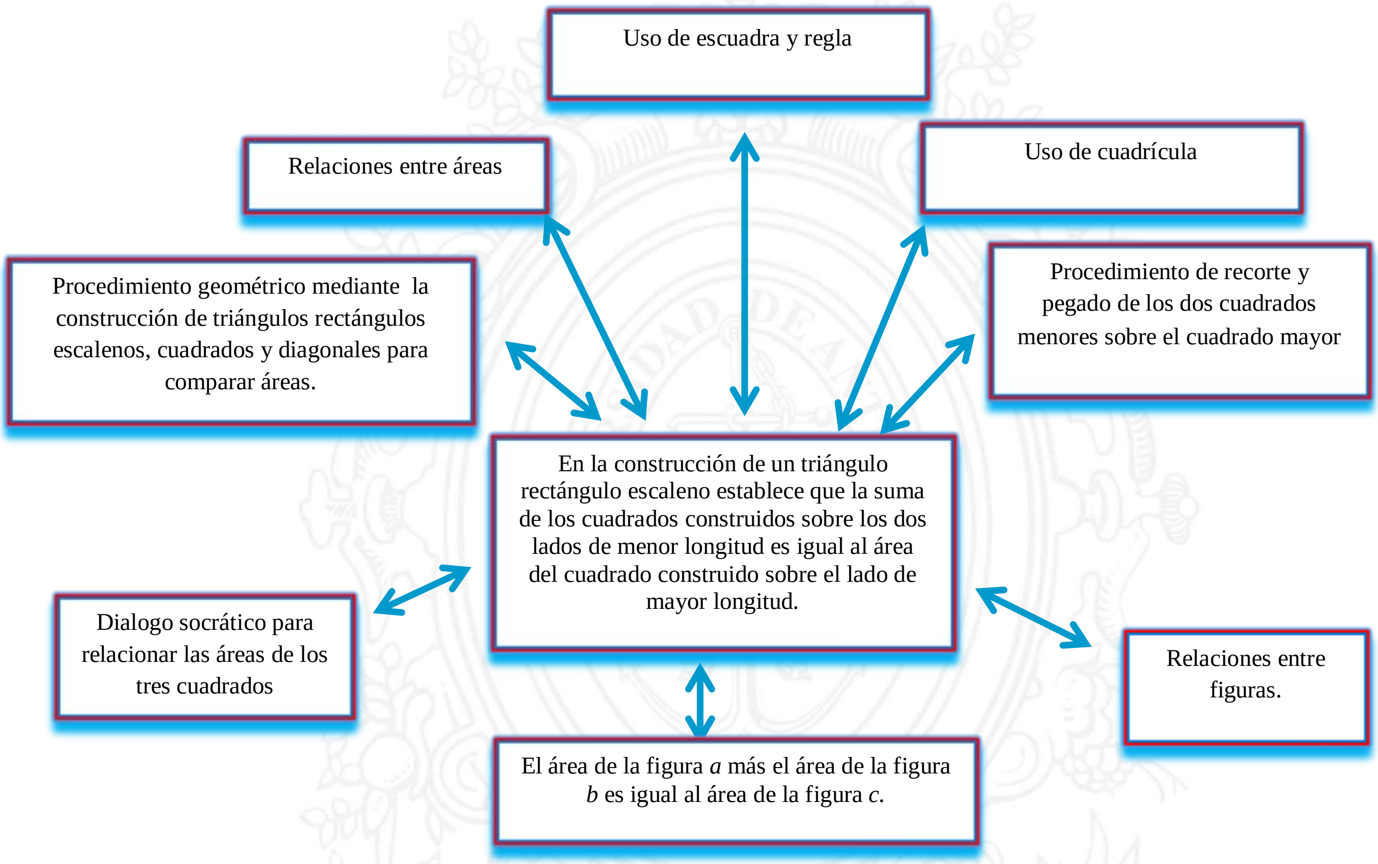


Figura 207. Descriptor 3.4 y categorías de Andrés.

4.2.3. Análisis del proceso de razonamiento de Sara cuando avanza por cada uno de los niveles.

La estudiante Sara, también de quinto de una Institución educativa del Municipio de Apartadó, participó en el trabajo de investigación, durante su proceso en el trabajo de campo estuvo bastante dedicada, se mantuvo siempre motivada y responsable durante las actividades.

A continuación se presenta trabajos es laborados por Sara durante la entrevista y una actividad escrita.

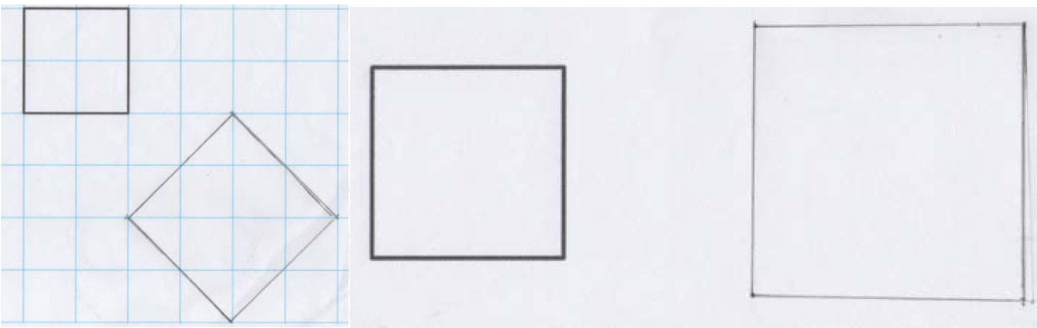


Figura 208. Construcción de un cuadrado de área doble de otro cuadrado por Sara.

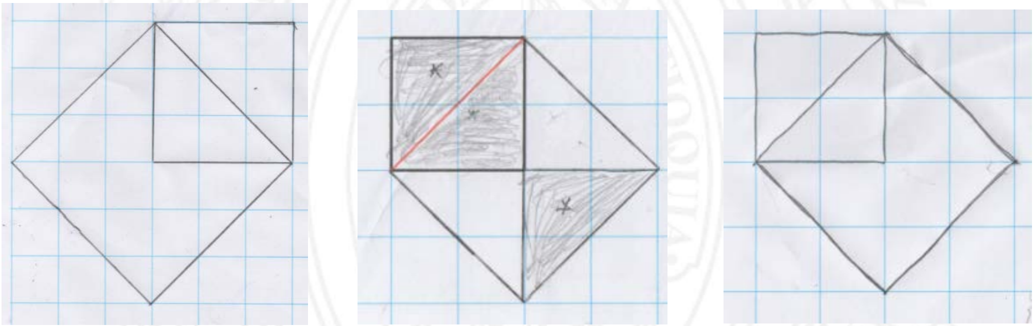


Figura 209. Construcción de un cuadrado de área doble sobre la diagonal de un cuadrado.

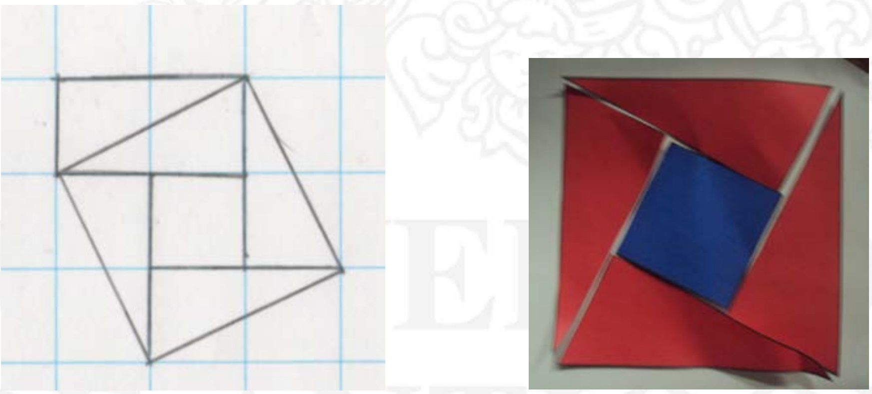


Figura 210. Construcción de un cuadrado de área doble y el puzzle de un cuadrado.

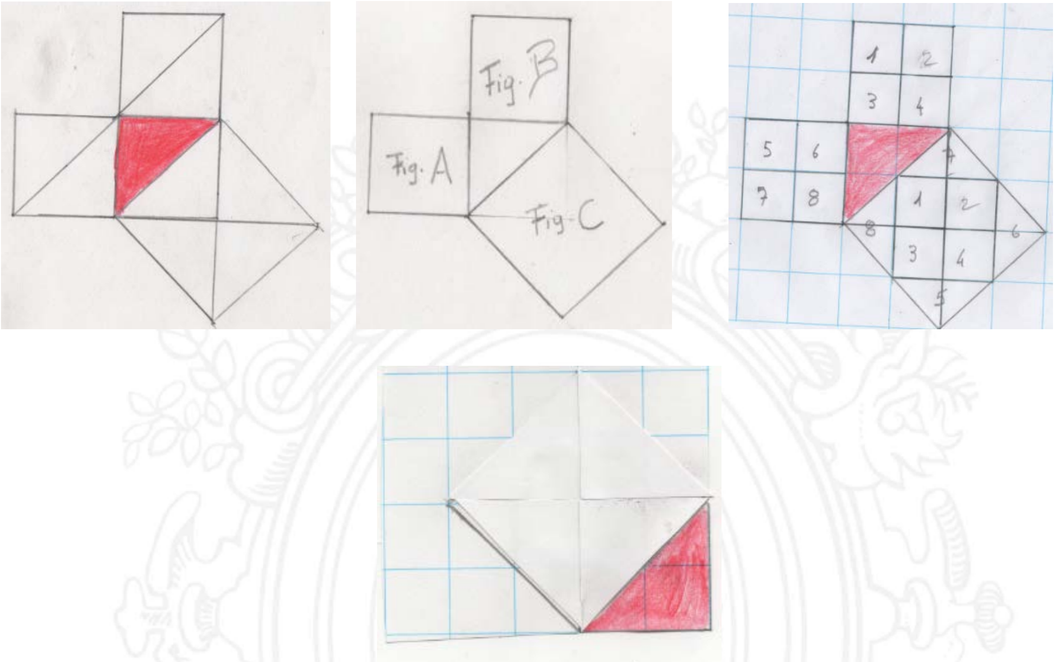


Figura 211. Cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo Isósceles.

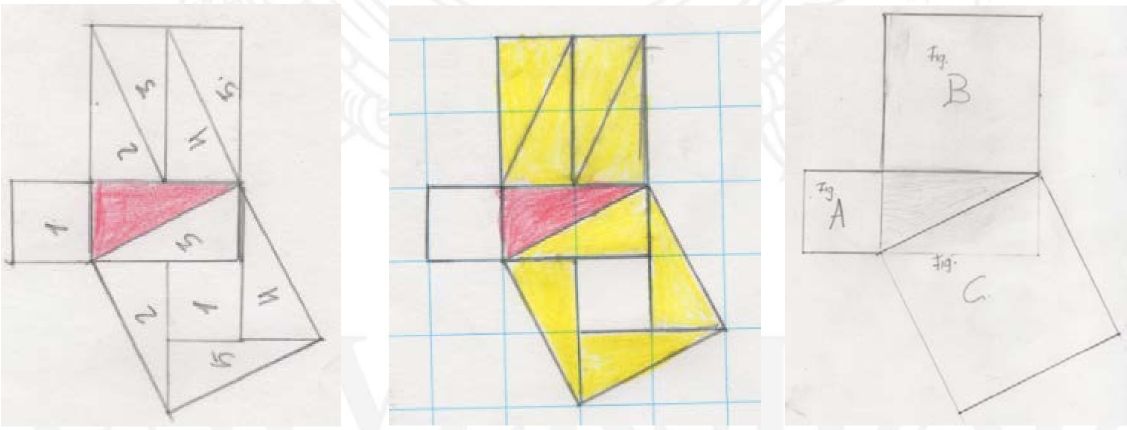


Figura 212. Cuadrados construidos sobre lados de un triángulo rectángulo escaleno.

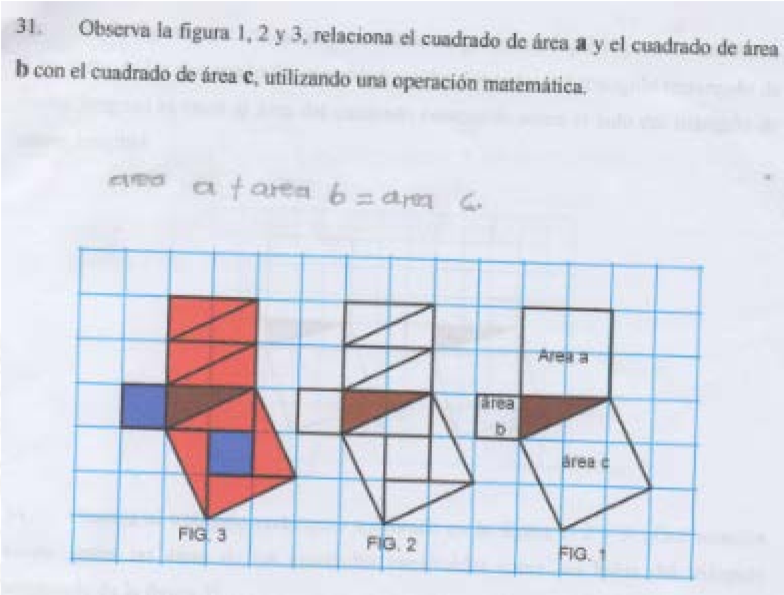


Figura 213. Respuesta de actividad escrita por Sara

.

4.2.3.1.Análisis de los descriptores del nivel 0

0.1 Diferencia visualmente una superficie de otra.

Parece tener nociones respecto a la superficie de una figura plana, en el trabajo de campo, pintó la superficie limitada por líneas cerradas para determinar la superficie, además, en la actividad escrita que se realizó después de la entrevista se corroboró que tenía claro el concepto de superficie. De otro lado, considera ésta como la forma de la figura en el momento de describirla, ella dijo: “la figura 1 tiene forma de cuadrado, la figura 2 tiene forma triangular, la figura 3 forma de rectángulo, la figura 4 forma de un rombo y la forma del círculo la otra figura”. Desde las observaciones se ha analizado lo que, tiene nociones de lo que es la superficie de una figura.

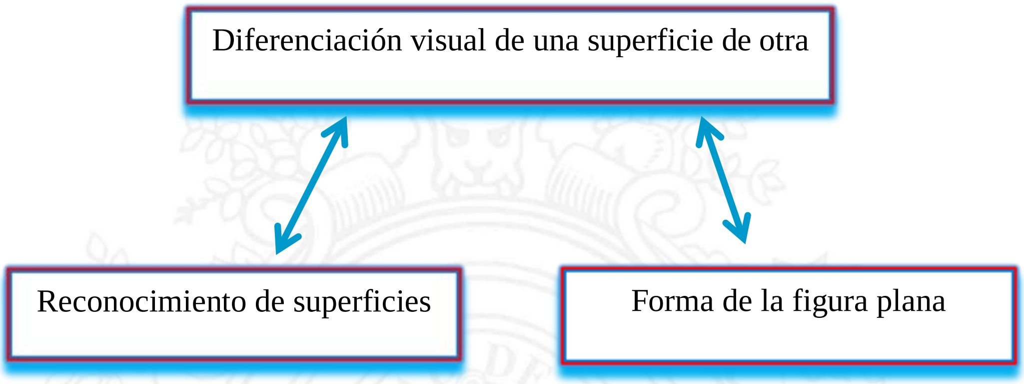


Figura 214. Descriptor 0.1 y categorías de Sara.

0.2 Compara superficies para determinar su mayor o menor tamaño.

La comparación de superficies para saber si una es mayor que otra se produjo intuitivamente, a la estudiante se le dijo que recortara las cuatro figuras y eligiera cual era de mayor o menor tamaño, ella procedió a recortar cada una de las figuras por los bordes, luego se le dijo que señalara la figura de mayor tamaño y de menor tamaño; entonces, empezó a sobreponer cada una de las figuras entre ellas, concluyendo que la figura 3 tenía mayor tamaño y la figura 4 menor tamaño. Paralelamente, en la actividad escrita, también logró identificar la figura de menor y mayor superficie visualmente, pues no era posible recortar.

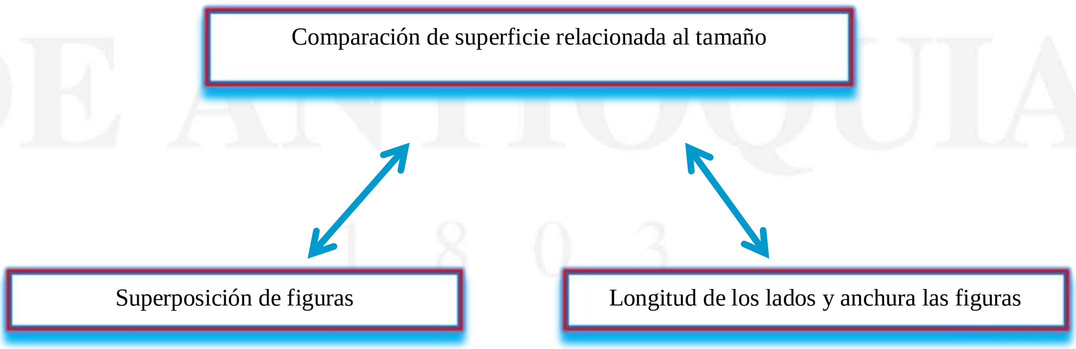


Figura 215. Descriptor 0.2 y categorías de Sara

0.3 Afirma sin demasiadas dudas que un segmento puede ser igual o no con otros segmentos. Se puede dividir en dos partes iguales (punto medio).

Para Sara, se dio un aporte de información, pues no tenía claro lo que era un segmento. En las preguntas que se le hacían se buscó la manera que relacionara los segmentos con palillos y que formara figuras con ellos, ella formó cuadrados y rectángulos, además, el reconocimiento de igualdad de un segmento se hizo evidente al realizar una comparación directa con cada palillo.

Lo que se pretendió con la entrevista fue que razonara respecto a la relación que existe entre los palillos y los segmentos para formar figuras planas y a su vez son lados de la figuras. Una de las preguntas fue la siguiente: ¿se pueden considerar los segmentos como lados de figuras planas? ¿Por qué?, ella argumento lo siguiente: "sí, porque con ellas se pueden formar cuadrados, rectángulos, muchas figuras".

Por otro lado, en cuanto al reconocimiento del punto medio de un segmento, se le pregunto: ¿El punto que va en la mitad del segmento, se llama punto medio del segmento, ¿Cómo logras identificar el punto medio?, (Dibujado en la cuadrícula). Ella responde "que la cuadrícula le ayuda colocar el punto en la mitad del segmento".

En otras preguntas, respecto al punto medio según las notas de observación, ella utiliza la regla, incluso estimando visualmente logrando una aproximación de lo que es la mitad del segmento. Esta actividad previa (punto medio del segmento), logró que la estudiante identificara el punto medio de los lados de una figura plana, para utilizar luego trazos en su superficie para el siguiente descriptor.

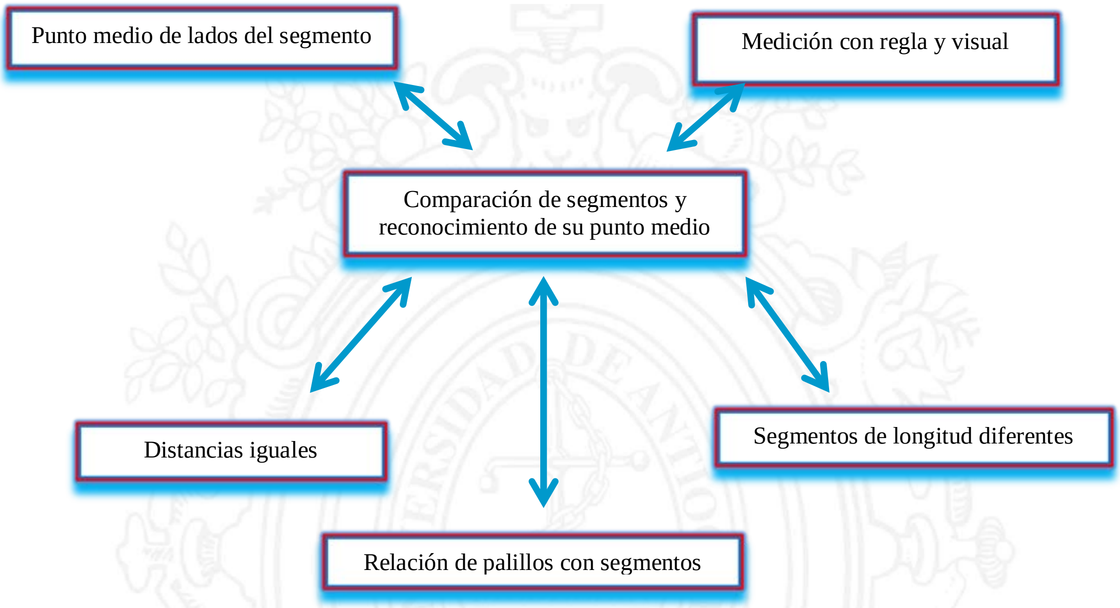


Figura 216. Descriptor 0.3 y categorías de Sara.

0.4 Un estudiante reconoce que la superficie se puede dividir en dos o más partes iguales y tomar formas diferentes

Para Sara la división de una superficie en partes iguales, no fue tan difícil, pues tenía concebida, de algún modo, el concepto de fracción que facilitó su razonamiento. En la primera pregunta, se le mostraron tres figuras con superficies iguales y del mismo tamaño, la primera figura se dividió en dos partes iguales, la segunda figura en cuatro superficies iguales y la tercera también, pero con diferentes trazos. De esa figura se preguntó: ¿Es posible que las dos superficies sean iguales? ¿Es posible que las cuatro superficies sean iguales?, ella afirmó que sí, dependiendo del corte o el trazo que se le haga.

Respecto a otra pegunta, con relación a la división de superficies para transformarse en otra diferente, fue necesario acudir a un dialogo socrático, pues no hubo un argumento muy claro respecto a la pregunta ¿es posible que la figura 1, se reconstruya en otra superficie, como la figura 2?

Sin embargo, se le entrega a Sara una cartulina con una figura plana para que proceda a recortarla, ella buscó la manera de armar una figura igual a la 2, afirmando con seguridad que si era posible. Además, en la actividad escrita, hay una pregunta similar a la de la entrevista, la cual dice: ¿es correcto afirmar que dos superficies diferentes como las de las figuras 1 y 2 pueden llegar a ser iguales? ella argumentó que sí y justificó su respuesta armando la figura.

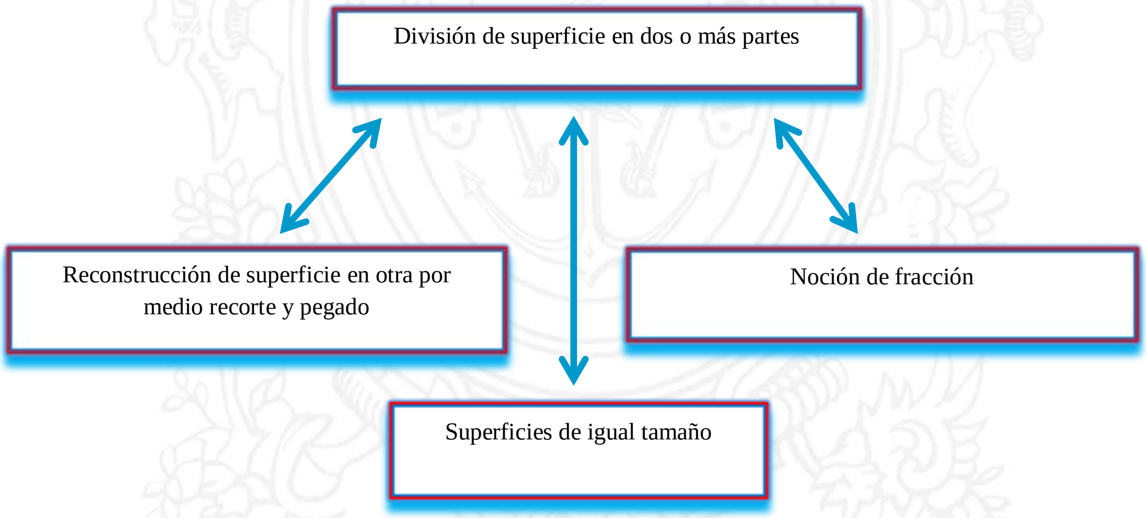


Figura 217. Descriptor 0.4 y categorías de Sara.

4.2.3.2.Análisis de los descriptores del nivel I

A continuación, se relacionan algunas construcciones durante la entrevista y la actividad escrita.

1.1 Reconoce el triángulo entre todas las figuras geométricas planas

Las actividades realizadas respecto a este descriptor en la entrevista, la actividad escrita y la observación no fue nada difícil, Sara reconoce un triángulo y lo diferencia entre las demás figuras geométricas.

Sin embargo, cuando se le preguntó si era posible que con tres lados se construyera un triángulo, ella afirmó sin titubear que sí. Aunque la respuesta no fue convincente debido a que no siempre es posible construir un triángulo con tres lados o segmentos; por lo tanto, se procedió a realizar un dialogo socrático, exponiendo dos casos, uno donde se le entrega tres palillos para formar un triángulo, el otro caso, donde es imposible construir un triángulo, por lo tanto fue necesario un contraejemplo para encontrar las condiciones del por qué no era posible construir un triángulo.

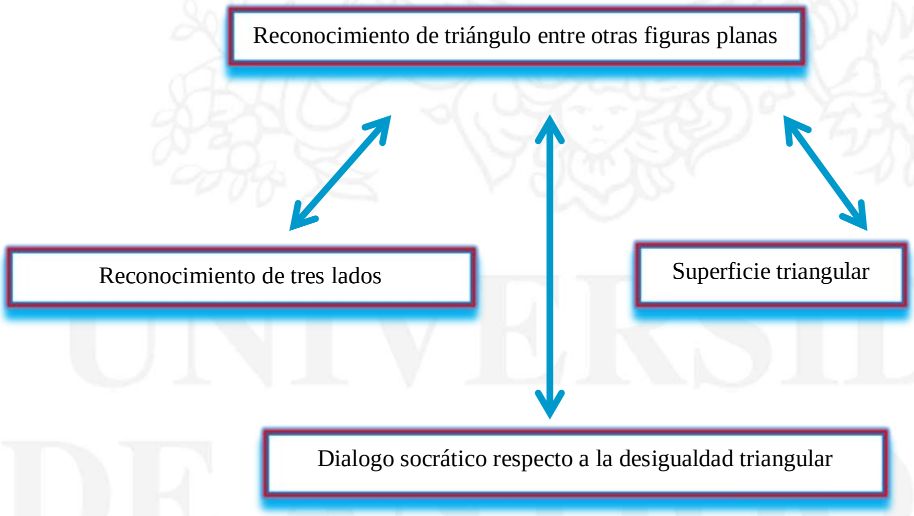


Figura 218. Descriptor 1.1 y categorías de Sara.

1.2 Reconoce el cuadrado y el rectángulo entre algunas figuras geométricas.

Para Sara el reconocimiento del cuadrado y rectángulo en las figuras planas mostradas fue fácil, pues fue inmediato, además relaciona el cuadrado como una baldosa y un rectángulo con un tablero, aunque su razonamiento se limita un poco por las preguntas, ella reconoce un cuadrado y un rectángulo por sus lados y ángulos.

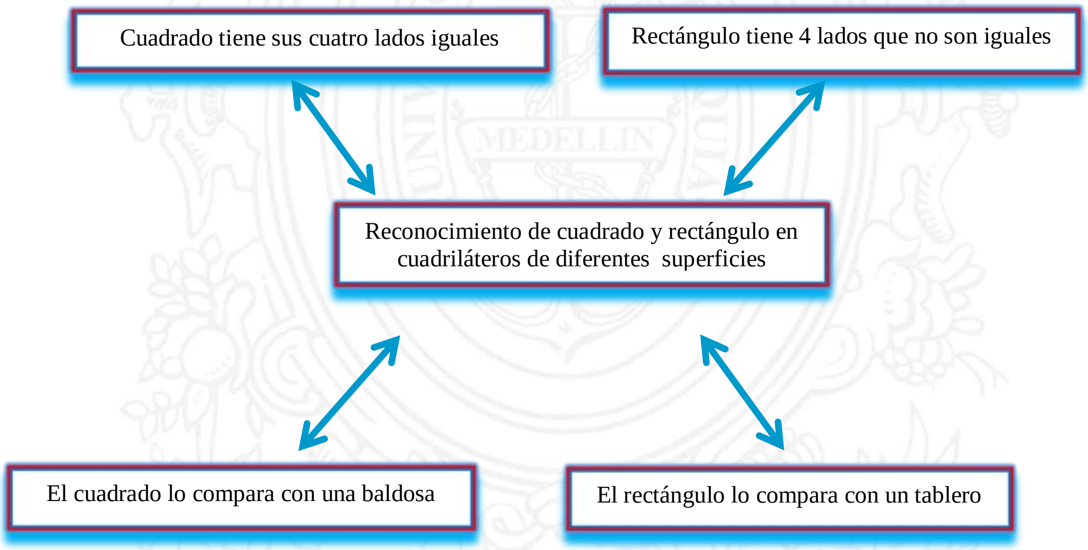


Figura 219. Descriptor 1.2 y categorías de Sara.

1.3 Establece una relación entre a superficie de un rectángulo y de un cuadrado con la superficie de un triángulo, a partir del trazo de sus diagonales.

En este caso, Sara no tenía muy claro el concepto de diagonal, por lo tanto, se le dio un aporte de información con su respectivo dibujo “para ser más explícito”. Es importante resaltar que ella tenía nociones de simetría de figuras, sabía, también que un segmento o varios segmentos pueden dividir una superficie en partes iguales; en este caso, ella comprendió que el segmento que divide el rectángulo en dos partes iguales es la diagonal, comprendió entonces que una diagonal divide un rectángulo o un cuadrado en dos triángulos iguales. Una manera de saberlo fue cuando se le pidió que recortara el cuadrado por la diagonal, y que colocara la figura una encima de otra, además concluye diciendo que el triángulo formado por la diagonal resulta siendo la mitad del cuadrado o del rectángulo. Por otro lado, sabe que dos diagonales dividen el cuadrado en dos superficies iguales, de esta manera concluyó en la siguiente pregunta: ¿Es correcto decir que la diagonal dividió en dos superficies iguales a los dos rectángulos? que dos diagonales trazadas en un cuadrado generan cuatro triángulos iguales y dos diagonales trazadas en un rectángulo no lo hacen.

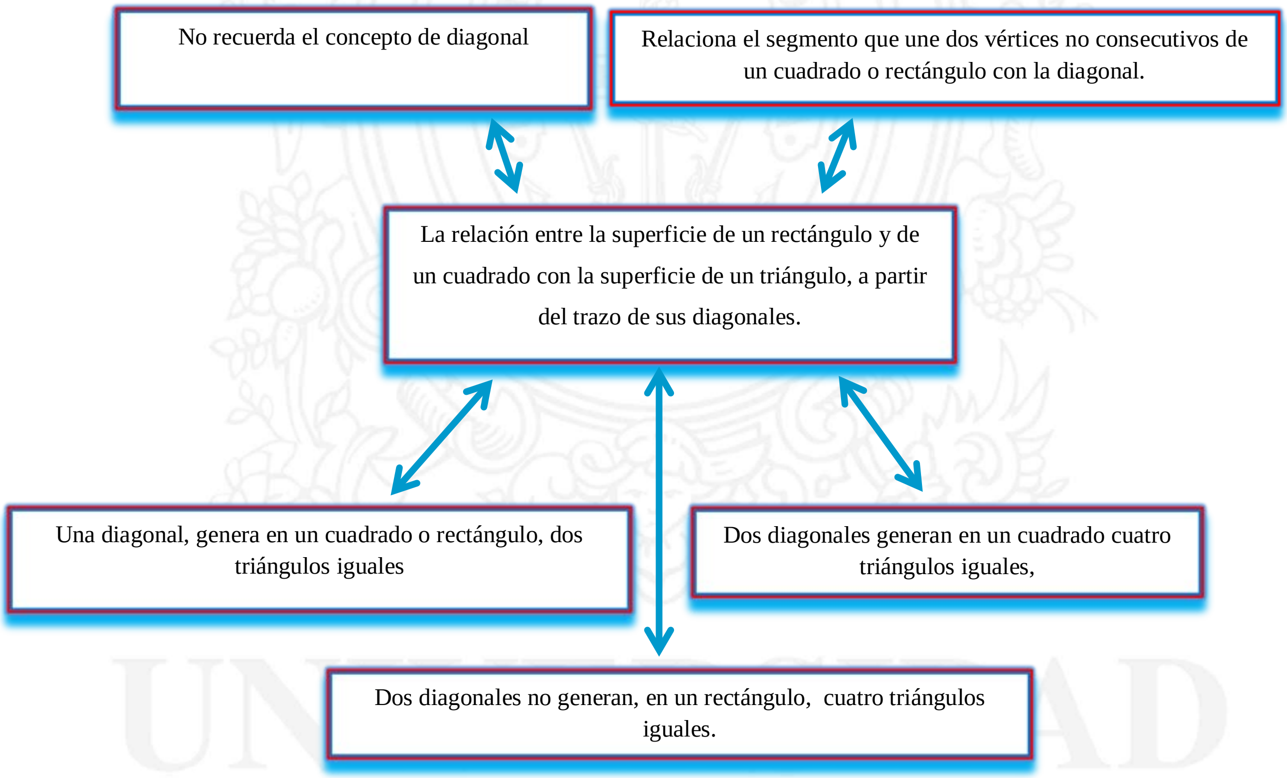


Figura 220. Descriptor 1.3 y categorías de Sara.

1.4 Determina la relación entre la superficie de un rectángulo y un cuadrado, a partir del trazo de sus medianas.

Al iniciar la entrevista, Sara, no reconocía el concepto de mediana, pues al decirle que la trazara en un rectángulo no entendió, por lo tanto, se le dio un aporte de información que logro relacionar muy bien más adelante. A Sara se le facilitó trazar la mediana porque ya reconocía en donde ubicaba el punto medio, y tenía nociones de simetría; por lo tanto, logra reconocer que al trazar una mediana en un cuadrado siempre se divide en dos rectángulos iguales y una manera de hacerlo, es la siguiente: "uniendo el punto medio de los lados del cuadrado" (refiriéndose al lado opuesto del cuadrado).

En la pregunta: cuando se traza una mediana en el cuadrado ¿siempre forma dos superficies rectangulares iguales? ¿Por qué?, Sara argumentó: si, porque la mediana pasa por la mitad del cuadrado donde están los puntos medios. En suma, ella pudo visualizar que al trazar dos medianas a la superficie del cuadrado la superficie se divide en cuatro cuadrados iguales.

Respecto a la mediana de un rectángulo también argumentó que la mediana divide al rectángulo en dos rectángulos de igual superficie, sin embargo, hubo una pregunta que la puso a pensar mucho, en la que se muestra un rectángulo y un cuadrado construido sobre una cuadrícula, ¿Es posible, que la superficie del rectángulo presentado, sea el doble que la superficie del cuadrado? Ella trazó la mediana para comparar la superficie del rectángulo y el cuadrado, argumentando lo siguiente: "sí, porque la mediana que tracé permite ver que el cuadrado cabe dos veces en el rectángulo y también con la ayuda de la cuadrícula".

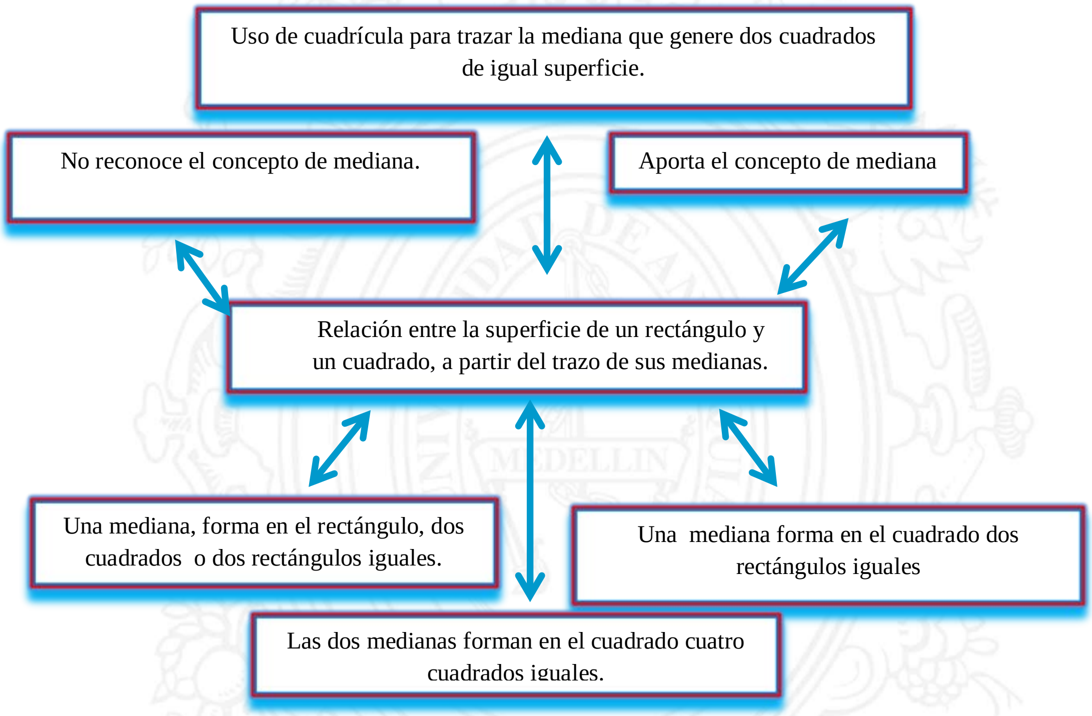


Figura 221. Descriptor 1.4 y categorías de Sara.

1.5 A través de la geometría del doblado de papel, el estudiante: puede construir dos o más rectángulos de igual superficie o dos o más cuadrados de igual superficie a partir de la mediana y puede construir dos o más triángulos de igual superficie a partir de la diagonal.

La entrevista inició con el plegado de papel, una técnica práctica y motivante, pues permite al estudiante desde la lúdica reforzar, demostrar conceptos geométricos. Para Sara, esta entrevista le pareció interesante, se inició con la manipulación del papel, haciendo dobleces, fue muy fácil para ella realizar dobleces, los niños son muy curiosos y creativos cuando se trata del manejo del papel.

Esta técnica permitió avanzar aún más en conceptos de congruencia de figuras, debido a la facilidad para demostrar la igualdad de los lados y ángulos correspondientes, aunque de manera implícita. Cuando a Sara se le entregó una hoja de papel de color verde, de forma rectangular, la hoja era el doble de la superficie de un cuadrado. Se le dijo a Sara que por medio del doblado de papel hiciera un doblez que fuera la mediana del rectángulo, y a su vez se le preguntó con relación a que la mediana formó dos cuadrados de igual superficie, argumento que sí, además se dio cuenta que la superficie del rectángulo era el doble de la superficie del cuadrado, pues lo comprobó por medio del doblado de papel. En este sentido, el doblado de papel permitió a Sara encontrar el punto medio y trazar medianas y diagonales de manera precisa, además, la posibilidad de verificar si las superficies divididas eran iguales. Con el doblado de papel se hicieron dobleces que permitieron realizar triángulos, rectángulos y cuadrados. Esta técnica logró en Sara ampliar un poco más su estructura mental respecto a medianas, diagonales y superficies iguales. Además manifestó su avance en la prueba escrita.

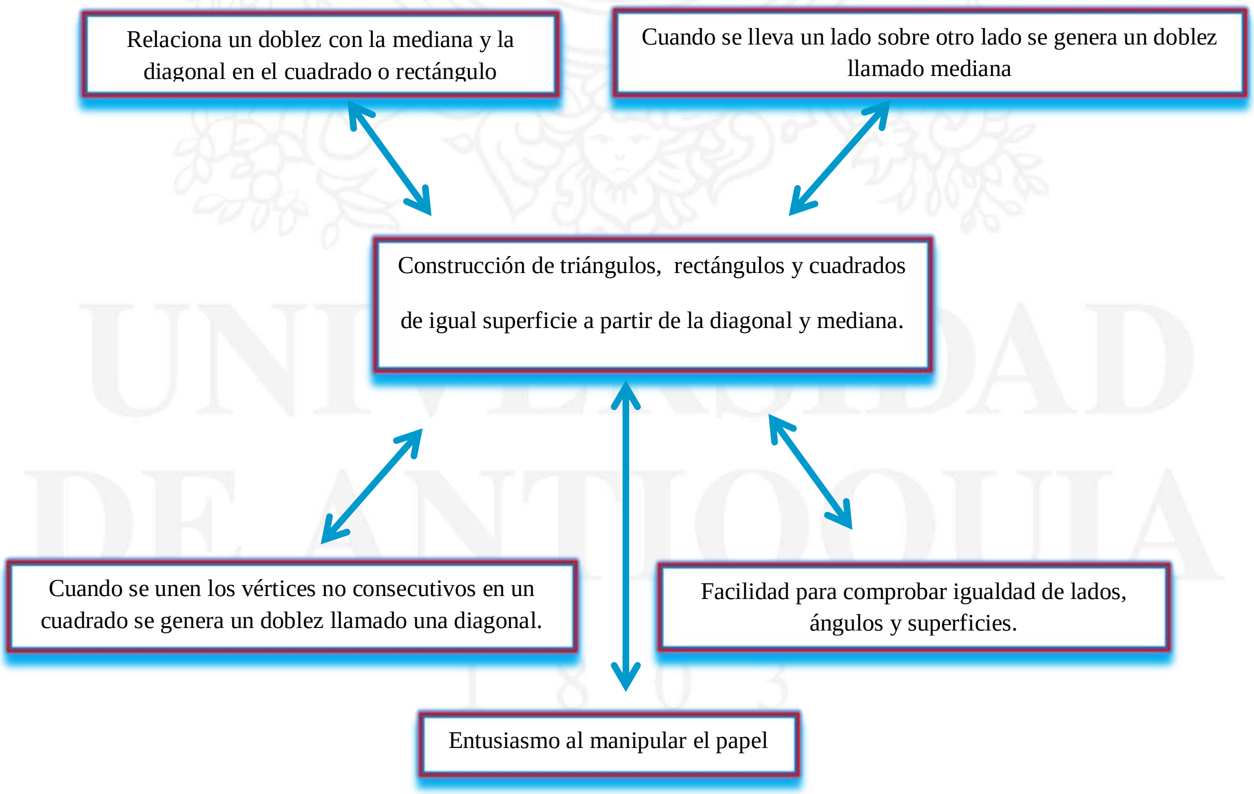


Figura 222. Descriptor 1.5 y categorías de Sara.

4.2.3.3.Análisis de los descriptores del nivel II.

2.1 Reconoce un triángulo rectángulo isósceles y escaleno y sus elementos constitutivos.

La entrevista inicio midiendo el ángulo de un cuadrado con el transportador, presentó dificultad para reconocer lados perpendiculares del rectángulo, pues no recordaba esa relación que hay entre los dos lados consecutivos de un cuadrado. Un hecho importante es que Sara relacionó el ángulo de 90 grados con las líneas perpendiculares, es decir, si existen un ángulo recto o varios entonces los lados que los forman son perpendiculares.

Reconoció un ángulo recto en un triángulo, pero no sabía cómo se le llamaba, por lo tanto, se hizo un aporte de información de triángulo rectángulo. Sara llegó a reconocer también un triángulo rectángulo pero desconocía su clasificación según sus lados, pero mediante el aporte de información comprende la definición de triángulo rectángulo isósceles y escaleno. Cabe resaltar que hubo una sección para la geometría de papel, pues fue propicio para que Sara consolidara el concepto de triángulo rectángulo isósceles y escaleno, pues el doblado de papel con relación a la diagonal, y a los lados perpendiculares permitió que Sara comprendiera las propiedades de un triángulo rectángulo. De hecho, se aprovechó para aportar información de figuras geométricas congruentes, debido a que Sara tenía los elementos necesarios para relacionar lados y ángulos correspondientes entre figuras planas congruentes, en este caso, triángulo rectángulo, cuadrados y rectángulos. Finalmente la estudiante afirmó con propiedad cuando se le preguntó ¿Qué figura plana se puede construir con dos triángulos rectángulos escalenos que sean congruentes? ¿Qué figura plana se puede construir con dos triángulos rectángulos isósceles que sean congruentes? respondiendo rectángulo y cuadrado respectivamente. Respecto a la prueba escrita, Sara logró establecer la diferencia y similitud entre un triángulo rectángulo escaleno y triángulo rectángulo isósceles.

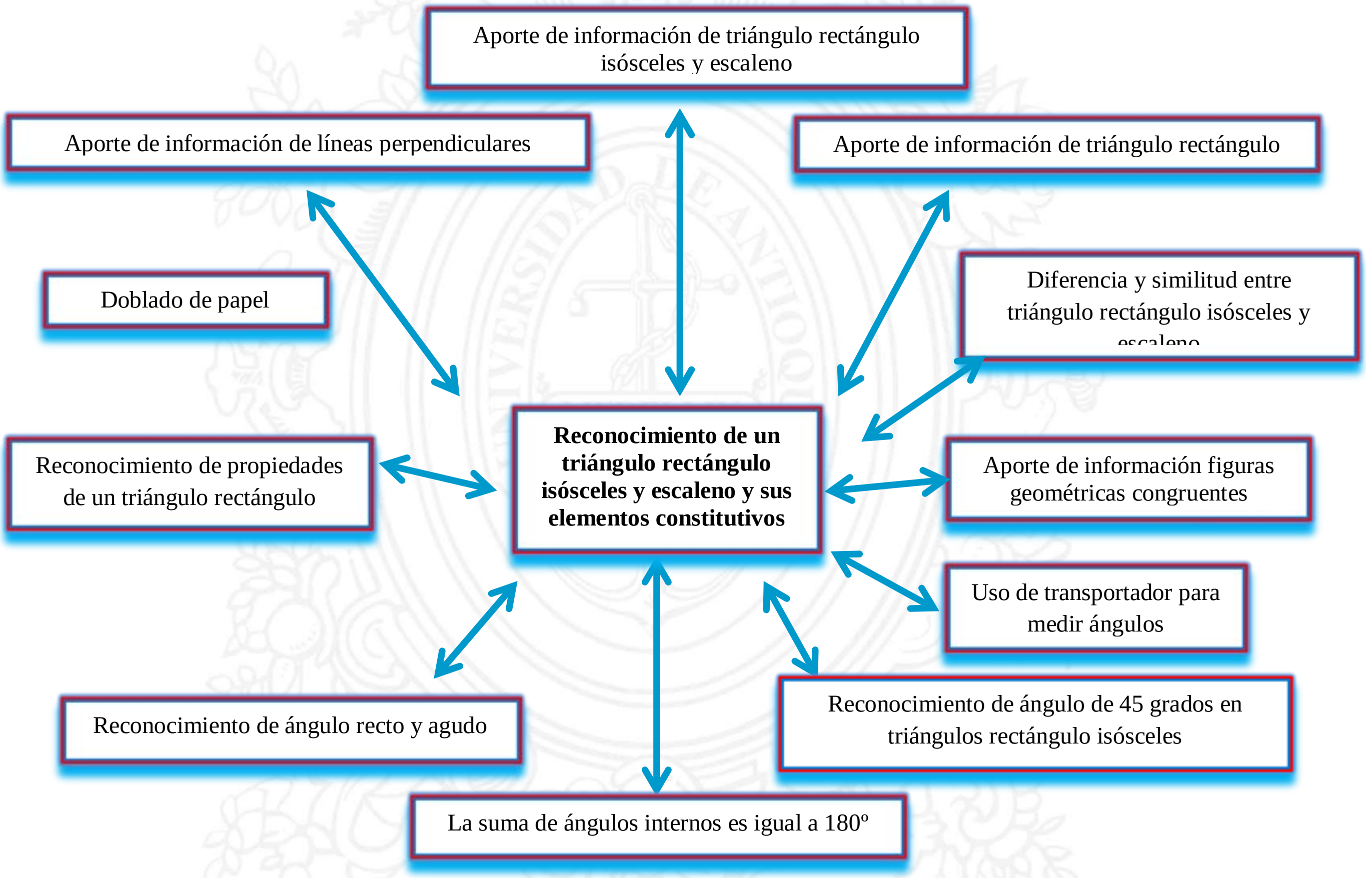


Figura 223. Descriptor 2.1 y categorías de Sara.

2.2 Reconoce el rectángulo y cuadrado, y sus propiedades, además de sus elementos constitutivos.

Sara reconocía el rectángulo pero aún faltaba más, encontrar la relación de paralelismo que se establece entre los lados opuestos del cuadrado y rectángulo, entonces se le dio un aporte de información del concepto de líneas paralelas. Sara afirmó que los lados consecutivos de un cuadrado o rectángulo siempre son perpendiculares, por lo tanto, forman un ángulo recto. Además, logró definir la suma de los ángulos internos de un cuadrado o rectángulo. Finalmente, estableció relaciones entre los lados paralelos y perpendiculares de un cuadrado y un rectángulo. Sara logró reconocer un rectángulo o cuadrado en diferentes posiciones, no estandarizado.

En la actividad escrita respecto al reconocimiento del cuadrado y rectángulo teniendo en cuenta sus elementos constitutivos, sus afirmaciones fueron correctas.

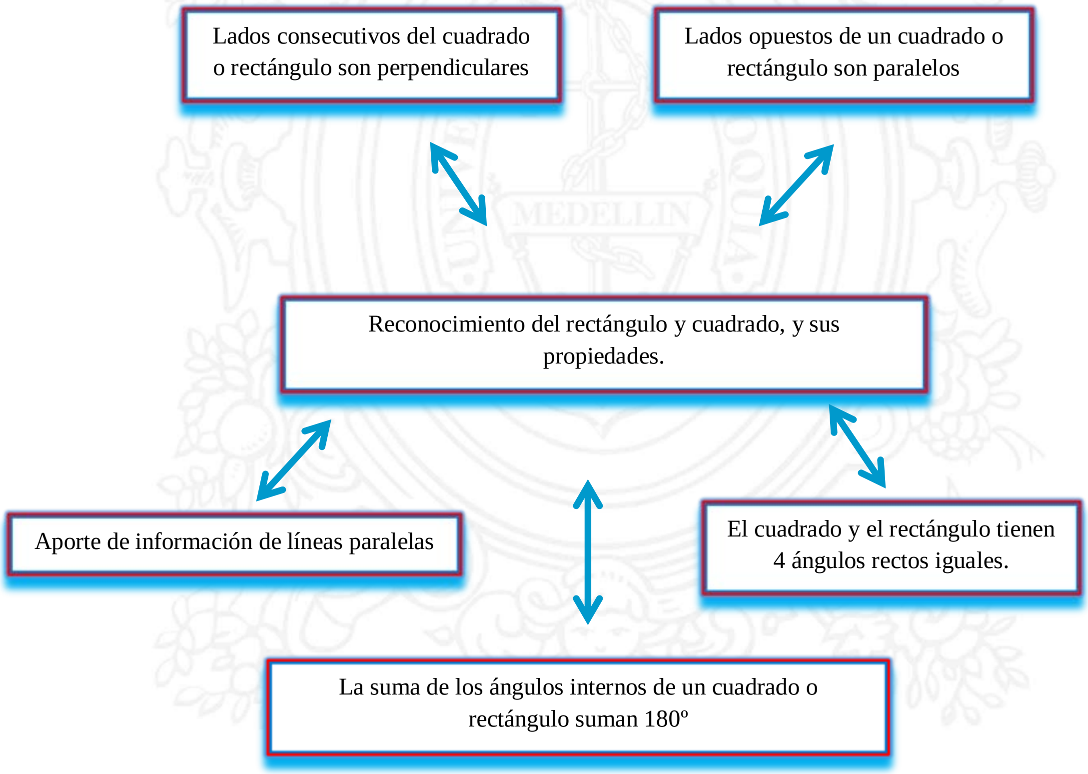


Figura 224. Descriptor 2.2 y categorías de Sara.

2.3 Establece comparación de área de las figuras planas para reconocer que dos o más figuras planas con diferentes superficies, pueden tener igual área, mediante el uso de procedimientos netamente geométricos.

Al iniciar la entrevista se hizo un aporte de información respecto a comparación de áreas y procedimientos geométricos, una está muy relacionada con la otra. Definen el área como la cantidad del plano ocupado por la superficie y establece la relación de igualdad y de inclusión. Esto se logra por medio de procedimientos netamente geométricos, utilizando técnica de recorte y pegado, deshacer y componer, superposición de figuras, doblado de papel, uso de cuadrícula, trazar líneas notables como la altura de un cuadrado, rectángulo, triángulo; también medianas, diagonales, construcciones de figuras para facilitar su comparación

Sara, desconocía el concepto de área, por ello, se dio un aporte de información respecto al mismo y su respectivo ejemplo, sin embargo, parecía confundida, pues no diferenciaba muy bien el área de la superficie, por lo tanto, se inició un dialogo socrático, el cual tuvo como mecanismo de apoyo la técnica de recorte y pegado o deshacer y componer un figura en otra, el cual fue significativo para ella. De ello logra concluir y reconocer el área como una relación de igualdad, considerando que una superficie con otra superficie puede tener igual área. Por su propia cuenta ella da cierta estimación del concepto ofrecido, pues, reconoce desde la percepción visual si el área de la superficie de una figura es mayor que otra. Durante la entrevista con Sara, fue necesario utilizar corte con tijeras, pues fue uno de los procedimientos geométricos que más se utilizaron para poder comparar las áreas entre las figuras. Cuando se le presentó la siguiente situación durante la entrevista:

"Un estudiante del grado 5 utilizó vinilo de color naranja para pintar el rectángulo y el triángulo hechos de cartón paja, ¿crees que necesitó la misma cantidad de pintura en ambas figuras?", ella realizó la construcción de la diagonal del rectángulo y el corte respectivo, visualizó que la figura 1 tenía igual área que la figura 2, afirmó que: la figura rectangular necesitó la misma cantidad de pintura en las dos figuras, y mencionó lo siguiente: "se corta por la diagonal el rectángulo y busco construir la figura en el triángulo y veo que la superficie es igual".

Sara tuvo dificultad en una situación relacionada al área sombreada, pues no lograba comparar áreas, se inició también una entrevista socrática y un aporte de información respecto a la altura de un triángulo, finalmente cuando Sara trazó la altura del triángulo sombreado, concluyó que el área sombreada era igual al área no sombreada, por lo tanto, pudo relacionar de otra forma las área de las dos figuras sombreada y no sombreada. En otras situaciones también logro identificar cuando una superficie era de área cuádruple, doble y mitad.

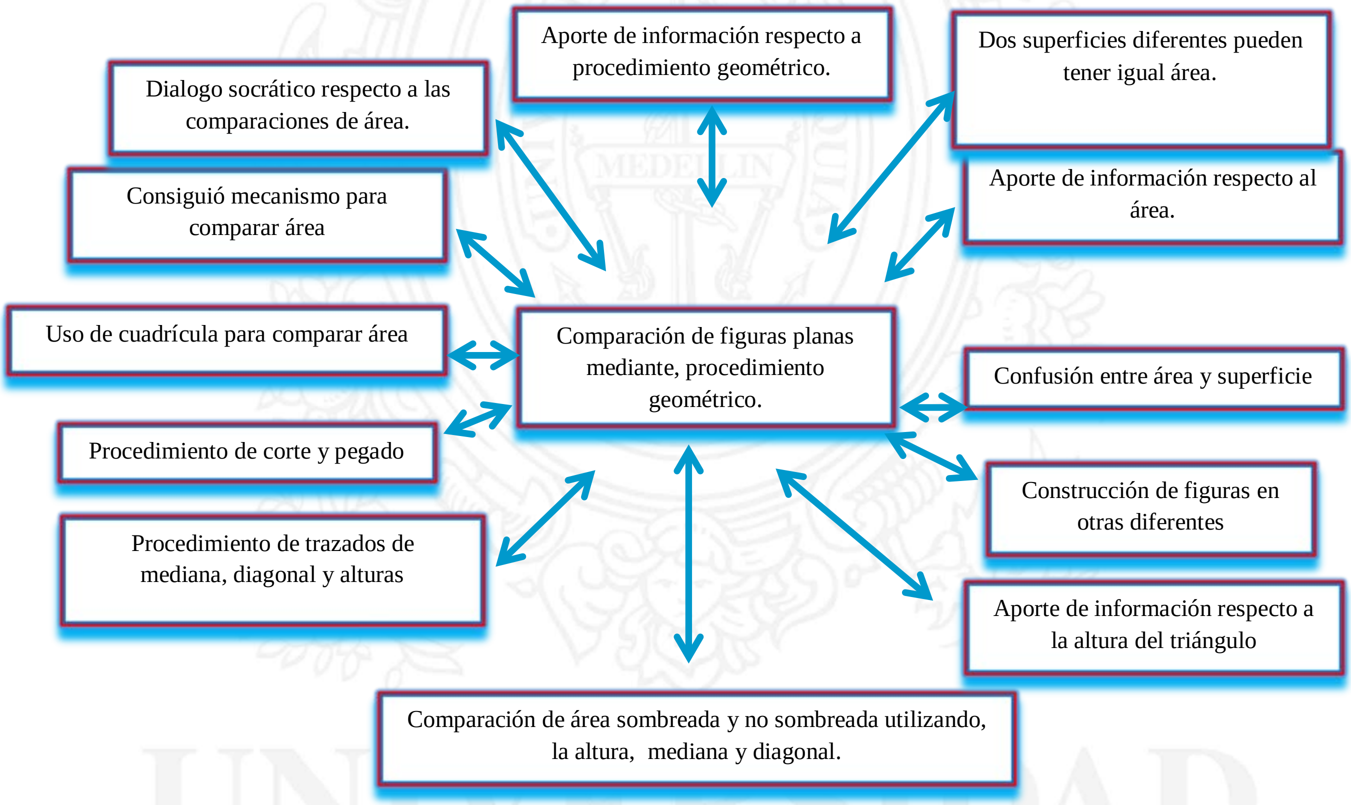


Figura 225. Descriptor 2.3 y categorías de Sara.

2.4 Construye cuadrados sobre lados, diagonales, segmentos perpendiculares.

Sara hizo el proceso de construcción de un cuadrado sobre un segmento, sobre lados de cuadrados, rectángulos y triángulo, también, sobre diagonales de cuadrados y de rectángulos, teniendo en cuenta la longitud de sus lados y la medida de su ángulo recto, ella primero que todo se ayudó con la cuadrícula y la regla, y se ayudó con la escuadra cuando se debía construir sin cuadrícula.

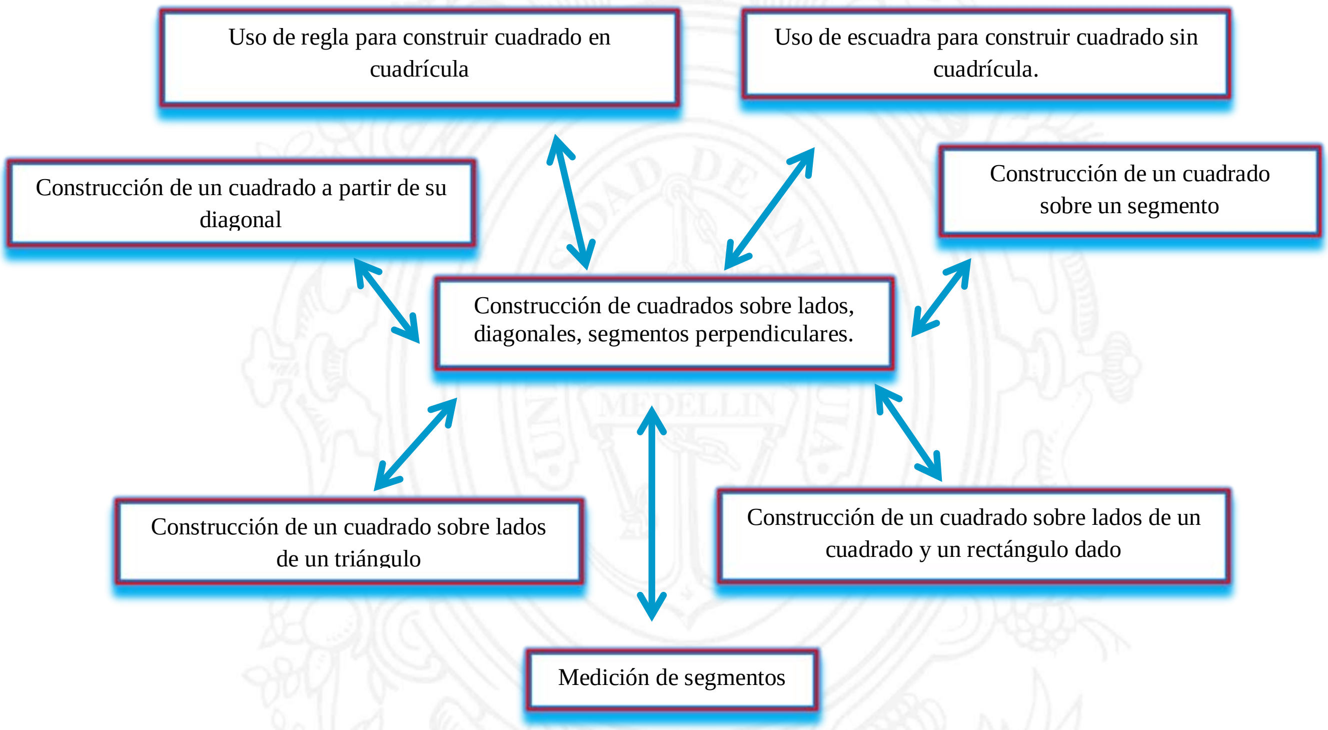


Figura 226. Descriptor 2.4 y categorías de Sara.

2.5 Reconoce que a partir de un cuadrado es posible generar dos o más triángulos rectángulos isósceles de igual área, mediante el trazo de sus diagonales.

Sara comprendió que una diagonal en el cuadrado lo divide en dos triángulos rectángulos isósceles de igual área, y que dos diagonales en el cuadrado lo dividen en cuatro triángulos rectángulos isósceles de igual área.

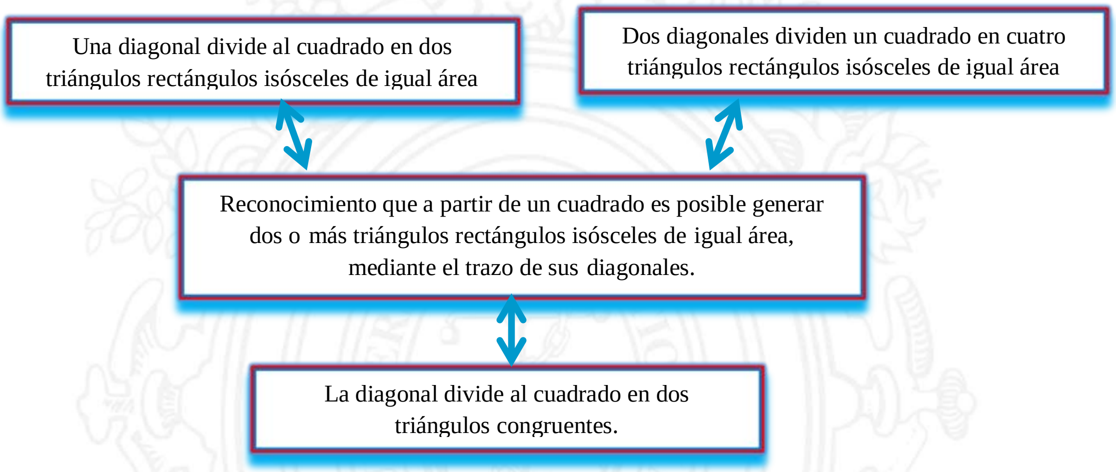


Figura 227. Descriptor 2.5 y categorías de Sara

2.6 Reconoce que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más triángulos rectángulos escalenos de igual área, mediante el trazo de sus diagonales y medianas

Sara afirma que una diagonal en el rectángulo lo divide en dos triángulos rectángulos escalenos de igual área, y que dos diagonales en el rectángulo no lo divide en cuatro triángulos rectángulos isósceles de igual área. Ella estableció que dos triángulos rectángulos escalenos unidos por el lado más largo forman un rectángulo, además, pudo reconocer que dos medianas y dos diagonales dividen el rectángulo en ocho triángulos rectángulos de igual área.

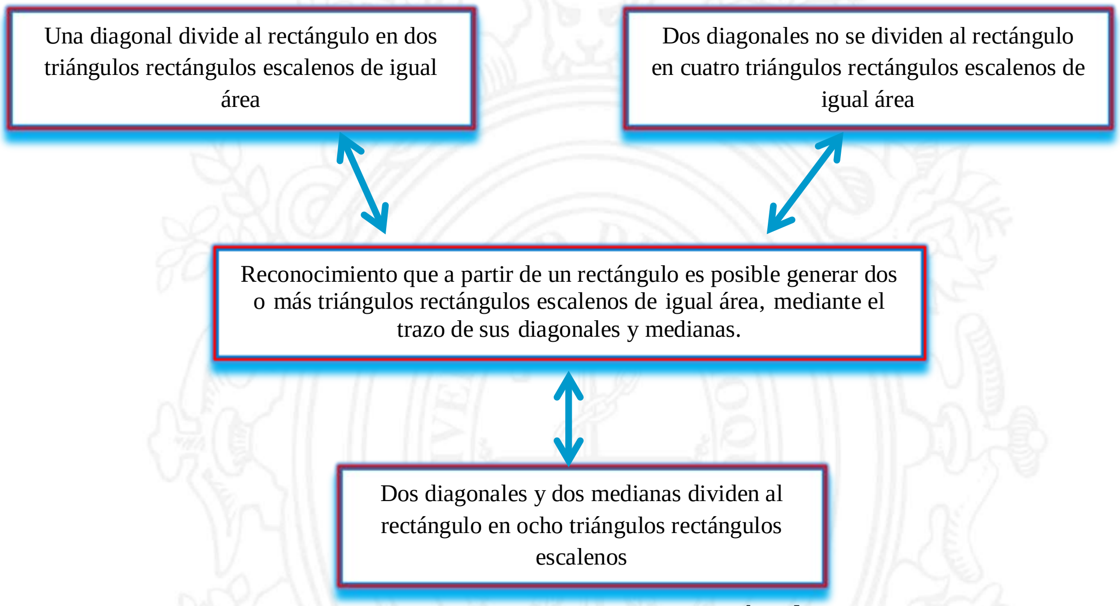


Figura 228. Descriptor 2.6 y categorías de Sara.

2.7 Afirma sin demasiada duda que a partir de un rectángulo es posible generar dos o más cuadrados de igual área, mediante el trazo de sus medianas.

Durante la entrevista se utilizó la geometría de papel para hacer construcciones de medianas, cuando Sara presentó la construcción que había hecho afirmó que se pueden construir dos cuadrados de igual área cuando se traza la diagonal con el doblez. Logró establecer una relación entre el lado (altura) y el lado (base) donde identificó que el lado de la base es dos veces la altura cuando el rectángulo es dos veces el área de un cuadrado. Sara construye un rectángulo de área triple en cuadrícula y sin cuadrícula.

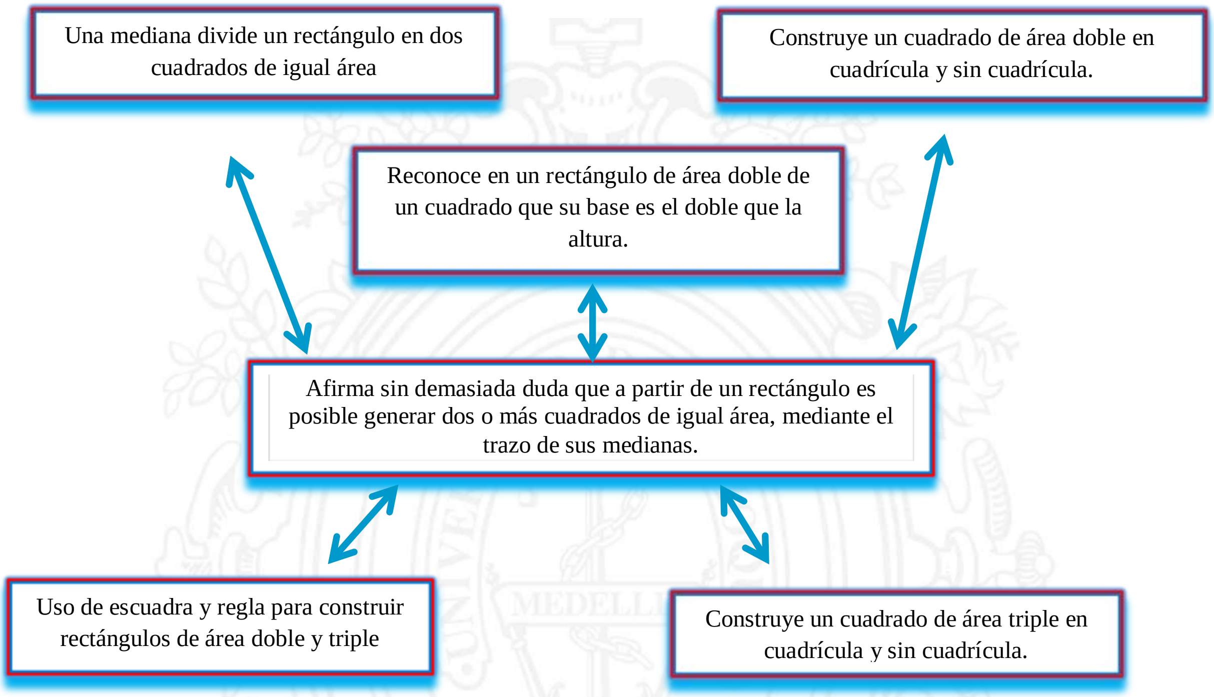


Figura 229. Descriptor 2.7 y categorías de Sara.

4.2.3.4.Análisis de los descriptores del nivel III

3.1 Comprende que es posible construir un cuadrado de área doble a partir de la diagonal de un cuadrado inicialmente dado.

Encontrar la relación de inclusión entre el área de un cuadrado inicial y el cuadrado de área doble al cuadrado inicial, no fue sencillo. Sara, no logra encontrar la condición suficiente para construir un cuadrado de área doble. Aunque previamente se establece comparación de cuadrados, ella compara y reconoce un cuadrado de área doble; pero, en este caso, no lo logra, por ende se estableció un dialogo socrático para encontrar la condición que debe tener un cuadrado para que sea doble. Finalmente, ella da cuenta y logra construir un cuadrado de área doble, encontrando la longitud de la diagonal, siendo la diagonal la misma longitud de los lados del cuadrado a construir. Sara hizo este ejercicio con cuadrícula y después sin cuadrícula, ella utiliza trazo de diagonales en ambos cuadrados, posteriormente, construye un cuadrado de área doble sobre la diagonal del cuadrado inicial.

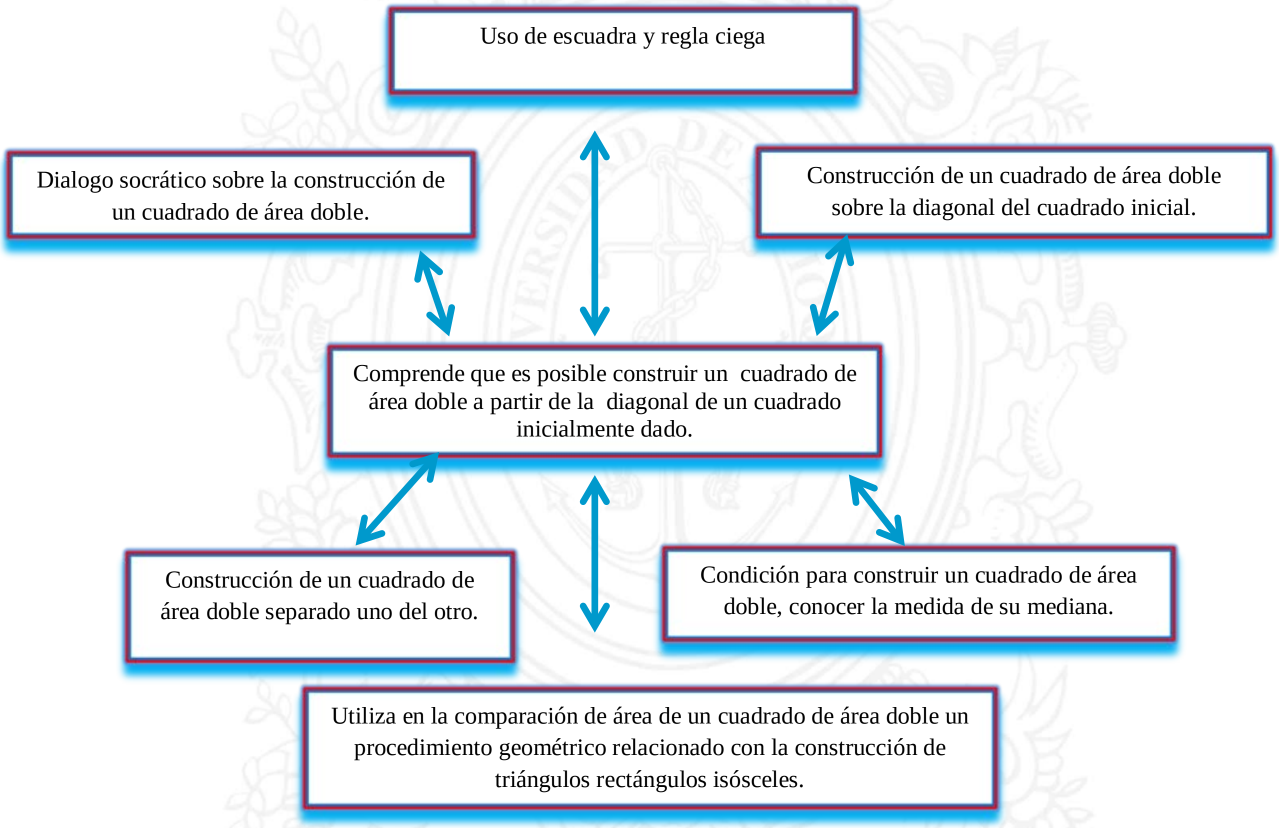


Figura 230. Descriptor 3.1 y categorías de Sara.

3.2 Entiende que a partir de la diagonal de un rectángulo de área doble de un cuadrado es posible la construcción de un cuadrado que contenga cuatro triángulos rectángulos escalenos y un cuadrado de igual área.

La entrevista con Sara empezó formando un cuadrado con cuatro fichas y luego con las cinco fichas, similar al tangram; las fichas estaban constituidas por un cuadrado y cuatro triángulos rectángulos escalenos. Igualmente, comparó un triángulo rectángulo escaleno y un cuadrado, los cuales hacen parte de las fichas. Sara parecía estar motivada por la actividad. Ella construyó un cuadrado con las cinco fichas, además, en diferentes situaciones, elaboró cuadrados que tenían como elemento las cuatro triángulos rectángulos y un cuadrado. Cuando Sara presentó la construcción de un cuadrado sobre la diagonal de un rectángulo de área doble, se dio cuenta que el rectángulo construido inicialmente cabía dos veces y medio en el cuadrado construido sobre la diagonal. Afirmó que si, se coloca el rectángulo sobre el cuadrado este cabria dos veces y medio; entonces Sara, logro establecer las relaciones de áreas que existen con el rectángulo de área doble de un cuadrado y el cuadrado construido sobre su diagonal. Asimismo, relacionó el cuadrado con el rectángulo de área sombreada en la actividad escrita.

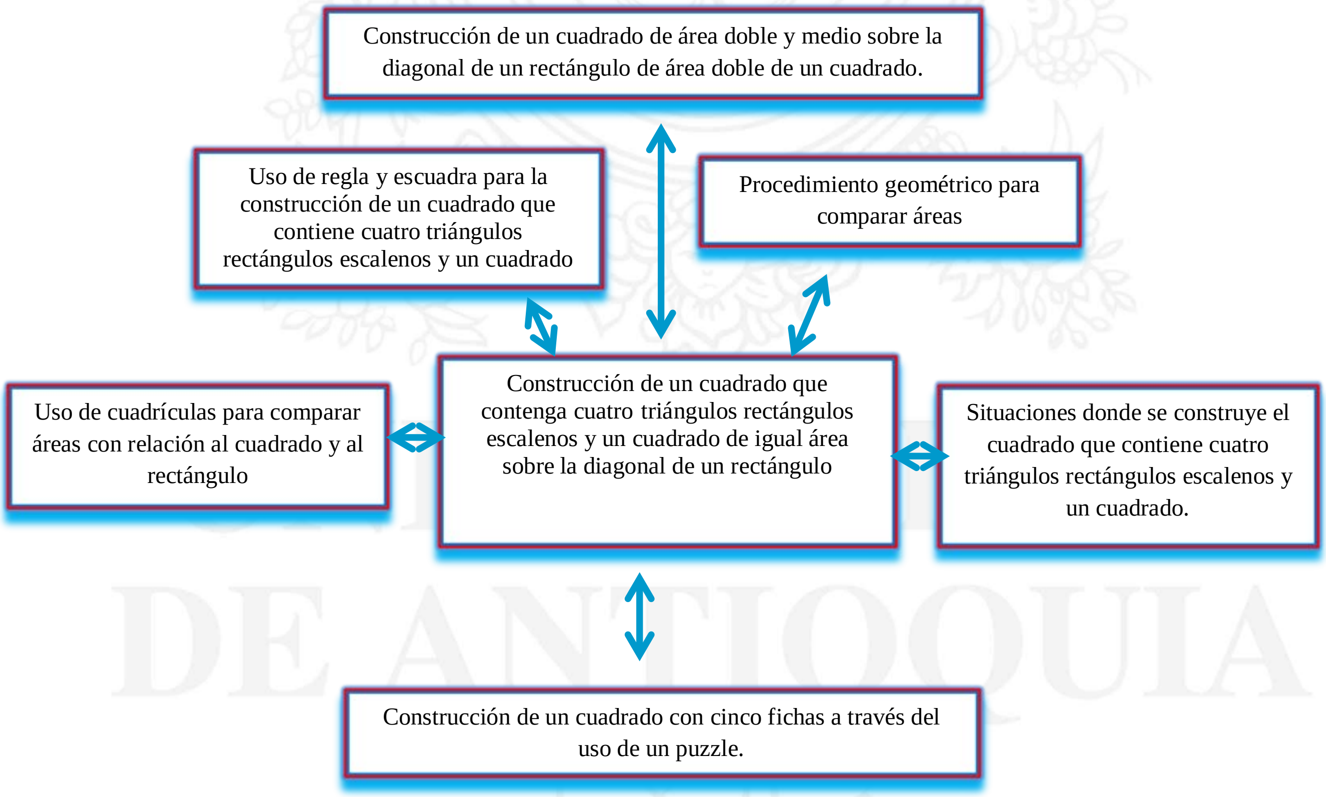


Figura 231. Descriptor 3.2 y categorías de Sara.

3.3 En la construcción del triángulo rectángulo isósceles, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Sara, aunque tuvo la experiencia pasada en el nivel anterior respecto a la comparación de áreas, logró comprender que el área de una figura es igual a otra, en diferentes situaciones, porque la cantidad de superficie es la misma utilizada en la otra figura y pudo relacionar cantidad de superficie separadas como la suma de áreas cuando se une cada parte. De modo similar, cuando Sara realizó la construcción de tres cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles en cuadrícula, afirmó que el área de los dos cuadrados iguales era el área del cuadrado grande. Ella pudo encontrar la manera de relacionar las áreas por medio de diagonales; argumentó que la figura *a* más la figura *b,* es igual al área de la figura *c*. También, relacionó las áreas estableciendo un procedimiento geométrico construyendo cuadrados y triángulos de tamaño igual a la cuadrícula en cada uno de los cuadrados, afirmando que tienen la misma cantidad de cuadrados. De esta forma, concluye que tienen igual área. Hizo las construcciones con cuadricula y sin cuadrícula, y ha establecido esta misma relación en la actividad escrita, donde relacionó el área de los cuadrados con la siguiente suma $a + b = c$.

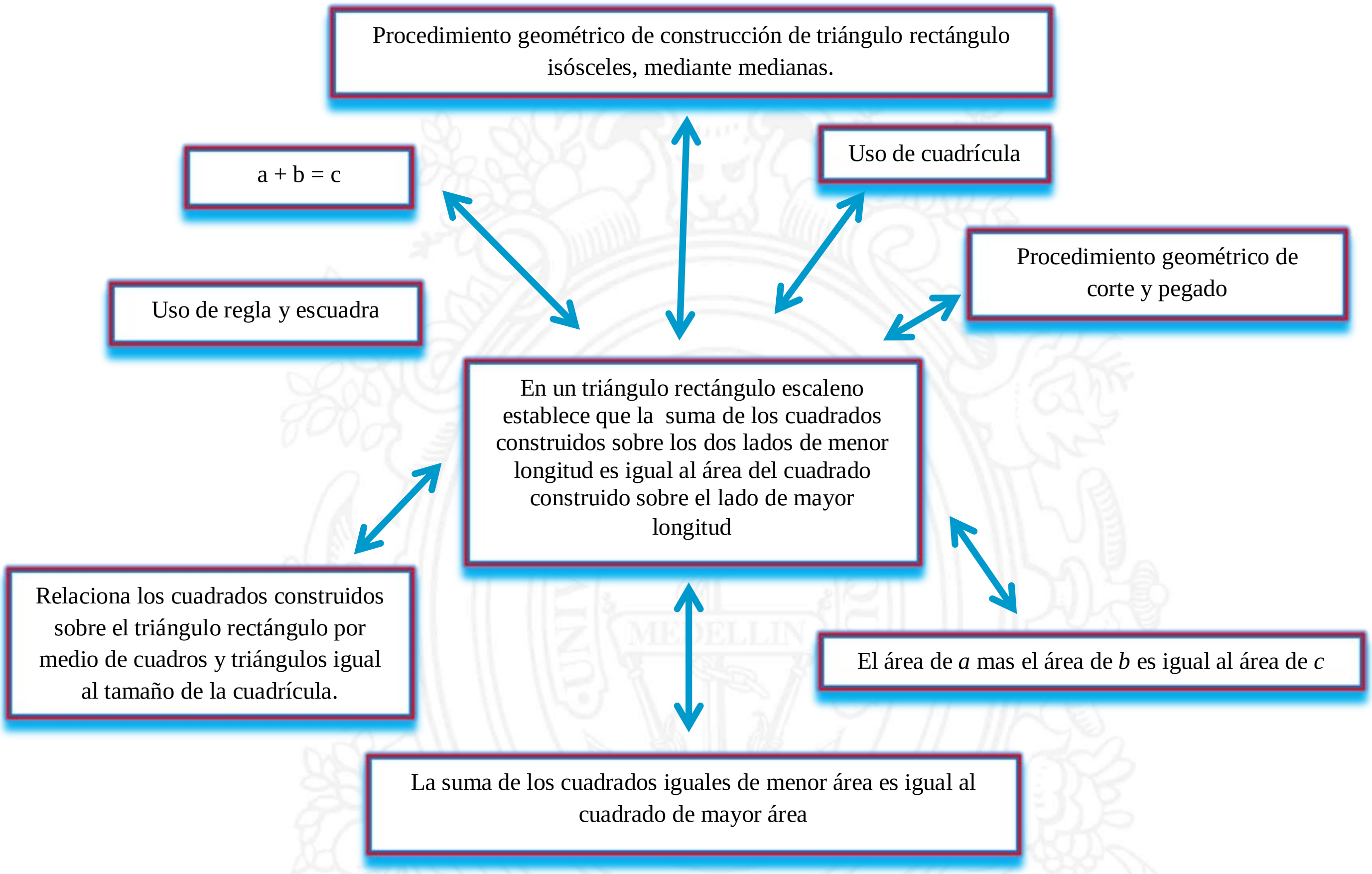


Figura 232. Descriptor 3.3 y categorías de Sara.

3.4 En la construcción de un triángulo rectángulo escaleno, mediante las comparaciones de áreas, establece que la suma de los cuadrados construidos sobre los dos lados de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado de mayor longitud.

Cuando Sara llegó a la construcción de los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo escaleno, no era sencillo relacionar las áreas de los cuadrados, encontró una forma para hacerlo, construyendo triángulos rectángulos sobre el cuadrado mediano y grande, y de esta forma argumentó que el cuadrado pequeño y el cuadrado mediano formaban cuatro triángulos rectángulos iguales, que eran las mismas figuras que estaban en el cuadrado grande, concluyó que el área del cuadrado grande es igual al área de los otros dos cuadrados, el pequeño y el mediano. Ella relaciona estas áreas con la operación de suma de cuadrados. En la actividad escrita afirmó que la figura 1 más la figura 2 es igual a la figura 3, manifestó que en la figura 2 se pueden hacer dos triángulos rectángulos iguales y en la figura 3 se pueden hacer tres triángulos rectángulos iguales y la suma de las áreas de los dos cuadrados es igual al área del otro cuadrado.

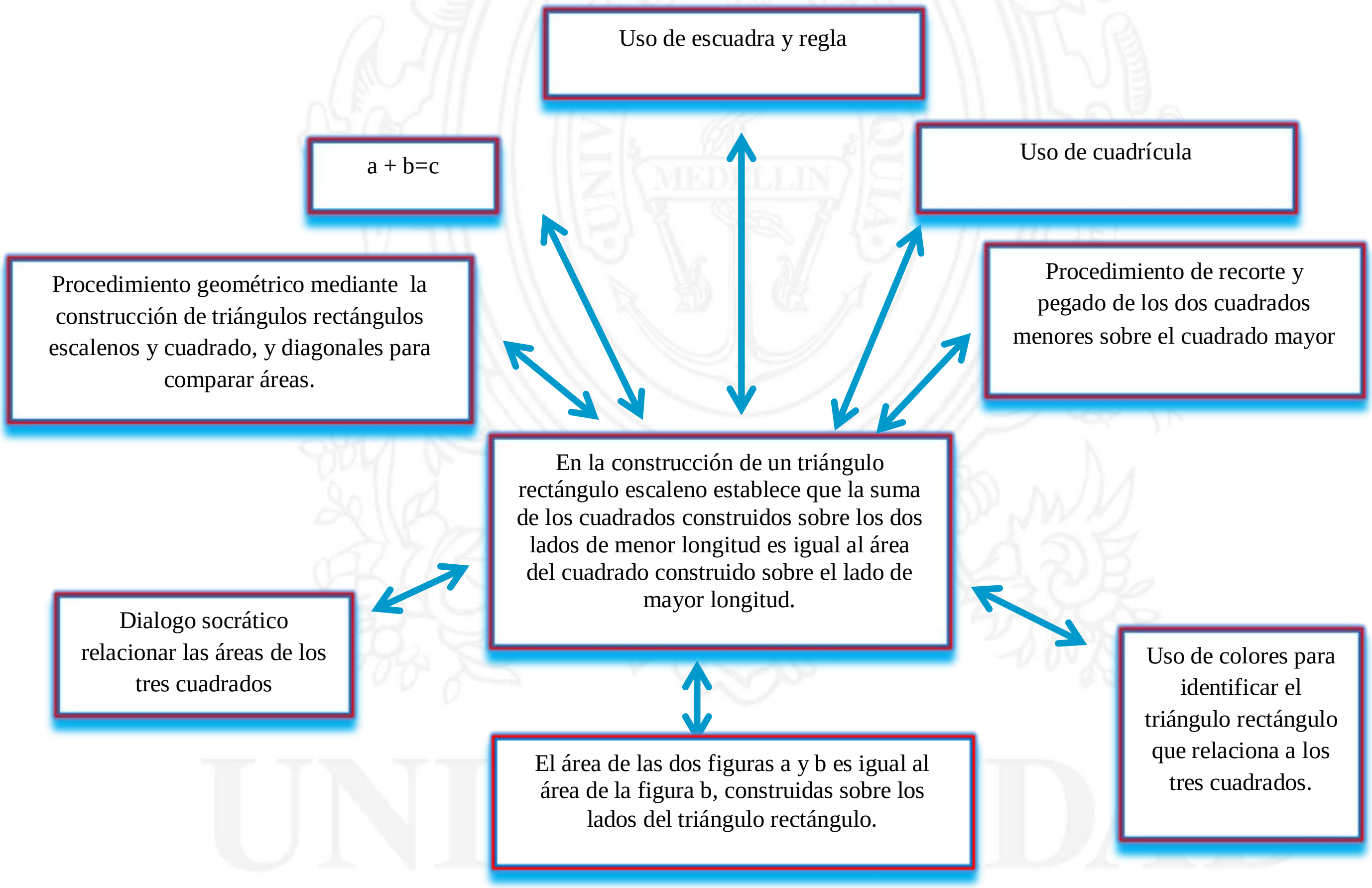


Figura 233. Descriptor 3.4 y categorías de Sara.

Con estas descripciones detalladas de los razonamientos expuestos por cada estudiante a través de cada nivel y para cada uno de los descriptores, se logra la validación de los mismos y una caracterización de los procesos de razonamiento exhibidos por los participantes.

5. CONCLUSIONES

En este apartado presentan las conclusiones referidas a los resultados más relevantes de esta investigación, en cuanto a la consecución de los objetivos y la pregunta planteada en el estudio.

5.1.CONSECUCIÓN DE LOS OBJETIVOS

5.1.1. Objetivo general.

El objetivo general propuesto para este estudio fue el siguiente:

- Caracterizar los procesos de razonamiento de los estudiantes de 5 grado, mediante la construcción de descriptores para los niveles 0, I, II y III, cuando se aproximan a la comprensión del Teorema de Pitágoras, a partir de la comparación de áreas, en el contexto del modelo de van Hiele.

Para lograr este objetivo se construyeron inicialmente, unos descriptores hipotéticos de nivel en correspondencia con el marco teórico de van Hiele, el trabajo de campo posibilitó su validación y la redefinición de otros, así como también, las actividades propuestas enmarcadas en el establecimiento de relaciones entre áreas para lograr una aproximación del teorema de Pitágoras, permitieron establecer la viabilidad de los descriptores o la necesidad de refinarlos.

Con cada uno de los tres estudiantes se realizó una entrevista individual, teniendo en cuenta el estudio de caso, con el fin de analizar si lograban o no aproximarse a la comprensión del teorema de Pitágoras, desde las comparaciones de áreas de figuras planas, utilizando procedimientos geométricos como la percepción visual, la superposición, recorte, pegado, doblado de papel, uso de reglas, escuadras, cuadrículas, entre otros, para facilitar procedimientos asociados al reconocimiento de áreas y posteriormente al establecimiento de relaciones entre las mismas. Estos aspectos mencionados se tuvieron en cuenta para la construcción de los descriptores, pues permitieron que los estudiantes encontraran métodos para razonar frente a las relaciones de igualdad y de inclusión entre dos o más figuras planas. Durante la actividad de la entrevista, el lenguaje fue cambiando en los estudiantes, pues, a medida que se iba pasando por los niveles estos exigían un avancen en su vocabulario, así como también en la construcción de los conceptos construidos en su estructura mental, la cual también se fue ampliando y refinando a medida que se realizaba la intervención.

La entrevista fue apropiada y pertinente en la investigación, porque permitió analizar varios aspectos, entre ellos se tienen: Pulir los descriptores de nivel; detectar en qué nivel están los estudiantes; avanzar en su proceso de razonamiento, pues la entrevista fue una experiencia de aprendizaje; definir aportes de información como mecanismo para reestructurar los conocimientos previos y fortalecer los nuevos, evidenciados a través de la comprensión del objeto de estudio; es así como la entrevista de carácter socrático también ofreció un mecanismo de ayuda para que los estudiantes encontraran métodos para solucionar situaciones conflictivas y de esta forma avanzar en su razonamiento.

Un hecho importante durante la entrevista fue la visualización aportada, es decir, las representaciones de dibujos que permitieron, por un lado, la aclaración de dudas y ejemplificaciones de conceptos, por otro lado, la estimulación del razonamiento frente a una situación. De hecho, el ejercicio de visualización, siempre estuvo presente durante el proceso de razonamiento de los tres estudiantes, pues las construcciones con el doblado de papel, recorte, pegado, manejo de cuadrícula y demás fueron mecanismos que fortalecieron la componente visual geométrica asociada al concepto objeto de estudio.

Consecuentemente, se puede concluir que el objetivo general se cumplió a cabalidad, el capítulo 4 contiene el análisis del proceso de razonamiento de los tres estudiantes participantes en la investigación, donde se evidencia que se logra una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante la comparación de áreas, dejando como producto final los descriptores establecidos que permitieron la caracterización de los razonamientos.

5.1.2. Objetivos específicos.

Los objetivos que contribuyeron a la consecución del objetivo general, fueron los siguientes:

- Diseñar una guion entrevista de carácter socrático para la comprensión de teorema de Pitágoras desde el tratamiento geométrico del área, que permita identificar los descriptores y poder clasificar al entrevistado en algunos de los niveles.

- Hipotetizar un conjunto de descriptores de nivel para la orientación de la construcción de actividades, que permitan avanzar en los niveles de razonamiento frente a la comprensión del teorema de Pitágoras.

- Definir los elementos teóricos que orientarán el diseño de un guion entrevista y una actividad escrita para la básica primaria, que permitirán determinar el nivel de razonamiento de un estudiante, en cuanto a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través de la comparación de áreas.

- Determinar los descriptores finales para ubicar a cada estudiante en uno de los niveles de razonamiento de van Hiele para lograr una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, utilizando la comparación de áreas desarrollados desde procedimientos netamente geométricos.

En la construcción de los descriptores preliminares se tuvieron en cuenta algunos aspectos como: el modelo teórico de van Hiele desde los niveles y la ruptura o separación de un nivel al inmediatamente superior, la definición de los elementos y figuras geométricas que relacionan el área desde lo cualitativo, la construcción de un mecanismo, en este caso las comparaciones de áreas a través de procedimientos geométricos, para permitir a los entrevistados métodos que ayuden a establecer relaciones de igualdad o inclusión entre áreas.

Después de desarrollar las actividades relacionadas con cada nivel a través de la entrevista socrática, la actividad escrita y las notas de observación, se refinaron y se definieron los descriptores finales presentados en el capítulo 3 y el capítulo 4 que ubicaron a los tres participantes en el nivel III de razonamientos, porque lograron relacionar no sólo las figuras geométricas implicadas entre sí, sino también establecer las relaciones de áreas entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo y su relación con la propiedad aditiva del área, a través de varios procedimientos geométricos.

Aunque la entrevista socrática en el contexto de van Hiele tiene referidas unas característica, que señala Jaramillo, C. y Campillo, P. (2001) y Jurado, F. y Londoño, R. (2005) respecto al esquema de ideas de un diseño de la entrevista socrática y un decálogo para el diseño de una entrevista socrática, cabe mencionar que para estudiantes de último grado de primaria la realización de una entrevista socrática debe tener en cuenta algunos aspectos teóricos como: en el aporte de información no solo es necesario la parte escrita, sino suministrar un esquema o marco visual que ejemplifique el concepto, pues permite una herramienta más para fortalecer el lenguaje y mejorar la comprensión. Por otro lado, la entrevista socrática, se debe realizar en sesiones que estimen un tiempo prudente, dado que se trata de un trabajo extenuante y no familiar para los niños. Durante la entrevista es necesario no estandarizar la posición de las figuras, es necesario presentarlas de diferentes formas para crear en el estudiante una imagen mental no estática. Para que durante el proceso de la entrevista socrática se mantuviera la confianza y fuera placentera para los estudiantes fueron necesarios introducir mediadores didácticos, plegado de papel, recorte y pegue, puzzle, geoplano, etc.) que les proporcionaran, no solo condiciones favorables para la lúdica sino, también, que facilitaran el aprendizaje y la estimulación de la consecución de algún método, para resolver la situación. Por último, se destaca que es favorable presentarles situaciones, no sólo matemáticas, sino también vivenciales, de su contexto cercano.

Es así como se consiguen los objetivos específicos propuestos en el estudio y con ello se logra validar la construcción de las entrevistas y la actividad escrita, así como también los descriptores hipotéticos propuestos y refinados para cada nivel.

5.2.RESPUESTA A LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La pregunta de investigación que se planteó en el estudio fue la siguiente:

¿De qué manera razonan los estudiantes de quinto grado, cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, a partir de procesos de comparación entre áreas?

De acuerdo a los descriptores de niveles finales de razonamiento validados con los estudiantes, fue posible determinar una caracterización acerca del proceso de aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, mediante procedimientos de comparación de áreas; esta determinación se hizo a través del diseño y aplicación de una entrevista de carácter socrático, para establecer unas características generales por nivel que reflejan el pensamiento construido por los participantes con relación a la forma de razonar frente al objeto en cuestión. Estas características, definidas a través de los descriptores de nivel, están sujetas a propiedades que explican cómo proceder frente a la comprensión del estudiante, y sobre todo, cómo comprenden. Por lo tanto, cada estudiante progresa y pule la forma de su razonamiento a medida que avanza en su nivel, esto se reflejaba en su lenguaje, en las relaciones implícitas que realizaba en un nivel inferior, de las que antes no se daba cuenta y que ahora hace explícitas en un nivel superior, además de acudir a ellas cuando requiere razonar.

De hecho, el proceso de razonamiento realizado por los estudiantes fue de forma gradual, la transición de un nivel a otro requirió tiempo sobre todo progresar del nivel II a III, pues el refinamiento del lenguaje es exigente, así como también la restructuración y estableciendo de la red de relaciones entre los objetos geométricos construidos..

El paso del nivel II al III necesitó el reconocimiento de una nueva estructura, éste se logró con la entrevista de carácter socrático y con la definición de los descriptores de nivel. En este estudio, cuando se hace una aproximación a la comprensión del teorema de Pitágoras, se logra comprobar que los estudiantes enriquecieron su lenguaje, respecto a las propiedades y relaciones que existen entre el cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo, y sobre todo en las comparaciones de áreas de figuras planas que se abordaron en diferentes contextos; en este estudio, cuando el estudiante establece relaciones de igualdad de áreas, como por ejemplo, superficies de formas distintas pueden tener igual área, es decir, que el área de un triángulo puede ser igual al área de un cuadrado y relaciones de inclusión entre las áreas, como por ejemplo, el área de una superficie está incluida en otra de mayor área, esto es, el área del cuadrado puede ser el doble del área del triángulo, sólo se alude a procedimientos geométricos para comprobarlo; la adquisición de estos conceptos logrados por los estudiantes fue crucial para lograr avanzar en su razonamiento.

Por lo tanto, se verifica la validez del uso de procedimientos geométricos para comparar el área de figuras planas y las relaciones de congruencia establecidos entre el cuadrado, rectángulo y triángulo rectángulo; el marco teórico de van Hiele como mapa orientador de la investigación, la intervención realizada con todos los componentes ya expuestos, el estudio de caso, y el proceso de análisis de la información y validación de la misma permiten dar respuesta satisfactoria a la pregunta que orientó el trabajo investigativo.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

BIBLIOGRAFÍA

Burger, W., y Shaughnessy, J. (1986). *Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry*. Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), 31- 48. Recupeado de http://math.buffalostate.edu/~MED595/Casestudy1.pdf

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid, España: DIN Impresores

Corberán, R. (1996). *Análisis de concepto de área de superficie plana. Estudio de su comprensión por los estudiantes desde la primaria a la universidad.* (Tesis doctoral). Universidad de Valencia. España. Recuperado de: http:// www.uv.es / aprengeom /archivos2/Corberan96.pdf

Esteban, M., Ibáñez, M., y Ortega, T. (1998) *Trigonometría*. Madrid, España: Síntesis.

Fuys, D., y Geddes, D. (1988) *The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents. Monograph.* Recuperado de: http:// www.jstor.org / discover / 10.2307/749957?uid=3737808&uid=2&uid=4&sid=21105282403703

González, P. (2008). *El teorema llamado Pitágoras. Una historia de más de 4000 años*. Revista SIGMA, (32), 103-130. Madrid, España.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación* matemática. Universidad de los Andes. Recuperado de: http:// funes.uniandes.edu.co / 674 / 1 / Gutierrez1998Geometria.pdf

Jaime, A., y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo Van Hiele‖. En Llinares, S. y Sánchez, M. (Ed.), *Teoría y práctica en Educación Primaria*. 295-384. Recuperado de: http:// www.uv.es / gutierre / archivos1 / textospdf/JaiGut90.pdf.

Jaramillo, C., y Campillo, P. (2001). *Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del Modelo de Van Hiele*. *Divulgaciones Matemáticas*, 9 (1), 65 – 84. Recuperado de: http://www.emis.ams.org/journals/DM/v91/art5.pdf

Jaramillo, C. (2003). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de Van Hiele*. (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Valencia. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=8912

Jurado, F. y Londoño, R. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para el concepto de suma de una serie vía áreas de figuras planas*. (Tesis de maestría) no publicada, Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Land, J. (1991) *Appropiateness of the van Hiele Model for Describing Student's' Cognitive Processes on Algebra Tasks as Typified by College Students 'Learning of Functions*'. Boston, EUA: University of Boston.

Llorens, J. (1996). *Aplicación del modelo de Van Hiele al concepto de aproximación local*. Revista Suma, (22), 13–24. Recuperado de: http:// revistasuma.es/ IMG / pdf / 22 / 013-024.pdf

Loomis, E. (1940). *The Pythagorean Proposition*. National Council of Teachers of Mathematics. Washington. D.C, E.U.A. Recuperado de http:// files.eric.ed.gov / fulltext / ED037335.pdf

López, A. (2007). *Las fases de Van Hiele para el teorema de Pitágoras*. (Tesis de maestría no publicada), Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas: del cálculo al caos.* Barcelona, España: Paidós.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia -MINEDU-. (1998). *Lineamientos Curriculares en Matemáticas*. Bogotá, D.C., Colombia. Recuperado http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-339975_matematicas.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. -MINEDU-. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá, D. C., Colombia. Recuperado de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Navarro, D. (2003) *Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica*. (Tesis doctoral). Universidad de Sevilla. Recuperado de http: // fondosdigitales.us.es / tesis / tesis / 43 / un-estudio-de-la-convergencia-encuadrada-en-el-modelo-educativo-de-van-hiele-y-su-correspondiente-propuesta-metodologica/

Salazar, L. (2011). *Las Fases de aprendizaje en el contexto de van Hiele para el concepto de Continuidad Local*. Tesis de maestría no publicada, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de van Hiele*. (Tesis de maestría no publicada), Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Madrid, España: Morata. Recuperado de: http:// www.franciscohuertas.com.ar / wp-content / uploads / 2011 / 04 / IT_Stake_2.pdf

Strauss, A., y Corbin, J. (2002). *Bases de investigación cualitativa: técnicas y procedimientos para desarrollar teoría fundada*. Colección Contus, Facultad de Enfermería, Universidad de Antioquia. Medellín, Colombia. Editorial Universidad de Antioquia.

Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievements in Secondary School Geometry. CDASSG Project*. National Council of Teachers of Mathematics. Washington. D.C, E.U.A. Recuperado de: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED220288.pdf

Van Hiele-Geldof, D. (1957). *The didactics of geometry in the lowest class of secondary School* (Tesis). Universidad de Utrecht, Holanda. Traducción al inglés en Fuys, D. (Ed), 1984, 1-206. National Science Foudation, Washington D.C., E.U.A. Recuperado de http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED287697.pdf

Van Hiele. P. (1986). *Structure and Insight*. Londres, Inglaterra: Academic Press.

Vargas, G., y Gamboa., R. (2013). *La enseñanza del teorema de Pitágoras: una experiencia en el aula con el uso del geogebra, según el modelo de van hiele.* Uniciencia (27) 1, 95-118. Recuperado de: http: // www.revistas.una.ac.cr / index.php / uniciencia / article / view / 4945

Zapata, S., y Sucerquia, E. (2009). *Módulo de Instrucción en el Marco del Modelo Educativo de Van Hiele para el concepto de convergencia de una serie infinita”.* (Tesis de maestría no publicada), Medellín, Colombia: Universidad de Antioquia.

ANEXOS

ACTIVIDAD ESCRITA PARA TODOS LOS NIVLES

Actividad escrita para nivel 0

El propósito de la actividad escrita es, por un lado, analizar los escritos de los estudiantes donde aflore sin ninguna presión sus razonamientos, por otro lado, permite triangular información para un mejor análisis.

1. Colorea la superficie de las siguientes figuras.

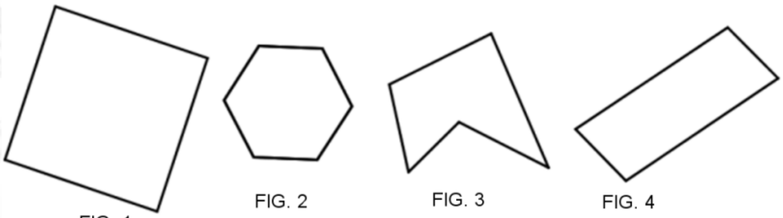


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3 FIG. 4

Figura 1. Superficie de figuras planas

2. Observa cada superficie en las siguientes figuras.

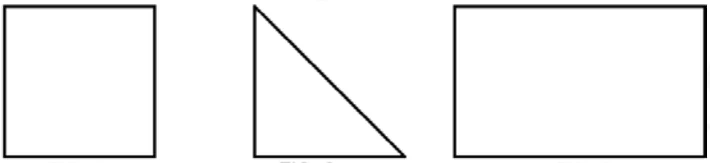


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3

Figura 2. Superficie del cuadrado, triángulo y rectángulo.

Describe la figura 1.

Describe la figura 2.

Describe la figura 3.

3. Pinta de rojo la figura que tienen menor superficie y de verde la figura que tiene mayor superficie.

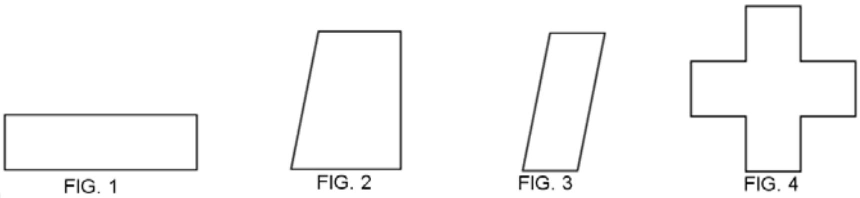


Figura 3. Tamaño de la superficie.

4. Observa las siguientes figuras y enumera de menor a mayor el tamaño de la superficie.

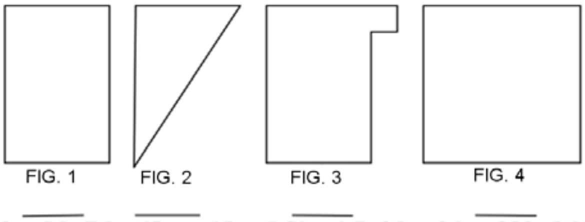


Figura 4. Comparacion de superficies

5. Une con una línea las figuras que tienen igual superficie.

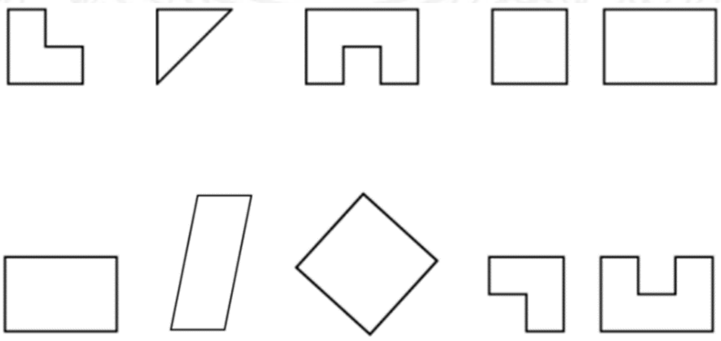


Figura 5. Superficie congruente y no congruente.

6. Observa detenidamente cada par de figuras que están separadas, la figura 1 muestra un corte. ¿Es posible que la superficie de la figura 1 se transforme en la superficie de la figura 2?
7. ¿Es correcto afirmar que dos superficies diferentes pueden tener igual superficie?
8. Explica las razones del por qué pueden tener igual superficie.

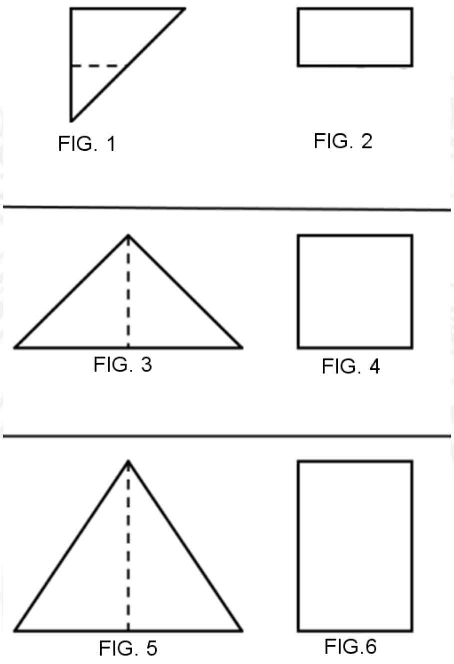


Figura 6. Transformación de superficie en otra.

9. Observa los siguientes segmentos, en él se encuentran algunos puntos medios.

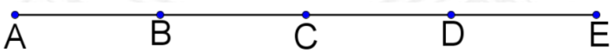


Figura 7. Congruencia de segmentos y puntos medios.

10. ¿Cuál es el punto medio del segmento $\overline{AC}$?

11. ¿Cuál es el punto medio del segmento $\overline{BD}$?

12. ¿Cuál es el punto medio del segmento $\overline{CE}$?

13. ¿Es posible afirmar que si B es el punto medio del segmento $\overline{AC}$ entonces la distancia del segmenro $\overline{AB}$ es iguala mla distancia del segmento $\overline{BC}$?

14. Justifica tu respuesta.

15. A continuación se presenta las figuras 1, 2 y 3. Señala los puntos medios de los lados de cada figura.

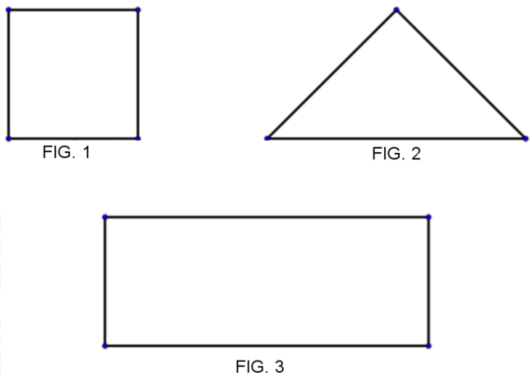


Figura 8. Lados de la superficie del cuadrado, triangulo y rectángulo

16. Traza los dos segmentos que unen los puntos medios de cada figura.

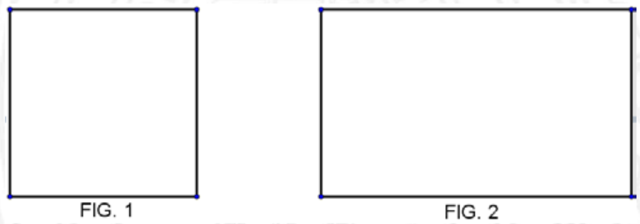


Figura 9. Superficie del cuadrado y rectángulo.

17. ¿Se puede afirmar que el segmento que unen los puntos medios de un cuadrado o rectángulo divide la superficie en partes iguales?

18. Traza los segmentos que une dos vértices en cada figura.

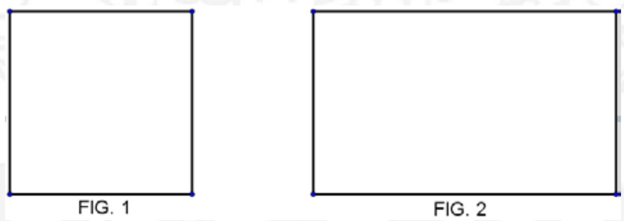


Figura 10. Superficie del cuadrado y rectángulo.

19. El segmento que se trazó en la figura anteriormente, ¿divide en dos partes la superficie?

20. ¿Es posible trazar segmentos en la figura 1 y 2 que dividan en dos partes iguales la superficie? ¿Cómo lo harías?

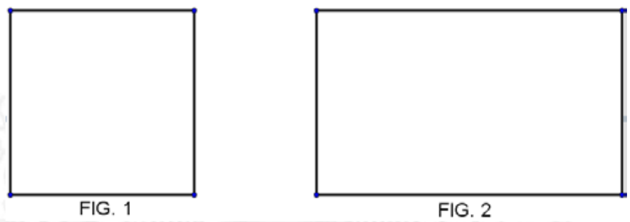


Figura 11. Trazos de segmentos en cuadrado y rectángulo.

21. ¿Es posible trazar segmentos en la figura 1 y 2 que dividan en cuatro partes iguales la superficie? ¿De qué manera lo harías?

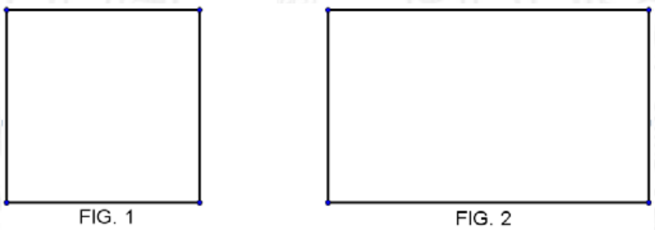


Figura 12. Cuadrado y rectángulo

Actividad escrita para nivel 1

1. De las siguientes figuras geométricas, dos son triángulos. ¿cuáles son? Nómbralas.

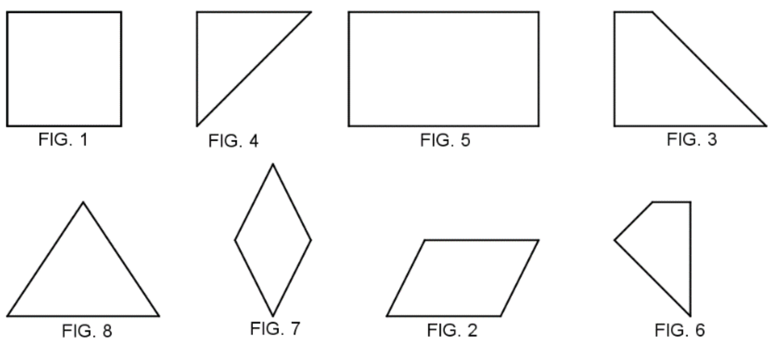


Figura 13. Figuras geométricas de tres y cuatro lados

.

2. ¿En qué se diferencia los triángulos de los demás figuras geométricas?

3. Observa los lados de cada uno de los triángulos.

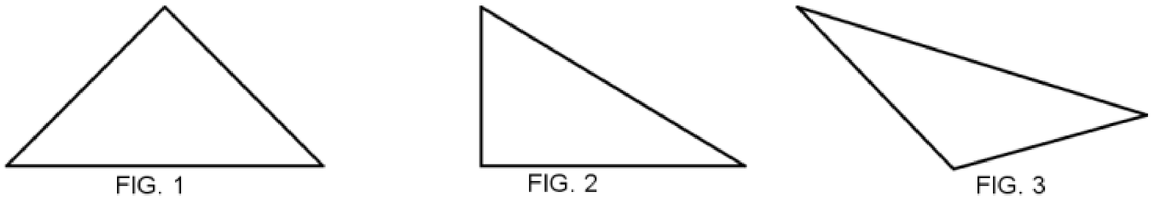


Figura 14. Triángulos con diferentes lados.

Respecto a los lados son iguales o distintos:

La figura 1 tiene: ___________________________

La figura 2 tiene.______________________________

La figura 3 tiene: ___________________________

4. Observa detenidamente las siguientes figuras geométricas de 4 lados.

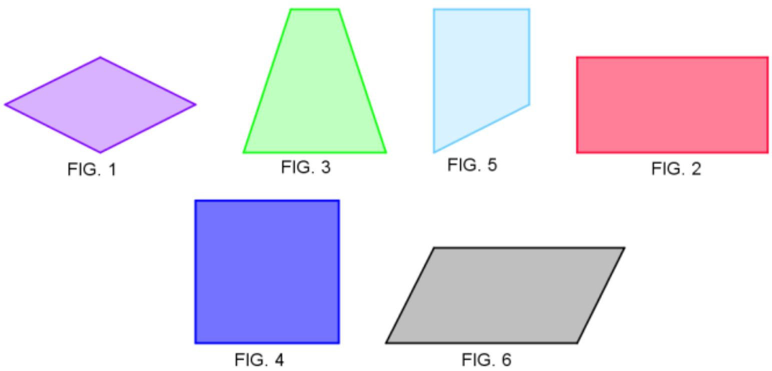


Figura 15. Cuadriláteros

5. De las figuras anteriores ¿Cuál es la figura que tiene forma cuadrada?

6. De las figuras anteriores ¿Cuál es la figura que tiene forma de rectángulo?

7. Observa la diagonal en el cuadrado, divide la superficie en dos colores diferentes.

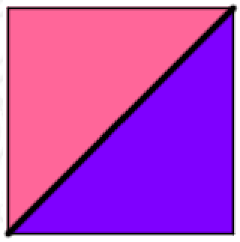


FIG. 1

Figura 16. Triángulos coloreados en un cuadrado.

8. ¿Qué forma tienen las dos superficies coloreadas?

9. ¿Son iguales?

10. Ahora, observa la figura 1 y 2 son iguales.

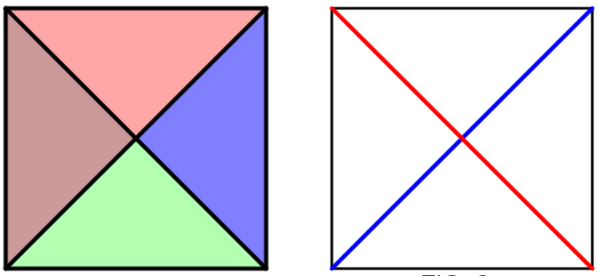


FIG. 1 FIG. 2

Figura 17. Triángulos coloreados y diagonales en un cuadrado.

11. Al trazar las dos diagonales, se formaron cuatro superficies, como muestra las figuras. ¿Qué forma tiene las cuatro superficies de la figura 1 y 2?

12. Las cuatro superficies, ¿son iguales?

13. Observa la diagonal del rectángulo. ¿Es cierto que divide la superficie en dos triángulos iguales?

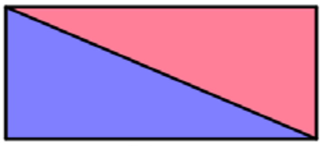


Figura 18. Triángulos coloreados en un rectángulo.

14. La superficie de cada triángulo está pintado de rosado y azul. Parece ser que cada triángulo pintado hace parte de la mitad del rectángulo, ¿es eso cierto? ¿por qué?

15. Ahora, observa la figura 1 y 2, son iguales.

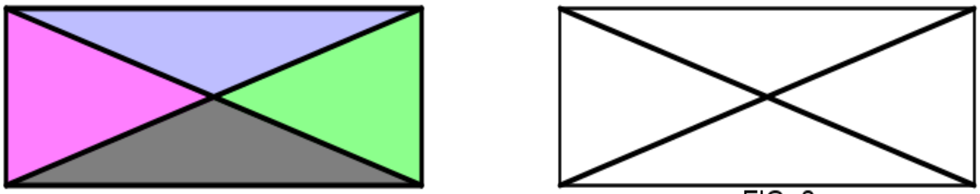


Figura 19. Triángulos coloreados en un rectángulo y diagonales del rectángulo

.

16. Al trazar las dos diagonales al rectángulo, ¿siempre forma cuatro superficies triangulares iguales? ¿por qué?

17. Observa el cuadrado con su mediana.

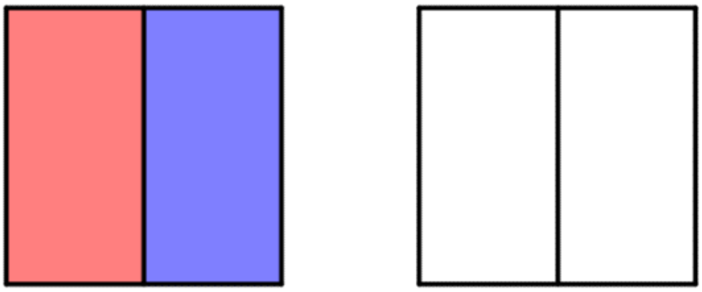


FIG. 1 FIG. 2

Figura 20. Mediana del cuadrado.

18. ¿Es cierto que la mediana divide en superficies iguales el cuadrado?
19. Cuando se traza una la mediana en el cuadrado ¿siempre forma dos superficies rectangulares iguales?
20. Observa las figuras, cuando se trazan dos medianas en el cuadrado ¿siempre se forman cuatro superficies cuadradas iguales?

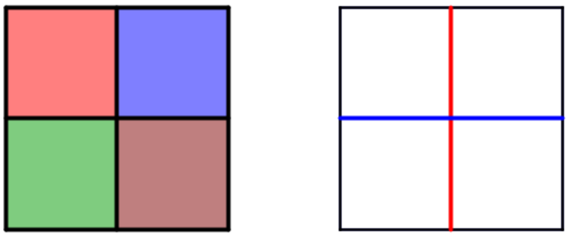


FIG. 1 FIG. 2

Figura 21. Medianas del cuadrado.

21. Ahora observa las siguientes figuras rectangulares con su mediana, ¿Es cierto que la mediana divide la superficie en partes iguales el rectángulo? ¿por qué?

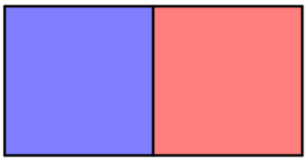


FIG. 1

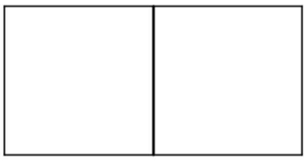


FIG. 2

Figura 22. Mediana del rectángulo.

22. Cuando se traza una la mediana en el rectángulo ¿siempre forma dos superficies cuadradas iguales o retángulares iguales?

23. Observa la figura 1 y 2, se trazaron dos medianas en cada rectángulo, ¿qué ocurrió con la superficie?


FIG. 1

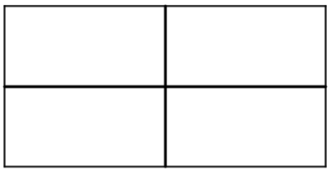


FIG. 2

Figura 23. Medianas del rectangulo.

24. Observa las figuras y contesta. Al trazar medianas y diagonales en el rectángulo, ¿siempre se forman ocho superficies triangulares iguales?

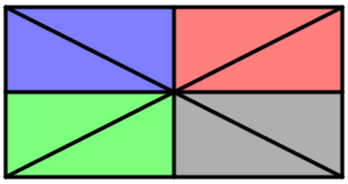


FIG. 1

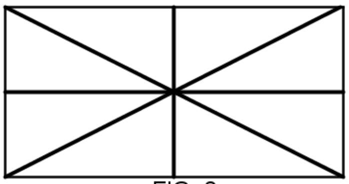


FIG. 2

Figura 24. Medianas y diagonales del rectángulo

25. Observa las figuras y contesta. Al trazar medianas y diagonales en el cuadrado, ¿siempre se forman ocho superficies triangulares iguales?


FIG. 1

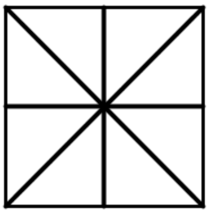


FIG. 2

Figura 25. Medianas y diagonales del cuadrado.

26. La hoja rectangular, representada en la figura 1, se quiere dividir en dos triángulos iguales. A través del doblado de papel, ¿qué doblez debo realizar mediana o diagonal?


FIG. 1

Figura 26. Representación de una hoja rectangular coloreada.

27. La siguiente hoja, representada en la figura 1, tiene dos dobleces. ¿Cúantos dobleces más debo realizar para formar ocho triángulos iguales?

FIG. 1

Figura 27. Representación de una hoja rectangular y dobleces de medianas.

28. La siguiente hoja, representada en la figura 1, tiene un doblez. ¿Cúantos dobleces más debo realizar para formar ocho triángulos de superficies iguales?

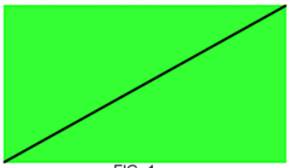


FIG. 1

Figura 28. Representación de una hoja de forma rectangular coloreada y un doblez diagonal

29. En una hoja cuadrada, representada en la figura 1, se quiere dividir en dos rectángulos de igual superficie. A través del doblado de papel, ¿qué doblez debo realizar mediana o diagonal?

FIG. 1

Figura 29. Representacion de una hoja cuadrada coloreada.

30. La siguiente hoja, representada en la figura 1, tiene dos dobleces. ¿Cúantos dobleces más debo realizar para formar cuatro cuadrados de superficies iguales?

FIG. 1

Figura 30. Representacion de una hoja cuadrada coloreada y un doblez de madiana.

31. En una hoja cuadrada, representada en la figura 1, ¿Cúantos dobleces se deben hacer a través del doblado de papel, para formar cuatro triángulos de superficies iguales?

FIG. 1

Figura 31. Representacion de una hoja coloreada.

Actividad escrita para nivel II

1. A continuación se presenta algunos triángulos, nombra aquellas figuras que son triángulos rectángulos.
2. ¿Por qué son triángulos rectángulos?

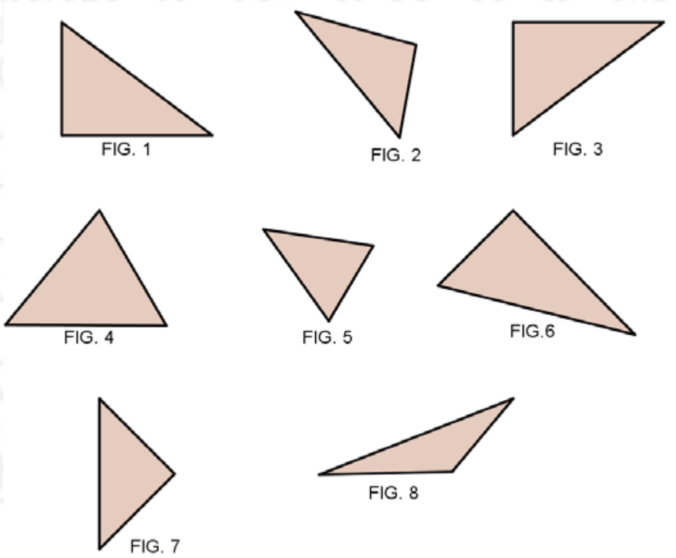


Figura 32. Reconocimiento de triángulo rectángulo.

3. Observa los siguientes triángulos rectángulos, algunos tienen dos lados iguales y otros tienen tres lados desiguales. Empareja o relaciona con una line recta o curva las figuras que correspondan al triángulo rectángulo escaleno y al triángulo rectángulos isósceles.

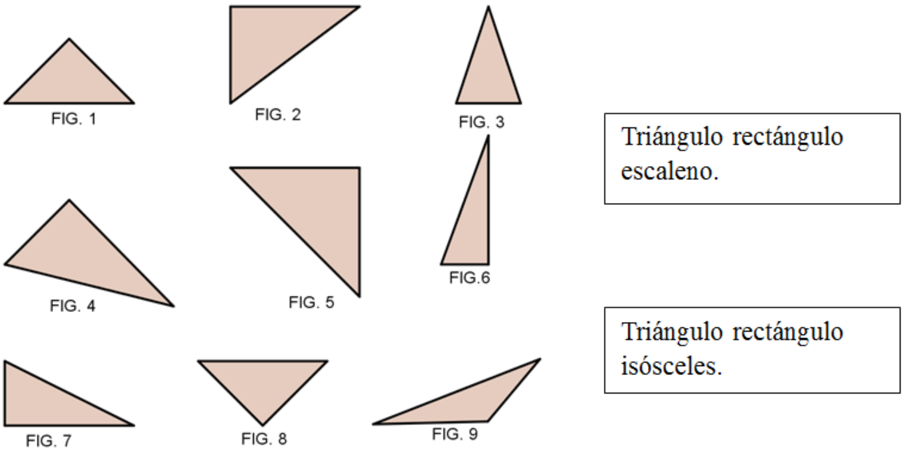


Figura 33. Relación entre los triángulos rectángulos según sus lados.

4. ¿En qué se diferencia un triángulo rectángulo escaleno y un triángulo rectángulo isósceles? ¿Qué tienen en común?

5. Se presentan 7 figuras de cuatro lados, (cuadriláteros), ¿Cuáles de ellas son cuadrados?

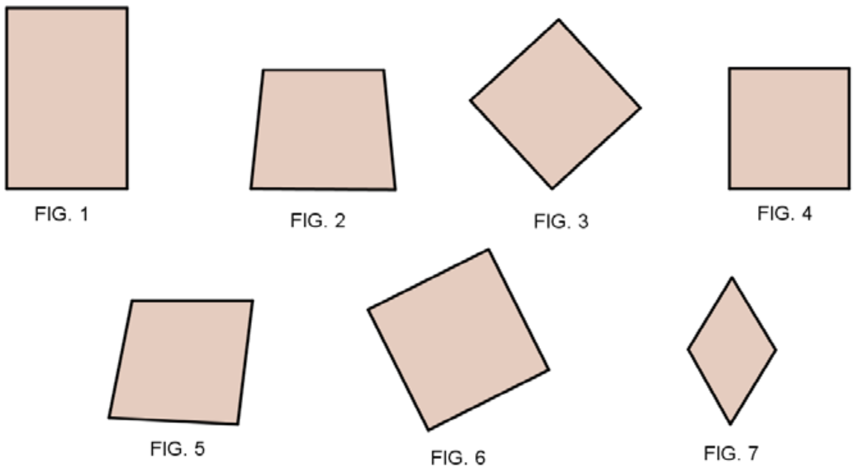


Figura 34. Reconocimientos de cuadrados entre cuadriláteros.

6. ¿Qué tienes en cuentas para reconocer un cuadrado?

7. Se presentan figuras de cuatro lados, (cuadriláteros), ¿Cuáles son rectángulo?

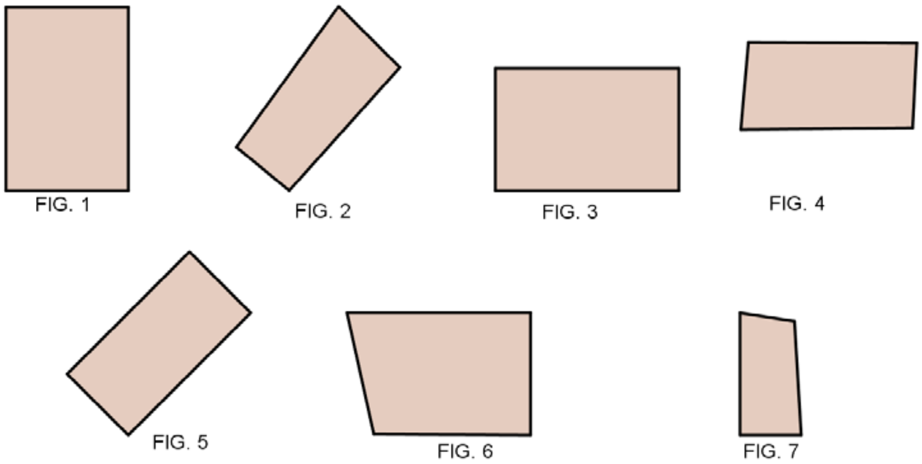


Figura 35. Reconocimientos de rectángulos entre cuadriláteros.

8. ¿Qué tienes en cuenta para reconocer un rectángulo entre otras figuras geométricas?

9. A Carlos se le ocurrió hacer dos cortes al cuadrado como muestra la primera figura, y luego reorganizó y formó la figura 1, luego, la figura 2, después, la figura 3 y por último, la figura 4.

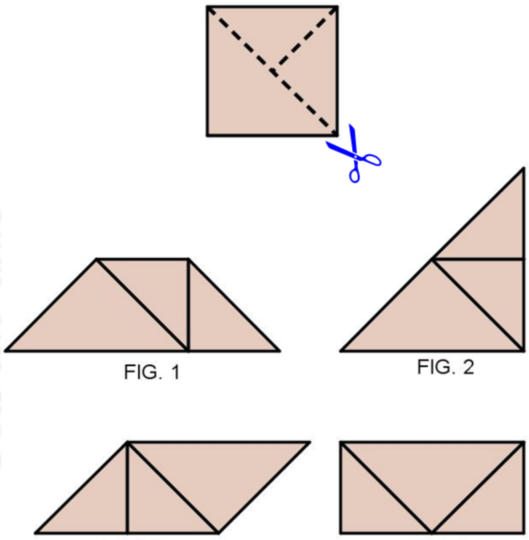


Figura 36. Comparación de áreas de figuras planas desde lo cualitativo

10. Las cuatro figuras qué formó Carlos ¿tienen superficies iguales? ¿Por qué?

11. Las figuras que formó ¿Carlos tienen igual área?, explica tu respuesta.

12. En la sigiuente imagen hay una figura sombreada inscrita en el cuadrado, haz algún procedimiento geométrico que te permita contestar la siguiente pregunta: ¿es mayor el área sombreada o el área sin sombrear? ¿Por qué?

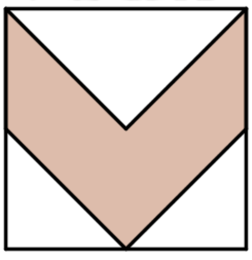


FIG. 1

Figura 37. Comparación de áreas de figuras sombreadas y no sombreada.

13. Ahora observa las tres figuras. ¿Es el área sombreada igual al área sin sombrear? ¿Por qué?

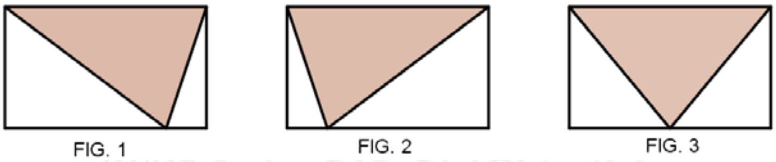


Figura 38. Comparacion de áreas de figuras sombreadas y no sombreadas.

14. En el siguiente cuadrado se trazó una diagonal.

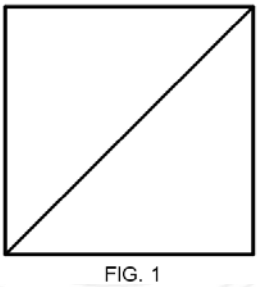


Figura 36. Diagonal del cuadrado.

15. Cuando se traza una diagonal a un cuadrado, ¿es posible generar dos triángulos rectángulos isósceles de igual área?

16. ¿Por qué?

17. En el cuadrado siguiente se trazó una diagonal al rectángulo.

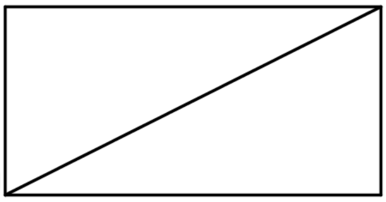


FIG. 1

Figura 39. Diagonal del rectángulo.

18. Cuando se traza una diagonal a un rectángulo, ¿es posible generar dos triángulos rectángulos escaleno de igual área?
19. ¿Por qué?

20. Dado el siguiente cuadrado, ¿construye un cuadrado de área doble que el cuadrado inicial? ¿explica cómo lo harías?

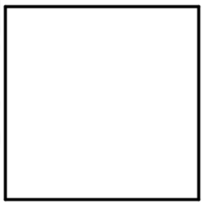


FIG. 1

Figura 40. Construcción de un cuadrado de área doble.

21. El siguiente rectángulo es el doble de área de un cuadrado, ¿Qué mediana trazarías para averiguarlo? ¿explica el procedimiento?

FIG. 1

Figura 41. Rectángulo de área doble de un cuadrado.

22. A continuación se presenta un cuadrado de la figura 1 y un rectángulo de la figura 2, averigua si el rectángulo, ¿Es el triple del cuadrado?, ¿Explica cómo lo harías?

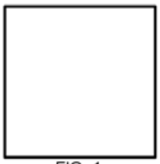


FIG. 1

FIG. 2

Figura 42. Comparación de área de un cuadrado y un rectángulo.

Actividad escrita para nivel III

1. A continuación se presentan algunos cuadrados. Construye en cada uno de ellos un cuadrado de área doble

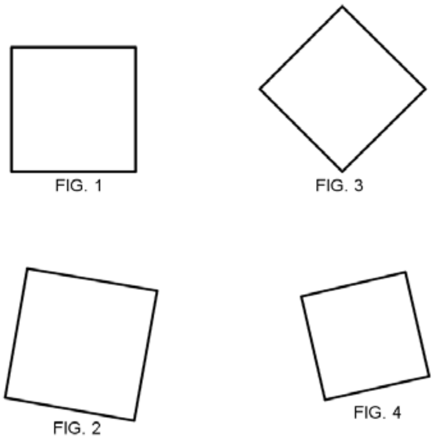


Figura 43. Construción de cuadrado de área doble al inicial.

2. Observa y compara las áreas de los cuatro cuadradados, la relación de áreas del cuadrado de la figura 1 es la mitad del cuadrado de la figura 2 y la relacion de área del cuadrado de la figura 2 es la mitad del cuadrado de la figura 3, y así sucesivamente. según lo anterior, expresa otra forma de relacionar las áreas del cuadrado de la figura 3 y el cuadrado de la figura 2?

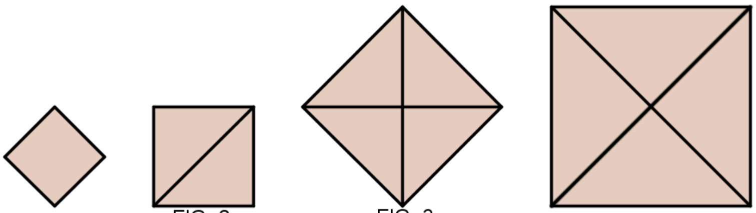


Figura 44. Secuencia de cuadrados de área doble al anterior.

3. A continuación se muestra dos cuadrados, figura 1 y 2, ¿Tienen igual área? ¿por qué?

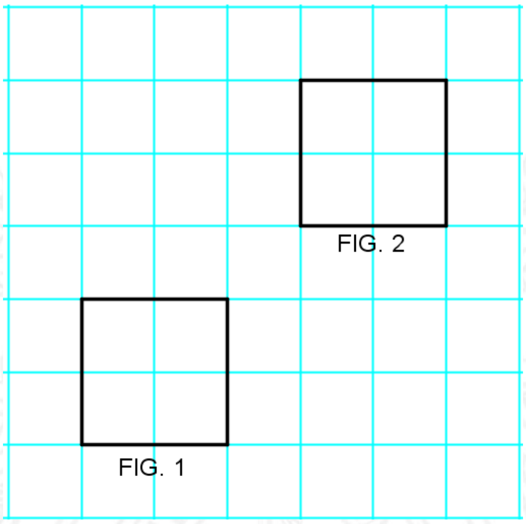


Figura 45. comparacion de áreas entre dos cuadrados congruentes.

4. Compara los siguientes cuadrados, ¿Es el área del cuadrado de la figura 2 el doble del cuadrado de la figura 1?, ¿Por qué?

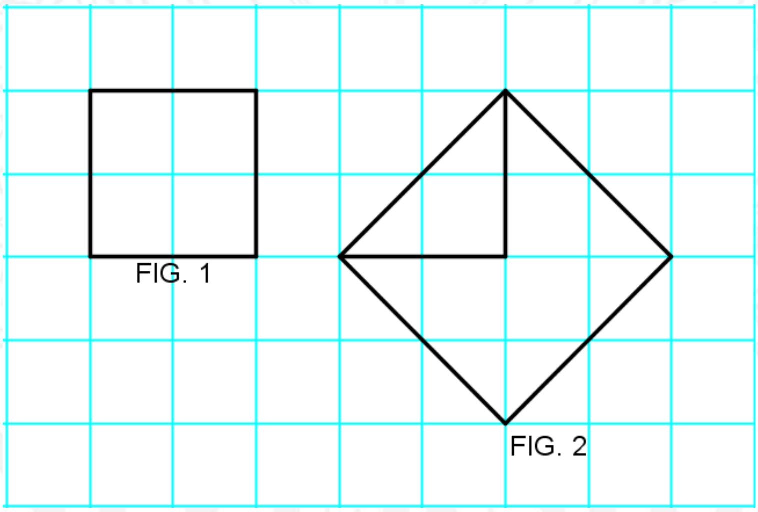


Figura 46. Comparacion de áreas entre dos cuadrados no congruentes.

5. ¿Cuántos cuadrados logras ver en la figura 1?

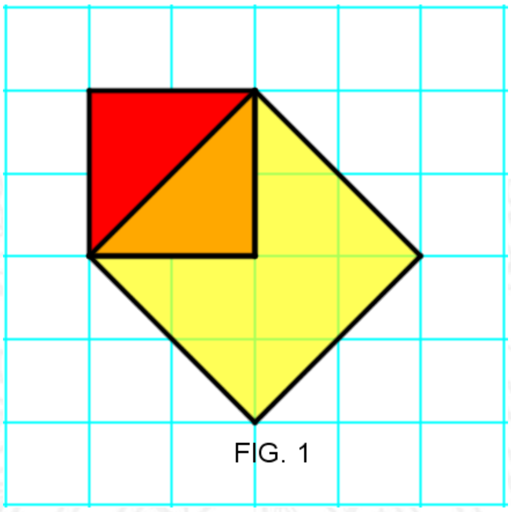


Figura 47. Identificacion de cuadrados.

6. Compara las siguientes dos figuras dadas acontinuación, ¿es el área de la figura 1 igual al área de la figura 2?

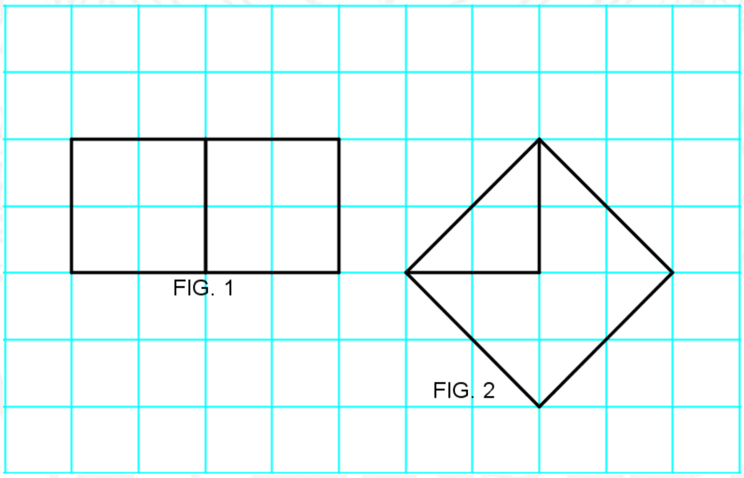


Figura 48. Comparacion de figuras planas.

7. Compara los cuadrados trazados con diagonales, ¿es igual el área de los dos cuadrados de la figura 1 y 2, con el área del cuadrado de la figura 3?

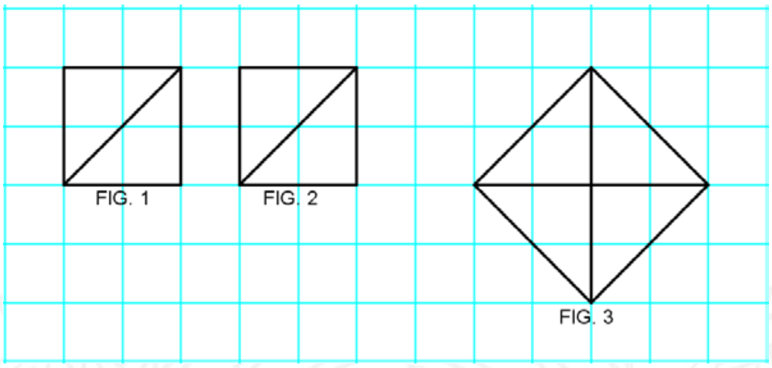


Figura 49. Relacion de área entre dos cuadrados congruentes y un cuadrado mayor a partir de diagonales.

8. Observa la siguientes figuras expresa detalladamente la secuencia del cuadrado de la figura 1 y la construción de la figura 5?

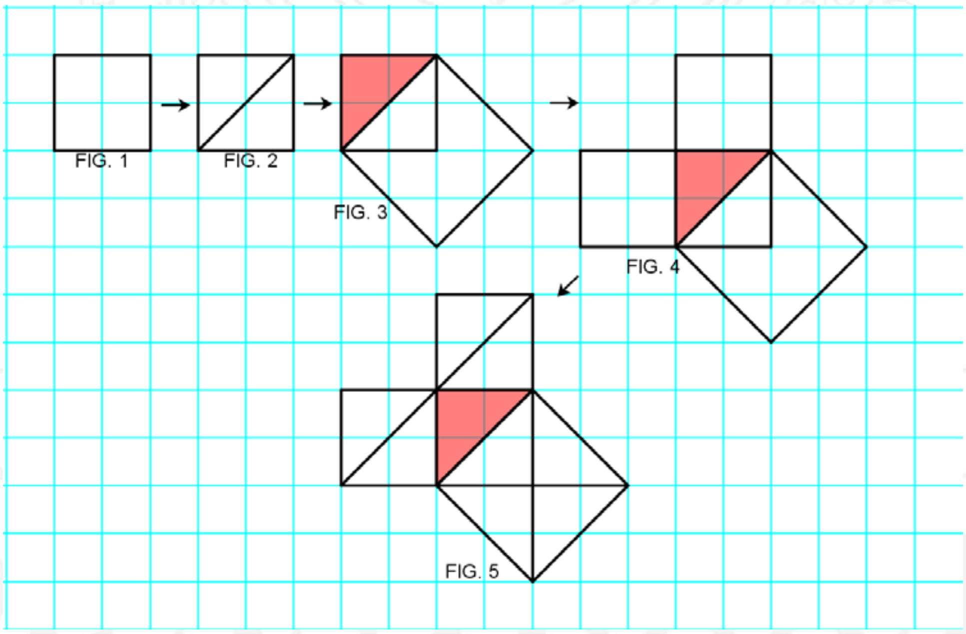


Figura 50. Secuencia de formación de tres cuadrados construidos sobre un triángulo rectángulo isósceles, a partir del área doble del cuadrado inicial, mediante un procedimiento geomértico.

9. Observa la figura a continuación, Encuentra la relación que existe entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo.

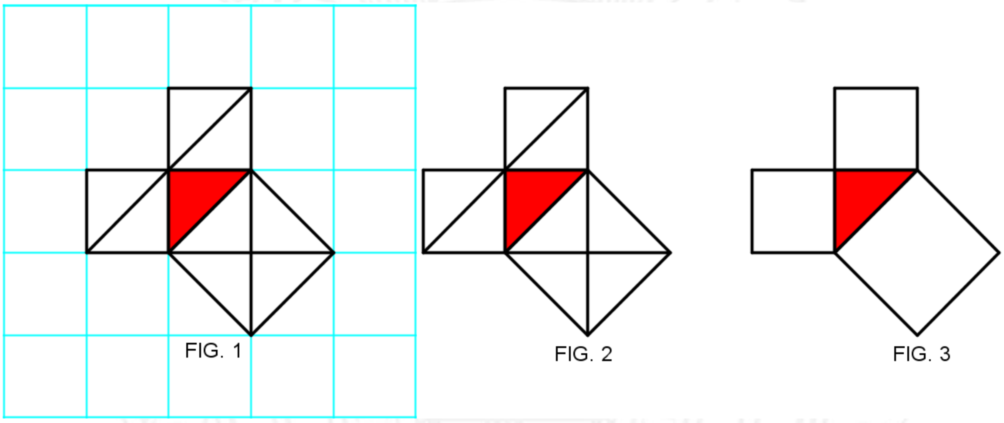


Figura 51. Relaciones de áreas de cuadrados construidos sobres un triángulo rectángulo a traves de las comparaciones de área de figuras planas.

10. Observa las dos figuras congruentes donde hay tres cuadrados construidos sobres los lados de un triángulo rectángulo. Relaciona el cuadrado de área *a* y el cuadrado de área *b* con el cuadrado de área *c* utilizando una operación matemática de suma.

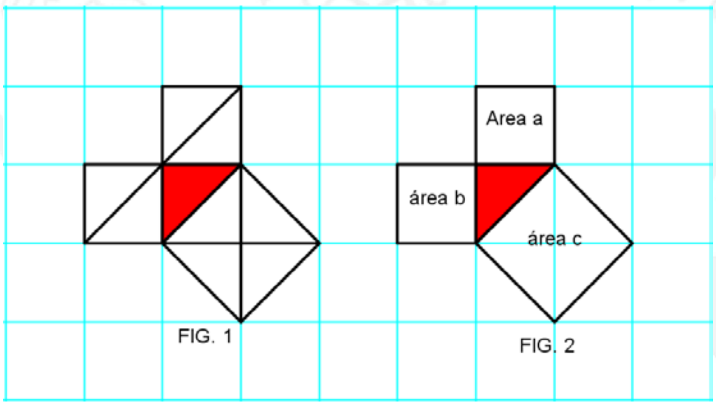


Figura 52. Aproximación del teaorema de pitágoras a traves de las comparaciones de área de figugras planas.

11. Observa las siguienetes figuras, en la figura 1 hay un triángulo rectángulo sombreado, compara y contesta, ¿Qué relación existe entre el área sombreada de la figura 1 y el cuadrado de la figura 2? Ten en cuenta el procedimiento utilizado para establecer la relación entre las áreas.

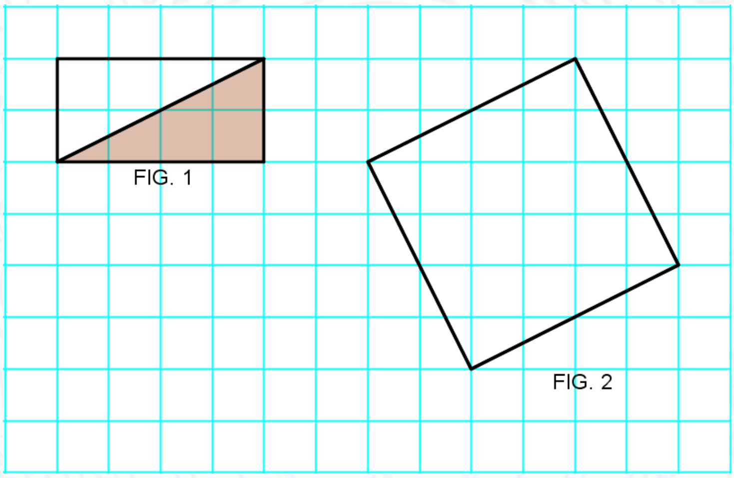


Figura 53. Comparación de un triángulo rectángulo y un cuadrado

12. Observa en la figura 1 hay un rectángulo sombreado, compara y contesta, ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo de la figura 1 y el cuadrado de la figura 2?

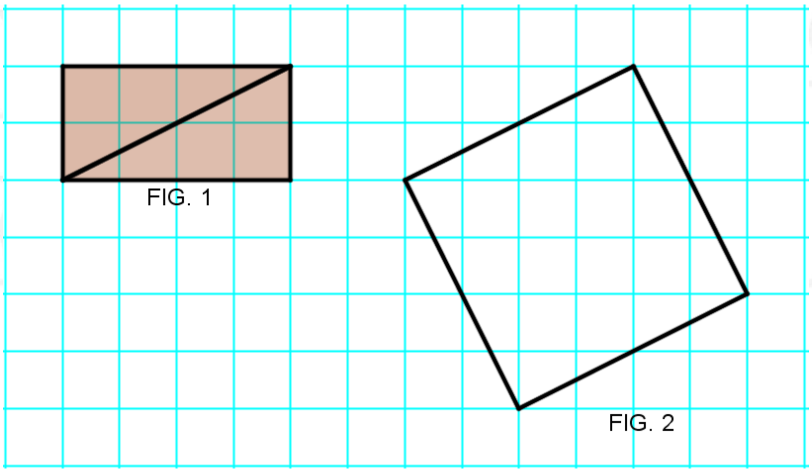


Figura 54. Comparación de un rectángulo de área doble y un cuadrado.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

13. Explica el procedimiento utilizado para establecer la relación entre las áreas

.

14. Observa las siguientes figuras, en la figura 1 hay un triángulo rectángulo sombreado, compara y contesta, ¿Qué relación hay entre las áreas del triángulo sombreado y el cuadrado de la figura 2?

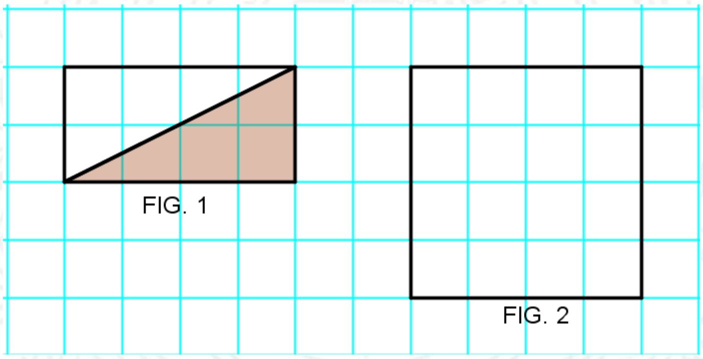


Figura 55. Comparación de un triángulo rectángulo y un cuadrado

15. ¿Explica qué procedimiento utilizaste?

16. Observa las siguientes figuras 1 y 2, en la figura 1 hay un triángulo rectángulo sombreado, compara y contesta, ¿Qué relación hay entre las áreas del triángulo rectángulo sombreado y el cuadrado de la figura 2?

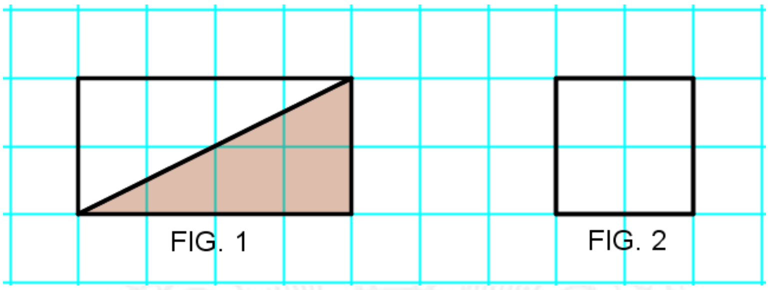


Figura 56. Comparación de un rectángulo de área doble y un cuadrado.

17. ¿Explica el procedimiento que utilizaste?

18. Ahora compara los dos cuadrados de la figura 1 y 2. ¿Qué relación hay entre las áreas del cuadrado de la figura 1 y el cuadrado de la figura 2?

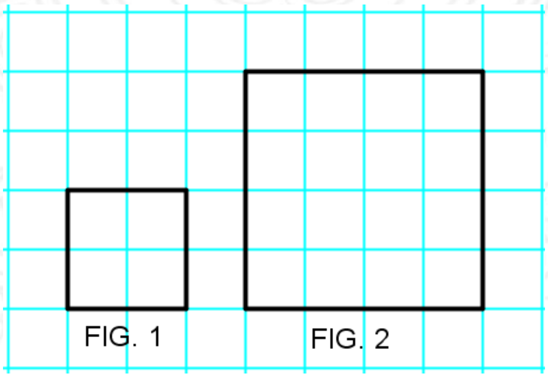


Figura 57. Comparación entre dos cuadrados.

19. ¿Explica qué procedimiento utilizaste para compararlos?

20. En las siguientes figuras hay dos cuadrados y un triángulo rectángulo, compara el área de la figura 3 y la figura 1, ¿son iguales?

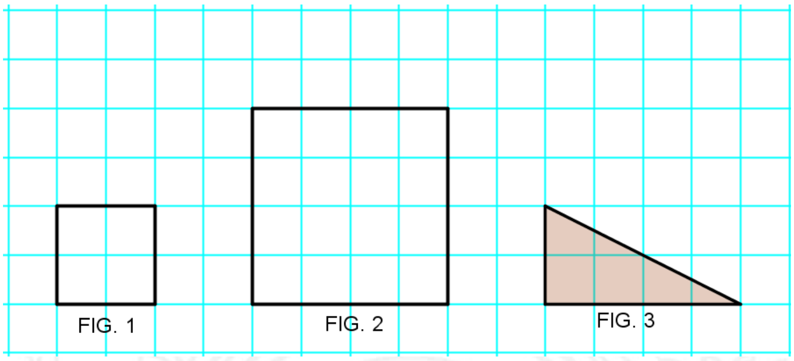


Figura 58. Comparación de áreas de un triángulo rectángulo y dos cuadrados de distintos tamaños.

21. Compara el área de la figura 3 y el área de la figura 2, ¿Cuántos triángulos congruentes de la figuras 3 puedes construir en la figura 2? Explica que procedimiento utilizaste.

22. ¿Cuántas veces cabe el triángulo rectángulo de la figura 3 en los dos cuadrados de la figura 1 y 2?

23. Si sumo las dos áreas de los cuadrados de la figura 1 y 2, puedo afirmar que es cinco veces el área del triángulo rectángulo de la figura 3? ¿Por qué?

24. Comprueba a continuación si la suma de las áreas de los dos cuadrados de la figura 1 y 2, es igual al área del cuadrado de la figura 3. ¿Qué procedimiento utilizarías mejor?

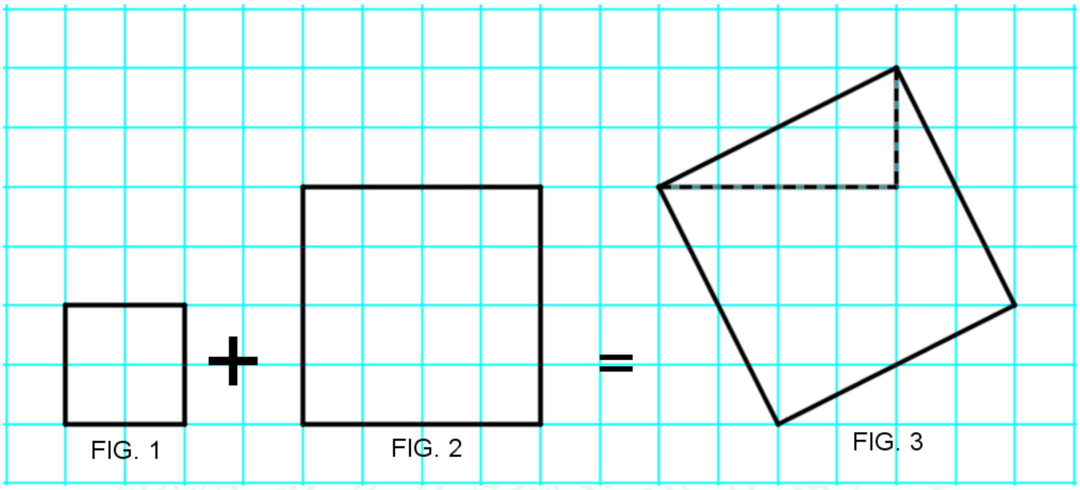


Figura 59. Relación de igualdad de áreas entre tres cuadrados.

25. Observa las siguientes figuras, expresa detalladamente la secuencia desde la figura 1 hasta la construción de la figura 6?

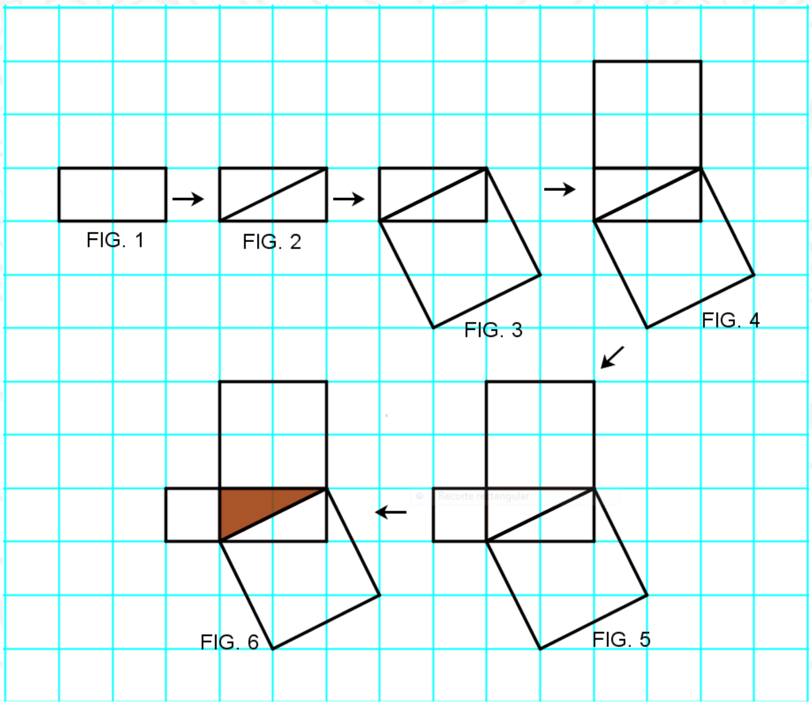


Figura 60. Secuencia de formación de tres cuadrados construidos sobre un triángulo rectángulo escaleno.

26. Observa la figura a continuación, Encuentra la relación que existen entre los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo.

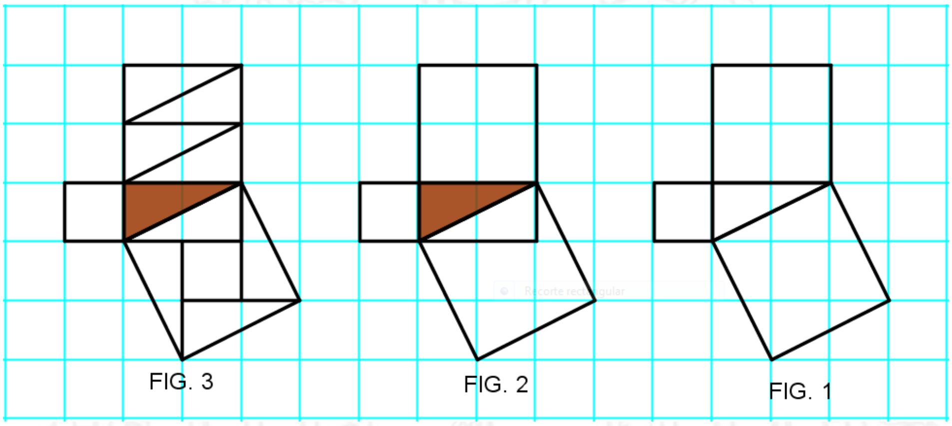


Figura 61. Relaciones de áreas de cuadrados construidos sobres un triángulo rectángulo, a traves de las comparaciones de área de figuras planas.

27. Relaciona el cuadrado de área *a* y el cuadrado de área *b* con el cuadrado de área *c* utilizando una operación matemática de suma.

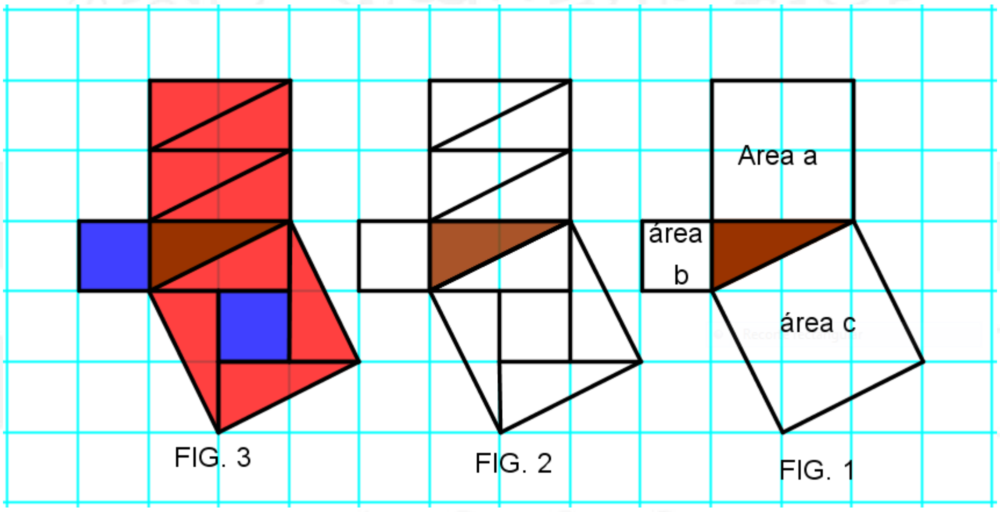


Figura 62. Aproximación del teaorema de pitágoras a traves de las comparaciones de área de figugras planas.

28. Las figuras 1 y 2 son congruentes, utiliza un procedimiento geométrico que te permita establecer si las áreas de los dos cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo de menor longitud es igual al área del cuadrado construido sobre el lado del triángulo de mayor longitud.

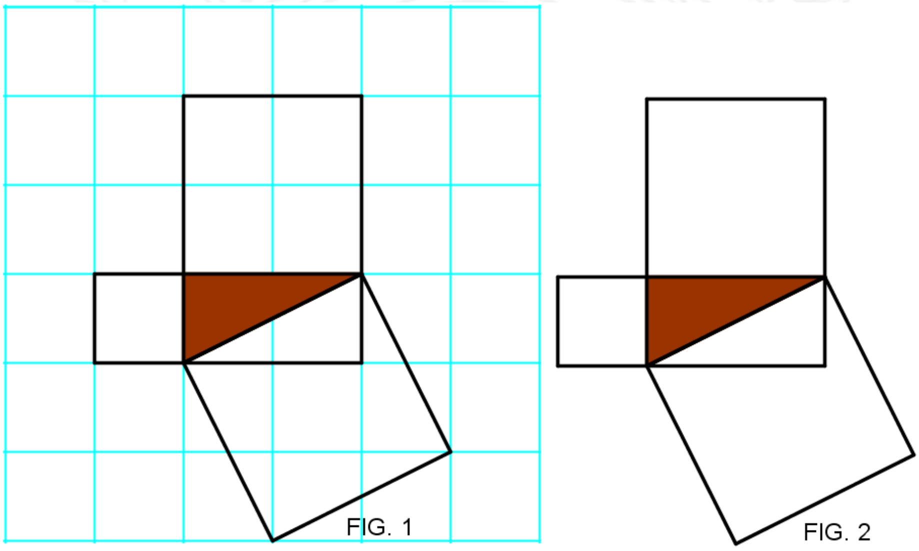


Figura 63. Comparación de áreas de tres cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo.

29. Observa las figuras 1 y 2, ¿cuál es la relación de áreas que se establecen entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo?

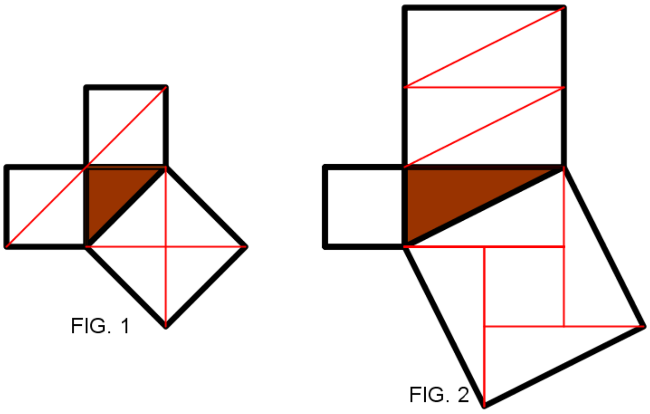


Figura 64. Comparación de áreas entre los cuadrados construidos sobre los lados de un triángulo rectángulo isósceles y escaleno.p``9´

DIVULGACIÓN DEL TRABAJO DE INVESTIGACIÓN

Durante el transcurso del trabajo de investigación se lograron realizar algunas socializaciones y producciones escritas, relacionadas con los avances de la propuesta investigativa en el campo de la educación matemática, contribuyendo con nuevas ideas. Por lo tanto, se produjeron artículos y se participó con ponencias en congresos nacionales e internacionales de matemáticas. A continuación se presenta de forma resumida la divulgación que se realizó del trabajo de investigación.

Artículos.

Durante el trabajo de investigación se publicaron dos artículos, los cuales son:

1. “Una aproximación al teorema de Pitágoras en el contexto de van Hiele”

Resumen: El propósito de nuestra investigación es determinar los descriptores de los niveles de razonamiento de los estudiantes de grado quinto, mediante un acercamiento al teorema de Pitágoras, a través del concepto de área. El estudio se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, que según los lineamientos curriculares en matemáticas del Ministerio de Educación (MEN, 1998, p. 56), describe con bastante exactitud la evolución del pensamiento desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales. En este sentido, la caracterización que buscamos retoma elementos como el lenguaje, la visualización y la entrevista socrática, para identificar en qué nivel razonan los estudiantes, además, lograr el diseño de una propuesta metodológica que les permita avanzar en su nivel de razonamiento.

Palabras clave: teorema de Pitágoras, área, niveles de van Hiele, entrevista de carácter socrático, visualización.

Estado: Publicado

Revista: Asocolme. (13 Encuentro Colombiano de matemáticas Educativa), esto se realizó en la ciudad de Medellín- Colombia. (ECME 13, 2012).

2. "Una aproximación del teorema de van Hiele en la primaria"

Resumen: Esta investigación busca caracterizar procesos de razonamiento de algunos estudiantes de 5 grado, perteneciente a una institución educativa del municipio de Apartadó. El estudio se enmarca en el modelo educativo de van Hiele, mediante la construcción de descriptores de nivel, que permiten estratificar el razonamiento que los estudiantes logran cuando se aproximan a la comprensión del teorema de Pitágoras, a través del concepto de área.

Palabras claves: teorema de Pitágoras, modelo educativo de van Hiele, conceptualización del área.

Estado: Publicado

Revista: Memorias del V Congreso Internacional de Formación y modelación en Ciencias Básicas, Medellín-Colombia, (2013). (Pág. 136 – 137)

Ponencias

A continuación se presenta un breve resumen de las ponencias, que socialicé en los avances del trabajo de investigación.

- Una aproximación al teorema de Pitágoras en el contexto de van Hiele. 13 Encuentro de Matemática Educativa- ECME 13 (2012).

- Una aproximación del teorema de Pitágoras en la primaria V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas (2013).