La Aritmética como Estrategia para el Mejoramiento de la Educación Matemática

Por

Juan Camilo Alzate Echeverri

Hernando de Jesús Mesa Gil

Asesor

Profesor Benjamín Buriticá Trujillo

Especialización en Docencia de las Matemáticas

Facultad de Educación

Universidad de Antioquia

2004

La Aritmética como herramienta para mejorar la calidad de la educación matemática.

Introducción.

A través de la historia de la humanidad el hombre siempre se ha planteado problemas importantes, problemas que se han convertido en situaciones especiales y que han marcado caminos a seguir por cada una de las disciplinas en las cuales se ha dividido la intención de alcanzar el conocimiento. De la tradición de la ilustración heredamos una idea del conocimiento como algo "objetivo", y mediante la facultad de la razón, separada nítidamente de la naturaleza, luchamos por lograr la objetividad. Según este punto de vista la razón es soberana y constituye la fuente del conocimiento. Como la razón es una facultad universal puede producirnos conocimiento objetivo e imparcial. La misión de la razón es discernir las leyes que rigen el mundo empírico de la naturaleza (Seidler 2000) .

Los filósofos no dejan de preguntarse qué es el hombre?, los genetistas se preguntan: cómo actúan las células para tomar del ADN sólo la información que necesitan?, los psicólogos cognitivos vienen preguntándose hace mucho: cómo aprende el ser humano?, los antropólogos siguen en la espera de que aparezca el eslabón perdido, quien tal vez nunca haya existido, los matemáticos a través de la modelación piensan hallar el molde perfecto para el mundo.

Todos estos problemas se particularizan aún más y se convierten en preguntas específicas las cuales han surgido desde estos grandes interrogantes. En las matemáticas hemos tenido problemas clásicos: Aquiles y la tortuga, la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo, la trisección del ángulo, el teorema de Pitágoras, el teorema de Fermat, las preguntas planteadas por el Caballero de Meré, la botella de Klein, la braquistocrona, el postulado de las paralelas, y cien más, quienes han dado la oportunidad de escarbar en esta hermosa pero a veces misteriosa ciencia.

Existen también problemas clásicos de menor complejidad y que han servido no sólo para entretener hordas de estudiantes si no también para despertar en ellos suficientes inquietudes que les permitan adentrarse un poco más en las distintas ciencias. Estos problemas sencillos pero divertidos, se convierten en herramientas especiales a las cuales pueden acceder fácilmente los docentes para generar ambientes de discusión más especiales, más profundos, los cuales se salen de las preguntas y respuestas tradicionales que siempre se encontrarán en los libros de texto.

El presente trabajo tiene la intencionalidad de generar en los docentes, de manera inicial y en los estudiantes, por transitividad del conocimiento adquirido por los docentes, una aproximación a cuatro temas específicos de las matemáticas, como son: las ternas pitagóricas, las bases numéricas y la divisibilidad. Lo anterior en lo que se refiere a la aritmética en sí, ya que el otro tema, los acertijos, como bien sabemos hacen parte del legado general de las matemáticas, y no podríamos llevarlo a ninguna de sus ramas específicas, llámense aritmética, álgebra, trigonometría, cálculo, etc.

1. Problema Objeto de Estudio

1.1 Antecedentes

Los docentes de la educación básica secundaria se encuentran enfrentados constantemente a diferentes cambios y directrices emanadas desde los ministerios de educación y desde las secretarías de educación, estas directrices tienen el objeto el tratar de mejorar la calidad intelectual de los estudiantes con el fin de lograr el que sean más competitivos, manejen mejor los temas tratados en el aula, desarrollen diferentes competencias que puedan aplicar a cualquier área y por supuesto pretenden lograr que el estudiante se convierta en un sujeto social, un sujeto que se apegue a unos parámetros previamente establecidos y que lo determinarán como un elemento constituyente de la sociedad.

Pero, ¿qué pasa con la educación matemática? Parece que hace tiempo se encontrara en un callejón sin salida, resultados en pruebas como SABER e ICFES dejan entrever que los resultados están muy lejos de satisfacer los deseos de nuestras secretarías y ministerios e incluso los de nosotros mismos. Parece que no se ha generado un aprendizaje significativo en nuestros estudiantes. Un aprendizaje es significativo cuando la nueva información se ancla y genera cambios en la estructura cognitiva del sujeto. Pero si nuestros estudiantes no pueden recordar lo enseñado, no aplican adecuadamente lo aprendido, no aportan explicaciones de los fenómenos consistentemente con el contexto, o cuando con gran dificultad trasfieren la nueva información a otros contextos diferentes de aquel que fue enseñado (Quiroz 1997), podremos decir que no están en realidad aprendiendo lo enseñado, que no les estamos enseñando a nuestros estudiantes a aprender pensando.

La nueva moda son los estándares para la educación en nuestro país, después de haber pasado por objetivos específicos, indicadores de logros y competencias. Bueno, pero qué son los estándares? “Un estándar es una proposición que puede ser utilizada para juzgar la calidad de un currículo de matemáticas o de unos métodos de evaluación. Por ello, los estándares son proposiciones acerca de lo que se valora, no es pues propiamente lo que se evalúa sino lo que se valora, lo que se tiene por valioso”. Esta definición es la propuesta por el NCTM “National Council of Teachers of Mathematics”; la cual tiene sede en Reston, Virginia, cerca de Washington.

También proponen que los estándares deben ser adquiridos para: (1) asegurar la calidad, (2) indicar metas y (3) promover el cambio.

Podríamos pensar nosotros entonces que los estándares serían la selección que hace el Ministerio de Educación del nivel del logro que considera básico para una calidad aceptable en cada grado. Necesitarían entonces de una determinación previa de los niveles de logro, y sólo entonces se puede fijar uno de esos niveles como estándar básico para cierto grupo de grados, otro para el siguiente grupo y así sucesivamente.

Dejando atrás las ambiciones gubernamentales debemos preguntarnos: ¿estamos satisfechos con el desempeño y con el resultado de nuestros estudiantes en las asignaturas que impartimos?
Si la pregunta es si, pues simplemente debemos tomar nuestras pertenencias e irnos a dar la vuelta al mundo bien sea en bicicleta o en barco, lo que nos tome más tiempo. Esto con el objeto de no hacerle más daño a los chicos. Si la respuesta es no, debemos estar muy contentos pues es la respuesta correcta, pero debemos también ponernos a trabajar en este frente de batalla y la batalla aquí no es contra los estudiantes, no, la batalla aquí es por los estudiantes y en contra de nuestros modelos de enseñanza tradicionales, los cuales no proporcionan un aprendizaje significativo, los cuales no conocen de la importancia de la Inter.-trans-disciplinariedad.

Es hora ya de desmontar nuestros viejos y mal entendidos modelos de enseñanza-aprendizaje para innovar con otros en los cuales se tome al estudiante como eje central de todos los procesos y en donde los docentes podamos llegar a convertirnos en un intermediario entre las inquietudes de los jóvenes y los conocimientos desarrollados a ese respecto por la humanidad. Esta difícil tarea nos corresponde a todos los docentes, querámoslo o no y se convierte en la posibilidad de repensar nuestra práctica docente, nuestros modelos de aprendizaje y también nos da la gran posibilidad de repensarnos a nosotros mismos como parte de la coexistencia de este planeta.

1.2. Justificación.

La aritmética puede considerarse como la madre de las matemáticas en un sentido práctico, pues el nacimiento de ésta surge desde el desarrollo de aquella, desde su conocimiento, desde su descubrimiento.

La aritmética se ha enseñado siempre de manera superflua e incipiente en nuestras escuelas. Se trabaja generalmente en los cursos de matemáticas de los grados sexto y séptimo, dando sólo unas pequeñas bases sobre la teoría de números, las cuales no tienen una continuidad adecuada y terminan siendo olvidadas rápidamente por los jóvenes estudiantes. Pero si fuéramos un poco más críticos con nosotros mismos y con el conocimiento, observaríamos la gran virtud de la aritmética, los grandes desarrollos intelectuales que pueden lograrse a través de su estudio constante y minucioso, la capacidad de abstracción que puede generarse en los sujetos a través del trabajo con ella. La verdad sobre la falta de su impartición en las escuelas se debe al desconocimiento que sobre la misma tenemos los docentes. Nuestros estudiantes no han podido profundizar en esta materia, pues los docentes no la conocen y peor aún le temen. Es algo así como una ciencia oculta, una ciencia de las tinieblas a la cual se le teme porque no se le conoce.

Si observamos libros de texto para la enseñanza de las matemáticas de hace varios años podemos darnos cuenta cómo ésta era propuesta como eje central del conocimiento matemático, pero a medida que fue pasando el tiempo, fueron introduciéndose nuevos temas, sobre todo el álgebra, la cual al tener una mayor simplicidad y periodicidad se hacía más asequible para los estudiantes, terminando por desplazar a la aritmética de su lugar de jerarquía. No es que quiera decirse que con el hecho de enseñar aritmética estaremos solucionando los problemas que han tenido y vienen teniendo los estudiantes en la comprensión matemática, no, simplemente se considera que una profundización en esta parte de la matemática, le dará a nuestros estudiantes herramientas fundamentales para el conocimiento integral de esta ciencia y le proporcionará una mirada distinta de las mismas.

Para ello se propone que los docentes sean en primera instancia quienes retornen a la aritmética, para que desempolven o renueven sus conocimientos; eso sí, llegando aquí a través de situaciones especiales y no desde un recetario común que se encuentra en cualquier libro antiguo. Llegar a la aritmética desde la experimentación y decimos esto queriendo referirnos al juego, a la modelación de situaciones cotidianas a través de la aritmética. Este trabajo es un esfuerzo en ese sentido, pues se considera que una vez el docente se sienta cautivado, atrapado, enamorado de la fina relación que existe entre las situaciones cotidianas y la aritmética, podrá entonces transmitir, transportar, compartir, reflejar, enseñar ese amor a sus estudiantes.

2. Objetivos

2.1 Objetivo General

- Proporcionar a los docentes de la básica secundaria una aproximación a la aritmética desde situaciones particulares que permitan la introducción, el mejoramiento y la profundización de temas específicos.

2.2 Objetivos Específicos

- Motivar a los docentes de la básica secundaria para que tengan un contacto más profundo con la aritmética, llevándola al salón de clases de una forma más lúdica que como hasta ahora se venía dando.
- Profundizar en diversos aspectos de la aritmética a través del trabajo con temas específicos, los cuales permitirán un mejor proceso en los niveles de abstracción y formalización.
- Reconocer en los estudiantes sus diversas potencialidades a través del trabajo con diferentes temáticas, las cuales pueden darles diferentes líneas de profundización en su educación matemática.
- Mostrar las matemáticas desde una de sus vertientes más divertidas, a través de la introducción de diversos tipos de acertijos.
- Indagar acerca del nivel de aritmética que se imparte en las instituciones escolares de enseñanza media en la ciudad.
- Reconocer la inter-trans--disciplinariedad de la aritmética en el contexto actual de la enseñanza de las ciencias.

3. Marco Teórico

3.1 Sobre el desarrollo de la aritmética.

3.1.1. Reflexión sobre los números.

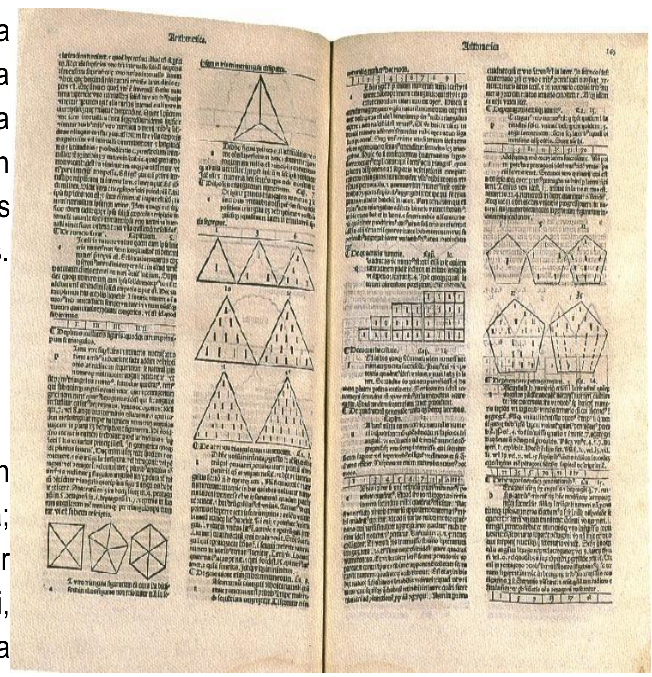
Los números, aún perteneciendo al mundo espiritual, son los constituyentes de nuestra representación del mundo físico. Cualquier cosa es, en última instancia, cantidad, número. Una línea es un cierto número de puntos unidos. Una superficie es un número de líneas unidas. Un volumen es un número de superficies unidas. Cualquier objeto es, en última instancia, un cierto número de unidades de existencia combinadas de acuerdo con las leyes de la geometría. De modo que el número es la representación más sublime de la realidad sensible. Todo lo existente es reducible a números y geometría. Detrás de cada número están las diferentes realidades físicas que ese número recoge. Y viceversa: cada realidad física puede ser sublimada en un número.

Ello mostraba que el verdadero objeto del conocimiento han de ser los números y la geometría. Y esas realidades no precisan de los sentidos para ser estudiadas. Es fatuo utilizar los sentidos para recabar información sobre el mundo. Los seguidores de Mileto habían intentado comprender los fenómenos que conocían a través de los sentidos. Primero observaban y luego trataban de explicar lo observado. Los pitagóricos, por el contrario, pretenden transferir a las cosas y a los fenómenos las cualidades de armonía y orden que preexisten en la razón. Las cosas no son como son, sino como las concibe la razón del hombre. En este sentido se ha calificado el pitagorismo como el primer racionalismo de la historia de la filosofía, porque trata de imponer a las cosas el orden de la razón.

Las elaboraciones pitagóricas responden a una maraña de ideas religiosas y matemáticas pero sin ser contrastadas en ningún momento con la observación. "El círculo y la esfera son figuras perfectas geométricamente. Por tanto, la Tierra y los cuerpos celestes deben tener forma esférica y moverse en círculos". Otro ejemplo: puesto que el 10 es un número sagrado (porque $10=1+2+3+4$), debía haber 10 cuerpos en el firmamento: la Tierra, la Luna, el Sol, los cinco planetas, la esfera de las estrellas fijas y ... como faltaba uno, no dudaron en afirmar la existencia de una Antitierra que por estar situada en las antípodas de la Tierra no es visible a los humanos.

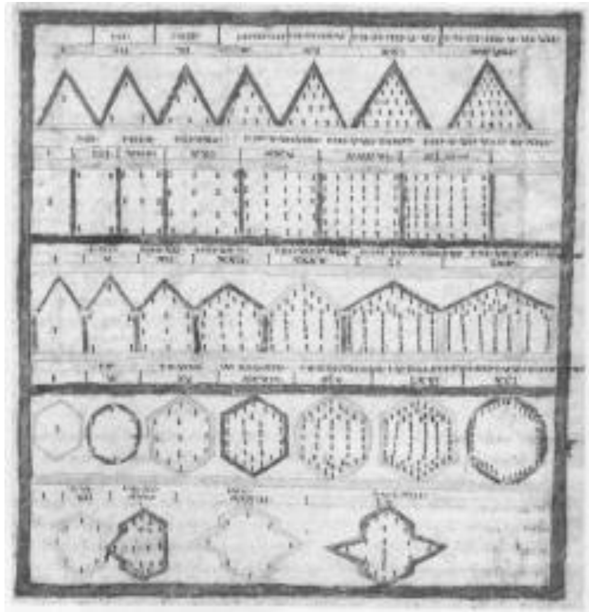
Pero se llegó a descubrir la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado. Una diagonal no mide un número decimal (i.e. racional) exacto de veces el lado. Si las líneas hubieran sido puntos unidos, la diagonal hubiera sido $d= A.p$ y el lado $l=B.p$ por lo que el cociente d/l habría sido un número racional A/B formado por la relación entre dos enteros. Si las mediciones mostraban que no era así, se caía por tierra el hecho de que cualquier línea es una sucesión de puntos y por tanto el que toda realidad material sea en última instancia cantidad o número. La diagonal era el primer caso de una realidad física que no podía ser "sublimada" en un número, ni grande ni pequeño. Ello conducía a pensar que cualquier línea no consiste en un número determinable de puntos y que por tanto es infinitamente divisible. Los puntos pitagóricos que eran los pequeños ladrillos que componían el universo, habían quedado reducidos a la nada. Quedaba rota la identidad pitagórica entre las matemáticas y el mundo físico.

El descubrimiento del carácter irracional (no expresable como fracción) de la raíz de 2 sumió a la comunidad pitagórica en una profunda crisis: incluso se afirma que la hermandad pitagórica intentó ocultar el descubrimiento. Hubo una división en la comunidad: algunos continuaron trabajando los números (la aritmética) pero desprovistos del contenido físico que habían tenido. Otros se dedicaron a estudiar las posibles aplicaciones prácticas de los números. Recibieron el desprecio de los filósofos por considerar que las aplicaciones prácticas podían ser de interés para los comerciantes fenicios pero no para los cultos griegos. Otros desecharon las matemáticas y centraron su atención en la geometría por considerarla una ciencia más capaz: la raíz de 2 admitía ser representada mediante una línea (la diagonal de un cuadrado de lado 1) mientras que no era posible su representación numérica. Por último, otra fracción desechó los aspectos numéricos de los puntos unidad de los pitagóricos y se dedicó al estudio de sus propiedades físicas. Estos últimos serían los precursores de los atomistas.



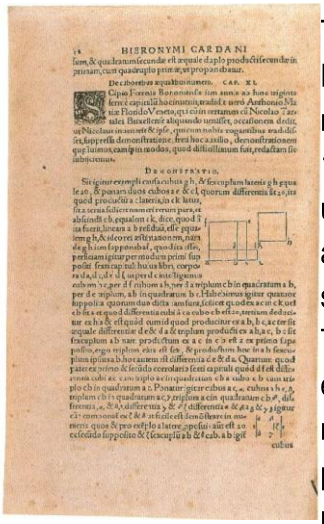
3.1.2. De la aritmética medieval al álgebra renacentista

Tras la caída del Imperio Romano de Occidente siguió un periodo, del siglo VI al XIV, oscuro para la matemática; únicamente brillaron los matemáticos del Islam y, en menor medida, algunas otras figuras, Boecio, Fibonacci, Bradwardine, Nemorario, aunque de calidad muy inferior a los griegos. Boecio era un romano de familia noble. Estudió en Atenas filosofía y matemáticas. A su regreso a Roma fue nombrado senador y sin causa aparente fue encarcelado y ejecutado en el 524 d.C. En la soledad de la cárcel escribió su obra *De consolatione philosophiae* que lo haría inmortal. Antes, sin embargo, había escrito distintas obras menores sobre aritmética, geometría, música y astronomía. Eran obras elementales fáciles de entender que fueron bastante populares en la Edad Media. Incluimos aquí un incunable de la *Opera* de Boecio del año 1492 donde podemos apreciar los números poligonales como $n(n+1)/2$ -números triangulares- y los $3n(n-1)/2$ -números pentagonales-.

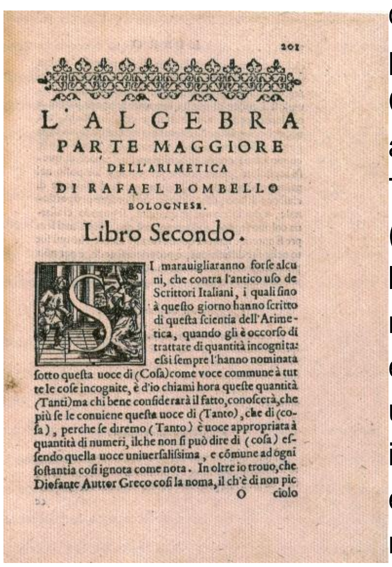


Lo más importante de este periodo fue la difusión y consolidación de nuestro actual sistema de numeración hindú-árabe, especialmente útil para las actividades comerciales. Por esto, fue en las activas repúblicas alemanas e italianas donde, ya en el Renacimiento, se produjo la mayor profusión de aritméticas: la de Francesco Pellos, Luca Paccioli, Stiefel ... Este último fue un personaje singular. Se ordenó monje en Esslingen, su ciudad natal en 1511, luego durante los años de la Reforma se convirtió en seguidor de Lutero y estudiando la Biblia comenzó a interesarse por una combinatoria numérica. Una de las anécdotas más curiosas ocurrió cuando, basado en su misticismo numérico, comenzó a predicar el fin del mundo para el 18 de octubre de 1511 estando a punto de ser linchado por sus seguidores al no ocurrir nada ese día. En 1544 después de 9 años de estudio sistemático de la Matemática publica su A*rithmetica integra* donde mejora la representación de las potencias de la incógnita en una ecuación y utiliza por primera coeficientes negativos sin embargo, incomprensiblemente, segirá ignorando las soluciones negativas de una ecuación. Podemos apreciar aquí (superior) una primera edición de la A*rithmetica integra* de Stifel donde se ve claramente el uso de los simbolos +, - y el símbolo para la raíces que ya eran usados con regularidad por aquella época, al menos en las ciudades asociadas de la Hansa, por una pléyade de maestros aritméticos en cuyas obras se desarrolló gran parte de la notación hoy habitual: el + y - para la suma y la resta, o el signo para las raíces.

Pero sin duda alguna, el mayor logro matemático del siglo XVI fue la resolución por radicales de las ecuaciones de tercer y cuarto grado. En cuatro mil años, desde que los babilonios descubrieran como resolver la de segundo grado, casi nada nuevo se había logrado en este campo. La historia de la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado tiene, además, todo el colorido de la época: intrigas, desafíos públicos, acusaciones de plagio. Sus protagonistas, Tartaglia y, sobre todo, Cardano, médico, matemático, filósofo, escritor y astrólogo, representan fielmente las miserias y virtudes del hombre renacentista.



Tartaglia - o el tartamudo como el mismo se autodenominaba- nació en 1499 o 1500. Fue autodidacta desde los 14 años, edad en la que aprendió a escribir. Luego enseñó matemáticas en Verona hasta que en 1534 se traslada a Venecia donde murió en 1557 en la misma pobreza que le acompañó toda su vida. El primero en encontrar una fórmula para resolver ciertos tipos de ecuaciones cúbicas fue Scipione del Ferro aunque no los publicó. Un discípulo suyo, Antonio Fiore se hizo con ellos años más tarde. Al mismo tiempo Tartaglia que estaba estudiando el mismo tipo de ecuaciones descubrió más casos que los que podía resolver Fiore. Todo esto concluyó en un desafío público donde ambos contrincantes, Tartaglia y Fiore, proponían una serie de problemas y el que mayor cantidad resolvía resultaba vencedor. Es fácil adivinar que Tartaglia salió airoso de semejante *duelo matemático*. Es ahí donde entra nuestro tercer personaje: Girolano Cardano. Cardano fue un médico de éxito y un reputado astrólogo - predijo incluso el día de su muerte: 21 de septiembre de 1576. !Y acertó!-. Su primera obra matemática fue *Practica Arithmeticae* (derecha) publicada en 1539 y de la que incluimos un ejemplar de la primera edición publicada en Milán. Al enterarse del gran éxito de Tartaglia contactó con el y luego de rogarle largamente para que le enseñara la fórmula este último accedió a dársela no sin antes hacerle jurar que no la haría pública pues pensaba publicarla el mismo y ganar fama y dinero. Aunque hay quien asegura que Cardano no tardó ni un minuto en romper su promesa, lo cierto es que tardó 6 años en revelar la famosa fórmula, probablemente debido, en parte, a que Tartaglia no acababa de publicarla y por tanto decide incluirla en su *Ars Magna* (izquierda) cuya primera edición de 1570 podemos admirar en la fotografía de la derecha, abierta además por la página donde Cardano introduce los números complejos a partir de un sencillo problema geométrico que dicho en el lenguaje habitual sería el siguiente: Dado un segmento de longitud 10 unidades, dividirlo en dos partes de forma que forme un rectángulo de área igual a 40 unidades cuadradas - es fácil ver que el problema se reduce a la ecuación x^2-*10x+40=0*, cuyas soluciones son complejas-. Tartaglia encajó muy mal el golpe de Cardano culminando ésto con un desafío en Milán en 1548 entre Ferrari, yerno de Cardano, y Tartaglia que casi termina en tragedia para Tartaglia según sostienen ciertos historiadores de la época y que terminó; en un ``Empate tácito".


201

L'ALGEBRA
PARTE MAGGIORE
DELL'ARIMETICA
DI RAFAEL BOMBELLO
BOLOGNESE.

Libro Secondo.

SI marauigliaranno forse alcuni, che contra l'antico uso de Scrittori Italiani, i quali fino à questo giorno hanno scritto di questa scientia dell'Arimetica, quando gli è occorso di trattare di quantità incognita: essi sempre l'hanno nominata sotto questa uoce di (Cosa) come voce commune à tutte le cose incognite, è d'io chiami hora queste quantità (Tanti) ma chi bene considerarà il fatto, conoscerà, che più se le conuiene questa uoce di (Tanto), che di (cosa), perche se diremo (Tanto) è uoce appropriata à quantità di numeri, il che non si può dire di (cosa) essendo quella uoce uniuersalissima, e cômune ad ogni sostantia cosi ignota come nota. In oltre io trouo, che Diofante Auttor Greco cosi la noma, il ch'è di non pic

O ciolo

A raíz de la polémica entre Cardano y Tartaglia, Rafael Bombelli, el último de los algebristas italianos del Renacimiento quien había leido el *Ars Magna* de Cardano a los 19 años, decidió escribir un tratado de álgebra que permitiese a cualquiera dominar el tema sin recurrir a ningún otro libro -debemos destacar que el *Ars Magna* de Cardano estaba escrito de manera muy poco clara-. Su obra *L'Algebra*, de la que presentamos un ejemplar de la segunda edición de 1579 (izquierda), contiene un tratado completo de toda el álgebra conocida en su época. En particular en su *L'Algebra* utiliza por primera vez los números complejos en una aplicación esencial: la resolución de la ecuación cúbica irreducible, o sea, la que tiene sus tres raíces reales; usando, como el mismo cuenta, una «*idea loca*» que consistía en considerar que las raíces de lo que hoy denominamos complejos conjugados tendrían que ser a su vez complejos conjugados y por tanto se podía operar con ellos formalmente aunque no existieran. !Cómo le hubiese gustado a Bombelli saber que esa ecuación es imposible de resolver por radicales sin pasar antes por el campo complejo como se demostraría dos siglos y medio después a partir de los resultados de Galois!

Para terminar este periodo de nuestra Exposición destacaremos la figura del francés François Viète, quien, junto con los algebristas italianos, es sin duda la figura cumbre del álgebra renacentista. Fue precisamente Viète quien dio el paso decisivo de distinguir simbólicamente las incógnitas de los parámetros constantes, y apuntó algo hoy habitual pero muy novedoso en aquellos tiempos: la importancia del álgebra de especies o magnitudes. Una de sus primeras obras es la que vemos aquí (izquierda). Se trata de su *Canonem mathematicum* de la cual se desconoce el lugar y fecha de edición -aunque es posible que sea de la primera-. Viète apuesta decididamente por las fracciones decimales aunque fue Stevin -quien nuevamente aparecerá en la sección dedicada al cálculo- quien difundió el uso de los decimales fuera del ámbito matemático.

3.2. Los Estándares Académicos.

Siguiendo con la reflexión que nos planteábamos en los antecedentes del presente trabajo, podríamos ampliar el tema propuesto sobre los estándares académicos, en lo que se refiere a la propuesta emanada del Ministerio de Educación Nacional. Allí se plantean los siguientes propósitos generales del currículo de matemáticas:

- Generar en todos los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas y estimular en ellos el interés por su estudio.
- Desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de la matemática, e igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas.
- Desarrollar en los estudiantes la habilidad para reconocer la presencia de las matemáticas en diversas situaciones de la vida real.
- Suministrar a los estudiantes el lenguaje apropiado que les permita comunicar de manera eficaz sus ideas y experiencias matemáticas.

- Estimular en los estudiantes el uso creativo de las matemáticas para expresar nuevas ideas y descubrimientos, así como para reconocer los elementos matemáticos presentes en otras actividades creativas.
- Retar a los estudiantes a lograr un nivel de excelencia que corresponda a su etapa de desarrollo.

El currículo de matemáticas tendrá los siguientes componentes:

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.
- Procesos matemáticos.

Rescatamos aquí la propuesta para el pensamiento numérico y sistemas numéricos por su estrecha relación con el tema a desarrollar: "En este componente del currículo, se procura que los estudiantes adquieran una comprensión sólida tanto de los números, las relaciones y operaciones que existen entre ellos, como de las diferentes maneras de representarlos".

Expresado de esta forma, parece muy vago e incluso superficial. Se ve entonces en los estándares un gran alejamiento de la educación matemática basada en la aritmética, lo cual dificultará en gran medida el desarrollo de los estudiantes hacia procesos de abstracción, generalización y formalización del pensamiento matemático.

Si revisamos uno a uno los estándares para cada grado, podremos percibir que existirá una profundización realmente limitada en el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, así:

Grado 6º
- Realiza operaciones aritméticas de manera precisa y eficiente con los números enteros, fraccionarios y decimales; utiliza la calculadora sólo para los casos más complejos.
- Comprende el sistema de numeración en base 2, sus aplicaciones en la informática y puede convertir un número en base 2 a uno en base 10 y viceversa.
- Distingue entre números racionales e irracionales y da ejemplos de ambos.
- Comprende el concepto de radicación y su relación con la potenciación.
- Entiende el concepto de proporción, conoce sus partes, propiedades, y las aplica para resolver problemas prácticos de proporcionalidad.
- Comprende los conceptos de interés simple y compuesto y puede calcularlos.

Grado 7º
- Identifica la base y el exponente de una potencia y sus propiedades.
- Multiplica y divide potencias de la misma base.

- Explica por qué un número diferente de cero, elevado al exponente cero es igual a uno.
- Interpreta las potencias con exponentes fraccionarios y negativos y realiza operaciones combinadas con ellas.

Grado 8º
- Reconoce las propiedades de los números irracionales.
- Comprende el significado y las propiedades de la recta real.

Grado 9º
- Reconoce progresiones aritméticas y sus propiedades.
- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión aritmética.
- Reconoce progresiones geométricas y sus propiedades.
- Deduce fórmulas para un término cualquiera, así como la suma de los términos de una progresión geométrica.
- Identifica fenómenos en la física, la ingeniería, la economía u otras ciencias que pueden modelarse mediante progresiones aritméticas y geométricas.

Grado 10º
- Utiliza los argumentos de la teoría de números para justificar las relaciones que involucran a todos los números reales.
- Desarrolla comprensión sobre permutaciones y combinatoria como una técnica de conteo.

Grado 11º
- Reconoce una sucesión y sus propiedades.
- Reconoce una serie y sus propiedades.

Como vemos, los estándares curriculares no "profundizan" en diversos campos de la aritmética, los cuales proporcionarían a los individuos unas mejores bases y unas mejores herramientas, las cuales repercutirían en un mejor dominio de temas subsecuentes. Además de ello, si observamos las otras líneas de "pensamiento matemático" propuestas por los estándares y revisamos cada una de ellas en cada uno de los grados del bachillerato, nos daremos cuenta que el esfuerzo del Ministerio de Educación Nacional apunta hacia otras ramas y pretende dejar relegada a nuestra querida aritmética.

No de acuerdo con esto, hacemos un esfuerzo por demostrar a través del presente trabajo, la importancia que tiene la misma en el desarrollo del pensamiento formal de los estudiantes. Las temáticas aquí expuestas pretenden guiar a los docentes hacia un "rescate" urgente y necesario de la aritmética y su enseñanza a profundidad en las Instituciones de Básica Secundaria, con el fin de lograr unos mejores resultados con nuestros estudiantes y también con el deseo ferviente de alcanzar los propósitos generales del currículo de matemáticas.

3.3. Fundamentos Pedagógicos de la Propuesta de Intervención Académica.

La propuesta que se pretende llevar a cabo radica en la exposición de una serie de temáticas relacionadas con la aritmética y con la cual se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

- Motivar a los docentes de la básica secundaria para que tengan un contacto más profundo con la aritmética, llevándola al salón de clases de una forma más lúdica que como hasta ahora se venía dando.
- Profundizar en diversos aspectos de la aritmética a través del trabajo con temas específicos, los cuales permitirán un mejor proceso en los niveles de abstracción y formalización.
- Reconocer en los estudiantes sus diversas potencialidades a través del trabajo con diferentes temáticas, las cuales pueden darles diferentes líneas de profundización en su educación matemática.
- Crear la mentalidad de que las matemáticas son para todos y cada uno de nosotros, haciendo de ellas una disciplina recreativa y divertida.

Es muy importante que el estudiante sepa de antemano los objetivos que se pretenden lograr con el trabajo a realizar, así estos objetivos planteados como tal no pueda entenderlos en primera instancia. Es difícil que un estudiante comprenda que se quiere alcanzar con él un nivel de pensamiento formal y que nos estamos basando para ello en la teoría expuesta por Jean Piaget, en donde plantea que para unas edades entre 11 y 15 años "los estudiantes estarán en capacidad de realizar operaciones mentales que pueden aplicarse a lo posible e hipotético, además de lo real, al futuro así como al presente y a afirmaciones o proposiciones puramente verbales o lógicas. Los adolescentes adquirirán un pensamiento científico, con su razonamiento hipotético-deductivo y el razonamiento lógico con su razonamiento interproposicional".

Y en donde se quiere que también adquieran unos "conceptos científicos" mediante la instrucción, la cual vendría a convertirse en una generalización de las observaciones realizadas por parte de los jóvenes, en las temáticas específicas. Estos conceptos científicos vendrán a reemplazar los conceptos previos, no formales, espontáneos pues compartirán los referentes, aunque posean en última instancia significados distintos.

No se quiere decir con esto que se pretenda que el estudiante llegue a convertirse en un acumulador de información, que su formación se convierte en algo enciclopédico. No, por el contrario, se pretende que el estudiante una vez comprenda los conceptos pueda "trabajar" con ellos de manera que pueda reformularlos, ampliarlos, extrapolarlos a otros contextos, etc. Para ello debe prestarse especial interés a los métodos y al saber qué propósito tienen, es decir, saber de dónde parte y a dónde llevan. La propuesta que se viene desarrollando hace un esfuerzo en tal sentido, y esto se ve reflejando en la forma de exposición de cada uno de las temáticas.

Los métodos tienen una orientación, una dinámica, de las cuales los resultados y teoremas aislados carecen. El estudiante será “conducido” paso a paso y con una intencionalidad a través de todo un proceso, el cual lleva a un fin (generalización). Debe entenderse que es mucho más importante para su desarrollo mental el proceso en si y no el fin alcanzado; si se hace especial énfasis en ésto, podremos encontrarnos rápidamente con estudiantes capaces de hacer diversos desarrollos en diversas ciencias, dejando de lado el carácter transmisionista de resultados de nuestra enseñanza. Este proceso, genera cambios en la estructura cognitiva del sujeto, genera un mejoramiento en su capacidad de afrontar diversas situaciones que se le presenten en la cotidianeidad, pues ésta no está llena de resultados sino de procesos.

Pero, ¿cómo llevar a cabo esos procesos para la interiorización de métodos y no de teoremas?
La respuesta no es sencilla pero podríamos basarnos en la propuesta realizada por Pozo y Postigo (1993), en donde se propone que “el docente de hoy debe de adoptar como uno de sus objetivos, ayudar a los alumnos a aprender y a hacer ciencia mediante procedimientos y estrategias que favorezcan un aprendizaje autocontrolado en el que se evidencie el manejo de competencias tales como: el análisis, la reflexión y la síntesis, las cuales consolidan la autorregulación. Se propone entonces una reorganización de los contenidos curriculares mediante una taxonomía procedimental en la cual se identifican cinco niveles taxonómicos que son:

1. Procedimientos para la adquisición de la información.
2. Procedimientos para la interpretación de la información.
3. Procedimientos para el análisis de la información y la realización de inferencias.
4. Procedimientos en la comprensión y la organización conceptual de la información.
5. Procedimientos en la comunicación de la información conceptual.

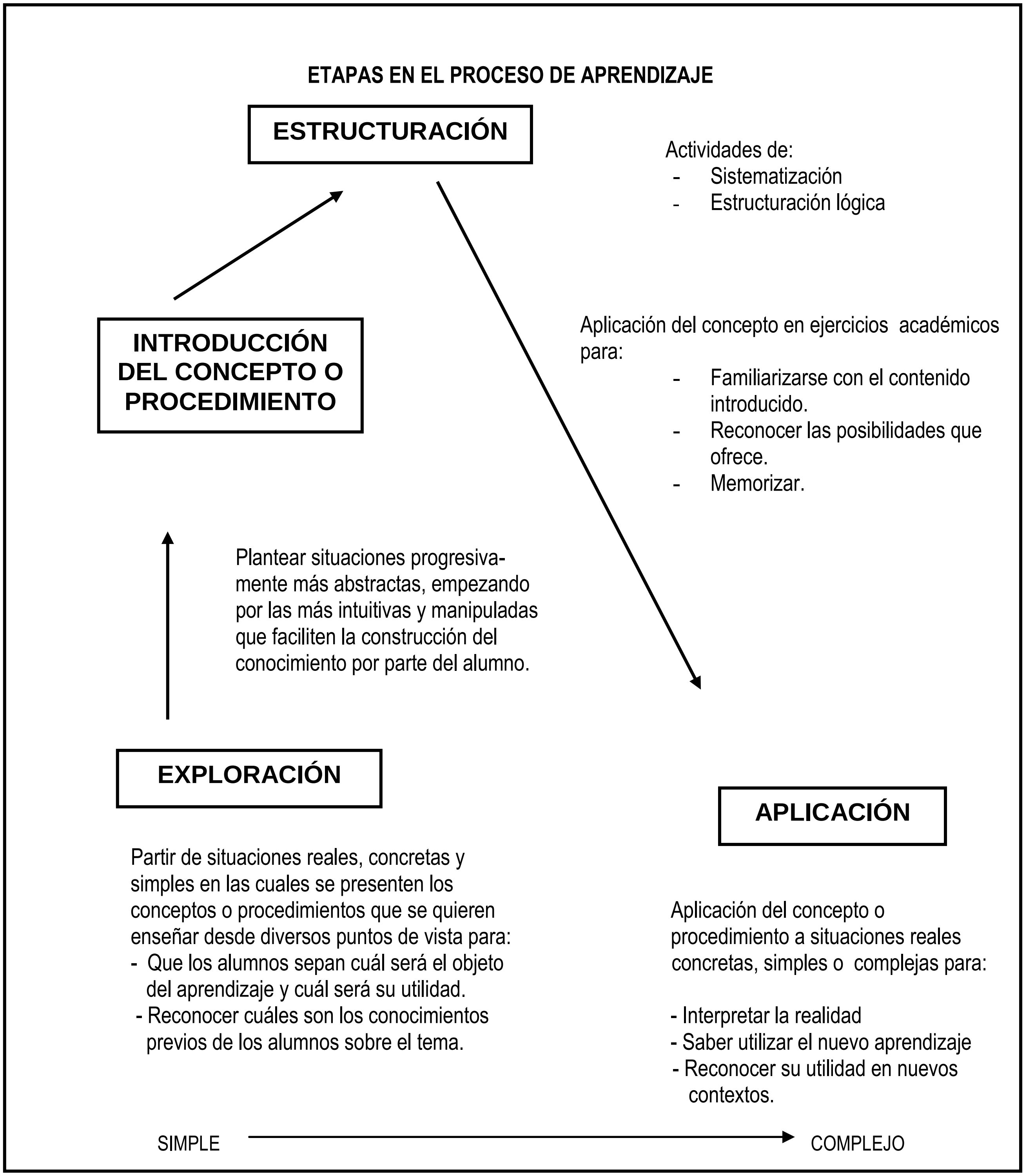
La implementación de dichos procedimientos se desarrolla mediante la aplicación de unidades didácticas que permiten establecer relaciones entre el conocimiento cotidiano y el conocimiento científico, las cuales no se deben programar como simples contenidos sino que deben atender igualmente a los medios, a la manera en que se va a enseñar y a la forma como van a ser aprendidos los nuevos conocimientos, lo que permite identificar con claridad la manera y el instante de los procesos de enseñanza y aprendizaje en el que se van a enseñar dichos procedimientos, los cuales indiscutiblemente deben tener una estrecha relación con los objetivos planteados para cada área y momento de los procesos.

Finalmente se debe tener presente que el objetivo de la unidad didáctica no es transmitir técnicas de estudio sino propiciar que los estudiantes implementen estrategias que les permitan abordar las exigencias académicas en un contexto cotidiano.

Para que dicho objetivo se cumpla “en la unidad didáctica se deben contemplar cuatro componentes esenciales los cuales son: área o áreas y contenidos curriculares, los objetivos y las habilidades cognitivas implicadas, la estrategia que pretende enseñarse, descripción de las actividades de enseñanza y aprendizaje y de la evaluación, junto con las distintas acciones, tareas y ejercicios que ejecuten el profesor y los alumnos" (Monereo y Castelló, 1998).

El modelo retomado para este trabajo sobre el diseño de una unidad didáctica es el planteado por Jorba y Sanmartí (1994), debido a que éste permite el desarrollo de aptitudes y habilidades metacognitivas. (Diagrama de la página siguiente)

La propuesta de intervención pedagógica: "La Aritmética como herramienta para mejorar la calidad de la educación matemática", presenta su mayor aporte en la etapas de exploración e introducción del concepto o procedimiento, pues es aquí, a través de situaciones especiales en donde se espera "capturar" al estudiante. Una vez "superadas" estas etapas, es tarea docente alcanzar una formalización de los conceptos mediante un trabajo que no deje de largo las etapas iniciales, si se utilizan estos referentes adecuadamente, será mucho más fácil abordar etapas como son la estructuración de los conceptos o la aplicación de los mismo a contextos diferentes.



Modelo Didáctico de Jorba Y Sanmartí

4. Desarrollo de la Propuesta de Intervención Pedagógica.

4.1. El Teorema de Pitágoras y las Ternas Pitagóricas.

4.1.1. Objetivos de la Unidad:

- Profundizar en el trabajo con el teorema de Pitágoras observando algunas demostraciones propuestas.
- Conocer algunos puzzles o rompecabezas pitagóricos con el fin de realizar actividades lúdicas al interior de las clases.
- Introducir el concepto de terna a través de la cotidianeidad del estudiante.
- Inducir al estudiante para que a través de la observación de registros ordenados (tablas) pueda llegar a realizar deducciones y generalizaciones de fórmulas matemáticas.
- Profundizar en los niveles de generalización y abstracción que se desarrollan en los estudiantes a través del trabajo, bien sea individual o colectivo.

Sugerencia: Este tema debe ser tratado después de haber introducido el teorema de Pitágoras, esperando que se haya desarrollado el tema a cabalidad. De esta forma, el trabajo expuesto aquí servirá para el reforzamiento o mejoramiento conceptual y para el estudio de los números cuadrados y triangulares, así como para el conocimiento de las relaciones que suceden al interior de las ternas pitagóricas.

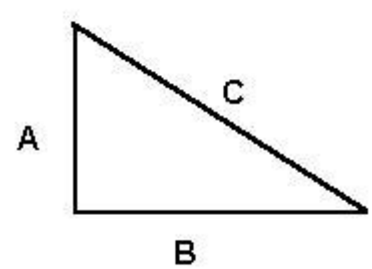
4.2. El Teorema de Pitágoras

¿Recuerdas el teorema de Pitágoras? Imagino que si. Pues tal vez sea aquello que los estudiantes recuerdan más fácilmente después de haber pasado por el bachillerato. No sé si lo hagan por su nombre o por que han trabajo mucho con él.

Pero, ¿quién fue Pitágoras?
Acaso será alguien que se convirtió en un mito por demostrar, o tal vez, sólo por divulgar algún tipo de información?

La mayoría de los estudiosos de la Historia Antigua coinciden en que Pitágoras de Samos (siglo VI a.C.) fue un hombre excepcional, reconocido por la sociedad de su tiempo. De sus discípulos sobresalieron algunos, quienes estaban fuertemente influenciados por las ideas del matemático. Encabezado por Pitágoras, este grupo de estudiosos constituyó la llamada Orden Pitagórica, que era casi una hermandad. Sus miembros compartían creencias de todo tipo y realizaban investigaciones en comunidad, celando hasta la muerte los resultados obtenidos.

Los pitagóricos hicieron grandes contribuciones en el área de las Matemáticas, atribuyendo todos los descubrimientos obtenidos a su maestro. El Teorema de Pitágoras es la principal aportación de esta Orden y establece que: "*El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos*."



$$A^2 + B^2 = C^2$$

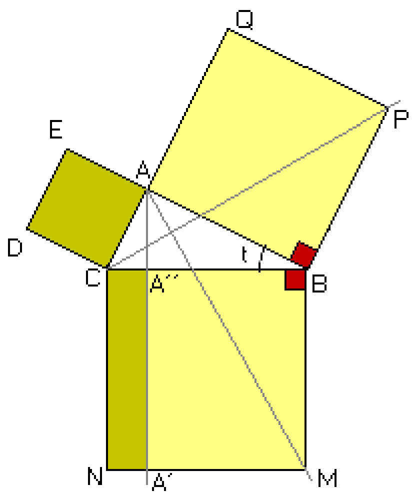
La gran mayoría de los profesores de la educación secundaria se ocupa de dar a conocer el Teorema y también de aplicarlo con el objeto de hallar algún cateto o la hipotenusa cuando se conocen los otros dos valores, pero en realidad, ¿cuánto se trabaja a cabalidad con dicho teorema? ¿cuándo nos detenemos para compartir con los estudiantes las diferentes formas que existen para demostrarlo? ¿Propiciamos actividades lúdicas alrededor de este Teorema?

Debemos entonces reflexionar frente a ello y dejar de lado las dificultades que podamos creer que existan, para trabajar de lleno en este importante tema con los estudiantes.

Existe controversia entre los matemáticos acerca de la forma en que los pitagóricos demostraron tan conocido teorema. Se sabe que existen cientos de demostraciones de este teorema, queremos compartir algunas de ellas, las cuales pueden servir de base para futuras demostraciones. Aquí están:

4.2.1. Demostraciones del Teorema de Pitágoras.

Manuscrito árabe del siglo XIII



Euclides, en el Libro I de los Elementos proposición 47 demuestra el teorema de Pitágoras: En los triángulos rectángulos el cuadrado sobre el ángulo opuesto al ángulo recto es equivalente a los cuadrados sobre los lados que forman el ángulo recto.

Prueba que el área del cuadrado NMBC es igual a la suma de las áreas de los cuadrados ABPQ y CAED.

Para ello, trazamos por A una perpendicular a CB hasta que corte a NM en A´ y que divide al cuadrado NMBC en dos rectángulos A´MBA´´ y NA´A´´C. A continuación unimos A con M y C con P.

Los triángulos MBA y CBP son iguales pues tienen el mismo ángulo B = 90 + t e iguales los lados que lo determina

(BP = AB y BM = BC)

Se verifica:

[Área triángulo MBA] = 1/2 MB.MA´ = 1/2 (MB.MA´) =

= 1/2 [Área rectángulo A´MBA´´]

Por otra parte:

[Área triángulo CBP] = 1/2 BP.QP = 1/2 (BP.QP) =

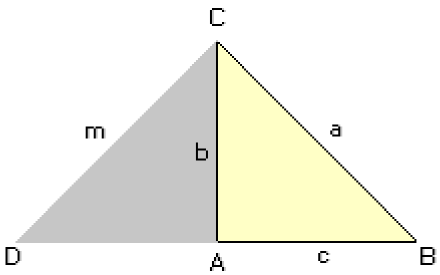
= 1/2 [Área cuadrado BPQA]

Por tanto:

[Área triángulo MBA] = [Área triángulo BPC] =

= 1/2 [Área cuadrado BPQA] = 1/2 [Área rectángulo A´MBA´´]

Es decir el cuadrado BPQA y el rectángulo A´MBA´´ son equivalentes. Análogamente demuestra que el rectángulo NA´A´´C es equivalente al cuadrado CAED.



En la proposición 48 del Libro I de los Elementos, Euclides demuestra que si el cuadrado construido sobre uno de los lados de un triángulo es equivalente a los cuadrados, juntos, de los otros dos lados, el ángulo formado por esos dos lados es recto es decir el recíproco de la Proposición 47.

(Esta es la demostración que hace Euclides en los Elementos, aunque se han adoptado algunas notaciones actualizadas). Sea el triángulo ABC y supongamos $a^2 = b^2 + c^2$

Tracemos por A una perpendicular a AC y sobre ella tomamos AD igual a AB. Unamos D con C.

Como DA = AB = c también lo serán sus cuadrados, es decir

$$DA^2 = AB^2 = c^2$$

Si sumamos b^2, tendremos

$$DA^2 + b^2 = c^2 + b^2$$

Pero

$$m^2 = DA^2 + b^2$$

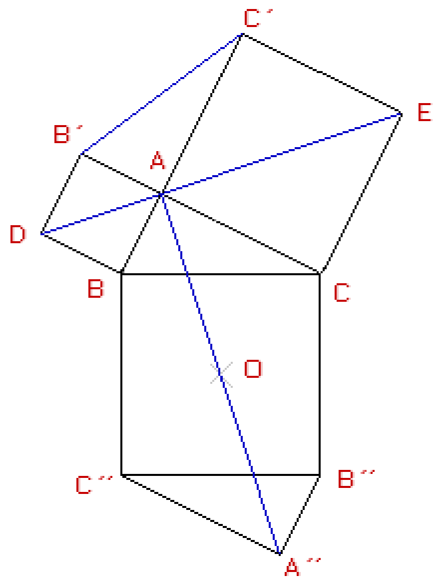
(pues DAC es recto;) y

$$a^2 = b^2 + c^2$$

(por hipótesis), luego el cuadrado sobre el lado DC (es decir m^2) es equivalente al cuadrado sobre BC (es decir a^2), por lo que el lado DC será igual al lado BC.
Puesto que DA es igual a AB y AC es común DA y y AC serán iguales a BA y AC y la base DC igual a BC por lo que el ángulo DAC será igual a BAC, y como DAC es recto, el BAC también es recto.

ὑποτείνουσα del griego ὑποτείνω:
fijar, sujetar fuertemente una cosa a otra.
κάθετος (cateto) perpendicular, línea que cae a plomo.

Observemos otras demostraciones, comprobaciones, comentarios, etc. relacionados con el teorema de Pitágoras:

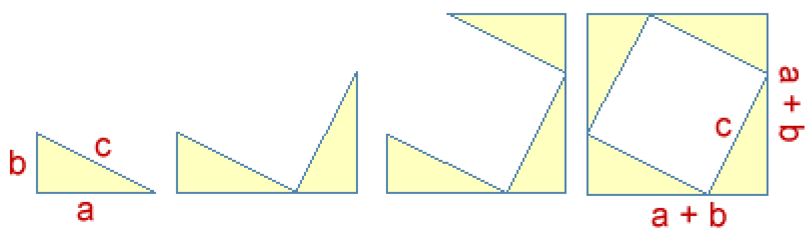


Apunte (#1). Facilitada por José Carrión.
Demostración atribuida a Leonardo da Vinci.
Siguiendo la construcción resulta que el triágulo A´´B´´C´´ es simétrico del triángulo ABC respecto al punto O centro del cuadrado mayor.

Por otra parte, los cuadriláteros ABC´´A´´ y A´´B´´CA son congruentes (tienen el mismo aspecto y área) La figura formada por los dos cuadrados menores, el triángulo ABC y su simétrico AB´C´ tiene un eje de simetría DE y se compone de dos cuadriláteros iguales DBCE y DEC´B´

Si se gira DBCE un ángulo de 90° a la derecha con centro en B y se hace coincidir con ABC´´A´´, los hexágonos BCEC´B´D y A´´B´´CABC´´ son equivalentes. Si restamos de ambos los dos triángulos que forman parte de ellos obtenemos el T. de Pitágoras.

Apunte (#2).

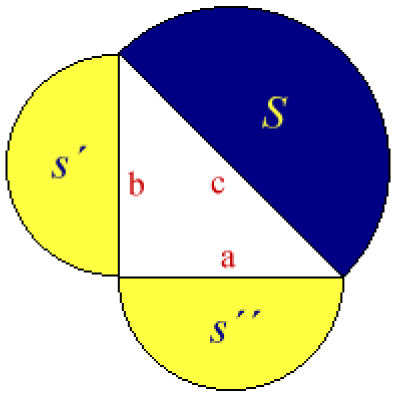


Una de las demostraciones más antiguas e intuitivas sobre el teorema de Pitágoras es la siguiente, que puede seguirse fácilmente a partir de la construcción gráfica que se muestra.

Partimos del triángulo rectángulo R cuya área es 1/2 a b. A continuación construimos un cuadrado cuyo proceso se describe en el gráfico anterior.

El lado del cuadrado así obtenido es a + b y su área $(a + b)^2$. Dicho cuadrado consta de cuatro triángulos rectángulos cuya área es $4\ (1/2\ a\ b) = 2\ a\ b$
y un cuadrado interior de lado c y área c^2.

Igualando ambas áreas tendremos: $(a + b)^2 = c^2 + 2\ a\ b$ de donde $a^2 + b^2 = c^2$.



Si las superficies S, S´ y S´´ son semejantes, entonces
Área (S) = Área (S´) + Área (S´´)

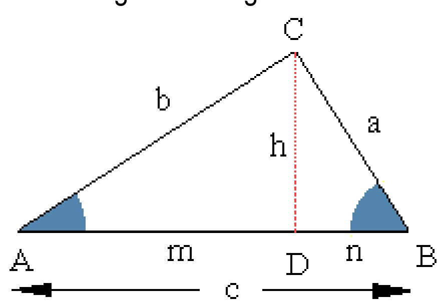
Apunte (#3). Generalización del teorema de Pitágoras.
Para los semicírculos de la figura, a partir de la expresión

$c^2 = a^2 + b^2$ multiplicando ambos miembros por $\frac{\pi}{8}$ resulta

$$\frac{\pi}{8}c^2 = \frac{\pi}{8}\left(b^2 + a^2\right) = \frac{\pi}{8}b^2 + \frac{\pi}{8}a^2$$

de donde Área (Semicírc. S) = Área (Semicírc.S´) + Área (Semicírc.S´´)

Apunte (#4). Relaciones métricas en el triángulo rectángulo.



El triángulo ABC es rectángulo en C.

Teorema del cateto:
En el triángulo ADC

$$\cos(A) = \frac{m}{b} \rightarrow b = \frac{m}{\cos(A)}$$

En el triángulo BCA

$$\operatorname{sen}(B) = \frac{b}{c} \rightarrow b = c\operatorname{sen}(B)$$

Multiplicando miembro a miembro ambas expresiones

Teorema de la altura:
En los triángulos rectángulos ADC y DBC resulta:

h = m.tag(A) h = n.tag(B)

Multiplicando miembro a miembro ambas expresiones

h^2 = m.n.tag(A).tag(B) = m.n

(pues
tag(A).tag(B) = tag(A).tag(90 - A) = 1).

Es decir:
"En todo triángulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos que determina sobre ella"

$$b^2 = \frac{m\,c\,sen\,(B)}{cos\,(A)} = \frac{m\,c\,sen\,(90-A)}{cos\,(A)} = m\,c$$ Es decir: "En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella"	

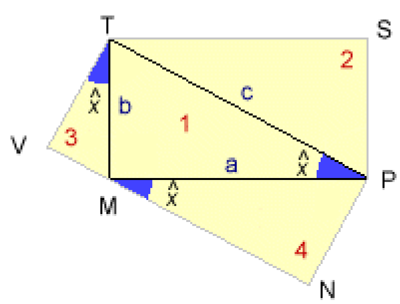
Teorema de Pitágoras:

Aplicando el teorema del coseno o ley de los cosenos (Trigonometría) a cada uno de los catetos del triángulo ABC resulta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc*cosA$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac*cosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab*cosC$$

Si el ángulo C = 90º , entonces como sabemos que: cos 90º = 0, se obtendría el Teorema de Pitágoras

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab*(0)$$
$$c^2 = a^2 + b^2$$



A partir del triángulo rectángulo MPT trazamos por M una paralela a la hipotenusa (PT) y por P y T perpendiculares a dicha paralela de forma que se determinan los triángulos rectángulos MNP y VMT. También construimos sobre la hipotenusa el triángulo rectángulo PST.

<u>Apunte (#5).</u>

En T1 resulta sen (x) = b/c y en T4 sen (x) = PN /a de donde PN = ab/c y por construcción TV = PN = ab/c

Por otra parte, en T4 cos (x) = MN/a y en T1 cos (x) = a/c de donde MN = a^2/c.

Además en T3 sen (x) = VM/b = b/c de donde VM = b^2/c

(A partir de estos datos podemos comprobar que

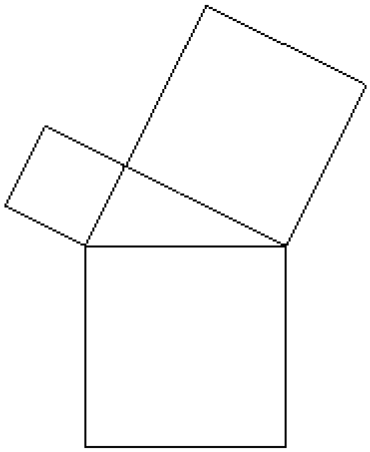
$$A_{T2} = A_{T3} + A_{T4}$$

pues los triángulos T2, T3 y T4 son semejantes; ver Apunte (#3)).

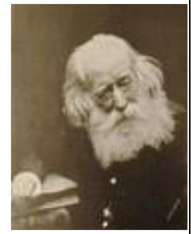
La figura así construida podemos mirarla de dos formas: formada por el rectángulo VNPT y el triángulo rectángulo T2 o bien por el rectángulo MPST y los triángulos T3 y T4.

Evidentemente: Área (VNPT) + Área (T2) = Área (MPST) + Área (T3) + Área (T4)

Calculando el área de cada una de estas composiciones, identificando y simplificando las expresión obtenida obtendremos el Teorema de Pitágoras.

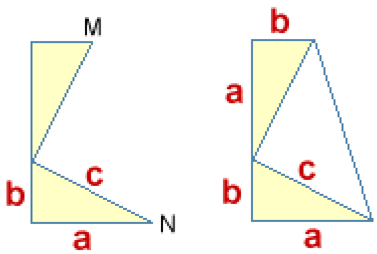


Apunte (#6). Disección de Perigal



En Wennington (Essex) está la abandonada tumba del matemático inglés Henry Perigal (1801/1898). En ella puede adivinarse la inscripción: "[...] estudioso e ingenioso geometrista. Investigó y enunció las leyes del movimiento circular compuesto. Querido y admirado por un gran número de parientes y amigos"

Se le atribuye una ingeniosa comprobación del teorema de Pitágoras. Sobre el mayor de los cuadrados construidos sobre los catetos se determina el centro (no necesariamente ha de ser este punto) y se trazan dos rectas paralela y perpendicular a la hipotenusa del triángulo. Con las cuatro piezas obtenidas más el cuadrado construido sobre el otro cateto podemos cubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa.



Apunte (#7). Una demostración del teorema de Pitágoras atribuida a J. A. Garfield (vigésimo Presidente de los EEUU)

Uniendo los puntos M y N obtenemos un trapecio cuya área es:

$$(a + b)/2 \cdot (a + b) = a^2/2 + b^2/2 + a.b$$

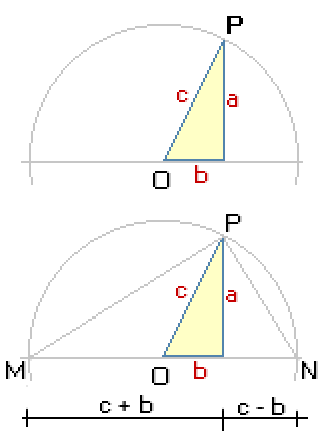
Por otra parte, dicha área es la suma de los tres triángulos rectágulos que lo determinan. Sumado dichas áreas:

$$(a.b)/2 + (a.b)/2 + c^2/2 = a.b + c^2/2$$

Igualando ambas expresiones y simplificando obtenemos que

$$a^2/2 + b^2/2 = c^2/2$$

y simplificando resulta el teorema de Pitágoras.



Apunte (#8).

Con centro en O trazamos una semicircunferencia de radio c; consideramos un punto P y a partir de él construimos el triángulo rectángulo de lados a, b y c. (Primera figura)

A continuación construimos el triángulo MNP. Dicho triángulo es rectángulo y en él la altura relativa a la hipotenusa es a.

Dicha altura determina sobre la hipotenusa los segmentos c + b y c - b. Aplicando el teorema de la altura (Apunte #4) resulta:

$$a^2 = (c + b).(c - b) = c^2 - b^2$$

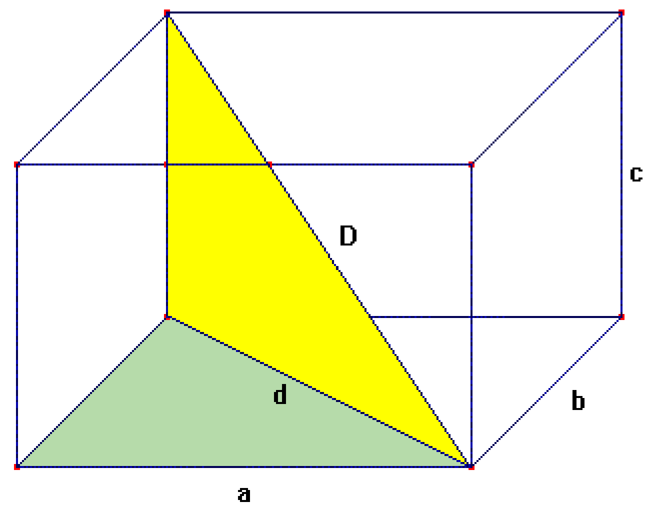
es decir $c^2 = a^2 + b^2$

Apunte (#9). El Teorema de Pitágoras en el espacio. Facilitada por José Carrión

$D^2 = c^2 + d^2$

$d^2 = a^2 + b^2$

$$\boxed{D^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$



Apunte (#10). Expresión vectorial del teorema de Pitágoras

(En lo que sigue designaremos en negrita las magnitudes vectoriales y las operaciones efectuadas respecto a un sistema de referencia ortonormal)

Dados dos vectores x e y la condición necesaria y suficiente para que dichos vectores sean ortogonales es que

$$\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$$

siendo $\| \mathbf{x} \| = +\sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ la norma del vector x.

De dicha definición de la norma resulta que $\| x \|^2 = x.x$ (es decir, la norma al cuadrado de un vector es el producto escalar del vector por él mismo).

<u>Demostración</u>

$$\| x + y \|^2 = (x + y)\,(x + y) = x \cdot x + y \cdot y + 2\, x \cdot y = \| x \|^2 + \| y \|^2 + 2\, x \cdot y$$

Luego $\mathbf{x} \perp \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \Leftrightarrow \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 = \| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2$

Apunte (#11).
Comparando cuadrados.

A partir del triángulo rectángulo inicial de hipotenusa c y catetos a y b, construimos los cuadrados de lados a + b tal como aparecen en la figura primera.

El primer cuadrado está formado por cuatro triángulos iguales (T1, T2, T3, T4) y por un cuadrado de lado c, por lo que su área es

$$c^2 + 4\,A(T)$$

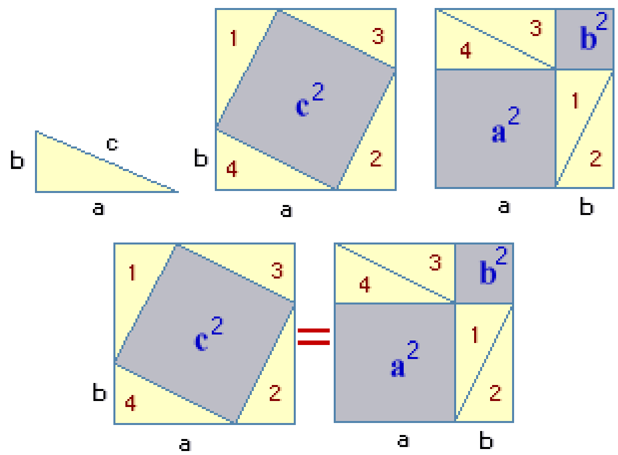
siendo A(T) el área de uno cualquiera de los triángulos.

El segundo cuadrado está formado por dos cuadrados de lados a y b y los triángulos T1, T2, T3 y T4 y su área es

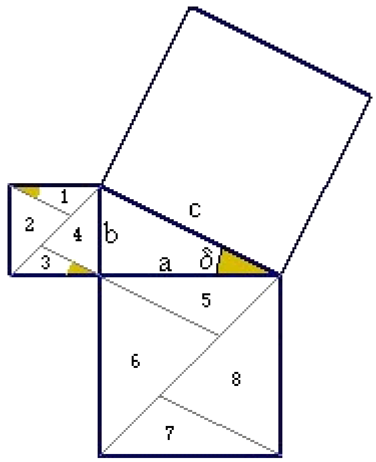
$$a^2 + b^2 + 4\,A(T)$$

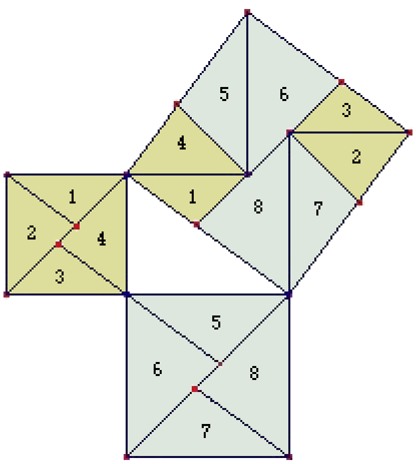
Igualando ambas expresiones y simplificando obtenemos que

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Esta es una de las más intuitivas demostraciones del teorema de Pitágoras y, posiblemente, una de las que utilizaran los pitagóricos.





Apunte (#12) Rompecabezas.

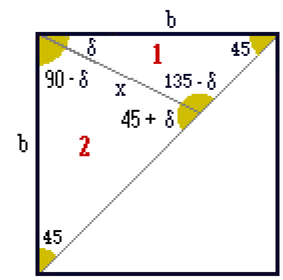
Si trazamos en cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos una diagonal y una paralela a la hipotenusa c del triángulo rectángulo obtenemos ocho triángulos con los que podemos recubrir el cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Expresemos las áreas de cada uno de estos triángulos en función de los lados a, b y c del triángulo rectángulo.

Por definición

$$\operatorname{sen}(\delta) = b/c; \quad \cos(\delta) = a/c$$

Por otra parte, debido a la igualdad de los triángulos obtenidos bastará calcular las áreas de, por ejemplo, los triángulos 1, 2, 5 y 6.



Aplicando el teorema del seno al triángulo 1 resulta

$$\frac{b}{\operatorname{sen}(135-\delta)} = \frac{x}{\operatorname{sen}(45)}$$

de donde

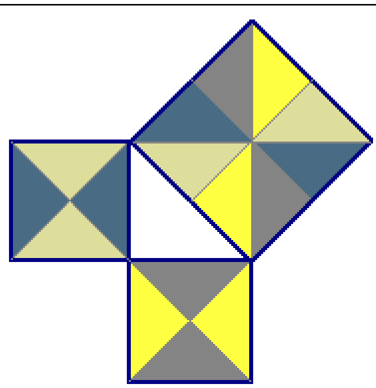
$$x = \frac{b}{\operatorname{sen}(135-\delta)} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Desarrollando sen (135 - δ) obtenemos

$$\operatorname{sen}(135-\delta) = \operatorname{sen}(135)\cos(\delta) - \operatorname{sen}(\delta)\cos(135) = \operatorname{sen}(45)\cos(\delta) + \operatorname{sen}(\delta)\cos(45)$$

es decir

$$\operatorname{sen}(135-\delta) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\right)$$



a = b

Sustituyendo en el valor de x obtenido anteriormente

$$x = \frac{b}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a+b}{c}\right)} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b\,c}{a+b}$$

y el área del triángulo 1 es

$$A_1 = \frac{1}{2} b\, x \operatorname{sen}(\delta) = \frac{1}{2} b \frac{b\,c}{a+b} \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \frac{b^3}{a+b}$$

El área del triángulo 2 es

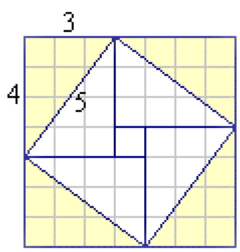
$$A_2 = \frac{1}{2} b \, x \operatorname{sen}(90 - \delta) = \frac{1}{2} b \, x \cos(\delta) = \frac{1}{2} \frac{a b^2}{a+b}$$

Análogamente resulta:

$$A_5 = \frac{1}{2} \frac{a^2 b}{a+b} \qquad A_6 = \frac{1}{2} \frac{a^3}{a+b}$$

Puede comprobarse que

$$\sum_{i=1}^{8} A_i = a^2 + b^2 = c^2$$

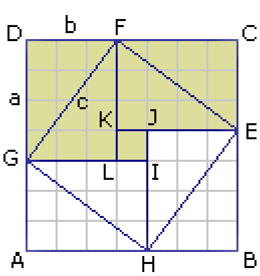


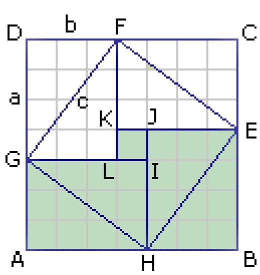
Apunte (#13) Kou ku.

Uno de los primeros libros chinos dedicados a la matemática y la astronomía es el Chou Pei (aprox. 300 a.C.). En él se hece referencia al teorema de Pitágoras (kou ku) mediante una comprobación.

A partir de la figura, un cuadrado de lado 7, si retiramos los cuatro triángulos de las esquinas (dos rectángulos de área total 2 ×(3 × 4) = 24 unidades cuadradas) queda un cuadrado de lado 25 unidades cuadradas. Por lo tanto su lado es 5.
Entonces

$$(3 + 4)^2 - 2 \times (3 \times 4) = 3^2 + 4^2 = 5^2$$

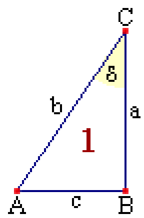


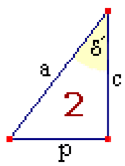


Durante el siglo III esta comprobación fue fundamentada por varios matemáticos chinos. Una de ellas es la siguiente.

Si el lado más corto (kou) es a, el más largo (ku) es b y la diagonal (shian) es c resulta:

$$c^2 = \text{área(GHEF)} = \text{área(LIJK)} + 2 \times (a \times b) =$$
$$= \text{área(LIJK)} + \text{área(GLFD)} + \text{área(KECF)} =$$
$$= \text{área(APLG)} + \text{área(PBEK)} = a^2 + b^2$$





$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Apunte (#14) Triángulos rectángulos en la proporción áurea
Supongamos un triángulo rectángulo ABC y a partir de él construimos otro triángulo rectángulo tomando como hipotenusa el cateto mayor del dado y como cateto mayor el cateto menor del triángulo rectángulo considerado. Impongamos la condición de que ambos tengan los mismos ángulos.
Entonces ambos triángulos rectángulos serán semejantes y se verificará

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{c} = \frac{c}{p} = R \qquad (\#1)$$

Determinando R

Puesto que el triángulo 2 ha de ser rectángulo

$$a^2 = c^2 + p^2$$

y de (#1)

$$c^2R^2 = c^2 + \left(\frac{c}{R}\right)^2 \Rightarrow R^4 = R^2 + 1 \Rightarrow R^4 - R^2 - 1 = 0$$

Mediante el cambio de variable $R^2 = t$ resulta $t^2 - t - 1 = 0$ cuyas soluciones son $t_1 = \Phi$; $t_2 = 1 - \Phi$ siendo Φ el número áureo.
Entonces

$$R_1 = \pm\sqrt{\Phi};\ R_2 = \pm\sqrt{1-\Phi}$$

Por la naturaleza del problema consideramos $R = R_1 = \sqrt{\Phi}$

Supongamos $b = k_0 > 0$.
De (#1) tendremos

$$k_0 = aR \Rightarrow a = \frac{k_0}{R} = \frac{k_0}{\sqrt{\Phi}}$$

$$c = \frac{a}{R} = \frac{k_0}{\Phi}$$

de donde

$$a^2 + c^2 = \left(\frac{k_0}{\sqrt{\Phi}}\right)^2 + \left(\frac{k_0}{\Phi}\right)^2 = k_0^2\,\frac{1+\Phi}{\Phi^2} = k_0^2 = b^2$$

Los triángulos de la forma

$$(c, a, b) = \left(\frac{k_0}{\Phi}, \frac{k_0}{\sqrt{\Phi}}, k_0\right)$$

son triángulos rectángulos.

Valor del ángulo δ
En el triángulo 1

$$\operatorname{tag}(\delta)=\frac{c}{a}=\frac{1}{\sqrt{\Phi}} \Rightarrow \delta=\operatorname{arc\ tag}\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi}}\right) \cong 38°\,10'\,21.747''$$

independientemente del valor de b = k_0

Nuevamente de (#1) resulta $p=\frac{c}{R}=\frac{k_0}{\Phi\sqrt{\Phi}}$ por lo que

$$c^2+p^2=\left(\frac{k_0}{\Phi}\right)^2+\left(\frac{k_0}{\Phi\sqrt{\Phi}}\right)^2=$$

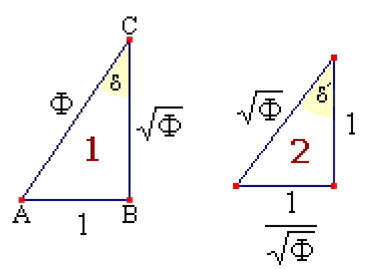
$$={k_0}^2\,\frac{\Phi+1}{\Phi^3}=\frac{{k_0}^2}{\Phi}=a^2$$

También los triángulos de la forma

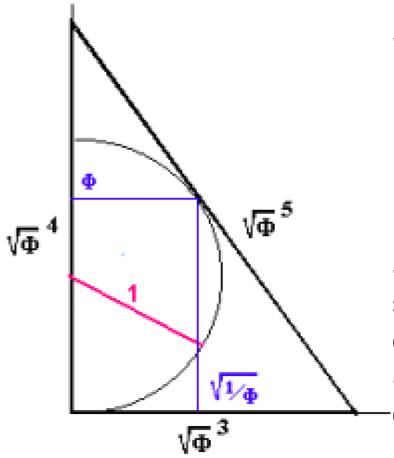
$$(p,c,a)=\left(\frac{k_0}{\Phi\sqrt{\Phi}},\frac{k_0}{\Phi},\frac{k_0}{\sqrt{\Phi}}\right)$$

son rectángulos, tienen los mismos ángulos que los anteriores y están con ellos en la proporción 1/R.

Si k_0 = Φ los triángulos rectángulos $(c,a,b)=\left(1,\sqrt{\Phi},\Phi\right)$ y $(p,c,a)=\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi}},1,\sqrt{\Phi}\right)$ son semejantes y están en la proporción 1/R.



En el Apunte #14 se hace un estudio interesante sobre el triángulo rectángulo cuyos lados toman los valores $\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi}},1,\sqrt{\Phi}\right)$ donde Φ representa el número áureo.
Donde aparece el número áureo siempre hay sorpresas en forma de relaciones con cierta belleza. Es un número que por sí solo puede sostener una publicación. Un ejemplo es este triángulo.
Puede agregarse alguna consideración que aumenta la fascinación de este triángulo (o sus semejantes).



Si multiplicamos los lados por Φ^2, podemos escribir la terna como

$$\left(\sqrt{\Phi}^3, \sqrt{\Phi}^4, \sqrt{\Phi}^5\right)$$

Una forma en que los exponentes nos recuerdan definitivamente a la más famosa terna de los triángulos rectángulos, (3, 4, 5)
Esto admite la siguiente consideración:
Si nos proponemos encontrar el triángulo rectángulo cuyo cateto mayor sea la media aritmética entre la hipotenusa y el otro cateto encontramos el familiar (3, 4, 5) o semejantes.
Si el propósito es idéntico, pero con la media geométrica, encontramos éste.

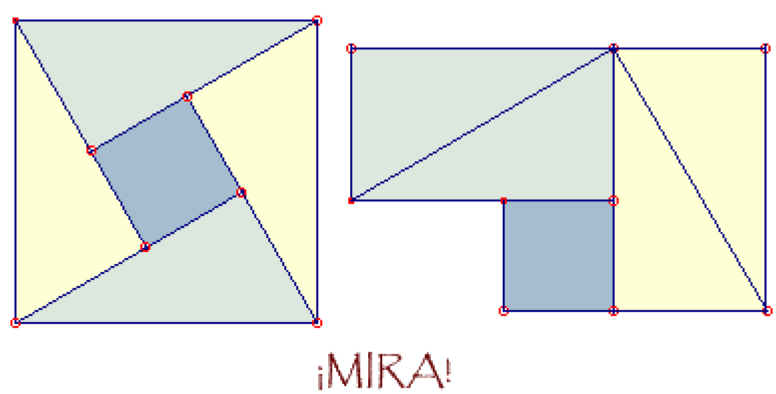
Una aparición geométrica:
Sobre el primer cuadrante de unas coordenadas cartesianas trazamos el semicírculo de radio unidad y centro en eje Y distante la unidad del centro. Por supuesto resulta tangente al eje X. Este semicírculo admite infinitas tangentes, de las cuales las que se tracen "por arriba" es decir con pendiente negativa se cortan con ambos ejes. La longitud del segmento determinado por estos cortes dependen del punto de tangencia. Pueden tener cualquier longitud por encima de cierto valor, es decir existe una que es mínima.

El triángulo formado por el origen de coordenadas y los cortes en los ejes, forman un triángulo rectángulo que se corresponde exactamente con la terna propuesta arriba. El número Φ aparece también en las coordenadas del punto de tangencia....
El triangulo superior, por encima de la ordenada Φ se corresponde con la primera terna aquí mencionada:
$\left(\frac{1}{\sqrt{\Phi}}, 1, \sqrt{\Phi}\right)$... y si seguimos mirando: más cosas

El matemático indio Bhaskara hizo una reconstrucción del teorema de Pitágoras a la que sólo le añadió la palabra ¡MIRA! de forma que a partir de la observación de la figura se pudiera reconstruir el teorema. Esta reconstrucción aparece en su obra VijaGanita (en la que por primera vez aparece la división de un número (distinto de 0) por cero.

Su obra Lilavati contiene varios problemas relacionados con el teorema de Pitágoras como los siguientes:

Apunte (#15) Bhaskara (1114-1185)



4.3. Ternas pitagóricas

¿Qué es una terna?
Podríamos decir sencillamente que una terna es una agrupación de tres elementos, tres monedas, tres cartas, tres personas, harían una terna. Hay ternas famosas como lo son: la santísima trinidad (padre, hijo y espíritu santo), el triatlón (natación, ciclismo y atletismo), los tres chiflados, etc.

¿Por qué será que tres elementos son tan representativos?, todo tiene que ver con la magia del número 3. La tendencia para asociar este número 3 con lo elevado se remonta a la antigüedad. Miremos la opinión de los Pitagóricos frente a los números: el número 1 no era un número, es la fuente, el origen mismo de los números ya que todos ellos entran dentro de su concepto, todo se reduce a ella, así, la dualidad es una dualidad, la trinidad una trinidad y la tetraktys, un conjunto de números, el número dos representa la dualidad, la diferencia, este es el primer número femenino, soluble y terrenal, el número tres es un número masculino, celestial e indisoluble. Este número es especial para los pitagóricos, es el primer número perfecto, en él están contenidos la dualidad y la unidad, Aristóteles en su obra De Coelo, escribe:

Lo corpóreo no tiene, fuera del número tres, ninguna otra magnitud; por eso los pitagóricos dicen que todo se determina por medio de la trinidad, pues el principio, el medio y el fin son el número del todo, que es el número tres.

La mitología griega nos cuenta sobre las Tres Gracias. Neptuno lleva un tridente que lo identifica como su símbolo, y el Oráculo en Delfos se colocaba ante un trípode. Los hechizos y juramentos, se repiten comúnmente tres veces. Los mayas disponían de 3 calendarios (lunar, solar y venusino). El número 3 también aparece frecuentemente en las leyendas: hay tres deseos, tres adivinanzas y tres acertijos.

Ya que sabes algo más sobre el número tres, te invitamos a observar el siguiente juego que te llevará a conocer las famosas ternas pitagóricas,

Juguemos:

A. Toma dos fracciones cuyo producto sea 2.
B. Súmale 2 a ambas fracciones.
C. Divide una fracción entre otra, no importa cómo.
D. Eleva el numerador al cuadrado y súmale el denominador al cuadrado.
E. Saca la raíz cuadrada del resultado.
F. Te darás cuenta que es un número entero y podrás concluir que:
G. El numerador al cuadrado más el denominador al cuadrado te darán un número cuadrado, o sea que:

$$x^2+y^2=z^2$$

Para los pitagóricos, toda tríada de números enteros positivos (x,, y, z) que hiciera verdadera la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, era llamada una terna pitagórica.

Algunos ejemplos de ellas pueden ser:

(3,4,5) (6,8,10) (9,12,15) (7,24,25) (12,16,20) (20,21,29)

Pero comprobemos lo anterior a través de un sencillo ejemplo:

A. Toma dos fracciones cuyo producto sea 2:

7/5 y 10/7

B. Súmale 2 a ambas fracciones:

17/5 y 24/7

C. Divide ambas fracciones:

119/120 o 120/119

D. Eleva el numerador al cuadrado y súmale el denominador al cuadrado:

$(119)^2 + (120)^2 = 14161 + 14400 = 28561$

E. Saca la raíz cuadrada del resultado:

✰(28561) = 169

F. CONCLUSION:

$(119)^2 + (120)^2 = (169)^2$ LA CUAL ES UNA TERNA PITAGÓRICA ! (119, 120, 169)

Pero, ¿cómo podemos demostrar esto?

Reemplaza los números que diste en el ejemplo, por letras y sigue el mismo procedimiento que realizaste, vamos, anímate:

A. Sean a/b y 2b/a las fracciones en cuestión.

B. Sumándole 2 a cada una: a/b +2 y 2b/a +2, se obtiene : (a+2b)/b y (2b+2a)/a

C. Dividiendo la primera entre la segunda se obtiene, como numerador a(a+2b) y como denominador 2b(a+b).

Viene ahora lo interesante , si llamamos s = a + b ; t = b se obtiene que:

2b(a+b) se convierte en 2st, el cual sería digamos y.

a(a+2b) = a(a+b+b) y como a = s – b y (a+b) +b es (s+b) tenemos que (s-b) (s+b) = (s-t) (s+t) =s^2-t^2 ,
el cual sería digamos x.

D. Elevando el numerador y el denominador al cuadrado tendríamos que

$z^2 = (2st)^2 + (s^2-t^2)^2$, o sea
$z^2 = 4s^2t^2 + s^4 – 2s^2t^2 + t^4$;
$z^2 =s^4+ 2s^2t^2 + t^4$, llevándonos a $z^2 = (s^2 + t^2)^2$

E. Finalmente, sacando la raíz cuadrada tenemos que $z = s^2 + t^2$; $z = (a+b)^2+b^2$.

En el ejemplo (7/5 y 10/7) se tiene : a = 7 ; b = 5 ;

Por lo tanto: $z = (7+5)^2 + (5)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 144 + 25 = 169$ y

y = a(a + 2b) = 7(7+ 2*5) = 119 ; x = 2b(a +b) = 2*5(7+5) = 120 ; $(a +b)^2 +b^2 = 169$

(119, 120, 169) es una terna pitagórica!

De todo lo anterior podemos concluir varias cosas:

Primero, que podemos hallar ternas pitagóricas a través de las siguientes fórmulas:

$x = s^2-t^2$; $y = 2st$; $z= s^2+t^2$ (ecuaciones 1)

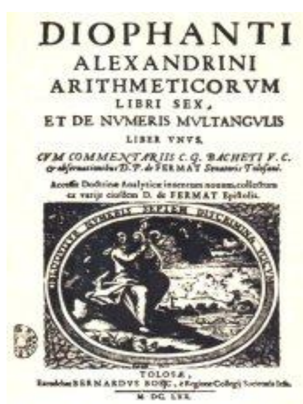
En donde s y t son números enteros de diferente paridad y se debe cumplir que s > t . Estas fórmulas aparecieron por primera vez en los Elementos de Euclides y cuando mcd(x,y,z) = 1 decimos que tenemos una terna pitagórica primitiva.
Segundo que pueden darse infinitos ejemplos que verificaran las ecuaciones anteriores:

s	t	x	y	Z
4	3	7	24	25
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
9	4	65	72	97
8	1	63	16	65
5	2	21	20	29
7	6	13	84	85

Tabla 1

Observa esta tabla con detenimiento y trata de establecer relaciones entre los números que aquí aparecen, volveremos sobre ella más tarde para que la analicemos a profundidad.

Estas ecuaciones se conocen desde la época de Diofanto de Alejandría y es a él a quien se le atribuye su deducción. Pero, ¿quién fue Diofanto? Muy poco se sabe de su vida. Por referencias históricas se sabe que vivió entre el año 150 a.C. y el 350 d.C. La obra más conocida de este matemático griego es Aritmética,



una colección de 130 problemas, distribuidos en 13 libros, de los que sólo se conservan 6. La mayoría de ellos son de ecuaciones lineales y cuadráticas, pero siempre con solución positiva y racional, pues en aquella época no tenían sentido los números negativos y mucho menos los irracionales. Se le conoce como el padre del Álgebra y a las ecuaciones de primer grado se les llama también, ecuaciones diofánticas".

Sobre su tumba, a manera de epitafio uno de sus alumnos escribió el siguiente problema:

El texto original era:

"Hic Diophantus habet tumulum, qui tempora vitae
illius mire denotat arte tibi:
Egit sextantem juvenis; lanugine males
vestire hinc coepit parse duodecima;
septante uxori post haec sociatur et anno
formosus quinto nascitur, vice, puer.
Heminam aetatis postquam attigit ille paternae,
infelix, subita morte peremptus, obit.
Quattuor aestates genitor lugere superstes.
Cogitur hinc annos illius assequere".

"**T**ranseúnte, esta es la tumba de Diofanto: es él quien con esta sorprendente distribución te dice el número de años que vivió. Su niñez ocupó la sexta parte de su vida; después, durante la doceava parte su mejilla se cubrió con el primer bozo. Pasó aún una séptima parte de su vida antes de tomar esposa y, cinco años después, tuvo un precioso niño que, una vez alcanzada la mitad de la edad de su padre, pereció de una muerte desgraciada. Su padre tuvo que sobrevivirle, llorándole, durante cuatro años. De todo esto se deduce su edad."

¿Podrías tú, hallar la edad a la cual murió Diofanto?

Solución:

Sea x la edad a la que murió Diofanto, entonces, según lo dicho:
$x = x/6 + x/12 + x/7 + 5 + x/2 + 4$
$x = 84$ años

Diofanto, Fermat y la Arithmetica han estado estrechamente relacionados a lo largo de la historia de las matemáticas. Todo empezó cuando Fermat, en su ejemplar de la Arithmetica, escribió al lado del problema 8 del Libro II:


Fermat

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere cuius demostrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet

Es decir, que la ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para $n > 2$.

Siempre que n = 2 las soluciones podrán hallarse por medio de las fórmulas dadas en las ecuaciones 1 o también a través de las siguientes expresiones, y se llamarán ternas pitagóricas.

$x = 2a + 1$; $y = a^2 + 2a$; $z = 2a^2 + 2a + 1$ (ecuaciones 2)
para a = 1, 2, 3, ...

Observemos esto para lo anteriormente hallado. Si en las ecuaciones 1 reemplazamos el valor de x, y *y* z por los valores respectivos dados para s y t, tendríamos que:

$x = s^2 - t^2$ $y = 2st$ $z = s^2 + t^2$

$x = (a+b)^2 - b^2$; $y = 2(a+b)\,b$; $z = (a+b)^2 + b^2$

$x = a^2 + 2ab + b^2 - b^2$

$y = 2ab + 2b^2$

$z = a^2 + 2ab + b^2 + b^2$

$x = a^2 + 2ab$; $y = 2ab + 2b^2$; $z = a^2 + 2ab + 2b^2$

Si a es 1:

$x = 1 + 2b$; $y = 2b + 2b^2$; $z = 1 + 2b + 2b^2$ con b = 1, 2, 3 , ...

Ya van varias formas de hallar solución a las ternas pitagóricas:

x	y	z	
s^2-t^2	$2st$	s^2+t^2	Con $s, t \in Z$ y $s > t$
$s^2 - 1$	$2s$	$s^2 + 1$	Con $s \in Z$ y $t = 1$
$a^2 + 2ab$	$2ab + 2b^2$	$a^2 + 2ab + 2b^2$	Con $a, b \in Z$
$1 + 2b$	$2b + 2b^2$	$1 + 2b + 2b^2$	Para a= 1 y con b = 1, 2, 3, ...

Volviendo a la demostración de la proposición de Fermat, podemos decir que éste ha sido, hasta hace poco, el problema más famoso, al menos más popular, de las matemáticas y a su resolución se haya unido el nombre de grandes matemáticos.

Al mismo Fermat se le atribuye una demostración para el caso n = 4 y a Euler una para n = 3. Dirichlet (1805-1859) y Legendre (1752-1833) también intervinieron y probaron la proposición para n = 5.

Y muchos otros como Sophie Germain, Lamé, Kummer, Gerd Faltings, etc. Por fin, en 1995 el inglés **Andrew Wiles** lo logró (después de algunos sustos).

"No hay otro problema que pueda justificar lo mismo para mí. Fue la ilusión de mi infancia. Nada puede reemplazar eso. Lo he resuelto. Intentaré resolver otros problemas, estoy seguro. Algunos serán muy difíciles y tendré una sensación de realización otra vez, pero no hay ningún problema matemático que me pueda cautivar como lo hizo Fermat [...]"

Regresando a la Tabla 1, ¿qué observaste?

Puede observarse que de los valores de x, y *y* z. Todos los números x son impares, todos los y son pares y todos los z son impares. Se cumple que $x= s^2-t^2$; $y=2st$; $z=s^2+t^2$; y que s,t pertenecen a los enteros con s mayor que t y mcd(s,t)=1, además de ello, s y t tienen diferente paridad. También se cumple que mcd (x, y, z) = 1, llevándonos esto a una definición:

Definición 1 : Toda tripleta de números enteros positivos (x, y, z) que satisfacen la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$, tal que mcd(x, y, z) = 1 es una terna pitagórica primitiva (tpp).
Cuando en la tripleta anterior, mcd(x, y, z) $\neq$ 1, decimos simplemente que es una terna pitagórica (tp).

Pero, ¿será que esto se sigue cumpliendo indefinidamente?

¿Será que siempre que s y t sean de diferente paridad encontraremos los mismos resultados?

Observemos las ternas pitagóricas resultantes de unos números generadores s y t que sean de la misma paridad, pon toda la atención sobre los números de la tabla para que puedas detectar aspectos interesantes:

s	t	x	y	z
8	6	28	96	100

9	7	32	126	130
5	3	16	30	34
14	4	180	112	212
21	9	360	378	522

Tabla 2

¿Qué puedes observar?

¿Cuando s y t son de la misma paridad, cómo son x, y y z?

¿Podrías demostrar esto?

¿Qué pasa con el mcd(x, y, z) ?

Miremos ahora algo más interesante, lo cual tiene que ver con las ternas pitagóricas y es lo que sucede cuando surgen de números generadores consecutivos, así:

s	t	x	y	z
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	3	7	24	25
5	4	9	40	41
6	5	11	60	61
15	14	29	420	421
22	21	43	924	925

Tabla 3

¿Cómo son aquí x y y?

Pareciera que si s y t son enteros consecutivos, con s menor que t, entonces y y z, serán enteros consecutivos también. ¿Cómo probar esto? Recuerda que si no puedes lograrlo al final del capítulo encontrarás la solución. Y vamos, no te apures a buscarla, trata más bien de hacerlo. Inténtalo sabiendo que s será igual a t +1.

Hay en esta tabla algo mucho más interesante, qué es?

Observa cuidadosamente el valor de x y compáralo con los valores dados para s y t.

¿Qué relación encuentras entre ellos?

Y la última pregunta sobre esta tabla, será que las ternas encontradas son primitivas o no?

Bueno, hasta ahora hemos generado ternas pitagóricas con las ecuaciones 1, qué pasará en el caso de que t sea igual a 1, quedando las ecuaciones de la siguiente forma: $x = s^2 - 1$, $y = 2s$; $z = s^2 + 1$?

Observemos algunos ejemplos en la siguiente tabla:

s	t	x	y	z
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
4	1	15	8	17
5	1	24	10	26
6	1	35	12	37
15	1	224	30	226
22	1	483	44	485

Tabla 4

Encuentras algo nuevo?

Mira cómo son x y z, pareciera que siempre z es dos unidades mayor que x, además, parece que y será siempre par, esto es obvio!

Generemos ahora ternas pitagóricas con las ecuaciones 2, en primer lugar recordémoslas:

$x = a^2 + 2ab$
$y = 2ab + 2b^2$
$z = a^2 + 2ab + 2b^2$

A	b	x	y	z
1	1	3	4	5
6	5	96	110	146
7	2	77	36	85
9	4	153	104	185
1	8	17	144	145
7	6	133	156	205
6	7	120	182	218

5	2	45	28	53
2	5	24	70	74

Tabla 5

Realiza cuidadosamente todas las observaciones que puedas y trata de sacar conclusiones al respecto. No te aceleres, si deseas puedes darle más valores a los números generadores a y b.

Por último, antes de irnos a descansar, generemos unas ternas pitagóricas con las ecuaciones 2, pero haciendo a = 1, con lo cual x, y y z quedarían así:

$x = 1 + 2b$
$y = 2b + 2b^2$
$z = 1 + 2b + 2b^2$

a	b	x	y	z
1	1	3	4	5
1	3	7	24	25
1	5	11	60	61
1	2	5	12	13
1	4	9	40	41
1	6	13	84	85
1	7	15	112	113

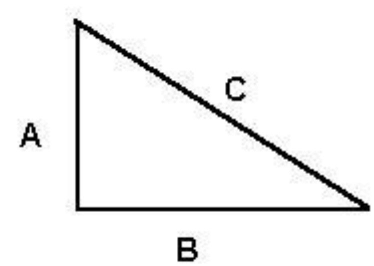
Tabla 6

Bueno, lo de siempre y esperamos que esta vez demuestres todo lo que puedas concluir.

4.4. Problemas Resueltos

Después de tanto esfuerzo y de estar jugando con el teorema de Pitágoras y las ternas pitagóricas, vamos a tomarnos un descanso y también unas cervecitas. Mientras tanto solucionemos los siguientes ejercicios:

Problema1. Encontremos todos los triángulos rectángulos con lados enteros, cuyo perímetro sea un número cuadrado perfecto.



Es muy fácil, sólo basta hallar los números enteros A, B y C que cumplan que A + B + C = k^2. Si utilizamos las ecuaciones 1, reemplazándolas en la anterior, tendríamos:

$s^2-t^2 + 2st + s^2+t^2 = k^2$

$2s^2 + 2st = k^2$

$2s (s+t) = k^2$

¿Qué valores de s y t nos servirán? Que tal si t es la octava parte de s, así : t = s/8, por qué?

Miremos:

$2s (s + s/8) = k^2$, operando el paréntesis y simplificando:

$9s^2/4 = k^2$ para lo cual k sería $3s/2$

¿Será que esto si funciona?

$A + B + C = s^2- (s/8)^2 + 2s(s/8) + s^2 + (s/8)^2 = k^2$

$= s^2- s^2/64 + s^2/4 + s^2 + s^2/64 = k^2$

$= 2s^2 + s^2/4 = 9s^2/4 = (3s/2)^2$

Pero, ¿puede ser s cualquier valor?

Pues obvio que no.

Es fácil ver que con s aumentado de 8 en 8, partiendo desde 8 y con t la octava parte de s; el valor de k se aumentará de 12 en 12, comenzando desde 12, luego:

$A + B + C = (8a)^2 – a^2 + 2(8a)a + (8a)^2 + a^2 = 144 a^2 = (12a)^2$

$A = (8a)^2 – a^2$; $B = 16a^2$; $C = (8a)^2 + a^2$, para a = 1, 2, 3, ... n

Todos los triángulos pitagóricos generados con estas últimas ecuaciones satisfacen que su perímetro es un cuadrado perfecto

a	s	t	A	B	C	A+B+C	√(A+B+C)
1	8	1	63	16	65	144	12
2	16	2	252	64	260	576	24
3	24	3	567	144	585	1296	36
4	32	4	1008	256	1040	2304	48

Tabla 7

Recuerda siempre poner en juego tu capacidad de observación con el fin de encontrar relaciones al interior de la tabla. ¿Encuentras algunas?
Vamos, especula todo lo que quieras, que es de ahí de donde surgen las teorías matemáticas.

Resumiendo

Si queremos hallar todas las ternas pitagóricas cuyo perímetro sea un cuadrado perfecto, podemos utilizar las siguientes fórmulas:
$x = (8a)^2 - a^2$ $y = 16a^2$ $z = (8a)^2 + a^2$ para $a = 1, 2, 3, \ldots n$ (ecuaciones 3)

Pero estas soluciones tienen sus limitaciones y no se generarán aquí todas las ternas posibles. Observemos ahora otra posible solución:
Partiendo de
$2s (s+t) = x+ y + z = k^2$
Si hacemos $s = 2a^2$ y $t = b^2 - 2a^2$, obtenemos que:
$x + y + z = (2a^2)^2 - (b^2 - 2a^2)^2 + 2(2a^2)(b^2 - 2a^2) + (2a^2)^2 + (b^2 - 2a^2)^2$ y después de un poco de álgebra nos queda que:
$x + y+ z = 4a^2 b^2$ que es un cuadrado perfecto, bajo estos parámetros:
$x = b^2(4a^2 - b^2)$
$y = 4a^2(b^2 - 2a^2)$
$z = 8a^4 - 4a^2b^2 + b^4$

Existe la condición, de que: $\sqrt{2}\, a < b < 2a$, así:

a	b	x	y	z	x+y+z	√(x+y+z)
3	5	275	252	373	900	30
4	6	1008	256	1040	2304	48
4	7	735	1088	1313	3136	56
5	8	2304	1400	2696	6400	80
5	9	1539	3100	3461	8100	90
6	9	5103	1296	5265	11664	108
6	10	4400	4032	5968	14400	120
6	11	2783	7056	7585	17424	132

Tabla 8

¿Qué encuentras de nuevo en esta tabla comparativamente con la anterior? ¿Existe alguna terna igual a las generadas por las ecuaciones 3? ¿A qué se debe esto? ¿Se generarán en el desarrollo de las tablas, ternas iguales? ¿Por qué? ¿Quedará el problema completamente resuelto?

Recordando

También puedes hallar ternas pitagóricas cuyo perímetro sea un cuadrado perfecto, a través de las siguientes fórmulas:

$x = b^2(4a^2 – b^2)$ $y = 4a^2(b^2 – 2a^2)$ $z = 8a^4 – 4a^2b^2 + b^4$

En donde $\sqrt{2}\, a < b < 2a$ (ecuaciones 4)

Aquí hay otro problemita igualmente interesante, trata de hacerlo y después observa su solución. En realidad no es tan complicado:

Problema 2. Tres hermanas, un poco mayores (algunos dicen que son brujas), vinieron en estos día a mi tienda y me pidieron que les vendiera tres tapetes para decorar sus mansiones. Las tres me traían la misma condición, la forma de los tapetes debía ser la de un triángulo rectángulo, y sus áreas y perímetros deberían ser iguales. Además todas tres querían tapetes de diferentes dimensiones. En este momento empecé a creer lo que decían sobre que eran brujas.

Una de ellas, la mayor, me advirtió muy quedamente, si satisfaces nuestros deseos te recompensaremos ampliamente, de lo contrario prepárate para vivir en el fango. Espero que puedas ayudarme a encontrar las dimensiones de estos tres tapetes, aunque yo en mi interior me estoy preparando para vivir en el fango.

Matemáticamente podríamos decir que lo que queremos es hallar todos los triángulos rectángulos con lados enteros tales que la magnitud del área sea igual a la magnitud de su perímetro. Es decir, hallar todas las ternas pitagóricas(x, y, z) que cumplan con las condiciones anteriores.

Sean x e y los lados del triangulo rectángulo.

Si PERÍMETRO = ÁREA , entonces debe cumplirse que: $x + y + (x^2 + y^2)^{1/2} = (1/2)xy$

Despejando la raíz cuadrada, elevando al cuadrado y simplificando:

$x^2 + y^2 = [(1/2)xy - x - y]^2$

$x^2 + y^2 = (1/4)(xy)^2 + x^2 + y^2 - (x^2)y - x(y^2) + 2(xy)$

$0 = (x.y)^2 - 4(xy)(x+y) + 8(xy)$

$0 = (x.y) - 4.(x+y) + 8$

Despejando x de esta ecuación: $x = (4y – 8)/(y - 4)$, de donde se deduce que 'y-4' es un divisor de 8:

Observemos las posibles soluciones que satisfacen lo anterior:

Divisores de 8	Valores de y	Valores de x	Valores de z
y - 4 = 1	5	12	13
y - 4 = 2	6	8	10
y - 4 = 4	8	6	10
y - 4 = 8	12	5	13

De lo cual puedes concluir que las únicas ternas que satisfacen las condiciones dadas, serían: (5,12,13) y (6,8,10). Los anteriores resultados nos darían, para (5, 12, 13) un área y un perímetro de 30 y para (6, 8, 10) un área y un perímetro de 24.

Por lo tanto hay sólo dos tapetes posibles y si no puedo engañar a las brujas con algún truco me iré de sapo. Gueret! Gueret! Gueret!

Problema 3. En vista de tanta tristeza generada por la situación anterior, no me queda nada más remedio que ponerme a beber con mis amigos, pero lo único que no le hace mucho daño a mi delicado estómago son unas cervecitas...
Resulta que ya he perdido la cuenta de cuántas llevamos y nos pondremos a contarlas. ¡Dios Santo! ¡El cantinero dice que le debemos cuatrocientas cervezas!
Para contarlas primero organizamos un cuadrado con las botellas vacías y mientras nos tomábamos otras cervecitas vino la mesera refunfuñando y diciendo que tantas botellas le estorbaban mucho para pasar. Sin más ni más construyó dos rectángulos, apoyándose en dos lados del cuadrado inicial y diciéndome que en uno de ellos había 36 botellas más que en el otro. ¿Cuántas cervezas nos habíamos tomado hasta ese momento? Ayúdame a solucionar esta cuestión pues de lo contrario me tocará pagar cuantas cervezas diga el cantinero.

Si pudimos formar un cuadrado con las botellas que nos habíamos tomado, quiere decir que el número de ellas debe ser un cuadrado perfecto. Si dividimos este cuadrado p^2 = p*p en dos rectángulos de lados p y n el primero y p y (p-n) el segundo. Se debe cumplir que: p*n – p(p-n) = 36
pn - p^2 + pn = 36
2pn – p^2 = 36 llevándonos a la ecuación p^2 - 2pn - 36 = 0

Si en la ecuación cuadrática $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ a = 1, b = -2n , c = - 36, nos quedaría que:

$$\frac{-(-2n) \pm \sqrt{(-2n)^2 - 4(1)(-36)}}{2(1)}$$, para lo cual

$$\frac{2n \pm \sqrt{4n^2 + 4(36)}}{2}$$

Simplificando un poco y sabiendo que sólo nos sirve la raíz positiva, tendríamos que:

$$n + \sqrt{n^2 + 36}$$

$n^2 + 36$ debe ser un cuadrado perfecto, lo cual se cumple cuando n = 8

Si n = 8, p = $8 + \sqrt{8^2 + 36}$; p = 18

Y el número de cervezas que le debo al cantinero es de $p^2 = 18^2 = 324$

Los rectángulos hechos por la mesera tendrían como lados (18, 8) y (18, 10)
El cuadrado inicial tenía 18 botellas de lado y no le debo 400 si no 324 cervezas, o sea que aún nos podemos tomar unas cuantas cervecitas más.

4.5. Problemas Propuestos

1. ¿Cuál de todas las demostraciones dadas para el teorema de Pitágoras te parece la más interesante y por qué? ¿Cuál te parece la más sencilla?
¿Podrías tu buscar en algún texto otra demostración? Mejor aún, podrías tu inventarte una nueva demostración? ¡Deja volar tu imaginación y ayúdate de la geometría!

2. Dicen que existía una congregación de personas seguidoras de Pitágoras, eran los llamados Pitagóricos, aquí encontrarás los versos de oro de la escuela Pitagórica. ¿Cuánto difieren de nuestros llamados mandamientos?, ¿cuánto se asemejan a ellos?, ¿crees tú que nuestras posiciones frente a la vida son muy distintas? Comparte tus ideas con tus compañeros.

Honra a los dioses inmortales del modo establecido por la ley.
Venera el juramento y también a los nobles héroes.
Y lo mismo a los genios subterráneos, de acuerdo con los ritos tradicionales.
Honra a tu padre y a tu madre así como a tus parientes.
Haz tu mejor amigo a quien sobresalga por sus virtudes.
Sé amable con tus palabras y útil con tus obras.
No te enojes por las faltas leves que cometan tus amigos.
Actúa según tus facultades, teniendo en cuenta que el poder está muy cerca de la necesidad.
Aprende que, por una parte, las cosas son así; y por otra, acostúmbrate a dominar lo siguiente:
Primero el estómago y después el sueño, el impulso sexual y la ira.
No cometas ninguna acción vergonzosa
Con otro ni a solas, porque, ante todo, te debes respetar a tí mismo.
Sé justo en palabras y actos
Y razonable y sensato en todo lo que hagas.
No olvides que la muerte es el destino de todos.
Y que es condición de la fortuna aumentar y disminuir.

Los sufrimientos que la suerte proporciona a los hombres proceden de los dioses.
Soporta tu destino sin indignarte.
Aunque es conveniente que corrijas este destino según tus facultades.
Ten presente que el destino no da más sufrimiento a los buenos.
De las muchas palabras que pronuncian los hombres, unas son buenas y otras malas.
Que ellas no te turben ni ejerzan influencia sobre ti.
Soporta con paciencia y dulzura la mentira.
Procura cumplir siempre lo que te voy a decir ahora:
Que nadie, ni con palabras ni con actos,
Te convenza de que debes hacer o decir lo que no sea mejor.
Reflexiona antes de cometer una acción estulta
Pues es propio de los hombres decir palabras necias y ejecutar actos malos.
Realiza ahora lo que no pueda perjudicarte después.
Abstente siempre de lo que no conozcas.
Aprende todo lo necesario para que tu vida sea más feliz.
No conviene que descuides la salud de tu cuerpo
Para lo cual procurarás descubrir la justa medida en comidas, bebidas y ejercicios físicos.
Entiende por justa medida la que no te cause dolor.
Acostúmbrate a llevar una vida pura, limpia y viril.
Procura no hacer nada que pueda traer la envidia sobre ti.
No gastes insensatamente, como los que ignoran la honesta proporción de lo bello;
Pero tampoco seas avaro. Lo mejor en todo es la justa medida.
Haz lo que no te perjudique, pero reflexiona antes de obrar.
No permitas que el dulce sueño cierre tus ojos
Sin haber repasado contigo mismo lo que hayas hecho durante el día.
¿En qué he faltado? ¿Qué he hecho? ¿He omitido alguna obligación?.
Repasa también todas las acciones que hayas realizado, empezando por la primera y sin olvidar ninguna.
Repréndete si has cometido algún acto malo y regocíjate con los buenos.
He aquí lo que debes hacer. He aquí la tarea que reclama tu cuidado.
He aquí lo que debes amar. He aquí lo que te encaminará por la senda divina.
Antes de empezar cualquier tarea
Pide a los dioses que santifiquen tu esfuerzo.
Si pones en prácticas estas normas, conocerás los lazos que une a los dioses inmortales con los hombres mortales
Y aprenderás a conocer los elementos que pasan y los que permanecen.
Y conocerás, como es justo que se conozca, que la Naturaleza es una y semejante en todo.
Y así no esperarás lo que no puede esperarse, ni habrá secreto alguno para ti.
Y sabrás también que los hombres padecen los males que ellos escogen
Porque son tan desgraciados que no ven los bienes que están a su lado.
Ni los oyen, porque son muy pocos los que saben librarse del mal.
Tal es el destino que ciega su mente. Como cilindros que ruedan
Van de un sitio para otro padeciendo males infinitos,
Impotentes para reconocer la discordia funesta que les es innata,
A la que no voy a provocar, sino esquivarla huyendo de ella.
Padre Zeus; tú podrías liberar a los hombres de innumerables males,
Mostrando a cada uno el genio que lo guía.

Y en cuanto a ti, hombre, ten confianza, porque la raza de los mortales es de origen divino,
Y su naturaleza sagrada le revela todas las cosas.
Practicando lo que te ordeno, disfrutará de sus beneficios
Y en cuanto sea curada tu alma quedarás libre de todos los males.
Evita los alimentos indicados en los libros de las *Purificaciones* y de la *Salvación del alma*.
Sin embargo, reflexiona sobre cada cosa
Tomando como guía del carro de tu alma la recta razón.
Y una vez que te hayas liberado de tu envoltura carnal, irás al éter impalpable
Y serás inmortal: un dios incorrupto en vez de mortal.

3. La guadua rota
Si una guadua de 8 metros de altura se ha roto por el viento de tal manera que su extremo superior queda apoyado en el suelo a una distancia de 4 metros de su base, ¿a qué altura del suelo se rompió?

4. El gavilán y la culebra
Un gavilán real se encuentra posado en el extremo de un poste vertical en cuya base hay un agujero de culebra; observando la culebra a una distancia del pie del poste igual a tres veces su altura, el gavilán se lanza sobre ella en línea recta mientras la culebra intenta ganar su agujero. Si el gavilán captura a la culebra cuando ambos han recorrido exactamente la misma distancia, ¿a cuántos centímetros de distancia del agujero se produjo la captura?

5. Piensa en ternas de números reales, cuántas ternas habrá de ellos que cumplan con la siguiente condición: Al restar cualquiera de ellos del producto de los otros dos, el resultado nos dé solamente uno? (ojo, no necesariamente tiene que ser una terna pitagórica).

6. Se sabe que todas las soluciones enteras de la ecuación $x^2 + y^2 = z^2$ vienen dadas por las expresiones:
$x = 2st$; $y = s^2 - t^2$; $z = s^2 + t^2$ para s y t enteros arbitrarios. Hallar una expresión similar de cómo se expresarían las soluciones enteras para la ecuación $x^2 + y^2 = 2z^2$.

7. Además de las formas de hallar ternas pitagóricas que vimos anteriormente, existen algunas otras, como por ejemplo:

$$x = n$$
$$y = \frac{1}{2}(n^2 - 1)$$
$$z = \frac{1}{2}(n^2 + 1)$$

En donde n es un número impar, mayor que 1.
Encuentra algunas ternas pitagóricas a través de estas nuevas fórmulas, y dinos, qué relación encuentras entre x, y *y* z?
Observa la tabla 3 en el texto y saca tus propias conclusiones!

6. División y Divisibilidad

6.1. Objetivos de la Unidad:

- Introducir temáticas como el máximo común divisor, las congruencias y el mínimo común múltiplo, a través de situaciones cotidianas
- Profundizar en los temas relacionados con la divisibilidad.
- Conocer las diferentes reglas que existen para saber si un número es o no divisible por otro, llegando a proponer generalizaciones para cualquier número.
- Aplicar los temas relacionados con la divisibilidad a la cotidianeidad de los estudiantes.
- Profundizar en los niveles de generalización y abstracción que se desarrollan en los estudiantes a través del trabajo, bien sea individual o colectivo.

Sugerencia: Con el fin de lograr una mejor comprensión y nivel de trabajo, los siguientes temas deberían trabajarse en los grados 10º u 11º. Existe la posibilidad de un gran acercamiento de las presentes temáticas con la cotidianeidad de los estudiantes; sería muy importante ahondar en este aspecto. En lo referente a las congruencias, podemos decir que es un tema que no se trabaja de manera obligatoria en el bachillerato, sin embargo sería de gran utilidad trabajarlo, debido a su gran relación con diferentes temas de las matemáticas; así mismo sería de gran ayuda a los estudiantes que participan en jornadas interinstitucionales o en olimpiadas de matemáticas.

6.2. ¿Qué es la división?

“Divide y vencerás” reza un popular refrán, esto se refiere a que la división genera debilidad y por lo tanto dificultad para enfrentarse a un enemigo. Debemos entender entonces que cuando estamos dividiendo estamos realizando un proceso inverso al de multiplicación, el cual pretende aumentar las cifras. Todos sabemos también de la multiplicación de los panes y los peces. Pero esta multiplicación se realizó haciendo una división, ¡qué paradójico!, Jesús repartía pan y pescado a todos los que lo escuchaban y al final pudieron recoger mucho más de lo que había inicialmente. Lástima que esto no pase en la realidad.

En la realidad, un dividendo se reparte en unos cocientes dependiendo de lo que divisor proponga y se deja un residuo que nos dice si al hacer dicha repartición la división es exacta o no.

Pero la división está en muchos otros lugares, observemos: las ligas deportivas cuentan con divisiones bien sean inferiores o superiores, las cuales tienen como objeto congregar las distintas partes que la conforman. Los ejércitos cuentan con divisiones con el fin de ser más eficientes. También existen las divisiones políticas de los países, las cuales se convierten en fronteras a veces infranqueables e imposibles de vencer, sobre todo para nosotros los latinos quienes llevamos un sello en nuestra frente.
¿ Y tú que otras clases de “divisiones” conoces?

En las matemáticas la división pretende “repartir” una cantidad en otras más pequeñas pero iguales, claro que estamos hablando aquí de una división entera. Si pasamos a una definición más estructurada, podríamos decir que la división es la operación contraria a la multiplicación, la cual se representa por el signo ÷ ó /.
¿Conoces alguna otra forma de expresar la división?

Por ejemplo, se representaría la división de 10 entre 2 de la siguiente manera: $10 \div 2 = 10 / 2 = 5$

El número 10 se llama dividendo y es la cantidad que se pretende repartir o dividir. El número 2 se llama divisor e indica en cuántas partes va a dividirse. Y el número 5, el cual es el resultado de esta división se llama cociente y se refiere a la cantidad que se repartirá a cada uno de los divisores.

Cuando tenemos por ejemplo: 20/3, lo podríamos expresar de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline 2 & 6 \end{array}$$

Cuando la división no es exacta, se genera un residuo, por ejemplo si dividimos 20 entre 3, el resultado sería de 6 y se dejaría un residuo de 2.

6.3. Definición de división

La división entera entre dos números naturales se puede proponer de la siguiente forma:

Entre dos números naturales a > b se llama división entera de a entre b a la operación en la que se obtienen otros dos números, c, cociente y r, resto, que cumplen las siguientes relaciones:

$a = b \cdot c + r$

$0 \leq r < b$

Entre dos polinomios P(x) y Q(x) tales que grado de P(x) ≥ grado de Q(x), se llama división entera de P(x) entre Q(x) a la operación en la cual se obtienen dos polinomios, C(x), cociente, y R(x), resto, que cumplen las siguientes relaciones:

$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$

grado de R(x) < grado de Q(x)

Cuando el resto es cero (r = 0 o R(x) = 0) se dice que la división ha sido exacta.

6.4 Definición de Divisibilidad.

Si a > b. b | a (que se lee: b dividirá a a -dejando residuo cero-) si y sólo si existe un entero k tal que a = kb

6.5. Criterios de divisibilidad

¿Qué diferencias crees que existe entre la división y la divisibilidad?
¿ Por qué no piensas en algunas reglas que conozcas para saber si un número es divisible o no por otro? Vamos, trata de recordarlas.

La divisibilidad de un número se refiere a la “capacidad” de ser “repartido” en cantidades iguales, en general, se refiere a la posibilidad de dividir un número por otro, sin dejar residuo.

Aquí se exponen varias reglas que te permitirán conocer fácilmente la divisibilidad de un número cualquiera:

1. Todo número es divisible por uno, sea como fuere y nos dejará como resultado el mismo número, por lo tanto diremos que el número 1 es el módulo de la división.
2. Todo número cuya primera cifra de la derecha sea par (recuerda que el cero es un número par), es divisible por dos.
3. Un número es divisible por tres, si la suma de las cifras que lo componen es divisible por tres.
4. Un número es divisible por cuatro, cuando sus dos últimas cifras de la derecha forman un múltiplo de cuatro o son dos ceros.
5. Un número es divisible por cinco, cuando termina en cero o en cinco.
6. Todo número par y que la suma de sus dígitos sea divisible por tres, será divisible por seis.
7. Divisibilidad por 7: Para saber si un número es divisible por 7: retire el último dígito, multiplíquelo por dos y réstelo de lo que ha quedado del número. Si el resultado es un número divisible por 7 (incluyendo el cero), entonces el número original también lo es.

Por ejemplo, para 203, retiramos el 3, al multiplicarlo por dos nos da 6 y restándolo del número que nos quedó: $20 – 6 = 14$.
Podemos decir entonces que 203 es divisible por 7.
(Esta regla es recurrente; puede usarse sucesivamente tantas veces como se quiera hasta obtener un número que sepamos que es divisible por 7).

Otro criterio de divisibilidad por 7:
Para saber si un número es divisible por 7 o no, usamos los coeficientes 1, 2 y 3 así: multiplicamos el dígito de las unidades por uno, el de las decenas por 3 y el de las centenas por 2, el cuarto dígito por –1, el quinto por –3, el sexto por –2, el séptimo por 1 y así sucesivamente. Luego sumamos los números hallados, si el resultado es divisible por 7, entonces el número original lo es también.

Por ejemplo para: 348967129356876.

$6 + 21 + 16 - 6 - 15 - 6 + 9 + 6 + 2 - 7 - 18 - 18 + 8 + 12 + 6 = 16$
Por lo tanto el número no es divisible por 7.

Si el número fuera 348967129356874, sería múltiplo de 7,pues el resultado sería 14 en vez de 16.

En forma general lo podríamos expresar de la siguiente manera: dado un número onmlkjihgfedcba, se calcula lo siguiente:

$$a + 3b + 2c - d - 3e - 2f + g + 3h + 2i - j - 3k - 2l + m + 3n + 2o.$$

El número 1001 o alguno de sus múltiplos es divisible por siete (7), once (11) y trece (13).

8. Un número es divisible por ocho (8), si el número formado por sus tres últimas lo es, o cuando son cero. Por ejemplo: 1234533888 es divisible por 8; pero 1234886 no lo es.

Otro criterio de divisibilidad por 8 es el siguiente: si el dígito de las centenas par, será divisible por 8 si los últimos dos dígitos lo son. Si el primer dígito es impar, reste 4 de los últimos dos dígitos, el número será divisible por 8 si los dígitos resultantes lo son.

9. Un número es divisible por nueve (9), si la suma de sus cifras lo es.

10. Todo número terminado en cero (0) es divisible por diez (10).

11. Un número es divisible por once (11), si la diferencia entre la suma de sus cifras de lugares impar y la suma de sus cifras de lugares par lo es.

Por ejemplo para: 365167484. Sumamos el primero, tercero, quinto y séptimo dígito :
3 + 5 + 6 + 4 + 4 = 22
Sumamos el segundo, cuarto, sexto, y octavo dígito:
6 + 1 + 7 + 8 = 22
Si la diferencia, incluyendo el cero, es divisible por 11, entonces el número original será divisible por él:
22 - 22 = 0
Concluimos entonces que 365167484 es divisible por 11.

12. Un número es divisible por 12 si es divisible por tres y por cuatro al mismo tiempo.

13. Para saber si un número es divisible por 13, realiza el siguiente proceso: Elimina el último dígito del número dado; a continuación resta nueve veces ese dígito al número obtenido. Si el resultado es divisible por 13, también lo es el número original. (Esta regla es recurrente; puede usarse sucesivamente tantas veces como se quiera hasta obtener un número que sepamos que es divisible por 13).

Por ejemplo para el número: 16312179

1631217 - (9*9) = 1631136
163113 - (6*9) = 163059
16305 - (9*9) = 16224
1622 - (4*9) = 1586
158 - (6*9) = 104

104 es divisible por 13, pues 104 = 13 * 8 , por lo tanto 16312179 también lo es.

Observemos otro criterio de divisibilidad por 13 : Sea el número ABCDEFGHI. Tomando los dígitos de las unidades, decenas, centenas,... sumamos el producto de los mismos por los contenidos en la serie siguiente: 1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3,... (la serie se repite de seis en seis elementos).

Por ejemplo: 55041103 es divisible por 13?:

1*I	1*3
(-3)*H	-3*0
(-4)*G	-4*1
(-1)*F	-1*1
3*E	3*4
4*D	4*0
1*C	1*5
(-3)*B	-3*5
(-4)*A	
-------	----
Suma	0

Si la suma es divisible por 13 (el 0 incluido), entonces ABCDEFGHI también.

Ejemplo 2: 4233931 es divisible por 13?

(1*1)-(3*3)-(4*9)-(1*3)+(3*3)+(4*2)+(1*4)= - 26

La respuesta es sí, ya que -26 lo es.

¿Cuál de los dos criterios expuestos para la divisibilidad por 13 te parece el más práctico?

14. Para cualquier número primo p, (excepto 2 y 5), se podría crear una regla de divisibilidad utilizando el siguiente método:

Encuentre un m, tal que m sea (preferiblemente) el mínimo múltiplo de p que termine en 1 o en 9. Elimine el ultimo dígito del número dado y reste (si el múltiplo termina en 9) o sume (si termina en 1) el dígito eliminado multiplicado por el entero más cercano a m/10. Por ejemplo, si m = 91, el número más cercano a 91/10 = 9.1 es 9; y para 3.9, sería 4.

Verifique si el resultado es un múltiplo de p (incluido el cero). Puede utilizar este procedimiento hasta que el resultado sea obvio.

Por ejemplo: Observemos si 14281581 es divisible por 17.

En este caso, hallamos primero el m que me satisfaga lo propuesto, así m= 51 (que es 17*3), eliminando el ultimo dígito y restando lo indicado.

1428158 - 5*1 = 1428153
142815 - 5*3 = 142800
14280 - 5*0 = 14280
1428 - 5*0 = 1428
142 - 5*8 = 102
10 - 5*2 = 0, el cual es un múltiplo de 17, así que
14281581 será múltiplo de 17.

Miremos ahora otro ejemplo: Será 7183186 divisible por 46?

Sabemos que 46 no es un número primo, pero su factorización es 46 = 2*23. Así que 7183186 deberá ser divisible por 2 y por 23 al mismo tiempo. Como el número es par, es divisible por 2. Sólo falta observar si es divisible por 23:

m = 3*23 = 69, hallamos aquí el menor m que termina en 9 o en 1 m/10 = 6.9 = 7 Recordemos que aquí debemos adicionar

718318 + 7*6 = 718360
71836 + 7*0 = 71836
7183 + 7*6 = 7225
722 + 7*5 = 757
75 + 7*7 = 124
12 + 7*4 = 40
4 + 7*0 = 4 (no divisible por 23), luego 7183186 no es divisible por 46.

Pudimos haber detenido el proceso de cálculo, cuando se observara que el resultado es obvio y no hasta el final. En el primer ejemplo se sabe que 102 es divisible por 7, para el Segundo ejemplo nos damos cuenta fácilmente que 40 no es divisible por 23.

La idea que deja este método es que se puede restar m veces el ultimo dígito y dividirlo por 10 o adicionar m veces el último dígito y dividirlo por 10.

15. Todo divisor de un número, lo es también de sus múltiplos.
16. Un divisor común de dos números, lo es también de la suma o resta de dos múltiplos de ellos.
17. Un número es divisible por veinticinco, cuando termina en dos ceros o cuando estas últimas cifras son múltiplo de veinticinco.

6.6. Temas relacionados con la división

Existen una gran variedad de temas relacionados con la división y que en últimas se pueden generar o derivar de ésta, tal es el caso del máximo común divisor, observemos la introducción de este tema a través de un sencillo y divertido ejercicio.

Una rana se encuentra sobre una piedra que está en un charco; existen allí muchas más piedras que forman una línea y que se encuentran equidistantes una de otra. La rana al saltar avanza 8 piedras hacia adelante o retrocede 5 piedras hacia atrás y sólo esto, ya que sus fuertes patas no le permiten hacer saltos más pequeños.

Si la rana quiere avanzar sólo hasta la piedra siguiente, cómo puede hacerlo?
Por qué no tratas de experimentar con alguna cantidad de saltos hacia adelante o hacia atrás para ver que pasa?

Si la rana da inicialmente 3 saltos hacia adelante, avanzaría hasta la piedra número 24 y cómo volvería para avanzar sólo una piedra desde su lugar inicial?

Si retrocede 4 saltos se encontraría a 4 piedras del lugar hasta el cual quiere avanzar, entonces cómo puede hacerlo?

La respuesta sería, dando en total 7 saltos hacia delante y 11 saltos hacia atrás. Claro está que los saltos puede darlos de manera aleatoria hacia adelante y hacia atrás, lo importante aquí es que se cumpla el número de saltos.

Claro está que sería mucho más fácil que la rana sólo diera 2 saltos hacia adelante y 3 saltos hacia atrás para llegar a la siguiente piedra.

¿Habrá más formas de llegar a la piedra siguiente?
¿Será que existen infinitas formas en las cuales pueda jugar la rana dando saltos adelante y hacia atrás con el fin de llegar hasta la piedra siguiente?

Si consideramos los desplazamientos hacia adelante como un valor positivo y los desplazamientos hacia atrás como un valor negativo, podríamos construir la siguiente tabla:

Saltos hacia delante	Saltos hacia atrás	Avance	Retroceso
2	3	8	-5
7	11	8	-5

Como vamos a avanzar hasta la piedra siguiente podríamos decir que:

1 = (8) x 2 + (-5 x 3)
1 = 16 – 15

y para los otros saltos sería:

1 = (8) x 7 + (-5 x 11)
1 = 56 – 55

Si sumamos y restamos al lado derecho un múltiplo de 5 x 8, a cualquiera de estas igualdades, ésta se conservaría. Un ejemplo sería 2 x 8 x 5:

1 = (8) x 7 + 2 x 8 x 5 + (-5 x 11) – 2 x 8 x 5
1 = (8) x 17 + (5) x (-27)

Podemos observar entonces que existen infinitas maneras de avanzar hasta la siguiente piedra por parte de la rana.

Si la rana avanzara 8 piedras hacia delante y 6 hacia atrás con sus saltos, podría llegar a estar en la siguiente piedra?

Construyamos una tabla para ver el desplazamiento que hace la rana:

Saltos hacia delante	Saltos hacia atrás	Avance	Retroceso	Espacio neto avanzado
1	1	8	-6	2
2	1	16	-6	10
1	2	8	-12	-4
2	2	16	-12	4
1	3	8	-18	-10
2	3	16	-18	-6
3	3	24	-18	6

Como vemos sólo podríamos avanzar o retroceder distancias que son múltiplos de 2.

En el ejemplo anterior donde a y b son 8 y 6 respectivamente, sabemos que el máximo número que los divide exactamente a los dos es, mcd(a,b) = 2, luego podríamos encontrar dos números enteros tales que:

$$2 = 8x + 6y$$

2 = 8 x (-2) + 6 x (3)
2 = 8 x (4) + 6 x (-5)
2 = 8 x (-5) + 6 x (7)
.
.
.
etc, propongamos ahora una generalización:

Para el primer caso podríamos decir que existen infinitos números x, y que satisfacen la igualdad que tiene la forma:

$$1 = 8x + 5y$$

Debemos hablar aquí de un concepto como es el de máximo común divisor, éste es el mayor número que divide a otros dos, en esta caso, el mayor número que divide a 8 y a 5 es el 1 y sólo él.

Podemos expresar ahora la siguiente conjetura:

"Si a y b son números naturales, primos relativos o sea que mcd(a,b)=1, se puede expresar el 1 como una combinación lineal de a y b, es decir, existen enteros x y y tales que:

$$1 = ax + by$$

Será válida esta conjetura para todos los casos?
¿Qué ocurrirá si a y b no son primos relativos?, o sea, si el mcd(a,b)$\neq$1

Para el segundo caso en el cual $2 = 8x + 6y$

podríamos generalizar diciendo que: "Sean a y b dos números naturales y d su mcd, entonces d se puede expresar como la combinación lineal de a y b, así:

$$d = ax + by$$

En donde los coeficientes x y y son números enteros”

En el primer caso en donde la rana debería avanzar sólo un espacio, teníamos que:

$$1 = 8x + 5y$$

si multiplicamos a ambos lados de esta igualdad por 2 obtenemos:

$$2= 16x + 10y$$

Por 3 obtenemos:

$$3 = 24x + 15y$$

por 7 obtenemos:

$$7 = 56x + 35y$$

y así sucesivamente. De lo anterior podemos concluir que se puede obtener cualquier número entero a partir de la ecuación $1= 8x + 5y$, donde por ejemplo: $x = 7$ e $y = -11$.
Luego para $K \in Z$ se cumple que:

$$K = a(xK) + b(yK)$$

De acuerdo a esto la rana podría ubicarse en cualquier piedra del charco con sus saltos hacia atrás y hacia delante.

Miremos ahora el caso en el cual la rana avanza 8 espacios hacia adelante y 6 hacia atrás, con sus saltos.

En este caso $2 = 8x + 6y$,

ahora si multiplicamos por 2 a ambos lados de esta ecuación nos quedaría:

$$4 = 16x + 14y$$

multiplicando por 3 : $6 = 24x + 18y$

y multiplicando por 5: $10 = 40x + 30y$

De esto podemos concluir que sólo los múltiplos de 2 se pueden obtener a partir de la ecuación
$2 = 8x + 6y$, con esta conclusión deducimos que la rana no podría alcanzar la siguiente piedra, o de forma más general, no podrá estar en piedras cuyo número sea impar.

Luego, si los números correspondientes a los espacios recorridos en cada salto de la rana, cumplen la condición de ser primos relativos, entonces la rana podrá recorrer cada una de las piedras del charco. De lo contrario, podría avanzar una distancia mínima que es igual al máximo común divisor de los números correspondientes a los espacios recorridos en los saltos hacia adelante y hacia atrás.

6.7. Propiedades del Máximo Común Divisor y del Mínimo Común Múltiplo

El **máximo común divisor** de dos números se define, como su propio nombre indica, como el divisor más grande que ambos números tienen en común. Si disponemos de la factorización de ambos números, entonces el máximo común divisor se obtiene quedándose solamente con aquellos factores comunes a ambas descomposiciones y elevados al menor de los exponentes con los que aparezcan.

El **mínimo común múltiplo**, nuevamente como indica su nombre, es el múltiplo más pequeño que ambos números tienen en común. Atendiendo a las descomposiciones de ambos números, el mínimo común múltiplo se obtiene considerando todos los factores distintos que aparecen (comunes y no comunes), cada uno de ellos elevado al mayor exponente con el que aparezca.

$$
\begin{aligned}
&180 = 2^2 3^2 5 \\
&225 = 3^2 2^5 \\
&-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,- \\
&mcd(180, 225) = 3^2 5 = 45 \\
&mcm(180, 225) = 2^2 3^2 5^2 = 900
\end{aligned}
$$

El máximo común divisor y el mínimo común múltiplo pueden expresarse de la siguiente forma:

mcd(a,b) = (a,b)
mcm(a,b) = [a,b]

Si pensamos un poco se podrían proponer las siguientes propiedades para el mcd y el mcm

1. Si a y b son positivos y b es múltiplo de a, se cumple que (a,b) = a y [a,b] = b.

2. El máximo común divisor de dos números, también es el máximo común divisor de la resta de estos dos números, por lo tanto: (a,b) = (a, b-a)

3. Si un número es múltiplo de otro, el más grande será el mcm de los dos y el más pequeño será su mcd. Por ejemplo: 12 es múltiplo de 6 y 6 es divisor de 12.

mcm (6, 12) = 12

mcd (6, 12) = 6

4. El mcm de dos números primos entre sí es igual al producto de estos números. Así: 7 y 12 son primos entre ellos

mcm (7, 12) = 7 .12 = 84

5. El producto del mcm por el mcd de dos números cualesquiera es igual al producto de estos números. mcm (a,b) x mcd(a,b) = a x b

mcm (12, 15) = 60

mcd (12, 15) = 3

mcm . mcd = 60 . 3 = 180

(12 . 15 = 180)

6. Los divisores comunes de dos o más números son divisores del mcd de estos números.

El 2 es divisor de 12 y 18

mcd (12, 18) = 6

El 2 también es divisor de 6.

7. Los múltiplos comunes de dos o más números son múltiplos del mcm de estos números.

12 es múltiplo de 6 y 6 es divisor de 12.

El mcm (15, 18) = 90. Cualquier múltiplo común de 15 y 18, por ejemplo 360, también lo es de 90.

8. Si dividimos dos números por su mcd, los cocientes que se obtienen son primos relativos.

El mcd (25, 80) = 5. Si dividimos 25 y 80 entre 5, obtenemos, respectivamente 5 y 16. Estos números son primos relativos.

9. Para calcular el mcd de tres números, a, b, c, se halla el mcd de dos de ellos, d, y luego se halla el mcd de d y el tercer número, ya que:

mcd(a, b, c) = mcd(d, c)

en donde d = mcd(a, b).

10. Esta es tal vez la propiedad más importante y la cual da como resultado una importante generalización:

Si d es divisor común de a y b, y a > b, entonces d es divisor del resto de dividir a entre b.

Esta propiedad justifica el siguiente razonamiento: para hallar el mcd(a, b) se divide a entre b, obteniendo un cociente b_1 y un resto r_1. Entonces:

d = mcd(a, b) = mcd(b, r_1)

Ahora se procede de forma análoga con b y r_1: se hace la división entera entre b y r_1, obteniendo un cociente b_2 y un resto r_2. Entonces:

d = mcd(b, r_1) = mcd(r_1, r_2)

Se prosigue así sucesivamente obteniendo números cada vez menores. De esta forma se llegará a una división exacta. El divisor de dicha división, que es el resto de la anterior, es el mcd, buscado.

Como ejemplo obtengamos el mcd(640,270)

640 ⌊ 270
100 2

270 ⌊ 100
70 2

100 ⌊70
30 1

70 ⌊ 30
10 2

30 ⌊ 10
0 3

Los cálculos pueden resumirse del siguiente modo:

Cociente		2	2	1	2	3
“Dividendo”	640	270	100	70	30	10
“Residuo”	100	70	30	10	0	

Podremos entonces concluir que mcd(640,270) = 10

Esta generalización, como dijimos anteriormente es algo muy importante en el desarrollo de las matemáticas y se conoce como el algoritmo de Euclides.

Pero, ¿quien fue este matemático de quien tanto se habla? ¿Conoces alguna otra temática relacionada con él?

6.8. La Importancia de Euclides

Éste fue un matemático griego, cuya obra principal y reconocida mundialmente, "Elementos de geometría", es un extenso tratado de matemáticas en 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Se cree que estudió en Atenas con discípulos de Platón. Enseñó geometría en Alejandría y allí fundó una escuela de matemáticas. Los Cálculos (una colección de teoremas geométricos), los Fenómenos (una descripción del firmamento), la Óptica, la División del canon (un estudio matemático de la música) y otros libros se han atribuido durante mucho tiempo a este matemático. Sin embargo, la mayoría de los historiadores cree que alguna o todas estas obras (aparte de los Elementos) se le han adjudicado erróneamente. Los historiadores también cuestionan la originalidad de algunas de sus aportaciones. Probablemente las secciones geométricas de los Elementos fueron en un principio una revisión de las obras de matemáticos anteriores, como Eudoxio, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos en la teoría de números.

Los Elementos de Euclides se utilizaron como texto durante 2.000 años, e incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros constituye la base de la enseñanza de la geometría plana en las Instituciones Educativas de la ciudad.

Se habla mucho acerca de Euclides y de su contribución a las matemáticas, de todas sus recopilaciones y de sus tratados, pero tal vez después del 5º postulado de Euclides, el tema que recuerda más su nombre es el llamado algoritmo de Euclides, visto con anterioridad.

6.9. El Concepto de Congruencia y su Utilidad

Supongamos que se tienen un edificio de dos pisos con las habitaciones numeradas como se muestra en el cuadro.

1	3	5	7	9	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ad.	2	4	6	8	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98 ?

En realidad se ve muy fácil que es en el primer piso, pues en el segundo piso están las habitaciones con números impares y en el primer piso están los de números pares.

Observemos ahora un edificio diferente, el cual posee 5 pisos y en donde las habitaciones están numeradas de la siguiente manera:

4	9	14	19	24	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
3	8	13	18	23	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	7	12	17	22	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
1	6	11	16	21	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.
Ad.	5	10	15	20	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.

¿En qué piso localizamos el cuarto No. 98? ¿Se ve tan fácil aquí como se vio en el ejemplo anterior?

En el ejemplo anterior, por su sencillez, pudimos mentalmente dividir al conjunto de los enteros (positivos) en dos clases distintas: pares e impares. En este segundo ejemplo tenemos que dividirlos en 5 clases distintas y ser capaces de ubicar a cualquier entero en alguna de ellas.

Si observamos detenidamente la figura, podemos ubicar las habitaciones de la siguiente manera:

No. de Piso	**Característica**	**Forma**
Primer piso:	Múltiplos de 5	$5k$
Segundo piso:	Los que exceden en una unidad a un múltiplo de 5	$5k+1$
Tercer piso:	Los que exceden en dos unidades a un múltiplo de 5	$5k+2$
Cuarto piso:	Los que exceden en tres unidades a un múltiplo de 5	$5k+3$
Quinto piso:	Los que exceden en cuatro unidades a un múltiplo de 5	$5k+4$.

Después de este pequeño análisis, podemos decir que el cuarto No. 98 se encontraría en el cuarto piso, puesto que $98 = 5(19) + 3$.

Obsérvese que los del primer piso son aquellos números que al dividirse entre 5 dejan residuo cero, los del segundo piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo 1 y así sucesivamente.

Si consideramos el conjunto de los enteros, con este criterio podemos dividirlos en 5 clases, así:

$C_0 = \{\ldots, -15, -10, -5, \mathbf{0}, 5, 10, 15, \ldots\}$

$C_1 = \{\ldots, -14, -9, -4, \mathbf{1}, 6, 11, 16, \ldots\}$

$C_2 = \{\ldots, -13, -8, -3, \mathbf{2}, 7, 12, 17, \ldots\}$ (Clases residuales módulo 5)

$C_3 = \{\ldots, -12, -7, -2, \mathbf{3}, 8, 13, 18, \ldots\}$

$C_4 = \{\ldots, -11, -6, -1, \mathbf{4}, 9, 14, 119, \ldots\}$.

La característica de la clase C_r es que al dividirse cualquiera de sus elementos entre cinco, deja residuo r.

En general tenemos la siguiente definición:

"Decimos que los enteros *a* y *b* son *congruentes módulo m*, m>0 si al dividirse entre m dejan el mismo residuo, y lo denotaremos como:

$$\boldsymbol{a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ _m)}$$

Ejemplos:

$-13 \equiv 17 \ (\mathrm{mod}\ _5)$ pues ambos pertenecen a C_2.

$5 \equiv 15 \ (\mathrm{mod}\ _5)$ pues ambos pertenecen a C_0

$8 \equiv 17 \ (\mathrm{mod}\ _3)$ pues al dividirse entre 3, dejan residuo 2.

Observemos la siguiente proposición: - $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ _m) \leftrightarrow m \mid (b-a)$.

Demostración:

a) $(\rightarrow)$

Si $a = mq_1 + r$ y $b = mq_2 + r$ con $0 \leq r < m \ \rightarrow b-a = m(q_2 - q_1) \rightarrow m \mid (b-a)$.

b) $(\leftarrow)$

$m \mid (b-a) \longrightarrow b-a = mk$ para algún entero k

Por el algoritmo de la división $a = mq_1 + r_1$ y $b = mq_2 + r_2$ con $0 \leq r_1 < m$, $0 \leq r_2 < m$
restando estas igualdades obtenemos:
$b-a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)$. Pero como $b-a = mk$, tenemos que $r_2 - r_1 = 0$ y por lo tanto $r_2 = r_1$.
por lo que $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ _m)$

La relación congruencia módulo m tiene las siguientes propiedades:

a) $a \equiv a \ (\mathrm{mod}\ _m)$

b) Si $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ _m)$ entonces $b \equiv a \ (\mathrm{mod}\ _m)$

c) Si $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ _m)$ y $b \equiv c \ (\mathrm{mod}\ _m)$ entonces $a \equiv c \ (\mathrm{mod}\ _m)$

Es de esperarse, que las congruencias se comporten en muchos aspectos como igualdades. Esta semejanza queda ilustrada en el siguiente teorema:

Sean a, b, c enteros y m entero positivo.

1. Si $a \equiv b \pmod{m}$ entonces:

   a) $a+x \equiv b+x \pmod{m}$ para todo entero x.

   b) $ax \equiv bx \pmod{m}$ para todo entero x

2. Si $a \equiv b \pmod{m}$ y $c \equiv d \pmod{m}$, entonces:

   a) $a+c \equiv b+d \pmod{m}$

   b) $a-c \equiv b-c \pmod{m}$

   c) $ac \equiv bd \pmod{m}$

   d) $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo entero positivo n

6.10. Problemas Resueltos sobre Congruencias

1. Divisibilidad por 9: Demuestre que un entero N, expresado en notación decimal, es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

Solución: sea $N = a_0\, a_1\, a_2 \dots a_{n-1}\, a_n$

$$N = a_n x10^0 + a_{n-1} x10^1 + a_{n-2} x10^2 \text{ x} \dots \text{x } a_1 x10^{n-1} + a_0 x10^n$$

Como

$10^0 \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow a_n x10^0 \equiv a_n \pmod 9$

$10^1 \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow a_{n-1} x10^1 \equiv a_{n-1} \pmod 9$

$10^2 \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow a_{n-2} x10^2 \equiv a_{n-2} \pmod 9$

. .

. .

. .

$10^{n-1} \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow a_1 x10^{n-1} \equiv a_1 \pmod 9$

$$10^n \equiv 1 \pmod 9 \rightarrow a_0 x10^n \equiv a_0 \pmod 9$$

Sumando término a término, obtenemos: $N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \pmod 9$

Lo cual significa que $9 \mid N \leftrightarrow 9 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n)$

Podemos ahora mencionar otro importante teorema de esta teoría de congruencias:

Si $ca \equiv cb \pmod m$ y $(c,m) = d$, de modo que $m = dw$, entonces $a \equiv b \pmod w$.

Demostración: $c = dv$ y $m = dw$ donde $(v,w) = 1$.

$dw \mid c(a-b)$ y por lo tanto $w \mid v(a-b)$ y como $(v,w) = 1$ se tiene que $w \mid (a-b)$, es decir $a \equiv b \pmod w$.

Como un caso particular tenemos el siguiente resultado: Si $ca \equiv cb \pmod m$ y $(c,m) = 1$, entonces $a \equiv b \pmod m$

A continuación enunciaremos sin demostración un importante resultado de la teoría de los números, conocido como el Teorema de Fermat:

Si p es primo y no divide al entero a, entonces $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

2. Demuestre que si $(n,7) = 1$ entonces $7 \mid (n^{12} - 1)$

Observe que no podemos aplicar directamente el teorema de Fermat pues $n^{13-1} \equiv 1 \pmod{13}$ y lo que queremos es congruencia módulo 7.

Si $(n,7) = 1$, entonces 7 no divide al entero n , y por el teorema de Fermat $n^{7-1} \equiv 1 \pmod 7$

Es decir $n^6 \equiv 1 \pmod 7$. Si elevamos al cuadrado en ambos miembros de la congruencia, tendremos que $(n^6)^2 \equiv (1)^2 \pmod 7$, es decir $n^{12} \equiv 1 \pmod 7$, lo cual significa que $7 \mid (n^{12} - 1)$.

3. Determine para qué enteros positivos n, $2^n - 1$ es divisible por 7.
Si n = 3k por lo siguiente:
a. Si $n = 3k \rightarrow 2^n = (2^3)^k = 8^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7} \rightarrow 7 \mid (2^n - 1)$
b. $n = 3k + 1 \rightarrow 2^n = (2^3)^k(2) = 8^k(2) \equiv 2 \pmod{7}$
c. $n = 3k + 2 \rightarrow 2^n \equiv 4 \pmod{7}$

4. Pruebe que $2^n + 1$ nunca es divisible por 7.
Del ejercicio anterior se observa que para cualquier entero n, $2^n \equiv 1$ ó 2 ó 4 $\pmod{7}$ y por lo tanto 2^n no es congruente con -1 módulo 7 y como $-1 \equiv 6 \pmod{7}$,
2^n no es congruente con 6 módulo 7 y en consecuencia $2^n + 1$ no podrá ser congruente con 7 módulo 7.

5. Demuestre que si 7 no es un divisor de n, entonces $n^6 \equiv 1996 \pmod{7}$.
Por el teorema de Fermat, $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$, y $1 \equiv 1996 \pmod{7}$

6. Demuestre que para todo entero no negativo n, 17 es un divisor de $3^{4n+2} + 2^{6n+3}$.
Para n = 0 se cumple que $3^2 + 2^3 = 17$ lo cual significa que $3^2 + 2^3 \equiv 0 \pmod{17}$
es decir $3^2 \equiv -2^3 \pmod{17}$. Si elevamos a la potencia impar 2n + 1, obtendremos

$$(3^2)^{2n+1} \equiv (-2^3)^{2n+1} \pmod{17}$$
$$3^{4n+2} \equiv -2^{6n+3} \pmod{17}$$
$$3^{4n+2} + 2^{6n+3} \equiv 0 \pmod{17}$$

lo cual significa que 17 es un divisor de $3^{4n+2} + 2^{6n+3}$.

7. Demuestre que para todo entero no negativo n, se cumple que $(n^3-n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.
Como $n^3-n = (n - 1)(n)(n + 1)$, es múltiplo de 6 y el número $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ es par, por ser suma de impares, y 3804 = sólo restaría probar que $317 \mid (5^{8n+4} + 3^{4n+2})$, lo cual es completamente análogo al ejercicio No. 6 y se deja como ejercicio al lector.

8. Encuentre un número que al dividirse por 10 deja residuo 9, al dividirse por 9 deja residuo 8 y así sucesivamente hasta que al dividirse por dos deje residuo 1.
Tal número N debe cumplir lo siguiente:
$N \equiv 9 \pmod{10}$ pero como $9 \equiv -1 \pmod{10} \rightarrow N \equiv -1 \pmod{10}$
$N \equiv 8 \pmod{9}$ " " $8 \equiv -1 \pmod{9} \rightarrow N \equiv -1 \pmod{9}$
$N \equiv 7 \pmod{8}$ " " $7 \equiv -1 \pmod{8} \rightarrow N \equiv -1 \pmod{8}$
. . .
. . .
. . .
$N \equiv 1 \pmod{2}$ " " $1 \equiv -1 \pmod{2} \rightarrow N \equiv -1 \pmod{2}$

De las últimas congruencias a satisfacerse por N tenemos que :
N+1 debe ser múltiplo de 2,3,4,5,6,7,8,9 y 10, siendo el menor de esos números
N+1 = (10)(9)(4)(7) = 2520 y por lo tanto el número buscado es N = 2519.

9. Encontrar el número natural N más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

a. En la representación decimal, termina en 6.
b. Si el 6 es trasladado al principio del número, el resultado es 4N.

Al número N lo podemos expresar de la forma
$N = 10y + 6$ por ejemplo $abc6 = (abc)(10) + 6$
$6(10^m) + y = 4(10y + 6)$ " " " $6abc = 6(10^3) + abc = 4(abc0) + 6$
$6(10^m) - 24 = 39y$
Lo cual significa que $6(10^m) \equiv 24 \pmod{39}$.
Es decir al dividir 600...0 (m ceros) deja residuo 39, y tal número es 600,000
En consecuencia N = 153,846.

10. Una oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4. Las seis regiones suman 1994 que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F.

En términos de congruencias tenemos que:

$$
\begin{aligned}
336 &\equiv 0 \pmod 4\\
321 &\equiv 1 \pmod 4\\
335 &\equiv 3 \pmod 4\\
343 &\equiv 3 \pmod 4\\
329 &\equiv 1 \pmod 4\\
330 &\equiv 2 \pmod 4\\
\hline
1994 &\equiv 10 \pmod 4
\end{aligned}
$$

pero como $10 \equiv 2 \pmod 4$, tenemos que $1994 \equiv 2 \pmod 4$.

Si omitimos 330, obtendremos una cantidad congruente con 0 , lo cual significa que deja residuo 0 al dividirla entre 4.

A la congruencia $1994 \equiv 2 \pmod 4$, le restamos la congruiencia $330 \equiv 2 \pmod 4$, obteniendo

$$1664 \equiv 0 \pmod 4$$

En consecuencia, suprimiendo esta región (F) quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y (3)(416) = 1248 días soleados.

11.Demuestre que si a es primo con 240 entonces 240 es un divisor de $a^4 - 1$.
La factorización de 240 en primos es: $240 = (2^4)(3)(5)$
Así pues, debemos probar que $2^4 \mid a^4 - 1$, $3 \mid a^4 - 1$, $5 \mid a^4 - 1$
Claramente, por el teorema de Fermat, $3 \mid a^4 - 1$ y $5 \mid a^4 - 1$

Como $(a, 240) = 1$ y 2 es un factor de 240, 2 no puede ser un factor de a y en consecuencia
$a = 2k + 1 \rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ es decir $a^2 - 1 = 4k(k + 1)$ y como $k(k + 1)$ es par $\rightarrow 8 \mid a^2 - 1$.

Por otro lado como a es impar, a^2 también es impar y por lo tanto $a^2 + 1$ es par

$$8 \mid a^2 - 1 \text{ y } 2 \mid a^2 - 1 \rightarrow 2^4 \mid a^4 - 1$$

12. En una sección anterior habíamos planteado la forma de hallar la divisibilidad de un número utilizando una serie de coeficientes positivos y negativos que se multiplicaban por cada uno de los términos del número al cual se le buscaba la divisibilidad. He aquí el método por el cual puede hallarse esta serie “mágica” de números:

1 = 1 (mod 13)	
10 = -3 (mod 13)	(10 – (-3) es divisible por 13)
100 = -4 (mod 13)	(100 – (-4) es divisible por 13)
1000 = -1 (mod 13)	(1000 – (-1) es divisible por 13)
10000 = 3 (mod 13)	
100000 = 4 (mod 13)	
1000000 = 1 (mod 13)	

Si llamamos el primer dígito a, el Segundo b, el tercero c, … (comenzando de izquierda a derecha), tendríamos que:

a - 3*b - 4*c - d + 3*e + 4*f + g - .....

Si el número es divisible por 13, entonces también lo es el número original.

Esta técnica puede usarse para obtener otras formulas de divisibilidad por números primos. Si los números son compuestos, sólo se revisaría la divisibilidad por los divisores no primos.

6.11. Ejercicios Propuestos del Capítulo.

1. Los números 8 y 15 son primos entre sí. Calcula rápidamente su mcm y mcd.

2. El mcd de 12 y 18 es 6. Comprueba si los divisores de 6 lo son de 12 y 18.

3. El mcm de dos números es 130 y su mcd es 2. Uno de los números es 26. ¿Cuál es el otro?

4. ¿Se puede encontrar un número que sea divisor de 25 y que no lo sea ni de 50 ni de 75?

5. Tres aviones de línea regular salen del aeropuerto cada 3 días, cada 12 días y cada 18 días. ¿Cada cuántos días saldrán los tres aviones a la vez?

6. Queremos cubrir el suelo de una habitación rectangular de 82 dm de largo por 44 dm de anchura con baldosas cuadradas tan grandes como sea posible. Calcula el lado de cada baldosa y su superficie.

7. Carlos elige un número natural n y realiza lo siguiente:
Primero calcula un número $a = n^2 + 5$
Luego calcula otro número $b = (n+1)^2 + 5$
Después de esto Carlos calcula el máximo común divisor entre estos números a y b, cuál será el número más grande que es divisor de estos dos números?

8. Tres amigos pasean en bicicleta por un camino de una sola mano que bordea un lago. Para dar una vuelta completa, uno de ellos tarda 15 minutos, otro tarda 18 minutos y el tercero tarda 20 minutos. Parten juntos y acuerdan interrumpir el paseo la primera vez que los tres pasen simultáneamente por el punto de partida. ¿Cuánto tiempo duró el paseo? ¿Cuántas vueltas dio cada uno?

9. En el año 1998 se realizaron elecciones para Presidente y para Alcalde. Suponga que el período presidencial era de 6 años y el de Alcalde, de 4 años.
a. ¿En qué año volverán a coincidir las 2 elecciones?
b. Si el período de los senadores es de 5 años, ¿en qué año coincidiría el inicio de los 3 mandatos?

10. Por una ruta circulan varias líneas de colectivos cuya terminal está en el km. 0. La línea A tiene paradas cada 8 km. y la B cada 12 km.
a. ¿Cada cuántos km. coinciden las paradas?
b. Si la línea C tiene paradas cada 18 km, ¿cada cuántos km coinciden las 3 paradas?
c. Una compañía de teléfonos instaló cabinas equidistantes. Si los pasajeros cuentan con teléfono en cualquier parada de cualquier línea, ¿cuál es la distancia que hay, a lo sumo, entre dos cabinas consecutivas?

11. El m.c.d. entre a y 60 es 15. Si a está entre 25 y 50, ¿cuánto vale a?

12. Pruebe que $n^{n-1} -1$ es divisible por $(n-1)^2$ para todo entero $n > 1$.

13. Justifique, utilizando congruencias, el procedimiento descrito a continuación para adivinar un número.
Diga a alguien que seleccione un número entero menor que 1000, que lo divida entre 7, 11 y 13 y proporcione los tres residuos de la división. Usted podrá entonces decirle que número seleccionó originalmente. Esto se hace multiplicando los tres residuos respectivamente por los "números mágicos" 715, 364 y 924, sumando los productos resultantes y restando de la suma el mayor múltiplo de 1001 que deje una diferencia positiva. Esta diferencia es el número seleccionado.
Ejemplo: Si el número en cuestión es 523, los residuos son 5,6 y 3 respectivamente y usted escribiría:

$$\begin{aligned} 715*15 &= 3575 \\ 364*6 &= 2184 \\ 924*3 &= 2772 \\ & 8531 \end{aligned}$$

El múltiplo de 1001 más cercano menor que 8531 es el 8008 y al restarlos obtenemos 523.

14. Sean x, y , z números enteros tales que $x^3 + y^3 - z^3$ es múltiplo de 7. Demuestre que uno de ellos es múltiplo de 7.
Recuerde que: Todo número es de alguna de las siguientes formas: $7k$, $7k\pm 1$, $7k\pm 2$, $7k\pm 3$ y como:

7. Los Acertijos Matemáticos.

7.1. Objetivos de la Unidad:

- Reconocer la importancia de los acertijos en la educación matemática con el fin de introducirlos en el aula de clases de manera constante.
- Retomar la lúdica al interior de las clases de matemáticas con el fin de desmitificarla del carácter de ciencia difícil y poco atractiva para la mayoría de los estudiantes del bachillerato.
- Conocer los acertijos más importantes a los largo de la historia de la humanidad y los más destacados por los integrantes de la lista Snark, que es un grupo de profesores y aficionados que se ocupan de problemas matemáticos a través de la internet.
- Generar en el estudiante el deseo de resolver acertijos y de introducirlos en sus grupos de amigos, llegando a crear acertijos por sí mismos.
- Profundizar en los niveles de generalización y abstracción que se desarrollan en los estudiantes a través del trabajo, bien sea individual o colectivo.

Sugerencia: Este tema puede ser introducido a cualquier edad y en cualquier grado de la educación, sólo debe prestarse especial atención al nivel cognitivo que presenta el estudiante al momento de plantearle tal o cual acertijo. Se propone que en los cursos que se imparten de matemáticas se dejara un acertijo cada día con el fin de que el estudiante "tuviera en qué pensar" mientras regresa a una nueva clase, además de ello como es una actividad lúdica se iría introduciendo el estudiante paulatinamente en un trabajo matemático organizado si se escogen los acertijos que así lo permitan.

7.2. Historia de los Acertijos

Desde niños siempre nos hemos encontrado ligados a los acertijos, pues las adivinanzas no son más que acertijos, o la palabra acertijo puede ser el refinamiento de lo que consideramos una adivinanza; de niños, recordamos cosas como:
Por qué los peces son ricos?
Porque viajan en bancos
Y cosas así.
Podemos decir que los acertijos son "la ingeniosa descripción en prosa, de un mensaje que el receptor debe descubrir".

La curiosa tendencia a proponer acertijos no es peculiar a ninguna raza ni a ningún período de la historia. Es simplemente innata a cualquier ser humano, hace parte de nuestras relaciones en sociedad, lo que sucede es que muchas habilidades que se desarrollan durante la niñez, como el interesarse por lo desconocido, el reír y los juegos van desapareciendo a lo largo de nuestras vidas, para casi extinguirse cuando llegamos a la edad adulta.

En nuestro libro más conocido: “La Sagrada Biblia”, existen diversos acertijos, uno de ellos, el más conocido, el propuesto por Sansón en sus bodas:
“Del que comía salió comida
Del que era fuerte salió dulzura “

Sansón hacía referencia a una situación que había vivido, y que lo había llevado a plantear dicho acertijo, así mismo, la pregunta espontánea planteada por un niño a su padre, o por un deportista a otro mientras toman un breve descanso, o por un estudiante a otro, puede llegar a ser incluso acertijos de considerable dificultad. Todos estamos proponiéndonos acertijos unos a otros, todos los días de nuestras vidas, y muchas veces sin saberlo.

Un buen acertijo debe exigir el ejercicio de nuestro mejor ingenio y habilidad, aunque cierto conocimiento de matemáticas y alguna familiaridad con los métodos de la lógica son frecuentemente de gran ayuda en la solución de éstos, aún así, sucede a veces que una dosis de astucia y sagacidad naturales son de considerable valor a la hora de resolverlos, ya que muchos de los mejores problemas no pueden resolverse por ningún método escolástico conocido, sino que deben atacarse por lineamientos completamente originales.

He aquí por qué, luego de una larga y amplia experiencia, uno encuentra que determinados acertijos a veces serán resueltos con más facilidad por personas que sólo tienen buenas facultades naturales, que por aquellas que consideramos mejor educadas.

Generalmente los mejores jugadores de juegos de ingenio tales como el ajedrez y las damas, no son matemáticos, aunque es posible que ellos tengan mentes matemáticas sin desarrollar.

Es extraordinaria la fascinación que un buen acertijo ejerce sobre mucha gente. Sabemos que es un asunto trivial, y aún así nos sentimos impulsados a dominarlo; y cuando lo hemos logrado nos inundan un placer y una sensación de satisfacción que son recompensa suficiente para nuestros esfuerzos, aún cuando no haya ningún premio que ganar.

¿Cuál será entonces ese misterioso encanto que muchos encontramos irresistible? El hecho curioso es que en cuanto el enigma ha sido resuelto, el interés generalmente desaparece. Lo hemos logrado, y esto es suficiente. Pero, ¿por qué hicimos el intento de resolverlo?

La respuesta es simplemente que nos da placer buscar la solución. Un buen acertijo, al igual que la virtud, es su propia recompensa. Al hombre le fascina verse enfrentado a un misterio a una meta que quiere conseguir, y no es enteramente feliz hasta que lo ha desentrañado o hasta que ha alcanzado lo propuesto. Nunca nos gusta sentir nuestra inferioridad mental respecto a quienes nos rodean. El espíritu de rivalidad es innato en el hombre; estimula a grandes y chicos. Cuando este impulso continúa por toda la vida, generalmente nos encontramos frente a hombres que son grandes científicos, descubridores, inventores, oradores, héroes, artistas, y si tienen propósitos más materiales quizás en millonarios.

La gente generalmente comete el error de confinarse a un pequeño rincón del Reino de los Acertijos, y de esa forma pierde oportunidades de nuevos placeres que están al alcance de la mano. Unos se dedicarán a los acrósticos y otros acertijos de palabras, otros se dedicarán a los rompecabezas matemáticos, otros a problemas sobre el tablero de ajedrez, y así sucesivamente. Esto es un error, por que restringe nuestro placer, y desdeña aquella variedad, que es tan saludable para el cerebro. Además, hay una utilidad práctica en la resolución de acertijos. Se supone que el ejercicio regular es tan necesario para la mente como lo es para el cuerpo, y en ambos casos no es tanto de lo que hacemos, sino del hecho de hacerlo de lo que extraemos un beneficio.

La caminata diaria recomendada por el médico para el bien del cuerpo, o el ejercicio mental diario, pueden en sí parecer una gran pérdida de tiempo, que no es tal, ya que son beneficiosos para nuestro cuerpo y nuestra mente. Los acertijos mantienen la mente alerta, estimulan la imaginación, y desarrollan las facultades de razonamiento. Y no sólo son útiles en esta forma indirecta, sino que muchas veces nos ayudan directamente, enseñándonos pequeños trucos y artimañas que pueden aplicarse a los asuntos de la vida en los momentos más inesperados y de las formas más insospechadas.

7.3. ¿Cómo inventar buenos acertijos? Acertijos originales

No se puede inventar un buen acertijo a propósito, de igual modo que no puede inventarse así ninguna otra cosa. Las ideas para acertijos aparecen en momentos extraños y de modos extraños. Son sugeridas por algo que vemos u oímos, y se llega a ellas a través de otros acertijos que nos son formulados.

Es inútil decir, "Me sentaré a inventar un acertijo original", porque no hay forma de crear una idea; sólo se puede hacer uso de ella cuando llega.

Se puede pensar que esto es incorrecto, porque un experto en estas cosas crea cantidades de acertijos, mientras que otra persona, igualmente astuta, no puede inventar ni uno. La explicación es muy sencilla. El experto reconoce una buena idea cuando la tiene, y es capaz, por su vasta experiencia, de juzgar su valor. La fertilidad, como la facilidad, viene con la práctica. Algunas veces surge una idea nueva y muy interesante a partir de la confusión que se comete respecto de otro acertijo.

Una persona ingeniosa, con una idea, puede crear acertijos a partir de casi cualquier cosa. Monedas, fósforos, cartas, dados, pedacitos de alambre, todos son útiles. Se ha inventado una inmensidad de acertijos a partir de las letras del alfabeto, y de estos diez dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

Observemos por ejemplo los siguientes planteamientos que un niño puede hacerle a su padre en su ir y venir de preguntas:

El vidrio transparente: *Papá, ¿por qué vemos a través de un vidrio? No me digas que porque el vidrio es trasparente, ya que lo que me interesa saber es por qué es trasparente.*

Toalla mojada: *Si el agua es incolora, ¿por qué la parte de una toalla que ha sido sumergida en agua es de color más oscuro que la parte seca?*

Dios omnipotente: *Papá, ¿puede Dios hacer cualquier cosa? - Sí, hijo*

- Entonces, ¿puede hacer una piedra tan pesada que Él mismo no pueda levantar? (Sería lo mismo que preguntar: ¿Puede Dios destruir su propia Omnipotencia?)

7.4. Clasificación de los Acertijos

La variedad de acertijos es tan grande que es muy difícil clasificarlos en grupos definidos. A grandes rasgos, podríamos dividirlos en dos clases:

1. Los que se construyen sobre algún pequeño principio interesante o informativo.
2. Los que no encierran ninguna clase de principios.

Frecuentemente se fusionan de tal forma, que lo mejor es clasificarlos en unas cuantas categorías amplias:

1. Las viejas adivinanzas, que estimulan la imaginación y el juego de la fantasía.

¿Quién anda primero a cuatro patas, luego en dos y al final de sus días en tres?

(El hombre)

2. Los juegos de letras, basados en las pequeñas peculiaridades del lenguaje: anagramas, acrósticos, palíndromos, cuadrados de palabras, etc.

¿Qué palabra de quince letras pronuncian defectuosamente todos los locutores profesionales?

(Defectuosamente)

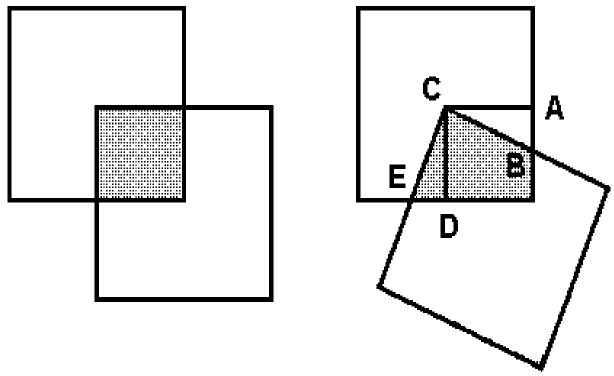
3. Los acertijos aritméticos. Una clase inmensa, plena de diversidad y en constante evolución.

¿Qué tienen de extraño las siguientes fracciones: 19/95, 26/65, 16/64?

(Quitando en cada caso, el número repetido, el resultado es el mismo: 19/95=1/5; 26/65=2/5; 16/64=1/4)

4. Los geométricos. Otra clase inmensa y llena de diversidad.

Tenemos dos cuadrados iguales superpuestos, de manera que un vértice de uno está siempre en el centro del otro. ¿En qué posición el área comprendida entre los dos cuadrados es la mayor posible?



(El área comprendida entre ambos siempre es la cuarta parte de la de un cuadrado. Los triángulos ABC y CDE son iguales.)

Estas categorías están lejos de abarcar todos los tipos que existen, aún cuando muchos pertenezcan a varias clases al mismo tiempo. Hay muchos acertijos mecánicos ingeniosos que no pueden clasificarse, ya que son bastante únicos; los hay de lógica, ajedrez, damas, cartas, dominó, y todo truco de magia no es más que un acertijo, cuya solución el mago trata de mantener en secreto.

Hay acertijos que parecen fáciles y son fáciles.

Un sastre corta cada minuto un metro de una tela que mide diez metros. ¿Cuánto tardará en tenerla completamente cortada?

(Nueve minutos. Una vez cortado el noveno metro ya no le queda otro por cortar.)

Hay acertijos que parecen fáciles y son difíciles.
Y no es cierto que un acertijo cuyas condiciones sean de fácil comprensión, aún para el niño más pequeño, sea en sí mismo sencillo. Tal acertijo puede sin embargo parecerle fácil a un inexperto, y resultarle una tarea ardua una vez que se intenta desentrañarlo.

Buscar un divisor distinto de él mismo y de la unidad del número 11.111.111.111.111.111 (hay 17 unos).

(Las condiciones son sencillas, pero la tarea es terriblemente complicada. Solamente tiene dos divisores: 2.071.723 y 5.363.222.357, y su descubrimiento es una tarea sumamente ardua.)

Hay acertijos que parecen difíciles y son fáciles.

En un torneo de ajedrez, ¿cuántos partidos tienen que jugarse si hay inscritos 974 jugadores? El mecanismo es así: después de cada partido el perdedor queda eliminado y el ganador pasa a enfrentarse a otros participantes. El campeonato continúa así hasta que queda un único ganador, el campeón.

(Si cada partido produce un perdedor (eliminado) harán falta 973 partidos para que quede un solo invicto y campeón.)

Hay acertijos que parecen difíciles y son difíciles.

El dueño de un bar quiere dividir en dos partes iguales la cerveza que lleva un recipiente de 16 litros. Para hacerlo no tiene a su disposición más que el recipiente original y dos recipientes vacíos con capacidades de 11 y 6 litros. ¿Cuántas operaciones de reenvasado o trasvase son necesarias para efectuar la partición sin perder ni una gota de líquido?

Hacen falta 14 trasvases: Recipientes de (16,11,6). Veamos: 1(16,0,0), 2(10,0,6), 3(10,6,0), 4(4,6,6), 5(4,11,1), 6(15,0,1), 7(15,1,0), 8(9,1,6), 9(9,7,0), 10(3,7,6), 11(3,11,2), 12(14,0,2), 13(8,2,6), 14(8,8,0)

7.5. Solución a Acertijos

Debemos entender la solución a un acertijo como una actividad placentera. El placer, en un buen acertijo, nace de su tensión. La tensión es la relación que se establece entre lo que el acertijo empieza por ofrecernos y lo que termina pidiéndonos. O sea, entre los datos y la incógnita. Cuanto mayor es la incongruencia entre los datos y la incógnita, mayor es la tensión del acertijo. Resolver un acertijo es resolver esa tensión, aflojarse, relajarse, reír.

La máxima de que siempre existe una forma correcta y una incorrecta de hacer cualquier cosa, se aplica muy especialmente a la resolución de acertijos. La forma incorrecta consiste en efectuar intentos sin rumbo, sin método, con la esperanza de llegar a la solución accidentalmente. Generalmente este proceso atrapa sin esperanzas en la trampa que fue diestramente tendida.

Cuando nos sentamos a resolver un acertijo, lo primero que debemos hacer es asegurarnos de haber comprendido sus condiciones lo mejor posible, ya que si no entendemos qué es lo que tenemos que lograr, es poco probable que lo consigamos.

Algunas veces se intenta confundir con pequeñas ambigüedades del significado de las palabras.

Un niño camina alrededor de un poste sobre el cual hay un mono, pero mientras el niño camina, el mono gira sobre el poste, de forma que siempre queda de frente al niño. ¿Camina el niño alrededor del mono?

Para poder dar la respuesta, es necesario saber el significado de «caminar alrededor». Si se toman las palabras de "caminar alrededor" con su significado corriente, el niño, sí camina alrededor del mono. Si "caminar alrededor" de algo se entiende, como el moverse de tal forma que nos permita ver todos sus lados, entonces la respuesta es negativa. En este caso un ciego no podría caminar alrededor de ninguna cosa. Si "caminar alrededor" de algo se entiende como el ir de forma que, dado el sentido de la vista, pueden verse todos los lados, entonces la respuesta es negativa. En este caso no se podría caminar alrededor de un hombre que estuviera encerrado dentro de una caja. Etc. Todo el asunto es divertidamente tonto, y si al comenzar se exige una sencilla y correcta definición de "caminar alrededor" ya no hay acertijo, y se evita una inútil y frecuentemente acalorada discusión.

Cuando se han comprendido las condiciones, siempre es bueno intentar simplificarlas, ya que así se evitan grandes confusiones.

Carlos estaba mirando una foto y alguien le preguntó: "¿De quién es esa fotografía?", a lo que él contestó, "Ni hermanos ni hermanas tengo, pero el padre de este hombre es el hijo de mi padre". ¿De quién era la fotografía que estaba mirando Carlos?

Puede simplificarse diciendo que "el hijo de mi padre" debe ser "mi hermano" o "yo mismo". La afirmación simplificada, viene a ser sencillamente: "El padre de ese hombre soy yo", y era obviamente el retrato de su hijo. ¡Sin embargo la gente discute este asunto durante horas!

Hay acertijos que no tienen solución. Pero, hay que tener en cuenta, que una cosa es no poder realizar determinada acción, y otra muy diferente probar que no puede ser realizada.

Consideremos un círculo de 10 cm. de diámetro. Encontrar el lado del cuadrado que tenga la misma área que el círculo.

Imposible. Sin embargo se puede llegar a aproximaciones aceptables para fines prácticos.

A veces la inexactitud del saber popular se vislumbra en acertijos como estos dos:

¿Qué pesa más, un kilo de plomo o un kilo de algodón?

Lo mismo, porque son un kilo los dos. Pero no, en el vacío pesarían igual, pero en el aire pesa menos el algodón ya que el empuje hacia arriba en función del volumen de aire desalojado es mayor.

¿Qué abriga más, una cobija de dos centímetros de grosor o dos cobijas de un centímetro de grosor cada una?

Lo mismo. No, pues abrigan más dos cobijas de un centímetro ya que la capa de aire que queda entre ellas cumple la función de aislante.

En ocasiones, ciertas personas se encuentran en una situación crítica, y sólo por su agudeza e inteligencia pueden salir de ella.

Un espía cayó en manos de una peligrosa banda de asaltantes, se le propuso la elección entre morir en la hoguera o envenenado. Para ello, el condenado debía pronunciar una frase tal que, si era cierta, moriría envenenado, y si era falsa, moriría en la hoguera. ¿Cómo escapó el condenado a su funesta suerte?

El condenado dijo: «MORIRÉ EN LA HOGUERA». Si esta frase es cierta, el condenado debe morir envenenado. Pero en ese caso ya es falsa. Y si es falsa, debe morir en la hoguera, pero en este caso es verdadera. El condenado fue liberado.

Es razonable que los grandes números despisten a quienes los tratan por primera vez. Pero cuestiones tan simples como el metro y sus divisores suelen producir una imagen subjetiva extraordinariamente lejana a la realidad.

Supongamos que un cuadrado de 1 metro de lado se divide en cuadraditos de 1 mm. de lado. ¿Qué longitud se obtendrá si colocamos todos los cuadraditos enfilados unos a otros en línea recta?

Saldrán 1.000 x 1.000 = 1.000.000 de cuadraditos. Luego se obtendrá una longitud de 1 km.

La adopción de un modo apropiado de encarar un acertijo tiene su importancia. Lo que es un lenguaje adecuado o un lenguaje inadecuado, se puede entender en los siguientes ejemplos.

Un monje decide subir desde su ermita a la montaña para pasar allí la noche orando. Sale de la ermita a las 6 de la mañana y después de caminar todo el día llega a la cumbre. Allí pasa la noche y a la mañana siguiente, a las 6 de la mañana, emprende el camino a su ermita por el mismo sendero, y a mayor velocidad. Al ir bajando, se pregunta: ¿Habrá algún punto del camino en el que hoy esté a la misma hora que estuve ayer?

Una mente inclinada matemáticamente comienza, tal vez, por hacerse una gráfica de la caminata del monje en cada uno de los días. Tiene pocos datos para ello. Se los inventa. Con un poco de trabajo verá, seguramente, la luz... Una mente menos inclinada matemáticamente puede tener la idea de hacer descender a un monje ficticio, en el mismo día que el monje real sube, replicando exactamente el camino de bajada que el monje real hace al día siguiente. Como salen a la misma hora, es claro que a alguna hora se encuentran en el camino. Las matemáticas están de sobra.

Una mañana, exactamente al amanecer, un monje budista comenzó la ascensión de una elevada montaña, siguiendo un estrecho sendero que serpenteaba alrededor de la montaña hasta un templo que, resplandeciente brillaba en su cima. El monje recorrió su camino con velocidad variable, deteniéndose muchas veces para descansar y tomar un poco de fruta seca que llevaba consigo. Muy poco antes de la puesta de sol llegó al templo. Pasados algunos días de ayuno y meditación, emprendió el camino de regreso, bajando por el mismo sendero por el que había subido, comenzando otra vez al amanecer, caminando con velocidad variable y haciendo a lo largo del día muchas pausas. Su velocidad promedio durante el descenso fue, evidentemente, mayor que su velocidad media de ascensión. Demuéstrese que hay un punto en el sendero por el cual pasa exactamente a la misma hora en los trayectos de ida y de regreso.

Un hombre un día sube a una montaña y otro desciende de ella. ¿Habrá algún punto del camino por el que pase exactamente a la misma hora del día en los dos viajes? Hay varias maneras de atacarlo, pero probablemente ninguna es más odiosamente sencilla que la siguiente:

Supongamos que dos personas realizaran el viaje el mismo día, comenzando a la misma hora una el ascenso y la otra el descenso de la montaña. Forzosamente habrán de cruzarse en algún del sendero, ... De esta forma se clarifica totalmente una situación bastante oscura dada por condiciones que no son sencillas de manejar.

El Problema de Josephus: En su libro De Bello Judaico, Hegesipo cuenta que cuando los romanos capturaron la ciudad de Jotapat, Josephus y otros cuarenta judíos se refugiaron en una cueva. Allí decidieron los 41 judíos suicidarse antes que entregarse. A Josephus y otro amigo la idea no les gustaba. Propusieron hacerlo, pero con orden. Se colocarían en círculo y se irían suicidando contando tres a partir de un entusiasta que a toda costa quería ser el primero. ¿En qué lugares se colocaron Josephus y su amigo para ser los dos últimos y, una vez en mayoría absoluta, decidir que no estaban de acuerdo con la automasacre?

El problema tiene sabor matemático y se pueden ensayar herramientas matemáticas. Pero resulta más sencillo colocar en círculo 41 papelitos con un número 1,2,3,...,40,41 cada uno y luego ir simulando los suicidios para ver qué dos papelitos quedan de últimos. Josephus y su amigo se colocaron en los lugares 16 y 31. Si se quiere obtener un resultado general con m judíos que se suicidan contando de n en n, ya hay que acudir a consideraciones más matemáticas.

Algunos acertijos están deliberadamente formulados para ser resueltos con algún truco, y si no existe solución sin el truco, es perfectamente lícito. Debemos juzgar si un acertijo encierra o no una trampa, pero nunca debemos presuponerlo. Retorcer las condiciones de un acertijo con argucias es el último recurso del solucionador derrotado.

Tres niños suben al escenario de un auditorio con un número de gran tamaño dibujado en la parte delantera de su camiseta. Los números que llevan dibujados son respectivamente 1, 3 y 6. Se ponen de frente al público y piden ser colocados por éste de forma que el número de tres cifras resultante sea divisible por siete. ¿Como los colocaría Ud.?

De izquierda a derecha: el niño del número 6 parado en las manos, luego el que tiene el 3 y después el del 1. Se forma así el número 931 que es igual a 7x133.

Hay acertijos que pueden resolverse por métodos algebraicos laboriosos, pero que ceden prontamente ante un razonamiento lógico sencillo, si se tiene la adecuada comprensión de los datos. Esto se puede observar en los siguientes ejemplos.

En una botella hay un litro de vino; en otra, un litro de agua. De la primera a la segunda se trasvasa una cucharada de vino, y después, de la segunda a la primera, se trasvasa una medida igual de la mezcla obtenida. Esta operación se repitió cinco veces más. Al finalizar la quinta operación, ¿qué hay más, agua en la primera botella o vino en la segunda?

El volumen de los líquidos después de los trasvases continua siendo de un litro. Después de los trasvases, en la segunda botella hay X centímetros cúbicos de vino y, por tanto, 1000-X centímetros cúbicos de agua. Es evidente que los X centímetros cúbicos de agua que faltan deberán estar en la otra botella. En consecuencia, habrá tanta agua en la botella de vino como vino en la botella de agua. Esta respuesta es la misma aunque las botellas contengan cantidades distintas de líquido, y tanto si la mezcla es agitada como si no. Podemos además trasladar tantas cucharadas de una a otra, y de los tamaños que queramos, tantas veces como queramos. La única condición que hay que respetar es que al final cada botella contenga la misma cantidad de líquido que al empezar.

Un bus va ocupado por 40 muchachos. En otro bus viajan 40 muchachas. Ambos se dirigen al mismo destino. Antes de arrancar, los conductores se van a tomar un tinto. Entretanto, diez muchachos bajan de su bus y se suben en el de las jóvenes. Al regresar, el conductor de las muchachas se da cuenta de que lleva demasiados pasajeros.
Conductor: ¡Bueno pues! ¡Se acabó la fiesta! Este bus tiene 40 asientos, así que 10 de ustedes tendrán que cambiarse. !Y rapidito! Diez pasajeros, de sexo no determinado, se trasladan al coche de los muchachos. Allí ocupan los diez asientos vacíos. Poco después, ambos coches arrancan, cada uno con 40 pasajeros. Más tarde, al conductor de las chicas se le ocurre:

Conductor: Humm... Seguro que en este bus van algunos muchachos, y en el de los muchachos, algunas muchachas. ¿En cuál de los dos buses habrá mayor proporción de personas del sexo opuesto?

Parece mentira, pero independientemente del sexo de las 10 personas que fueron al bus de los muchachos, la proporción de pasajeros de sexo minoritario es exactamente la misma en ambos buses. ¿Por qué? Supongamos que haya 4 muchachos en el bus de las jóvenes. Estos dejan cuatro asientos libres en el de los muchachos. Estos son los asientos que forzosamente habrán de ocupar las muchachas. El razonamiento es idéntico para cualquier otro número de muchachos.

Hay muchos trucos de cartas inspirados en este principio.

Dividimos el mazo de una baraja francesa de 52 cartas en dos mitades iguales, volvemos una de ellas cara arriba, y barajamos conjuntamente los dos montones. Se les muestra a los espectadores el mazo así barajado, sin decirles que hay exactamente 26 cartas en cada sentido. Haga usted que otra persona lo baraje nuevamente. Extienda la mano y pídale que deposite 26 cartas sobre su mano. "¿No será una coincidencia asombrosa -les dice usted a todos- que mi mano contuviera exactamente el mismo número de cartas boca arriba que la suya?"

Pídale entonces a su amigo que extienda sus naipes sobre la mesa. Al tiempo que él lo hace, disimuladamente dele usted la vuelta a su mazo, para después extenderlo junto al otro. Cuente el número de naipes que han quedado a la vista en cada grupo. ¡Ambos números serán iguales! ¿Cuál es el truco?

El truco tiene el mismo fundamento que los casos anteriores. De no darle usted la vuelta a su mazo, el número de cartas a la vista de la otra mitad coincidiría con el número de naipes ocultos de la suya. Al darle la vuelta al mazo, las cartas que estaban hacia abajo quedarán a la vista, y esto las pone en correspondencia biunívoca con las situadas boca arriba en la otra mitad.

Hay acertijos, para los que no existe ningún algoritmo ni procedimiento prefijado para resolverlos, pero a veces con un poco de perspicacia, la solución es rápida.

Dos indios americanos, uno niño y otro adulto, están sentados en un tronco, el indiecito es hijo del adulto pero el adulto no es padre del indio pequeño. ¿Cómo es posible?

El indio adulto es la madre del indiecito.

Una ameba se divide en dos (y así se reproduce) exactamente cada minuto. Dos amebas en un tubo de ensayo pueden llenarlo por completo en dos horas. ¿Cuánto tiempo le llevará a una sola ameba llenar otro tubo de ensayo de la misma capacidad?

Dos horas y un minuto. Transcurrido sólo un minuto, ya se ha dividido en dos, y sabemos que dos amebas llenan el tubo en dos horas.

A veces buscando el atajo adecuado resolvemos problemas que a primera vista parecen rarísimos.

Un niño y medio se comen un pastel y medio en un minuto y medio. ¿Cuántos niños hacen falta para comer 60 pasteles en media hora?

En minuto y medio un niño se come un pastel. En tres minutos dos pasteles. En 30 minutos 20 pasteles. Para comerse 60 en media hora se necesitan 3 niños.

Hay problemas que parecen fáciles a primera vista y sin embargo no se pueden resolver.

De un tablero de ajedrez que, como sabemos, tiene 64 casillas cuadradas, suprimimos las dos del extremo de una diagonal. Tomemos ahora 31 fichas de dominó, cada una de tamaño igual a dos casillas del tablero. Se trata de colocarlas de forma que cubran las 62 casillas que tiene el tablero tras la eliminación de las dos indicadas.

Es imposible. En efecto, cada ficha de dominó ha de cubrir, forzosamente, una casilla blanca y otra negra, puesto que se alternan. Por tanto, cualquier combinación que eligiéramos para las fichas del dominó, habrían de cubrir el mismo número de casillas blancas que negras, y como las suprimidas son del mismo color, las 31 fichas cubrirán todo el tablero.

La solución de problemas numéricos requiere método y un poco de fantasía.

A un mango subí, que mangos tenía, ni mangos toqué, ni mangos dejé. ¿Cuántos mangos había? (2 mangos)

En la solución de problemas no debe confiarse nunca. Puede haber trampas escondidas.

Un fumador compra dos paquetes de cigarrillos diarios. Para no desperdiciar nada de tabaco, nunca tira las colillas, y con cada cinco se hace un nuevo cigarrillo. ¿Cuántos cigarrillos fuma al día?

Nunca tira las colillas. Comienza con 40 cigarrillos, de cuyas 40 colillas salen 8 más, de cuyas 8 colillas saca a su vez otro cigarrillo, y le sobran 3 colillas, que con la de éste último cigarrillo serán 4 (y ya lleva fumados 49 cigarrillos). Pero como nuestro fumador nunca tira ninguna colilla, le queda al menos una del día anterior, lo que permite completar un último cigarrillo (que a su vez le suministrará la colilla necesaria para el último cigarrillo del día siguiente). La respuesta correcta no es, pues, 49, sino 50 cigarrillos.

Andrés y Clara quieren compran cada uno el libro de Historia. A Andrés le faltan $7000 para poder comprarlo y a Clara $1000. Si juntan el dinero que tienen ni siquiera pueden comprar un libro para los dos. ¿Cuál es el precio del libro?

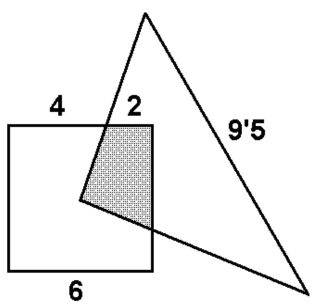
El libro cuesta $ 7000 . Andrés no tenía dinero y Clara tenía $ 6000.

Dos ancianas comienzan a andar al amanecer a velocidad constante. Una marcha de A a B y la otra de B a A. Se encuentran a mediodía y, sin parar, llegan respectivamente a B a las 4 de la tarde y a A a las 9 de la noche. ¿Cuándo amaneció aquel día?

Amaneció a las 6 de la mañana. (Intente resolverlo Ud.)

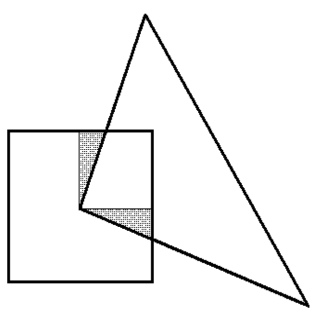
Hay problemas en los que sobran datos que desorientan la resolución.

En la figura adjunta el triángulo rectángulo tiene el vértice en centro del cuadrado.



¿Cuál es el área de la parte sombreada?

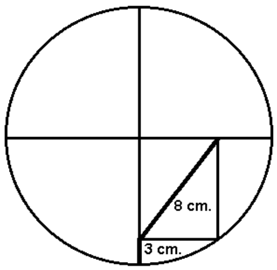
Observe que los triángulos sombreados de la figura son iguales por ser el triángulo rectángulo.



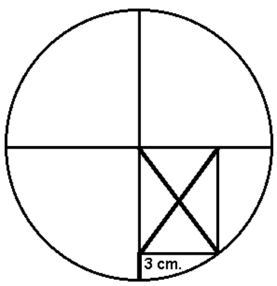
El área de la sombra es la cuarta parte del área del cuadrado. Es decir, 36/4 = 9.

Hay problemas que no necesitan ningún tipo de cálculo, sólo pensar un poquito.

Teniendo en cuenta la figura adjunta, hallar el radio del círculo.



Dado que la diagonal de 8 cm. tiene la misma longitud que el radio del círculo, la respuesta es 8 cm.



7.6. Los Acertijos más Conocidos del Mundo

De acuerdo con una encuesta que se hizo en la lista Snark, los siguientes son los acertijos más conocidos del mundo. La propuesta fue hecha por Iván Skvarca, quien pedía elegir los problemas que, "... a juicio y entender de cada uno sean los más conocidos universalmente; aquellos que les hayan contado varias veces en sus vidas, aquellos que hayan encontrado en diferentes libros, aquellos que son inevitablemente conocidos por alguien cuando se proponen en una reunión."

Snark es una lista de correo manejada por el servidor de listas de la Universidad de Buenos Aires. Las operaciones más usuales son procesadas en forma automática, aunque ciertos comandos, como el de suscripción, requieren la intervención de los administradores de la lista. Puedes ingresar en http://www.snarkianos.com

La lista es auto-moderada; todo mensaje enviado a *snark@ccc.uba.ar* es automáticamente multiplicado y distribuido sin que nadie, además del remitente, verifique su calidad o pertinencia. Recomendamos, entonces, prudencia, y sugerimos ciertas reglas básicas para asegurarse de participar con elegancia.

Son bienvenidas todas las contribuciones que estén relacionadas con el tema, aunque no sean problemas para resolver: palíndromos, trucos de magia, textos con una sola vocal, trabalenguas, hallazgos numéricos, juegos de competencia, paradojas; en general, aquello que le parezca divertido, interesante, compa(r)tible y digno de llenar las casillas de los demás miembros de Snark.

Los problemas que se propongan pueden ser originales o no. Si no es original, incluya cualquier dato que conozca que pueda ser de interés (el autor, el libro o la revista de donde lo tomó, etc.). Si el problema es original, o cree que puede serlo, indíquelo también. Por supuesto, recibimos con ansia una contribución nunca vista antes.

Aquí están entonces los acertijos:

***A**. Un pastor tiene que pasar un zorro, una cabra y un repollo de una a otra orilla de un río. Dispone de una barca en la que sólo caben él y una de las otras tres cosas. Si el zorro se queda solo con la cabra, se la come. Si la cabra se queda sola con el repollo, se lo come. ¿Cómo debe proceder el pastor?*

***B**. Un prisionero está encerrado en una celda con dos puertas: una conduce a la salvación, la otra a la muerte. Cada una de ellas está vigilada por un guardián. El prisionero sabe que uno de los guardianes siempre dice la verdad, y que el otro siempre miente. Para elegir la puerta por la que pasará, sólo puede hacer una pregunta a uno solo de los guardianes. ¿Qué debe hacer?*

C. *Hay doce monedas aparentemente iguales, pero una de ellas tiene un peso ligeramente distinto y no se conoce si esa moneda pesa más o menos que las demás. Usando una balanza de platillos, y con sólo tres pesadas, encontrar la moneda diferente y si es más o menos pesada que el resto.*

D. *Un encuestador se dirige a una casa donde es atendido por una mujer: -¿Cantidad de hijos? -Tres, dice ella. -¿Edades? -El producto de las edades es 36, y la suma es igual al número de la casa vecina, dice ella. El encuestador se va; pero al rato vuelve y le dice a la mujer que los datos que le dio no son suficientes; la mujer piensa y le dice: -Tiene razón, la mayor estudia piano. Esto es suficiente para que el encuestador sepa las edades de los hijos. ¿Cuáles son esas edades?*

E. *Un oso camina 10 kilómetros hacia el sur, 10 hacia el este y 10 hacia el norte, volviendo al punto del cual partió. ¿De qué color es el oso?*

F. *En un tablero de 3x3 colocar los números del 1 al 9 de forma que cada fila, columna y diagonal sume 15.*

G. *Tres amigos van a comer a un restaurante. Comen lo mismo y la cuenta es de 25 pesetas. Cada uno paga con un billete de 10 pesetas. El mozo trae las 5 pesetas de vuelto, cada uno toma una y le dejan 2 de propina. Más tarde hacen cuentas y dicen: cada uno ha pagado 9 pesetas, así que hemos gastado 9 x 3 = 27 pesetas, que con las 2 pesetas de la propina hacen 29 pesetas. ¿Dónde está la peseta que falta?*

H. *Situar 8 damas en un tablero de ajedrez de forma que no haya dos de ellas que se amenacen.*

I. *Dos trenes están en una misma vía separados por 100 km. Empiezan a moverse en sentidos opuestos, uno hacia el otro, a 50 km/h; en ese mismo momento, una supermosca sale de la locomotora de uno de los trenes y vuela a 100 km/h hacia la locomotora del otro. Apenas llega, de media vuelta y regresa hacia la primera locomotora, y así va y viene de una locomotora a la otra hasta que ambos trenes chocan y muere en el accidente. ¿Qué distancia recorrió la supermosca?*

J. *Dar un nombre de varón que no tenga ninguna letra en común con el nombre Carlos.*

K. *Pisar nueve puntos, acomodados en forma de cuadrado de 3 x 3, con una línea continua formada por cuatro segmentos.*

L. *En un vecindario hay tres casas y tres fuentes: una de agua, otra de luz y otra de gas. ¿Es posible conectar cada casa con cada fuente de suministro mediante líneas que no se crucen entre sí?*

M. *Reemplazar cada letra por un dígito distinto, de modo que se cumpla la igualdad SEND+MORE=MONEY*

Trata de pensar en la solución a cada uno de ellos, recuerda que si observas las respuestas inmediatamente se perderá la emoción por desentrañar cada uno de los interrogantes. Tómate tu tiempo y si definitivamente no puedes, entonces tranquilo, que aquí están todas las respuestas.

Respuestas.

***A**. En un primer viaje, cruza con la cabra dejando al zorro y al repollo (el zorro no come repollo por recomendación de su nutricionista). Deja a la cabra en la otra orilla y regresa solo. Toma el repollo y lo cruza (el zorro se queda solito y triste). Deja el repollo en la otra orilla y regresa con la cabra para que no se lo coma. Deja a la cabra sola y cruza con el zorro. Deja al zorro con el repollo, regresa solo, sube a la cabra y cruza en su último viaje triunfal. Autora de este texto: Laura Spivak*

***B**. Debe preguntarle: ¿Qué me contestaría el otro guardián si yo le preguntara cuál es la puerta que me conduce a la salvación? Supongamos que una de las puertas es roja y la otra es verde. Si me responde que el otro guardián me diría que vaya por la roja, entonces debo ir por la verde (y si me responde que el otro guardián me diría que vaya por la verde, entonces debo ir por la roja).*

Autora de este texto: Laura Spivak

***C**. Para facilitar la explicación etiquetemos las doce bolas con los números 001, 010, 011, 012, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202 y 220.*

En la primera pesada colocamos las 4 bolas cuyo primer dígito es 0 en el platillo izquierdo y aquellas cuyo primer dígito es 2 en el platillo derecho. En un papel escribimos 0 si el platillo izquierdo desciende, 1 si hay equilibrio y 2 si es el platillo derecho el que desciende.

En la segunda pesada colocamos las 4 bolas cuyo segundo dígito es 0 en el platillo izquierdo y aquellas cuyo segundo dígito es 2 en el platillo derecho, anotando el resultado del mismo modo que en la primera pesada.

Finalmente ponemos las 4 bolas cuyo tercer dígito es 0 en el platillo izquierdo y aquellas cuyo tercer dígito es 2 en el platillo derecho, anotando el resultado del mismo modo que antes.

Sea "abc" el numero que anotamos. Si hay una bola con la etiqueta "abc", esa es la diferente y es más pesada que las demás. Si no la hay, permutemos los dígitos 0 y 2 en "abc"; la bola con el número resultante es diferente y más liviana.

Este procedimiento puede generalizarse para determinar en n pesadas cuál es la bola diferente y si es más pesada o más liviana para un grupo de hasta $(3^n - 3)/2$ bolas.

Cuando se sabe si la bola diferente es más pesada o mas liviana la solución es mucho más fácil, y se puede hallar la diferente entre 3^n bolas en n pesadas.

(Publicado por José H. Nieto en es.ciencia.matematicas el 17/5/1998)

Autor de este texto: Ignacio Larrosa Cañestro

D. Para resolver este problema es imprescindible razonar desde el punto de vista del encuestador. Imaginemos por un momento que somos él, y que necesitamos averiguar tres números naturales cuyo producto es 36 y cuya suma conoceremos cuando miremos el número de la casa vecina.

Podemos listar las posibilidades:

Edades	1 1 36	1 2 18	1 3 12	1 4 9	1 6 6	2 2 9	2 3 6	3 3 4
Suma	38	21	16	14	13	13	11	10

Observamos que el conocer el número de la casa vecina resuelve el problema, siempre que éste no sea 13. Por ejemplo, si el número de la casa vecina fuese 21, el encuestador conocería inmediatamente que las edades de las hijas de la encuestada son 1, 2 y 18 años. Pero el enunciado del problema nos dice que el encuestador no halló suficientes los datos aún después de conocer la suma, y eso tiene que ser porque la suma es 13, no sabiendo el ingenioso trabajador si las hijas de la mujer tienen 1, 6 y 6 años o 2, 2 y 9 años.

El último dato aportado por la mujer ("la mayor toca el piano") permite decidir entre las dos opciones, porque establece que entre sus hijas hay una que tiene más edad que las otras, de modo que ahora el encuestador sabe que las edades son 2, 2 y 9 años.

El esqueleto del problema es: Determinar 3 números naturales cuyo producto es 36, no quedan determinados por su suma y entre los cuales hay uno que es mayor que los otros dos.

Autor de este texto: Miguel Molina

Ignacio Larrosa Cañestro hace el siguiente comentario:

Dos hermanas pueden tener la misma edad (años cumplidos), siendo una algo menos de doce meses mayor que otra. Entonces un encuestador muy puntilloso necesitaría algún dato adicional para distinguir los casos (1,6,6) del (2,2,9).

De todos modos, como el mismo enunciado dice que los datos son suficientes, este caso particular estaría descartado.

***E**. Es blanco, puesto que está en el Polo Norte. Sólo hay dos posibilidades de que tal circuito sea cerrado: i) Partiendo exactamente del Polo Norte. Avanzando en cualquier dirección se va hacia el Sur. Si después camina exactamente hacia el Este (el Oeste valdría igual), se desplaza por un paralelo, manteniéndose a la misma distancia del Polo Norte. Los 10 km finales hacia el Norte cierran el circuito.*

ii) Partiendo de un punto poco más alejado del Polo Sur que 10 km, de manera que después de caminar 10 km hacia el Sur se quede lo suficientemente cerca del Polo como para que al caminar otros 10 hacia el Este se de una o más vueltas completas al Polo, acabando en el mismo meridiano. De donde otros 10 km al Norte devolverían al oso al punto de partida. Pero en la Antártica no hay osos ...

Autor de este texto: Ignacio Larrosa Cañestro

***F**. Para que la suma de tres números sea impar deben ser uno impar y dos pares o los tres impares. De aqui se deduce que la posición central la debe ocupar un número impar, y que las posiciones simétricas respecto al centro deben estar ocupadas por números de la misma paridad. Si buscamos todas las formas de descomponer 15 en tres sumandos distintos del 1 al 9, tenemos únicamente las 8 sumas:*

9+5+1
9+4+2
8+6+1
8+5+2
8+4+3
7+6+2
7+5+3
6+5+4

En ellas se aprecia que los pares aparecen en tres sumas, luego deben estar en las esquinas; el cinco aparece cuatro veces, por tanto debe ser el central; y los restantes impares sólo aparecen 2 veces, luego deben estar en mitad de los lados.

Podemos empezar colocando cualquier par en una esquina determinada, la superior izquierda por ejemplo. El par que va en la esquina opuesta ya está determinado. Tenemos dos posibilidades para colocar los otros dos pares en las esquinas libres, pero después el 1, 3, 7 y 9 van obligados. Esto nos deja un total de ocho soluciones, que realmente son el resultado de aplicar las simetrías del cuadrado a una cualquiera de ellas. Es decir:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	3	8
9	5	1
2	7	6

Autor de este texto: Ignacio Larrosa Cañestro

***G**. No falta ninguna peseta. Cuando razonan de esa forma, están contando dos veces la propina (que ya está incluida en las 27 pesetas). El gasto total fue de 27 pesetas (25 de la consumición + 2 de propina).*

Autor de este texto: Laura Spivak

***H**. Éste es un problema de larga tradición. Algunos autores mencionan que Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855) quien fue, sin discusión, uno de los más grandes ingenios matemáticos de todos los tiempos, se ocupó de él. Al día de hoy se sabe que existen 92 soluciones del problema, algunas de las cuales son simétricas. No existe un procedimiento simple para resolverlo, salvo ensayo y error. De todos modos, nos gustaría hacer algunas consideraciones y presentar una de las 92 soluciones existentes.*

En primer lugar, es obvio que cada una de las damas debe estar en una fila y una columna del tablero que no esté ocupada por otra dama. Al ser 8 las damas, y haber en un tablero de ajedrez 8 filas y 8 columnas, se concluye que en cada fila y cada columna debe haber una única dama. Esto no resuelve el problema, porque las damas actúan también a través de las diagonales del tablero. Pero nos permite idear un algoritmo que nos lleva inevitablemente a encontrar las 92 soluciones:

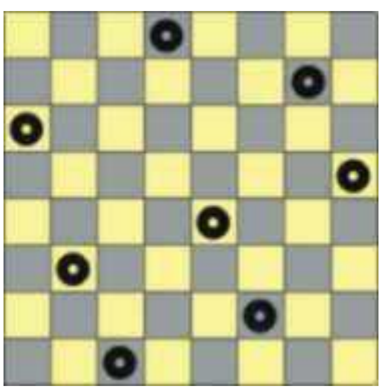
- Sitúe una dama en la casilla a1. (Para comprender la notación de las casillas, mire el tablero al final de la solución)

- Sitúe una dama en la columna b, en la casilla de fila de número más bajo que le sea posible sin que la dama anterior la amenace (en este caso, será en la casilla b3).

- Sitúe una dama en la columna c, en la casilla de fila de número más bajo que sea posible sin que las dos damas ya puestas la amenacen.

- Continúe ocupando las columnas vacías, de a una. Eventualmente encontrará una solución o habrá llegado a un callejón sin salida (no habrá podido situar las 8 damas porque todas las casillas libres del tablero están amenazadas al menos por una dama ya puesta).

En cualquiera de los casos anteriores, retire la última dama que colocó en el tablero, e intente ubicarla en la casilla más cercana de la misma columna en la que se encuentra, de número de fila mayor al que recién estaba. Continúe el procedimiento "hacia adelante" hasta que encuentre una solución o llegue a un callejón sin salida. Si en un momento no puede aplicar el procedimiento porque no puede reubicar la última dama colocada, retire todas las que sea necesario (comenzando por las últimas que ubicó) para que pueda colocar una dama más en una nueva posición, y coloque esa nueva dama en la casilla de la columna que ocupaba que esté más próxima a su anterior posición, con número de fila más alto y en que no esté amenazada, y siga "hacia adelante". Eventualmente, recorrerá todas las posibilidades y hallará las 92 soluciones. No es un procedimiento para ensayar en un tablero. Le llevaría mucho tiempo. Una computadora hace algo tan aburrido como eso mucho más rápida y eficientemente que un humano. Más divertido y rápido le puede resultar encontrar, a puro tanteo, intuición y una pizca de razonamiento, una solución diferente a la que le mostramos aquí:



Autor de este texto: Miguel Molina

***I**. Hay dos maneras típicas de resolver este problema. El método FBI (Fuerza Bruta e Ignorancia) que consiste en tomar el problema y golpearlo con toda la artillería matemática de que se disponga hasta que entregue la solución, y un método mucho más ingenioso, breve, elegante y al alcance de cualquiera desde el punto de vista* *matemático. Primero expondremos cómo sería el método FBI y luego, para contrastar, veremos la solución ingeniosa. Al final, una pequeña anécdota.*

Esbozo de solución por el método FBI:

La mosca vuela de una locomotora hacia otra. La distancia total que recorre es la "suma" de los recorridos que hace, que son infinitos, ya que toca cada una de las locomotoras infinitas veces antes de morir aplastada. El camino a la solución consiste en encontrar qué distancia recorre volando en el primer viaje de una de las locomotoras a la otra, qué distancia recorre al volver a la primera, qué distancia recorre al volver nuevamente a la segunda, y en general, encontrar una expresión que represente la distancia recorrida en el vuelo n-ésimo.

Luego, sumar todas esas distancias. Matemáticamente es posible, en ciertos casos, obtener "la suma de infinitos sumandos". A ese procedimiento se le llama técnicamente "sumar una serie". En este caso es posible hacerlo, y la solución sería la suma de la serie de las distancias recorridas por la mosca.

Solución ingeniosa:

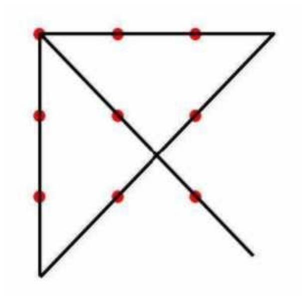
La mosca vuela a velocidad constante. Si conociéramos el tiempo durante el cual se mantuvo volando, sabríamos qué distancia recorrió. Pero es muy simple saber cuánto tiempo transcurre desde que los trenes se ponen en movimiento hasta que chocan. El choque ocurre en la mitad del camino que los separaba originalmente, por razones de simetría, o sea que cada tren recorrió 50 km antes de chocar, y lo hizo a 50 km/h, de modo que el tiempo que la mosca estuvo volando es 1 hora. Voló durante una hora a 100 km/h, por lo que recorrió 100 km.

Anécdota
Se cuenta que este problema le fue planteado a John Von Neumann, uno de los más grandes matemáticos del Siglo XX. A los dos segundos respondió correctamente. Quien se lo había planteado le dijo: "¡Muy bien! ¿Cómo lo resolvió?", para quedar atónito cuando oyó la respuesta de Von Neumann: "Sumé la serie." (Esto lo cuenta Raymond Smullyan en su libro "¿Cómo se llama este libro?")

Autor de este texto: Miguel Molina

***J**. En los años que lleva la lista se han propuesto los siguientes nombres: Quintín, Kevin, Ben, Eyén, Guy, Huenu, Inti, Nehuén, Neyén, Pehuén, Piuque, Quiney.*

K.



Autor de este texto: Ernesto González

***L**. Si fuese factible, tendríamos un grafo plano (sin cruces) con 6 vértices (3 casas y 3 fuentes) y 9 aristas (cada casa estaría unida con cada una de las tres fuentes. Este grafo puede interpretarse como el desarrollo de un poliedro, una de cuyas caras sería la región infinita que rodea a todo el conjunto. Podemos aplicarle entonces el Teorema de Euler para poliedros, Caras + Vértices = Aristas + 2, lo que en este caso da C=A - V + 2= 9 - 6 + 2 = 5 caras, o regiones, limitadas por las diferentes conducciones. Pero cada una de las regiones debe estar limitada por al menos 4 aristas, pues las casas no se conectan directamente, ni tampoco las fuentes. Como cada arista separa dos caras, necesitaríamos un mínimo de 5·4/2=10 aristas, pero ¡sólo hay 9! Por tanto el grafo no puede ser plano (sin cruces) .*

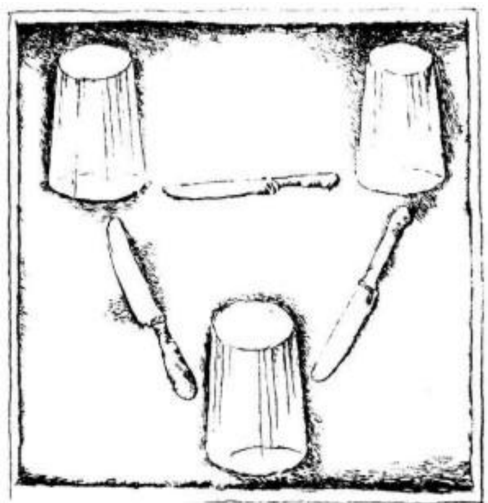
Autor de este texto: Ignacio Larrosa Cañestro

***M**. Solución: D=7 E=5 M=1 N=6 O=0 R=8 S=9 Y=2*

7.7. Acertijos Geométricos

1. Los vasos y los cuchillos

En una mesa hay tres vasos colocados de tal forma, que las distancias entre ellos son mayores que la longitud de cada uno de los cuchillos intercalados.

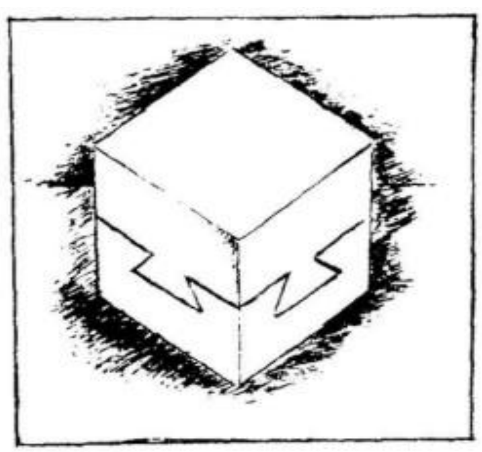


A pesar de esto es necesario hacer, con los tres cuchillos, puentes que unan entre sí los tres vasos. Está claro que no se permite mover los vasos de sus sitios; tampoco se puede utilizar ninguna otra cosa además de los tres vasos y los tres cuchillos.

¿Podría usted hacer esto?

2. ¿Cómo está hecho esto?

En la figura se ve un cubo hecho de dos trozos de madera machihembrados: el macho de la mitad superior entra en la hembra de la inferior.

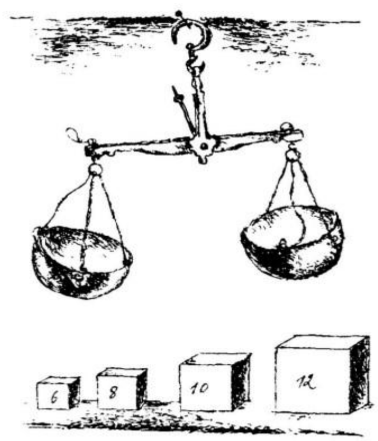


3. Dos cacerolas

Hay dos cacerolas de cobre de igual forma e idéntico espesor de las paredes. La capacidad de la primera es ocho veces mayor que la de la segunda. ¿Cuántas veces mayor es su peso?

4. Cuatro cubos

De un mismo material se han hecho cuatro cubos macizos de alturas distintas, a saber: 8 cm, 8 cm, 10 cm y 12 cm. Hay que colocarlos en los platillos de una balanza de modo que éstos queden en equilibrio.

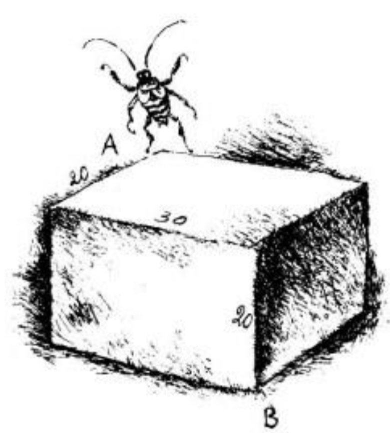


¿Qué cubo o cubos pondrá usted en un platillo y cuáles (o cuál) en el otro?

Pero fíjese en la forma y en la disposición de este machihembrado y diga cómo se las compuso el carpintero para unir las dos partes, porque cada mitad está hecha de un solo trozo de madera.

5. El camino del escarabajo

Junto a la carretera hay un adoquín de granito de 30 cm de longitud, 20 cm de altura y 20 cm de anchura.



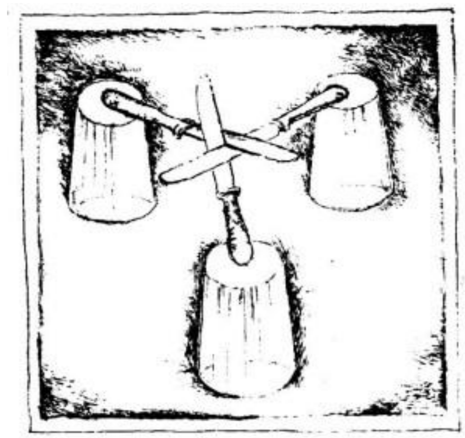
En el punto A de dicho adoquín hay un escarabajo que quiere ir por el camino más corto al ángulo B.

¿Por dónde pasa este camino más corto y cuál es su longitud?

Respuestas

1. Los vasos y los cuchillos.

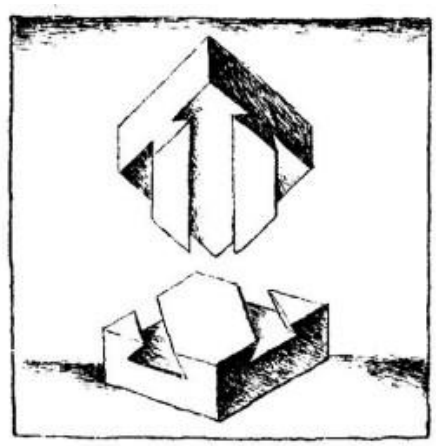
Esto es fácil de conseguir poniendo los cuchillos como se ve en la figura.



Cada cuchillo apoya uno de sus extremos en un vaso y el otro, en un cuchillo, que a su vez también se apoya en otro cuchillo. Los cuchillos se sostienen entre sí.

2. **¿Cómo está hecho esto?**

El secreto es bien sencillo, como puede verse en la figura.



Todo consiste en que tanto los salientes como los entrantes (machos y hembras) no se cruzan, como parece al mirar el objeto acabado, sino que son paralelos entre sí y tienen dirección oblicua. Estos salientes son muy fáciles de introducir en las ranuras correspondientes.

3. Dos cacerolas

Las dos cacerolas son cuerpos geométricamente semejantes. Si la cacerola grande tiene una capacidad ocho veces mayor, todas sus dimensiones lineales serán dos veces mayores: será dos veces más alta y dos veces más ancha en ambas direcciones. Pero si es el doble de alta y de ancha, su superficie será 2 * 2, es decir, cuatro veces mayor, porque las superficies de los cuerpos semejantes guardan entre sí la misma relación que los cuadrados de sus dimensiones lineales. Si el espesor de las paredes de las cacerolas es el mismo, el peso de éstas depende de la magnitud de su superficie. De aquí se deduce la respuesta a la pregunta que plantea el problema: la cacerola grande pesa cuatro veces más.

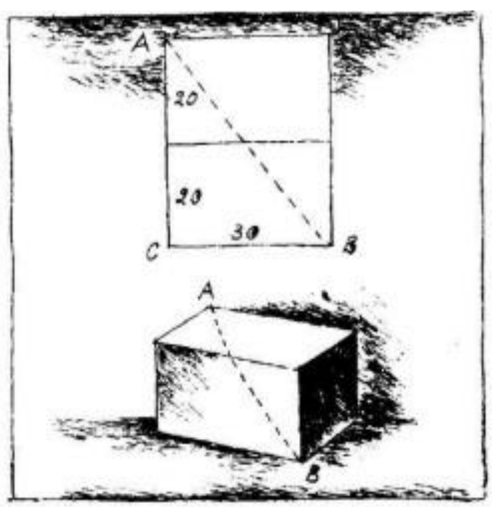
4. Cuatro cubos.

En un platillo hay que colocar los tres cubos menores, y en el otro, el grande. No es difícil cerciorarse de que la balanza debe permanecer en equilibrio. Para esto no hay más que demostrar que la suma de los volúmenes de los tres cubos menores es igual al volumen del mayor. Esto se deduce de la igualdad

$6^3 + 8^3 + 10^3 = 12^3$,
es decir,
216 + 512 + 1000 = 1728.

5. El camino del escarabajo.

El camino es fácil de encontrar, si mentalmente hacemos girar la cara superior del adoquín, de forma que quede en el mismo plano que la cara delantera.



Entonces es evidente que el camino más corto es la línea recta que une A y B. ¿Qué longitud tiene este camino? Tenemos el triángulo rectángulo ABC, en el cual AC = 40 cm y CB = 30 cm. Por el teorema de Pitágoras, el tercer lado, AB, deberá ser igual a 50 cm, ya que 302 + 402 = 502.

Así, pues, el camino más corto es AB = 50 cm.

7.8. Rompecabezas Geométricos.

1. Hexágonos y colores.

Se pretende acomodar las fichas que se presentan en la figura 1, de modo que los colores de las fichas adyacentes coincidan. Las piezas pueden rotarse sin ningún problema para encontrar “paridad” en los colores.

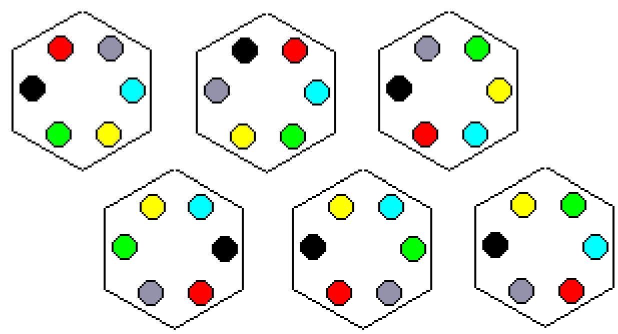
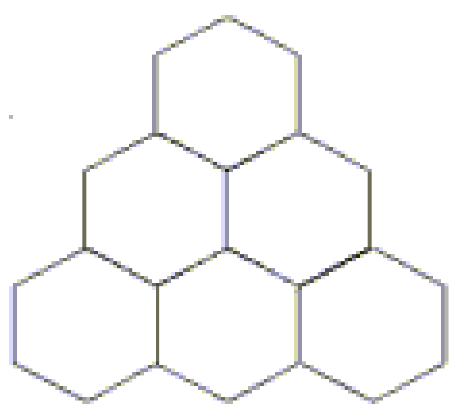


FIG. 1



2. La cuerda doblemente anudada.

En la figura 2 se muestra un cuadro de 4 X 4 (módulo 16) donde podemos ver una cuerda con dos nudos. El enigma consiste en quitar completamente los nudos de la cuerda. Es recomendable copiar, cortar y pegar la figura en un cartón para poder manipular cómodamente las 16 piezas. La solución debe quedar contenida en un módulo de 4 X 4 y las cuerdas resultantes deben ser cerradas.

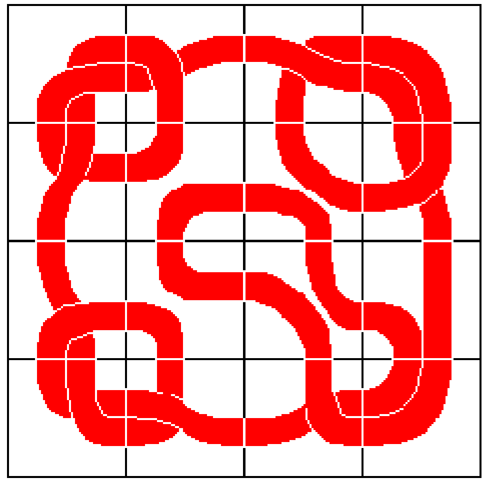


Figura 2

3. Rompecabezas de Pitágoras.

En la figura 3 tenemos un rompecabezas producido por primera vez a finales del siglo XIX por F.A. Richter and Company. Tiene como intención acomodar las piezas mostradas, de modo que se forme un cuadrado. Las piezas pueden rotarse.

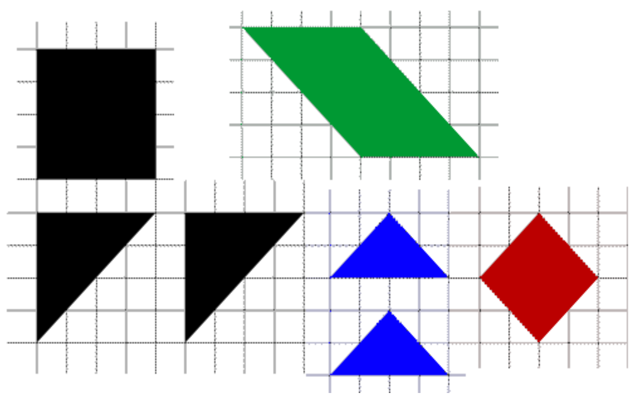


Figura 3

¿Qué otras figuras podrías construir tú, a partir de estas siete piezas?
¿Encuentras alguna relación con el famoso Tangram chino?

¿Puedes hallar el área y el perímetro de las diversas figuras propuestas, y compararlos con el área y el perímetro del cuadrado inicial?
¿Cómo son? ¿Por qué sucede esto?

4. El Crucifijo

En la figura 4 se observa un rompecabezas de origen chino, el cual data de la primera mitad del siglo XIX. Posee distintas piezas, las cuales deben acomodarse con el objetivo de formar un crucifijo. Recuerda que las piezas pueden rotarse.

Después de formada esta figura, invéntate unas 10 más. ¿Qué pasaría si partieses alguna figura simétricamente, cuántas nuevas figuras podrías construir rápidamente?

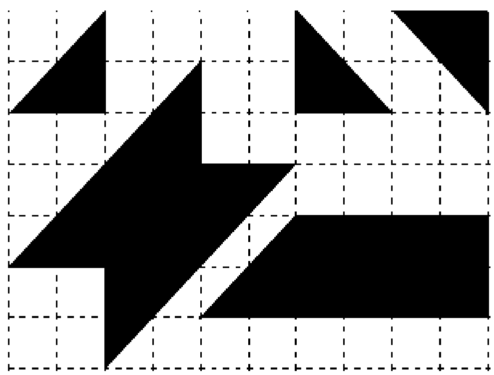


Figura 4

Estos rompecabezas se hicieron muy populares durante la primera guerra mundial, donde eran utilizados en las trincheras para ocupar y entretener a las tropas.

5. El Problema de las Ocho Reinas

Se trata de ubicar todas las piezas en un tablero de 8x8 de modo de que no haya dos círculos en la misma hilera, columna o diagonal. Como ejemplo, la figura de la derecha muestra situaciones incorrectas, pues los círculos se encuentran en la misma diagonal.

Este juego es una versión del problema conocido como *El problema de las ocho reinas*, el cual fue propuesto por primera vez en 1848 por Max Bezzel, quién preguntó ¿Cuál es el mayor número de reinas que se puede ubicar en un tablero de ajedrez de modo de que ninguna sea atacada por ninguna otra?

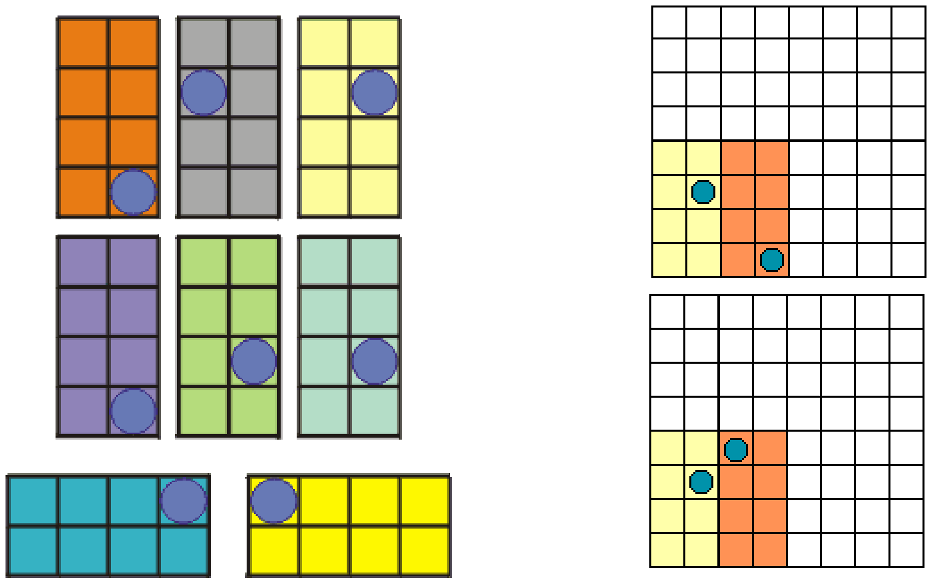


Figura 5

6. El Tangram Chino

Seguramente alguna vez has visto o jugado con el tangram.

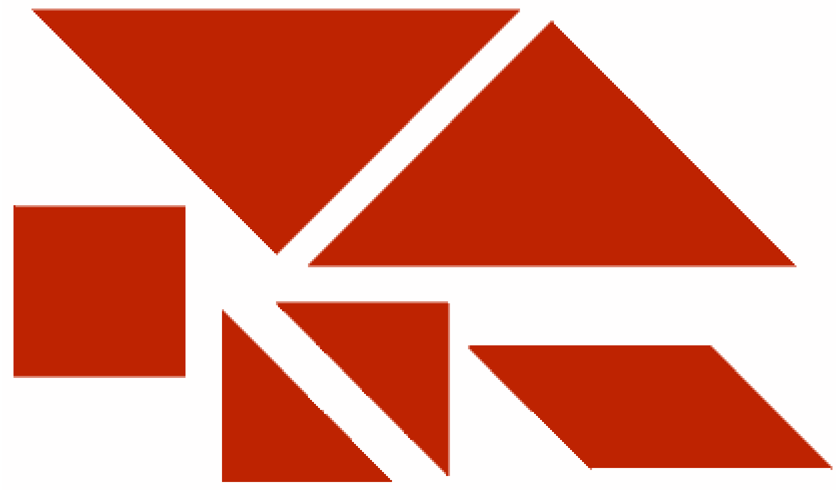
¿Sabías que este juego fue inventado por los chinos hace muchos siglos?
¿Sabías, también, que el juego se hizo famoso en el siglo XIX?

El juego del Tangram se jugaba en la antigua China y era considerado como un juego para niños y mujeres. También se han encontrado libros sobre el Tangram que fueron publicados en 1830, así como juegos de Tangram hechos de arcilla fabricados en 1890. Algunas versiones dicen que el Tangram tiene sus orígenes en las representaciones teatrales que se hacían en la antigua China. Generalmente se hacían con títeres, y lo que el publico veía era la sombra de los títeres reflejada en una pantalla, los detalles de los títeres se perdían y sólo quedaba la silueta de la figura.

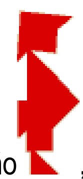
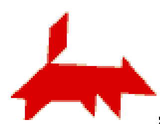
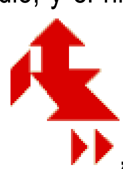
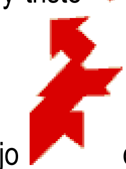
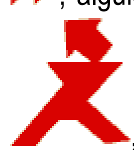
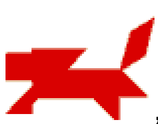
Los chinos lograban así, representar  objetos inanimados pero también animales o personas en movimiento.

El juego del Tangram es algo muy parecido: con siete piezas obtenidas de un cuadrado se pueden hacer siluetas de objetos,  animales o personas.

Encontrarás aquí un pequeño cuento, el juego consiste en que, usando las figuras del Tangram que encontrarás más adelante, construyas las situaciones del cuento que se señalan.



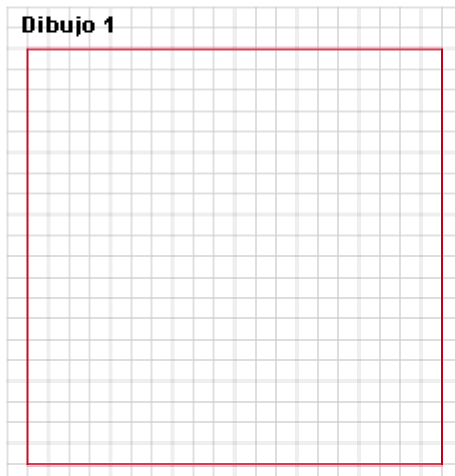
Cuento:

En una bella casa  vivía un niño , con su perro , este niño era muy alegre y le gustaba mucho bailar , pero cierto día su perro se perdió, y el niño estaba muy triste . Hizo dibujos de su perro y se los enseño a todos sus conocidos , alguien le dijo  que había visto a su perro cerca del muelle, el muchacho corrió hasta el muelle , el perro al ver a su dueño corrió hacia él , y los dos felices decidieron realizar una paseo en bote .

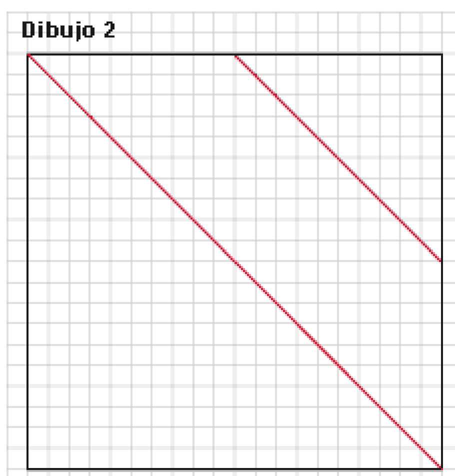
¿Cómo construir un juego de tangram?

Se sugiere que los estudiantes trabajen en una hoja de cuadriculada, pues eso facilitará los cálculos de las figuras ya que en estas hojas cada cuadradito mide 0.5 cm por lado. Si no se trabaja en este tipo de papel, entonces deberá utilizarse una regla.

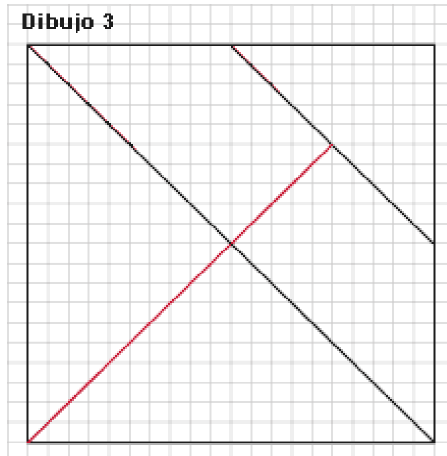
1. Dibuja un cuadrado de 10 cm por lado. (20 cuadritos de la hoja)



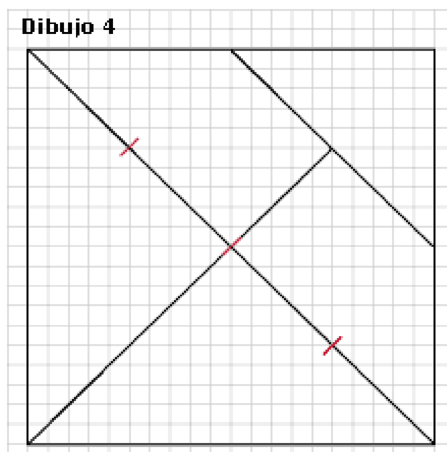
2. Traza una de las diagonales del cuadrado y la recta que une los puntos medios de dos lados consecutivos del cuadrado; esta recta debe ser paralela a la diagonal.



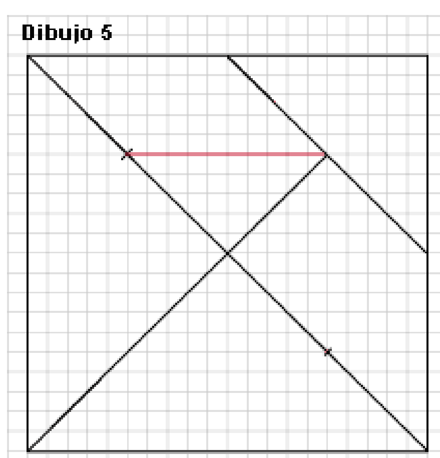
3. Dibuja la otra diagonal del cuadrado y llévala hasta la segunda línea.



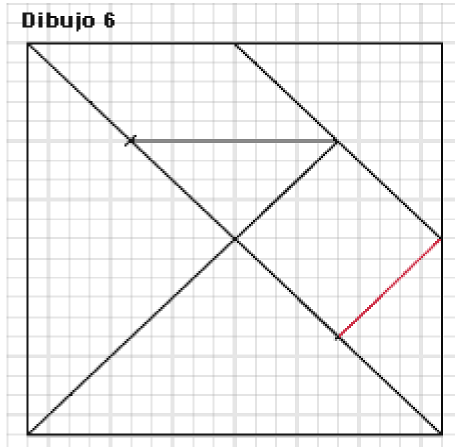
4. La primera diagonal que trazaste deberás partirla en cuatro partes iguales. (cada pedacito medirá 5 cuadritos)



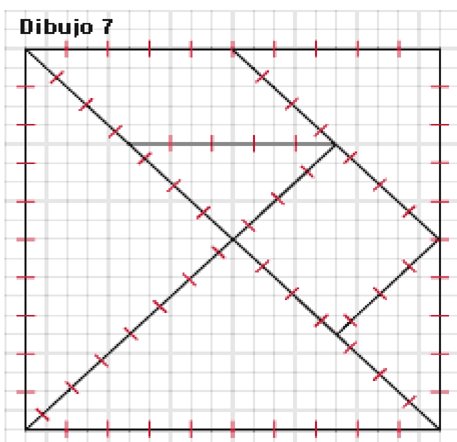
5. Traza la recta que se muestra en el dibujo.

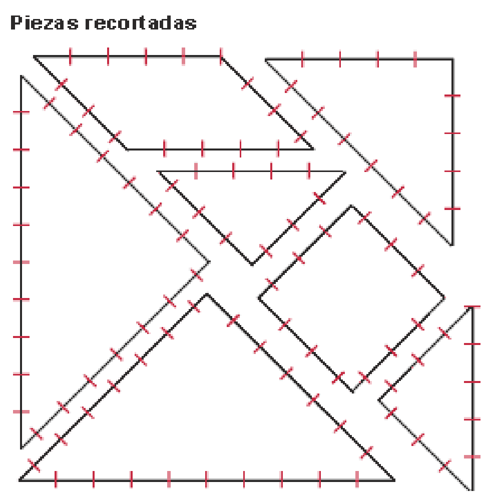


6. Por último traza esta otra recta.

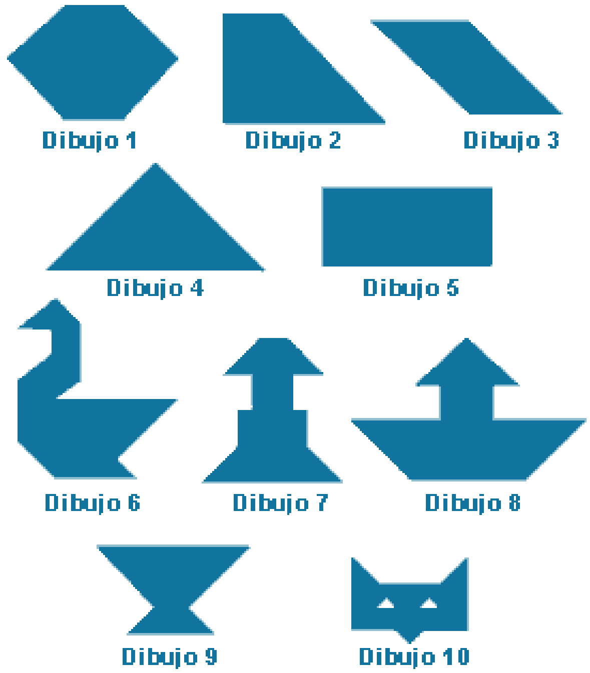


Ahora deberás graduar el tangram haciendo marcas de 1 cm (o de dos cuadritos) tal y como se muestra en el dibujo. Para marcar las diagonales necesariamente deberás **usar una regla**.





En la siguiente página encontrarás varias figuras que pueden hacerse con tu tangram.



Primero trata de realizar todas estas figuras con el Tangram y cuando ya tengas mucha práctica, puedes comenzar a jugar con la geometría. Para ello comienza completando la siguiente tabla:

Figura	Perímetro	Área
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

Analiza con cuidado cada una de las figuras

¿Tiene todas el mismo perímetro?

¿Tienen todas áreas iguales?

¿Por qué?

Tabla de contenido

8. Bibliografía

8.1. Bibliografía Escrita

Baldor, Aurelio. *Aritmética Teórico Práctica*. Publicaciones Cultura. México, 1996.

Barron R., Angela. *Constructivismo y desarrollo del aprendizaje significativo*. En: Revista de Educación. No. 294. 1991

Bell E.T. *Historia de las Matemáticas*. Trad de R. Ortiz, México D.F. 1949

Buriticá Trujillo, Benjamín. *Unidad de Aritmética para Docentes de Educación Básica y Secundaria*. Universidad de Antioquia. Medellín. 1997.

Gentile, Enzo R. *Aritmética Elemental*. Secretaría general de la OEA. Washington D.C, 1985.

Klaf A. Albert. *Arithmetic Refresher*. Dover Publication, New York. 1964.

Lucio A. Ricardo. *El Enfoque Constructivista en la Educación*. En: Revista Educación y Cultura. No 34. Santa Fé de Bogotá. 1994

Mesa B. Orlando. *Contextos para el diseño de situaciones problema en la enseñanza de las matemáticas.* Medellín. 1997.

Ministerio de Educación Nacional. *Estándares para la excelencia en la educación*. Santa fé de Bogotá. 2002.

Seidler, Víctor J. *La Sinrazón Masculina*. Ed. Piados Mexicana S.A. México. 2000

Valencia Mosquera, Pablo Eliécer; Bastidas Bedoya, Manuel Arcángel. Estrategia de Intervención Pedagógica para la Enseñanza de las Ternas Pitagóricas. U. de A. Medellín. 1998.

Viedma, Juan A. *Lecciones de Aritmética*. Editorial Bedout, Bogotá 1967.

8.2. Páginas Consultadas

http://docencia.udea.edu.co/SistemasDiscretos/

http://www.uaslp.mx/fc/ciencia/demostraciones.html

http://www.arrakis.es/~mcj/p322.htm

http://www.snarkianos.com

http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/fraacer.htm

http://www.cnice.mecd.es/mem2001/descartespuzzle/puzzledescartes/puzzlematicas/index.html

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/mate/mate3z.htm

http://www.pntic.mec.es/mem2001/descartespuzzle/puzzledescartes/puzzlematicas/index.html