LA COMPRENSIÓN DE LOS RAZONAMIENTOS INDUCTIVOS, DEDUCTIVOS Y CONJETURALES:

“El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemática”

JOHN HENRY DURANGO URREGO

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
MEDELLÍN

2009

LA COMPRENSIÓN DE LOS RAZONAMIENTOS INDUCTIVOS, DEDUCTIVOS Y CONJETURALES:

"El contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemática"

JOHN HENRY DURANGO URREGO

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación, con Énfasis en Docencia de las Matemáticas

Asesor

Dr. CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

MEDELLÍN

2009

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Trabajo de Investigación de Maestría

En la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia se reunieron los profesores Carlos Mario Jaramillo López (Presidente del jurado), Abel Enrique Posso Agudelo y Flor María Jurado Hurtado, en calidad de Jurados del Trabajo de Investigación: "La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales" presentado por el estudiante **JOHN HENRY DURANGO URREGO,** de la Cuarta Cohorte de la Maestría en Educación, línea Docencia de las Matemáticas, quien hizo una presentación pública de su Trabajo de Investigación debidamente aprobado (artículo 40 del Acuerdo Superior 122 de 1997). Una vez terminada la presentación se firmaron el acta con la calificación de **APROBADO,** por unanimidad, luego el presidente dio a conocer el resultado.

Al trabajo de investigación que mereciere ser destacado, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Meritorio:
Sobresaliente: X

Para constancia se firma en Medellín a los nueve (09) días del mes de noviembre de dos mil nueve (2009)

CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Presidente del Jurado

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Jurado

Flor Jurado
FLOR MARIA JURADO HURTADO
Jurado

DEDICATORIA

Las conclusiones de este trabajo de investigación están dedicadas a las almas más tributadas en la existencia: a Mi Madre, a Mi Padre (que me conduce eternamente), a Mi Abuela Materna, María de los Ángeles (matrona, venerada eternamente), a Mi Abuelo Materno, Ricardo, a Mi Hermana Erika, a Mi Sobrina Valentina y a JAMG, musa y dueña de todos mis sueños y deseos.

Este estudio está ofrendado especialmente a todos los investigadores que de una u otra forma buscan comprensiones de los fenómenos que ocurren a diario en la vida, para alcanzar las respuestas a preguntas, tales como: ¿Será posible conocer un dinosaurio y darle vida?, ¿Será posible que las máquinas superen la mente humana? y ¿Quiénes son los dioses que gobiernan este universo?

“Quisiera poder conjeturar, justificar y comprender el tiempo cósmico en comparación con el tiempo de vida de una mariposa, una flor o el amor”.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de investigación hace parte de la exploración en el mundo fascinante de las pruebas y conjeturas. Éste no hubiese sido viable sin la colaboración institucional de la **Universidad de Antioquia**, la **Secretaría de Educación de Medellín** y el **Instituto Tecnológico Metropolitano-Campus Castilla**.

Agradezco entrañablemente a **mi familia** por el apoyo y motivación que me brindaron, para triunfar, desde infante hasta hoy, en el complejo pero entretenido mundo de la academia. Además, agradezco a mi apreciado amigo Argiro, quien también con sus valiosas sugerencias y aportes, me colaboró a mejorar el reporte final de este trabajo. Todos ustedes quienes me rodean, fueron una fuente de iluminación de muchas de las ideas categóricas de esta investigación.

Agradezco la colaboración intelectual: sincera, precisa, intuitiva y cariñosa de mi maestro: Dr. Carlos Mario Jaramillo López, por las orientaciones tanto en la exploración del problema de investigación como en las ponencias que realizamos, en los distintos eventos académicos, en algunas regiones de Colombia y en **Illinois Urbana-Champaign University, Estados Unidos.** Y sobre todo, gracias por enseñarme de la vida y de la academia ¡Nunca se me olvidarán estas colosales experiencias!, ¡MAESTRO ADORADO!

Hago un reconocimiento especial a nuestro grupo de investigación **“Educación Matemática e Historia” (UdeA-Eafit), Categoría A-Colciencias**, por sus colaboraciones, y permiso para usar su buen nombre, al momento de presentar ponencias referentes a este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE CUADROS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

El presente trabajo de investigación aborda los procesos de pruebas y conjeturas, en la clase de matemáticas, con estudiantes de 10º y 11º del Instituto Tecnológico Metropolitano (**ITM**), del Programa de Inducción a la Vida Universitaria (**PIVU**), del Programa Especial de Ingreso a la Universidad (**PEI**) y de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (**Universidad de Antioquia**), enmarcados en los contextos de justificación y descubrimiento.

El enfoque usado en la investigación fue de carácter cualitativo; el cual permitió la construcción de las categorizaciones y descripciones de dichos contextos. El método empleado es el Análisis de Contenido que facilitó el estudio de los registros escritos presentados por los estudiantes. Adicionalmente, la investigación es de corte transversal ya que las poblaciones analizadas se observaron por tiempos cortos.

Los principales aportes del trabajo a la comunidad de investigadores y docentes en matemática son: la identificación y descripción de dificultades de los estudiantes desde los contextos de justificación y de descubrimiento, el aporte de estrategias para conjeturar en la clase y la categorización de las conjeturas construidas por los estudiantes, las cuales están en dependencia con las pruebas de validación.

Palabras Clave: Razonamiento inductivo, razonamiento deductivo, conjetura, investigación cualitativa.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo con cortes transversales de tiempo, en la cual se usó el método de análisis de contenido en los registros y producciones escritas presentadas por los estudiantes. Con este método se pretendió indagar por los contextos de justificación y conjetura en clase de matemáticas, a partir de una descripción de lo observado; y tratando de instalar la dupla de la justificación y la conjetura como ejes fundamentales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática.

El objetivo general de la investigación es: identificar y comprender cuáles son las dificultades y posibles estrategias que pueden mejorar conjuntamente los procesos de prueba y de conjetura a partir de un análisis, una interpretación y categorización de los registros escritos presentados por los estudiantes en la clase de matemáticas, alrededor de los contextos de justificación y descubrimiento matemático.

En lo que sigue, se presentará resumidamente los contenidos de cada uno de los capítulos que conforman este trabajo.

En el ***Capítulo 1***, se plantea la justificación, los antecedentes al problema de investigación (que han apuntado a la elección final del objeto de estudio), el objetivo general, los objetivos específicos y la formulación de las preguntas de investigación.

En el ***Capítulo 2***, se expone la revisión de la literatura respecto de los tópicos tratados en la investigación, la cual permitió la delimitación de los objetos y del problema de investigación.

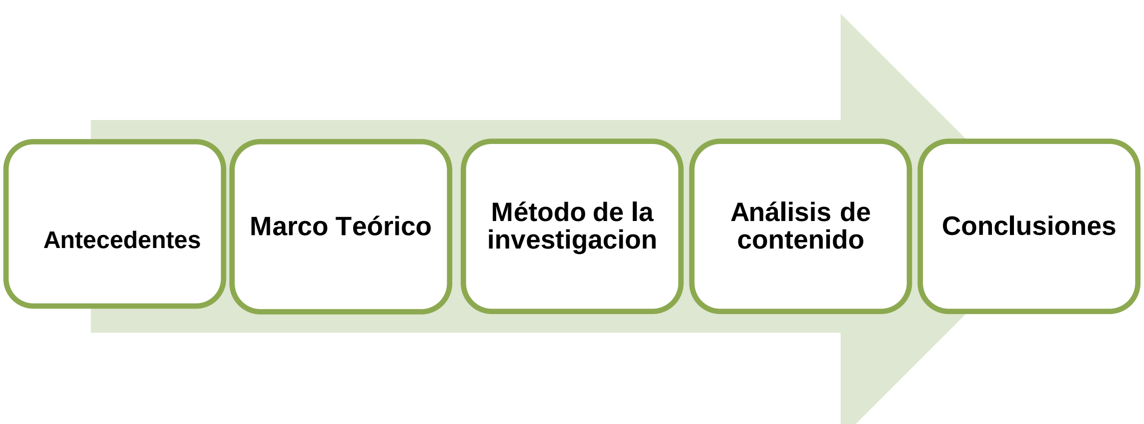
En el ***Capítulo 3***, se ilustra el método de investigación cualitativo empleado y los respectivos criterios de rigor: credibilidad, auditabilidad y aplicabilidad; adicionalmente se hace un apartado para discernir sobre el método de la investigación: el análisis de contenido de los registros escritos.

En el ***Capítulo 4***, se detalla el análisis de contenido derivado de los registros escritos presentados por los estudiantes.

En el ***Capítulo 5***, se exponen las conclusiones de la investigación direccionadas desde el objetivo general y los específicos, y el marco conceptual derivado del análisis de los registros.

Adicionalmente, se presentan **los anexos: A, B y C**, los cuales incluyen algunos elementos de la investigación: la guía didáctica (que sirvió como instrumento para la intervención), las participaciones en congresos académicos por parte del investigador y el asesor, y el glosario de algunas de las palabras usadas durante el desarrollo conceptual de la investigación, respectivamente.

Finalmente aparece acompañando este trabajo, un **CD** llamado **"Evidencias"** en donde se compilan los siguientes archivos: **algunas fotografías, dificultades expresadas por los estudiantes, evidencias A, evidencias B, evidencias C, evidencias D, parámetros guía didáctica, portafolio estudiante 1, portafolio estudiante 2, portafolio estudiante 3, talleres de teoría de conjuntos, tabla de las diagonales de un polígono y trabajo de estrategias.**



Esquema 1. Capítulos que conforman esta investigación

“Algunas personas dicen que los teoremas preceden a las pruebas en el orden del descubrimiento: “hay que barruntar un teorema matemático antes de probarlo” hay quienes lo niegan, aduciendo que el descubrimiento procede sacando conclusiones a partir de un conjunto especificado de premisas y constatando cuales son las interesantes, si es que tenemos la suerte de hallarlas.

El descubrimiento ni sube ni baja, sino que sigue una trayectoria zigzagueante aguijoneado por los contraejemplos, se mueve de la conjetura ingenua a las premisas y vuelve de nuevo a eliminar la conjetura ingenua, sustituyéndola por el teorema. La conjetura ingenua y los contraejemplos no aparecen en la estructura deductiva desplegada: el zigzag del descubrimiento no se puede discernir en el producto terminado.

El teorema no siempre difiere de la conjetura ingenua. Al probar, no mejoramos necesariamente. Las pruebas mejoran cuando la idea de prueba descubre aspectos inesperados de la conjetura ingenua que aparecen entonces en el teorema. Pero, en las teorías maduras, podría no ocurrir así. Es así efectivamente en el caso de teorías jóvenes en desarrollo. Este entretejido de descubrimiento y justificación, de mejora y prueba, es característico de las últimas.

¿Es posible rejuvenecer las teorías maduras?, el descubrimiento siempre supera la justificación”.

Lakatos (1978, págs. 59-60)

Capítulo 1

1. EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Antecedentes

La investigación pretende analizar inicialmente las dificultades que se han detectado en estudiantes universitarios con respecto a razonamientos deductivos al momento de la elaboración de pruebas y conjeturas. Lo anterior con miras a mejorar estos procesos en los estudiantes que se encuentran en la transición de la educación media a la universitaria; para ello se elaboró una intervención con una guía didáctica que le permitió al estudiante acceder al rigor matemático, a la elaboración de pruebas matemáticas, pasando de pruebas empíricas hasta pruebas intelectuales (ya que en algunos cursos servidos por el investigador, se comprobó que los estudiantes tienen incipientes: representaciones y comprensiones frente a los propósitos de justificar y demostrar en la clase de matemáticas).

En los sucesivos apartados, se expondrán los antecedentes que dieron origen y cualificación a la investigación.

1.1.1. Antecedentes desde las dificultades presentadas en los estudiantes en los cursos de matemáticas servidos por el investigador-Años: 2004 a 2006

En los cursos de **Pensamiento Matemático I, Pensamiento Matemático IV y Pensamiento Matemático VII** (que en algunos momento el investigador ha servido para la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia), los estudiantes presentan dificultades al momento de construir pruebas intelectuales y demostraciones de enunciados propuestos, y se les dificulta conjeturar.

En el **PIVU** y **PEI** (estudiantes de transición de Educación Media a universitaria), los estudiantes de algunas de las regiones antioqueñas tienen un acercamiento a las matemáticas por medio del curso Razonamiento Lógico Matemático; en él, se les prepara para el examen de admisión de la universidad, fundamentándolos en conceptos que hacen referencia a la lógica y al razonamiento matemático: conjetural, inductivo y deductivo; en donde también se detectan dificultades en cuanto a los contextos de justificación y de descubrimiento.

El investigador también como docente del **ITM** ha podido observar que a los estudiantes de Educación Media se les dificulta justificar enunciados y conjeturar en sus clases de matemáticas, dado que la temática poco ha sido abordada por los docentes en este nivel de escolaridad.

1.1.2. Aportes a la investigación surgidas desde el Foro Nacional de Competencias Matemáticas- Año 2006[1]

A partir del taller "Razonamientos Inductivos y Deductivos", realizado en Paipa Boyacá en el Post-Foro **MEN** (Ministerio de Educación Nacional- Colombia), 2006: Año de Competencias en Matemáticas, surgieron por parte de los docentes asistentes, sugerencias y aportes significativos para una mejor orientación de la investigación. Dichas sugerencias y aportes se detallan a continuación.

1.1.2.1. Aportes relacionados con el problema de investigación

- Describir de dónde surge el problema de investigación abordado. Esto con el fin, de situar los espacios, los tiempos y las condiciones mínimas para llevar a cabo la

[1] Taller titulado: **"Razonamientos Inductivos y Deductivos"**, realizado en Paipa Boyacá en el Post-Foro **MEN** (Ministerio de Educación Nacional-Colombia), 2006: Año de Competencias en Matemáticas.

investigación. Este aporte sirvió para establecer una investigación de corte cualitativo y entender que las descripciones de los procesos de justificación y de conjetura en el aula de clase deben ser analizados desde el enfoque de investigación cualitativo.

- Realizar un rastreo de la escritura y lectura de los textos escolares colombianos de matemáticas. Se sugiere estudiar detalladamente cuáles son las palabras que se emplean para evocar en los estudiantes la construcción de pruebas o demostraciones de enunciados matemáticos, o simplemente para conjeturar o razonar inductiva o deductivamente. Este aporte se tuvo en cuenta a partir del análisis de los verbos empleados para la construcción de las actividades que propiciaran conjeturas en los estudiantes.

1.1.2.2. Aportes relacionados con las dificultades en los estudiantes

- Detectar las dificultades de los estudiantes en cuanto al proceso de razonamiento matemático. Este aporte ha sido un punto focal desde el comienzo para poder realizar devoluciones significativas a las comprensiones de los estudiantes en cuestión, mediante el aporte y construcción de una guía didáctica (en la cual se abordan dichas dificultades).

- Observar las dificultades de los estudiantes en torno al proceso de aprendizaje de la demostración, la prueba y la forma de conjeturar los enunciados matemáticos. Este aporte estuvo presente en la investigación al momento de trabajar con la categorización de las dificultades.

1.1.2.3. Aportes relacionados con la elaboración y construcción de talleres y guía didáctica

- Relacionar conjeturas con preguntas en la construcción de talleres pertinentes, que motiven a los estudiantes a su realización. Esta sugerencia fue tenida en cuenta a la hora de la construcción de las estrategias para conjeturar en el aula de clase y de la guía didáctica.

1.1.2.4. Aportes relacionados con la elección del marco teórico para la investigación

- Tener presente la teoría de la complejidad y de la incertidumbre, en el aula de clase, en donde se permita al estudiante realizar conjeturas en torno a las teorías matemáticas enseñadas. Este aporte fue valioso al momento de tener presente que las conjeturas hacen parte del maravilloso universo de las incertidumbres matemáticas el cual permitió la elección del marco teórico de Lakatos para el trabajo de conjeturas.

- Diferenciar entre las clases escolares de matemáticas en Occidente y Oriente (América y Asia). Este aporte no se tuvo en cuenta, pero puede proponerse para derivar de él un futuro problema de investigación en poblaciones escolares colombianas. Al respecto existen investigaciones como la de Sekiguchi & Miyazaki (2000) referente a la prueba matemática, la cual contrasta entre Japón y Occidente algunas concepciones sobre la argumentación y demostración.

1.1.2.5. Aportes relacionados con el análisis de los contextos de justificación y descubrimiento matemático

- Enseñar en contextos a partir de proyectos productivos. Este aporte se tuvo presente para la investigación, al hablar de contextos de justificación y de descubrimiento matemático.

- Privilegiar la comunicación en la comprensión del razonamiento matemático. Este aporte se tuvo en cuenta desde el Marco de Enseñanza para la Comprensión, marco que sirvió como herramienta pedagógica al momento de la construcción de la guía didáctica y al usarla en la intervención con los estudiantes (en el cual es importante la interacción social como respuesta a la validación de pruebas en la clase de matemáticas).

- Acceder al rigor a partir de procesos escalonados para llegar a lo complejo. Este aporte tuvo gran relevancia para la elección del marco teórico propuesto. Nicolás Balacheff

(2000) propone la clasificación de dos tipos de pruebas: ostensivas[2] o pragmáticas e intelectuales[3], las cuales están en relación con el escalonamiento del rigor y el tránsito de los razonamientos inductivos a deductivos respectivamente.

- Propiciar espacios conscientes de los procesos de razonamientos inductivos y deductivos en el aula de clase de matemáticas. Este aporte sirvió para la construcción de la guía didáctica, específicamente al establecer los títulos finales y centrales de la guía didáctica.

- Sensibilizar al estudiante para que autoreflexione y realice procesos de meta-aprendizaje, al momento de realizar razonamientos lógicos matemáticos. El maestro debe hacer hincapié en la consciencia de los razonamientos inductivos, deductivos y de sus estructuras como tal. Este aporte se tuvo en cuenta desde la elección del Marco Teórico de Enseñanza para la Comprensión.

- Criticar las matemáticas enseñadas como técnicas, ya que sólo se aprende el trabajo mecánico de algoritmos. Por ello, en la propuesta de intervención no tienen gran relevancia los procedimientos que tengan que ver con el aspecto mecánico. Por el contrario, se pensó en una guía didáctica en donde el estudiante deba razonar y conjeturar.

- Establecer clara y conscientemente los procesos de validación de enunciados conjeturados durante la clase de matemáticas. La investigación se propuso abordar frontalmente este tópico.

- Transversalizar el razonamiento matemático a las demás clases del pensum académico. Este aspecto no se tuvo presente en la investigación.

- Depurar los currículos y planes de estudio de matemáticas. De alguna manera, pensar en cuáles son los tópicos generativos de los temas que se enseñan y que están en

[2] Pruebas relacionadas netamente con el razonamiento inductivo.

[3] Pruebas relacionadas con el razonamiento deductivo, y ceñidas a las reglas lógicas de inferencia.

relación con el proceso de razonamiento inductivo y deductivo, según los lineamientos curriculares de Colombia.

1.1.2.6. Aportes relacionados con la construcción de materiales de apoyo y uso de la tecnología

- Construir un laboratorio de lógica que sirva para trabajar, en las clases, los contextos de justificación y descubrimiento. Este aspecto no fue tenido en cuenta en la investigación, pero podría derivar un futuro problema de investigación.

- Emplear los medios tecnológicos en la comprensión de los razonamientos matemáticos. Este aspecto no se tuvo presente, pero podría considerarse como un futuro problema de investigación.

Los anteriores aportes se han compilado en el siguiente cuadro, en el cual se puede visualizar las implicaciones directas a la investigación.

CATEGORIZACIÓN	APORTE A LA INVESTIGACIÓN	¿SE TUVO PRESENTE Y SE REFLEJA EN LA INVESTIGACIÓN?
El problema de investigación	Origen del problema de investigación y antecedentes.	**Si.** Investigación Cualitativa.
	Realizar un rastreo de la escritura y lectura de los textos colombianos al respecto, por ejemplo estudiar detalladamente cuáles son las palabras que se emplean para evocar a los estudiantes a construir pruebas o demostraciones de enunciados matemáticos o simplemente para ponerlos a razonar conjetural, inductiva o deductivamente.	**No.** Puede generar un futuro problema de investigación en esta línea.
Las dificultades en los estudiantes	Detectar las dificultades que presentan los estudiantes en cuanto al razonamiento.	**Si.** Construcción de la guía didáctica que responda a dichas dificultades.
	Observar las dificultades de los estudiantes en torno al aprendizaje de la demostración, la prueba y la forma de conjeturar los enunciados matemáticos.	**Si.** En la exhibición y análisis de las dificultades de los estudiantes en los contextos de justificación y descubrimiento matemática en la clase de matemáticas.
La elaboración y construcción de talleres y guía didáctica	Relacionar las conjeturas con las preguntas en la construcción de los talleres que se dirijan hacia los estudiantes.	**Si.** Construcción de estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas, que posteriormente fueron tenidas en cuenta para la construcción de la guía didáctica.
La elección del marco teórico para la investigación	La teoría de la complejidad y de la incertidumbre en el aula de clase.	**Si.** En las discusiones surgidas en las intervenciones por parte de los estudiantes y en la elección del Marco de Enseñanza para la Comprensión, desde la dimensión: comunicación.
	Diferenciar entre las clases escolares de matemáticas en Occidente y Oriente (América y Asia).	**No.** Este tópico puede derivar un futuro problema de investigación en esta línea teniendo en cuenta las repercusiones en la Educación Matemática Colombiana.
El análisis de los contextos de justificación y descubrimiento matemático	Enseñar en contextos a partir de proyectos productivos.	**Si.** Contextos de justificación y de descubrimiento matemático.
	Privilegiar la comunicación en la comprensión del razonamiento matemático.	**Si.** En la elección del marco teórico: Enseñanza para la Comprensión.
	Acceder al rigor a partir de procesos poco complejos e ir escalando.	**Si.** En la elección del marco teórico de Balacheff en cuanto a las pruebas ostensivas e intelectuales y sus respectivas gradaciones.
	Propiciar espacios conscientes de razonamientos inductivos y deductivos en el aula de clase de matemáticas.	**Si.** La guía didáctica.
	Sensibilizar a que el estudiante emplee procesos conscientes, al momento de realizar razonamientos	**Si.** Mediante la comprensión.

	lógicos matemáticos.	
	Criticar a las matemáticas enseñadas como técnicas y con procesos mecánicos sin razonamientos.	**Si.** En la propuesta de intervención como tal, en donde los procedimientos no están premeditados ni las conjeturas.
	Establecer clara y conscientemente los procesos de validación de enunciados conjeturados al interior de clase.	**Si.** Este es uno de los tópicos en los cuales apunta la investigación.
	Transversalizar el razonamiento matemático a las demás clases del pensum académico.	**No.** Puede derivar un futuro problema de investigación en esta línea.
	Depurar los currículos y planes de estudio de matemáticas.	**Si.** La intervención es una propuesta que tendrá que ser aplicada a otras poblaciones, y evaluada desde los currículos y planes de estudios pertinentes a las clases. Éste puede ser también un futuro problema de investigación.
La construcción de materiales de apoyo y uso de la tecnología para el trabajo con los estudiantes en los contextos de justificación y descubrimiento	Construir un laboratorio de lógica que sirva para trabajar en las clases: los contextos de justificación y descubrimiento.	**No.** Más adelante se puede derivar como un problema de investigación.
	Emplear los medios tecnológicos que puedan servir para potenciar la comprensión de los razonamientos matemáticos.	**No.** Este tópico puede derivar un futuro problema de investigación.

Cuadro 1. Reflexiones y aportes de los maestros de Paipa-Boyacá.

1.1.3. Conceptualizaciones de los objetos de investigación desde los Lineamientos Curriculares Colombianos de Matemáticas. Año 1998

Asimismo, ha servido como antecedente al problema de investigación, lo planteado por el **MEN** (**Ministerio de Educación Nacional**) en lo referente a los contextos de justificación y descubrimiento matemático. La investigación pretende hacer un aporte significativo a la conceptualización de contextos de justificación y descubrimiento matemático en la clase, derivado de dichos planteamientos.

Inicialmente se puede afirmar, como resultado de un estudio minucioso de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, que éstos tienen conceptualizaciones insuficientes referidas a los dos contextos contemplados y sólo hacen alusión someramente a lo que se presenta a continuación.

El **MEN** (1998, pág. 77) vagamente y sin hondura, en referencia al razonamiento matemático, dice: *"Dentro del contexto de planteamiento y resolución de problemas, el razonamiento matemático tiene que ver estrechamente con las matemáticas como comunicación, como modelación y como procedimientos".*

Es trascendental entonces decir que el razonamiento matemático está relacionado con la comunicación de los estudiantes y el docente en las clases.

Según el **MEN** se presenta posteriormente descripciones (sin realizar asociaciones explícitas y concretas con el razonamiento inductivo, deductivo y conjetural) sobre lo que es el proceso de razonar, específicamente en cuanto a lo que significa demostrar en matemáticas, al respecto declara:

- *Dar cuenta del cómo y del por qué de los procesos que se siguen para llegar a conclusiones.*
- *Justificar las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas.*

- *Formular hipótesis, hacer conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para explicar otros hechos.*
- *Encontrar patrones y expresarlos matemáticamente.*
- *Utilizar argumentos propios para exponer ideas, comprendiendo que las matemáticas más que una memorización de reglas y algoritmos, son lógicas y potencian la capacidad de pensar.* (1998, pág. 54)

El presente estudio procura que el docente adquiera una consciencia plena sobre el diseño de situaciones, problemas y actividades que debe proponer a sus estudiantes alrededor de dichos contextos.

Y continúa el **MEN,** que para favorecer el desarrollo del razonamiento matemático, se debe:

- *Propiciar una atmósfera que estimule a los estudiantes a explorar, comprobar y aplicar ideas. Esto implica que los maestros escuchen con atención a sus estudiantes, orienten el desarrollo de sus ideas y hagan uso extensivo y reflexivo de los materiales físicos que posibiliten la comprensión de ideas abstractas.*
- *Crear en el aula un ambiente que situé el pensamiento crítico en el mismo centro del proceso docente. Toda afirmación hecha, tanto por el maestro como por los estudiantes, debe estar abierta a posibles preguntas, reacciones y reelaboraciones por parte de los demás.* (1998, pág. 54)

Se resalta nuevamente la comunicación como una dimensión importante para la comprensión de los razonamientos matemáticos.

En cuanto a los razonamientos en los grados de Educación Media (10º y 11º), el **MEN** hace insistencia simple por el trabajo del razonamiento deductivo, al respecto dice:

> *Un objetivo fundamental es el de propiciar a los estudiantes numerosas experiencias que les hagan sentir, admirar y ejercitar el maravilloso poder lógico de su cerebro para lanzar hipótesis, formular conjeturas, confirmarlas o refutarlas,*

argumentar a favor o en contra de una tesis, realizar inferencias, detectar supuestos ocultos, demostrar teoremas, generar y transformar información en forma rigurosa y extraer de ella otra información no percibida a primera vista, construir algunas demostraciones para enunciados matemáticos, dar contraejemplos. Deben aprender diferentes métodos de demostración. Tener experiencias en las que utilicen razonamientos inductivos y deductivos. Es necesario también analizar afirmaciones de la vida cotidiana a partir de los principios lógicos que sustentan la argumentación. *(1998, págs. 77-78)*

Y finalmente el **MEN** propone que como pauta para la evaluación de los razonamientos se debe pretender indagar si el estudiante:

- *Formula hipótesis, las pone a prueba, argumenta a favor y en contra de ellas y las modifica o las descarta cuando no resisten la argumentación.*
- *Sigue argumentos lógicos, juzga la validez de un argumento y construye argumentos lógicos sencillos y válidos.*
- *Analiza situaciones de la vida diaria.*
- *Disfruta y se recrea en exploraciones que retan su pensamiento y saber matemático y exigen la manipulación creativa de objetos, instrumentos de medida, materiales y medios.*
- *Hace inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficas que recogen situaciones del mundo real; estima, interpreta y aplica diferentes medidas.*
- *Detecta y aplica distintas formas de razonamiento y métodos de argumentación en la vida cotidiana, en las ciencias sociales, en las ciencias naturales y en las matemáticas; analiza ejemplos y contraejemplos para cambiar la atribución de necesidad o suficiencia a una condición dada.*
- *Hace preguntas y elabora proposiciones hipotético-deductivas. (1998, págs. 67)*

La investigación responde a una construcción de marco conceptual de algunas de las insuficiencias de la propuesta construida por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en relación con la comprensión de los razonamientos, tales como el uso de las conjeturas, los estilos escritos de pruebas, y las relaciones entre las conjeturas y los procesos de validación de las mismas.

1.1.4. Disertaciones y paradigmas de investigación arrojados en el Coloquio de la Prueba (University of Massachusetts Dartmouth). Año 2007

Ilustración 1. Logo the Proof Project-University of Massachusetts Dartmouth

Esta investigación responde algunas de las objeciones planteadas por Nicolás Balacheff y Paolo Boero (quienes son los investigadores más destacados a nivel mundial en el campo de la enseñanza de las pruebas y conjeturas en la clase de matemáticas) en cuanto a los contextos de justificación y descubrimiento. Ellos han planteado algunos problemas de investigación, y que han sido discutidos por el grupo de investigadores de ***The Proof Project***[4] y particularmente en lo propuesto en ***The Research Colloquium*** celebrado en ***Providence, Rhode Island, Estados Unidos*** en octubre 4 y 5 de 2007 en **University of Massachusetts Dartmouth** (se pueden encontrar las memorias de dicho evento en el sitio web: http://www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/rc_topics.php).

Dentro de las preguntas de investigación que son tratadas en el paradigma de investigación propuesto por Balacheff, y que iluminan la presente investigación, él expresa que:

> ***•¿What questions in your research paradigm have been answered by yourself or by others?***
>
> *-A rather accurate view of the different types of proofs (arguments) and of their relation; their place in the genesis of mathematical proof is still to be understood, as well as their didactical "exploitation".*

[4] Se puede consultar en el sitio web http://www.tpp.umassd.edu/

> *-Need for a clear consensus, so that things can be taken for granted for a while and progress can be made without circular reconstructions.*
>
> *-Better links between argumentation and proof. However, the relation between explanation, verification and communication must be clarified and stabilized. They seem often supported in different papers by quasi-ideological positions. That all these aspects exist is almost a consensus. How they interact is an open question.*
>
> *-There is a set of concepts didactical contract, norms and customs] which acknowledges the institutional and social character of mathematical proof from a didactical perspective. As well as a good awareness of the double bind to which the teacher is submitted.*
>
> *-The cognitive unit across problem solving, proving and meaning making has been demonstrated by the Italian school, still to be articulated into a comprehensive model. The triplet (theorem, proof, theory) is at the core of this approach. (2007, pág. 1)*

Según Balacheff (2007) también se propone la necesidad de establecer que el razonamiento y exclusivamente el deductivo, surge de la necesidad de aprenderlo y dominarlo.

De otra parte, también ve importante y lo señala explícitamente, que una investigación que se inserte en tópicos de la prueba y la conjetura debe de estar permeada por los estudios de Imre Lakatos.

Balacheff señala cuáles son las preguntas que responde su paradigma de investigación, cuáles han sido respondidas por otros y da ideas respecto a la investigación de estos dos contextos en el aula de clase. Al respecto en el coloquio de la prueba expuso:

> ***•¿What theoretical assumptions underpin your research paradigm?***
>
> *-Knowledge is constructed, and so is rationality (ref Piagetian constructivism) either as a result of the interaction with the environment (need to take decision, plan action) or with other human beings (socio-construction, collaborative learning).*

-Language is a tool consubstantial to the construction of rationality, or is required for it to be constructed (Habermas), but also language imposes its own constraints on the construction of argument (e.g. Duval, Ducroct about argumentation, semiotic laws in general).

-Mathematics as an activity: the nature of the mathematical objects shapes the complexity of learning mathematical proof. Quasi-empirical nature of the learning of mathematics (need to revisit and understand Lakatos – bridging proving and knowing).
-A didactical theory is a theory of validation. Proof is at the core of didactical processes.
-Situations are key in the dynamic of proof; they are also one of the possible obstacles to its learning (problem of didactical engineering). (2007, pág. 1)

En cuanto a las preguntas tratadas en su paradigma investigación, Balacheff expresa:

•¿What are the big questions in your research paradigm that you would like to see answered (by yourself or by others)?

-What are the precursors of mathematical proof from an epistemological perspective (genetic epistemology)?
-What are the optimal conditions for the learning-teaching of mathematical proof?
-Need for a framework bridging proving and knowing. (2007, pág. 1)

Las técnicas experimentales empleadas por Balacheff en su paradigma de investigación, son las siguientes, dando respuesta a la pregunta:

•¿What experimental techniques do you use to address your questions and what standards of evidence will you use to decide if a question is answered?

-Didactical engineering.

-Mise en scène of students relations and interactions to elicit their proving processes (or rationale for their decisions, choice and validation).
-Discourse analysis.
-Technics coming from the study of argumentation, like the Toulmin schema (without necessarily buying all the Toulmin theoretical framework). (2007, pág. 2)

•¿***What particular sequence of experiments or analysis do you anticipate will lead to answers to the big questions you describe above?***

-Longitudinal studies across curriculum and evolution of the students through their school life. A real challenge.
-Analysis of the micro-genesis of proof and validation.
-Analysis of classroom sequences following planed scenario and an explicit a priori modeling. (2007, pág. 2)

Y finalmente Balacheff menciona investigaciones desarrolladas, y que están en relación con la propia:

•¿***Are there any researchers or schools of thought that you consider yourself to be aligned with?***

-The Italian school (Mariotti, Boero, Bartolini-Bussi).
-Harel and Sowder to some extend (the psychological dimension to be questioned).
-Brousseau theory of didactical situations (situations for validation).
-Herbst model of the classroom as a societal-didactical phenomena/entity.

Actually it is more seeing where the contact can be established and further developed than an actual alignment. It may be a general position. (2007, pág. 2)

Es destacable también los aportes investigativos que se discutieron alrededor de los trabajos de la Escuela Italiana, específicamente a las conjeturas y pruebas, en relación con los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales; particularmente se enfatizan para esta investigación los aspectos relacionados con las fases entre conjeturar y probar, al respecto expuso Boero:

> *The most interesting theorems for the students' approach to proof are those for which the "Cognitive Unity" of theorems works: the arguments developed in the conjecturing phase can be re-arranged in a deductive chain in the proving phase. However, the teacher must be aware that (according to Pedemonte's study) an obstacle can derive from the break of "structural continuity" when the student moves from inductive or abductive processes developed during the constructive phases of conjecturing and proving, to the deductive enchaining of constructed arguments. (2007, pág. 2)*

1.2. Planteamiento del problema de investigación

Con base en las conceptualizaciones esgrimidas hasta el momento, se puede inferir claramente por parte del lector que los objetos de estudio de la presente investigación son ***las pruebas*** y ***conjeturas*** construidas por los estudiantes durante la clase de matemáticas.

A partir de lo anteriormente mencionado, la investigación pretende dar respuesta a las preguntas, enmarcadas en cada uno de los siguientes tópicos:

- **Propuesta del análisis de contenido de las dificultades de los estudiantes en los contextos de justificación y de descubrimiento matemático**

¿Cuáles son las distintas dificultades desde la lógica matemática, que se detectan en los estudiantes, al momento de proponerles validar un enunciado matemático, que ha sido conjeturado por ellos mismos alrededor de una teoría matemática; y cuáles son las dificultades recurrentes en ellos para que no logren pruebas intelectuales?

- **Propuesta de una categorización de las dificultades detectadas**

¿Qué posible categorización de las dificultades detectadas en los estudiantes, relativa a los contextos de justificación y descubrimiento, se puede construir para generar estrategias que ayuden a superar dichas dificultades?

- **Propuesta de unas estrategias que pueden emplear los estudiantes para que conjeturen en clase de matemáticas**

¿Cuáles estrategias para conjeturar pueden mejorar la comprensión matemática en los estudiantes cuando se enmarcan en los contextos de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas?

- **Propuesta de una guía didáctica que propenda por la comprensión de los contextos investigados en clase de matemáticas**

¿Qué posible guía didáctica puede responder a la pretensión de mejorar la comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales desde los contextos de justificación y descubrimiento matemático?

- **Propuesta de una categorización de las conjeturas detectadas en los estudiantes**

¿Qué posible categorización se puede construir para las conjeturas realizadas por los estudiantes en el contexto de descubrimiento, a partir del contexto de justificación y validación dentro del lapso de tiempo de la clase de matemáticas?

El proceso de la investigación se puede apreciar en la Ilustración 2.

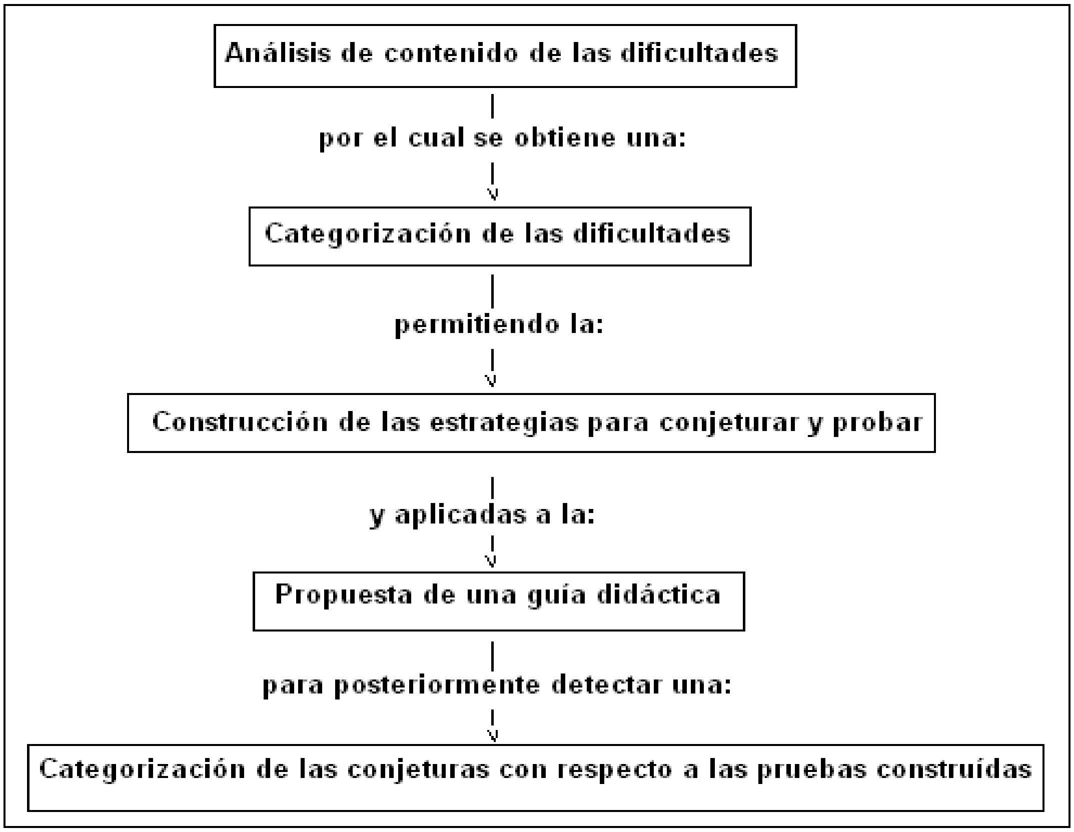


Ilustración 2. Esquema de las fases del problema de investigación

1.3. Objetivos de la investigación

1.3.1. Objetivo general

Describir cuáles son las dificultades presentadas por los estudiantes en los contextos de justificación y descubrimiento, con el fin de proponer una estrategia para conjeturar y poder superar estas dificultades; a partir de un análisis, una interpretación y una categorización de los registros escritos presentados por ellos en la clase de matemáticas, mediante el método de investigación de análisis de contenido empleando cortes transversales de tiempo.

1.3.2. Objetivos específicos

- Elaborar una intervención con estudiantes universitarios, en donde se detecten sus dificultades al momento de razonar inductiva, deductiva y conjeturalmente, con miras a mejorar estos procesos en los estudiantes de PIVU y PEI.

- Diseñar una guía didáctica que responda a las dificultades presentadas por los estudiantes del PIVU y PEI al momento de justificar y conjeturar; a partir del análisis de las dificultades y construcción de estrategias para conjeturar en el transcurso de la clase (teniendo como base las dificultades detectadas en los estudiantes universitarios).

- Construir un análisis de contenido de los registros presentados por los estudiantes del PIVU y PEI, mediante la intervención con una guía didáctica, en donde se ponga en evidencia un diagnóstico de las dificultades que ellos presentan al momento de justificar y conjeturar sus enunciados matemáticos, en el transcurso de la clase.

- Categorizar dichas dificultades a partir de conceptualizaciones lógicas de la matemática y de los contextos de justificación y descubrimiento, desde las visiones de Nicolás Balacheff e Imre Lakatos respectivamente; y desde el Marco de Enseñanza para la comprensión, para la posterior devolución hacia la construcción de un marco conceptual.

- Clasificar las conjeturas presentadas por los estudiantes, de acuerdo con las observaciones de los registros recolectados a partir de las condiciones temporales al momento en que se realiza la validación del enunciado: ya sea durante la clase o por fuera de ella.

Capítulo 2

2. MARCO TEÓRICO

Al momento de emprender la revisión de literatura y la selección del marco teórico que direccionó la investigación, en consonancia con los propósitos del capítulo 1, se le solicitó una recomendación bibliográfica al investigador Nicolás Balacheff, con respecto a los contextos de justificación y la demostración en la Educación Matemática. Él recomendó el estudio del texto "Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas" (de su autoría), y los trabajos de Patricio Herbst adscrito a Michigan University. Balacheff N., (Comunicación personal, 2006).

Bonjour,

J'ai publié un ouvrage en espagnol que vous pourrez peut être trouver dans le commerce en colombie: ***Processos de prueba en los alumnos de matemáticas.***

Una empressa docente Universidad de los Andes, 2000 pour le reste, je passe votre courrier à ***Patricio Herbst*** *à* ***Michigan University*** *qui saura probablement vous répondre mieux que moi.*

Ben cordialement.
NB

Las anteriores recomendaciones sirvieron para visualizar y estructurar los esquemas de pruebas en los estudiantes integrantes de las poblaciones en estudio, así como también, en lo referente a las pruebas a dos columnas, lo cual se puede evidenciar en el análisis de contenido realizado a los registros escritos presentados por los estudiantes universitarios.

El marco teórico que ha dado soporte a esta investigación está demarcado en primer lugar, por las teorías propuestas de ***Nicolás Balacheff***, en cuanto al contexto de justificación. En segundo lugar, por las teorías de ***Imre Lakatos***[5] en cuanto al contexto del descubrimiento matemático. Y en tercer lugar por el Marco de Enseñanza para la Compresión derivado de las investigaciones realizadas por ***The Project Zero*** in ***Harvard Graduate School of Education.*** (El cual se puede consultar en el sitio web: http://www.pz.harvard.edu/index.cfm).

Las teorizaciones de Nicolás Balacheff, que se tuvieron en cuenta para analizar el contexto de justificación en la clase de matemática, han proporcionado bases teóricas a esta investigación, en cuanto a conceptos tales como: prueba, explicación, demostración y categorización de los esquemas de prueba, así como también de los contraejemplos.

La investigación hace una adaptación de algunas de las conceptualizaciones construidas por Lakatos en cuanto a conjeturas, clasificadas en temporales y omnitemporales (este marco teórico soporta el contexto de descubrimiento. Se puede leer en el apartado 4.2.4.).

El Marco de Enseñanza para la Comprensión ha permitido en la investigación establecer el diseño de la guía didáctica, la cual tiene como propósito mejorar la consciencia y los niveles de compresión de los estudiantes, en cuanto a los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales, a partir de las dimensiones de la comprensión: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación.

[5] Balacheff desarrolló la investigación “Procesos de Prueba en los Alumnos de Matemáticas” y él menciona que es importante estudiarla si se quiere comprender el contexto de descubrimiento.

2.1. Revisión de literatura con respecto al problema de investigación

2.1.1. Breve concepción histórica de la demostración en matemáticas

Para estudiar el contexto de justificación en la clase de matemáticas, se debe remitir imprescindiblemente a la historia de la demostración, ya que ésta inspira a docentes para abordar didácticamente los procesos de validación en los estudiantes en el aula de clase y permite que se comprendan **las rupturas epistemológicas de la matemática** alrededor del razonamiento, las cuales tienen implicaciones al momento de la enseñanza en la clase, ya sea en la educación básica, media o universitaria.

La demostración matemática ha sido aprovechada como método de validación de enunciados generados a su alrededor y tiene sus raíces en la demostración de la irracionalidad de algunos números, en donde la matemática se convierte en una ciencia hipotética deductiva; al respecto Arsac comenta, haciendo referencia a Balacheff:

> *[…] El análisis de Nicolás Balacheff permite atribuir realmente a los griegos la invención de la demostración, sin negar a sus predecesores toda forma de prueba en el sentido que precisaremos. De manera paradójica, podremos decir incluso que el siglo V antes de Cristo marca en los griegos, en geometría, el paso de la prueba a la demostración. (1987, págs. 267-312)*

De acuerdo con lo propuesto por Arsac citando a *Szabo,* se relata la aparición de la demostración en la historia de la cultura griega con la aplicación de las reglas del debate.

> *[…] atribuye la aparición de la demostración en matemáticas esencialmente a la influencia externa de sociedad griega. Esta tesis es además relativamente tradicional: la transformación de la matemática en ciencia hipotética-deductiva sería la aplicación de las reglas del debate argumentando que gobernaban la vida política en la ciudad griega. (1987, págs. 267-312)*

A manera de conclusiones en este apartado, en relación a la historia de las matemáticas, puede inferirse que antes de los aportes de la cultura griega, los razonamientos se enmarcaban dentro de los procesos inductivos, es decir, a partir de casos particulares se trataba, por parte de los matemáticos, de buscar generalizaciones a enunciados básicamente en la geometría y aritmética. Como se puede ver, el razonamiento inductivo tiene una construcción natural y espontánea en la matemática. Ahora bien, en la cultura griega aparecen aportes a la matemática a partir del debate y específicamente aportes relacionados con las reglas de inferencia y los razonamientos deductivos. Puede entonces deducirse que aparece una ruptura epistemológica en la construcción de la matemática en referencia al razonamiento, y que el razonamiento inductivo parece natural, en tanto que el razonamiento deductivo aparece como construcción de la cultura griega por asegurar precisión en el discurso y debate.

2.1.2. Concepciones de explicación, prueba, demostración y razonamiento

Balacheff (2000, págs. 12-13) hace una reconstrucción teórica de lo que se entiende por: explicación, prueba, demostración y razonamiento en matemáticas.

Por explicación, plantea que está dada por un sujeto y por las subjetividades de éste, la forma de razonar es particular, sin atender a una validación externa (carencia de procesos de interacción social). Al respecto se entenderá por Explicación:

> *[…] siguiendo a los lingüistas, situamos la explicación al nivel del sujeto locutor. Para él ésta establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir, sus propias reglas de decisión de la verdad. En el momento en que la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor. (2000, págs. 12-13).*

La prueba es un tipo de explicación en donde se debe convencer a una comunidad o grupo de estudio. La validez se garantiza por la aceptación de una comunidad. Por prueba se entenderá:

> *[…] cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene para diseñarla disponer de un término que permita marcar su distinción del sujeto locutor. En matemáticas es claro que el término demostración no es el más conveniente debido a que su acepción es muy específica. Seleccionamos el término prueba. (2000, págs. 12-13).*

La demostración en matemáticas es rígida, está sujeta a las reglas de inferencia, y economía de la lógica; y la aceptación se garantiza por el convencimiento que adquiere frente a una comunidad de matemáticos. Por demostración, se entenderá:

> *[…] El tipo de prueba dominante en matemáticas tiene una forma particular. Se trata de una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas. De aquí en adelante llamaremos demostración a estas pruebas. Lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso en su forma estrictamente codificada. (2000, págs. 12-13).*

Por razonamiento, Balacheff (2000) propone que: *“es toda actividad intelectual en su mayoría no explícita, de manipulación de informaciones para, a partir de datos, producir nuevas informaciones”*.

Asimismo siguiendo a Valverde (2001) por razonamiento inductivo, entenderemos en la investigación:

> *Es aquel en el que de un conocimiento de menor grado de universalidad se pasa a uno de mayor grado de universalidad (o sea, de algunos casos particulares se pasa a un juicio universal). (2001, pág. 40)*

En las inferencias inductivas se emplean generalmente procedimientos de tipo heurístico, como una vía hacia las generalizaciones de los enunciados, sustentadas en el análisis de las regularidades de los distintos casos particulares experimentados.

De igual modo, siguiendo a Valverde por razonamiento deductivo, entenderemos:

> *[…] "las conclusiones se infieren necesariamente de las premisas, las cuales expresan conocimientos de grado mayor de universalidad y que la conclusión de por sí presenta un conocimiento de grado inferior de universalidad". (2001, pág. 39)*

Es básico señalar que las reglas de inferencia (que son trascendentales en la construcción de los razonamientos deductivos, se encuentra su explicación en el anexo A, apartado A.7.1.) van a servir para interpretar y simbolizar un conjunto de premisas (o hipótesis) y una tesis, para así, poder elaborar toda una secuencia lógica de pasos hacia la demostración.

Sobre los enunciados lógicos, que están en dependencia directa con las reglas de inferencia, cabe preguntarnos por su valor de verdad (verdadero ó falso) y por su estructura sintáctica lógica, esto es, si es de forma simple o compuesta, ya que en la matemática es vital estudiar los condicionales y los bicondicionales; y asociados a éstos: la implicación (cuando ya se garantiza que un condicional es verdadero) y la equivalencia (cuando ya se garantiza que un bicondicional es verdadero). Puesto que los enunciados lógicos deductivos de la matemática son: implicativos o equivalentes, en su gran mayoría.

También las tautologías son trascendentales dentro de la lógica matemática, ya que nos dan estructuras sintácticas verdaderas en todo momento, sin importar su semántica. Además de las contradicciones, que en todo tiempo son falsas sin importar su contexto semántico. Las definiciones de tautología y contradicción pueden tomarse del anexo C: glosario de palabras.

De otra parte, la lógica matemática, y en especial, el razonamiento deductivo, han sido significativos al darle el estatus e identidad de ciencia a la matemática en épocas contemporáneas; ya que ciertas disciplinas científicas no tienen un procedimiento propio de validación de los resultados investigativos producidos en su interior, y sólo se basan en generalizaciones que, por lo general, resultan de razonamientos inductivos y razonamientos estadísticos.

El matemático al enfrentarse a una conjetura de un cierto concepto, él en muchos casos, debe realizar su respectiva argumentación y demostración del nuevo teorema que ha sido investigado. Los procesos desarrollados (haciendo parte del método de investigación como matemático) son fases constantes de pruebas, mejoras de conjeturas y refutaciones. Consecuentemente con lo anterior, se propone que desde la misma enseñanza de las matemáticas escolares los estudiantes se acostumbren al método de construcción de la matemática. En algunos casos es difícil encontrar estos tipos de procesos en los mismos matemáticos, al respecto Lakatos (1978) haciendo mención a la heurística empleada por los matemáticos para construir y pulir conjeturas, argumenta:

> *Los matemáticos son incapaces de ponerse a la vez a probar y refutar una conjetura, debido a sus empedernidos dogmas heurísticos. O bien la prueban, o bien la refutan. Además, son especialmente incapaces de mejorar las conjeturas, refutándolas, si resulta que las conjeturas son suyas. Quieren mejorar sus conjeturas sin refutaciones; nunca se deciden a reducir la falsedad, si no es mediante el monótono aumento de verdad; así, purgan el aumento de conocimiento del horror de los contraejemplos.*

Lo anterior nos sirve para hacernos reflexionar frente a los procesos de conjetura y validación que se pudiesen tener dentro de la misma aula de clase.

Y continúa diciendo, que los autores que trabajan en este campo son conscientes del método que siguen: conjeturas arriesgadas, proliferación de hipótesis, contrastaciones severas, refutaciones. Lakatos (1978).

La lógica matemática, por tanto, es la base en la que se soporta la teoría matemática dando parámetros definidos: las reglas de inferencias, las reglas de validez de los razonamientos deductivos y los criterios de validación de las demostraciones; los cuales sirven para realizar al interior mismo de la matemática, inferencias, argumentaciones o pruebas a las conjeturas.

No se puede negar que la demostración ha pasado a lo largo de la historia de las matemáticas por una evolución a partir de las pruebas desde Egipto, es decir pruebas que van desde lo informal y empírico hasta lo intelectual y con una rica estructura lógica.

Los griegos aportaron la semilla del rigor a la matemática, pasando de pruebas basadas en la evidencia a pruebas que ya no requerían de ésta. En los griegos se aprecia cómo la matemática pasa a objetos ideales, demostraciones y enunciados en donde se hace presente la generalización de objetos matemáticos por medio del razonamiento deductivo. Es aquí en este momento histórico en donde se presenta una ruptura epistemológica en cuanto al razonamiento matemático.

Esta es una de las rupturas epistemológicas de la matemática que no es consciente por algunos docentes; la cual pone en desventaja la enseñanza y aprendizaje de prueba y demostración en el aula de clase, provocando en los estudiantes dificultades alrededor del razonamiento deductivo. Por tanto es oportuno para la investigación hablar del principio de continuidad en la enseñanza de la demostración matemática desde los inicios de la educación básica, pasando por la educación media hasta la universitaria.

Dicha ruptura epistemológica se da en cuanto al razonamiento deductivo y la demostración como tal en la historia de la matemática, la cual permite deducir que los estudiantes en una clase de matemáticas deben adaptarse tempranamente y continuamente[6] a los trabajos de construcción de pruebas y procesos de validación desde lo inductivo a lo deductivo sin sobresaltar caminos, así como también a los procesos de conjetura (debe de establecerse una gradación de los niveles de comprensión con los procesos de prueba y conjetura). Al respecto Stylianides de University Oxford, Reino Unido, propone el principio de continuidad en los procesos de prueba directamente con los estudiantes en las clases de las matemáticas escolares, para establecer unas conexiones entre las producciones inductivas y deductivas de pruebas en los estudiantes:

[6] Esto implica que las investigaciones que apunten a rastrear el principio de continuidad de los procesos de prueba en la escuela sean de corte longitudinal en el tiempo.

“The continuum principle, which states that there should be continuity in how the notion of proof is conceptualized in different grade levels so that students’ experiences with proof in school have coherence”. Y continua: “Currently, much elementary mathematics teaching focuses on arithmetic concepts, calculations, and algorithms, and, then, as students enter secondary school, they are suddenly required to understand and write proofs. This creates a discontinuity in students’ experiences with proof in school that explains, at least in part, the fact that even advanced students demonstrate poor ability in proving. Also, the fact that proof is typically not a focus of elementary mathematics teaching deprives elementary students of opportunities to explore why “things work” in mathematics, which would provide them with a solid basis for conceptual understanding”. (2007, pág. 2)

2.2. Contexto de justificación en clase de matemática: el estilo escrito de las pruebas a dos columnas

2.2.1. Estilo escrito de las pruebas a dos columnas

El proponer en este apartado referentes teóricos de las pruebas a dos columnas, se debe a que éste fue uno de los estilos escritos presentados por los estudiantes universitarios, con los cuales se realizó la investigación; estilo retomado por los estudiantes debido a que fue derivado de las exposiciones en clases por parte del docente. El análisis realizado para esta investigación de las ventajas así como de las desventajas, es lo que permite avanzar y dar aportes de control a los manejos y esquemas de prueba en la clase. También trabajar con pruebas a dos columnas permitió un acercamiento a los razonamientos deductivos y detectar posteriormente las dificultades presentadas por los estudiantes universitarios, con miras a fortalecer los procesos comprensivos, desde estudiantes de educación media y de transición de educación media a la universitaria.

Las pruebas a dos columnas han sido empleadas en la enseñanza de la demostración en algunos casos de manera inconsciente y con niveles de comprensión ingenua, que pocas veces trasciende a la de principiantes, quedándose solamente en el nivel intuitivo; pero también han sido fuertemente criticadas y según los National Council of Teachers of

Mathematics, NCTM (1989, págs. 126-127), se recomienda que se dé importancia y atención en la enseñanza de pruebas a *“argumentos deductivos expresados oralmente y en párrafos” y que se diera menos atención a las pruebas a dos columnas”.*

Una de las ventajas de las pruebas a dos columnas (aún cuando el docente no es consciente en la clase de matemáticas de controlar los procesos de prueba y demostración) es que permiten un acercamiento lógico a las justificaciones y demostraciones, también permitiendo “controles de manejo” del razonamiento deductivo.

2.2.2. Definición de una prueba a dos columnas

El estilo escrito de pruebas a dos columnas se expone en este apartado, ya que el grupo de estudiantes universitarios intervenidos se enmarcaron dentro de este estilo de prueba, el cual permitió un acercamiento a la elaboración consciente de escritura de las pruebas y se pudo analizar fácilmente sus dificultades, especialmente en la elaboración de pruebas intelectuales y de aspectos relacionados con el razonamiento deductivo.

Según los estudios realizados por Herbst (1999), él narra que en uno de los estudios etnográficos de un curso de geometría (citando al docente japonés Sekiguchi) define el estilo de prueba a dos columnas como sigue:

> *Uno traza una línea horizontal y otra vertical desde el punto medio de la primera hacia abajo de tal manera que se forme una letra T, creando así dos columnas bajo la línea horizontal. En la columna de la izquierda, uno escribe una cadena deductiva de enunciados que converjan a la proposición a probar, asignándole un número de orden a cada enunciado. Para cada paso de la deducción, uno debe anotar la razón de la misma en la columna de la derecha bajo el correspondiente número de orden. (1999, págs. 78-79)*

En la Ilustración 3 y 4 se muestran ejemplos de pruebas escritas a dos columnas.

Demostrar que si: A, B y C son conjuntos tal que:

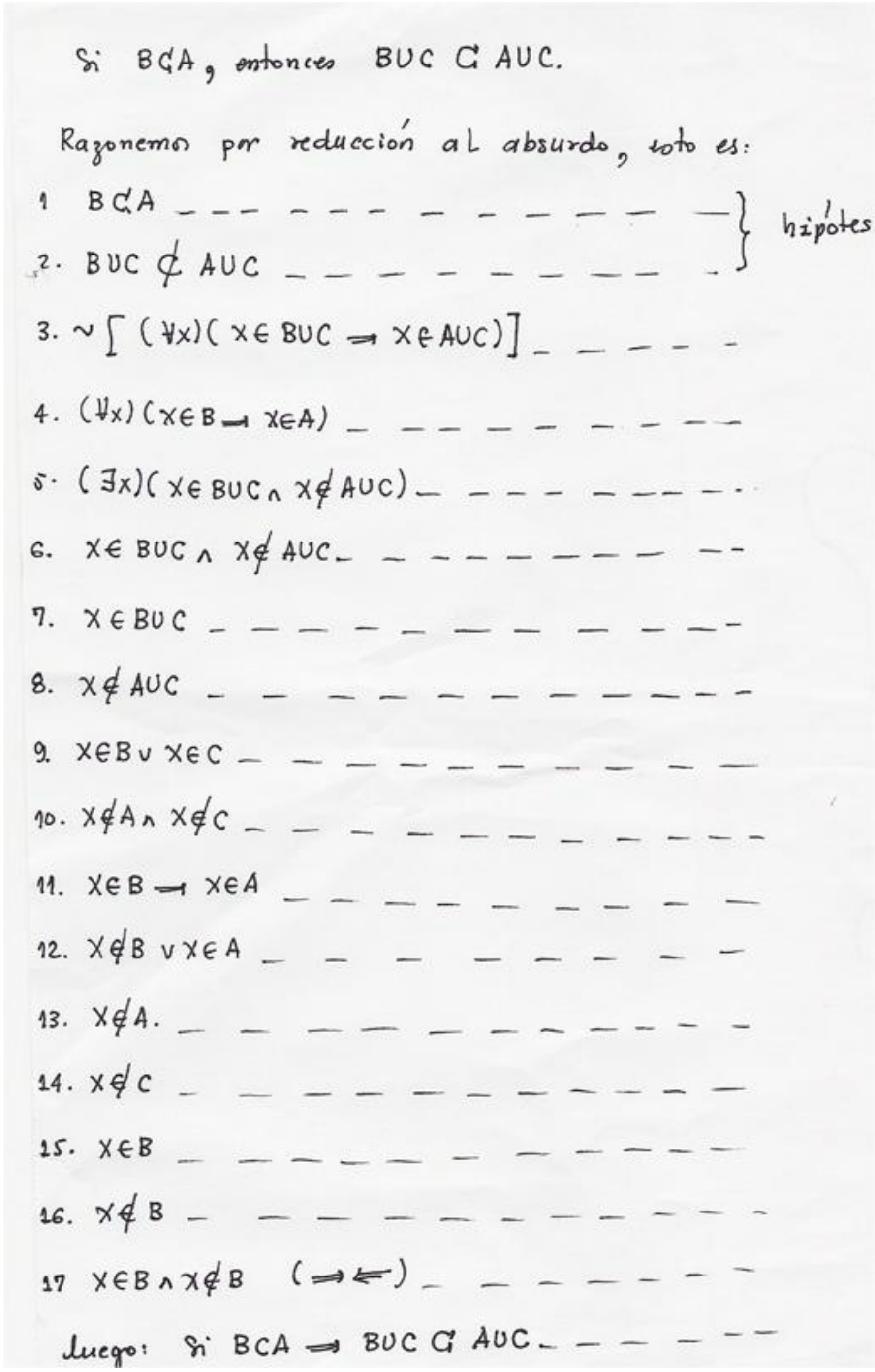
Si $B \subset A$, entonces: $B \cup C \subseteq A \cup C$

Razonemos por reducción al absurdo, esto es:

1. $B \subset A$	hipótesis
2. $B \cup C \not\subseteq A \cup C$	hipótesis
3. $\sim [(\forall x)(x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \cup C)]$	Negación de inclusión en 2
4. $(\forall x)(x \in B \Rightarrow x \in A)$	Definición de inclusión en 1
5. $(\exists x)(x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C)$	Equivalencia, negación. 3
6. $x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C$	Particularización existencial 5
7. $x \in B \cup C$	Simplificación conjunción 6
8. $x \notin A \cup C$	Simplificación conjunción 6
9. $x \in B \vee x \in C$	Definición de unión en 7
10. $x \notin A \wedge x \notin C$	Consecuencia de la negación unión 8
11. $x \in B \Rightarrow x \in A$	Particularización universal 4
12. $x \notin B \vee x \in A$	Definición de condicional en 11
13. $x \notin A$	Simplificación en la conjunción 10
14. $x \notin C$	
15. $x \in B$	M.T.P entre 9 y 14
16. $x \notin B$	M.T.T entre 11 y 13
17. $x \in B \wedge x \notin B$	Conjunción 15 y 16. $(\Rightarrow \Leftarrow)$.

Luego: Si $B \subset A$, entonces: $B \cup C \subseteq A \cup C$

Ilustración 3. Ejemplo de una prueba a dos columnas



Si $B \subseteq A$, entonces $B \cup C \subseteq A \cup C$.

Razonemos por reducción al absurdo, esto es:

1 $B \subseteq A$ } hipótes

2. $B \cup C \not\subseteq A \cup C$

3. $\sim [(\forall x)(x \in B \cup C \rightarrow x \in A \cup C)]$

4. $(\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$

5. $(\exists x)(x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C)$

6. $x \in B \cup C \wedge x \notin A \cup C$

7. $x \in B \cup C$

8. $x \notin A \cup C$

9. $x \in B \vee x \in C$

10. $x \notin A \wedge x \notin C$

11. $x \in B \rightarrow x \in A$

12. $x \notin B \vee x \in A$

13. $x \notin A$.

14. $x \notin C$

15. $x \in B$

16. $x \notin B$

17 $x \in B \wedge x \notin B$ $(\Rightarrow \Leftarrow)$

Luego: Si $B \subseteq A \Rightarrow B \cup C \subseteq A \cup C$.

Ilustración 4. Prueba a dos columnas que sólo exhibe la cadena deductiva de enunciados y no presenta las razones.

Adicionalmente, en cuanto al paradigma de investigación seguido por Patricio Herbst[7] referido a los contextos de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas, Herbst (Comunicación personal, 2009) comenta:

[7] Claramente recomendado por Balacheff (se sugiere al lector remitirse al inicio del apartado 2 para ver dicha recomendación) y adscrito a Michigan University.

Estimado Durango

Gracias por su interés en nuestros trabajos.

*Hay una lista de nuestras publicaciones en el website de **GRIP** ¿las ha visto? Pienso que ellas darán cuenta a su pregunta sobre nuestros "paradigmas".*

*Nuestro enfoque combina **la sociología y la epistemología**.*

*Nos interesamos en el trabajo matemático de la clase como organización y en los factores que dan forma a ese trabajo, particularmente los factores que restringen o constriñen la actividad del maestro. Es decir tratamos, por un lado de describir fenómenos epistemológicos, por ejemplo la naturaleza de la prueba o concepciones de ideas geométricas (para esto un buen ejemplo es el artículo que publicamos en RDM en 2005 sobre área). Por otra parte, tratamos de explicar esos fenómenos epistemológicos utilizando una teoría de instrucción que deriva de ideas sociológicas (y didácticas), en particular esta **"teoría de las transacciones de la instrucción" (theory of instructional exchanges)** se apoya en las ideas de **contrato didáctico de Brousseau** y **la noción de habitus de Bourdieu**, usa metodologías derivadas de la **etnometodología de Garfinkel** y del **frame analysis de Goffman.***

*Con respecto a investigadores destacados en Educación Matemática yo sigo las trayectorias de **Deborah Ball**, **Magdalene Lampert**, **Nicolás Balacheff**. El trabajo de **Eric Livingston en sociología de la prueba** es muy útil, Ud. puede encontrar otras referencias en mis trabajos.*

Según yo creo, el Proof Project ya ha terminado. El libro ***Proof across the grades*** *se publica este mes. Solamente se organizaron dos conferencias según tengo entendido, y ambas han sido por invitación.*

Nuevamente gracias por su interés y mucha suerte con su trabajo.

Patricio Herbst

2.3. Algunos esquemas de pruebas presentados en estudiantes, rastreados en otras investigaciones

Se ha realizado una revisión de la literatura sobre los contextos de justificación y descubrimiento matemático en la clase de matemáticas, en los países Estados Unidos y España. Ésta con el fin de rastrear qué problemas se han derivado alrededor de dichos contextos.

Esquemas de pruebas propuestos por Harel y Sowder

En unas de las investigaciones realizadas por Harel & Sowder (1994) y citados en el trabajo de Ibañes (2001, pág. 13), se presentan los siguientes esquemas de pruebas encontrados en sus estudiantes. Ver el Cuadro 2.

ESQUEMAS DE PRUEBA		
De convicción externa	**Empíricos**	**Analíticos**
Rituales **Autoritarios** **Simbólicos**	**Inductivos** **Perceptuales**	**Transformacionales** **Axiomáticos**

Cuadro 2. Esquemas de pruebas de Harel & Sowder en Ibañes (2001, pág. 13)

La Ilustración 5, muestra las subcategorías que presenta Harel y Sowder respeto de los esquemas analíticos de pruebas, que no se presentan en los trabajos de Ibañes (2001).

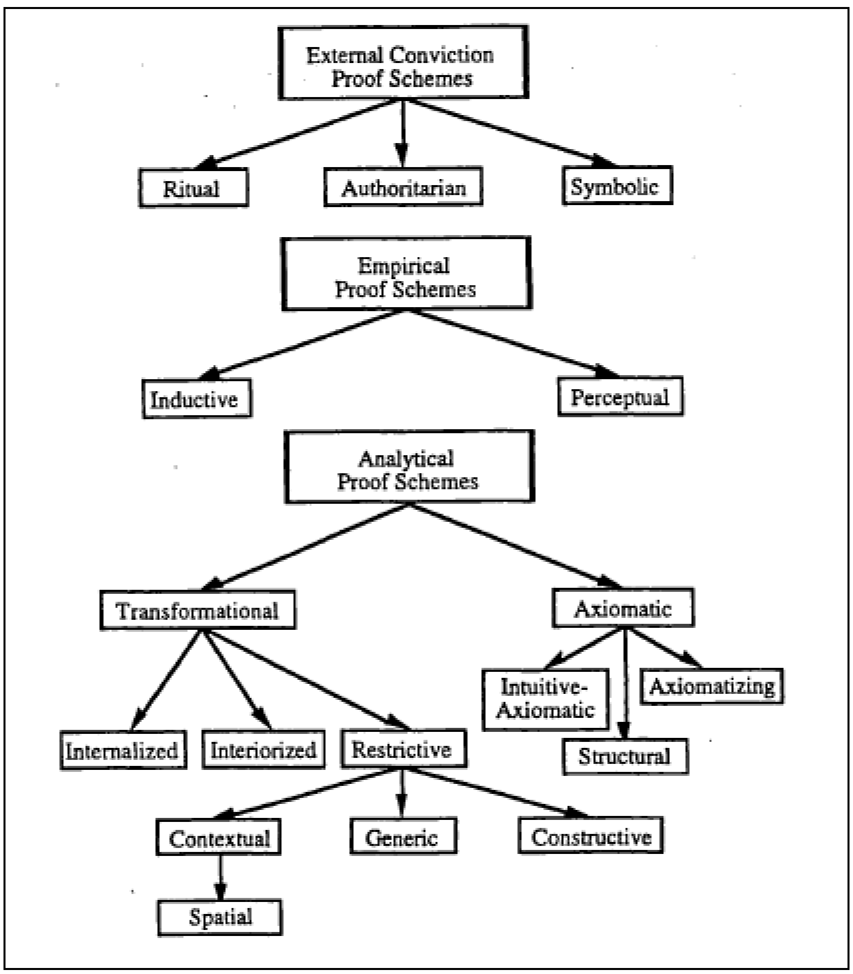


Ilustración 5. Esquemas originales propuestos por Harel & Sowder (1994)

Se puede observar una equivalencia entre los esquemas de prueba de Harel & Sowder (Cuadro 2 e Ilustración 5), y los propuestos por Balacheff. Ya que los esquemas de prueba que Harel & Sowder llaman empíricos, Balacheff los nombra como pruebas pragmáticas y ostensivas; y los llamados esquemas analíticos de prueba, hacen alusión a las pruebas intelectuales en la teoría de Balacheff.

<table>
<tr><th colspan="5">ESQUEMAS DE PRUEBA</th></tr>
<tr><td rowspan="7">De convicción externa</td><td colspan="2">Empírico</td><td colspan="2">Analíticos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Experimentales</td><td colspan="2">Transformacionales</td></tr>
<tr><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td><td>Estáticos</td><td>Dinámicos</td></tr>
<tr><td colspan="2">Inductivos</td><td>Particulares</td><td>Generales</td></tr>
<tr><td>Falsos</td><td>Auténticos</td><td>Incompletos</td><td>Completos</td></tr>
<tr><td>De un caso</td><td>De varios casos</td><td colspan="2" rowspan="2">Intuitivo-Axiomático</td></tr>
<tr><td>No sistemático</td><td>Sistemáticos</td></tr>
</table>

Cuadro 3. Categorización de tipos de prueba por Ibañes (2001, pág. 13)

En esta categorización de los esquemas de prueba, Cuadro 3, se debe resaltar que los esquemas empíricos son experimentales e inductivos y están relacionados con los tipos de prueba encontrados por Balacheff.

2.4. Contexto de justificación en la clase de matemáticas: Una visión desde la investigación realizada por Nicolás Balacheff

En el contexto de justificación, del cual Balacheff (2000, págs. 26-28, 54-86) nos hace referencia en su trabajo, esta investigación focaliza la atención en los tipos de prueba que presentan los estudiantes, tales tipos de pruebas son: ***Empiricismo ingenuo, Experiencia Crucial, Ejemplo genérico, Prueba mental y Cálculos sobre enunciados.*** Se pueden apreciar los tipos de prueba a partir de las características acuñadas por Balacheff, y los tipos de: generalización, razonamiento y nivel de comprensión; interpretados bajo la óptica de esta investigación. Ver el Cuadro 4**.**

Tipo de prueba		**Características**	**Generalización**	**Tipo de razonamiento**	**Nivel de comprensión**[8]
PRUEBAS PRAGMÁTICAS	**Empiricismo ingenuo**	Recurren a la acción o a la ostensión.	No la asume	Inductivo	Ingenua
	Experiencia crucial	Plantea explícitamente el problema de la generalización.	Inicios de generalización	Inductivo con propuesta a la generalización	Ingenua
PRUEBAS INTELECTUALES	**Ejemplo genérico**	Explicación de las razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o transformaciones de un objeto en calidad de representante característico de determinada clase.	La asume	Inductivo-Deductivo	Principiante
	Experiencia mental	La experiencia mental aparece como medio para fundamentar las soluciones propuestas en un esfuerzo de explicación. Se libera de las situaciones particulares.	La asume	Deductivo	Aprendiz
	Cálculo sobre enunciados	Resultado de un cálculo inferencial sobre enunciados. Se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas.	La asume	Deductivo	Maestría

Cuadro 4. Categorización de pruebas según Balacheff (2000)

Para esta investigación dentro del contexto de justificación se tendrán presentes los tipos de prueba (según Balacheff) que los estudiantes elaboran; así como también la forma en que se escriben dichas pruebas: ya sea a dos columnas (justificación–razón), por párrafos o mediante la construcción de un registro gráfico o por medio de un material concreto. Las pruebas por párrafos son aquellas en las cuales se hacen redacciones conectadas, en donde

[8] Ver los niveles de comprensión en el apartado 2.6.4.

se muestra en un escrito el proceso de validación de un enunciado y no aparecen los razonamientos discriminados por: justificación y razón, como en las pruebas a dos columnas.

Si se quisiera detallar un poco el árbol teórico genealógico de la investigación realizada por Balacheff (2000) deberá decirse lo siguiente:

> *El marco teórico de esta investigación se elaboró con base en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y en el modelo de Lakatos sobre la dialéctica de las pruebas y las refutaciones. El estudio experimental de los alumnos en situaciones de resolución de problemas, permitió poner en evidencia cinco tipos principales de prueba. Se muestra que esta tipología no es tanto una caracterización del "nivel lógico" de los estudiantes, sino de su "economía lógica". Esta "economía lógica" está determinada por la naturaleza de las interacciones sociales, el nivel de incertidumbre que se reconoce como aceptable para la situación, y el nivel de elaboración cognitivo o de lenguaje que se encuentra disponible para el problema en cuestión.*

Este aporte extra sirvió una vez más para tener presente los estudios de Imre Lakatos, en el marco teórico de esta investigación.

2.5. El contexto de descubrimiento: Una visión epistemológica e histórica desde Imre Lakatos

Algunos de los conceptos de la teoría de pruebas y refutaciones de Imre Lakatos, se presentan a continuación en el Cuadro 5. Estos ayudaron a la interpretación y lectura del análisis de contenido de los registros escritos presentados por los estudiantes y al momento de proponer las estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas.

CONCEPTOS Y DEFINICIONES BÁSICAS DESDE LA TEORÍA LAKATOSIANA		
CONCEPTO		**DEFINICIÓN**
CONTRAEJEMPLOS	**Locales**	Ejemplo que refuta un lema sin refutar necesariamente la conjetura principal. Lakatos (1978, pág. 27)
	Globales	Ejemplo que refuta la propia conjetura principal. Lakatos (1978, pág. 27)
	Globales y locales	Confirma el teorema (Cubos encajados, presentados por Alfa. Lakatos (1978, pág. 29)
	Locales y no globales	No refuta el teorema (Contraejemplo al tercer lema, presentado por Gamma. Lakatos (1978, pág. 27)
	Globales y no locales	Refuta el teorema (Cilindro, presentado por Gamma. Lakatos (1978, pág. 60)
MÉTODOS EMPLEADOS EN LA TEORÍA LAKATOSIANA	**Método de rendición**	Abandono total de la conjetura, una vez aparece un contraejemplo global. Lakatos (1978, pág. 30)
	Ajustar monstruos	Consiste en realizar un examen más atento, asumiendo los monstruos o excepciones como interpretaciones monstruosas, ajustándolas de tal suerte que se conviertan en ejemplos. Lakatos (págs. 48-50)
	Exclusión de monstruos	Rechazo del contraejemplo, defiende la conjetura ingenua, reinterpretando sus términos, (Lakatos, Pruebas y Refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático, 1978, pág. 59) consiste en retirar el contraejemplo, asumiéndolo como una falsa crítica, es decir, como casos patológicos. Lakatos, (págs. 31-41 y 60-65)
	Exclusión de excepciones	Mejora la conjetura; consiste en nombrar los contraejemplos como excepciones, elaborar una lista de ellas y determinar con precisión el dominio en el que se sostiene la conjetura. Lakatos (págs. 41-48)
	Incorporación de lemas	Mejora la conjetura; consiste en descartar como falsa la conjetura en su forma original, proponiendo inmediatamente una versión modificada y restringida, incorporando a la conjetura el lema que ha sido refutado por el contraejemplo; aunque reduce el dominio de la conjetura principal al dominio propio del lema culpable, para la incorporación hay que identificar el lema y formularlo lo más exactamente posible, basándose en un análisis cuidadoso de la prueba. La incorporación de lemas aumenta el contenido. Lakatos (págs. 51-60 y 108)
	Prueba y refutaciones	Rebautizo del método de incorporación de lemas, que surge tras el análisis de la prueba en busca del rigor. Lakatos (1978, págs. 65-75) Método que se basa en las siguientes reglas heurísticas, según Lakatos (1978, págs. 65-68, 76 y 95): 1. Si dispone usted de una conjetura propóngase probarla y refutarla. o Inspeccione cuidadosamente la prueba para preparar una lista de lemas no triviales (análisis de la prueba). o Halle contraejemplos globales y locales.

		2. Si tiene un contraejemplo global, descarte su conjetura. ○ Añada a su análisis de la prueba un lema conveniente que sea refutado por el contraejemplo y sustituya la conjetura descartada por otra mejorada que incorpore ese lema como condición. ○ No permita que una refutación sea descartada por monstruosa. ○ Trate de hacer explícitos todos sus "lemas ocultos". 3. Si tiene un contraejemplo local, compruebe sino es también global. ○ Si lo es, aplicar la regla dos. 4. Si se tiene un contraejemplo local aunque no global, se mejora el análisis de la prueba sustituyendo el lema refutado por otro no falsado. 5. Si se tiene un contraejemplo de cualquier tipo, hallar por medio del conjeturar deductivo un teorema más profundo, respecto al cual ya no sean contraejemplos.
CONJETURAS	**Ingenuas**	Conjeturas que no son inductivas y se obtienen por ensayo y error, mediante conjeturas y refutaciones. Lakatos (1978, pág. 92)
	Deductivas	Conjeturas que nos ofrecen un patrón continuo generalizador de desarrollo del conocimiento, comienza con refutaciones. Lakatos (1978, pág. 114)

Cuadro 5. Interpretación a la teoría de Lakatos

2.6. Marco Teórico de Enseñanza para la Comprensión

2.6.1. Definición de comprensión

Según Stone (1999) la comprensión, al menos en la comunidad educativa norteamericana, ha sido una preocupación desde hace algún tiempo; la autora señala que:

> *[…] Desde el punto de vista educativo, la comprensión casi siempre ha sido valorada, al menos retóricamente. Desde que existieron las escuelas tal como las conocemos en este país, la comprensión ha sido una meta permanente. Sin embargo, el camino hacia la comprensión no siempre ha sido claro, y durante largo tiempo existieron desigualdades en la búsqueda y el logro de la comprensión, e incluso durante mucho tiempo no se le prestó atención. Hasta muchos años después de que se establecieron las escuelas, por ejemplo, las necesidades educativas de las mujeres se consideraban mínimas, estableciéndose como más que suficientes la lectura y la escritura básicas, y las habilidades domésticas. Durante gran parte de los siglos XVIII y XIX, la meta de la comprensión, ese compromiso profundo con las búsquedas intelectuales, quedó por lo general*

reservada para grupos selectos de varones predominantemente blancos. (1999, pág. 37)

Para esta investigación, uno de los conceptos centrales, junto con el de procesos conscientes, es el de comprensión. Stone define la comprensión así:

[…] El uso de la palabra comprensión en propuestas educativas particulares también tiene una larga historia. El Oxford Dictionary of the English Language nos dice que en la temprana Edad Media, la palabra tenía un sentido bastante moderno: captar la idea, comprender algo, ser consciente. En 1898 el Universal Dictionary of the English Language definía "comprender" de esta manera: "Aprehender o captar plenamente; saber o aprehender el sentido, importancia, intención, motivo de, percibir por medio de la mente; apreciar la fuerza o el valor de; asociar un sentido o interpretación a; interpretar; explicar; ser inteligente y consciente".(1999, pág. 37)

La comprensión en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Y respecto a la comprensión en matemáticas y las relaciones inherentes a los contextos de justificación y de descubrimiento, expone Stone:

El Consejo Nacional de Docentes de Matemáticas (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) ha convertido la comprensión de los usos de la matemática en su centro de atención. Desafía de tal manera la separación tradicional de la matemática en las materias independientes álgebra, geometría, trigonometría, análisis, estadística y probabilidad, proclamando que los alumnos de todos los niveles deberían entender la matemática como un campo de investigación plenamente integrado, que apunta a ayudarlos a resolver problemas, comunicarse, razonar y hacer conexiones. Tales metas significan que "los alumnos deberían estar expuestos a numerosas y diversas experiencias interrelacionadas que los alienten a valorar la empresa matemática, a desarrollar hábitos mentales matemáticos y comprender y valorar el papel de la matemática en los asuntos *humanos; que debería motivárselos a explorar, calcular y hasta cometer y corregir errores para que tengan confianza en su capacidad para resolver problemas complejos; que deberían leer, escribir y discutir matemática y que deberían conjeturar, probar y construir argumentos sobre la validez de una conjetura". (1999, pág. 55)*

Basado en lo anterior, la presente investigación, asume la comprensión como un proceso consciente y auto-reflexivo en cuanto a la forma de razonar en matemáticas, haciendo uso de estrategias heurísticas, en lo que concierne a la inducción, la deducción y las conjeturas.

2.6.2. Las cuatro dimensiones para la comprensión

El marco de Enseñanza para la Comprensión establece cuatro dimensiones para acceder a ella. Estas son: contenidos, métodos, propósitos y formas de comunicación. Adicionalmente para cada una de las dimensiones se establecen cuatro elementos para la comprensión: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua (apartado 2.6.3); y cuatro niveles de comprensión (apartado 2.6.4).

2.6.2.1. Los contenidos estudiados en la guía didáctica

Siguiendo a Stone (1999, pág. 230) la dimensión contenidos: *"[…] evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han trascendido las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual pueden moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones en una red conceptual coherente y rica".*

La investigación en las intervenciones realizadas con las poblaciones se enmarcó desde conceptualizaciones geométricas y aritméticas en actividades de validación planteadas en la guía didáctica, en torno a los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales. Se deberán por tanto comprender, por parte de los estudiantes, algunas proposiciones de la geometría y la aritmética.

Adicionalmente con la población de estudiantes universitarios se trabajaron contenidos de teoría de conjuntos propuestos en talleres, que no harán parte de la guía didáctica propuesta, pero que permitieron analizar básicamente el razonamiento deductivo en la educación universitaria con miras a fortalecer los procesos de razonamiento en los estudiantes de educación media, por medio de ésta.

2.6.2.2. Los métodos usados para la comprensión durante la intervención

> **¿Cómo construyó el estudiante lo que comprendió?, ¿Cómo puede estar seguro el estudiante de lo que comprendió?, ¿qué evidencias o argumentos tiene el estudiante para convencer a otros o a sí mismo?**

Según Stone la dimensión métodos:

> *[…] reconoce que el conocimiento del pasado, la naturaleza y la sociedad contrasta con las creencias del sentido común o con la mera información por el hecho de que no está fácilmente a disposición en el mundo para que se lo recoja naturalmente y se almacene simplemente en las mentes de los individuos. El conocimiento surge más bien de un cuidadoso proceso de investigación según criterios que son debatidos en forma pública entre comunidades de gente ilustrada en dominios específicos. (1999, pág. 232)*

Durante la intervención de la investigación, se emplearon métodos, tales como el uso de conjeturas y de contraejemplos. Los cuales permitieron a los estudiantes, una mejor comprensión de las pruebas, en los últimos años de educación media y primeros años de universidad. Ya que como propone Lakatos (1978, pág. 27): "*Ciertamente, las conjeturas ignoran desagrados y sospechas pero no pueden ignorar los contraejemplos*". Los contraejemplos fueron aprovechados algunas veces para que los estudiantes mejoren o bien conjeturen (permitiendo generalidad) para lograr avances comprensivos en los tipos de prueba de acuerdo con Balacheff (2000).

La construcción de pruebas, ya sea empleando pruebas pragmáticas o pruebas intelectuales, dependerá en gran medida de las variantes que se le hagan a los talleres propuestos en la intervención pedagógica con la guía didáctica, en cuanto a la formulación de preguntas, en donde al estudiante se le enfrente a la construcción de conjeturas y posteriormente a su respectiva prueba, esto es, la búsqueda de la validación del enunciado. Esta investigación pretende sustentar la hipótesis de que: las conjeturas hacen un aporte significativo y dependiente para la construcción de pruebas de enunciados matemáticos en el aula de clase, ya que le crea la necesidad al estudiante de probar un nuevo enunciado, realizando una búsqueda del proceso de validación del enunciado hasta convertirlo en teorema.

2.6.2.3. La praxis usada para la comprensión durante la intervención

¿Cuál es el propósito de este conocimiento en el estudiante?

De acuerdo con Stone, la dimensión de praxis o propósitos:

> *[…] se basa en la convicción de que el conocimiento es una herramienta para explicar, reinterpretar y operar en el mundo. Esta dimensión evalúa la capacidad de los alumnos para reconocer los propósitos e intereses que orientan la construcción del conocimiento, su capacidad para usar el conocimiento en múltiples situaciones y las consecuencias de hacerlo. (1999, págs. 234-235)*

La comprensión de las pruebas pragmáticas o intelectuales en los estudiantes genera, por un lado, mejores desempeños con el razonamiento inductivo (que posteriormente los llevará a la formalización matemática con la inducción matemática completa); y por otro lado, desempeños con el razonamiento deductivo que es esencial en la comprensión de las teorías matemáticas.

El acceso a los razonamientos inductivos válidos dependerá de la suficiente práctica consciente de pruebas pragmáticas y por ostensión, que se hagan a los enunciados matemáticos conjeturados en el aula de clase. Y dependerá en cierta medida de las suficientes experiencias que tienen los estudiantes al realizar comprobaciones de conjeturas en el aula de clase; experiencias que están asociadas con la comprobación de casos particulares alrededor de los enunciados.

Entretanto, el acceso a razonamientos deductivos válidos dependerá de la suficiente práctica consciente de pruebas intelectuales que realiza el estudiante, acceso mediado por un estudio consciente y reflexivo de la lógica, y especialmente de la semántica de las proposiciones: negación, conjunción, disyunción, condicional y bicondicional; así como también, del aprendizaje reflexivo de las reglas de inferencias y las concepciones en torno a la validez y certeza de los razonamientos y de las proposiciones, respectivamente.

2.6.2.4. Los procesos de comunicación empleados para la Comprensión durante la intervención

> **¿Cuáles son las mejores formas en los estudiantes de presentar y comunicar su comprensión, según sus habilidades y auditorio: aula de clase?**

Stone en referencia a la dimensión de formas de comunicación, propone que:

> *[…] una visión de la comprensión vinculada con el desempeño le presta especial atención a las formas en las que dicha comprensión se realiza: el proceso por el cual es comunicada a otros. La dimensión de las formas de comunicación evalúa el uso, por parte de los alumnos, de sistemas de símbolos (visuales, verbales, matemáticos y cenestésicos corporales, por ejemplo) para expresar lo que saben, dentro de géneros o tipos de desempeños establecidos […]. (1999, pág. 237)*

Y más adelante señala Stone (1999, pág. 237) que: *"hacer público el conocimiento (como lo exigen los desempeños de comprensión) necesariamente implica el uso de un lenguaje o sistema simbólico".*

La demostración en matemáticas y específicamente las pruebas que realizan los estudiantes de educación secundaria y de los primeros años de universidad, son ***“procesos de comunicación escritos, verbales ó no verbales”*** entre los mismos compañeros de su aula de clase. Las convenciones conscientes o no conscientes adoptadas en la misma, desempeñan un papel fuertemente reconocido al momento de escribir o realizar una prueba. ***“Las pruebas son herramientas de comunicación”*** en donde se hace importante que el estudiante socialice sus producciones de prueba y debata con sus compañeros de clase en torno a la generalidad de la conjetura que él ha descubierto, esto con el fin de convencer a sus compañeros dentro del aula de clase de que su enunciado se cumple para una cierta cantidad de objetos matemáticos, permitiendo garantizar la validación externa en la prueba.

Ahora bien, ***la efectividad en la comunicación de las pruebas escritas y verbales, dadas por los estudiantes, estará ligada a las habilidades que han tenido en cuanto al razonar inductiva o deductivamente, de acuerdo a la prueba exigida.***

2.6.3. Los cuatro elementos para la comprensión

2.6.3.1. Los tópicos generativos

Siguiendo a Blythe (1998, pág. 53): *“los tópicos generativos son temas, cuestiones, conceptos, ideas, etc., que proporcionan hondura, significación, conexiones y variedad de perspectivas en un grado suficiente como para apoyar el desarrollo de comprensiones profundas por parte del alumno”.*

Los procesos implícitos que se trabajaron a partir de los tópicos generativos semánticos son los de la conjetura, en pro de situar epistemológicamente el problema de la prueba dentro del aula de clase; los contraejemplos, que están en pro de establecer generalizaciones en una conjetura inicialmente formulada; y los estilos escritos y no escritos y las pruebas pragmáticas e intelectuales, como lo señala Balacheff (2000, págs. 26-28).

En relación con los tópicos generativos el MEN (1997) propone a los docentes:

Los estudiantes se involucran en la exploración y comprensión de temas que ofrecen perspectivas claras acerca de lo que queremos que comprendan. Esos temas tienen múltiples conexiones con los intereses y experiencias de los estudiantes y pueden ser aprendidos de muchas formas. Son interesantes tanto para el alumno como para el maestro y se construyen sobre temas anteriores.

Los tópicos generativos que se tomaron en la guía didáctica fueron emocionantes, ya que son ricos para producciones de pruebas y de conjeturas y, más aún, porque movilizan procesos de razonamientos conjeturales, inductivos y deductivos. Los tópicos generativos ofrecieron a los estudiantes conceptualizaciones de algunos objetos de la geometría y aritmética.

Ahora bien, la investigación pretendió ahondar en las conjeturas que le generan a los estudiantes razonamientos conscientes, importantes para la comprensión de inferencias derivadas de situaciones de la vida cotidiana; los contraejemplos permitieron tener parámetros iniciales para realizar falsaciones de teorías, y en particular de enunciados semánticos.

Se adoptaron estos tópicos generativos (como pueden detallarse en el anexo A: guía didáctica), ya que de alguna manera hacen parte de las concepciones previas de los estudiantes que ingresan a cursar el último año de educación media, y porque son fundamentales en el proceso de razonamiento que deben tener al momento de abordar cursos de matemáticas en las carreras de ciencias o ingenierías.

El nuevo matiz generativo fue a partir de actividades de validación y de descubrimiento propuesto a los estudiantes para que razonaran conjeturalmente, esto es, que construyeran conjeturas y, a partir de aquí, le dieran significado al validar el enunciado empleando pruebas.

El tópico generativo que se pudo aprovechar fue el referido al pensamiento numérico, ya que se tomó los números poligonales y se relacionó con el pensamiento geométrico a partir de los polígonos, se pensó que este puede ser el punto de partida para una actividad que involucra procesos de generalización.

La guía didáctica se encauzó básicamente por tópicos generativos desde los pensamientos: geométrico y aritmético (materializados directamente en la guía didáctica), los cuales se propusieron por medio de ***actividades de validación y estrategias para conjeturar***.

Las actividades de validación planteadas en la guía didáctica le permitieron a los estudiantes proceder a realizar conjeturas a partir de orientaciones delimitadas por el docente a partir de preguntas que fueron construidas, teniendo presente los niveles de comprensión que van desde la visualización hasta la deducción formal, desde elaboraciones de ***pruebas pragmáticas*** hasta ***pruebas intelectuales,*** y específicamente desde unas estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas, las cuales han sido compartidas con otros investigadores y docentes de matemáticas, en eventos nacionales, por ejemplo en Durango (2007).

2.6.3.2. Las metas de comprensión

En consonancia con Blythe:

> *Las metas de comprensión identifican los conceptos, los procesos y las habilidades que deseamos que nuestros alumnos comprendan especialmente. Se las formula de dos formas: como enunciados ("los alumnos comprenderán…", "los alumnos estimarán…" o "los alumnos desarrollaran la comprensión de…") y como preguntas de final abierto ("¿cuáles son las similitudes y las diferencias más importantes entre los diversos géneros literarios?"). (1998, pág. 75)*

2.6.3.3. Los desempeños de comprensión

Al unísono con Blythe:

Los desempeños de comprensión son actividades que exigen de los alumnos usar sus conocimientos previos de maneras nuevas o en situaciones diferentes para construir la comprensión del tópico de la unidad. En los desempeños de esta índole los alumnos reconfiguran, expanden, extrapolan y aplican lo que ya saben. Además, desafían los prejuicios, los estereotipos y el pensamiento esquemático de los alumnos y los ayudan a construir y demostrar su comprensión. (1998, págs. 95-96)

Y posteriormente continúa Blythe, haciendo referencia al docente que:

[…] Aunque el término "desempeño" parece aludir a un acontecimiento final, se refiere en rigor a las actividades de aprendizaje que brindan tanto a usted como a sus alumnos la oportunidad de constatar el desarrollo de la comprensión a lo largo del tiempo, en situaciones nuevas y desafiantes. (1998, pág. 96)

Al igual que las metas de comprensión, los desempeños de comprensión establecidos para la intervención de la guía didáctica con los estudiantes que conforman las poblaciones investigadas, aparecen consignados en el anexo A.

2.6.3.4. La evaluación continua y final

Según Blythe (1998, págs. 117-118) respecto de la evaluación diagnóstica continua, ella dice:

Los criterios para evaluar cada desempeño de comprensión deben ser:

- *Clara y explícitamente enunciados al principio de cada desempeño de comprensión (aunque pueden elaborarse en el curso de esa actividad, sobre todo si es la primera vez que el docente y los alumnos la abordan).*
- *Pertinentes (estrechamente vinculados a las metas de comprensión de la unidad).*
- *Públicos (todos en la clase los conocen y comprenden).*

Y en cuanto a la retroalimentación de la evaluación, la misma autora señala que:

La retroalimentación debe:

- *Proporcionarse con frecuencia, desde el inicio hasta la conclusión de la unidad juntamente con los desempeños de comprensión. A veces la retroalimentación puede ser formal y planificada (tal como la retroalimentación sobre las presentaciones) y otras, más informal (como responder a los comentarios de un alumno en las discusiones en clase).*
- *Proporcionar a los alumnos información sobre el resultado de los desempeños previos y también sobre la posibilidad de mejorar los futuros desempeños.*
- *Informar sobre la planificación de las clases y actividades siguientes.*
- *Provenir de diferentes perspectivas: del docente, de las reflexiones de los alumnos sobre su propio trabajo y de las reflexiones de los compañeros sobre el trabajo de otro.*

Otro proceso que se quiere insinuar, es el de la evaluación que fue observado desde la valoración cualitativa de las producciones realizadas por los estudiantes.

Al momento en que el estudiante propuso una conjetura con debilidades en la generalización, el investigador sólo debió dirigir la conjetura hacia otra con el propósito de mejorarla a partir del trabajo con los contraejemplos.

Las valoraciones asignadas a los estudiantes no fueron arbitrarias, en tanto que se realizó un proceso en donde ellos fueron mejorando sus razonamientos a partir de los razonamientos inválidos que fueron construyendo. También se insistió, en los estudiantes, en la toma de consciencia de que sus dificultades surgen a partir de conceptualizaciones deficientes de los objetos y relaciones matemáticas en cuestión.

Las metas, los desempeños de comprensión y las evaluaciones establecidas para la intervención de la guía didáctica a los estudiantes, aparecen consignadas en el anexo A.

De manera resumida, la Ilustración 6 presenta explícitamente los cuatro elementos para la comprensión, los cuales se tuvieron presente para cada actividad propuesta de la guía didáctica.

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cómo estarías seguro de sacar de una caja círculos de tres colores distintos, sin necesidad de mirarlos en la extracción? ¿Qué tipo de razonamiento matemático: inductivo y/o deductivo, emplearías para resolver la siguiente actividad? ¿Qué tipos de justificaciones construirías para mostrar a tus compañeros la solución? ¿Qué casos extremos analizarías para lograr resolver la actividad, esto es: caso extremo de seguridad y caso extremo de no seguridad de obtener la tripleta de colores en los círculos?
METAS DE COMPRENSIÓN	Analizar las palabras claves del enunciado y cómo pueden influir éstas en la solución definitiva del enunciado. ¿Cuál o cuáles es/son la/s palabra/s más importante/s del enunciado?
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	Aplicar razonamientos inductivos para la solución de la actividad.
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	Escribir un proceso de justificación o de prueba, ostensiva o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad.

Ilustración 6. Esquema empleado para explicitar los cuatro elementos para la comprensión en cada una de las actividades propuestas en la guía didáctica.

2.6.4. Niveles de comprensión presentes en la investigación

En el Cuadro 6, tomado de Stone (1999, págs. 262-263), se definen los niveles de comprensión, dichos niveles se emplearon para realizar interpretaciones en los análisis de contenido de los registros escritos presentados por los estudiantes, en los talleres intervenidos.

NIVELES DE COMPRENSIÓN	
COMPRENSIÓN INGENUA	Los desempeños están arraigados en el conocimiento intuitivo. Los alumnos no ven la relación entre lo que aprenden en la escuela y su vida cotidiana. No consideran los propósitos y usos del conocimiento. Los desempeños no muestran signos de dominio, por parte de los alumnos, de lo que saben. Los desempeños son no reflexivos respecto de las formas en las que el conocimiento se expresa o comunica a los demás.
COMPRENSIÓN DE PRINCIPIANTE	Los desempeños se arraigan en los rituales de pruebas y de la escolarización. Los alumnos empiezan a interpolar algunos conceptos o ideas disciplinarias y a establecer conexiones simples, a menudo ensayadas entre ellos. Los alumnos describen la naturaleza y los propósitos de la construcción del conocimiento, así como su comunicación como procedimientos mecánicos paso a paso. La validación de los procedimientos de construcción del conocimiento depende de la autoridad externa más que de criterios racionalmente consensuados desarrollados dentro de las disciplinas o dominios.
COMPRENSIÓN DE APRENDIZ	Los alumnos demuestran un uso flexible de los conceptos o ideas disciplinarias. Los alumnos ven la construcción del conocimiento como algo complejo, que sigue procedimientos y criterios prototípicamente usados por expertos del dominio. Con apoyo, los desempeños iluminan la relación entre conocimiento disciplinario y vida cotidiana, examinando las oportunidades y las consecuencias de usar este conocimiento. Los desempeños demuestran una expresión y comunicación flexible y adecuada del conocimiento.
COMPRENSIÓN DE MAESTRÍA	Los desempeños son predominantemente integradores, creativos y críticos. Los alumnos pueden moverse con flexibilidad a través de dimensiones, vinculando los criterios por los cuales se construye y convalida el conocimiento en una disciplina, con su objeto de estudio o los propósitos de la investigación. Los alumnos ven la construcción de conocimiento como algo complejo, impulsado a menudo por marcos y visiones del mundo encontrados y que surge como resultado de una argumentación pública dentro de las comunidades de profesionales en diversos dominios. Los desempeños a menudo van más allá de demostrar comprensión disciplinaria para reflejar la conciencia crítica de los alumnos acerca de la construcción del conocimiento en los dominios (por ejemplo, la comprensión metadisciplinaria) o la capacidad de los alumnos para combinar disciplinas en sus tareas (por ejemplo comprensión interdisciplinaria).

Cuadro 6. Niveles de comprensión

Los procesos de prueba y conjetura de los estudiantes fueron analizados a partir de los niveles de comprensión presentados por Stone.

2.6.5. Interpretaciones del Marco Teórico de Enseñanza para la Comprensión en la investigación

Uno de los retos de esta investigación en el Marco de la Enseñanza para la comprensión es la observación minuciosa de ***"los contenidos"*** a enseñar, los cuales acataron los conceptos semánticos del pensamiento numérico y geométrico. El análisis de ***"los métodos"*** de pruebas fueron empleados por los estudiantes para realizar pruebas; ***"la praxis"*** se evidenció en diversas situaciones semánticas de la vida cotidiana y desde ***"los espacios de comunicación"*** en el aula de clase, a partir de lo escrito empleando las socializaciones, discusiones y consensos grupales de las pruebas realizadas por los distintos integrantes de los grupos intervenidos en la investigación.

Los tópicos fundamentales para promover la ***comprensión*** en el proceso de razonamiento de pruebas en la investigación son: las conjeturas, los contraejemplos, las pruebas escritas y no escritas.

Las dimensiones para acceder a la comprensión de las pruebas (desde ***los métodos*** empleados, ***los contenidos*** que se desarrollaron, ***la praxis*** y aplicaciones de los enunciados validados con las pruebas y ***la comunicación*** como proceso) han sido mediadas por la confrontación y los consensos de pruebas dentro del aula de clase.

Los estudiantes en la clase de matemáticas deberán comprender en el proceso de razonamiento matemático, cuando enfrentan pruebas y demostraciones de enunciados dados o conjeturados. Se pretende que sean conscientes (en cuanto a su comprensión) que las pruebas no son "tormentosas" y no están totalmente desligadas de los razonamientos inductivos y deductivos.

La falta de compresión de la semántica[9] y sintaxis[10] de las reglas de inferencia hace que se fracase en el proceso de elaboración de una prueba o una demostración.

---

[9] Por semántica lógica se entiende la significación de los conceptos inmersos en los enunciados matemáticos.

[10] Por sintaxis lógica se entiende la estructura del enunciado, para ello se realiza una simbolización de su semántica.

El uso de pruebas empleando casos particulares a los enunciados, por parte de los estudiantes, ayudan a que el enunciado sea verificado sólo para unos cuantos casos particulares en comienzo y permitiendo que realice conjeturas de la generalización del enunciado.

El debilitar la tesis mediante procesos regresivos, empleados en los descubrimientos de crímenes, como también la progresión de hipótesis en busca de la tesis para construir posibles conexiones de las hipótesis con la tesis permite afianzar la comprensión de los estudiantes. Los procesos regresivos progresivos en las pruebas matemáticas, según Solow (1987), son procesos importantes en la heurística de la matemática.

2.6.5.1. La comprensión matemática en la formulación de conjeturas y su respectiva validación

La intención de la intervención en el aula fue fomentar en los estudiantes la formulación de conjeturas ante una ***actividad o situación de validación***, al mismo tiempo, de fortalecer el ***uso de contraejemplos*** para falsear o verificar la generalización de la misma y hacer consciente los ***estilos escritos y no escritos de la prueba.*** Esto con el fin de que el estudiante logre comprender de la conjetura sus raíces epistemológicas, y perciba la necesidad de probar y validar enunciados.

Se procuró que los estudiantes tuviesen comprensión frente a lo esencial en la validación de los enunciados descubiertos en clase, así como también razonar conscientemente en forma: inductiva, deductiva o conjeturalmente.

Otro aspecto fundamental es que se potenciaron procesos matemáticos de los estudiantes, desde el marco de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, específicamente la comunicación, empleada en las controversias por parte de las ***producciones de prueba***.

Fue importante igualmente, dentro del Marco de Enseñanza para la Comprensión, que los estudiantes tuvieron presente que lo aprendido les sirve para su futuro intelectual, en tanto que se trabajó con ellos ***los razonamientos conjeturales,*** lo cual los condujo a la necesidad de crear enunciados que aportan a las teorías matemáticas. Al respecto Lakatos (1978) propone:

> *La metodología de una ciencia depende en gran medida de que dicha ciencia aspire a un ideal euclídeo o cuasi-empírico. La regla básica de una ciencia que adopte el primer objetivo es la búsqueda de axiomas auto-evidentes (la metodología euclídea es puritana y antiespeculativa). La regla básica del segundo tipo de ciencia es la búsqueda de hipótesis imaginativas y audaces con una gran potencia explicativa y heurística, y, en realidad, este tipo de ciencia invoca una proliferación de hipótesis alternativas para ser escardadas por una crítica severa (la metodología cuasi-empírica es irreprimiblemente especulativa).*

La propuesta forjó procesos de razonamiento en los estudiantes que apuntaron a ***la incertidumbre***, desde el planteamiento de preguntas abiertas, y no cerradas (se entiende por una pregunta abierta la que brinda al estudiante la posibilidad de explorar sobre los conceptos y no da simplemente la posibilidad de una respuesta afirmativa o negativa, como lo hace la pregunta cerrada) como se ha direccionado en algunos casos en la enseñanza tradicional. Según lo expresado por el MEN (1998, pág. 74) en referencia a los docentes, se comenta que éstos sólo se limitan a que los estudiantes hagan vastas elaboraciones mecánicas, procedimientos de justificaciones repetitivas, comparaciones y ejercitaciones de procedimientos, en donde no se es consciente del razonamiento empleado, ya que no se tiene presente la resolución y el planteamiento de problemas, el razonamiento, la comunicación y la modelación.

La investigación buscó dar respuesta al problema planteado, a partir de que ***el estudiante tome consciencia de contrastar sus pruebas realizadas de enunciados conjeturados con otros compañeros de clase***, en donde se evidencia una de las dimensiones para acceder a la comprensión: la comunicación en los procesos de prueba de los estudiantes.

Las pruebas y las demostraciones son procesos de razonamiento que tienen dependencia directa con la comunicación tanto oral como escrita, icónica o visual.

Según el MEN (1998, págs. 28-29), se puede avizorar un buen camino de la actividad de la matemática en cuanto a la generación y construcción de teorías al interior de proyectos de investigación. Ya que los docentes están realizando contextualizaciones, temporalizaciones y personalizaciones del conocimiento matemático en tanto que el propósito de los estudiantes es el de partir desde aquí para luego irse, posiblemente, a la descontextualización, destemporalización y despersonalización de los saberes matemáticos.

2.6.5.2. La comprensión matemática en los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales

Las actividades propuestas en la intervención en la clase de matemáticas tienen presencia de preguntas en las cuales se le propuso al estudiante el lograr conjeturar y realizar procesos conscientes y comprensivos. Además, las preguntas en cada actividad de validación y de conjetura estuvieron enmarcadas dentro de niveles de aprendizaje, lógicamente secuenciales. Esto permitió avanzar de conceptualizaciones poco complejas a las complejas y elaboradas (en referencia al rigor), desde la visualización geométrica hasta la generalización de enunciados, respectivamente.

Se rastrearon en los estudiantes los razonamientos de tipo inductivo, deductivo y conjetural, asimismo, herramientas y procesos trascendentales en la elaboración de las pruebas de enunciados matemáticos como lo son: el descubrimiento de conjeturas, la confrontación de las mismas a partir de contraejemplos, la mejoría de las conjeturas respecto a su enunciado, las pruebas escritas (desde pruebas elaboradas por párrafos como a dos columnas) y pruebas no escritas (a partir de la visualización y materiales concretos empleados en las ***actividades de validación y de estrategias de conjetura*** propuestas).

La Ilustración 7 exhibe un mapa conceptual referente a la estructura de razonamientos inductivos y deductivos usados en matemáticas.

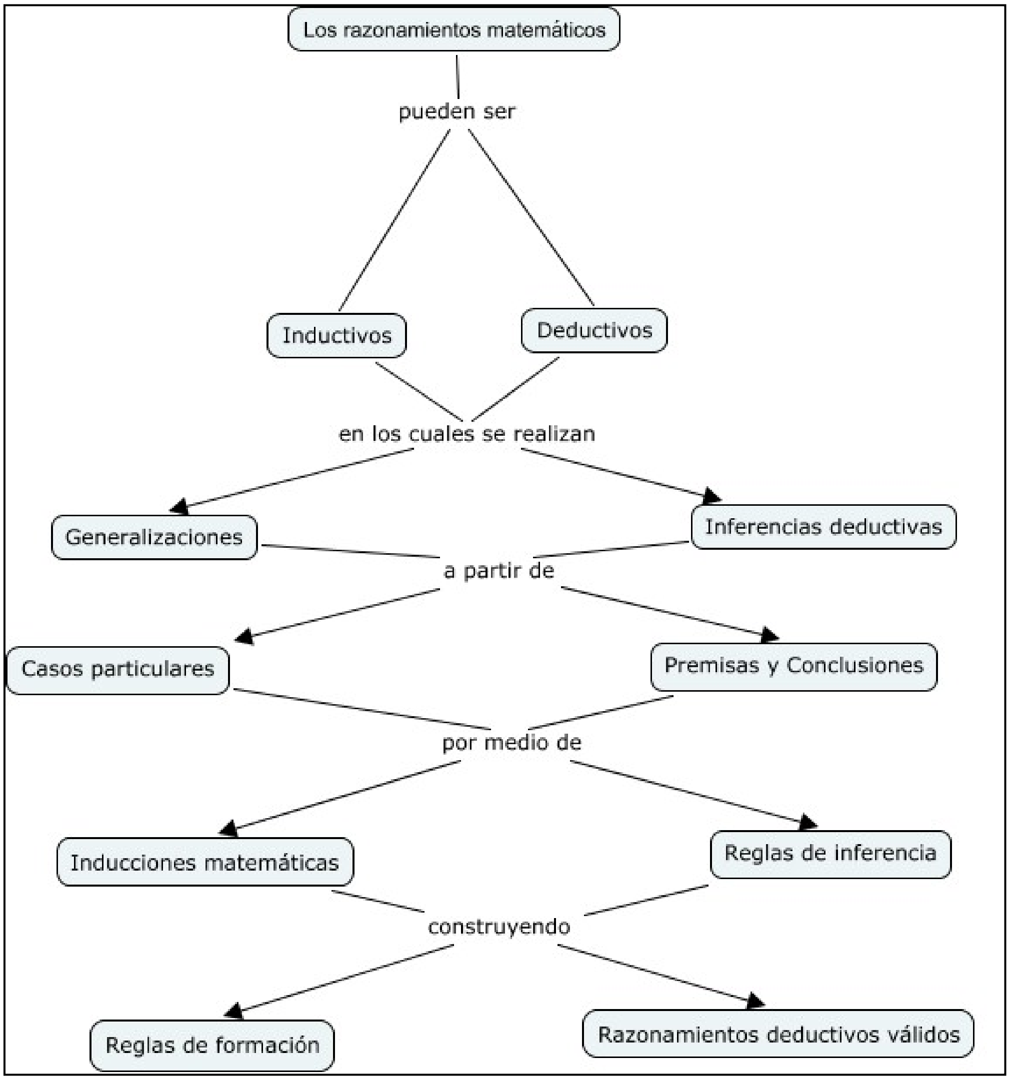


Ilustración 7. Mapa conceptual referente a los razonamientos matemáticos.

Los registros escritos elaborados por los estudiantes evidencian la comprensión que ellos asumen de la estructura interna de los razonamientos inductivos, de sus semánticas particulares y de su sintaxis general, como también de sus razonamientos deductivos, de la semántica en las proposiciones y de la sintaxis en la simbolización de enunciados a partir de las letras usadas para designar las proposiciones. Es significativo, por tanto, que el razonamiento del estudiante sea consciente y sistemáticamente con la mediación del docente.

Fue significativo que algunos de los estudiantes al momento de establecer razonamientos inductivos tuvieron presente casos particulares de un enunciado y también la inducción incompleta, y todo lo relacionado con procesos de generalización inductiva (como se mencionó antes en relación con los números poligonales).

Simultáneamente para los razonamientos deductivos fue crucial que el estudiante comprendiera las reglas de inferencias desde la sintaxis como desde la semántica; además, que el estudiante pudiese conservar la sintaxis de una proposición y cambiar la semántica, ya fuese desde conceptos geométricos o aritméticos o desde ámbitos de la vida cotidiana.

También en la investigación se abordaron los contenidos de las reglas de inferencia y los razonamientos lógicos deductivos empleando las tablas de verdad de las proposiciones conjuntivas, disyuntivas, condicionales y bicondicionales y adicionalmente se establecieron relaciones para que los estudiantes pudieran comprender la elaboración de tablas de verdad, a partir de un razonamiento deductivo e inferir si dicho razonamiento es o no válido, esclareciendo contingencias, contradicciones o tautologías, según el caso.

El estudiante debió conocer ampliamente la proposición condicional y los condicionales asociados a éste, las condiciones suficientes y las condiciones necesarias, las causas y las consecuencias, así como también diversas semánticas de los condicionales, todo esto con el fin de conceptualizar en los estudiantes algunas primeras ideas del razonamiento deductivo. Ver Ilustración 8.

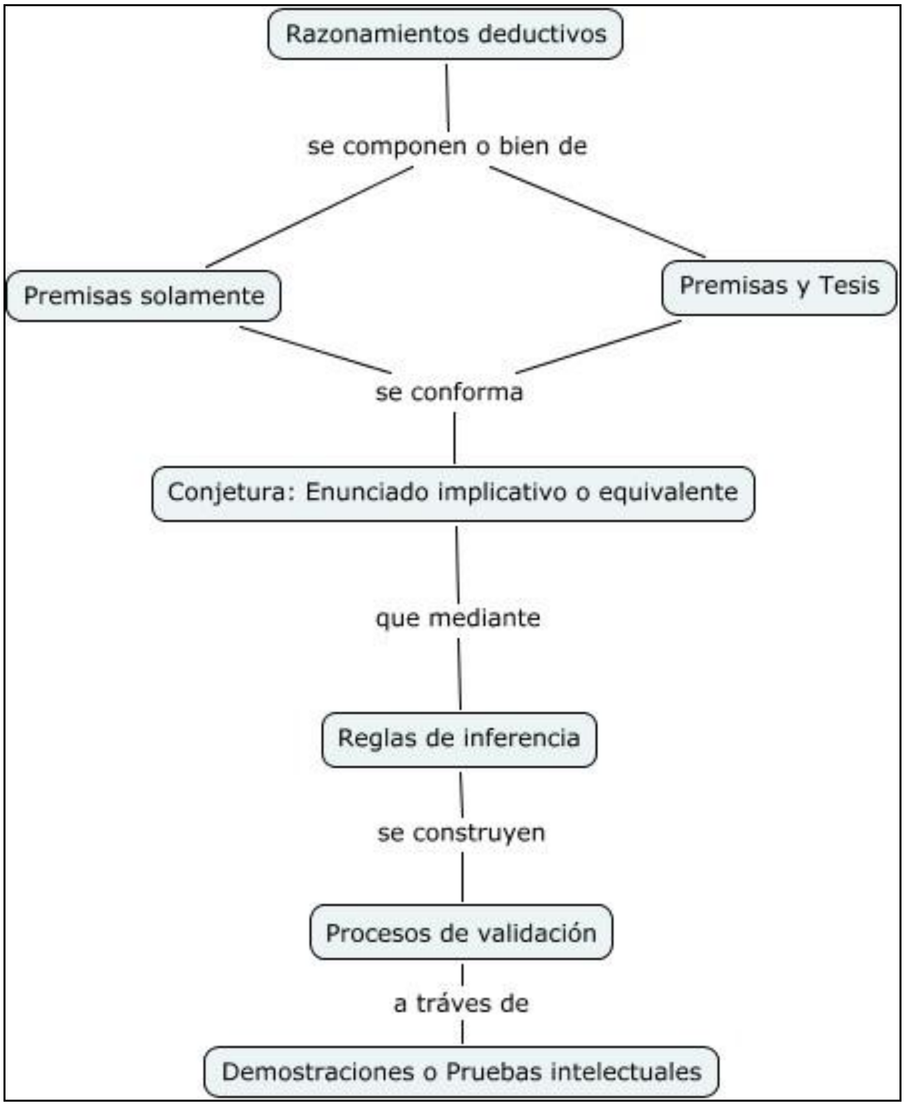


Ilustración 8. Mapa conceptual referente a los razonamientos deductivos.

2.6.5.3. La comprensión matemática en la construcción de la guía didáctica

Dentro de la guía didáctica que se fue ajustando y diseñando, desde el Marco de Enseñanza para la Comprensión, se fueron generando unos indicadores de desempeños de comprensión que delimitaron y guiaron actividades para que los estudiantes adquieran un razonamiento propio del proceso de prueba y conjetura.

Los conceptos explícitos en la guía didáctica fueron los concernientes a los pensamientos aritméticos y geométricos, en tanto que los objetos centrales de la investigación fueron los de análisis de las dificultades presentadas en los estudiantes, particularmente en: las formulaciones de las conjeturas, el uso de los contraejemplos para hacer mejorías de generalización a éstas y los estilos escritos y no escritos de las pruebas.

Y por último, a manera de conclusión de este apartado, si el proyecto es enseñar a los estudiantes a conjeturar, se deberá fortalecer el razonamiento conjetural, en tanto que si se quiere que los estudiantes elaboren unas buenas pruebas o demostraciones de conjeturas respectivamente, se deberá trabajar conscientemente en la comprensión de los procesos de razonamiento inductivos y deductivos, en donde se debe abrir paso desde las pruebas pragmáticas a las intelectuales, requiriendo estas últimas un trabajo extendido en las reglas de inferencia y el estudio lógico de las proposiciones, como se propone desde un inicio, en la guía didáctica.

Para Lakatos (1978) se hace importante distinguir lo que es una prueba cuasi-formal de una formal, derivada de la mención o no de las reglas de inferencia, al respecto dice:

> *[…] Recientemente se han hecho algunos intentos por parte de los lógicos para analizar las características de las pruebas en las teorías informales. Así, un famoso manual moderno de lógica dice que una prueba informal es una prueba formal que omite la mención de las reglas lógicas de inferencia y de los axiomas lógicos, y sólo indica el uso de postulados específicos.*
>
> *Ahora bien, esta así llamada "prueba informal" no es otra cosa que una prueba en una teoría matemática axiomatizada que ha adoptado ya la forma de un sistema hipotético-deductivo, pero que deja sin especificar su lógica subyacente. En el estadio actual de desarrollo de la lógica matemática, un lógico competente puede comprender en muy poco tiempo cuál es la lógica subyacente necesaria de una teoría, y puede formalizar cualquier prueba de este tipo sin estrujarse demasiado el cerebro.*
>
> *Pero llamar a este tipo de prueba una prueba informal constituye una nomenclatura equívoca y errónea. Tal vez pueda llamársele una prueba cuasi-*

formal o una prueba formal con brechas, pero sugerir que una prueba informal es exactamente una prueba formal incompleta.

Capítulo 3

3. MÉTODO Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

3.1. Aspectos generales del enfoque de investigación

3.1.1. Los criterios de rigor empleados

Lo expuesto en este capítulo hace parte de Durango & Jaramillo (2008) orientada bajo la investigación realizada por Castillo & Vásquez (2007) que se apoyan en los trabajos de Guba y Lincoln[11].

3.1.1.1. Criterio de credibilidad

Según Castillo & Vásquez (2007) se define el criterio de credibilidad, así:

> *El criterio de credibilidad se puede alcanzar porque generalmente los investigadores, para confirmar los hallazgos y revisar algunos datos particulares, vuelven a los informantes durante la recolección de la información. La experiencia indica que, por lo general, a los informantes les gusta participar en esa revisión pues ellos quieren reafirmar su participación y desean que los hallazgos sean lo más creíbles y precisos para ellos. En este sentido, la mayoría de los informantes son capaces de corregir los errores de interpretación de los hechos y para ello se*

[11] El investigador de este trabajo tuvo la experiencia de asistir al workshop titulado: ¨**New Experimental Writing Forms**¨**,** ofrecido por: Yvonna Lincoln; en "The 5th International Congress of Qualitative Inquiry" (QI2009) del 20 al 23 de mayo en the University of Illinois at Urbana-Champaign, U.S.A

ocupan de dar más ejemplos que ayudan a clarificar las interpretaciones del investigador.

¿Qué aspectos permitieron que el investigador volviera a los informantes?

- El análisis de contenido, de los registros escritos, en cuanto a las dificultades permitió ir una y otra vez a los estudiantes para esclarecer el por qué aparecía.

- En el momento de preguntar por la pertinencia de los procesos de justificación en la clase de matemáticas.

- Al momento de la búsqueda de estrategias por parte de los estudiantes para responder el test de la guía didáctica.

La investigación permitió que los estudiantes construyeran espontáneamente sus pruebas frente a los enunciados propuestos en la guía didáctica. Durante el proceso de la investigación se tuvo en cuenta un correo electrónico en donde por día los estudiantes debían consignar sus dificultades, surgidas en la clase (dicho correo electrónico es pei20072@gmail.com**)**. El investigador no influyó para que los estudiantes expresaran sus dificultades frente a los razonamientos en la clase de matemáticas. Se recopilaron registros escritos provenientes exclusivamente de dos fuentes: los realizados por los estudiantes durante la clase de matemáticas y las dificultades presentadas.

Los registros escritos, a los cuales se les realizó el análisis de contenido fueron los enunciados y las pruebas construidas por los estudiantes, a partir de su buena conformación sintáctica y semántica. Estos se escanearon y fueron interpretados a la luz de las teorías de Enseñanza para la Comprensión, de Nicolás Balacheff e Imre Lakatos, posteriormente fueron perfeccionados y ajustados con las interpretaciones correspondientes del marco conceptual derivado de los análisis respectivos.

El comportamiento del investigador fue el de observador y en algunos casos sirvió para encausar las conjeturas, a partir de los contraejemplos dados a los estudiantes. También los resultados parciales de la investigación fueron presentados a comunidades académicas en Colombia y en Estados Unidos con los cuales se tamizó la recolección y posterior interpretación de los datos, permitiendo el perfeccionamiento del informe final.

Se realizó triangulación: ***de población*** (ya que se ejecutó la investigación en tres poblaciones distintas en el departamento Colombiano de Antioquia), ***de tiempo*** (en algunos casos las intervenciones se realizaron en la mañana y otras en las tardes), ***de datos*** (en **ITM** se tomaron dos grupos distintos, uno de 11° y otro del semillero de matemáticas, en tanto que en Santa Fé de Antioquia, Andes y Caucasia se tuvieron en cuenta, grupos de: **PIVU** (programa de inducción a la vida universitaria) y **PEI** (programa especial de ingreso a la universidad) permitiendo ponerse en juego la interacción social como proceso importante en la validación de las pruebas matemáticas al interior de las clases. La investigación también toma algunas concepciones teóricas de Balacheff, Lakatos y Enseñanza para la Comprensión, que permiten comparar los marcos teóricos trabajados y así poder hablar de aspectos primordiales al interior de los contextos explorados desde la triangulación teórica.

El Cuadro 7 presenta las explicaciones de los tipos de triangulación, que se tuvo en cuenta en la investigación, con el propósito de lograr los objetivos propuestos de la investigación.

TRIANGULACIÓN	EXPLICACIÓN
Teórica	Uso de múltiples perspectivas, más que de perspectivas singulares en relación con el mismo conjunto de objetos.
De datos	Los observadores triangulan no sólo con métodos; también pueden triangular con fuentes de datos. El muestreo teórico es un ejemplo del proceso posterior, es decir, los investigadores hacen explícita la búsqueda para las diferentes fuentes de datos. Con triangulación de fuentes de datos, los analistas pueden emplear, eficientemente, los mismos métodos para una máxima ventaja teórica.
De datos: nivel de análisis de persona	Análisis interactivo. Es segundo nivel. Acerca del término interactivo, hay una unidad entre personas interactuando en el laboratorio o en el campo natural. Los sociólogos comúnmente lo asocian con observación participante; experimentos en pequeños grupos y mediciones no intrusivas representan este tipo de análisis. La unidad es interacción más que persona o grupo.

Cuadro 7. Tipos de triangulación empleadas en la investigación

Los resultados obtenidos del análisis e interpretación de las pruebas y conjeturas construidas por los estudiantes, así como también el análisis, interpretación y categorización de las dificultades se tomaron de los registros escritos o bien por la coherencia semántica y sintáctica de los enunciados o por la validez o no de las pruebas construidas por los estudiantes en la clase. Las evidencias del trabajo de investigación aparecen en un CD adjunto al informe final de investigación (dicho **CD** contiene: **algunas fotografías, evidencias A, evidencias B, evidencias C, evidencias D, parámetros guía didáctica, portafolio estudiante 1, portafolio estudiante 2, portafolio estudiante 3, tabla de las diagonales de un polígono, talleres de teoría de conjuntos y trabajo de estrategias)**.

Vale la pena mencionar que durante la investigación, la guía didáctica fue sometida a revisiones por parte de un grupo de docentes de matemáticas de los grupos **PEI** y **PIVU** de la Universidad de Antioquia, también su redacción final fue revisada por parte de dos comunicadoras sociales de la misma institución.

Los avances de la investigación se socializaron en distintos eventos llevados a cabo en ciudades Colombianas: Paipa (Boyacá, con maestros de matemáticas, **Ministerio de Educación Nacional**), Pereira (**Universidad Tecnológica de Pereira**), Cali (**Universidad de Valle**: **ASOCOLME**) y Medellín (**Universidad de Antioquia** y **Sociedad Colombiana de Matemáticas**), y en ***University of Illinois, Urbana-Champaign***, ***Estados Unidos***; dichos eventos permitieron reflexionar, afinar y corregir sobre los procesos de la investigación; específicamente aspectos que no habían sido tenidos en cuenta al comienzo, respecto del método a seguir (análisis de contenido), a la interpretación de las evidencias ajustadas al problema de investigación y a los objetivos general y específicos.

3.1.1.2. Criterio de auditabilidad o confirmabilidad

Según Castillo & Vásquez (2007) se define el criterio de auditabilidad o confirmabilidad apoyadas en las teorías de Guba y Lincoln, así:

El segundo elemento del rigor metodológico es la auditabilidad, llamada por otros autores confirmabilidad, en Guba y Lincoln se refieren a este criterio como la habilidad de otro investigador de seguir la pista o la ruta de lo que el investigador original ha hecho. Para ello es necesario un registro y documentación completa de las decisiones e ideas que el investigador haya tenido en relación con el estudio. Esta estrategia permite que otro investigador examine los datos y pueda llegar a conclusiones iguales o similares a las del investigador original siempre y cuando tengan perspectivas similares.

¿Qué ruta empleó el investigador original?

- Se mantuvo una comunicación personal vía e-mail con los autores que soportaron el marco teórico inicial. Se le hace una pregunta a Nicolás Balacheff en referencia a la importancia sobre los contextos de justificación en la clase de matemáticas y sobre recomendaciones de trabajos y otros autores que trabajen sobre los tópicos centrales de la investigación.

- El investigador hizo una revisión de literatura en distintos autores referente al tratamiento de los objetos de la investigación, permitiendo ajustes al marco teórico inicial y al conceptual.

- Se analizaron las dificultades de los estudiantes universitarios al momento de la construcción de pruebas y demostraciones, alrededor de la teoría de conjuntos. El análisis detalla las concepciones y nivel de comprensión de razonamiento deductivo que tienen los mismos.

- Se construyeron estrategias para conjeturar enunciados en la clase de matemáticas con base en las dificultades detectadas en los estudiantes universitarios (que hagan conexiones con la elaboración de pruebas), pero con miras a un grupo poblacional de transición entre la educación media y la universitaria (PIVU-PEI).

- Se construyó y diseñó una guía didáctica a partir de las estrategias construidas y enmarcada dentro de las cuatro dimensiones y los cuatro elementos para la comprensión. La guía didáctica es sometida a juicio de expertos durante algunos meses y posteriormente aparece publicada como capítulo de libro en Razono y actúo con lógica, autoría de Durango, Villa, Bustamante, Hernandez & Piedrahita (2008) para beneficiar estudiantes del PIVU y PEI.

- Se interviene con la guía didáctica a una población de estudiantes de PIVU, PEI y educación media y se analiza nuevamente las dificultades surgidas. Finalmente, se le propone a un grupo de estudiantes del PEI analizar contraejemplos para las reglas de inferencia deductiva, y con el mismo grupo de estudiantes se analizan algunas de las estrategias, para responder las actividades planteadas en la guía didáctica.

- En algunos momentos de este proceso de investigación, se realizaron ponencias en eventos académicos, de educación matemática en el contexto de la investigación cualitativa, que permitieron refinar los análisis realizados, correspondientes a los registros escritos presentados por los estudiantes.

Se tomaron fotografías (aparecen en el archivo: ***“algunas fotografías”*** del **CD**) que muestran el trabajo realizado, se analizaron fielmente los registros escritos, presentados por los estudiantes, a la luz del marco teórico y el marco conceptual propuestos para la investigación.

Las condiciones sociales fueron tenidas en cuenta a partir de la comunicación con los estudiantes, durante el desarrollo de la guía didáctica, esta dimensión de la comprensión es indispensable a la hora de elaborar y construir pruebas de validación de enunciados, ya que es en la interacción social y en los procesos de comunicación, en donde se puede someter a evaluación la validez de la prueba matemática y, máxime, si se pretende lograr que los estudiantes accedan de pruebas ostensivas a intelectuales. Según Balacheff (2000, pág. 17) se puede entender la interacción social como: “*uno de los principales medios que permiten transformar una situación de decisión en una situación de prueba es someterla a debate para garantizar o desconocer su validez”.*

De otra parte, Balacheff (2000) sostiene que:

La interacción social juega un papel central en nuestra aproximación a los problemas de la enseñanza de la demostración. Por un lado, nuestro análisis de la demostración ha puesto en evidencia la necesidad del contexto social para construir su significado como un medio de prueba. En efecto, ella se caracteriza dentro de la comunidad matemática, no solamente por su estructura especifica, sino también por el hecho de que ella es el medio privilegiado de validación y de comunicación. Por el otro lado, nosotros hemos retenido la hipótesis del papel motor de la interacción social en el desarrollo de los procesos de validación. (pág. 178)

Además se tuvo en cuenta los ámbitos socioculturales para la elaboración de la guía didáctica, con ejemplos ilustrativos que apuntaran en todo momento a contextos propios de las regiones en donde se realizó la intervención de la investigación.

3.1.1.3. Criterio de transferibilidad o aplicabilidad

Según Castillo & Vásquez (2007) se define el criterio de transferibilidad o aplicabilidad, así:

La transferibilidad o aplicabilidad es el tercer criterio que se debe tener en cuenta para juzgar el rigor metodológico en la investigación cualitativa. Este criterio se refiere a la posibilidad de extender los resultados del estudio a otras poblaciones. Guba y Lincoln indican que se trata de examinar qué tanto se ajustan los resultados con otro contexto. En la investigación cualitativa la audiencia o el lector del informe son los que determinan si pueden transferir los hallazgos a un contexto diferente del estudio. Para ello se necesita que se describa densamente el lugar y las características de las personas donde el fenómeno fue estudiado. Por tanto, el grado de transferibilidad es una función directa de la similitud entre los contextos.

¿Qué tanto se ajusta los resultados a otro contexto?

Se pretendió que el marco conceptual emergente, posteriormente propuesto a los análisis de contenido de los datos recolectados en las distintas poblaciones, fuera lo más fiel posible. Esto condujo al investigador a realizar lecturas de algunos programas de investigación presentados en octubre de 2007 en the Proof Project titulado: Research Paradigms on the Teaching and Learning of Proof (en este evento se presentaron los programas de investigación de: Nicolás Balacheff, Grenoble-Francia, Andreas Stylianides, University of Oxford, UK; María Blanton y Despina Stylianou, University of Massachusetts Dartmouth, City College of New York–CUNY; Paolo Boero, Dipartimento di Matematica, Università di Genova; Patricio Herbst, Michigan University; Gary E. Davis, University of Massachusetts Dartmouth; Amy Ellis, University of Wisconsin-Madison; Harel and Sowder, Celia Hoyles, London Knowledge Lab, Institute of Education, University of London, U.K; Mara Martínez, Tufts University; Tami S. Martín, Illinois State University; Sharon M. S. McCrone, University of New Hampshire; Matthew Inglis, Learning Sciences Research Institute, University of Nottingham; Chris Rasmussen and Michelle Zandieh, San Diego State University and Arizona State University; Kristina Reiss and Aiso Heinze, University of Munich-Germany; Keith Weber, Rutgers University), lo cual permitió estudiar los tópicos y paradigmas abordados alrededor de los contextos de justificación y descubrimiento.

El contexto ampliamente descrito es el de justificación y descubrimiento con estudiantes de educación básica, media, intermedia entre media-universitaria y universitaria; y se hizo un esfuerzo para que los resultados (como por ejemplo, el marco conceptual) describieran ampliamente cualquier otra población; esto es posible garantizarlo ya que el análisis de contenido de los registros remiten a concepciones netamente lógicas de enunciados (semántica y sintaxis), y también a descripciones a partir de las formas de razonar de los estudiantes, del cómo influye la instrucción continuada en la deducción y como pueden conjeturar los estudiantes a partir de estrategias que responden del análisis teórico de Lakatos.

Los resultados recurrentes presentados en las respuestas de los estudiantes, se puede evidenciar en la conexión y visión de los marcos teórico y conceptual de la investigación, igualmente la claridad a la que apunta el problema de investigación, el objetivo general y los objetivos específicos.

La investigación al final pretende construir un marco conceptual, el cual se presenta en el capítulo de las conclusiones, cimentado en el marco teórico de Enseñanza para la Comprensión, teorías de la prueba matemática de Nicolás Balacheff y teorías del descubrimiento matemático de Imre Lakatos. Este marco conceptual expone una categorización de dificultades en la construcción de conjeturas desde análisis semánticos y sintácticos; una categorización de las conjeturas construidas por los estudiantes como son: las conjeturas temporales y las omnitemporales, una categorización de los contraejemplos: existenciales o universales y una propuesta de etapas por las cuales puede pasar un estudiante en su proceso de razonamiento.

3.2. Explicación del método de la investigación: Análisis de Contenido

La investigación dado su enfoque cualitativo optó por el método de análisis de contenido (para ser fieles con el problema planteado, el objetivo general y los objetivos específicos), para el análisis de los registros escritos, la cual está destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto, según define Krippendorff (2004)[12].

El análisis de contenido se caracteriza por investigar el significado simbólico de los mensajes, los que no tienen un único significado, puesto que según menciona Krippendorff (2004): *"los mensajes y las comunicaciones simbólicas tratan, en general, de fenómenos distintos de aquellos que son directamente observados".*

Este método ha sido generalizado y analiza, incluso, las formas no lingüísticas de comunicación, claro que para que sea fiable, debe realizarse en relación al contexto de los datos o registros obtenidos.

[12] Professor of Communication at the Annenberg School for Communication, University of Pennsylvania, Philadelphia, USA. y cuyo e-mail es: KKrippendorff@asc.upenn.edu. Realizó su doctorado en **University of Illinois Urbana-Champaign, U.S.A.**

Según Krippendorff se define el método de análisis de contenido como:

> *Content analysis is a research technique for making replicable and valid inferences from texts (or other meaningful matter) to the contexts of their use.*
> *As a technique, content analysis involves specialized procedures it is learnable and divorceable from the personal authority of researcher. As a researcher`s understanding of particular phenomena, or informs practical actions. Content analysis is a scientific tool.*
>
> *Content analysis is any research technique for making inferences by systematically and objectively identifying specified characteristics within text. (2004, págs. 18-25)*

El análisis de contenido, de los registros escritos de los estudiantes, tuvo en cuenta: los datos, el contexto de la clase de matemáticas, la posición del investigador aislado de su realidad en pro de la interpretación fiel de los datos, las inferencias obtenidas del análisis, a partir de los contextos de justificación y de descubrimiento matemático, y la validez de los resultados se garantizan por los criterios de rigor en la investigación.

Se pretendió articular el método de la investigación a la población estudiada. Los datos y registros escritos tomados, se obtuvieron a partir de las intervenciones con la guía didáctica. La determinación de la unidad de análisis se estableció por medio de las pruebas y conjeturas construidas, la codificación de los registros (que en este caso se empleó la función buscar y reemplazar, del Word 2007, sobre los registros para demarcar las regularidades, principalmente en las dificultades) y las inferencias que atienden al problema de investigación planteado. El Cuadro 8 presenta los componentes del análisis de contenido y cómo se consideraron en la misma.

COMPONENTES EN EL ANÁLISIS DE CONTENIDO	¿CÓMO SE TUVO EN CUENTA CADA UNO DE ESTOS COMPONENTES EN LA INVESTIGACIÓN EN EL CONTEXTO DEL MÉTODO EMPLEADO?
Objetivos	En el planteamiento de los objetivos en el contexto del método empleado para el desarrollo del problema de investigación. Básicamente se analizan los escritos en los contextos anteriormente señalados y se establecen regularidades en las pruebas y conjeturas presentadas por los estudiantes al intervenir con la guía didáctica.
Población	La población estudiada se tuvo en cuenta como un todo, en donde posteriormente se pretende arrojar categorías especiales para dichos contextos. Fueron en total cuatro grupos: • Grupos de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia. • Grupos de estudiantes del PEI y PIVU de la Universidad de Antioquia. • Grupos de 10º y 11º de ITM. • Grupo de estudiantes de Educación Básica.
Elaboración de los datos	Los datos se obtuvieron de lo escrito y expresado por los estudiantes al momento de intervenir con la guía didáctica.
Determinación de la unidad de análisis	La determinación de las unidades de análisis se tuvo en cuenta a partir de los marcos teóricos establecidos.
Muestreo	Se tomaron los registros escritos más significativos presentados por los estudiantes, debido a la gran cantidad de dificultades, en los contextos de justificación y de descubrimiento.
Inferencia	Las inferencias tenidas en cuenta en la investigación se acoplaron a los contextos de justificación y de descubrimiento con sustentos en los marcos teóricos de Balacheff, Lakatos y Enseñanza para la comprensión, y se generaron conceptos propios para describir los procesos de aprendizaje y de enseñanza en los contextos de justificación y de descubrimiento matemático.
Análisis	El investigador tuvo criterios epistemológicos, históricos, conceptuales y lógicos-matemáticos para realizar los análisis de los registros escritos presentados por los estudiantes, teniendo presente los objetivos de la investigación y las necesidades de la población intervenida.

Cuadro 8. Componentes del análisis de contenido realizado en la investigación.

3.3. Tipo de Análisis de contenido realizado en la investigación

En la investigación se realizaron tres tipos distintos de análisis de contenido en los registros escritos presentados por los estudiantes: análisis de exploración de contenido, análisis de contenido manifiesto o directo y latente o indirecto. Al respecto Báez & Pérez los define como:

> ***Análisis de exploración de contenido versus verificación de contenido.*** *Cuando el análisis explora en los contenidos, trata de averiguar orientaciones y formular posibles hipótesis, que podrán ayudar a la elaboración optimizada de cuestionarios. Cuando el análisis se realiza para verificar el contenido, lo que busca es cerciorarse de que las hipótesis ya fijadas se ajustan a la realidad.*
>
> ***Análisis de contenido manifiesto o directo versus latente o indirecto****. El análisis de contenido manifiesto se ciñe al sentido literal de lo que se somete a estudio, a lo que está dicho de forma explícita, mientras que en el análisis de contenido indirecto se busca, por si lo hubiera, el contenido latente que pudiera esconderse en lo manifestado, aquello que estaría implícito en el discurso de lo que se esté estudiando, lo cual resulta de las interpretaciones que haga el analista. (2007, pág. 290)*

El análisis de contenido de los registros escritos de los estudiantes, se realizó en varias etapas:

- **Análisis de contenido de pruebas escritas a dos columnas elaboradas por estudiantes universitarios,** el propósito de este análisis consistió en analizar las distintas dificultades que ellos presentan en la producción de pruebas intelectuales y en las dificultades relacionadas con el razonamiento deductivo. Con este análisis se establecieron relaciones existentes entre las pruebas intelectuales y el razonamiento deductivo.

- **Análisis de contenido de conjeturas y pruebas construidas por los estudiantes de transición de educación media a la universitaria,** el propósito de este análisis fue rastrear el razonamiento inductivo y las aproximaciones a la producción de las pruebas pragmáticas e intelectuales.

- **Análisis de contenido de las dificultades expresadas “directamente” por los estudiantes de transición de educación media a universitaria en lo referente al razonamiento deductivo,** estas dificultades básicamente se recolectaron a partir de un correo electrónico.

- **Análisis de contenido de las conjeturas y procedimientos de justificaciones de situaciones en estudiantes de educación media**, el propósito de este análisis es rastrear las conformaciones sintácticas y semánticas de las conjeturas producidas y de las construcciones de pruebas pragmáticas, básicamente durante el lapso de tiempo de clase.

- **Análisis de contenido de algunas respuestas dadas por estudiantes de educación básica,** en lo referente a la pregunta formulada: ¿crees que es importante justificar un problema matemático con su procedimiento?

Finalmente se realizó una categorización de los análisis de contenido realizados, que se presenta al comienzo de cada uno de los apartados del capítulo 4. Esta categorización está estrechamente ligada a las concepciones de Báez:

> *Una categoría es cada grupo de datos que se pueden considerar como de la misma especie: al establecer las categorías, el investigador divide y agrupa.*
>
> ***Divide:*** *porque fragmenta la transcripción y separa el conjunto de todos los datos en unidades más pequeñas.*

Agrupa: *porque bajo un mismo concepto o categorema reúnen datos que, por la cualidad que sea, son apropiados para ser clasificados en esa categoría concreta. Al realizar la categorización es preciso que el analista tenga en cuenta que las categorías deben de cumplir con la doble condición de:*

Homogeneidad interna: *todos los datos agrupados en ella han de ser de la misma especie, afines o semejantes entre sí.*

Heterogeneidad externa: *cada categoría ha de ser diferente al resto, cada una contiene datos de distinta especie. (2007, pág. 261)*

Capítulo 4

4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

4.1. Análisis de contenido de las dificultades presentadas por los estudiantes participantes en la investigación

Los tipos de análisis de contenido que se tuvieron presentes para la interpretación de los datos recogidos fueron:

El Análisis de exploración de contenido, ya que en los registros se investigaron las representaciones y estilos escritos de pruebas.

El Análisis de contenido manifiesto o directo, ya que se observaron la simbología y escritura de las pruebas intelectuales, así como también la semántica de los enunciados construidos.

El Análisis de contenido latente o indirecto, ya que se investigó la sintaxis y coherencia lógica en las pruebas presentadas por los estudiantes.

4.1.1. Dificultades en los estudiantes universitarios

Las dificultades que se presentan en este apartado han sido detectadas en algunos de los estudiantes universitarios que cursaron Pensamiento Matemático IV de la Licenciatura en Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación en la Universidad de Antioquia-Sede Medellín, en los años: 2005 y 2006. Este apartado fue expuesto como ponencia en el mes de septiembre de 2006 en el "XIII Encuentro de la Escuela Regional de

Matemática", Universidad Tecnológica de Pereira, bajo el título: "Dificultades en la comprensión de la demostración matemática a dos columnas en los estudiantes de primeros años de universidad". Esta ponencia también se presentó en el año 2007 en ASOCOLME-Cali, Universidad del Valle, bajo el título: "Dificultades en la comprensión de la demostración matemática a dos columnas en los estudiantes de primeros años de universidad".

El análisis de contenido de las dificultades en los estudiantes universitarios sirvió de inicio para el planteamiento del problema de investigación y el posterior análisis de contenido de las dificultades en otras poblaciones (educación básica, media y transición media-universitaria) y la posterior devolución y mirada de la población de la educación media en lo que concierne al por qué los estudiantes se les dificulta la construcción de las pruebas intelectuales.

Las dificultades presentadas por los estudiantes universitarios fueron recolectadas a partir de la intervención de unos talleres y evaluaciones sobre pruebas intelectuales y demostraciones matemáticas alrededor de la teoría de conjuntos y se realizó una clasificación por niveles de comprensión, en consonancia con Stone (1999).

En esta población los estudiantes comprenden que las pruebas tienen un carácter de convencimiento social y las dificultades básicas radican en el acceso o no a pruebas intelectuales, basadas fundamentalmente en la comprensión del proceso de razonamiento inductivo y deductivo, como se describe más adelante en el Cuadro 9.

Determinación de Categorías	
Categorías presentadas en este análisis	• **Dificultades presentadas en el razonamiento inductivo.** • **Dificultades presentadas en el razonamiento deductivo.**
Homogeneidad en las categorías	Las dificultades en la comprensión de pruebas y conjeturas están relacionadas con los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales.
Utilidad de las categorías	Las categorías permiten describir los niveles de comprensión de los estudiantes en cuanto al razonamiento matemático.
Exclusión mutua de las categorías	Los razonamientos inductivos y deductivos en sus definiciones más primarias son netamente excluyentes. En cuanto que los razonamientos inductivos están basados en generalizaciones a partir de casos particulares, mientras que los razonamientos deductivos lo hacen a reglas de inferencias.
Claridad y concreción de las categorías	La categorización realizada para estas dificultades se remite a precisiones de la lógica y el razonamiento matemático.

Cuadro 9. Categorización realizada a las dificultades presentadas por los estudiantes universitarios

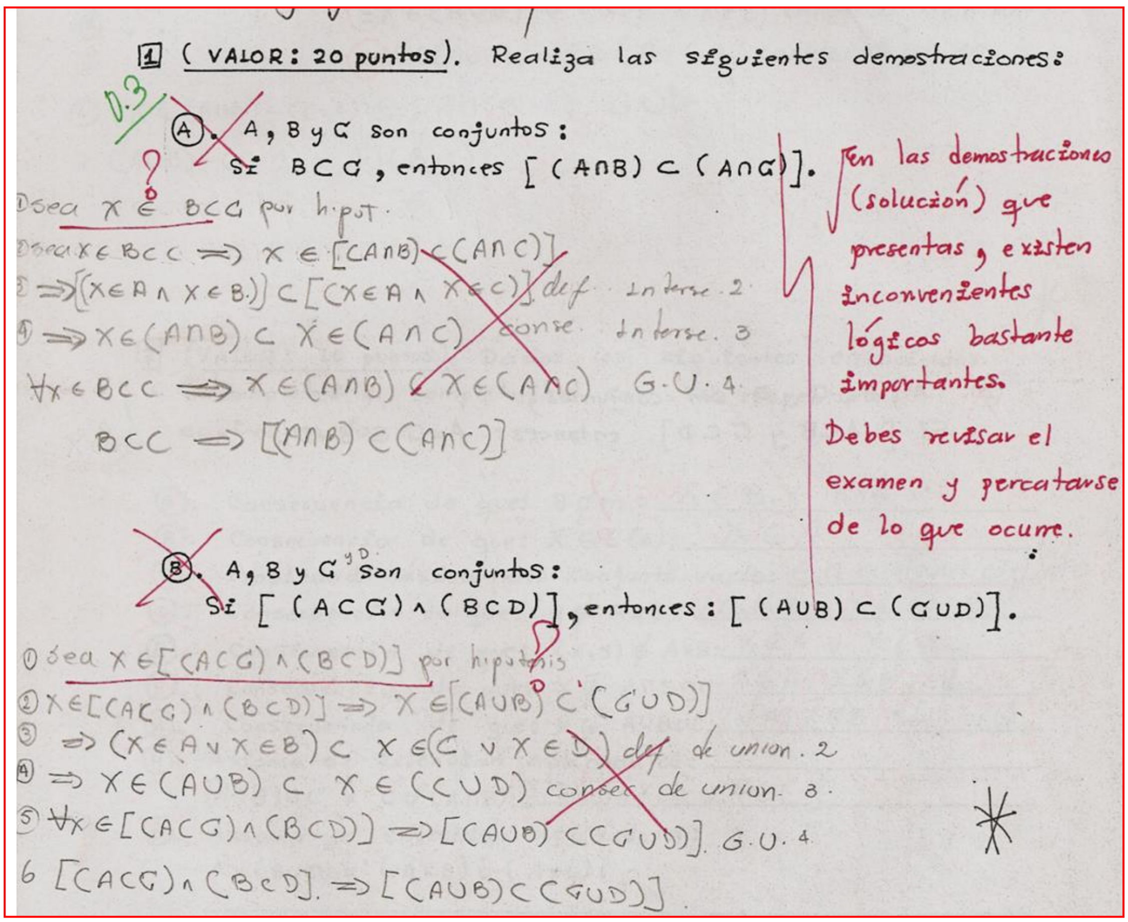
4.1.1.1. Dificultad en la conceptualización y diferenciación de los métodos de demostración

Hay dificultades en la conceptualización de los métodos de demostración: directo e indirecto, éstas radican básicamente en indicar conscientemente el momento en que se hace referencia a un condicional y cuándo a una implicación. A los estudiantes se les dificulta entender qué método de demostración van a elegir: directo o indirecto. Hay escasa comprensión cuando se trata de una demostración que debe ser razonada por un método directo ó por un método indirecto (la prueba directa es constructiva mientras que la prueba indirecta detecta inconsistencias entre las hipótesis y las tesis emergentes, por medio de una contradicción). Esta dificultad pone en desventaja a los estudiantes para la formulación y elaboración escrita de una prueba intelectual, según lo expresado por Balacheff. Esta dificultad indica que los estudiantes tienen una comprensión escasa, semejante a la de aprendiz.

Esta dificultad puede detectarse en todas las ilustraciones que se encuentran en este apartado (4.1.1) ya que los estudiantes incluso no realizan explicitaciones de los métodos de demostración empleados.

4.1.1.2. Dificultad en la conceptualización de proposiciones matemáticas y las respectivas tablas de verdad

A veces en cierto paso del proceso de una demostración, se exhibe *“una expresión”* que en ningún caso es una proposición, debido a las dificultades en la escritura y ubicación sintáctica de los conectivos lógicos al interior de ésta. De otra parte se presentan dificultades al interpretar las tablas de verdad frente a un razonamiento deductivo, esto puede deberse a que en algunos cursos de matemáticas, el uso de tablas de verdad sólo se remite al manejo mecánico de verdaderos y falsos en una tabla y no a la interpretación como tal de los resultados obtenidos. Esta dificultad genera problemáticas asociadas con la validez de la prueba. Los estudiantes que presentan esta dificultad corresponden a un nivel de comprensión de principiante. Ver: Ilustración 9, 10 y 15.


1 (VALOR: 20 puntos). Realiza las siguientes demostraciones:

0.3

A. A, B y C son conjuntos:
Si $B \subset C$, entonces $[(A \cap B) \subset (A \cap C)]$.

?

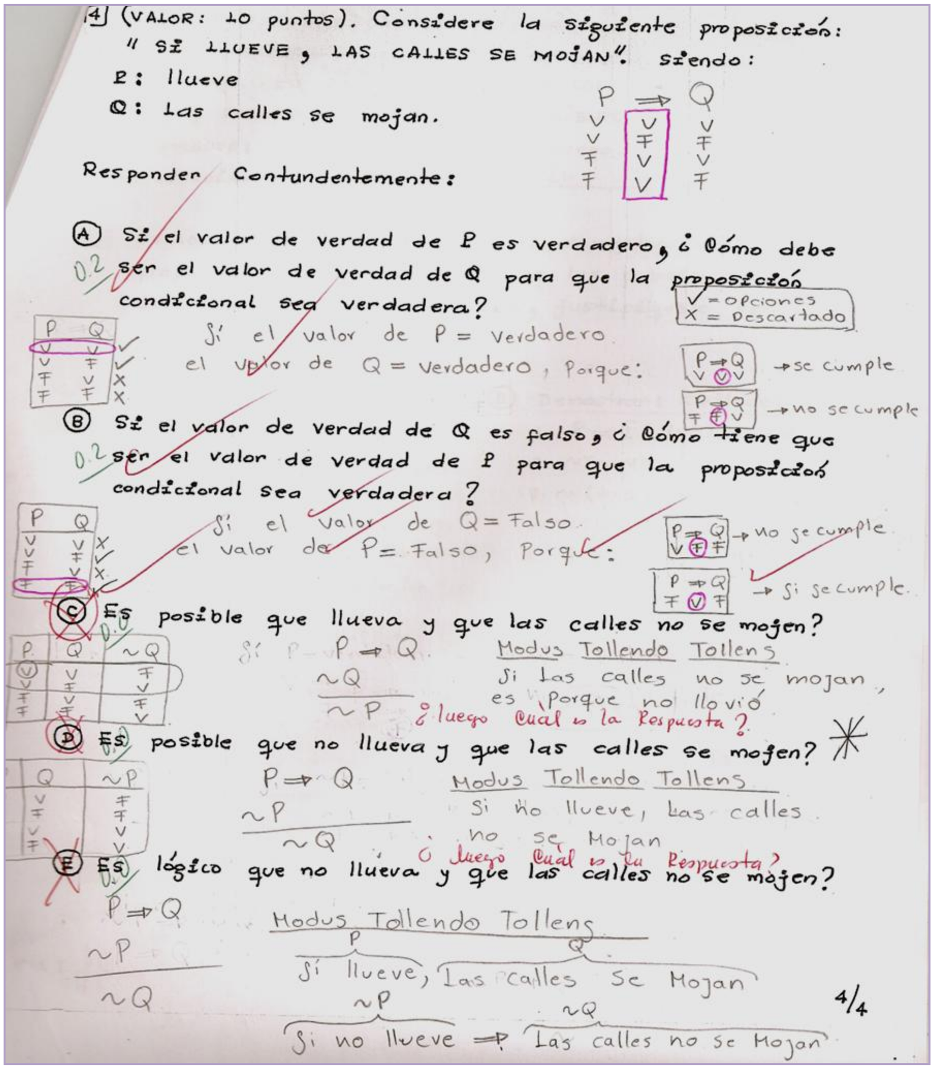
① Sea $x \in B \subset C$ por hipot.
② Sea $x \in B \subset C \Rightarrow x \in [(A \cap B) \subset (A \cap C)]$
③ $\Rightarrow [(x \in A \wedge x \in B)] \subset [(x \in A \wedge x \in C)]$ def. Interse. 2
④ $\Rightarrow x \in (A \cap B) \subset x \in (A \cap C)$ conse. Interse. 3
$\forall x \in B \subset C \Rightarrow x \in (A \cap B) \subset x \in (A \cap C)$ G.U. 4
$B \subset C \Rightarrow [(A \cap B) \subset (A \cap C)]$

En las demostraciones (solución) que presentas, existen inconvenientes lógicos bastante importantes.
Debes revisar el examen y percatarse de lo que ocurre.

B. A, B y C y D son conjuntos:
Si $[(A \subset C) \wedge (B \subset D)]$, entonces: $[(A \cup B) \subset (C \cup D)]$.

① Sea $x \in [(A \subset C) \wedge (B \subset D)]$ por hipotesis
② $x \in [(A \subset C) \wedge (B \subset D)] \Rightarrow x \in [(A \cup B) \subset (C \cup D)]$
③ $\Rightarrow (x \in A \vee x \in B) \subset x \in (C \vee x \in D)$ def de union. 2
④ $\Rightarrow x \in (A \cup B) \subset x \in (C \cup D)$ conse. de union. 3
⑤ $\forall x \in [(A \subset C) \wedge (B \subset D)] \Rightarrow [(A \cup B) \subset (C \cup D)]$. G.U. 4
6 $[(A \subset C) \wedge (B \subset D)] \Rightarrow [(A \cup B) \subset (C \cup D)]$

Ilustración 9. Evidencia de la dificultad en la conceptualización de una proposición


4) (VALOR: 10 puntos). Considere la siguiente proposición:
"SI LLUEVE, LAS CALLES SE MOJAN". Siendo:
P: llueve
Q: Las calles se mojan.

P	$\Rightarrow$	Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

Responden Contundentemente:

A) Si el valor de verdad de P es verdadero, ¿Cómo debe ser el valor de verdad de Q para que la proposición condicional sea verdadera?
0.2
√ = opciones
X = Descartado
Sí el valor de P = Verdadero
el valor de Q = Verdadero, Porque:
$P \Rightarrow Q$ → se cumple
$P \Rightarrow Q$ → no se cumple

B) Si el valor de verdad de Q es falso, ¿Cómo tiene que ser el valor de verdad de P para que la proposición condicional sea verdadera?
0.2
Sí el valor de Q = Falso
el valor de P = Falso, Porque:
$P \Rightarrow Q$ → no se cumple
$P \Rightarrow Q$ → Si se cumple

C) Es posible que llueva y que las calles no se mojen?
0.0
$P \Rightarrow Q$ Modus Tollendo Tollens
$\sim Q$ Si las calles no se mojan,
$\sim P$ es porque no llovió
¿luego Cuál es la Respuesta?

D) Es posible que no llueva y que las calles se mojen?
$P \Rightarrow Q$ Modus Tollendo Tollens
$\sim P$ Si no llueve, las calles
$\sim Q$ no se mojan
¿luego Cuál es la Respuesta?

E) Es lógico que no llueva y que las calles no se mojen?
0.
$P \Rightarrow Q$ Modus Tollendo Tollens
$\sim P$ Sí llueve, Las calles se mojan
$\sim Q$ Si no llueve $\Rightarrow$ Las calles no se mojan
4/4

Ilustración 10. Evidencia de la dificultad en la conceptualización de las reglas de inferencias, del condicional y de las tablas de verdad

4.1.1.3. Dificultad en la conceptualización del condicional y de la implicación lógica (condiciones suficientes y necesarias)

Los estudiantes suponen proposiciones, como hipótesis, que en ningún caso lo son e incluso toman algunos enunciados como hipótesis que hacen parte de la tesis. Esto ocurre debido a que no se hace una diferenciación entre lo que es la causa y la consecuencia en una proposición condicional. Ante esta dificultad, los estudiantes no logran tener acercamientos a pruebas intelectuales, lo cual evidencia fuertes dificultades semánticas y de conceptualización para abordar el condicional y la implicación lógica. Esta dificultad provoca que los estudiantes que la presentan estén en un nivel de comprensión de principiante. Ver: Ilustración 10 y 11.

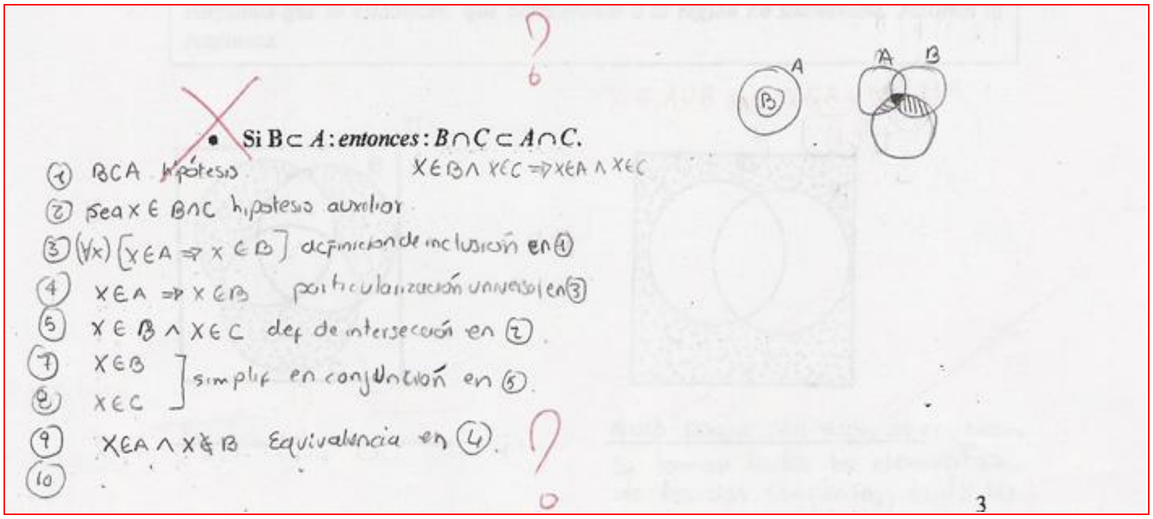
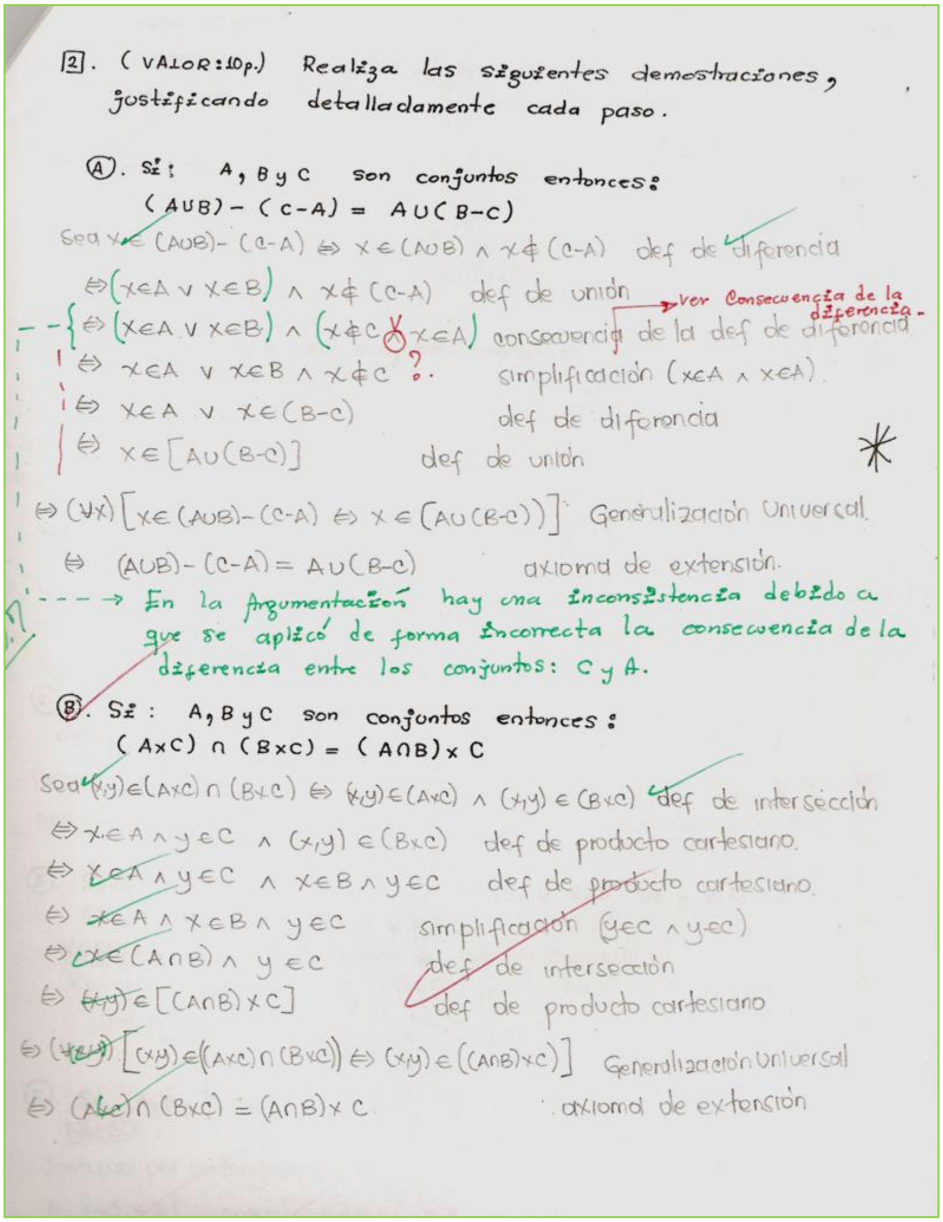


Ilustración 11. Evidencia de la dificultad de conceptualización de un condicional

4.1.1.4. Dificultad del manejo de conectivos lógicos en las proposiciones

En el proceso de enlace de proposiciones entre pasos lógicos (en razonamientos deductivos), en algunos casos implicaciones o bicondicionales, no hay una diferencia conceptual marcada; y en otros casos los estudiantes invalidan la demostración al no diferenciar conceptualmente, si se trata de una implicación o una equivalencia. Esta dificultad tiene grandes implicaciones en la validación de los razonamientos empleados para acceder a la prueba intelectual y por tanto el nivel de comprensión logrado es de aprendiz. Ver: Ilustración 12 y 13.



2. (VALOR: 10p.) Realiza las siguientes demostraciones, justificando detalladamente cada paso.

Ⓐ. Si: A, B y C son conjuntos entonces:

$(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$

Sea $x \in (A \cup B) - (C - A) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge x \notin (C - A)$ def de diferencia

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin (C - A)$ def de unión → ver Consecuencia de la diferencia.

$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C \vee x \in A)$ consecuencia de la def de diferencia

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \wedge x \notin C$? simplificación $(x \in A \wedge x \in A)$

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in (B - C)$ def de diferencia

$\Leftrightarrow x \in [A \cup (B - C)]$ def de unión

$\Leftrightarrow (\forall x)\left[x \in (A \cup B) - (C - A) \Leftrightarrow x \in (A \cup (B - C))\right]$ Generalización Universal

$\Leftrightarrow (A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$ axioma de extensión.

→ En la Argumentación hay una inconsistencia debido a que se aplicó de forma incorrecta la consecuencia de la diferencia entre los conjuntos: C y A.

Ⓑ. Si: A, B y C son conjuntos entonces:

$(A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$

Sea $(x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C) \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \wedge (x,y) \in (B \times C)$ def de intersección

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge (x,y) \in (B \times C)$ def de producto cartesiano.

$\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in C \wedge x \in B \wedge y \in C$ def de producto cartesiano.

$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C$ simplificación $(y \in C \wedge y \in C)$

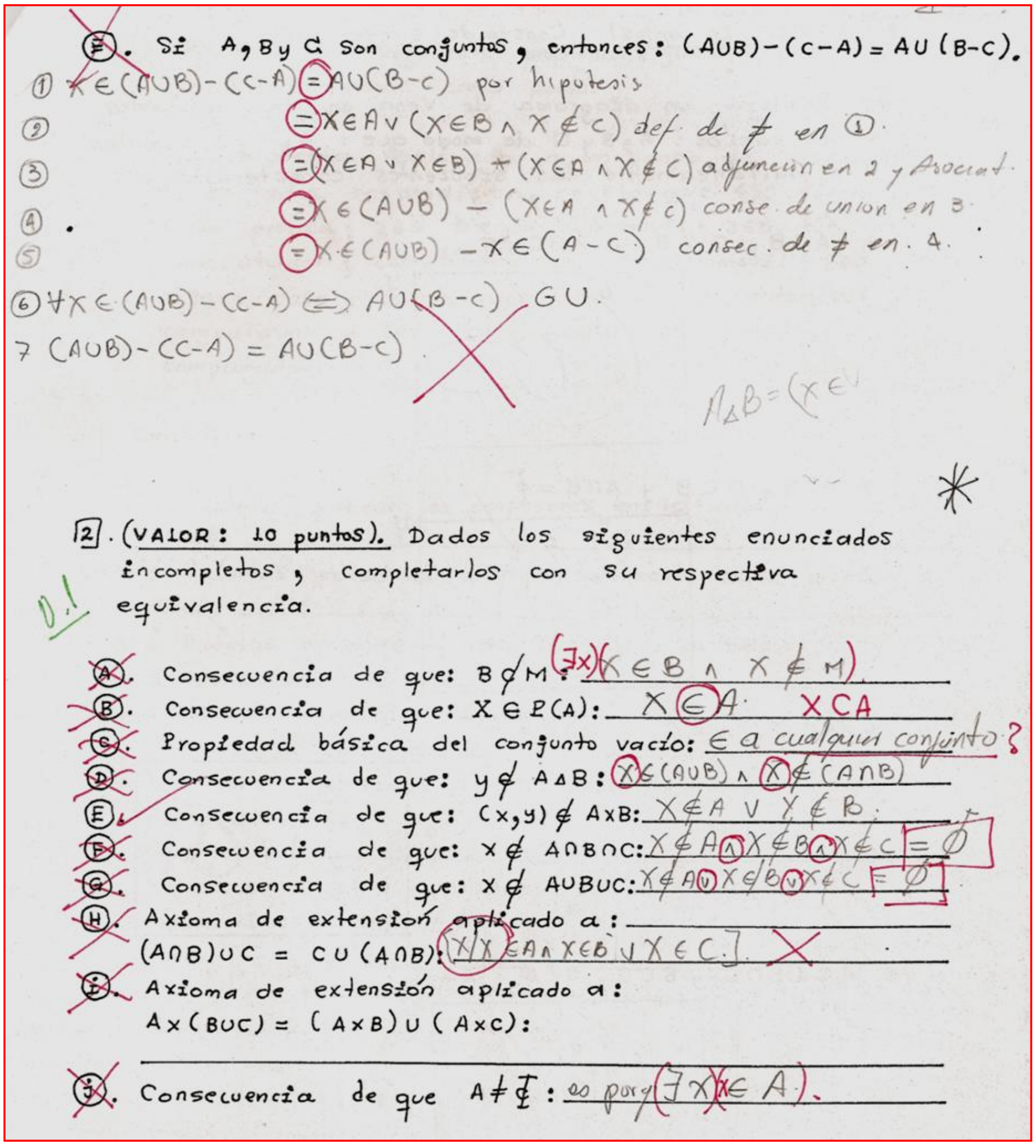
$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C$ def de intersección

$\Leftrightarrow (x,y) \in [(A \cap B) \times C]$ def de producto cartesiano

$\Leftrightarrow (\forall (x,y))\left[(x,y) \in ((A \times C) \cap (B \times C)) \Leftrightarrow (x,y) \in ((A \cap B) \times C)\right]$ Generalización Universal

$\Leftrightarrow (A \times C) \cap (B \times C) = (A \cap B) \times C$ axioma de extensión

Ilustración 12. Evidencia de la dificultad del manejo de los conectivos lógicos y de la comprensión de conceptos matemáticos inmersos en el enunciado



3. Si A, B y C son conjuntos, entonces: $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$.

1 $x \in (A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$ por hipotesis

2 $= x \in A \vee (x \in B \wedge x \notin C)$ def. de $\neq$ en 1.

3 $= (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C)$ adjuncion en 2 y Asociat.

4 $= x \in (A \cup B) - (x \in A \wedge x \notin C)$ conse. de union en 3.

5 $= x \in (A \cup B) - x \in (A - C)$ consec. de $\neq$ en 4.

6 $\forall x \in (A \cup B) - (C - A) \iff A \cup (B - C)$ G U.

7 $(A \cup B) - (C - A) = A \cup (B - C)$.

$A \triangle B = (x \in$

2. (VALOR: 10 puntos). Dados los siguientes enunciados incompletos, completarlos con su respectiva equivalencia.

D.I

A. Consecuencia de que: $B \not\subset M$: $(\exists x)(x \in B \wedge x \notin M)$

B. Consecuencia de que: $X \in P(A)$: $X \in A$ $X \subset A$

C. Propiedad básica del conjunto vacío: $\in$ a cualquier conjunto ?

D. Consecuencia de que: $y \notin A \triangle B$: $x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)$

E. Consecuencia de que: $(x, y) \notin A \times B$: $x \notin A \vee y \notin B$

F. Consecuencia de que: $x \notin A \cap B \cap C$: $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C = \emptyset$

G. Consecuencia de que: $x \notin A \cup B \cup C$: $x \notin A \vee x \notin B \vee x \notin C = \emptyset$

H. Axioma de extensión aplicado a: $(A \cap B) \cup C = C \cup (A \cap B)$: $\{x / x \in A \wedge x \in B \vee x \in C\}$

I. Axioma de extensión aplicado a: $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$:

J. Consecuencia de que $A \neq \emptyset$: es por $(\exists x)(x \in A)$.

Ilustración 13. Evidencia de la dificultad del manejo de los conectivos lógicos y de cuantificadores

4.1.1.5. Dificultad en la comprensión de la contradicción lógica

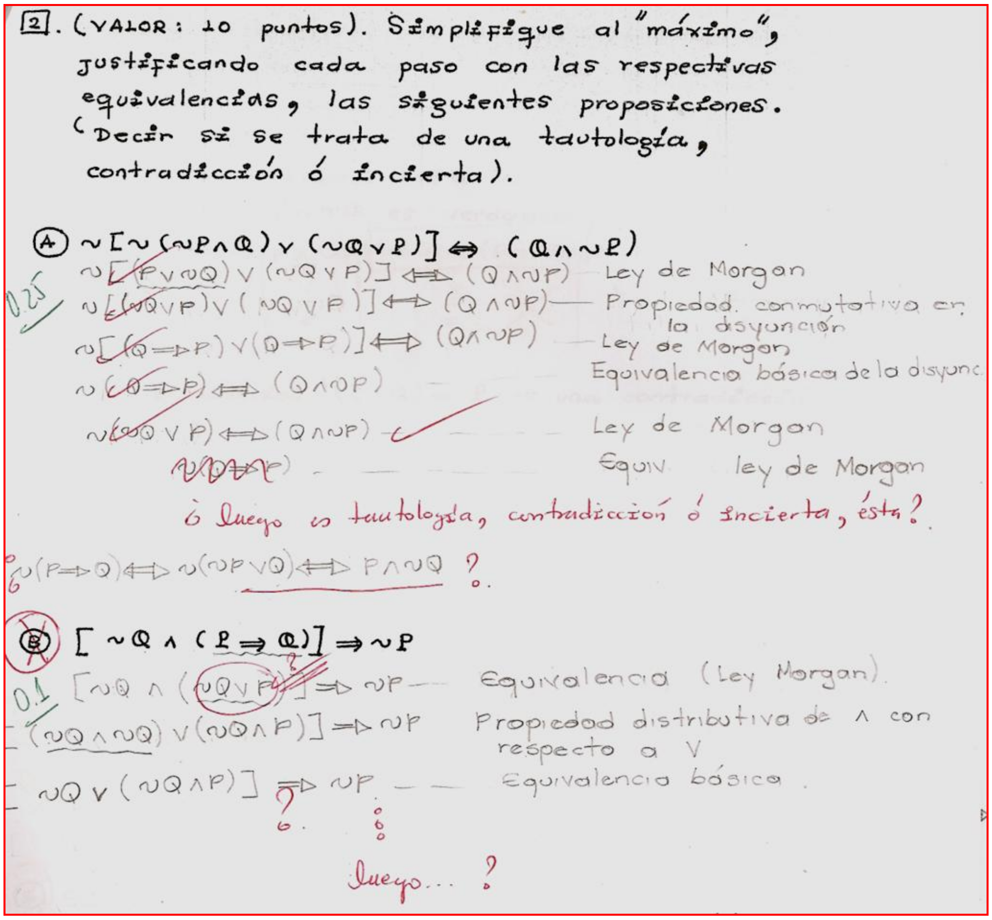
Hay falencias en el principio lógico de no contradicción al demostrar un teorema, en cuanto su conceptualización. Esta dificultad genera que los estudiantes estén restringidos para la confrontación y negación de proposiciones, que pueden facilitar las etapas para conjeturar y discutir la certeza de éstas. Esta dificultad produce que el estudiante se ubique en un nivel de comprensión de principiante. Ver la Ilustración 14.

4.1.1.6. Dificultad en las reglas de inferencia lógicas deductivas

Hay dificultades al aplicar consecuentemente las reglas de inferencia y de los posibles contraejemplos relativos a cada regla. El nivel de comprensión de un estudiante de acuerdo a esta dificultad es de un nivel de principiante. Remitirse a la Ilustración 11.

4.1.1.7. Dificultad en la comprensión semántica y sintáctica de las tautologías lógicas

Se presenta dificultad en cuanto a la comprensión de los esquemas lógicos sintácticos relativos a las tautologías que se pueden emplear para la elaboración argumentativa de las demostraciones matemáticas, esto impide que los estudiantes accedan a suficientes conceptualizaciones lógicas para la construcción de pruebas intelectuales. Los estudiantes que presentaron esta dificultad se pueden ubicar dentro de un nivel de comprensión de principiante. Ver: Ilustración 14 y 16.


2. (VALOR: 10 puntos). Simplifique al "máximo", justificando cada paso con las respectivas equivalencias, las siguientes proposiciones. (Decir si se trata de una tautología, contradicción ó incierta).

(A) $\sim[\sim(\sim P \wedge Q) \vee (\sim Q \vee P)] \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$

$\sim[(P \vee \sim Q) \vee (\sim Q \vee P)] \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$ Ley de Morgan

$\sim[(\sim Q \vee P) \vee (\sim Q \vee P)] \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$ — Propiedad conmutativa en la disyunción

$\sim[(Q \Rightarrow P) \vee (Q \Rightarrow P)] \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$ — Ley de Morgan

$\sim(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$ Equivalencia básica de la disyunc

$\sim(\sim Q \vee P) \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$ — Ley de Morgan

$\sim(Q \wedge \sim P)$ — Equiv. ley de Morgan

0.25

¿ Luego es tautología, contradicción ó incierta, ésta ?

$\sim(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim(\sim P \vee Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$ ¿?

(B) $[\sim Q \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \sim P$

$[\sim Q \wedge (\sim Q \vee P)] \Rightarrow \sim P$ — Equivalencia (Ley Morgan).

$[(\sim Q \wedge \sim Q) \vee (\sim Q \wedge P)] \Rightarrow \sim P$ Propiedad distributiva de $\wedge$ con respecto a $\vee$

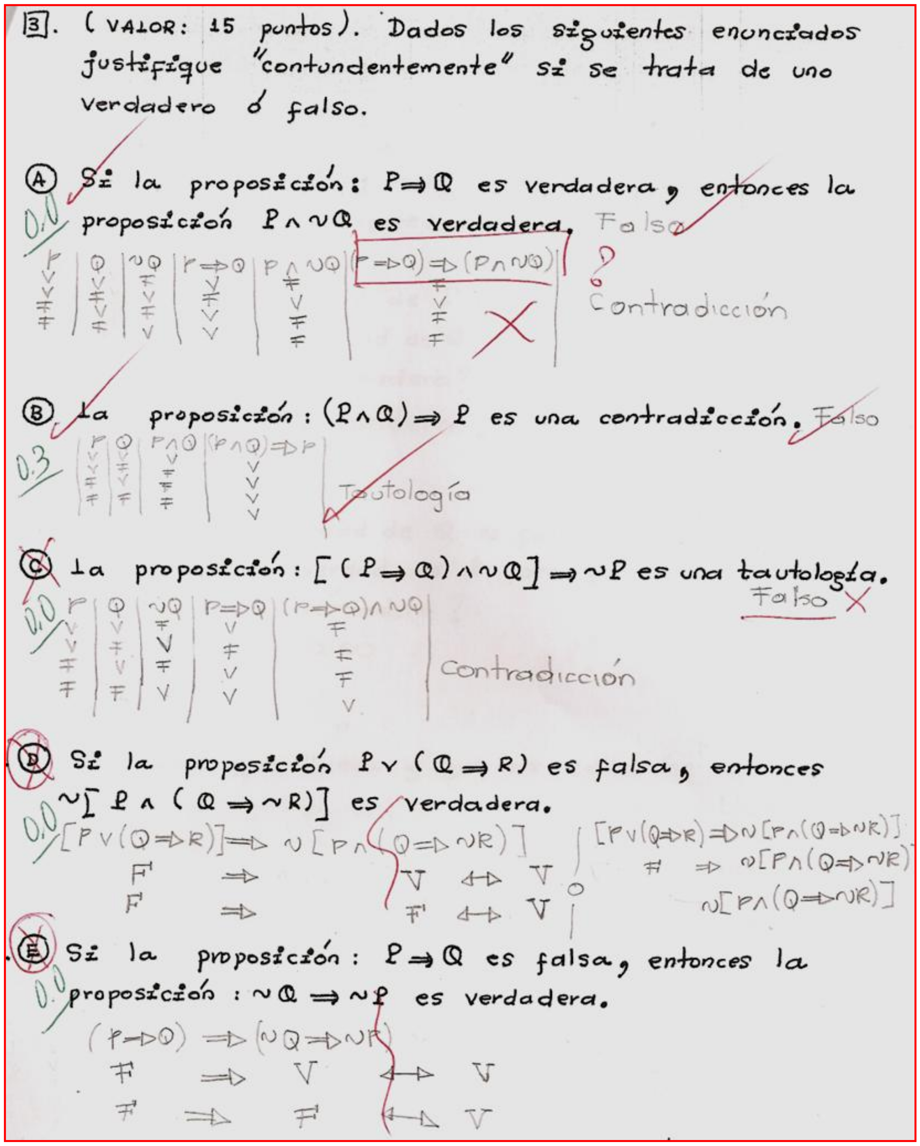
$[\sim Q \vee (\sim Q \wedge P)] \Rightarrow \sim P$ — — Equivalencia básica.

0.1

¿? ⁝

Luego... ?

Ilustración 14. Evidencia de la dificultad en la comprensión semántica y sintáctica de las tautologías lógicas



3. (VALOR: 15 puntos). Dados los siguientes enunciados justifique "contundentemente" si se trata de uno verdadero ó falso.

Ⓐ Si la proposición: $P \Rightarrow Q$ es verdadera, entonces la proposición $P \wedge \sim Q$ es verdadera. Falso

0.0

P	Q	∼Q	P⇒Q	P ∧ ∼Q	(P⇒Q) ⇒ (P∧∼Q)
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

¿ Contradicción

Ⓑ La proposición: $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ es una contradicción. Falso

0.3

P	Q	P∧Q	(P∧Q)⇒P
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautología

Ⓒ La proposición: $[(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q] \Rightarrow \sim P$ es una tautología. Falso

0.0

P	Q	∼Q	P⇒Q	(P⇒Q)∧∼Q
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Contradicción

Ⓓ Si la proposición $P \vee (Q \Rightarrow R)$ es falsa, entonces $\sim[P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)]$ es verdadera.

0.0

$[P \vee (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow \sim[P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)]$

F ⇒ V ⟺ V

F ⇒ F ⟺ V

ó

$[P \vee (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow \sim[P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)]$

F ⇒ $\sim[P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)]$

$\sim[P \wedge (Q \Rightarrow \sim R)]$

Ⓔ Si la proposición: $P \Rightarrow Q$ es falsa, entonces la proposición: $\sim Q \Rightarrow \sim P$ es verdadera.

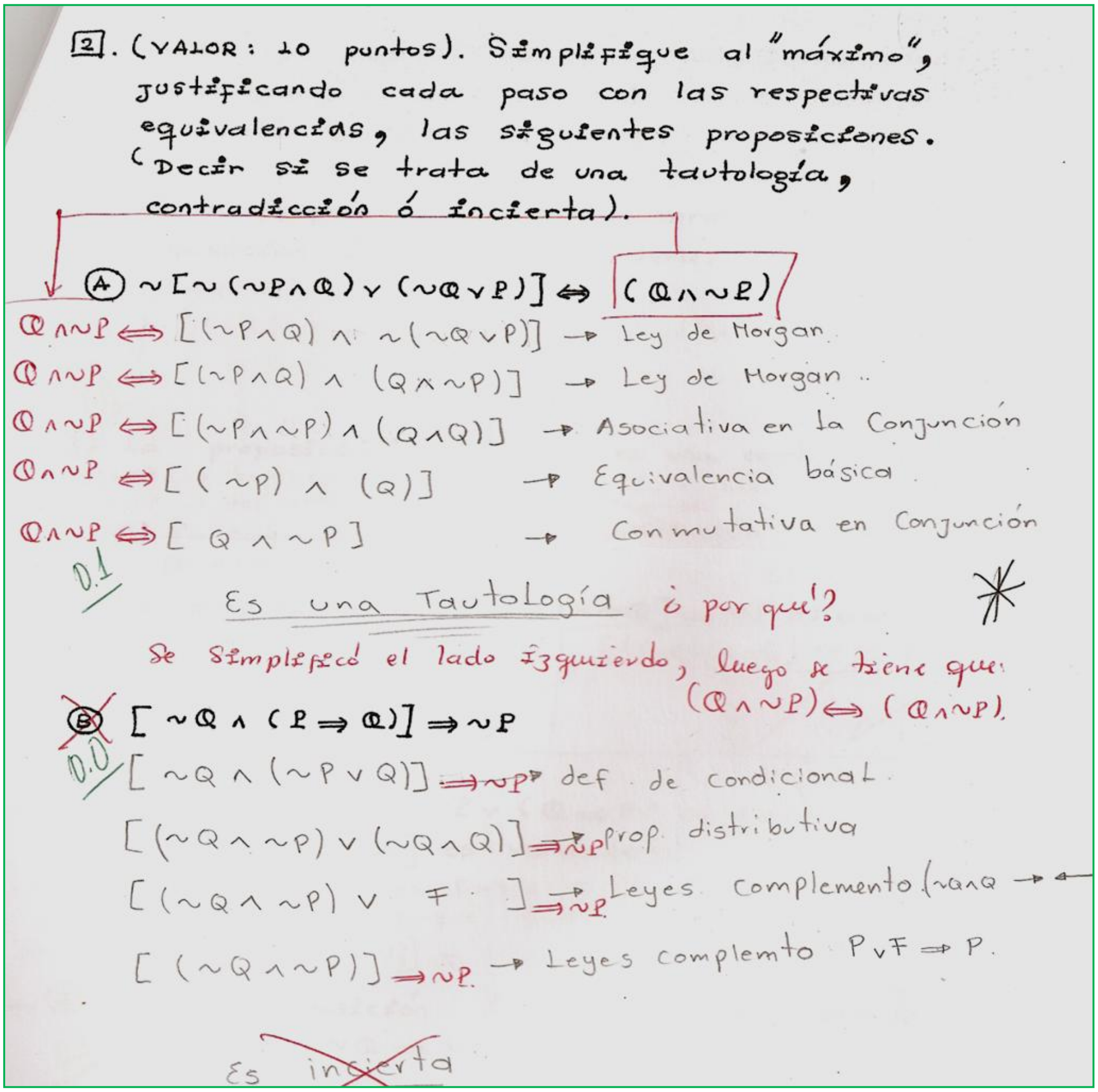
0.0

$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim Q \Rightarrow \sim P)$

F ⇒ V ⟺ V

F ⇒ F ⟺ V

Ilustración 15. Dificultad en la conceptualización de las tablas de verdad.


2. (VALOR: 10 puntos). Simplifique al "máximo", justificando cada paso con las respectivas equivalencias, las siguientes proposiciones. (Decir si se trata de una tautología, contradicción ó incierta).

Ⓐ $\sim[\sim(\sim P \wedge Q) \vee (\sim Q \vee P)] \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$

$Q \wedge \sim P \Leftrightarrow [(\sim P \wedge Q) \wedge \sim(\sim Q \vee P)]$ → Ley de Morgan

$Q \wedge \sim P \Leftrightarrow [(\sim P \wedge Q) \wedge (Q \wedge \sim P)]$ → Ley de Morgan

$Q \wedge \sim P \Leftrightarrow [(\sim P \wedge \sim P) \wedge (Q \wedge Q)]$ → Asociativa en la Conjunción

$Q \wedge \sim P \Leftrightarrow [(\sim P) \wedge (Q)]$ → Equivalencia básica

$Q \wedge \sim P \Leftrightarrow [Q \wedge \sim P]$ → Conmutativa en Conjunción

0.1

Es una Tautología ¿por qué?

Se Simplificó el lado izquierdo, luego se tiene que: $(Q \wedge \sim P) \Leftrightarrow (Q \wedge \sim P)$.

Ⓑ $[\sim Q \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow \sim P$

0.0

$[\sim Q \wedge (\sim P \vee Q)] \Rightarrow \sim P$ → def. de condicional.

$[(\sim Q \wedge \sim P) \vee (\sim Q \wedge Q)] \Rightarrow \sim P$ prop. distributiva

$[(\sim Q \wedge \sim P) \vee F] \Rightarrow \sim P$ → Leyes complemento $(\sim Q \wedge Q$ →

$[(\sim Q \wedge \sim P)] \Rightarrow \sim P$ → Leyes complemto $P \vee F \Rightarrow P$.

Es ~~incierta~~

Ilustración 16. Evidencia de la dificultad en la comprensión semántica y sintáctica de las tautologías lógicas

4.1.1.8. Dificultad al momento de unificar estilos escritos: por párrafos o a dos columnas, de una prueba intelectual

Se mezcla al escribir una demostración: la argumentación por párrafos y en otros casos por pasos sueltos y pruebas a dos columnas. No hay una homogeneidad en el estilo escrito al presentar una demostración matemática de un cierto teorema, esto se debe en gran medida a la poca consciencia que hay de la prueba, desde los contextos de validación y convencimiento a una comunidad y específicamente en el aula de clase. En la escritura de una demostración matemática se hace necesario adoptar y unificar un sólo estilo escrito, ya sea a dos columnas, por párrafos, demostraciones a conocimiento cero, demostración holográfica; al lector se recomienda leer a Hanna (1997). De acuerdo con (Hanna, 1997, pág. 3) se entiende por demostración a conocimiento cero como la prueba que se realiza entre dos interlocutores y en la cual uno de ellos trata de convencer al otro por medio de razonamientos verbales o escritos sin detalles y de la existencia de una prueba. Este hecho hace que el que está siendo convencido ponga en duda el conocimiento de quien prueba, por esto recibe el nombre de conocimiento cero. Y siguiendo a (Hanna, 1997, pág. 4) se entiende por demostración holográfica a las pruebas que se realizan mediante la simbolizacion neta de enunciados y que se ciñen exclusivamente a la sintaxis de los enunciados.

De acuerdo a la dificultad señalada en este apartado se generan en los procesos de razonamientos de los estudiantes implicaciones en cuanto a la validación de la prueba y de su carácter social de convencimiento en el aula de clase. Los estudiantes que presentaron esta dificultad se pueden ubicar en un nivel de comprensión de aprendiz.

4.1.1.9. Dificultad en la comprensión de los conceptos matemáticos inmersos en el enunciado el cual se somete a la prueba

Hay desconocimientos semánticos contextuales de la proposición que se quiere demostrar. Esta dificultad pone en desventaja a los estudiantes en cuanto a las limitaciones conceptuales que puedan tener de un cierto objeto o relación matemática y no les permite establecer propiedades y teoremas, que se puedan utilizar para probar cierto enunciado en la clase de matemáticas. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de principiante, ya que el estudiante todavía tiene deficiencias conceptuales.

4.1.1.10. Dificultad al momento de proponer construcciones auxiliares en la conquista de una prueba intelectual

No se proponen construcciones auxiliares para el planteamiento de la demostración. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz o de principiante.

Esta dificultad se observó directamente de las intervenciones verbales de los estudiantes en las clases intervenidas.

4.1.1.11. Dificultad para comprender conscientemente la validación y los procesos de comunicación de las pruebas intelectuales

A los estudiantes se les dificulta comprender que en las demostraciones matemáticas, se está hablando en el campo de validaciones de los enunciados matemáticos generalizados y pocas veces someten sus demostraciones y pruebas a espacios de comunicación y debate crítico. Se reconoce incipientemente que la demostración matemática es institucional a un aula de clase y a unos convenios preestablecidos conscientes o inconscientemente entre el docente y los estudiantes. La dificultad central radica en la interacción social del grupo. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión ingenua o de principiante.

Esta dificultad se observó directamente de los procesos de comunicación de los estudiantes en las clases intervenidas.

4.1.1.12. Dificultad al momento de escribir en papel una prueba intelectual

Se detectan dificultades entre el lenguaje simbólico (en cuanto a la simbología implícita en los objetos y en cuanto a los conceptos inmersos en los enunciados de la demostración) y el lenguaje semántico (en cuanto a las conceptualizaciones precisas que se deben de tener presente para formular demostraciones de los enunciados). Los estudiantes hacen mezclas de ambos. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz.

4.1.1.13. Dificultad para razonar sobre la tesis y realizar regresiones a la hipótesis o progresiones de la hipótesis hacia la tesis

El proceso regresivo-progresivo, el cual consiste en realizar procedimientos sobre la tesis para lograr conexiones con la hipótesis. Éste se emplea en pocos casos, al descomponer la tesis para lograr nexos con las hipótesis. Esta dificultad puede convertirse en una herramienta que puede apuntar a mejorar y esclarecer los razonamientos matemáticos, que se emplean para la construcción de una prueba. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz.

Esta dificultad se notó ya que ninguno de los estudiantes realizó este procedimiento para lograr la prueba de los enunciados a demostrar.

4.1.1.14. Dificultad para enlazar las hipótesis con la tesis de una prueba intelectual

Al finalizar una demostración, no se da la conclusión, que muestre el enlace lógico entre las premisas y la tesis. Se pierde el carácter epistemológico de la prueba en cuanto es a partir de unas hipótesis que se realizan inferencias en conquista de la tesis. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz. Ver la Ilustración 17.

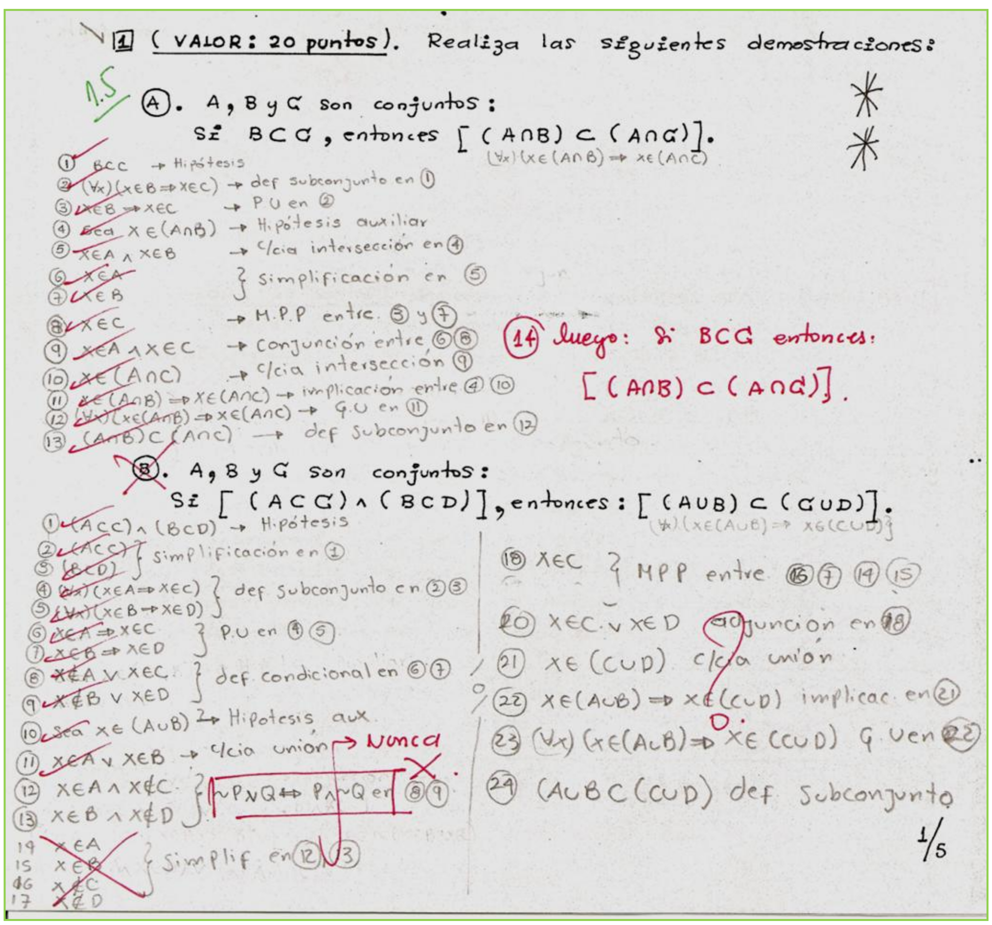


Ilustración 17. Evidencia de la dificultad para enlazar las hipótesis con la tesis

4.1.1.15. Dificultad para entender conscientemente el carácter epistemológico de la prueba en comparación con la demostración

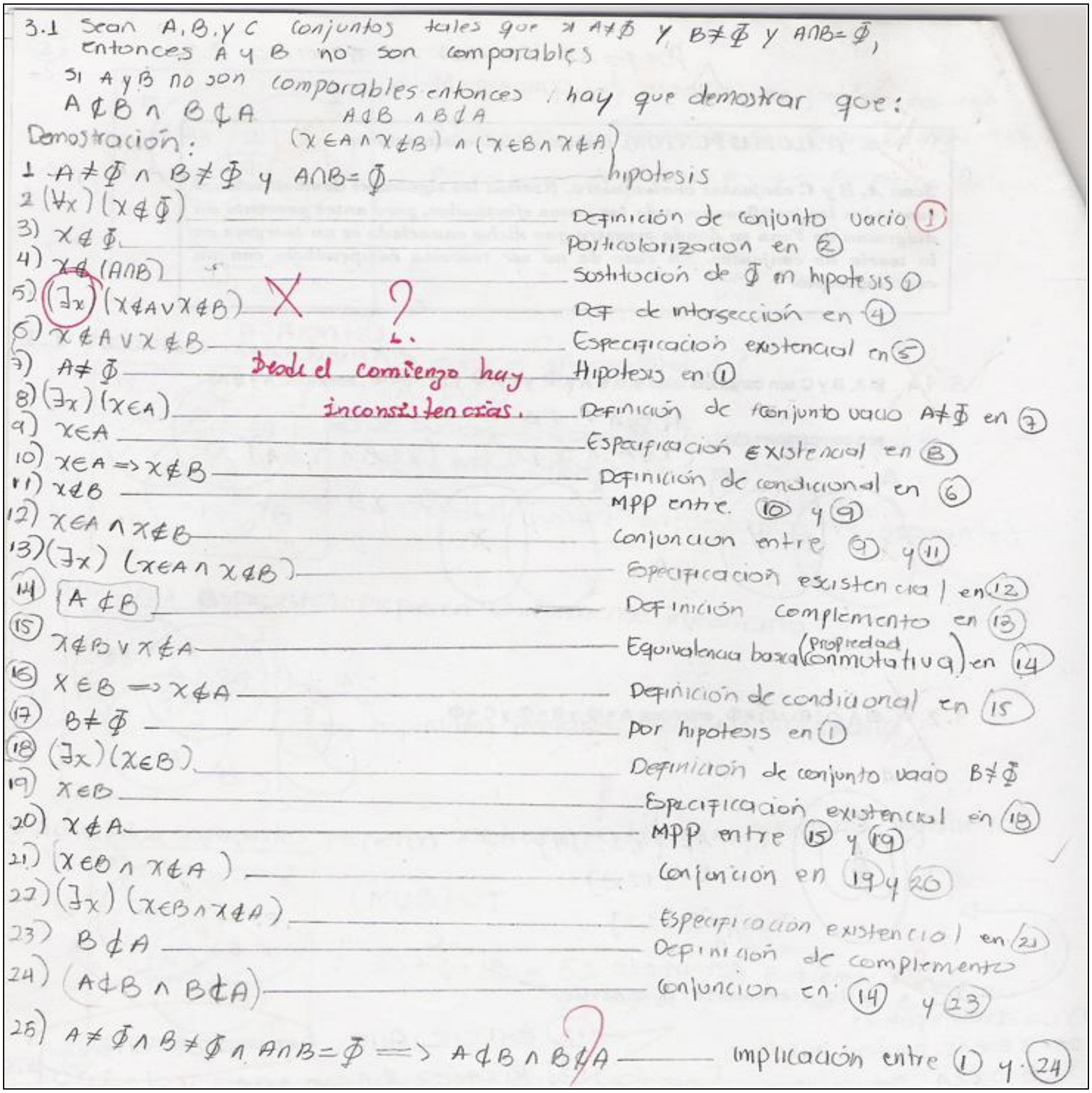
Al estudiante se le dificulta comprender que las pruebas intelectuales en matemática no son algoritmos, no son escritos sin lógica, no son pruebas ni verificaciones; éstas son sólo aproximaciones a la demostración. Esta dificultad hace que los estudiantes confundan las pruebas con las demostraciones y que no se reconozca su verdadera orientación epistemológica. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz. Esta dificultad se detectó en los espacios de clase.

4.1.1.16. Dificultad para acoplar los razonamientos realizados en una prueba intelectual

Se presentan dificultades en cuanto a la presentación clara de la prueba o demostración matemática, ya que las demostraciones matemáticas no son una secuencia de pasos que generan duda. La demostración es no obstante, una exhibición detallada de los pasos y de los razonamientos deductivos e inductivos realizados para llegar a la tesis. Esta dificultad causa que los estudiantes sean mecánicos ante la construcción y elaboraciones de pruebas y sólo puedan construir pruebas remedadas. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de aprendiz.

4.1.1.17. Dificultad en el manejo de las cuantificaciones de una proposición matemática y de las sentencias de existencia y unicidad

Hay dificultades al realizar demostraciones de proposiciones cuantificadas, ya sea en forma universal o existencial; e incluso al demostrar proposiciones que sugieren existencia o unicidad de los conceptos inmersos en el enunciado propuesto. Esto genera una dificultad en cuanto a que el estudiante no comprende el conjunto referencial de los objetos matemáticos de la proposición que se trata de validar. También esta dificultad influye fuertemente en los procesos de generalización de enunciados en el momento en que el estudiante pasa de un razonamiento inductivo a uno deductivo, permitiendo realizar un proceso de los enunciados que inicialmente no aparecen cuantificados, hasta finalmente concretar su cuantificación. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de principiante. Ver: la Ilustración 18 y 19.



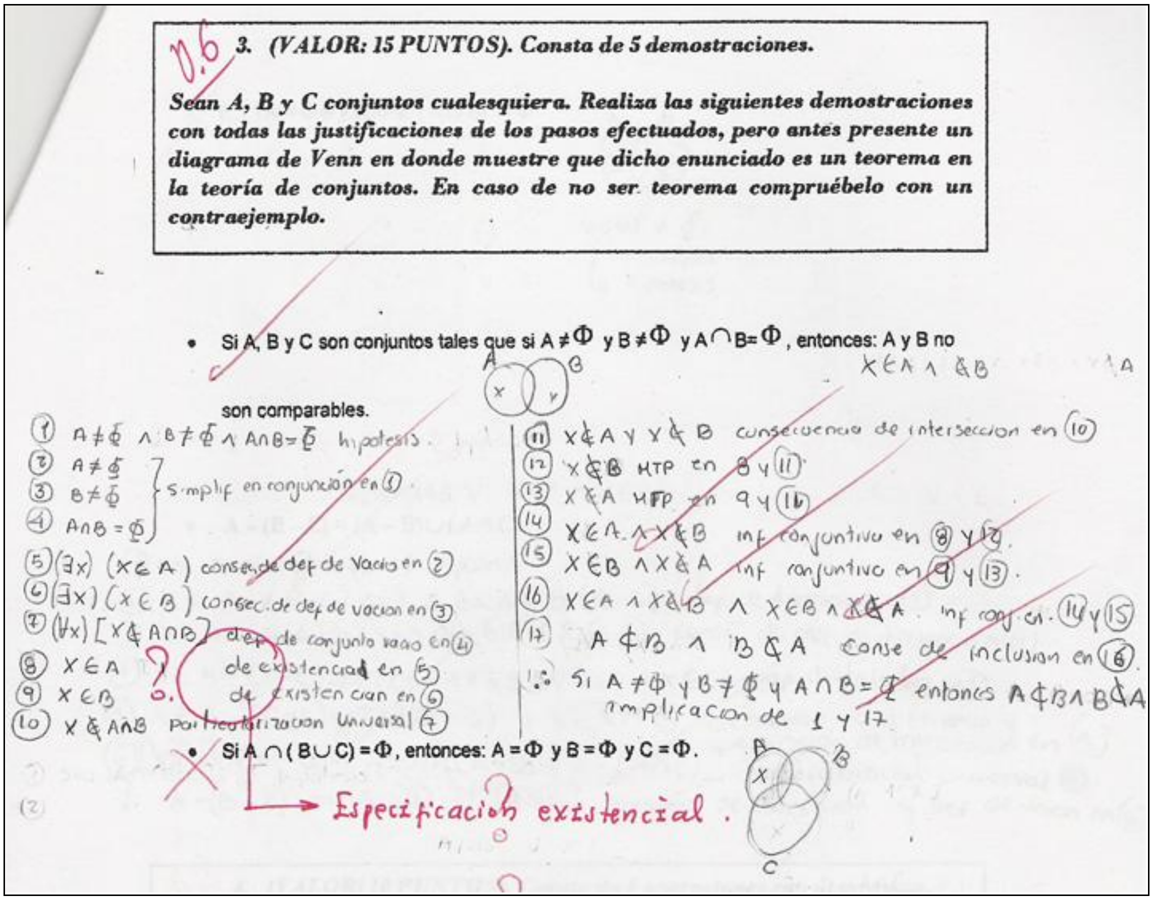
3.1 Sean $A, B, y\ C$ conjuntos tales que si $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces A y B no son comparables

Si A y B no son comparables entonces / hay que demostrar que:
$A \not\subset B \wedge B \not\subset A$ $\quad A \not\subset B \wedge B \not\subset A$

Demostración: $(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in B \wedge x \notin A)$

1 $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$ y $A \cap B = \emptyset$ — hipotesis
2 $(\forall x)(x \notin \emptyset)$ — Definición de conjunto vacio (1)
3) $x \notin \emptyset$ — Particularizacion en (2)
4) $x \notin (A \cap B)$ — Sustitución de $\emptyset$ en hipotesis (1)
5) $(\exists x)(x \notin A \vee x \notin B)$ X ? — Def de intersección en (4)
6) $x \notin A \vee x \notin B$ ¿. — Especificación existencial en (5)
7) $A \neq \emptyset$ Desde el comienzo hay inconsistencias. — Hipotesis en (1)
8) $(\exists x)(x \in A)$ — Definición de conjunto vacio $A \neq \emptyset$ en (7)
9) $x \in A$ — Especificación existencial en (8)
10) $x \in A \Rightarrow x \notin B$ — Definición de condicional en (6)
11) $x \notin B$ — MPP entre (10) y (9)
12) $x \in A \wedge x \notin B$ — Conjuncion entre (9) y (11)
13) $(\exists x)(x \in A \wedge x \notin B)$ — Especificacion existencial en (12)
14) $\boxed{A \not\subset B}$ — Definición complemento en (13)
15) $x \notin B \vee x \notin A$ — Equivalencia basica (Propiedad conmutativa) en (14)
16) $x \in B \Rightarrow x \notin A$ — Definición de condicional en (15)
17) $B \neq \emptyset$ — Por hipotesis en (1)
18) $(\exists x)(x \in B)$ — Definición de conjunto vacio $B \neq \emptyset$
19) $x \in B$ — Especificación existencial en (18)
20) $x \notin A$ — MPP entre (15) y (19)
21) $(x \in B \wedge x \notin A)$ — Conjuncion en 19 y 20
22) $(\exists x)(x \in B \wedge x \notin A)$ — Especificacion existencial en (21)
23) $B \not\subset A$ — Definición de complemento
24) $(A \not\subset B \wedge B \not\subset A)$ — Conjuncion en (14) y (23)
25) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \not\subset B \wedge B \not\subset A$? — Implicación entre (1) y (24)

Ilustración 18. Evidencia de la dificultad en el manejo de las cuantificaciones de una proposición matemática



3. *(VALOR: 15 PUNTOS). Consta de 5 demostraciones.*

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Realiza las siguientes demostraciones con todas las justificaciones de los pasos efectuados, pero antes presente un diagrama de Venn en donde muestre que dicho enunciado es un teorema en la teoría de conjuntos. En caso de no ser teorema compruébelo con un contraejemplo.

- Si A, B y C son conjuntos tales que si $A \neq \Phi$ y $B \neq \Phi$ y $A \cap B = \Phi$, entonces: A y B no son comparables.

① $A \neq \Phi \wedge B \neq \Phi \wedge A \cap B = \Phi$ hipotesis.
② $A \neq \Phi$, ③ $B \neq \Phi$, ④ $A \cap B = \Phi$ simplif. en conjunción en ①
⑤ $(\exists x)(x \in A)$ consec. de def. de Vacío en ②
⑥ $(\exists x)(x \in B)$ consec. de def. de vacíon en ③
⑦ $(\forall x)[x \notin A \cap B]$ def. de conjunto vacío en ④
⑧ $x \in A$ de existencia en ⑤
⑨ $x \in B$ de existencia en ⑥
⑩ $x \notin A \cap B$ Particularización Universal ⑦
⑪ $x \notin A$ y $x \notin B$ consecuencia de intersección en ⑩
⑫ $x \notin B$ MTP en ⑧ y ⑪
⑬ $x \notin A$ MTP en ⑨ y ⑪
⑭ $x \in A \wedge x \notin B$ inf. conjuntiva en ⑧ y ⑫
⑮ $x \in B \wedge x \notin A$ inf. conjuntiva en ⑨ y ⑬
⑯ $x \in A \wedge x \notin B \wedge x \in B \wedge x \notin A$ inf. conj. en ⑭ y ⑮
⑰ $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$ Conse. de inclusion en ⑯
∴ Si $A \neq \Phi$ y $B \neq \Phi$ y $A \cap B = \Phi$ entonces $A \not\subset B \wedge B \not\subset A$ implicacion de 1 y 17

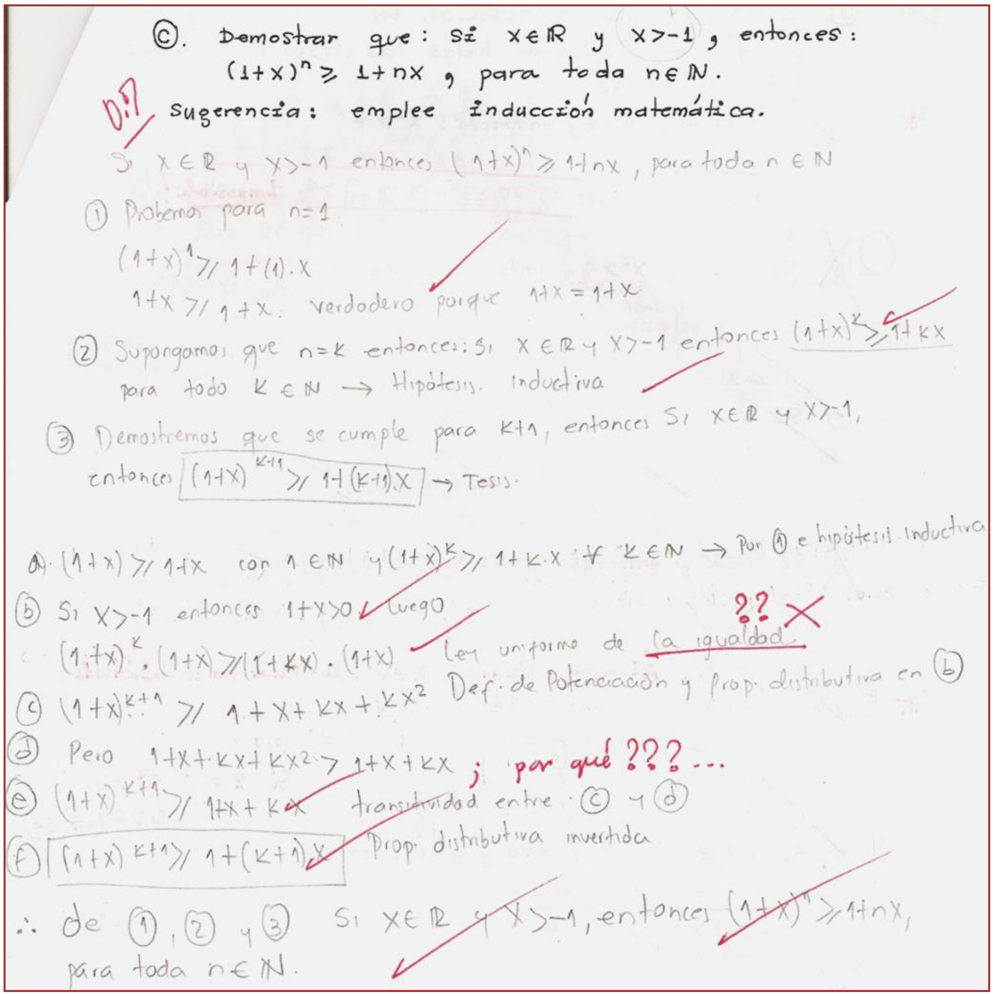
- Si $A \cap (B \cup C) = \Phi$, entonces: $A = \Phi$ y $B = \Phi$ y $C = \Phi$.

Especificación existencial.

Ilustración 19. Evidencia de la dificultad del manejo de las cuantificaciones

4.1.1.18. Dificultad para razonar y emplear la inducción matemática en una prueba intelectual

Los estudiantes tienen dificultades cuando se les hace necesario demostrar por inducción matemática en cuanto que la elaboración de la prueba es mecánica sin razonamientos inductivos de casos particulares previos, que evidencien que el teorema es verdadero o falso. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de principiante. Ver la Ilustración 20.



ⓒ. Demostrar que: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > -1$, entonces: $(1+x)^n \geq 1+nx$, para toda $n \in \mathbb{N}$.
Sugerencia: emplee inducción matemática.
D.I?
Si $x \in \mathbb{R}$ y $x > -1$ entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$, para toda $n \in \mathbb{N}$
① Probemos para $n=1$
$(1+x)^1 \geq 1+(1)\cdot x$
$1+x \geq 1+x$. verdadero porque $1+x = 1+x$
② Supongamos que $n=k$ entonces: Si $x \in \mathbb{R}$ y $x>-1$ entonces $(1+x)^k \geq 1+kx$ para todo $k \in \mathbb{N}$ → Hipótesis inductiva
③ Demostremos que se cumple para $k+1$, entonces Si $x \in \mathbb{R}$ y $x>-1$, entonces $\boxed{(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x}$ → Tesis.
ⓐ $(1+x) \geq 1+x$ con $1 \in \mathbb{N}$ y $(1+x)^k \geq 1+k\cdot x$ $\forall k \in \mathbb{N}$ → Por ① e hipótesis inductiva
ⓑ Si $x>-1$ entonces $1+x>0$ luego
$(1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)\cdot(1+x)$ Ley uniforme de la igualdad. ??
ⓒ $(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx+kx^2$ Def. de Potenciación y Prop. distributiva en ⓑ
ⓓ Pero $1+x+kx+kx^2 > 1+x+kx$; ¿por qué ???...
ⓔ $(1+x)^{k+1} \geq 1+x+kx$ transitividad entre ⓒ y ⓓ
ⓕ $\boxed{(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x}$ Prop. distributiva invertida
∴ de ①, ② y ③ Si $x \in \mathbb{R}$ y $x>-1$, entonces $(1+x)^n \geq 1+nx$, para toda $n \in \mathbb{N}$.

Ilustración 20. Evidencia de las dificultades al razonar y emplear la inducción matemática

4.1.1.19. Dificultad al momento de razonar inductivamente vía a probar la certeza de enunciados (por medio de casos particulares)

El estudiante prueba precariamente los enunciados, algunas veces, con casos particulares, antes de llegar a demostrarlo. Esto es, inicialmente no emplean razonamientos inductivos antes de pasar a construir razonamientos deductivos y aplicar reglas de inferencia en las demostraciones y pruebas. Esta dificultad ubica a los estudiantes en un nivel de comprensión de principiante. Ver la Ilustración 21.

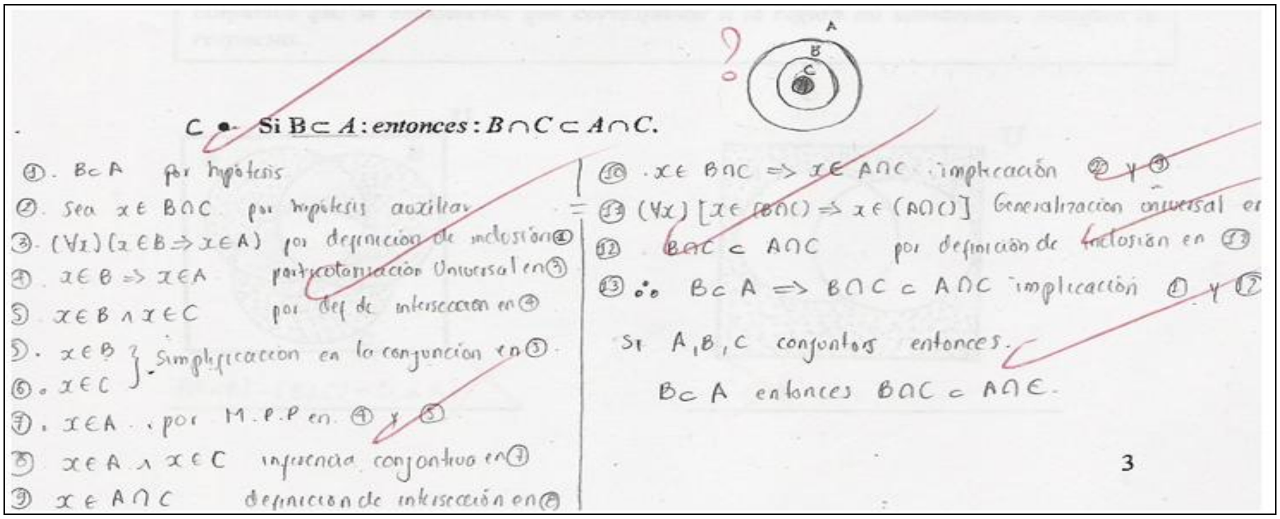


Ilustración 21. Evidencia de la dificultad al momento de razonar inductivamente vía a probar la certeza de enunciados (por medio de casos particulares)

Basado en los hallazgos anteriores, se construyó la guía didáctica, mediante la formulación de unas estrategias para conjeturar y probar (que se presentarán posteriormente en este capítulo) las cuales permitirán afrontar y superar dichas dificultades en las otras poblaciones intervenidas.

El Cuadro 10 presenta la sistematización de las dificultades encontradas en los estudiantes, la cual arroja como conclusión la evidente ruptura epistemológica que existe en la historia de la matemática en cuanto al razonamiento deductivo.

DIFICULTADES DETECTADAS EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS	Dificultades en el razonamiento deductivo	Dificultades en el razonamiento inductivo
La conceptualización y diferenciación de los métodos de demostración	X	
La conceptualización de proposiciones matemáticas	X	
La conceptualización de un condicional y de una implicación lógica	X	
El manejo de conectivos lógicos contextualizados a las proposiciones de la prueba intelectual en construcción	X	
La comprensión de la contradicción lógica	X	
La comprensión y aplicación de las reglas de inferencia lógicas deductivas	X	
La comprensión semántica y sintáctica de las tautologías lógicas	X	
La unificación de estilos escritos de una prueba intelectual: por párrafos o a dos columnas	X	
La comprensión de los conceptos matemáticos inmensos en la prueba	X	
La elaboración y razonamiento de las construcciones auxiliares y los experimentos mentales en la elaboración de una prueba intelectual:	X	
La comprensión de los procesos de validación y comunicación de las pruebas intelectuales en el contexto de la clase	X	
La escritura en el papel una prueba intelectual (dificultad entre el lenguaje simbólico y semántico)	X	
El desarme de la tesis y realizar regresiones a la hipótesis o regresiones de la hipótesis hacia la tesis en búsqueda de los razonamientos empleados para justificar una prueba intelectual	X	
El enlazar las hipótesis con la tesis de una prueba intelectual	X	
El entendimiento conscientemente el carácter epistemológico de la prueba en comparación con la demostración	X	
El acoplamiento de los razonamientos realizados en una prueba intelectual	X	
El manejo de las cuantificaciones de una proposición matemática y de las sentencias de existencia y unicidad en la misma	X	
El razonamiento inductivo y uso de la inducción matemática en una prueba intelectual		x
El razonamiento inductivo vía a probar la certeza de enunciados (por medio de casos particulares)		x

Cuadro 10. Dificultades detectadas en los estudiantes universitarios, con las respetivas implicaciones a construcciones de pruebas pragmáticas o intelectuales.

4.1.2. Dificultades presentadas por los estudiantes de los cursos: PIVU y PEI

Estas dificultades fueron recogidas sistemáticamente por el investigador en el correo electrónico: pei20072@gmail.com[13]; la estrategia para la recolección de las dificultades consistió en que día a día, cada estudiante escribiera espontáneamente las dificultades que le surgieran al momento de desarrollar la guía didáctica en los contextos de prueba y descubrimiento matemático, para finalmente pasar a realizar un análisis de contenido de los registros recogidos allí.

Las categorías presentadas en el análisis de contenido de los registros presentados por los estudiantes de **PIVU y PEI**, se presentan a continuación en el Cuadro 11.

<table>
<tr><th colspan="2">Categorización realizada a las dificultades presentadas en los estudiantes del PIVU y PEI</th></tr>
<tr><td>Categorías presentadas en este análisis</td><td>El contexto de la estructura sintáctica y semántica de los enunciados.
Subcategoría 1: La Comprensión de enunciados propuestos en la guía didáctica.
Subcategoría 2: Realizar cambios de representaciones de lenguaje a simbólico en los enunciados matemáticos propuestos
El contexto de justificación de pruebas intelectuales.
Subcategoría 1: La construcción de procesos de validación y justificaciones
Subcategoría 2: La conceptualización de las reglas de inferencia lógicas deductivas.</td></tr>
</table>

Cuadro 11. Categorización realizada a las dificultades presentadas por los estudiantes del PIVU y PEI.

En el anterior cuadro no se presenta la homogeneidad, utilidad, exclusión mutua, claridad y concreción de las categorías ya que están en concordancia con lo expuesto en el Cuadro 9 correspondiente al apartado 4.1.1.

[13] Las dificultades expuestas en este correo se presentan en el **CD: Evidencias**, de la tesis de investigación en un documento llamado*: **"Dificultades expresadas por los estudiantes".***

4.1.2.1. De acuerdo a la comprensión en la estructura sintáctica y semántica de los enunciados

La siguiente categoría se subdividió en: dificultades en la comprensión de enunciados propuestos en la guía didáctica y dificultades para realizar cambios y reinterpretaciones de registros expresados de lenguaje cotidiano a simbólico.

4.1.2.1.1. Dificultades en la Comprensión de enunciados propuestos en la guía didáctica

Estas son algunas de las dificultades expresadas directamente por los estudiantes[14]:

> ***Estudiante A:*** *"Hay **enunciados** que aún no descifro, parecen sacados de otro mundo distinto al mío".*

Esta dificultad surge, ya que muchos de los enunciados de la guía didáctica tienen en su construcción conexiones lógicas que para ellos son desconocidas al momento de abordar esta temática.

> ***Estudiante B:*** *"Algunas dificultades al plantear los ejercicios propuestos".*

> ***Estudiante D:*** *"Dificultad en la **Comprensión de enunciados**, ya que no sabía interpretar lo que me decían en cada problema planteado por el profesor".*

> ***Estudiante E:*** *"Dificultad en el entendimiento de **enunciados"***.

> ***Estudiante F:*** *"Al comprender **enunciados** de **razonamiento lógico"**.*

[14] Al presentar en estos escritos las dificultades expuestas por los estudiantes, se ha tenido en cuenta la misma redacción y ortografía presentada por ellos, con el fin de garantizar la fidelidad de los datos y el análisis de los mismos.

4.1.2.1.2. Dificultad para realizar cambios y reinterpretaciones de registros expresados de lenguaje cotidiano a simbólico en los enunciados matemáticos propuestos

Estudiante H: *"Me dio un poco de lidia los ejercicios propuestos por la mañana, traducir uno de los* ***enunciados*** *donde se debía despejar la x, pero al ir realizando los demás ejercicios pude asimilarlos mejor".*

Estudiante F: *"Hubo algunas falencias para comprender donde ubicar los ejercicios".*

Estudiante G: *"Algunas dificultades en la* ***comprensión de enunciados*** *que tienen que ver con la realización de una gráfica".*

4.1.2.2. De acuerdo al contexto de justificación: construcciones de prueba intelectuales en la clase de matemáticas al momento de la intervención con la guía didáctica

4.1.2.2.1. Dificultades en la construcción de procesos de validación y justificación

Estas son algunas de las dificultades expresadas directamente por los estudiantes:

Estudiante E: *"Este tema es un poco duro ya que tiene* ***procedimientos*** *de soluciones duros".*

Estudiante H: *"Me confundo con la realización de ciertos ejercicios, ya que se me dificulta determinar el método a utilizar".*

4.1.2.2.2. Dificultad en la conceptualización de las reglas de inferencia lógicas deductivas

Estas son algunas de las dificultades expresadas directamente por los estudiantes:

Estudiante G: *“Las* ***reglas de inferencia*** *no las conocía y tampoco las había trabajado en el colegio”.*

Estudiante C: *“En el día de hoy conocí las* ***reglas de inferencia****, tema que desconocía y aunque no puedo decir que lo domino, si aprendí”.*

Estudiante G: *“Tengo algunas falencias en cuanto a lo que se refiere a* ***razonamiento lógico”****.*

Estudiante I: *“Las* ***reglas de inferencia****, que aún siendo tan importantes nunca me las enseñaron durante 11 años que me enseñaron matemáticas en el colegio”.*

Estudiante I: *“No estoy de acuerdo con la regla de Modo de Afirmar Afirmando”.*

Estudiante F: *“En la clase de matemáticas vimos el tema de reglas inferenciales, realizamos un taller aplicando las* ***reglas de inferencia*** *las cuales son ocho, en algunos talleres me dio dificultad de saberlas ubicar a la regla que correspondía”.*

Estudiante J: *“El día de hoy vimos las* ***reglas de inferencia****, las cuales, no conocía, pero las comprendí...”*

Estudiante L: *“Las* ***reglas de inferencia*** *deductivas fue algo nuevo porque en el colegio no me lo enseñaron, en esta no tuve ninguna dificultad porque cuando capte muy bien la idea”.*

Estudiante M: *“La clase de hoy me gustó mucho, aunque las* ***reglas de inferencia*** *cuando las explicó las entendí; pero como siempre sucede a la hora de la práctica se me dificultó la aplicación de ella”.*

Estudiante N: *“****Las reglas de inferencia*** *son nuevas cosas aprendidas el día de hoy que nunca había escuchado nada de ellas, son interesantes para el* ***razonamiento,*** *pero hace falta aplicarla en ejemplos de la vida cotidiana para* *poder aprender a dominarlas como se debe, para obtener un buen **razonamiento”**.*

Estudiante O: *“El día de hoy trabajamos las **reglas de inferencia**, que son 8, pude entender que son bastante importantes para la elaboración de un ensayo y puedo decir que son indispensables; algunas son muy parecidas pero siempre hay un elemento que las hace diferentes”.*

En estas dificultades, expresadas por los estudiantes, se puede detectar que los estudiantes desconocen las reglas de inferencia, dificultad que pone en desventaja para que logren prueba intelectuales, de acuerdo a la categorización de pruebas ostensivas e intelectuales propuestas por Balacheff (2000).

El Cuadro 12 recoge sistemáticamente las dificultades presentadas por los estudiantes, la cual arroja como conclusión la ruptura epistemológica en la matemática referente al razonamiento inductivo y deductivo (ver las conclusiones del apartado 2.1.1). Esta ruptura también puede verse en la comprensión de los estudiantes, ya que a los estudiantes se les facilita los razonamientos inductivos más que los deductivos por su carácter intuitivo y natural. Esta ruptura epistemológica también se notó en la población de estudiantes del PIVU y PEI investigados al igual que en los universitarios.

DIFICULTAD DE ACUERDO CON:	DESCRIPCIÓN DE LA DIFICULTAD
El contexto de la estructura sintáctica y semántica de los enunciados	**La Comprensión de enunciados propuestos en la guía didáctica.**
	Realizar cambios de representaciones de lenguaje cotidiano a simbólico para los enunciados matemáticos propuestos.
El contexto de justificación de pruebas intelectuales	**La construcción de procesos de validación y justificación.**
	La conceptualización de reglas de inferencia lógicas deductivas.

Cuadro 12. Sistematización de las dificultades expresadas por los estudiantes de transición de Educación Media a Universitaria.

4.1.3. Las pruebas y conjeturas significativas presentadas por los estudiantes del PIVU y PEI a partir de los razonamientos inductivos

Algunas de las pruebas y conjeturas significativas presentadas por los estudiantes del **PIVU y PEI** se exhiben en el siguiente apartado.

Evidencia 1:

Basta con observar que:

- En el centro de cada figura permanece un cuadro que tomaremos como unidad constante y a n como la posición de la figura. Figura 1
- Tomando en forma de cruz, vemos que al aumentar la posición de la figura se le agrega un cuadro a cada eje, por lo que se suman cuatro (4) cuadros por posición, quedando la cruz con un número de cuadros (sin contar el de el centro), coincidente la forma 4(n-1). Figura 2
- Entre los ejes de la cruz se van agregando cuadros en forma ascendente y progresiva, según la posición. Al sumar estos cuadros se obtienen cuatro (4) números triangulares de orden coincidente con la forma n-3, es decir:

$$4(n-2)\left[\frac{(n-2)+1}{2}\right]\text{. } \textit{Figura 3}$$

- *Al sumar todo tendríamos:*

$$\begin{aligned} &1+4(n-1)+4(n-2)\left[\frac{(n-2)+1}{2}\right] \\ &=1+4(n-1)+2(n-2)^2+2(n-2) \\ &=1+4n-4+2(n^2-4n+4)+2n-4 \\ &=1+4n-4+2n^2-8n+8+2n-4 \\ &=2n^2-2n+1 \end{aligned}$$

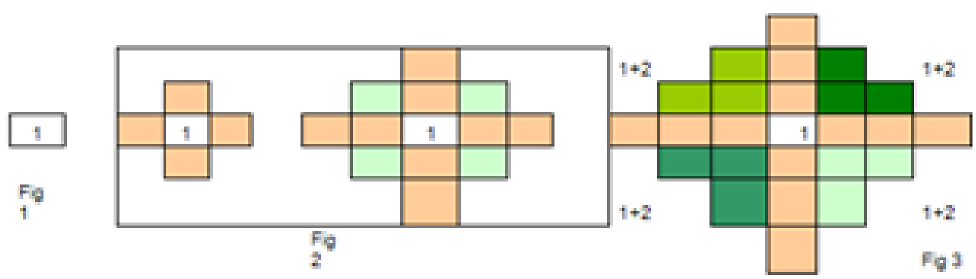
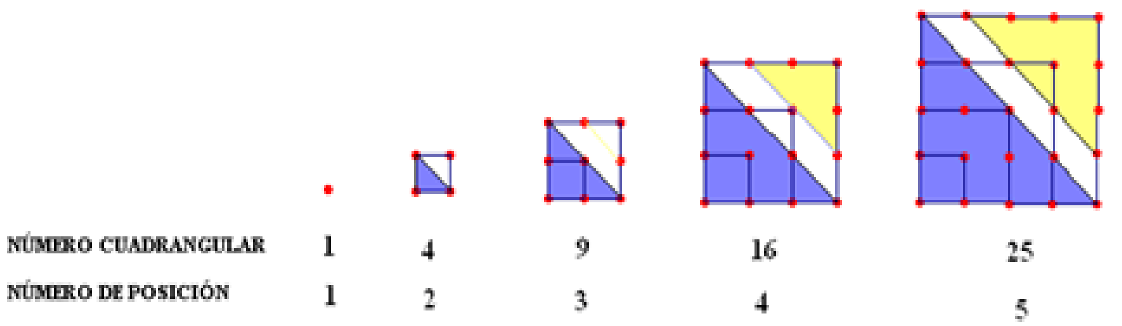


Ilustración 22. Razonamiento inductivo en la construcción de la regla de formación de una secuencia de números

En esta evidencia (Ilustración 22) se puede detectar que el estudiante realiza una prueba intelectual para encontrar la regla de formación de la **actividad # 6: Razonamientos inductivos que se pueden generar a partir de una secuencia geométrica y aritmética con cuadrados** (Ver apartado A.2.6, guía didáctica). Se hace una construcción de prueba por párrafos, se realizan algunos cálculos derivados de los razonamientos inductivos y se efectúa una construcción de diseños estableciendo regularidades que ocurren de figura a figura en la secuencia geométrica.

Evidencia 2:



Podemos expresar cada número cuadrado como la suma de un número triangular de orden "n" y un número triangular de orden "n-1".

La obtención de la regla de formación sería:

$$n\left[\frac{n+1}{2}\right]+(n-1)\left[\frac{(n-1)+1}{2}\right]=\frac{n^2+n+n(n-1)}{2}=\frac{n^2+n+n^2-n}{2}=\frac{2n^2}{2}=n^2$$

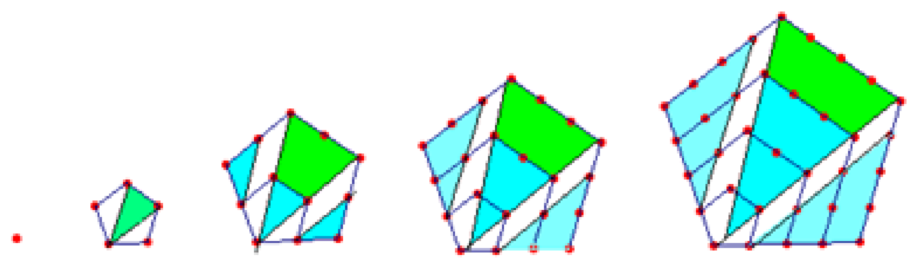
Ilustración 23. Razonamiento inductivo en la construcción de la regla de formación de los números cuadrangulares

En esta evidencia (Ilustración 23) el estudiante realiza procedimientos para calcular la regla de formación de los números cuadrangulares derivados de los análisis de los casos particulares detectados (razonamientos inductivos). Es primordial destacar en esta evidencia los procesos de agrupamiento que realiza el estudiante para realizar el conteo sistemático de los puntos que conforman los números cuadrangulares. La regla de formación encontrada es validada por procedimientos de visualización sobre el proceso de formación de los cuadrados correspondientes.

Desde el punto de vista de los tipos de prueba presentados por Balacheff, se puede inferir que el estudiante no alcanza una prueba intelectual, ya que faltaría realizar una prueba por inducción matemática para que valide la conjetura planteada en la actividad. El estudiante realiza una construcción de la prueba a través de razonamientos inductivos, en los cuales también apoya sus conjeturas omnitemporales. (Ver definición en el apartado 4.2.4.2)

Evidencia 3:

Números Naturales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Pentagonales	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287



NÚMERO PENTAGONAL	1	5	12	22	35
NÚMERO DE POSICIÓN	1	2	3	4	5

Observamos que cada número representado en las figuras pentagonales de puntos se puede expresar en términos enésimos como la suma de "n" con tres números triangulares de orden "n-1

En términos de la posición enésima la regla de formación sería:

$$n+3(n-1)\left[\frac{(n-1)+1}{2}\right]=\frac{2n+3(n-1)^2+3(n-1)}{2}=\frac{2n+3n^2-6n+3+3n-3}{2}=\frac{3n^2-n}{2}$$

Ilustración 24. Razonamiento inductivo en la construcción de la regla de formación de los números pentagonales

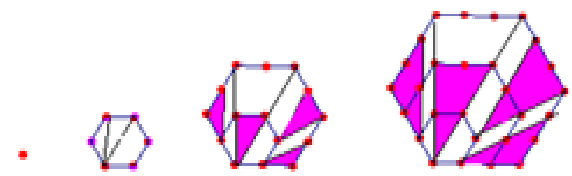
En la evidencia 3 (Ilustración 24) el estudiante realiza procedimientos de agrupamiento de los puntos para realizar un conteo sistemático de ellos, esto permite conjeturar que cada número pentagonal es la división de una cantidad de números triangulares (como lo expresa el estudiante en la evidencia), esta conjetura que no es validada y que se convierte en una conjetura omnitemporal, sí permite la construcción de la regla de formación de los números pentagonales. El razonamiento empleado por el estudiante es netamente inductivo.

Desde el punto de vista de los tipos de prueba de Balacheff, el estudiante no presenta una prueba intelectual, ya que sus razonamientos son básicamente inductivos en donde sustenta sus conjeturas.

Evidencia 4:

Números Naturales	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Hexagonales	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378

Observando la siguiente ilustración podemos establecer una regla de formación para los números hexagonales:



NÚMERO HEXAGONAL	1	6	15	28
NÚMERO DE POSICIÓN	1	2	3	4

Cada hexágono de puntos se puede expresar en forma enésima como la suma de "n" con cuatro triangulares de orden "n-l".

Podemos entonces afirmar que la regla de formación los números hexagonales es la siguiente:

$$n+4(n-1)\left[\frac{(n-1)+1}{2}\right] = n+2(n-1)^2+2(n-1) = n+2n^2-4n+2+2n-2 = 2n^2-n$$

Ilustración 25. Razonamiento inductivo en la construcción de la regla de formación de los números hexagonales

En esta evidencia (Ilustración 25) el estudiante realiza nuevamente una conjetura omnitemporal para realizar la validación de la regla de formación de los números hexagonales. Los razonamientos que realiza el estudiante son netamente inductivos en esta conjetura.

El estudiante no realiza una construcción de prueba intelectual que le permita validar la regla de formación de los números hexagonales, solamente realiza razonamientos inductivos derivados del análisis de casos particulares.

4.1.4. Contraejemplos y variantes de las reglas de inferencia deductivas presentados por los estudiantes del PIVU[15]

Después de algunas de las observaciones hechas en clase, se pudo realizar una actividad extra que no estaba planteada inicialmente en la guía didáctica y fue la construcción de contraejemplos para las reglas de inferencia por parte de los estudiantes.

El análisis de contenido realizado, en este apartado, a los registros presentados por los estudiantes fue ***manifiesto o directo.***

El trabajo con los contraejemplos permitió afianzar en los estudiantes la comprensión de las reglas de inferencia.

Posteriormente del análisis de los contraejemplos que presentaron los estudiantes, se obtuvo lo siguiente:

4.1.4.1. Contraejemplos del Modus Ponendo Ponens

Contraejemplos del Modus Ponendo Ponens	**Esquema Sintáctico**
Contraejemplo # 1	$\neg P \rightarrow \neg Q$ P PREMISAS ______ CONCLUSIÓN Q

[15] Este trabajo fue derivado de la intervención con la guía didáctica en los estudiantes del ***PIVU*** de las Sedes Suroeste y Bajo Cauca de la Universidad de Antioquia, en el segundo semestre del año 2008.

Contraejemplo # 2	$P \rightarrow Q$ Q PREMISAS ------ CONCLUSIÓN P
Contraejemplo # 3	$\neg P \rightarrow \neg Q$ PREMISAS Q ------ CONCLUSIÓN $\neg P$

4.1.4.2. Contraejemplos del Modus Tollendo Ponens

Contraejemplos del Modus Tollendo Ponens	**Esquema Sintáctico**
Contraejemplo # 1	$P \vee Q$ $\neg P$ PREMISAS ------ CONCLUSIÓN $\neg Q$
Contraejemplo # 2	$P \vee Q$ P PREMISAS ------ CONCLUSIÓN Q
Contraejemplo # 3	$P \vee Q$ $\neg Q$ PREMISAS ------ CONCLUSIÓN $\neg P$
Contraejemplo # 4	$\neg P \vee Q$ PREMISAS $\neg P$ ------ CONCLUSIÓN $\neg Q$
Contraejemplo # 5	$P \vee Q$ P PREMISAS ------ CONCLUSIÓN P

4.1.4.3. Contraejemplos del Modus Tollendo Tollens

Contraejemplos del Modus Tollendo Tollens	**Esquema Sintáctico**
Contraejemplo # 1	$P \to Q$ $\neg Q$ PREMISAS —————— CONCLUSIÓN P
Contraejemplo # 2	$\neg P \to Q$ Q PREMISAS —————— CONCLUSIÓN $\neg P$

4.1.4.4. Contraejemplos de la Transitividad en la Implicación

Contraejemplos de la Transitividad en la Implicación	**Esquema Sintáctico**
Contraejemplo # 1	$P \to Q$ $Q \to R$ PREMISAS —————— CONCLUSIÓN: $R \to P$
Contraejemplo # 2	$Q \to P$ $R \to Q$ PREMISAS —————— CONCLUSIÓN: $P \to Q$

4.1.4.5. Contraejemplos de la Inferencia Conjuntiva

Contraejemplos de la Inferencia Conjuntiva	**Esquema Sintáctico**
Contraejemplo # 1	P Q PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $\neg P \wedge \neg Q$
Contraejemplo # 2	$\neg P$ Q PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $P \wedge Q$
Contraejemplo # 3	P Q PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $P \wedge \neg Q$
Contraejemplo # 4	P $\neg Q$ PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $P \wedge Q$

4.1.4.6. Contraejemplos de la Simplificación en la Conjunción

Contraejemplos de la Simplificación en la Conjunción	Esquema Sintáctico
Contraejemplo # 1	$P \wedge Q$ PREMISA CONCLUSIONES: $\neg P$ Q
Contraejemplo # 2	$P \wedge Q$ PREMISA CONCLUSIONES: P $\neg Q$
Contraejemplo # 3	$P \wedge Q$ PREMISA CONCLUSIONES: $\neg P$ $\neg Q$
Contraejemplo # 4	$\neg P \wedge Q$ PREMISA CONCLUSIONES: $\neg P$ $\neg Q$

4.1.4.7. Contraejemplos de la Adjunción

Contraejemplos de la Adjunción	Esquema Sintáctico
Contraejemplo # 1	P PREMISA CONCLUSIÓN $\neg P \vee \neg Q$
Contraejemplo # 2	P PREMISA CONCLUSIÓN $\neg P \vee Q$

4.1.4.8. Contraejemplo del Método de Casos o Silogismo Disyuntivo

Contraejemplos del Método de Casos o Silogismo Disyuntivo	Esquema Sintáctico
Contraejemplo # 1	$P \to R$ $Q \to S$ $P \vee Q$ PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $R \wedge S$
Contraejemplo # 2	$P \to R$ $Q \to S$ $P \vee Q$ PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $R \to S$
Contraejemplo # 3	$P \to R$ $Q \to S$ $P \vee Q$ PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $\neg R \vee S$
Contraejemplo # 4	$P \to R$ $Q \to S$ $P \vee Q$ PREMISAS ——————— CONCLUSIÓN $\neg R \vee \neg S$

4.1.5. Variantes de las reglas de inferencia

4.1.5.1. Variante del Modus Ponendo Ponens

Fórmula N° 1:

$\neg P \to \neg Q$ PREMISAS

$\neg P$

———————

CONCLUSIÓN $\neg Q$

4.1.5.2. Variante del Modus Tollendo Ponens

$$\begin{array}{rcl} & \neg P \vee \neg Q & \text{PREMISAS} \\ & P & \\ \hline \text{CONCLUSIÓN} & \neg Q & \end{array}$$

4.1.5.3. Variante del Modus Tollendo Tollens

$$\begin{array}{rcl} & \neg P \rightarrow \neg Q & \text{PREMISAS} \\ & Q & \\ \hline \text{CONCLUSIÓN} & P & \end{array}$$

4.1.5.4. Variante de la Transitividad en la Implicación

Esta regla de inferencia tiene muchas variantes se presenta una de ellas:

$$\begin{array}{rcl} & P \rightarrow Q & \text{PREMISAS} \\ & R \rightarrow P & \\ \hline \text{CONCLUSIÓN} & R \rightarrow Q & \end{array}$$

4.1.5.5. Variante de la Inferencia Conjuntiva

$$\begin{array}{rcl} & \neg P & \\ & \neg Q & \text{PREMISAS} \\ \hline \text{CONCLUSIÓN} & \neg P \wedge \neg Q & \end{array}$$

4.1.5.6. Variante de la Simplificación en la Conjunción

$\neg P \wedge \neg Q$ PREMISA

CONCLUSIONES: $\neg P$

$\neg Q$

4.1.5.7. Variante de la Adjunción y del Método de Casos

Estas reglas de inferencias tienen muchas variantes. Se llegó a esta conclusión, inmediatamente después del análisis de contenido, derivado de los registros escritos de los estudiantes y sus intervenciones en clase.

4.1.6. Procesos de justificación en la solución del test de selección múltiple con única respuesta contenido en la guía didáctica para los estudiantes del Programa de Inducción a la Vida Universitaria

Los análisis de contenido empleados para los registros tomados en este apartado fueron: ***Análisis de contenido manifiesto o directo versus latente o indirecto.***

Los estudiantes de uno de los cursos de Razonamiento Lógico Matemático del Programa de Inducción a la Vida Universitaria respondieron a la pregunta: ¿Cuáles son las estrategias de razonamiento matemático que empleas para resolver un test de selección múltiple?, arrojando los siguientes análisis de contenido:

Algunas de las palabras frecuentes (Ver Cuadro 13), referentes a los contextos de justificación y de descubrimiento matemático, empleadas por los estudiantes al momento de dar las respuestas fueron: Respuesta, Pregunta, Descarta, Correcta, Lógica, Procedimiento y proceso (sinónimo de prueba, Análisis, Método, Leer, Opciones, Enunciado, Azar, Verdadero, Deducción, Operaciones, Justificación, Inducción, Absurdo, Descubrir, Gráfico, Falsa, Incorrecta, Comprensión. Los registros escritos se presentan en el **CD** que acompaña este trabajo de investigación, específicamente en el archivo: ***"trabajo de estrategias".***

Palabra empleada al momento de dar respuesta a la pregunta	**Frecuencia de la palabra en todas las respuestas de los estudiantes**
Respuesta	**41**
Pregunta	**35**
Descarta	**23**
Correcta	**17**
Lógica	**17**
Procedimiento y proceso	**15**
Análisis	**13**
Método	**13**
Leer	**10**
Opciones	**9**
Enunciado	**7**
Azar	**5**
Verdadero	**4**
Deducción	**4**
Operaciones	**4**
Justificación	**4**
Inducción	**2**
Absurdo	**2**
Descubrir	**2**
Gráfico	**2**
Falsa	**2**
Incorrecta	**1**
Comprensión	**0**

Cuadro 13. Palabras empleadas por los estudiantes, derivadas del análisis de contenido

Respuestas dadas por los estudiantes frente a las estrategias empleadas en la solución del test y análisis de contenido de las respuestas dadas por los estudiantes

A continuación se presenta una lista de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta formulada, en las cuales ven como primordial el procedimiento para validar la solución de un problema o actividad matemática. Los estudiantes presentan comprensiones ingenuas o de principiantes frente a las concepciones de prueba, esto se puede detectar en los siguientes escritos:

Para obtener la respuesta correcta se lee bien la pregunta, luego se analizan las opciones que se dan, y si hay que hacer algún procedimiento, se realiza.

El procedimiento utilizado para obtener la respuesta correcta es emplear herramientas como la comparación de pregunta-respuesta, o lo absurdo de una respuesta con el respectivo enunciado; para así ir descartando opciones, y dar con una que pueda ser la correcta.

Si se puede hacer procedimiento se realiza para estar más seguro.

Hay respuesta mediante gráficas que se tornan muy difíciles, en las que se debe de utilizar un largo procedimiento operativo.

En caso de no poder hacer los procedimientos respectivos, se empieza a descartar opciones hasta llegar a una verdadera.
Principalmente el mecanismo utilizado es un 50% fue la comprobación de ejercicios por medio de procedimientos, un 30% descartar las respuestas y un 20% al azar.

Pero en este caso de justificación, voy haciendo los procedimientos y me da la respuesta, o en caso de error accedo a primer caso y no justifico.

Las preguntas las respondo mediante procedimiento y observaciones de las respuestas, pero si el procedimiento me da un resultado y observo y se ve que se puede dar otro, analizo y saco conclusiones y veo cual puede ser la más acertada.

En algunos problemas se utilizó la deducción e inducción. Se fue descartando los más ilógicos, y en otros sólo se necesitaba hacer el procedimiento para encontrar el resultado.

Las estrategias son leer detenidamente la pregunta, luego se descartan las opciones que se ven que son incorrectas, con las que me queden se hace una *lectura detenida del contenido, fijando fórmulas y se realizan el correspondiente procedimiento hasta que obtengo la respuesta.*

Las estrategias son leer muy bien aunque sean tres veces, después se descartan las que no eran, aunque alguno no les hice procedimiento porque no me la sabia muy bien.

Para hallar la respuesta de las preguntas, hago procedimientos matemáticos pero en algunas ocasiones no en todas, la escojo al azar.

En primer lugar cuando es de selección múltiple, con única respuesta sin justificación, respondo descartando después de un análisis y me queda la correcta.

4.1.7. Dificultades detectadas en los estudiantes de 10° y 11° [16]

Los análisis de contenido empleados para los registros tomados en este apartado fueron: ***Análisis de exploración de contenido, Análisis de contenido manifiesto o directo y latente o indirecto.***

La categorización construida para el análisis de los registros presentados por los estudiantes de 10º y 11º, se puede visualizar en el siguiente Cuadro 14.

Categorización realizada a las dificultades presentadas en los estudiantes de 10º y 11º	
Categorías presentadas en este análisis	• **Dificultades en cuanto al razonamiento inductivo.** • **Dificultades en cuanto al razonamiento deductivo.** • **Dificultades en cuanto al razonamiento conjetural.**

Cuadro 14. Categorización realizada a las dificultades presentadas por los estudiantes de 10º y 11º

Algunas dificultades detectadas en los estudiantes de 10º y 11º de educación media del Instituto Tecnológico Metropolitano, al momento de observar la comprensión en los razonamientos inductivos, cuando se desarrolla la primera parte de la guía didáctica, son:

4.1.7.1. Dificultad al momento de razonar inductivamente

A los estudiantes se les dificulta ser conscientes de probar los enunciados y de establecer e institucionalizar pruebas de validez, empleando "casos particulares" que hacen verdadero el enunciado. Por ejemplo, al proponer una actividad en donde se debe plantear una ecuación, el estudiante sólo ve éste como única forma de solución del problema y no aplica pruebas pragmáticas[17] para llegar a la respuesta, antes de hacer elaboraciones de pruebas

---

[16] Estas dificultades fueron detectadas en los estudiantes de 10º y 11º del ***Instituto Tecnológico Metropolitano, Campus Castilla***, en el año 2006 y 2007, adicionalmente este apartado se publicó en el boletín informal**: *Encuentro Académico de Secretaría de Educación de Medellín***, en la edición de octubre de 2008.

[17] Se entiende por pruebas pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión. Balacheff (2000).

intelectuales[18]. Esta dificultad se debe a la falta de consciencia de los razonamientos inductivos, que en algunos casos pueden ser efectivos antes de las pruebas intelectuales.

4.1.7.2. Dificultad al momento de generalizar un enunciado a partir de la observación de regularidades en casos particulares

Los estudiantes presentan dificultades en los procesos de generalización de enunciados y se puede verificar en la escasa fundamentación consciente desarrollada en las clases de matemáticas, al momento de abordar el proceso de razonamiento deductivo en el planteamiento de un enunciado general.

De otra parte, no se tienen presente por parte de los estudiantes la cuantificación en el enunciado, específicamente en lo que se refiere al cubrimiento de objetos mediante los cuantificadores existenciales o universales.

4.1.7.3. Dificultad para plasmar mediante una fórmula matemática la generalización de enunciados que han sido razonados inductivamente

Los estudiantes presentan dificultades para relacionar mediante patrones (detectados y razonados previamente), regularidades y fórmulas que permiten plasmar la generalización, los casos conocidos de un enunciado con los casos desconocidos. La visualización geométrica y las estrategias para la construcción, por ejemplo de secuencias geométricas, es una forma de trabajo en el contexto del proceso del razonamiento inductivo que permite la exploración de lo conocido hacia lo desconocido.

Algunas dificultades presentadas por los estudiantes en la comprensión en los razonamientos deductivos son:

[18] Se entiende por pruebas intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y de sus relaciones. Balacheff (2000).

4.1.7.4. Dificultad en la conceptualización de las reglas de inferencias deductivas

Los estudiantes presentan dificultades para la comprensión de las reglas de inferencias lógicas, poco se ha enseñado en las clases de matemáticas, situación que pone en desventaja al estudiante para que logre formalizaciones deductivas de los conceptos.

Básicamente lo que se enseña del razonamiento deductivo en la Educación Básica y Media son las tablas de verdad de proposiciones aisladas de los razonamientos y de la resolución de problemas.

4.1.7.5. Dificultad para comprender conscientemente la estructura sintáctica y semántica de los enunciados

Los estudiantes tienen escasos conocimientos sobre la conformación sintáctica[19] y semántica[20] de los enunciados matemáticos en las distintas actividades propuestas en la guía didáctica.

4.1.7.6. Dificultad en la Comprensión de conectivos lógicos

Se les dificulta las dobles negaciones en los enunciados, el condicional, los conectivos lógicos y le ven poca importancia a la interpretación de las tablas de verdad en las actividades propuestas. Los estudiantes no dominan conscientemente situaciones discursivas en donde interviene el condicional[21] entre una causa y un efecto, entre una premisa y una conclusión.

Algunas de las dificultades en la Comprensión en los razonamientos conjeturales son:

---

[19] Referida a la simbolización y estructuras lógicas de los enunciados matemáticos.

[20] Referida a la significación y los conceptos implícitos en los enunciados matemáticos.

[21] Para esto se tiene presente en la investigación, que el estudio del razonamiento del condicional está asociado con las causas y consecuencias, la estructura sintáctica $P \rightarrow Q$, la tabla de verdad y las condiciones suficientes y necesarias.

4.1.7.7. Dificultades para proponer enunciados creativos y conjeturar en la clase

Los estudiantes son poco propositivos y conjeturan poco. Detallan incipientemente las actividades relacionadas con el aspecto semántico y sintáctico de los enunciados a los que se les enfrenta, esto puede deberse a la carencia de experiencias en el campo de pruebas y conjeturas.

4.1.7.8. Dificultades en los razonamientos plausibles y heurísticos en las actividades planteadas en la guía didáctica

A los estudiantes se les dificulta realizar construcciones creativas a las actividades e indagan poco alrededor de ésta. No han tenido la oportunidad en otros cursos de matemáticas de poner en tela de juicio enunciados matemáticos.

4.1.7.9. Dificultades para falsar enunciados matemáticos a partir de contraejemplos

Los estudiantes pocas veces, en las clases de matemáticas, emplean contraejemplos para debilitar la cuantificación o verificar la veracidad de un enunciado, quizás porque asumen que no es posible entrar en contradicción con enunciados que aparentemente son ciertos.

4.1.7.10. Dificultades para realizar reconstrucciones de indicios y de hipótesis

Se ha detectado que es dispendioso lograr que los estudiantes conjeturen alrededor de un enunciado, ya que ellos han estado poco adaptados a que se les indague, a que se le cuestione con preguntas provocadoras y que efectúen reconstrucciones de indicios e hipótesis frente a una actividad propuesta; ya que evaden la indagación y el juicio crítico, no alcanzan a responder cuestionamientos provocados por las preguntas. No aflora un pensamiento discursivo y argumentativo.

El posterior Cuadro 15 sistematiza las dificultades encontradas en los estudiantes.

DIFICULTADES	Dificultad del estudiantes que lo pone en desventaja frente al razonamiento inductivo	Dificultad del estudiantes que lo pone en desventaja frente al razonamiento deductivo	Dificultad del estudiantes que lo pone en desventaja frente al razonamiento conjetural
En el razonamiento inductivo, por la poca consciencia que tienen los estudiantes de ello	x		
En la generalización de los enunciados a partir de la observación de regularidades en casos particulares	x		
En la configuración de una fórmula matemática que evidencie la generalización de enunciados que han sido razonados inductivamente	x		
En la conceptualización y desconocimiento de reglas de inferencia deductivas		x	
En la comprensión consciente de la estructura sintáctica lógica y semántica de los enunciados		x	
En la Comprensión y conceptualización de conectivos lógicos		x	
En la proposición de enunciados creativos y conjeturados en la clase			x
En los razonamientos plausibles y heurísticos en las actividades planteadas en la guía didáctica			x
En la falsación de enunciados matemáticos a partir de contraejemplos			x
En la realización de reconstrucción de indicios y de hipótesis			x

Cuadro 15. Sistematización de las dificultades detectadas en los estudiantes de Educación Media.

4.1.8. Análisis de Contenido en el contexto de justificación: La importancia de la justificación en la clase de matemáticas. Aportes de algunos estudiantes y sus respectivos análisis de contenido

Los análisis de contenido que se emplearon para interpretar los registros correspondientes a este apartado fueron: ***Análisis de contenido manifiesto o directo y latente o indirecto,*** los cuales permitieron ubicar los estudiantes en distintos niveles de comprensión.

Después de hacer la pregunta: ¿Crees que es importante justificar un problema matemático con un procedimiento?, a un grupo de estudiantes de Educación básica, se arrojó lo siguiente. Las respuestas se pueden apreciar en el Cuadro 16.

¿Crees que es importante justificar un problema matemático con un procedimiento?		
RESPUESTA	**ANÁLISIS DE CONTENIDO**	**NIVEL DE COMPRENSIÓN**
Sí, porque así uno sabe cuál es el resultado exacto.	El estudiante expresa que la justificación de alguna manera conlleva a un resultado exacto y la conquista de las soluciones. El estudiante no muestra un criterio público de la prueba, solamente se expresa el carácter pragmático y por tal motivo se puede ubicar en un nivel de comprensión ingenua; y desde el punto de vista de la teoría de Balacheff se puede ubicar dentro de las pruebas pragmáticas y la explicación.	**Comprensión ingenua**
A mí me parece que si porque es más fácil explicar todos los problemas matemáticos.	En este caso el estudiante habla de explicación, en cuyo caso si nos remitimos a lo expresado por Balacheff N. (2000), quiere decir que el estudiante apenas está en progreso dentro del contexto de justificación y por tal motivo puede ubicarse en un nivel de comprensión ingenua.	
Todo depende del ejercicio, si es muy sencillo no veo la necesidad de hacerlo, pero si es bastante complicado veo la necesidad de hacerlo.	Esto expresa que hay soluciones en las que aparentemente sus procesos de justificación son obvios en tanto que en otros, no lo es. El estudiante no presenta una consciencia de la validación como criterio social, sólo para convencimiento propio, por tal motivo puede ubicarse en un nivel de comprensión ingenua. También es de anotar que el estudiante ve como importante que los procesos de justificación y procedimientos ayudan en la comprensión de la solución de problemas.	
No, porque en algunos casos podemos utilizar la lógica y el razonamiento de cada quien.	Este estudiante ve precariamente los procesos de justificación como de un convencimiento muy desde lo personal y no con un carácter social. Este estudiante ve más los procesos de justificación como una explicación, de acuerdo a lo expresado por Balacheff N. , (2000), se puede ubicar dentro del nivel de comprensión ingenua.	
Sí, porque yo considero que nos queda mejor explicado.	Este estudiante tiene más acercamientos a la explicación y por tal motivo el nivel de comprensión es ingenuo.	
Cuando el problema es obvio no para todos no; pero si el problema depende del procedimiento sí.	El estudiante habla de que las justificaciones están netamente dependientes de si la solución es obvia o no. Cuando el estudiante habla de obvio lo expresa propiamente para él, por lo cual es fácil de expresar que se ubica al nivel de las explicaciones y por tal motivo el estudiante se ubica en un nivel de comprensión de principiante.	**Comprensión de principiante**
Sí, Porque siempre se necesita un procedimiento para saber lo que	Al realizar un análisis de contenido en lo expresado por este estudiante, se puede expresar la necesidad de los procesos de justificación al momento de solucionar un problema matemático.	

sabe el estudiante y su forma de estudiar.	También habla implícitamente de los controles que puede llevar el docente para medir la comprensión de sus estudiantes. Ya que para este estudiante la justificación depende del docente; por lo tanto se puede decir que se encuentra en un nivel de comprensión de principiante.	
Sí, porque así se comprueba quien es seguro de sí mismo y quien tiene un buen conocimiento.	Esta respuesta habla del carácter de convencimiento de los procesos de justificación inmersos en la prueba, según lo expresado por (Balacheff N. , Procesos de Prueba en los alumnos de matemáticas, 2000). Aún no es comprensible el convencimiento social por tal motivo puede ubicarse en un nivel de comprensión de principiante.	
Sí, porque aclara su resolución y así entenderlo más fácil.	Este estudiante habla que la prueba permite comprensión de los enunciados inmersos en el problema y por tal motivo se puede ubicar en un nivel de comprensión de principiante ya que no se expresa el criterio de convencimiento público en la prueba.	
Sí, porque creo que es importante para uno no equivocarse es lo más seguro para el problema matemático.	Este estudiante comenta lo importante que es en la prueba el carácter de convencimiento. El procedimiento y la justificación son importantes para no equivocarse. El estudiante expresa cierta idea de que la prueba estandariza los procesos de justificación, pero aún no se evidencia el carácter público de la prueba, dicho estudiante puede ubicarse en el nivel de comprensión de principiante.	
Sí, porque se aprende más y se ve diferentes fórmulas.	En este caso el estudiante hace mención de los procedimientos y justificaciones que están enmarcadas por fórmulas implícitamente invoca los procedimientos mecánicos, por tal motivo el estudiante puede ubicarse en un nivel de comprensión de principiante.	
Sí, porque nos ayuda de pronto a entender más lo que estamos haciendo y como defendernos después.	Este estudiante habla de la importancia del convencimiento a un grupo social desde los procesos de prueba y justificación. El estudiante puede ubicarse dentro de un nivel de comprensión de aprendiz.	**Comprensión de aprendiz**
Sí, porque es más justificable y más entendible lo que queremos dar a entender.	Algunas de las palabras que aparecen en su respuesta son***: justificable, entendible***, esto permite esclarecer que el estudiante está consciente de los procesos de justificación en la solución de problemas por medio del convencimiento a los demás, el estudiante evidencia que se encuentra en una comprensión de aprendiz. No deja esclarecer cual es su frecuente tipo de prueba.	
No siempre con un procedimiento porque creo que hay diferentes maneras de justificar un problema matemático.	Este estudiante considera que hay distintos tipos de prueba y distintas formas de justificar, no expresa directamente un tipo de prueba, por tal motivo se ubica en un nivel de comprensión de aprendiz.	
Sí, porque necesitamos saber de dónde proviene un número, porque si no quedamos nulos.	El estudiante ve importancia a los procesos heurísticos para llegar a la solución de un problema matemático.	
Sí, porque sin el procedimiento no se podría resolver el problema dado	En este caso sé es consciente de que el procedimiento está intrínsecamente ligado a la resolución del problema.	
Sí, porque a diferencia de las calculadoras podemos hacerlo paso a paso.	Este estudiante ve importante los procesos heurísticos en la solución de un problema matemático.	
Sí, porque ahí se mostrara lo que hemos aprendido.	Este estudiante esclarece la importancia de los procedimientos con la comprensión.	
Sí, porque así nos damos cuenta el resultado de donde viene y si está bien hecho.	En este caso se comenta que el procedimiento permite que él se dé cuenta de dónde provienen los resultados.	
Sí, porque todos los problemas tienen un procedimiento para resolverlo	Este estudiante generaliza diciendo que: Todos los problemas tienen un procedimiento para resolverlo.	

Cuadro 16. Respuestas de algunos estudiantes a la pregunta: ¿Crees que es importante justificar un problema matemático con un procedimiento?

El análisis de contenido de esta pregunta realizado a un conjunto de registros escritos permite corroborar el esquema de pruebas ostensivas en estudiantes de educación básica, en relación con el contexto de Balacheff, así como también se pone de manifiesto la ruptura epistemológica entre la clase de matemáticas y la historia de la matemática en cuanto al carácter del convencimiento social de la prueba.

Las conclusiones que se pueden inferir a partir de la interpretación del Cuadro 16 es que los estudiantes de educación media, que se observaron durante un lapso de tiempo, exploran enunciados que tienen que ver con la aritmética y la geometría básicamente.

Los estudiantes carecen de un lenguaje intelectual para expresar ciertas propiedades entre números o entre figuras geométricas.

Los estudiantes hacen escaso énfasis en las cuantificaciones de los enunciados, esto se maneja de una manera inconsciente, y por lo regular ellos hacen caso omiso de los contraejemplos cuando se les da, pero no se manifiesta de manera explícita.

La creatividad de los estudiantes de educación básica está sometida a restricciones de carácter conceptual y procedimental, esto es, conocen poco sobre la semántica de la teoría en donde se está conjeturando y a nivel procedimental y de herramientas ya que no diferencian en qué momento deben emplear razonamientos inductivos y /o deductivos para sus metas.

Se hace importante entonces para los estudiantes de educación básica que para una heurística de problemas a probar se tenga presente la herramienta de la estructuración mental del cómo se razona inductivamente y deductivamente.

Los estudiantes conjeturan con facilidad enunciados cuantificados que de tipo implicativos, en donde se obedece a unas causas y efectos o consecuencias. Esto nuevamente se puede explicar a partir de la ruptura epistemológica del razonamiento en la construcción de la matemática, que permea también la enseñanza en la escuela.

4.2. Marco Conceptual derivado de la investigación

Al momento de ir realizando el análisis de contenido de los registros escritos presentados por los estudiantes fueron emergiendo conceptos propios (los cuales corresponden a las definiciones de: contexto de justificación, contexto de descubrimiento, dificultad detectada en los estudiantes en los contextos de justificación y de descubrimiento, conjetura temporal, conjetura omnitemporal, contraejemplo parcial o localizado, contraejemplo universal o referencial, estrategias para conjeturar en el aula de clase, propuesta de etapas de razonamiento conjetural y deductivo, y análisis desde el marco de enseñanza para la comprensión) a partir del análisis de contenido de los registros, por parte del investigador.

Estos conceptos permitieron la comprensión y el análisis de los resultados encontrados y permitieron aportar a la ciencia y a la Educación Matemática en lo referente a procesos de justificación y de descubrimiento seguidos por los estudiantes en la clase de matemáticas.

Se espera que estos conceptos sean validados y detectados en posteriores investigaciones y que sirvan para una construcción profunda y comprensiva de estos contextos, la cual nos llevará a que los estudiantes tengan consciencia de los procesos de justificación y de descubrimiento en la matemática.

4.2.1. Definición del contexto de justificación

Se entiende por **contexto de justificación** en esta investigación al espacio de la clase de matemáticas en donde el docente propone al estudiante conscientemente[22], con intención, **actividades de validación** de enunciados; y en donde el estudiante asume una comunicación consigo mismo y con sus compañeros de clase respecto de la veracidad o falsedad de un enunciado matemático y construya una prueba ya sea: ostensiva o intelectual. Esto es, el estudiante asume que existe un problema de validación y lo materializa en una

[22] Dentro del contexto de justificación, no se tendrán en cuenta los espacios de la clase de matemáticas en donde se manejan inconscientemente los procesos de validación de enunciados matemáticos, por no tener un propósito final y una intención.

prueba, lo anterior va en consonancia con lo que propone Balacheff (2000, pág. 15) cuando afirma que:

> *El solo hecho de proponer un problema a los estudiantes no es suficiente para garantizar que pongan en marcha un proceso de validación. En una observación sistemática que se hizo a un gran número de estudiantes resolviendo problemas de geometría, Audibert señala que son muy pocos quienes realmente se interesan en un proceso de producción de prueba, y aún menos los que realizan una demostración.*

En este contexto de justificación, concretamente el estudiante elabora pruebas ya sean ostensivas o intelectuales, que dependen en gran medida de las capacidades de razonar y de sus conocimientos en lógica.

Por **actividades de validación** se entenderán aquellas actividades en las que se trata de convencer a un compañero/estudiante o varios compañeros/estudiantes de clase de la validez de los enunciados que se conjeturan o se proponen a discusión. En este momento se pueden tener presente pruebas que van desde lo empírico hasta pruebas con un alto contenido lógico. Estas actividades de validación para la guía didáctica y están en coherencia con lo que proponen: Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, & Garza al momento de establecer una clasificación de las situaciones:

> *[…] Las situaciones de validación, en las que se trata de convencer a uno o a varios interlocutores de la validez de las afirmaciones que se hacen. En este caso, los alumnos deben de elaborar pruebas para demostrar sus afirmaciones. No basta la comprobación empírica de que lo que se dice es cierto; hay que explicar que necesariamente debe ser así. (2005, pág. 43)*

4.2.2. Definición del contexto de descubrimiento

Por **contexto de descubrimiento** en la clase de matemáticas se concebirán aquellos espacios de la clase en donde el estudiante construye a partir de razonamientos inductivos y deductivos, enunciados creativos para los cuales no se conoce su valor de verdad en el espacio temporal de clase, quedará para un espacio temporal posterior, elaborar una prueba en donde se pruebe su veracidad mediante la discusión grupal por medio de contraejemplos y refutaciones.

En la clase también se tendrán presentes espacios, en donde los estudiantes conjuntamente con el docente, discuten alrededor de un enunciado conjeturado, si un caso particular es o no contraejemplo para él.

Igualmente, es primordial que el estudiante en este contexto pueda realizar conscientemente razonamientos matemáticos que puedan servir para descubrir enunciados, que a la postre pueden ser conjeturas o enunciados verdaderos, que él aún no los conocía.

Se ha pretendido determinar el nivel de comprensión de los estudiantes en este contexto, a partir de la construcción de unas estrategias, diseñadas exclusivamente en la investigación, que permitan que los estudiantes conjeturen.

4.2.3. Definición de dificultad detectada en los estudiantes en los contextos de justificación y de descubrimiento

Se entenderá por ***dificultades de los estudiantes en los contextos de justificación y de descubrimiento,*** a aquellos obstáculos conceptuales derivados de la ruptura epistemológica en la historia de la matemática, en cuanto al razonamiento deductivo, de aplicación de conceptos, de escritura y estilos de pruebas y justificaciones, de construcción y creatividad, de modos conscientes de razonamientos inductivos, deductivos o conjeturales, de validación consciente y de enlace entre razonamientos matemáticos que no permiten el acceso a la comprensión y elaboración o bien de una prueba o justificación, o de una conjetura.

4.2.4. Conjeturas y contraejemplos en la clase de matemáticas

Dentro del marco conceptual que se conformó, a medida que se intervino con la propuesta, se acuñaron exclusivamente conceptos que fueron emergiendo naturalmente en la reflexión y análisis de lo presentado por la población objeto de estudio y que pueden ayudar fuertemente en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en los contextos de justificación y de descubrimiento, con el fin de mejorar la Comprensión en los razonamientos de los estudiantes.

4.2.4.1. Definición en la investigación de Conjetura Temporal

Es un buen enunciado en su construcción semántica y sintáctica. Los estudiantes lo construyen creativamente frente a una actividad y se puede comprobar su cuantificación, su valor de verdad y validez, mediante razonamientos inductivos y/o razonamientos deductivos en el transcurso de la clase.

Una de las conjeturas temporales encontradas en uno de los estudiantes del ***PEI,*** referente a las diagonales de un polígono, fue la construcción de los polígonos y trazo de los mismos, y se muestra en la tabla de doble entrada en donde se realizan las sumas de las diagonales de los polígonos que salen de cada uno de los respetivos vértices. Ver la Ilustración 26 e Ilustración 27.

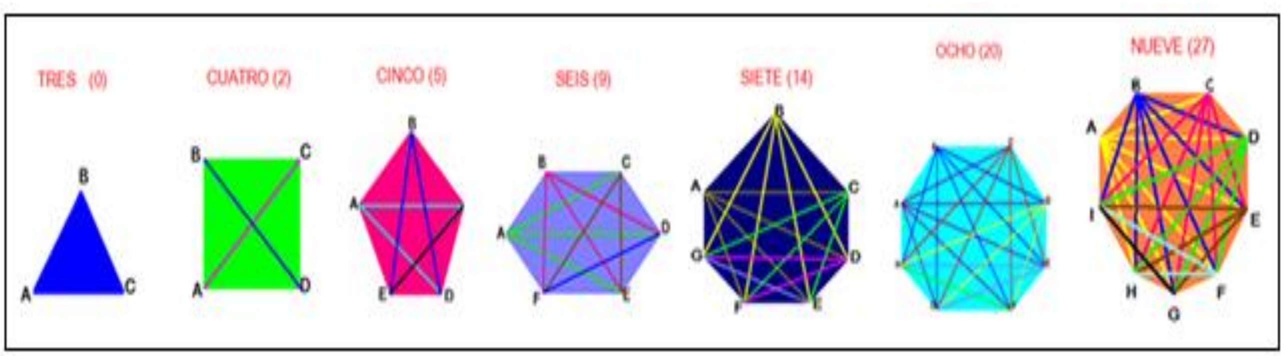


Ilustración 26. Evidencia referente al razonamiento inductivo que soporta la conjetura de las diagonales de un polígono.

POLÌGONO	NUMERO DE DIAGONALES	SUMA
Triángulo	0+0+0	0
Cuadrilátero	1+1+0+0	2
Pentágono	2+2+1+0+0	5
Hexágono	3+3+2+1+0+0	9
Heptágono	4+4+3+2+1+0+0	14
Octágono	5+5+4+3+2+1+0+0	20
Nonágono	6+6+5+4+3+22+1+0+0	27
Decágono	7+7+6+5+4+3+2+1+0+0	35

Ilustración 27. Evidencia de la construcción de un cuadro de doble entrada en donde se detalla la conjetura del número de diagonales de un polígono que salen por cada uno de los vértices en cierta disposición.

4.2.4.2. Definición en la investigación de Conjetura Omnitemporal

Es un buen enunciado en su construcción semántica y sintáctica, del cual es imposible realizar su validez y verificar su valor de verdad, mediante razonamientos inductivos y/o deductivos o medios tecnológicos avanzados en el transcurso de la clase, e incluso pueden perdurar como conjeturas en matemáticas, tal es el caso del problema de los cuatro colores.

Ahora bien, una conjetura temporal u omnitemporal es singular cuando aparece únicamente en un estudiante de la clase, y es colectiva cuando aparece como creación de más de un estudiante de la clase. La Ilustración 28 exterioriza la categorización realizadas para los razonamientos conjeturales.

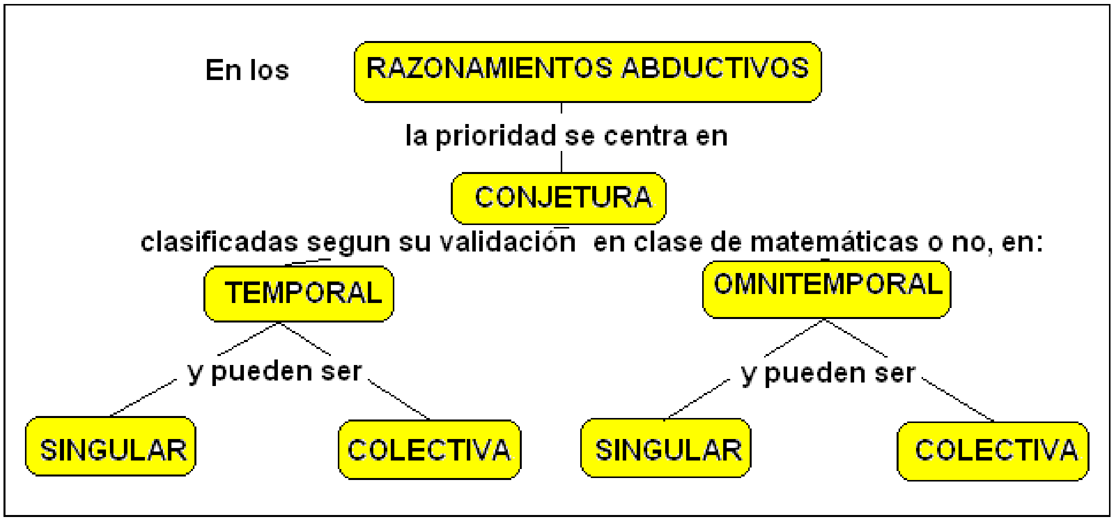


Ilustración 28. Mapa conceptual referente a las conjeturas en la clase de matemática.

En el Cuadro 17 se presentan la sistematización y algunas de las conjeturas omnitemporales realizadas por los estudiantes en cuanto a la actividad de los números poligonales.

NÚMERO DE LA POSICIÓN / NÚMERO POLIGONAL	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	REGLAS DE FORMACIÓN
TRIANGULAR	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	n(n+1)/2
CUADRANGULAR	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	n^2
PENTAGONAL	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210	247	287	n(3n-1)/2
HEXAGONAL	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276	325	378	n(4n-2)/2

Cuadro 17. Sistematización por parte de los estudiantes de la actividad de los números poligonales.

Algunas conjeturas omnitemporales colectivas construidas por los estudiantes que surgieron a partir del debate en el transcurso de la clase.

- ***Los números triangulares, cuadrangulares, pentagonales y hexagonales en las posiciones impares dan como resultado múltiplos del número de la posición respectivamente.***

- ***Un número triangular sumado con el número de la posición posterior da como resultado un número triangular.***

4.2.4.3. Definición en la investigación de Contraejemplo Parcial o Localizado

Es un caso particular de un enunciado que debilita la cuantificación universal de un enunciado conjeturado por un estudiante. Los **contraejemplos localizados** referidos a una proposición falsan sólo algunas partes de éste (o bien la cuantificación universal, pero quedando algunos casos como verdaderos o algunos casos particulares para el enunciado matemático), por medio de algunos casos particulares.

4.2.4.4. Definición en la investigación de Contraejemplo Universal o Referencial

Es un caso particular de un enunciado que debilita tanto la cuantificación universal como existencial del enunciado conjeturado por el estudiante. Los **contraejemplos totales** referidos a una proposición falsan toda la cuantificación universal del enunciado, incluso con un solo caso particular. Con los contraejemplos referidos a un enunciado se debe tener presente la cuantificación de la proposición ya sea: universal o existencial.

En la Ilustración 29 se presenta un mapa conceptual que relaciona los razonamientos matemáticos, las conjeturas en la clase y los contraejemplos.

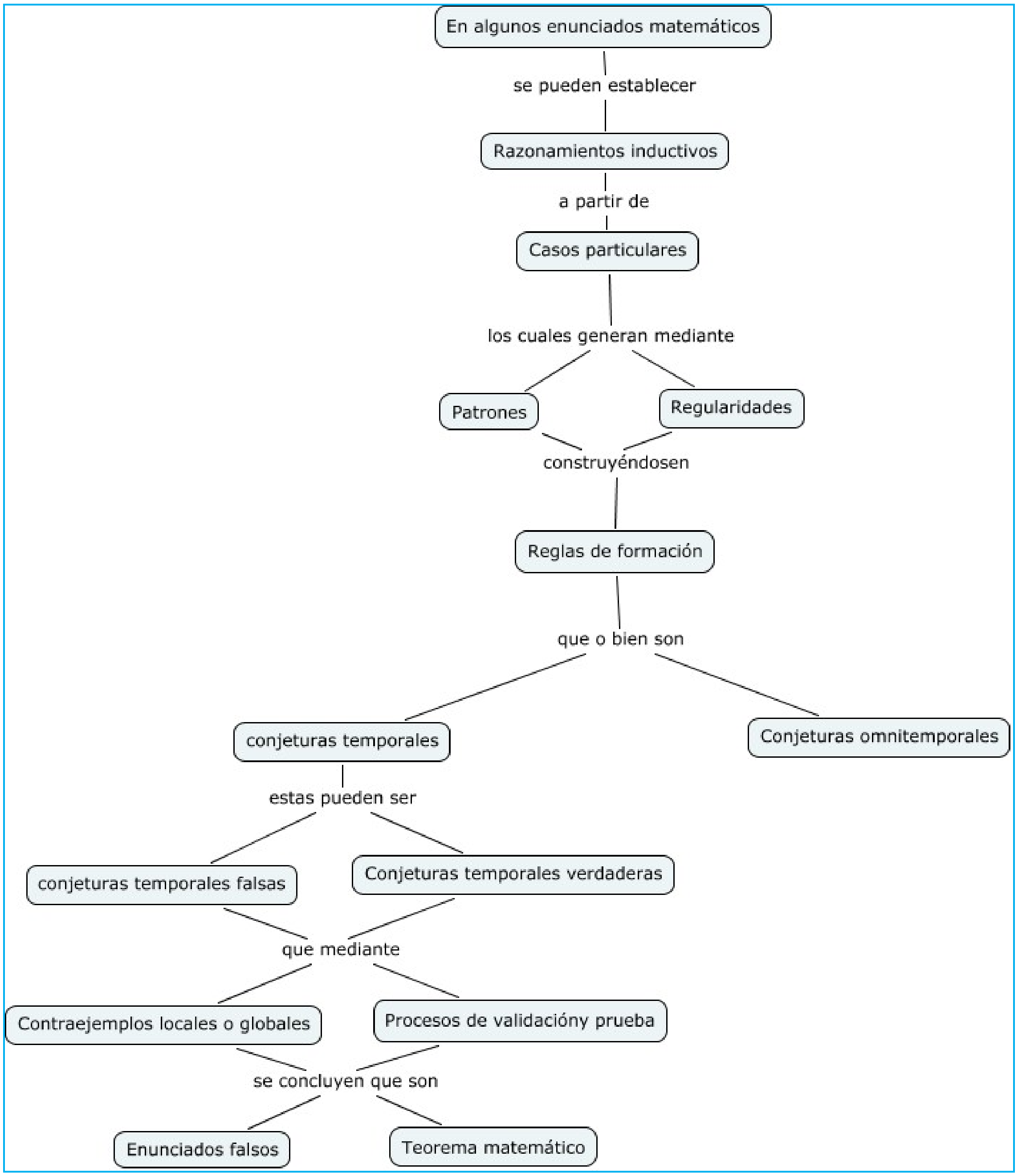


Ilustración 29. Mapa conceptual que relaciona los razonamientos matemáticos, las conjeturas en la clase y los contraejemplos.

4.2.5. Definición de estrategia para conjeturar en el aula de clase de matemáticas

Por ***estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas*** se entenderán aquellas habilidades, destrezas, procesos de razonamientos matemáticos conscientes, que se emplean para analizar, buscar, estudiar, mejorar, comprender, describir, refutar y realizar cambios de registros y representaciones de enunciados matemáticos desde su semántica o su sintaxis. Algunas de estas estrategias fueron empleadas para la construcción de la guía didáctica.

4.2.5.1. Estrategias para conjeturar en el aula de clase de matemáticas

Dichas estrategias surgen a partir del análisis de contenido de las dificultades detectadas en la población de estudiantes universitarios (correspondientes a las observaciones durante la investigación). El investigador propone estas estrategias, en correspondencia con lo que exponen: Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, & Garza:

> *[…] la investigación de los fenómenos relativos a la enseñanza de las matemáticas tampoco puede reducirse a la observación y análisis de los procesos que tienen lugar cotidianamente en las aulas, puesto que su objetivo es la determinación de las condiciones en las que se produce la apropiación del saber por los alumnos, y para esto necesita ejercer un cierto grado de control sobre ellas, lo que implica que el investigador debe de participar en la producción (o diseño) de las situaciones didácticas que analiza. (2005, pág. 42)*

4.2.5.1.1. Estrategias tienen que ver con la sintaxis del enunciado

Búsqueda de consecuencias y de hipótesis a partir de enunciados dados[23]: dicha estrategia consiste en proponer a los estudiantes: causas en búsqueda de las posibles consecuencias y dar consecuencias en donde se debe hallar las respetivas hipótesis o lluvia de hipótesis**.**

[23] Esta estrategia remite a que el estudiante, a partir de causas, determine cuáles son las posibles consecuencias que se generan, como por ejemplo: ¿qué implica que un número entero sea par…?
Ahora bien, esta estrategia para conjeturar en la clase permite que los estudiantes comprendan las definiciones de los objetos matemáticos puestos en juego en los enunciados.

Estudio de los enunciados condicionales e implicaciones: Es primordial emplear estrategias en donde se proponga a los estudiantes reflexiones en cuanto al esquema semántico y sintáctico del condicional e implicación, básicamente formular actividades y situaciones que contengan enunciados tales como: qué implica que…, también puede proponerse a los estudiantes que describan una serie de enunciados condicionales y realicen verificación de los valores de verdad de cada uno de los enunciados condicionales.

Análisis de las cuantificaciones de los enunciados[24]: Enunciar conscientemente, por parte del docente, algunos enunciados con sus respectivas cuantificaciones y debatir la cuantificación por medio de contraejemplos, frutos de la interacción social y comunicación en la clase, que emerjan de los enunciados conjeturados.

Análisis de inclusiones de familias de objetos matemáticos a partir de los cuantificadores de los enunciados: Definir inclusiones de familias de objetos matemáticos a partir de extensiones de sus conceptos y analizar diagramas de las inclusiones. Construir objetos matemáticos teniendo presente los menos inclusivos.

Mejoramiento de las estructuras-sintácticas o semánticas de los enunciados: en esta estrategia se proponen actividades de falso y verdadero (ya sea en la cuantificación, sintaxis, conexiones lógicas o semántica). La mejoría de los enunciados se realiza cuando un enunciado falso puede hacerse verdadero, realizando pequeñas modificaciones estructurales al enunciado. Al respecto Lakatos (1978) hace mención de Cauchy:

> *Es cierto que hay tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas. Este último tipo se puede mejorar, convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula restrictiva que enuncie las excepciones. Yo nunca "atribuyo a las fórmulas un dominio indeterminado de validez y de veracidad". En realidad las fórmulas son verdaderas sólo si se satisfacen ciertas condiciones. Al determinar esas condiciones y, naturalmente, al*

[24] Analizar las cuantificaciones de un enunciado permite que el estudiante indague si las condiciones expresadas en el enunciado se cumplen para todos o algunos o ninguno de los objetos matemáticos de un conjunto en referencia.

> *fijar con precisión el significado de los términos que utilizo, hago desaparecer toda incertidumbre". (Cauchy, 1821).*

Progresiones de las hipótesis en búsqueda de la tesis y regresiones de la tesis hacia las hipótesis[25]*: Suponer los problemas resueltos y aplicar el Método Regresivo-Progresivo, según* Solow (1987)*, se define esta estrategia así:*

> *El "método progresivo-regresivo" consiste básicamente en "progresar" argumentativamente desde la hipótesis hacia la tesis y viceversa, "regresar" argumentativamente desde la tesis hacia la hipótesis hasta concatenar ambos tipos de argumentación y consolidar así un texto coherente, es decir una demostración.*

Adición o eliminación de premisas de un conjunto de enunciados: en esta estrategia se propone que dado un conjunto de premisas en donde ya se ha conjeturado, agregar o quitar otra premisa y establecer razonamientos sobre ellas.

Comprensión de la sintaxis de enunciados: Comprender la sintaxis de los enunciados: la lógica, conectivos lógicos y cuantificadores de enunciados.

4.2.5.1.2. Estrategias que tienen que ver con la semántica del enunciado

Búsqueda de regularidades geométricas o aritméticas: Establecer regularidades en las figuras geométricas establecidas. En algunos casos las regularidades se establecen mediante comparaciones. El uso de regularidades ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no se pueden tener en la mano.

[25] El concepto de método regresivo progresivo puede ser consultado en: http://docencia.udea.edu.co/cen/logica/capitulo3.htm

Conjeturas a través de la visualización: Enunciados emergentes: conjeturas de la visualización de la información compilada en un cuadro de doble entrada.

Comprensión conceptual de los objetos matemáticos: La comprensión conceptual facilita el entendimiento y el trabajo de la resolución de problemas.

Análisis de las propiedades de los objetos matemáticos: Enunciar en forma creativa e inédita las propiedades de los objetos matemáticos y establecer correspondientemente relaciones.

Herramientas conscientes en el proceso de razonamiento matemático: Establecer precisamente el tipo de razonamiento a emplear por medio de las definiciones de los conceptos.

Estudio de las definiciones de los objetos matemáticos[26]: Detallar precisamente las definiciones que hacen parte de los enunciados de las situaciones en cuestión y debatirlas mediante contraejemplos. Lakatos hace observaciones sobre el conjunto de referencia sobre el cual opera la conjetura, esto es, el conjunto de objetos matemáticos que cubre dicha conjetura, en donde hace alusión de las excepciones a la conjetura y habla de los tipos de proposiciones en matemáticas, en referencia a las restricciones:

> *El término contraejemplo tiene un matiz agresivo que ofende a quienes han inventado las pruebas. La expresión correcta es "excepción". Hay tres tipos de proposiciones matemáticas:*

[26] La refutación mediante contraejemplos depende del significado de los términos en cuestión. Si un contraejemplo ha de constituir una crítica objetiva, hemos de ponernos de acuerdo acerca del significado de nuestros términos. Podemos alcanzar semejantes acuerdos, definiendo el término allí donde la comunicación se ha interrumpido. Lakatos (1978, pág. 33).

Y más adelante continua Lakatos: … cuando emergen contraejemplos, es frecuente que se propongan definiciones y que se discutan sobre ellas. Lakatos (1978, pág. 33).

- *Las que siempre son verdaderas y para las que no hay ni restricciones ni excepciones; por ejemplo, la suma de los ángulos de todos los triángulos planos es siempre igual a dos ángulos rectos.*
- *Las que descansan en algún principio falso, por lo que no pueden ser admitidas de ningún modo.*
- *Las que, aunque se articulan sobre principios verdaderos, con todo admiten restricciones o excepciones en algunos casos…*

> *[…] No habría que confundir los teoremas falsos con los teoremas sujetos a alguna restricción". Como dice el proverbio: la excepción demuestra la regla.*
> *Aceptar una coexistencia pacífica de teoremas y excepciones significa ceder a la confusión y el caos en matemáticas.*
> *Es necesario llamar la atención sobre las excepciones, puesto que incluso autores recientes no siempre las reconocen explícitamente.*
> *He examinado ahora las excepciones con todo cuidado y he llegado a la conclusión de que no se ajusta a la verdadera definición de las entidades en cuestión. Así, la prueba y el teorema se pueden reinstaurar, desvaneciéndose la caótica coexistencia de teoremas y excepciones. (1978, págs. 41-42)*

Descripción de relaciones entre objetos matemáticos: Dar enunciados que relacionen objetos matemáticos y establecer excepciones al enunciado. Según Lakatos (1978) citando a Newton se comenta que: "Si de los fenómenos no surgen excepciones, la conclusión puede afirmarse en general". Pero, si apareciese alguna excepción en un momento posterior, hay que empezar a afirmarla con las excepciones que tenga lugar" (Sir Isaac Newton, 1717).

Refutaciones de los conceptos que definen los objetos matemáticos y mejorías de los enunciados: Realizar constantemente refutaciones a los enunciados para mejorarlos. En referencia a Lakatos y en correspondencia a lo propuesto por esta estrategia, él expresa que*:*

> *Los matemáticos son incapaces de ponerse a la vez a probar y refutar una conjetura, debido a sus empedernidos dogmas heurísticos, o bien la prueban, o bien la refutan. Además, son especialmente incapaces de mejorar las conjeturas,*

refutándolas, si resulta que las conjeturas son suyas. Quieren mejorar sus conjeturas sin refutaciones; nunca se deciden a reducir la falsedad, si no es mediante el monótono aumento de verdad; así, purgan el aumento de conocimiento del horror de los contraejemplos. Lakatos (1978, pág. 55).

Construcciones de campos semánticos y asignación de nuevos nombres a nuevos objetos matemáticos: Construir un campo semántico que nombre "conceptos" que todavía no han sido nombrados en la matemática, y que emerjen de los estudiantes.

Por ejemplo en el caso de Euler citado por Lakatos (1978) se comenta al respecto que:

La clave del resultado de Euler fue precisamente la invención de los conceptos de vértice y arista: fue él quien señaló por vez primera que, además del número de caras, el de puntos y líneas de la superficie del poliedro determinan su carácter (topológico). Es interesante que, por un lado, estuviese deseoso de subrayar la novedad de su marco conceptual y que tuviese que inventar el término "acies" (arista) en vez del viejo "latus" (lado), puesto que latus era un concepto poligonal, cuando lo que él quería era uno poliédrico, si bien, por otro lado, mantenía aún el término "angulus solidus" (ángulo sólido) para sus vértices puntuales. (1978, pág. 23)

Búsqueda de hipótesis e indicios: Generación de hipótesis ante un hecho ocurrido y construcción de enunciados.

Permitir cambios de registros y representaciones: Cambios de registros y representaciones permiten comprender mejor lo que se conjetura. Por lo regular se pasa de lo aritmético a lo geométrico y viceversa.

Comprensión semántica de los enunciados: Comprender la semántica de los enunciados las definiciones.

El Cuadro 18 muestra cada una de las estrategias empleadas en la construcción de la guía didáctica, también se muestra cuáles estrategias han sido propuestas y no se han aplicado en la construcción de la guía didáctica.

D	ESTRATEGIA PARA CONJETURAR EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS	LA ESTRATEGIA SE EMPLEÓ EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA GUÍA DIDÁCTICA
Estrategias para conjeturar que tienen que ver con la sintaxis del enunciado	Búsqueda de consecuencias y de hipótesis a partir de enunciados dados.	SI
	Estudio de los enunciados condicionales e implicaciones.	SI
	Análisis de cuantificaciones de enunciados.	SI
	Análisis de las inclusiones de familias de objetos matemáticos a partir de los cuantificadores de los enunciados.	NO
	Mejoramiento de estructuras sintácticas o semánticas de enunciados.	SI
	Progresiones de hipótesis en búsqueda de tesis y regresiones de tesis hacia las hipótesis.	SI
	Uso de mapas conceptuales con condiciones.	NO
	Adición o eliminación de premisas de un conjunto de enunciados.	SI
	Comprensión de la sintaxis de los enunciados.	SI
Estrategias para conjeturar que tienen que ver con la semántica del enunciado	Búsqueda de regularidades geométricas o aritméticas.	SI
	Conjeturas a través de la visualización.	SI
	Estudio de las definiciones de los objetos matemáticos.	SI
	Comprensión conceptual de los objetos matemáticos.	SI
	Análisis de las propiedades de los objetos matemáticos.	SI
	Descripción de relaciones entre objetos matemáticos.	SI
	Refutaciones de los conceptos que definen los objetos matemáticos y mejorías de los enunciados.	SI
	Herramientas conscientes de razonamiento matemático.	SI
	Construcciones de campos semánticos y asignación de nuevos nombres a nuevos objetos matemáticos.	NO
	Búsqueda de hipótesis e indicios.	SI
	Permitir cambios de registros y representaciones.	SI
	Comprensión semántica de los enunciados.	SI

Cuadro 18. Referente a las estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas. D: Tipo de estrategia categorizada por la semántica o sintaxis en los enunciados.

4.2.6. Análisis desde el Marco de Enseñanza para la Comprensión

4.2.6.1. Dificultades que han sido detectadas en los estudiantes en la Comprensión y aproximaciones a pruebas

Algunas de las dificultades que han sido detectadas en la población objeto de estudio (en torno a la comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y la escritura de la prueba y que han sido categorizadas dentro de las cuatro dimensiones para acceder a la Comprensión) se presentan a continuación:

4.2.6.1.1. Dificultades desde los contenidos

Las dificultades detectadas, que se presentan en los estudiantes, en el proceso de comprensión de los razonamientos, en relación con los contenidos de los razonamientos deductivos, son las siguientes:

- En la conceptualización y aplicación de los métodos de demostración.

- En el proceso de una prueba se exhibe una expresión que en ningún caso es una proposición, es una expresión que de la cual no se puede deducir si es verdadera o falsa debido a su ambigüedad, esto es, no hay comprensión en el reconocimiento de enunciados en el contexto de las matemáticas.

- Se suponen, proposiciones, como hipótesis que en ningún caso lo son, e incluso hacen parte de la tesis.

- Hay dificultad en cuanto a la conexión entre pasos lógicos de proposiciones. En algunos casos implicaciones o equivalencias en referencia a las pruebas a dos columnas, tan empleadas, por ejemplo, en los cursos de geometría de nuestro país.

- Se tiene un conocimiento deficiente del principio lógico de no contradicción al demostrar un teorema.

- Se aplican incorrectamente reglas de inferencia y por tanto sus respectivas semánticas y sintaxis.

- Hay un nivel de comprensión bajo, ingenua específicamente, frente a los esquemas lógicos sintácticos de las tautologías o de axiomas o teoremas iniciales, que se pueden emplear para la elaboración argumentativa de pruebas matemáticas, no se domina ampliamente contenidos teóricos en donde se contextualiza la prueba.

- Hay dificultades al momento de realizar pruebas de proposiciones cuantificadas, ya sea en forma universal o existencial e incluso al demostrar proposiciones que sugieren existencia o unicidad de ciertos elementos conceptuales inmersos en la prueba.

- Al finalizar una prueba exhibe la conclusión de la demostración, en donde se muestre la conexión lógica entre premisas y tesis.

- Se presentan dificultades entre el lenguaje simbólico y el lenguaje semántico. Los estudiantes hacen mezclas de ambos indiscriminadamente.

- Hay comprensiones ingenuas frente a las estructuras lógicas condicionales y bicondicionales: condiciones necesarias, condiciones suficientes y, necesarias y suficientes, así como también del uso de las tablas de verdad y su respectivo uso en la validación de razonamientos lógicos.

4.2.6.1.2. Dificultades desde los métodos que se emplean para realizar pruebas

- Hay un nivel de comprensión ingenua en el momento en que se trata de una prueba que debe ser razonada por un método directo ó por un método indirecto, o por cualquiera de los dos, o empleando contraejemplos.

- Existe una dificultad cuando se mezcla al escribir una prueba: el análisis como argumentación por párrafos y otras veces a dos columnas. Por lo tanto, hay comprensiones ingenuas frente a las conceptualizaciones semánticas de objetos matemáticos inmersos en una proposición a demostrar.

- Los estudiantes tienen algunas dificultades cuando se hace necesario probar por inducción matemática y razonar inductivamente a partir de casos particulares.

- Se presentan dificultades al momento de emplear el proceso regresivo-progresivo, al buscar conexiones entre la tesis y las hipótesis, que de alguna manera se sugiere para la elaboración de pruebas de enunciados matemáticos.

- Al estudiante se le dificulta analizar los enunciados, algunas veces, usando casos particulares, antes de llegar a demostrarlo y elaborar pruebas, además no es consciente de la exploración mediante procesos heurísticos antes de llegar a la prueba.

- Los estudiantes aún no comprende que el proceso de elaboración de pruebas matemáticas no son algoritmos, no son escritos sin lógica, éstas son sólo aproximaciones a la demostración.

4.2.6.1.3. Dificultades desde la praxis

- A los estudiantes aún les cuesta interpretar situaciones de la vida real en las cuales se deben realizar procesos de razonamientos inductivos o deductivos tanto en ámbitos cotidianos como en matemáticos.

4.2.6.1.4. Dificultades desde la comunicación

- Los estudiantes muestran una baja comprensión cuando están construyendo demostraciones y pruebas matemáticas, en el campo de las validaciones, debido a la necesidad de justificar enunciados conjeturados ante sus compañeros.

- No se reconoce por parte de los estudiantes en el campo de las validaciones de enunciados matemáticos, que la prueba matemática es institucional a un aula de clase y necesaria en el campo de las matemáticas formales.

Capítulo 5

5. CONCLUSIONES

En los registros escritos de los estudiantes se infiere que ellos construyen pruebas ostensivas, y en pocos casos pruebas intelectuales. Esta conclusión puede justificarse desde el punto de vista de que la población objeto de estudio han tenido un acercamiento incipiente al razonamiento deductivo, y comúnmente con los razonamientos inductivos de manera intuitiva, cotidiana e ingenua.

Los estudiantes presentan dificultades al elaborar razonamientos deductivos, ya que conocen incipientemente las nociones básicas de las reglas de inferencias lógicas, las cuales son fundamentales para la elaboración de sólidas construcciones argumentativas.

Asimismo, se pudo detectar cuáles fueron las dificultades que los estudiantes presentan. Dichas dificultades han sido categorizadas de acuerdo a si la dificultad radica en obstáculos semánticos o en sintácticos. Lo anterior permitió establecer para cada una de las dificultades detectadas unas estrategias para conjeturar.

Los estudiantes presentan “mayor” dificultad respecto a la sintaxis que a la semántica en el proceso de construcción de enunciados, en el contexto matemático. Esto se debe a que existe una marcación especial en la ***ruptura epistemológica*** e histórica en la matemática, respecto del razonamiento deductivo, por lo tanto este proceso de enseñanza del razonamiento deductivo debería encausarse de manera continuada en la escuela.

Desde el punto de vista conceptual, también se pudo detectar en la investigación que hay cierta dependencia entre lo que se conoce de un concepto alrededor de un objeto matemático y las posibles pruebas que se puedan construirse a partir de los enunciados propuestos. La carencia de conceptualización o comprensión ingenua de objetos o relaciones matemáticas provoca invalidez en los procesos de razonamiento del estudiante. Las definiciones y sus conceptualizaciones son importantísimas al momento de conjeturar, así como abstracciones reflexivas de propiedades en juego de los objetos matemáticos.

En los registros escritos analizados se detectó que ciertos estudiantes universitarios acceden a pruebas intelectuales, pero todavía les cuesta garantizar la validación de las mismas.

De otra parte, al analizar los registros escritos presentados por estudiantes de 10° y 11°, se puede inferir que presentan una idea incipiente y poco consciente del razonamiento deductivo y conocen precariamente las reglas de inferencia, es por esto que se deduce que a esta población de estudiantes les cuesta acceder a pruebas intelectuales y por ende al análisis de validación de pruebas.

De otra parte, al analizar como un todo las dificultades presentadas por los estudiantes, en general, se puede decir desde la perspectiva del marco teórico de Nicolás Balacheff, que las dificultades de la prueba se focalizan en dos aspectos:

- El paso de pruebas pragmáticas a intelectuales se dificulta, debido: a los pocos conceptos enseñados alrededor de los razonamientos deductivos en los distintos niveles de escolaridad, a la discontinuidad o carencia de procesos de razonamiento deductivo y a la ruptura epistemológica de la construcción del razonamiento inductivo y deductivo en la matemática.

- El carácter de validación interna de las pruebas intelectuales se dificulta, debido a las conceptualizaciones lógicas en el estudiante y a los precarios procesos de interacción social, en algunos momentos, son rupturas epistemológicas que se dan al interior de las clases de matemáticas.

Al analizar el contexto de descubrimiento matemático en la población de estudiantes siguiendo a Lakatos, en donde se intervino la investigación, se infiere que:

- La verificación de la certeza de una conjetura está filialmente acoplada con procesos heurísticos, tales como: experimentos mentales y de prueba, puesto que éstos, en algunos casos, sirven para mejorar la conjetura, ya sea: su semántica o sintaxis.

- El uso de los contraejemplos ayudan a falsear o probar la veracidad de un enunciado conjeturado. Se detectó, incluso, que cuando un estudiante preguntaba al investigador por una conjetura que ha propuesto frente a una actividad matemática generada, y dicha conjetura es errónea; el investigador sólo devolvía contraejemplos que sirvieran para mejorar la conjetura y para que el estudiante profundizará en su proceso de indagación.

- Es importante dotar a los estudiantes de estrategias conscientes para que logren involucrarse en el proceso de las conjeturas en relación con las justificaciones y las pruebas. La Ilustración 30 exhibe las relaciones de causa y efecto en relación con las conjeturas.

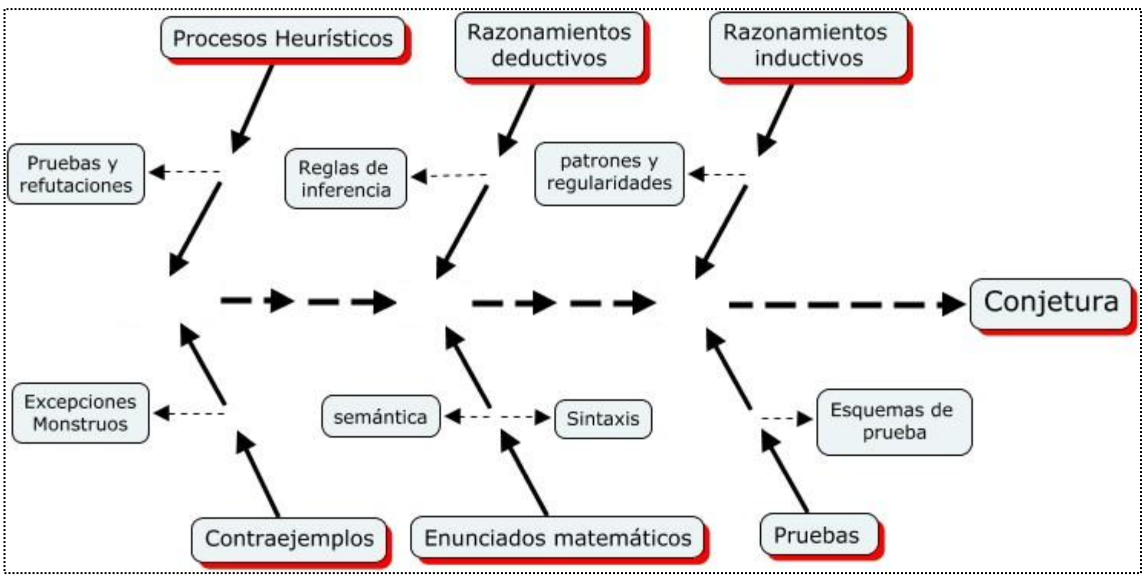


Ilustración 30. Esquema Causa-Efecto.

5.1. Conclusiones relativas al cumplimiento del objetivo general

Respecto del objetivo general que direccionó el trabajo de la investigación, se presentaron los siguientes resultados:

- Una categorización de dificultades en el proceso de razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales a partir de la semántica y sintaxis de los enunciados; esta categorización en estrecha relación con las dimensiones para la Comprensión.

- Una categorización de las conjeturas en la clase de matemática acoplada con el contexto de justificación y prueba en espacios temporales de la clase.

- Una categorización de contraejemplos, que se proponen para comprender la función en las conjeturas.

- La institucionalización en la guía didáctica de estrategias para conjeturar en el aula de clase apelando al contexto de la justificación.

5.2. Conclusiones relativas al cumplimiento de los objetivos específicos

- Se elaboró un análisis de contenido de los registros presentados por los estudiantes, mediante la intervención con una guía didáctica, que permitió realizar un diagnóstico de las dificultades que los estudiantes presentaban al momento de justificar y conjeturar enunciados en la clase.

- Se categorizaron dichas dificultades a partir de condiciones lógicas y de conceptualizaciones propias en contextos de justificación y de descubrimiento desde las visiones de Nicolás Balacheff y desde el Marco de Enseñanza para la Comprensión; posteriormente se realizó la respectiva devolución hacia la construcción de un marco conceptual que definió algunas ideas importantes en estos dos contextos.

Adicionalmente, de acuerdo a la información recolectada y analizada se puede afirmar que:

- Los estudiantes presentes en la investigación exhiben dificultades a nivel semántico y conceptual.

- Al triangular los análisis de contenido de las tres poblaciones se encuentra que los estudiantes desconocen las reglas de inferencia y las estructuras lógicas de enunciados.

- Los estudiantes de educación media intervenidos desconocen reglas de inferencia y por ende estructuras de razonamiento deductivo.

- Los estudiantes desconocen reglas de validez de las pruebas y demostraciones que se hacen en clase.

- Algunos estudiantes desconocen las definiciones de objetos matemáticos o relaciones tratadas en las proposiciones por conjeturar y probar.

- Los estudiantes de educación media se centran en pruebas pragmáticas u ostensivas, en tanto que los estudiantes universitarios muestran grandes avances en pruebas intelectuales al momento en que se les enseña reglas de inferencia y estructuras del razonamiento deductivo.

- La investigación permitió la construcción de una guía didáctica enmarcada en Enseñanzas para la Comprensión y en los contextos de descubrimiento y justificación en la clase de matemáticas.

- Se nombraron categorías que emergieron con respecto a las conjeturas, de acuerdo con el análisis de contenido de los registros recolectados, a partir de condiciones propuestas al momento en que se realiza la validación del enunciado, ya sea durante la clase o por fuera de ella.

- Cuando se enfrenta a los estudiantes a una demostración matemática, es necesario hacer las preguntas: ¿A qué se están enfrentando en cuanto a la validación de un enunciado?, ¿Qué piensan ellos desde las concepciones de prueba?, ¿Qué espacios se les ha dado a los estudiantes para que comuniquen sus escritos y no escritos de la prueba y los puedan socializar?

- Los conceptos de prueba no se limitan solamente a las producciones escritas por parte de los estudiantes. La prueba en matemática está demarcada por un sinnúmero de instrumentos y materiales en los que el estudiante puede apoyarse para su construcción.

Respecto del método empleado se pueden arrojar las siguientes conclusiones:

- ***El análisis de exploración de contenido***, permitió detectar algunas orientaciones relacionadas con la escritura de pruebas matemáticas. Los estudiantes universitarios, privilegian las pruebas a dos columnas, pero se puede detectar que estas orientaciones depende de las exposiciones directas del docente y a las experiencias en las que han sido sometidos.

- ***El análisis de contenido manifiesto,*** permitió detectar dificultades frecuentes frente a las representaciones escritas de pruebas. También entender que en algunos estudiantes no es comprensible la importancia de la dupla inseparable entre conjetura y justificación. El análisis de contenido manifiesto adicionalmente permitió detectar que las dificultades presentadas en los estudiantes se deben a rupturas epistemológicas de la matemática al interior de la clase respecto al proceso de razonamiento deductivo. Finalmente permitió detectar que los estudiantes aún no tienen plena comprensión de la importancia de la interacción social en la validación de pruebas.

- ***El análisis de contenido latente o indirecto,*** comprobó algunas de las dificultades que los estudiantes tienen frente a la sintaxis de enunciados matemáticos.

Finalmente, como producto del análisis de contenido de los registros escritos presentados por los estudiantes, se exponen aquí algunas de preguntas dirigidas a docentes frente al trabajo consciente y comprensivo, con estudiantes, de conjeturas y pruebas en la clase de matemáticas:

- ¿Cómo conjeturan los estudiantes?
- ¿Cómo se estructuran los talleres para que los estudiantes alcancen a comprender el proceso de la conjetura?
- ¿Qué diferencias existen entre las conjeturas realizadas por un estudiante de educación básica y media a un estudiante de universidad, profesional o experto?
- ¿Cuál puede ser una heurística adecuada que permita la comprensión del proceso de prueba y específicamente de los problemas a probar?
- ¿Cómo se conjetura sobre una hipótesis dada, a partir del proceso de razonamiento inductivo y deductivo?
- ¿Qué herramientas de razonamiento tienen presente los estudiantes al momento de conjeturar?
- ¿Cómo se emplean los contraejemplos en el proceso de refutar enunciados y hacerles mejorías o rechazarlos?, ¿Qué uso tienen los contraejemplos universales y existenciales frente a la mejoría de una conjetura o el derrumbamiento de la misma?
- ¿Qué alternativas didácticas se pueden implementar para mejorar los procesos de razonamiento de los estudiantes?
- ¿Cuáles procedimientos deben tenerse presente para la generalización de enunciados?

- ¿Por qué es importante el trabajo de conjeturas y pruebas matemáticas en la comprensión de conceptos, objetos y relaciones matemáticas?

5.3. Preguntas que responde la investigación

La investigación ha arrojado un marco conceptual apoyado en Nicolás Balacheff y Lakatos, en cuanto a la clasificación de conjeturas elaboradas, conjeturas temporales y omnitemporales. Dicho marco hace algunas predicciones importantes frente al contexto del descubrimiento y justificación:

- ¿Cuáles son algunas de las categorizaciones, en el contexto de justificación durante la clase, que se establecen en estos marcos teóricos frente a las conjeturas construidas por los estudiantes?

- ¿Cómo un estudiante puede lograr conjeturar un enunciado matemático a partir del trabajo de actividades, empleando estrategias conscientes?

- ¿Qué clases de dificultades presentan los estudiantes cuando se enfrentan a los contextos de descubrimiento y justificación?

- ¿Cuáles son algunas de las categorizaciones, en el contexto de justificación, que se establecen frente a las conjeturas construidas por los estudiantes en la clase de matemáticas?

- ¿Qué clases de contraejemplos refutan una conjetura, de acuerdo a la cuantificación de su enunciado?

- ¿Qué tipo de guía didáctica sirve para que los estudiantes logren un contexto compresivo de descubrimiento y justificación?

- ¿Cómo la comprensión ayuda a que los estudiantes mejoren rendimientos y creatividad en los contextos de justificación y descubrimiento en el aula de clase?

- ¿Cómo a partir de contraejemplos se pueden hacer mejorías a enunciados conjeturados por los estudiantes en el aula de clase?

5.4. Programa de investigación en la línea de pruebas y conjeturas[27]

Se dirigen las siguientes preguntas a otros investigadores (quizás puedan ser problemas de investigación), las cuales surgen a partir de esta investigación, con el fin de orientar futuras investigaciones:

5.4.1. Preguntas que surgen del trabajo en la investigación con el marco teórico de Balacheff

- ¿Qué categorías de representaciones y estilos escritos de las pruebas en la clase de matemática se pueden llevar a cabo en el lapso de tiempo destinado de la clase?

- ¿Qué tipo de registros discursivos, semióticos y de prueba emplean los estudiantes para resolver y justificar un problema matemático?

- ¿Cuál es el carácter lógico en el proceso de las validaciones al justificar ciertos problemas matemáticos?

- ¿Qué categorizaciones a nivel investigativo existen en el mundo, en torno a las distintas pruebas que emplean los estudiantes al resolver una actividad, situación o problema matemático?[28]

[27] Algunas de estas preguntas han sido presentadas por el investigador, a los maestros en formación, cuando se aborda la temática de pruebas y conjeturas, y han servido para la dirección de trabajos de grado de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia en los años: 2006 y 2008.

[28] Esta pregunta está siendo abordada por algunos estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación-Universidad de Antioquia.

5.4.2. Preguntas que surgen desde el marco teórico de Enseñanza para la comprensión

- ¿Qué implicaciones de tipo social, matemático o cultural se establecen para mejorar los procesos de prueba y de descubrimiento en la escuela?

- ¿Qué ambientes de aprendizaje deben plantearse para el desarrollo de contextos de aprendizaje de las pruebas y conjeturas?

- ¿Cómo posibilitar la generación de conjeturas y sus validaciones?

- ¿Cuál es la importancia de la comprensión en la construcción de las buenas argumentaciones en el aula de clase de matemáticas?

- ¿Por qué hay estudiantes que tienen mejor habilidad que otros en los procesos de justificación ante un problema matemático? ¿Qué influencias puede tener la memoria explicativa a corto y largo plazo de este estudiante en dicho proceso?

5.4.3. Propuesta de etapas de razonamiento conjetural y deductivo

El haber indagado cuatro poblaciones diferentes de estudiantes, permitió que se propusieran a manera de conjetura investigativa, las etapas que a continuación se presentan, derivadas del análisis de los registros presentados por los estudiantes y de las descripciones minuciosas que se realizaron de las dificultades y contextos de justificación y de descubrimiento en clase de matemáticas, así como también del análisis de los razonamientos inductivos y deductivos empleados por los estudiantes al momento de conjeturar.

Estas etapas se proponen para ser validadas en futuras investigaciones.

5.4.3.1. Etapas del razonamiento conjetural en matemáticas

Un estudiante puede ubicarse en cualquiera de las siguientes etapas en la forma de presentación creativa del enunciado de una conjetura, además de poderse ubicar en un nivel de comprensión:

Etapa I: Conjeturas en las propiedades topológicas de una figura geométrica.
Conjeturas referidas a las propiedades topológicas de una figura geométrica en donde el estudiante establece pruebas pragmáticas y ostensivas para validar dicho enunciado.

Etapa II: Conjetura en las propiedades con los números y sus operaciones.
Conjeturas referidas a las propiedades aritméticas básicas entre números y sus propiedades.

Etapa III: Conjeturas en la construcción de reglas de formación.
Conjeturas referidas a las reglas de formación de propiedades algebraicas y de relaciones. Así como también en la búsqueda de las reglas de formación de secuencias.

Etapa IV: Conjeturas en la construcción de enunciados, teniendo presente la semántica y la sintaxis de éste.
Conjeturas referidas a la evidencia en los estudiantes de enunciados con buenas conformaciones semánticas y sintácticas y uso de reglas de inferencia en la elaboración de pruebas intelectuales que los validen.

Etapa V: Conjeturas validadas a partir de pruebas intelectuales teniendo presente la validez de la misma.
Conjeturas referidas a la búsqueda de las validaciones: pruebas intelectuales, pragmáticas y ostensivas y demostraciones de los enunciados conjeturados, en donde se tiene presente los criterios de validez del razonamiento empleado en la prueba.

5.4.3.2. Etapas de aprendizaje para la conquista de una prueba deductiva intelectual conjeturas en la deducción matemática

Teniendo en cuenta lo expuesto por Paolo Boero y citado en Reiss & Heinze, en el Coloquio de la Prueba en Masachessette Dourmnont, se propone:

> *A starting point might be an expert model of the proving process as suggested by Boero (1999). He distinguished six phases: (1) exploration of the problem situation, (2) formulation of a hypothesis, (3) exploration of the hypothesis (including the identification of possible arguments), (4) construction of a logical chain of arguments, (5) extension of this chain of arguments to a proof (according to given standards), and optionally (6) approaching a formal proof. (2007, pág. 2)*

A continuación se proponen las siguientes etapas referidas a la conquista de una prueba intelectual de un estudiante en matemáticas.

Etapa I: Razonamiento deductivo a partir del manejo del condicional.

Referido al razonamiento deductivo desde el manejo de las causas-consecuencias, los condicionales y las implicaciones desde un nivel del lenguaje cotidiano y el trabajo de la regla de inferencia Modus Ponendo Ponens. Esta etapa podría desarrollarse en la Educación Básica de las matemáticas y el punto de cercanía es el lenguaje cotidiano. En cuanto a la regla de inferencia Modus Ponendo Ponens, Bur (2004) afirma que los estudios de *Piaget* y de las tarjetas de *Watson, proponen que la regla de inferencia Modus Ponendo Ponens se da de manera natural en las personas:*

> *En el ámbito del razonamiento deductivo, muchos autores son partidarios de lo que se denomina lógica natural, la que consiste "en un conjunto de reglas formales que se utilizan para inferir una conclusión a partir de unas premisas determinadas". Para esos autores las reglas de inferencia están basadas en algún criterio normativo, como la lógica proposicional, y son ajenas al contexto específico que manipulan, por lo que operan a un nivel exclusivamente sintáctico.*

El tipo y número de reglas postuladas por los autores es harto diferente, aunque todos ellos coinciden en señalar que las personas poseen, al menos, la regla del modus ponens. Eso significa que la mente contendría alguna regla correspondiente a la regla lógica "si p entonces q" sin verse afectados por las características semánticas de la tarea, es decir, que los sujetos resuelven con la misma facilidad una versión abstracta y una versión con contenido del modus ponens.

Etapa II: Razonamiento deductivo a partir de las aplicaciones de reglas de inferencia en un conjunto de hipótesis.

Referido al razonamiento deductivo dentro de un conjunto de hipótesis a partir de aplicaciones de reglas de inferencia básicas. En esta etapa, se puede trabajar un primer acercamiento a las reglas de inferencia conjuntamente con los estudiantes mediante la elaboración de actividades que conduzcan a la generación de condicionales.

Etapa III: Razonamiento deductivo en donde se manejan teoremas.

Referido a la supresión de hipótesis, axiomas, teoremas fundamentales o conceptos u objetos matemáticos primitivos, en el conjunto definitorio de hipótesis y aplicaciones de las reglas de inferencia.

Etapa IV: Razonamiento deductivo en donde se incluyen nuevas premisas a la prueba.

Referido al ingreso de nuevas premisas que incluyen nuevos conceptos, objetos matemáticos, otros axiomas o leyes.

Etapa V: Razonamiento deductivo en donde se tiene presente la sintaxis en juego

Referido al establecimiento y aplicación de nuevas tautologías sintácticas establecidas de la semántica contenida en la conjetura.

Etapa VI: Razonamiento deductivo en donde se tiene presente la semántica y la sintaxis y la validez en los razonamientos de una prueba.

Se hace referencia al sometimiento de validación de la conjetura dentro de la lógica matemática, atendiendo a criterios de semántica y sintaxis del enunciado y a la validez de los razonamientos que conforman la prueba intelectual.

BIBLIOGRAFÍA

Arsac, G. (1987). Traducción de Martín Acosta. *Recherches en didactique des mathematiques* , 267-312.

Báez, J., & Pérez, J. (2007). *Investigación Cualitativa.* ISBN: 8473564839: ESIC Editorial.

Balacheff, N. (31 de Mayo de 2006). Comunicación personal. *Mensaje enviado a: jhdurango@ayura.udea.edu.co* . Medellín, Antioquia, Colombia.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de Prueba en los alumnos de matemáticas.* (P. Gómez, Trad.) Santa Fé de Bogotá, Cundinamarca, Colombia: Una Empresa Docente, Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2007). Research Paradigms on Teaching and Learning Proof. *Research Colloquium* (pág. 2). Providence, Rhode Island: University Massachusetts Dartmount.

Blythe, T. (1998). *La Enseñanza para la Comprensión: Guía para el docente.* (G. Ventureira, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Boero, P. (2007). Conjecturing and Proving as Rational Behaviors . *Research Colloquium* (pág. 3). Providence, Rhode Island: University of Massachusetts Dartmouth.

Bur, R. (2004). *Psicología del razonamiento.*

Castillo, E., & Vásquez, M. L. (13 de noviembre de 2007). El rigor metodológico en la investigacion cualitativa. *ISSN: 1657-9534* .

Durango, J. H. (2008). Razonamientos matemáticos inductivos y deductivos. En J. H. Durango, J. A. Villa, M. I. Piedrahita, E. C. Hernández, V. S. Bustamante, J. M. Cortéz, y otros (Edits.), *Razonamiento Lógico: Razono y actúo con lógica* (págs. 9-37). Medellín, Antioquia, Colombia: Universidad de Antioquia.

Durango, J. H., & Jaramillo, C. M. (Mayo de 2008). Interpretación, análisis y categorización en los registros presentados por estudiantes adultos al momento de establecer razonamientos conjeturales y de prueba en la clase de matemáticas. *Fourth International Congress of Qualitative Inquiry* (págs. 11-12, 254). Urbana-Champaign, Estados Unidos: University of Illinois at Urbana-Champaign.

Durango, J. (Octubre 26 y 27 de 2007). La Comprensión en el Razonamiento Inductivo, Deductivo y Conjetural en la clase de matemáticas. *VII Encuentro de Enseñanza de las Ciencias: Investigación en la Enseñanza y aprendizaje de las ciencias naturales* (págs. 1-6). Medellín, Colombia: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Durango, J. (Noviembre de 2006). Taller de Razonamientos Inductivos y Deductivos. *Foro Nacional de Competencias Matemáticas.* Paipa-Boyacá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Gardner, M. (2002). *Huevos, nudos y otras mistificaciones matemáticas* (illustrated ed.). Barcelona: Gedisa, S.A.

Hanna, G. (1997). *Il valore permanente della dimostrazione, la matematica e la sua didattica.* Obtenido de http://www.oise.utoronto.ca/~ghanna/pme96pfr.html.

Harel, G., & Sowder, L. (1994). Students' Proof Shemes: Results from Exploratory Studies. En E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, T. P, E. Dubinsky, A. Schoenfeld, J. J. Kaput, F. Hitt, & T. P (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education VII* (págs. 234-277). Providence: AMS Bookstore, RI: American Mathematical Society.

Herbst, P. (13 de Marzo de 2009). Comunicación personal. *Mensaje enviado a: jhdurango@ayura.udea.edu.co* . Medellín, Antioquia, Colombia.

Herbst, P. G. (1999). Acerca de la demostración y la lógica de la práctica en la Enseñanza de la Geometría: observaciones sobre la forma de prueba a dos columnas. *La Letre de la Preuve* .

Ibañes, m. (2001). Cuatro cuestiones en torno al aprendizaje de la demostración. *Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 11-26). Almería: Universidad de Almería, Servicio de Publicaciones.

Jaramillo, A., Mejía, C., & Mesa, O. (2001). *Modelos de Razonamiento Lógico-Matemático implementados en situaciones problema, en algunos temas específicos de la matemática.* Medellín, Antioquia, Colombia: Zuluaga.

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to Its Methodology* (2, illustrated ed.). SAGE.

Lakatos, I. (2007). *Escritos Filosóficos 2: Matemáticas. ciencia y epistemología.* Madrid: Alianza.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones: La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza.

Lopera, E. (2006). *Parámetros para la construcción de una guía didáctica: presentada en el Curso Teoría II de la Maestría en Educación de la Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.* Medellín.

Manzano, M., & Huertas, A. (2004). *Lógica para principiantes.* Madrid: Alianza.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas.* Bogotá: Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional. (1997). *Pequeños Aprendices, Grandes Comprensiones.* Santa Fé de Bogotá: Talleres de Cargraphics. S.A.

Naranjo, J. M. (2002). *Lógica Elemental.* México: Limusa.

NCTM, N. C. (1989). *Curriculum and evaluation Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Negrete, J. M. (2002). *Lógica Elemental.* México: Limusa.

Sekiguchi, Y., & Miyazaki, M. (Enero-Febrero de 2000). *La Lettre de la Prueve.* Recuperado el 5 de Noviembre de 2006, de Argumentación y demostración en el Japón: http://www.lettredelapreuve.it/Newsletter/000102Theme/000102ThemeES.html

Solow, D. (1987). *¿Cómo entender y hacer demostraciones en matemáticas?* México: Limusa.

Stone, M. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica.* Buenos Aires, Argentina: Paidós SAICF.

Suppes, P. e. (1988). *Introducción a la lógica matemática.* Santa Fé de Bogotá-Colombia: Reverté, S.A.

Valverde, L. (2001). El razonamiento Matemático. *Cuadernos Pedagógicos, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia* , 35-50.

Vásquez, E. C. (s.f.). Recuperado el 3 de Novimebre de 2007, de http://colombiamedica.univalle.edu.co/Vol34No3/cm34n3a10.htm.

Wilson, D. G. (2005). Las dimensiones de la comprensión. *Revista Internacional Magisterio: Educación y pedagogía Nº 14* , 25-28.

Wiske, M. S., Boix M, V., Buchovecky, E., P. d., Dempsey, R., Gardner, H., y otros. (1999). *La Enseñanza para la Comprensión: Vinculación entre la investigación y la práctica.* (C. Piña, Trad.) Buenos Aires: Paidós.

Anexo A

ANEXO A: GUÍA DIDÁCTICA: RAZONAMIENTOS MATEMÁTICOS INDUCTIVOS, DEDUCTIVOS Y CONJETURALES[29]

La estructura de la guía didáctica, empleada para su construcción, se encuentran en el archivo llamado: ***"Parámetros guía didáctica"*** grabado en el **CD** que aparece adjunto a este trabajo de investigación.

En este archivo se esquematiza bajo el marco de Enseñanza para la comprensión los siguientes aspectos: **los objetivos (en cuyo caso para la guía son metas de comprensión)**, **exploración de los conocimientos previos, el desarrollo del tema exige comprensión, los enfoques conceptuales y modelos explicativos de la guía didáctica**, **la síntesis creativa que ha de omitir la información de carácter redundante y de importancia secundaria y bibliografía.**

[29] El presente apartado fue expuesto por el autor en taller del ***Foro Nacional de Matemática, Ministerio de Educación Nacional, Paipa, Boyacá*** bajo el título: "***Razonamientos Inductivos y Deductivos"***, Noviembre de 2006, posteriormente se expuso como taller en el ***VI Encuentro de Enseñanza de las Ciencias***, Universidad de Antioquia, con el trabajo: ***"Conjeturas y Pruebas en la clase de matemáticas"***, Medellín , Antioquia; Octubre de 2007 y adicionalmente éste hace parte del capítulo Nº 1 en una versión corta del libro de Razonamiento lógico matemático: ***"Razono y actúo con lógica*"**, ISBN: 978-958-714-176-4** en los Programas de Inducción a la Vida Universitaria (***PIVU***) y Especial de Ingreso a la Universidad (***PEI***), Dirección de Regionalización, Universidad de Antioquia.

A.1. Meta general de Comprensión

Se proyecta que al finalizar la intervención de la investigación mediante la siguiente guía didáctica (que propende por el estudio de los razonamientos matemáticos inductivos y deductivos) el estudiante, esté en capacidad de elaborar argumentaciones lógicas deductivas e inductivas empleando los conceptos de implicación, criterios de validez de una argumentación y valores de verdad que pueden adoptar cierto enunciado; además de interpretar diferentes enunciados y argumentos propuestos; para comprender situaciones discursivas de la vida real y perfeccionar, desde el razonamiento deductivo, el discurso argumentativo; igualmente potenciando las competencias de la actividad del razonamiento conjetural.

A.1.1. Metas de comprensión

Las metas de Comprensión particulares de la propuesta de intervención en el aula serán esquematizadas dentro de las cuatro dimensiones de la Comprensión: contenido, método, praxis y comunicación.

A.1.1.1. Metas de comprensión según los contenidos

- Emplea correctamente las reglas de inferencia desde contextos semánticos con el propósito de realizar razonamientos deductivos.
- Conceptualiza y comprende claramente los enunciados condicionales, implicativos, bicondicionales y equivalentes, para realizar pruebas de enunciados matemáticos.
- Comprende los aspectos que tienen que ver con la semántica (significación) y la sintaxis (lógica-estructura) del enunciado al demostrar un teorema.

- Diferencia “ampliamente” los razonamientos inductivos y deductivos y es consciente cuando aplica dichas habilidades al momento de probar un enunciado conjeturado en el aula de clase.

- Aplica razonamientos inductivos o deductivos en la prueba de un enunciado de tipo geométrico o aritmético.

- Reconoce la proposición compuesta condicional como de gran importancia dentro de la construcción de la teoría matemática y de los razonamientos lógicos, y esclarece en ésta las condiciones y consecuencias inmersas en el enunciado lógico.

- Estudia los esquemas lógicos de las reglas de inferencia, para aplicarlos a situaciones cotidianas.

- Realiza algunas conceptualizaciones acerca de la proposición condicional y de las variantes lógicas equivalentes a ésta.

- Conceptualiza los esquemas lógicos de las reglas de inferencia para resolver situaciones cotidianas en lenguaje natural.

A.1.1.2. Metas de comprensión según los métodos

- Emplea razonamientos por el absurdo para establecer la validez de un enunciado y tiene presente frente a qué tipo de proposición lo debe de hacer.

- Comprende que las pruebas por razonamiento deductivo pueden aplicarse a un sinnúmero de enunciados matemáticos, para lograr su demostración.

- Frecuentemente el estudiante emplea el proceso regresivo-progresivo para diseñar la prueba de un teorema.

- Escribe una demostración de un enunciado matemático a dos columnas y luego lo escribe por párrafos.

- Realiza inferencias de carácter inductivo en determinadas actividades numéricas, para posteriormente realizar procesos de generalización, en las reglas de formación, por medio de conjeturas.

- Construye inferencias lógicas de carácter deductivo, a partir de premisas en los cuales intervienen algunos conectivos lógicos entre sus estructuras sintácticas, para posteriormente aplicarlas en deducciones lógicas en situaciones de la vida cotidiana y en procesos de búsqueda de generalizaciones y validaciones de enunciados propios de la geometría y la aritmética escolar.

- Diseña algunas simbolizaciones de razonamientos lógicos matemáticos, a partir de enunciados escritos en nuestro lenguaje, para que el estudiante progrese en los niveles de aprendizaje que van desde lo concreto y visual hasta lo deductivo y formal.

- Aplica las tablas de verdad para la validación de ciertos razonamientos lógicos.

- Resuelve situaciones y actividades empleando razonamientos inductivos para lograr generalizaciones y reglas de formación.

A.1.1.3. Metas de comprensión según la praxis

- Realiza unas aproximaciones de pruebas deductivas, cuando se le enfrenta a que la haga ante una conjetura obtenida por él.

- Comprende que el razonar inductivamente es importante para realizar aproximaciones de casos particulares en casos particulares y vislumbrar la prueba del enunciado matemático.

- Emplea algunos recursos como la visualización, recursos de analogías, de cálculo o de reconocimiento en los intentos de lograr una prueba de un enunciado.

- Plantea conjeturas, conclusiones y argumentos lógicos a partir de un conjunto de premisas, empleando las reglas de inferencia, para lograr una mejor significación en los procesos de pruebas y de validaciones de los enunciados conjeturados.

- Realiza inferencias lógicas a partir de enunciados premisas en los cuales intervienen algunos conectivos lógicos entre sus estructuras sintácticas y poder sistematizar las inferencias lógicas construidas en un cuadro de doble entrada.

A.1.1.4. Metas de comprensión según la comunicación

- Privilegia las conjeturas en la teoría matemática como vitales para movilizar espacios de validación entre sus compañeros.

- Reconoce que las pruebas y demostraciones en matemáticas dependen de los espacios de debate en el aula de clase.

- Propicia espacios de discusión en el aula de clase frente a las pruebas y demostraciones que elabora.

A.1.1.5. Metas de comprensión en los razonamientos inductivos

- Resuelve actividades en donde se propone conscientemente razonamientos inductivos para lograr generalizaciones, a partir de la exploración de casos particulares, la posterior sistematización de éstos y conformar reglas de formación.

A.1.1.6. Metas de comprensión en los razonamientos deductivos

- Genera conscientemente razonamientos deductivos, a partir de premisas en los cuales intervienen algunos conectivos lógicos entre sus estructuras sintácticas.

- Conceptualiza la proposición compuesta condicional como una de las importantes dentro de la construcción de la teoría matemática y de los razonamientos lógicos deductivos.

- Estudia los esquemas lógicos semánticos y sintácticos de las reglas de inferencia a partir de actividades que tiene que ver directamente con discursos argumentativos que pueden ser fácilmente situaciones cotidianas.

- Conceptualiza algunas ideas en torno a los cuantificadores: universales y existenciales en las proposiciones, para comprender en ciertos casos cuando un contraejemplo debilita la verdad o falsedad de una proposición.

A.1.1.7. Metas de comprensión en los contextos de justificación y descubrimiento

- Elabora conscientemente pruebas y argumentaciones y justificaciones a las distintas actividades propuestas en la guía didáctica para validar las respuestas dadas.

- Crea conjeturas, conclusiones y argumentos lógicos matemáticos, desde razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales, a partir de un conjunto de premisas, empleando las reglas de inferencia.

Como recomendación a los docentes, se sugiere que implementen esta guía en las clases de matemáticas con sus estudiantes y que al momento de abordar las actividades y enunciados planteados se propongan a los estudiantes pruebas pragmáticas y de tipo empiricismo ingenuo[30] pasando posteriormente a pruebas intelectuales en el momento de validar enunciado.

[30] Denominaremos pruebas pragmáticas a las pruebas que recurren a la acción o a la ostensión y llamaremos pruebas intelectuales a las pruebas que, separándose de la acción, se apoyan en formulaciones de propiedades en juego y de sus relaciones. Balacheff (2000).

El empiricismo ingenuo consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo verificado en algunos casos. Este modo de validación tan rudimentario e insuficiente, es una de las primeras formas de los procesos de generalización.

A.2. Actividades de motivación inicial a los razonamientos inductivos y deductivos

Según Durango (2008, págs. 11-37) se proponen una guía didáctica enmarcada dentro de las estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas y bajo el Marco de Enseñanza para la Comprensión.

A.2.1. Actividad # 1: Razonamientos inductivos en la extracción de círculos

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cómo estarías seguro de sacar de una caja círculos de tres colores distintos, sin necesidad de mirarlos en la extracción? ¿Qué tipo de razonamiento matemático: inductivo y/o deductivo, emplearías para resolver la siguiente actividad? ¿Qué tipos de justificaciones construirías para mostrar a tus compañeros la solución? ¿Qué casos extremos analizarías para lograr resolver la actividad, esto es: caso extremo de seguridad y caso extremo de no seguridad de obtener la tripleta de colores en los círculos?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Analizar las palabras claves del enunciado y cómo pueden influir éstas en la solución definitiva del enunciado.** **¿Cuál o cuáles es/son la/s palabra/s importante/s del enunciado?**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Aplicar razonamientos inductivos para la solución de la actividad.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir un proceso de justificación o de prueba, ostensiva o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad.**

Estrategia empleada para conjeturar: HALLAZGO DE REGULARIDADES GEOMÉTRICAS O ARITMÉTICAS: Establecer regularidades en las figuras geométricas o situaciones del discurso establecidas. En algunos casos, Las regularidades se establecen mediante comparaciones y experimentaciones de casos particulares. El uso de regularidades ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no podemos tener en la mano.

Una caja tiene una pequeña perforación por la cual sólo se puede introducir la mano y sacar un círculo en cada extracción. Ésta contiene: **once** círculos **rojos**, **siete** círculos **amarillos** y **ocho** círculos **azules** del **mismo tamaño y espesor**. **Si** se desea sacar un círculo rojo, un círculo amarillo **y** uno azul, **entonces**:

- ¿Cuántas veces se debe extraer de la caja círculos, para **estar seguros** de obtener **la tripleta** con las condiciones exigidas, explica la respuesta dada, incluso, si es posible, realizar una simulación de la actividad hasta obtener la tripleta con las condiciones exigidas?

- ¿Qué ocurriría si hubiese diez círculos amarillos, en vez de los siete y manteniéndose los demás valores de círculos rojos y azules?

Conjetura temporal: Genere posibles conjeturas sobre esta actividad y pruebe la veracidad o falsedad de éstas.

Sugerencia: simular la actividad con una caja con las condiciones exigidas y recortar en cartulina u otro material los círculos con la cantidad y colores exigidos.

A.2.2. Actividad # 2: Análisis de condiciones y consecuencias en un enunciado

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Qué tipo de razonamiento matemático: inductivo y/o deductivo, emplearías para resolver la siguiente actividad? ¿Qué palabras consideras importantes dentro del enunciado de la actividad? ¿Cuál es la condición y las consecuencias?, ¿cuáles son las consecuencias que se dan inmediatamente acontezca la condición en la actividad?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Analizar las palabras claves del enunciado y comprender cuál es la causa y consecuencia en un enunciado condicional matemático.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Aplicar razonamientos deductivos para la solución de la actividad y a partir de aquí realizar análisis de situaciones posibles y no posibles a través de cumplimiento de condiciones previas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba, ostensiva o intelectual, que sustente las respuestas dadas en la actividad.**

Estrategia empleada para conjeturar: ESTUDIO DE CONDICIONALES E IMPLICACIONES: Qué implica que…, escribir una serie de enunciados condicionales y verificación de los valores de verdad de cada uno de los enunciados condicionales. **Análisis de casos posibles y no posibles a partir del establecimiento de condicionales verdaderos.**

Un chico dice en la mañana de un día a su padre: “**Si** voy al paseo, **entonces** montaré a caballo o nadaré en la piscina”. Resulta que el chico en la noche de ese mismo día dice a su padre: **“hoy ni monté a caballo ni nadé en la piscina**”;

- Puedes decir entonces que ocurrió, suponiendo que el chico se mantiene en la afirmación postulada en la mañana:

- Resulta que el chico no va al paseo y monta a caballo y nada en una piscina, ¿es esta **situación posible**?, explique.

- Escribe: ¿cuáles podrían ser situaciones posibles y cuáles no posibles alrededor de este enunciado?, elabore posteriormente justificaciones en donde se valide la posibilidad o imposibilidad.

A.2.3. Actividad # 3: Análisis de situaciones posibles y no posibles

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Qué posibles conclusiones puedes obtener a partir de unas condiciones o causas dadas inicialmente? ¿Qué posibles consecuencias pueden darse a partir de la imposibilidad de darse la causa en esta actividad?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Analizar las palabras claves del enunciado y comprender cuál es la causa y consecuencia en un enunciado condicional matemático.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Aplicar razonamientos deductivos para la solución de la actividad.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba que sustente las respuestas dadas de la actividad.**

Estrategia empleada para conjeturar: ESTUDIO DE CONDICIONALES E IMPLICACIONES: Qué implica que…, escribir una serie de enunciados condicionales y verificación de los valores de verdad de cada uno de los enunciados condicionales. **Análisis de casos posibles y no posibles a partir del establecimiento de condicionales verdaderos: implicaciones.**

El docente de razonamiento lógico matemático dice a uno de sus estudiantes: “**Si** observas las respuestas de este ejercicio, **entonces** no te lo revisaré”.

- Ha pasado algún tiempo y el docente no le revisó el problema a su estudiante, ¿Puedes deducir entonces que ha pasado?

- ¿Qué debió haber ocurrido para que el docente le hubiese revisado el ejercicio a su estudiante?

A.2.4. Actividad # 4: Análisis de condiciones en un problema y posibles estrategias de solución

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Es posible no atender a todas las condiciones de una actividad matemática?, ¿Es posible en la actividad de que se queden solamente el círculo y el rectángulo, en uno de los lados de A ó B?, ¿por qué?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Comprender la importancia de las condiciones dadas en una actividad matemática.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Aplicar razonamientos deductivos para la solución de la actividad.** **Emplear algunos grafos sencillos para interpretar matemáticamente la actividad.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba ostensiva y gráfica o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad.**

Estrategia empleada para conjeturar: CONJETURAS A TRAVÉS DE LA VISUALIZACIÓN: Enunciados emergentes: conjeturas de la visualización de la información compilada en un cuadro de doble entrada o en gráficos.

La siguiente actividad hace parte de una adaptación del problema clásico del siglo VIII citado en Gardner, así:

> *La redacción de esta situación es una adaptación de un antiguo problema que se remonta a épocas del siglo VIII, habla de un hombre que desea conducir un lobo, una cabra, y una col, a través de un río, en una barca en la que solamente puede llevar cada vez a uno de los tres. No puede dejar solos y juntos ni al lobo ni a la cabra, ni tampoco a la cabra con la col. (1997, págs. 128-129)*

El docente del curso de razonamiento lógico matemático y algunos de sus estudiantes (ver Ilustración 31) desean pasar al otro lado de una línea a un círculo, un triángulo **y** un rectángulo. El docente y los estudiantes deben pasar las figuras atendiendo a las siguientes condiciones:

- En cada recorrido, bien sea de ida hacia A **o** bien sea hacia B sólo se puede transportar **una y sólo una** figura. **Supóngase** que los lados A y B están en semiplanos opuestos.

- **Si** se quedan solos, en uno de los lados, el círculo y el triángulo, **entonces** se cambian mágicamente por un hexágono.

- **Si** se quedan solos, en uno de los lados, el círculo y el rectángulo, **entonces** se cambian mágicamente por un pentágono.

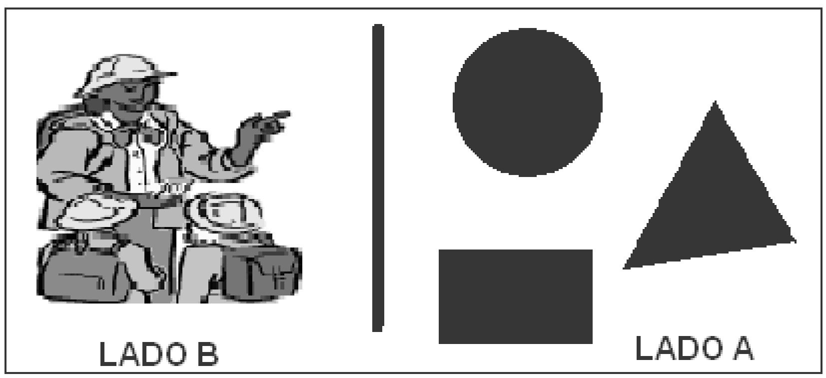


Ilustración 31. Referente a la actividad del docente, estudiantes y figuras geométricas que se deben de pasar del lado A hacia el lado B.

¿Cómo debe hacer el estudiante para pasar las figuras del lado A hacia el lado B, estando en el lado A, de tal forma que al finalizar el recorrido aparezcan en el lado B las figuras: círculo, triángulo **y** rectángulo?

Sugerencia: construir en cartulina u otro material las figuras indicadas en el enunciado y la línea de separación entre los lados A y B y simular la actividad.

¿Cuántas soluciones posibles hay de realizar el transporte de las figuras de un lado a otro y de cuántos viajes (contado como viajes los de ida y los de venida)?

Conjetura temporal: ¿Qué otras posibles preguntas se pueden generar alrededor de la actividad anterior?, ¿Qué se puede afirmar contundentemente de la actividad anterior?

A.2.5. Actividad # 5: Razonamientos inductivos a partir de una actividad generada por una máquina de dulces

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cómo se emplea un razonamiento inductivo en esta actividad? ¿Es importante que en el enunciado se precise que la máquina sólo entrega uno y sólo un dulce al introducirle una moneda?, ¿Por qué?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Analizar la estructura sintáctica de los enunciados matemáticos.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Aplicar razonamientos inductivos y/o deductivos para la solución de la actividad.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba, ostensiva y gráfica o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad.**

Estrategia empleada para conjeturar: Supuestos de casos hipotéticos.

Una máquina que expulsa dulces al introducírsele monedas de $ 500, contiene once dulces de tamarindo, siete dulces de mango y diez dulces de banano. **Si** se introduce una moneda de $ 500, **entonces** la máquina entrega **uno y sólo un** dulce. La cantidad de dinero que ha de introducírsele a la máquina para tener la **seguridad de obtener** dos dulces de mango, uno de tamarindo y uno de banano deberá ser:

A.2.6. Actividad # 6: Razonamientos inductivos que se pueden generar a partir de una secuencia geométrica y aritmética con cuadrados

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Por qué el razonamiento inductivo es indispensable para el análisis de esta actividad? ¿Cómo puedes relacionar los casos particulares presentados en la actividad con los casos desconocidos? ¿Qué posibles conjeturas pudieses descubrir de esta actividad?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Realizar conscientemente procesos de razonamientos inductivos a partir de casos particulares, realizando experimentaciones con casos desconocidos y construidos, para la posterior construcción de conjeturas relacionadas con las regularidades y la regla de formación.** **Identificar los patrones de regularidad en las figuras.** **Construir una regla de formación aritmética o geométrica para realizar análisis de razonamientos inductivos en casos particulares que son difíciles de experimentar.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Elaborar conscientemente procesos de razonamientos inductivos a partir de los gráficos presentados en cada actividad.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba, ostensiva y gráfica o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad y construir conjeturas alrededor de las situaciones.**

Estrategia empleada para conjeturar: HALLAZGO DE REGULARIDADES GEOMÉTRICAS O ARITMÉTICAS: Establecer regularidades en las figuras geométricas establecidas. En algunos casos las regularidades se establecen mediante comparaciones. El uso de regularidades nos ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no podemos tener en la mano.

Las figuras que se muestran en la Ilustración 32, hacen parte de una secuencia infinita, que constan de 1, 5, 13 y 25 cuadrados de un centímetro de lado que no se superponen.

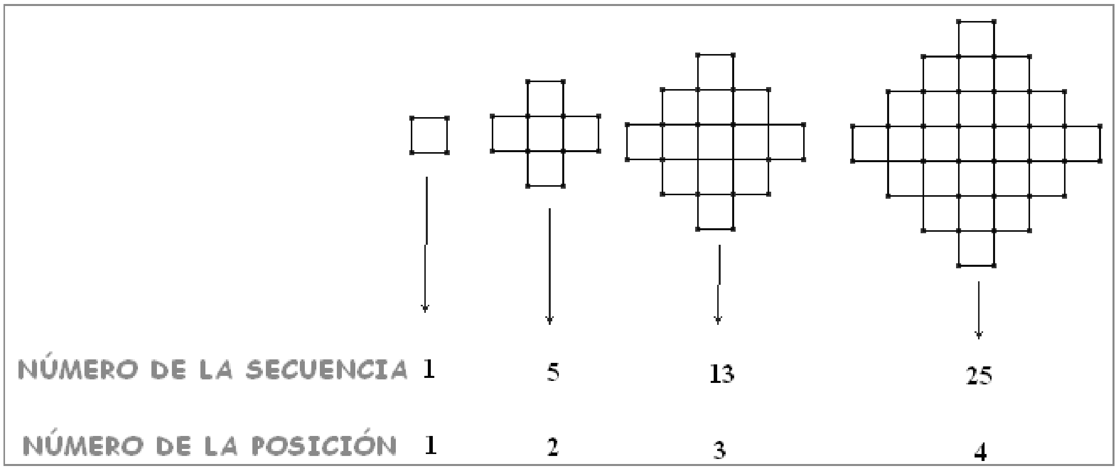


Ilustración 32. Secuencia geométrica y su correspondiente secuencia aritmética.

Sugerencia: antes de contestar las preguntas, el docente deberá proponer al estudiante que realice algunos análisis respecto de las visualizaciones geométricas detectadas en cada figura.

Responde las siguientes preguntas:

- Analiza: ¿cuál es el patrón de regularidad de la anterior secuencia?, escríbelo con tus propias palabras, y responde: ¿Qué cambios a nivel aritmético y geométrico ocurren en la secuencia?
- ¿Cuántos cuadrados, como el de la posición 1, contiene la figura ubicada en la posición 7 construida siguiendo la misma secuencia?
- Si se continúa el patrón dado en las figuras, entonces: ¿Cuántos cuadrados, como el ubicado en la posición 1, contiene la figura que está ubicada en la posición 8?

Conjetura temporal: Realiza un proceso de generalización a cerca del número de cuadrados y el número de la posición de la figura, expresable mediante una ecuación algebraica.

A.2.7. Actividad # 7: Razonamientos inductivos en la búsqueda de una conjetura del número de las diagonales de un polígono cualesquiera

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cómo puedes obtener una regla de formación para el cálculo de las diagonales de un polígono de cualquier número de lados? ¿Cómo justificarías ante tus compañeros la regla de formación encontrada por ti?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Realizar conscientemente procesos de razonamientos inductivos materializados en la construcción de una regla de formación de las diagonales de un polígono de cualquier número de lados.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Elaborar conscientemente procesos de razonamientos inductivos a partir de la construcción gráfica de polígonos y del trazo y conteo sistemático del número de las diagonales.** **Completar correctamente las conjeturas de los cuadros propuestos.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba, ostensiva y gráfica o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad y construir conjeturas alrededor de las situaciones.**

Estrategias empleadas para conjeturar: HALLAZGO DE REGULARIDADES GEOMÉTRICAS O ARITMÉTICAS: Establecer regularidades en las figuras geométricas establecidas. En algunos casos las regularidades se establecen mediante comparaciones. El uso de regularidades nos ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no podemos tener en la mano.

Dado un polígono de tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve lados, cuántas diagonales se le pueden trazar. Realice el dibujo geométrico para cada caso, llene una tabla de doble entrada en donde se relaciona el número de lados del polígono con el número de diagonales y posteriormente genere una regla de formación en términos del polígono de "n" lados y su número de diagonales.

Sugerencia: emplee algunas visualizaciones geométricas para razonar sobre el número de diagonales de un triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono, octágono, nonágono, decágono,….

Posteriormente sistematice la información obtenida en el Cuadro 19.

Nombre- polígono	Número de vértices del polígono	Número de diagonales que salen por cada vértice	Total de Número de diagonales
Triángulo			
Cuadrilátero			
Pentágono			
Hexágono			
Heptágono			
Octágono			
Nonágono			
Decágono			
Eneágono (polígono de n lados)	***Fórmula en términos de n del número de vértices:***	***Fórmula (en términos de n) del número de diagonales que salen por cada vértice del polígono:***	***Fórmula (en términos de n) del número de diagonales***

Cuadro 19. Sistematización de conjeturas del número de diagonales de un polígono.

Ahora realice un conteo de las diagonales que parten de cada uno de los vértices, sin contarlos dos veces y escribe toda la suma de los números que aparecen, has posteriormente una conjetura para calcular el número de diagonales de un polígono de cien lados. Para ello emplee el Cuadro 20.

Nombre- polígono	Suma de todos los números de diagonales que salen de cada uno de los vértices: Escríbela en forma sistemática
Triángulo	
Cuadrilátero	
Pentágono	
Hexágono	
Heptágono	
Octágono	
Nonágono	
Decágono	
Eneágono (polígono de ene lados)	

Cuadro 20. Conteo de las diagonales que salen de los vértices de un polígono.

A. 3. Tema Nº 1: Inferencias inductivas

En las inferencias inductivas se construyen generalizaciones de enunciados lógicos a partir de la observación y del patrón regular de los casos particulares experimentados. Un caso conocido es la fórmula del matemático Gauss que se emplea para calcular la suma de $"n"$ números naturales (La suma de los $"n"$ primeros números naturales está dada por la fórmula matemática: $\frac{n(n+1)}{2}$). El procedimiento para realizar inducciones es tomar el enunciado inductivo a verificar su veracidad y empezar a tomar ejemplos ilustrativos particulares que lo hagan verdadero, posteriormente encontrar una regla de formación que cobije todos los casos particulares y los casos no experimentados.

A.3.1. Actividad conceptual: Razonamientos inductivos en la búsqueda de una conjetura de los números poligonales

TÓPICO/S GENERATIVO/S	Debate conscientemente: ¿por qué es indispensable el razonamiento inductivo en las siguientes situaciones? ¿Qué posibles observaciones puedes realizar a cerca de los registros geométricos de cada una de las situaciones?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Realizar conscientemente procesos de razonamientos inductivos materializados en la construcción de una regla de formación de los números poligonales.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Elaborar conscientemente procesos de razonamientos inductivos a partir de la construcción gráfica de los números poligonales y del número de puntos que lo conforman de acuerdo al número de la posición, a partir de:** • **Exploración de casos particulares y detección de regularidad.** • **Establecer claramente el patrón de regularidades tanto aritmético como geométrico** • **Construcción de la regla de formación.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir una prueba ostensiva y gráfica o intelectual, que sustente las respuestas dadas de la actividad y construir conjeturas alrededor de los patrones de regularidad y de las reglas de formación alrededor de las actividades.**

Estrategia empleada para conjeturar: HALLAZGO DE REGULARIDADES GEOMÉTRICAS O ARITMÉTICAS: Establecer regularidades en las figuras geométricas establecidas. En algunos casos las regularidades se establecen mediante comparaciones. El uso de regularidades nos ayuda a extrapolar y averiguar información de datos que no podemos tener en la mano.

A.3.1.1. Arreglo geométrico de los números triangulares

Dada la siguiente secuencia infinita geométrica de triángulos, los cuales han sido formados a partir del número de puntos que aparece en cada caso. Ver Ilustración 33.

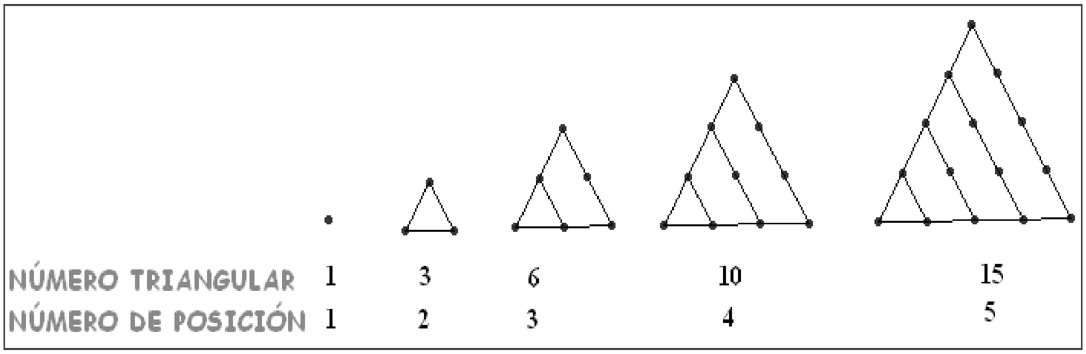


Ilustración 33. Secuencia geométrica y aritmética referente a los números triangulares.

Elabore una tabla estableciendo una correspondencia uno a uno con los números de las posiciones y los números triangulares, completar la siguiente tabla de doble entrada y a partir de los resultados genere una regla de formación en términos de la posición enésima "n".

Número de la posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Números triangulares	1	3	6	10	15					

¿Qué relaciones puedes establecer entre la secuencia geométrica y la secuencia aritmética de los números triangulares?

A.3.1.2. Arreglo geométrico de los números cuadrados

Dada la siguiente secuencia infinita geométrica en donde se construye un cuadrado a partir del número de puntos. Ver la Ilustración 34.

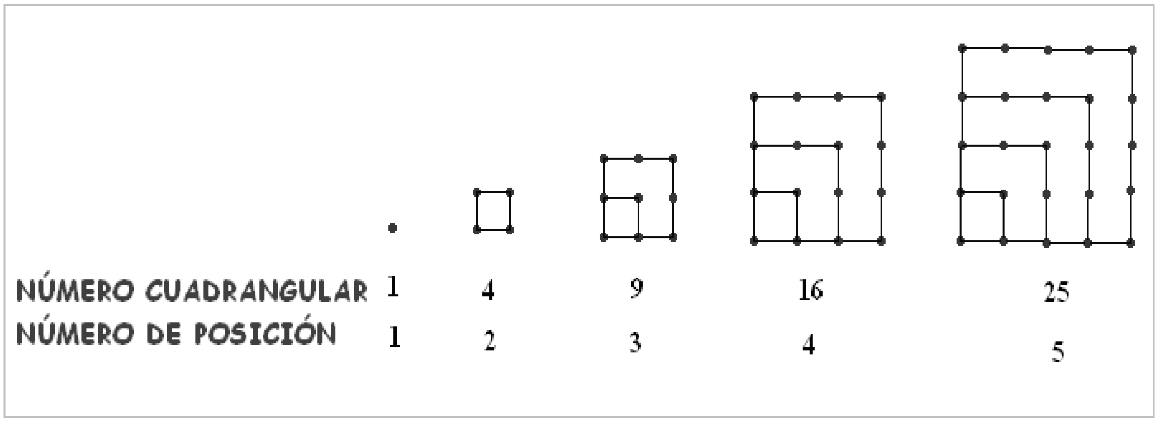


Ilustración 34. Secuencia geométrica y aritmética referente a los números cuadrados.

Llena la siguiente tabla de doble entrada y posteriormente a partir de los resultados obtenidos razona una regla de formación (ecuación algebraica) en términos de la posición enésima: "n"

Número de la posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Números cuadrangulares	1	4	9	16	25					

¿Qué relaciones aritméticas y geométricas puedes establecer entre la secuencia geométrica y la secuencia aritmética de los números cuadrados?

A.3.1.3. Arreglo geométrico de los números pentagonales

Dada la siguiente secuencia infinita geométrica en donde se construyen pentágonos a partir del número de puntos según su posición. Ver la Ilustración 35.

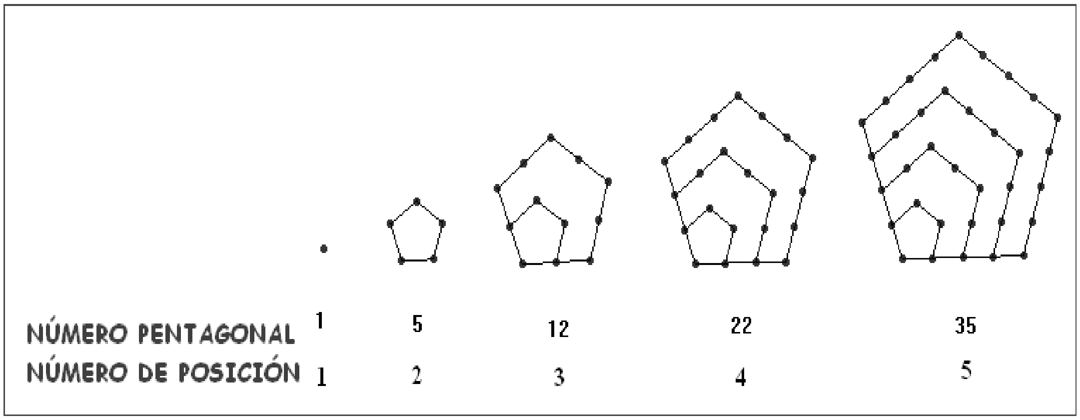


Ilustración 35. Secuencia geométrica y aritmética referente a los números pentagonales.

Llena la siguiente tabla de doble entrada y posteriormente a partir de los resultados obtenidos razona una regla de formación en términos de la posición enésima: "n"

Número de la posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Números pentagonales	1	5	12	22	35					

¿Qué relaciones puedes establecer entre la secuencia geométrica y la secuencia aritmética de los números pentagonales?

A.3.1.4. Arreglo geométrico de los números hexagonales

Proporcionada la siguiente secuencia infinita geométrica en donde se construyen hexágonos a partir del número de puntos. Ver la Ilustración 36.

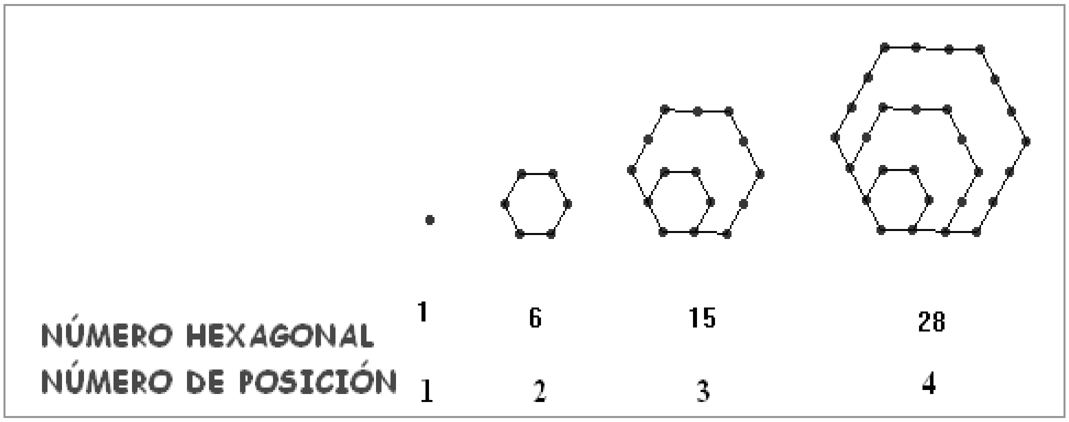


Ilustración 36. Secuencia geométrica y aritmética referente a los números hexagonales.

Llena la siguiente tabla de doble entrada y posteriormente a partir de los resultados obtenidos razona una regla de formación en términos de la posición enésima: "n"

Número de la posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n
Números hexagonales	1	6	15	28					153	

¿Qué relaciones puedes establecer entre la secuencia geométrica y la secuencia aritmética de los números hexagonales?

Te propongo ahora que construyas los números heptagonales y octagonales y completa el Cuadro 21 y realiza comparaciones entre los distintos números poligonales. Además de hacer reflexiones sobre las tablas construidas anteriormente

NÚMERO DE LA POSICIÓN	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	GENERALIZACIÓN: REGLA DE FORMACIÓN PARA EL NÚMERO POLIGONAL DE LA POSICIÓN: "n"
TRIANGULAR (3)											
CUADRANGULAR (4)											
PENTAGONAL (5)											
HEXAGONAL (6)											
HEPTAGONAL (7)											
ENEAGONAL (n)											

Cuadro 21. Sistematización de las conjeturas encontradas en los números poligonales.

En conclusión, descubra sobre las visualizaciones realizadas a cada una de las filas y columnas del cuadro y realice algunas conjeturas temporales y trata de hacerle una prueba para validar el razonamiento que muestra su veracidad.

A.4. Tema Nº 2: Conceptos básicos de lógica y de razonamientos deductivos

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Son importantes los enunciados en la matemática? ¿Por qué realizar un estudio detallado de las proposiciones matemáticas? ¿Qué comprensiones tendrás a partir del estudio de los enunciados matemáticos?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Comprender a qué se le llama proposición en matemáticas y determinar la veracidad de algunos enunciados a partir de justificaciones.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Comprender cuáles son proposiciones matemáticas y cuáles no, y analizar los valores de verdad de algunas de ellas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Escribir el ¿por qué? del valor de verdad de cada una de las proposiciones presentadas en la actividad.**

Estrategias empleadas para conjeturar: PRUEBAS DE VALIDACIÓN: Realizar conscientemente pruebas de validación y procesos de justificación de los enunciados.

A.4.1. Conceptualización de una proposición en matemáticas

Según Manzano & Huertas (2004, pág. 10) una proposición matemática: *"Es un enunciado del cual podemos garantizar o que es verdadero o que es falso, pero no ambos valores de verdad en simultáneo. Una proposición se caracteriza en su semántica por la ausencia de ambigüedad".*

Es aquel enunciado o expresión de la que puede decidirse su verdad ó falsedad empíricamente o por medio de una verificación lógica.

Ejemplo ilustrativo

- "Apartadó es uno de los municipios de la zona de Urabá y pertenece al departamento de Antioquia en Colombia".

Este es un enunciado verdadero en el mundo real, aunque algunos tal vez no lo sepan. Se comprueba consultando en una enciclopedia o visitando tal región.

- "Treinta y uno es un número natural únicamente divisible por sí mismo y por uno". Este enunciado aritmético es: ______________________.

  ¿Por qué?

  ____

- "Un cuadrado es un cuadrilátero convexo (esto es, sin concavidades) de cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos". Este enunciado geométrico es: ______________________.

  ¿Por qué?

  ____

- "La suma de los "n" primeros números naturales está dada por la ecuación matemática: $\frac{n(n+1)}{2}$. Este enunciado aritmético es: ______________________.

  ¿Por qué?

  ____

- "**Si** Jesús es el hijo de José y Juan es el hijo de Jesús, **entonces** José es el abuelo de Juan". Este enunciado es: ______________________.

  ¿Por qué?

  ____

A.4.2. Actividad conceptual referida al concepto de proposición y de valor de verdad[31]

Dadas las siguientes expresiones, justificar mediante procedimientos matemáticos y argumentar si se trata de una proposición o no, y en el caso de que lo sea, determinar su valor de verdad mediante procedimientos que lo validen.

Sugerencia: en cada una de las proposiciones subrayar con lápices de colores, las palabras claves que hacen referencia a conceptos matemáticos.

1. Algunos números primos son pares.

   ____

   ¿Recuerdas cuál es la definición de un número primo?

   Exprese la totalidad de números que son primos y pares simultáneamente.

   ____

2. El número decimal que contiene exactamente una cifra entera y cuatro decimales: $3{,}1416$ es: irracional.

   ____

   Escribe algunos números racionales. ¿Es posible escribir algunos números irracionales en el papel mediante escritura decimal?, ¿por qué?

   ____

3. El área de un triángulo cuya base mide $4cm$ y cuya altura mide $\sqrt{2}cm$ es: $2\sqrt{2}cm$

   ¿Cómo se calcula el área de un triángulo?

   ____

[31] Mediante la siguiente actividad conceptual se pretende repasar algunos enunciados matemáticos y sus valores de verdad, empleados en el tránsito por la matemática escolar de la Educación Básica y Media.

4. Un cubo tiene seis caras cuadradas, no necesariamente iguales.

¿Qué condiciones hace que un cubo sea una figura geométrica sólida y no plana?

¿Cuántas caras, vértices y aristas tiene un cubo?

5. El número de maneras en que puede vestirse una chica que posee tres pantalones, cuatro camisetas y cinco pares de zapatos es veinte[32].

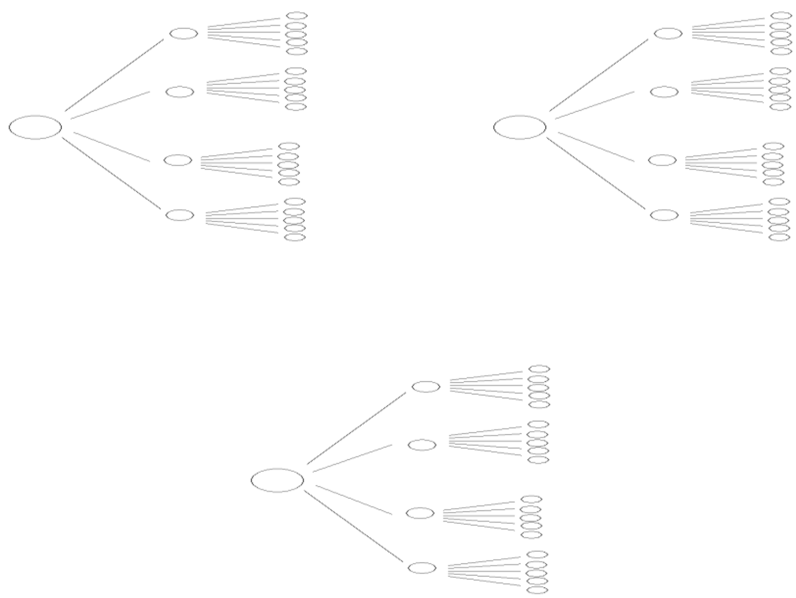


Ilustración 37. Diagrama de árbol para justificar la actividad 5.

[32] Sugerencia: Emplee el siguiente diagrama de árbol como el presentado en la Ilustración 37, para la actividad anterior en donde se muestren gráficamente todas las posibles formas de vestirse la chica. Trate de interpretar el diagrama, indicando cuáles elipses corresponden a las camisas, cuáles a los pantalones y cuáles a los pares de zapatos.

6. El término décimo tercero que corresponde a la secuencia de números naturales: $2,5,8,\ldots,$ es: 48.
   Piensa y construye un arreglo geométrico para la anterior secuencia.

   ____

   ¿Cuál número ocupa la posición 100 en la anterior secuencia?

   ____

7. El número de divisores positivos que corresponde al número 120, es siete[33].

¿Recuerdas las definiciones de divisores y de múltiplos? Establece las diferencias.

____

¿Cómo podemos saber cuántos divisores positivos tiene el número 720, sin determinarlos uno a uno?

Conjetura temporal: ¿Qué enunciado general puede hacerse respecto del número de divisores de un número y cuál es su respectiva descomposición factorial?

____

8. Al realizar la suma: $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29+31+33$ da como resultado: 17^2. Ver la sugerencia.[34]

Piensa y construye un arreglo geométrico para interpretar dicha suma.

____

[33] Sugerencia: toma por lo menos cinco números compuestos de tres cifras, tales como: 720, 230, 210, 540, 990, 330 y 410, y posteriormente descompone a cada uno de ellos en sus respectivos factores primos y trata de buscar relaciones entre los exponentes de cada factor primo y el numero de divisores del número.

[34] Sugerencia: para realizar algunos razonamientos inductivos sobre el enunciado anterior, comienza primero sumando los dos primeros números impares, posteriormente los tres primeros y así sucesivamente. Luego Escribe tus observaciones y conjeturas referentes a este enunciado, puedes usar un cuadro de doble entrada con la ayuda de tu docente.

Emplee un razonamiento inductivo para responder: ¿Cuál es la suma de los primeros mil números impares?

____

9. La expresión algebraica: $2(x+2)$ es equivalente al enunciado: “el doble de x, más dos”.

____

¿Cuál es el enunciado equivalente a la expresión: $2x+2$?

____

10. La ecuación $2x^2+3=5$ tiene como única solución: $x=1$ en el conjunto de los números enteros.

¿Qué interpretación puedes dar tú a la anterior ecuación en el plano cartesiano?

Has cambios al enunciado para hacerlo verdadero si es falso, y cambios para que sea falso si es verdadero.

A.5. Tema Nº 3: Clasificación de proposiciones y tipos de conectivos lógicos

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cuáles son las estructuras sintácticas de las proposiciones matemáticas? ¿Qué otras estructuras sintácticas, distintas a las presentadas aquí, encuentras tú en la matemática?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Diferenciar entre proposiciones conjuntivas, disyuntivas, condicionales y bicondicionales en sus estructuras sintácticas y mediante los valores de verdad que adoptan cada una de ellas.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Construir tablas de verdad para justificar enunciados matemáticos en donde se hacen presente algunas estructuras sintácticas como las aquí presentadas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Emplear tablas de verdad para establecer procesos de validación en las situaciones propuestas.**

Estrategias empleadas para conjeturar: COMPRENSIÓN DE LA SINTAXIS DE ENUNCIADOS: La lógica, conectivos lógicos y cuantificadores de los enunciados.

Las proposiciones las podemos clasificar en: proposiciones atómicas, proposiciones moleculares.

A.5.1. Proposiciones abiertas

Se emplea dicha designación para nombrar a las expresiones lógicas conocidas como funciones proposicionales. En estas no puede decidirse a cerca de su valor de verdad en tanto no se recurra a ciertas formas de atribución de valor de las variables que la integran. A pesar de que su forma de construcción o sintaxis sea correcta.

Ejemplo ilustrativo

- x es la capital de Colombia.

- $x^2 \geq 5$.

Estas dos expresiones son proposiciones abiertas o funciones proposicionales, ya que sus variables no están explicitadas de antemano.

A.5.2. Proposiciones atómicas o simples

Son aquellas expresiones o enunciados en la que no se haya ningún conectivo lógico, tales como: “y”, “o”, “Si… entonces…”, “si y sólo si…” y “no es cierto que…”.

Ejemplo ilustrativo de proposiciones atómicas

- Carlos es el mejor estudiante de matemáticas en el curso de razonamiento lógico matemático.

- El número dos es primo.

- Un triángulo tiene tres segmentos como lados.

A.5.3. Proposiciones moleculares o compuestas

Son aquellos enunciados en cuya composición intervienen por lo menos un conectivo lógico y éstos aparecen uniendo proposiciones atómicas.

Ejemplo ilustrativo de proposiciones compuestas

Discute la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones compuestas:

- El número dos es primo **y** par.

  ____

- Un cuadrado es un cuadrilátero equilátero **y** equiángulo.

  ____

¿Recuerdas qué es un polígono equilátero **o** equiángulo, en general?

____

- $2 \leq 5 \text{ y } 5 > 8.$

¿A qué clases de relaciones hace alusión implícitamente la anterior proposición y entre qué objetos matemáticos?

____

A.5.4. Conectivos lógicos

A.5.4.1. Conectivo Conjunción

La conjunción es un conectivo lógico binario, puesto que siempre une dos proposiciones ya sean atómicas o moleculares; dicho conectivo lógico tiene el significado semántico de: "**y**". Se simboliza: $P \wedge Q$**,** en donde: P**,** Q son proposiciones atómicas o simples.

"Una proposición conjunción es verdadera sólo cuando las proposiciones que la componen lo son".

Ejemplo ilustrativo de proposición conjuntiva:

- El número 13 es primo **y** el número 2 es par.

A.5.4.2. Conectivo Disyunción

La disyunción es un conectivo lógico binario, dicho conectivo tiene el significado semántico de: "**O**". Se simboliza: $P \vee Q$ en donde:

P y Q son proposiciones atómicas o simples.

"Una proposición disyunción es falsa sólo cuando ambas proposiciones lo son".

Ejemplo ilustrativo de proposición disyuntiva

El número 13 es primo **o** el número 2 es par.

A.5.4.3. Conectivo Condicional

El condicional es un conectivo binario, dicho conectivo tiene el significado semántico de: "**Si…entonces…**".

Un condicional se simboliza así: $P \rightarrow Q$ en donde: P es la proposición antecedente y Q es la proposición consecuente.

"Una proposición condicional es falsa sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso"

Ejemplo ilustrativo de proposición condicional

Si un triángulo rectángulo es isósceles, **entonces** sus ángulos son: 45º- 90º- 45º.

Dibuje un triángulo con las condiciones anteriores empleando la regla y el transportador de ángulos.

A.5.4.4. Conectivo Bicondicional

El bicondicional es un conectivo binario, dicho conectivo tiene el significado semántico de:

"**Si y sólo si…...**". Un bicondicional se simboliza: $P \leftrightarrow Q$

“Una proposición bicondicional es verdadera sólo cuando ambas proposiciones son o bien verdaderas en simultáneo, o bien falsas en simultáneo”.

Ejemplo ilustrativo de proposición bicondicional

Un triángulo es equilátero **si y sólo si** las medidas de sus lados son iguales.

A.5.5. Actividad conceptual: Tabla de verdad de la conjunción, disyunción, condicional y bicondicional

Con la ayuda de tu docente construye las tablas de verdad de la conjunción, disyunción, condicional, bicondicional, de la contradicción y del tercero excluido y luego da un ejemplo particular semántico para cada fila de cada tabla de verdad, para ello tome a:

P: ***“Todo cuadrado es rombo”***

Q: ***“Todo rombo es un cuadrilátero equiángulo”***

A.5.5.1. Tabla de verdad de la conjunción, disyunción y condicional

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$
V	*V*			
V	*F*			
F	*V*			
F	*F*			

A.5.5.1.1. Semántica particular de una conjunción

$P \wedge Q$

$P \wedge \neg Q$

$\neg P \wedge Q$

$\neg P \wedge \neg Q$

A.5.5.1.2. Semántica particular de una disyunción

$P \vee Q$

$P \vee \neg Q$

$\neg P \vee Q$

$\neg P \vee \neg Q$

A.5.5.1.3. Semántica particular de un condicional

$P \rightarrow Q$

$P \rightarrow \neg Q$

$\neg P \rightarrow Q$

$\neg P \rightarrow \neg Q$

A.5.5.2. Tabla de verdad del bicondicional

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	$P \leftrightarrow Q$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

A.5.5.2.1. Semántica particular de un bicondicional

$P \leftrightarrow Q$

$P \leftrightarrow \neg Q$

$\neg P \leftrightarrow Q$

$\neg P \leftrightarrow \neg Q$

A.5.5.3. Tabla de verdad de la contradicción

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
V	*F*	
F	*V*	

A.5.5.3.1. Semántica particular de una contradicción

$P \wedge \neg P$

$\neg P \wedge P$

A.5.5.4. Tabla de verdad de una tautología

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
V	*F*	
F	*V*	

A.5.5.4.1. Semántica particular de la negación de una contradicción (tercero excluido, Semántica particular de una tautología):

$P \vee \neg P$

$\neg P \vee P$

A.5.6. Actividad conceptual: Razonamientos deductivos y tablas de verdad

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Cómo puedes por medio de una tabla de verdad justificarte ante tus compañeros, a cerca de una actividad propuesta en la clase de matemáticas?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Elaborar tablas de verdad para establecer procesos de validación de enunciados.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Construir tablas de verdad para justificar enunciados matemáticos en donde se hacen presente estructuras sintácticas como las aquí presentadas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Emplear tablas de verdad para establecer procesos de validación en las situaciones propuestas.**

Estrategias empleadas para conjeturar: establecer pruebas deductivas y de criterios de certeza a los enunciados conjeturados y posibles alrededor de una actividad y los enunciados propuestos.

Emplear las tablas de verdad de la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional para resolver situaciones en contexto lógico, con el fin de averiguar el valor de verdad de una proposición o de construir una tabla de verdad de un enunciado molecular interpretando su resultado.

Un padre le dice a su hijo: $P \rightarrow Q$**: "Si apruebas el grado once, entonces te regalaré un carro".**

Sugerencia: simular la actividad a partir de la personificación del padre y del hijo, mediante pares de compañeros de la clase.

De acuerdo con la actividad anterior, aceptando que la proposición condicional anterior es verdadera, trata de responder a las siguientes actividades:

- Si el padre no le regala el carro a su hijo, es porque:

____

- Si el padre le regala el carro a su hijo es porque:

____

- ¿Es posible que el padre regale el carro al hijo y éste no haya aprobado el grado once?

____

- ¿Es posible que el hijo apruebe el año y el padre no regale el carro a su hijo?

____

- ¿Es posible que el hijo no apruebe el año o el padre le regale un carro?

____

A.6. Tema Nº 4: Análisis del condicional y de las condiciones necesarias y suficientes

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Es lo mismo una causa que una consecuencia?, ¿Es lo mismo una condición necesaria que una condición de suficiencia?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Comprender la estructura sintáctica y semántica del enunciado condicional.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Analizar las estructuras semánticas de enunciados condicionales y diferenciar entre condiciones suficientes y necesarias.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Resolver situaciones en donde se hace hincapié o bien, por condiciones suficientes, o bien por condiciones necesarias o condiciones necesarias y suficientes.**

Estrategias empleadas para conjeturar: identificar las causas y consecuencias en un enunciado lógico matemático y construir a partir de causas posibles consecuencia derivadas y a partir de las consecuencias las posibles causas que la producen.

- Realizar conceptualizaciones a cerca de la proposición condicional y de las variantes lógicas equivalentes a ésta.

A.6.1. Variantes lógicas asociadas a la proposición condicional

Supóngase que un adulto le dice a un chico: ***"Si haces las tareas entonces te daré un regalo"***

Luego el chico deduce las siguientes expresiones **que** son las**: Variantes lógicas asociadas a la proposición condicional.**

En el Cuadro 22 se presentan las distintas variantes de la anterior proposición condicional.

<table>
<tr><td colspan="5">"Si haces las tareas, entonces te daré un regalo"</td></tr>
<tr><td colspan="2">CONSECUENCIA</td><td colspan="2" rowspan="2">es necesario para</td><td>CAUSA</td></tr>
<tr><td colspan="2">Dar un regalo</td><td>que el chico haga las tareas</td></tr>
<tr><td colspan="2">causa</td><td colspan="2" rowspan="2">es suficiente para</td><td>consecuencia</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hacer las tareas</td><td>darle un regalo al chico</td></tr>
<tr><td colspan="2">consecuencia</td><td colspan="2" rowspan="2">siempre y cuando</td><td>causa</td></tr>
<tr><td colspan="2">Se le dará un regalo, al chico,</td><td>haga las tareas</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Basta que</td><td>causa</td><td rowspan="2">Para:</td><td>consecuencia</td></tr>
<tr><td>el chico haga las tareas,</td><td>darle un regalo</td></tr>
<tr><td rowspan="2">CONTRARRECÍPROCO</td><td rowspan="2">Si no</td><td>consecuencia</td><td rowspan="2">es porque no:</td><td>causa</td></tr>
<tr><td>se le da al chico un regalo,</td><td>hizo la tarea</td></tr>
</table>

Cuadro 22. Variantes lógicas de un condicional

A.6.2. Actividad conceptual: Variantes lógicas de la proposición condicional

Dadas las siguientes proposiciones condicionales escriba todas las posibles variantes lógicas equivalentes a la dada inicialmente. Señale posteriormente después de acabar cada numeral de la actividad: cuál de los enunciados es comprensible para usted. ¿Por qué?, analiza también en que posiciones queda la causa y la consecuencia que conforman el condicional.

1. **Si** un número es divisible por dos (2), **entonces** dicho número es par.
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____

1. **Si** un cuadrilátero tiene sus cuatro ángulos iguales, **entonces** es un rectángulo.
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____

2. Alimentarse bien **es necesario** para mantener una buena salud.
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____
   * ____

3. **Si** el avión se retrasa, **entonces** llegaré tarde a la ciudad.

*____

*____

*____

*____

*____

4. **Si** un cubo en una de sus caras tiene escrito un número par, **entonces** en las otras no tendrá un número par.

*____

*____

*____

*____

*____

A.7. Tema Nº 5: Explicación de las reglas de inferencias deductivas

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Has aprendido en tus estudios cuáles son las reglas para poder argumentar en matemáticas?, ¿Crees qué son importantes?, ¿Por qué?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Comprender cada una de las estructuras sintácticas y semánticas de las reglas de inferencia.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Elaborar con validez argumentaciones matemáticas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Resolver argumentaciones válidas referentes a las situaciones propuestas.**

Estrategias empleadas para conjeturar: conjeturar enunciados a partir de las reglas de inferencia, proponiendo a los estudiantes hipótesis para que hagan búsqueda de posibles consecuencias.

Conceptualizar los esquemas lógicos sintácticos de las reglas de inferencia a partir de ejemplos ilustrativos discursivos semánticos cotidianos.

A.7.1. Reglas de Inferencia

Las reglas de inferencia nos sirven para que, a partir de un conjunto de hipótesis o premisas tomadas inicialmente, se puedan dar conclusiones lógicas de estas. A continuación se enuncian las reglas de inferencia empleadas en los razonamientos lógicos matemáticos.

A.7.1.1. Modus Ponendo Ponens

	$P \to Q$	PREMISAS
	P	
CONCLUSION:	Q	

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $\left[(P \to Q) \wedge P\right] \Rightarrow Q$

Ejemplo ilustrativo

$P \to Q$: "Si gano el examen de admisión de la universidad, entonces estudiaré el próximo año licenciatura en idiomas".

P:"Gané el examen de admisión de la universidad", por tanto:

La conclusión o inferencia derivada de las anteriores hipótesis es:

Q: ***"Estudiaré el próximo año licenciatura en idiomas".***

A.7.1.2. Modus Tollendo Ponens

	$P \vee Q$	PREMISAS
	$\neg P$	
CONCLUSION:	Q	

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $\left[(P \vee Q) \wedge \neg P\right] \Rightarrow Q$

Ejemplo ilustrativo

$P \vee Q$: "Voy a Puerto Berrío o a Urabá".

$\neg P$: "No iré a puerto Berrío", por tanto:

La conclusión o inferencia derivada de las anteriores hipótesis es:

Q: ***"Voy a Urabá".***

A.7.1.3. Modus Tollendo Tollens

$$\begin{array}{rl} P \to Q & \textbf{PREMISAS} \\ \neg Q & \\ \hline \textbf{CONCLUSION: } \neg P & \end{array}$$

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $[(P \to Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$

Ejemplo ilustrativo

$P \to Q$: "Si ganas tu año de estudios, entonces te daré un paseo como regalo".
$\neg Q$: "No te daré el paseo como regalo", por tanto:

La inferencia derivada de las anteriores hipótesis es:

$\neg P$: ***"No ganaste tu año de estudios".***

A.7.1.4. Transitividad en la Implicación o Silogismo Hipotético

$$\begin{array}{rll} & P \to Q & \textbf{PREMISAS} \\ & Q \to R & \\ \hline \textbf{CONCLUSION:} & P \to R & \end{array}$$

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \Rightarrow (P \to R)$

Ejemplo ilustrativo

$P \to Q$: "Si tengo dinero, entonces compraré una finca en el Suroeste de Antioquia".

$Q \to R$: "Si compro una finca en el Suroeste de Antioquia, entonces estudiaré Ingeniería de Sistemas, en la Seccional Suroeste de la Universidad de Antioquia":

Por tanto, la inferencia derivada de las anteriores hipótesis es:

$P \to R$: ***"Si tengo dinero, entonces estudiaré Ingeniería de Sistemas, en la Seccional Suroeste de la Universidad de Antioquia".***

A.7.1.5. Inferencia Conjuntiva o Conjunción

$$\begin{array}{rll} & P & \\ & Q & \textbf{PREMISAS} \\ \hline \textbf{CONCLUSIÓN:} & P \wedge Q & \end{array}$$

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \wedge Q)$

Ejemplo ilustrativo

P: **“**Compraré un caballo”**.**

Q: “Pasaré por la casa en la noche”

Por tanto, la inferencia que se derivada de la anterior hipótesis es:

$P \wedge Q$: ***“Compraré un caballo y pasaré por la casa en la noche”.***

A.7.1.6. Simplificación en la Conjunción

	$P \wedge Q$	**PREMISA**
CONCLUSIONES:	P	
	Q	

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante las proposiciones moleculares o compuestas, así: $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ **o** $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$

Ejemplo ilustrativo

$P \wedge Q$: “Estudiaré, este año, Matemáticas y el próximo Español”:

Por tanto, la inferencia lógica que se deriva de la anterior hipótesis es:

P: ***“Estudiaré, este año, Matemáticas”.***

Q: ***“Estudiaré el próximo año Español”.***

A.7.1.7. Adjunción

	P	**PREMISA**
CONCLUSIÓN:	$P \vee Q$	

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $P \Rightarrow (P \vee Q)$

Ejemplo ilustrativo

P: "Iré de vacaciones de mitad de año a Sonsón":

Por tanto, la inferencia que se deriva de la anterior hipótesis es:

$P \vee Q$: ***"Iré de vacaciones de mitad de año a Sonsón, o a Caucasia"***

A.7.1.8. Métodos de Casos o Silogismo Disyuntivo

	$P \to R$	
	$Q \to S$	**PREMISAS**
	$P \vee Q$	
CONCLUSION:	$R \vee S$	

La anterior regla de inferencia se puede escribir mediante una proposición molecular o compuesta, así: $[(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q)] \to (R \vee S)$

Ejemplo ilustrativo

$P \to R$: "Si María trabaja este mes, entonces me podrá prestar dinero".

$Q \to S$: “Si Pedro no trabaja el próximo mes, entonces me podrá acompañar al paseo de despedida”.

$P \vee Q$: “María trabaja este mes o Pedro no trabaja el próximo mes”:

Por tanto, la inferencia lógica que se deriva de las anteriores hipótesis es:

$R \vee S$: ***“María me podrá prestar dinero o Pedro me acompañará al paseo de despedida”.***

A.7.2. Actividad conceptual: Aplicación de las reglas de inferencia a enunciados y razonamientos lógicos

Realizar deducciones lógicas a partir de premisas, empleando las reglas de inferencia.
Dadas las siguientes situaciones, simbolice cada enunciado, deduzca todas las posibles conclusiones que se puedan obtener y deduzca la conclusión indicada en cada caso.

- La posterior actividad ha sido tomada de: Jaramillo, Mejía, & Mesa *“**Si** los acuerdos se cumplen, **entonces**, se logra la paz. **Si** se logra la paz**,** el nivel de vida se incrementa. Los enfrentamientos terminan **y** los acuerdos se cumplen. **Si** los problemas sociales se agravan**,** el nivel de vida **no** se incrementa. **Si** los problemas sociales **no** se agravan, **entonces**, la justicia social se alcanza”. (2001, págs. 63-64)*

De las anteriores hipótesis trate de deducir, empleando las reglas de inferencia la siguiente conclusión:

"Los enfrentamientos terminan y la justicia social se alcanza".

- La posterior actividad se ha tomado de Suppes (1988): *"Si Juan gana, entonces Luis o Esteban serán segundos. Si Luis es segundo, entonces Juan no ganará. Si Pedro es segundo, entonces Esteban no será segundo."*

Conclusión:

"Si Juan gana, entonces Pedro no será el segundo".

- La ulterior actividad ha sido tomada de Negrete (2002): *"El fútbol Colombiano está en crisis. Si los jugadores Colombianos son malos y nuestro fútbol está en crisis, Medellín no ganará nunca. Pero Medellín ha ganado campeonatos".*

Conclusión:

"Los futbolistas Colombianos no son malos".

Dadas las siguientes premisas, verifique mediante las reglas de inferencia y de validez, si es posible obtener la conclusión y en consecuencia el argumento es válido.

$P \rightarrow Q$
$S \rightarrow T$ PREMISAS O HIPOTESIS
$Q \rightarrow S$
————————
$T \rightarrow P$ TESIS O CONCLUSIÓN

NOTA: Al finalizar la explicación de las reglas de inferencia se les propondrá a los estudiantes a que construyan contraejemplos ilustrativos de las reglas de inferencia deductiva.

En los siguientes enunciados que se presentan a continuación se dan una serie de premisas con las cuales debe deducirse una conclusión para que se convierta en un argumento válido, si es posible.

- Carlos arregla el daño o José se enojará. José no está enojado. Por tanto:

____

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Carla estudia Biología o Matemáticas. Carla estudia Física pero no estudia Biología. Por tanto:

____

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Si Claudio despierta a Pacho, Juan se enfadará. Pero Juan no está enfadado. Por tanto:

____

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Los estudiantes están en el aula de clases o están en la cafetería. Los estudiantes no están en la cafetería. Por tanto:

____

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- No es cierto que: Alemania no ganará el campeonato mundial. Por tanto:

____

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Si Andrea consigue dinero, Beatriz viaja a Londres. Si Beatriz viaja a Londres, Pacha consigue novio. Por tanto:

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Si Andrea es colombiana, es suramericana. Andrea no es suramericana. Por tanto:

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

- Si estudio entonces gano el año. Si gano el año entonces obtengo un premio. Por tanto:

¿Cuál regla de inferencia has empleado?

Realiza las tablas de verdad de las siguientes proposiciones compuestas dadas a continuación.

- $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
- $[(P \to Q) \wedge P] \to Q$
- $[(P \vee Q) \wedge \neg P] \to Q$
- $[(P \to Q) \wedge \neg Q] \to \neg P$
- $[(P \to Q) \wedge (Q \to R)] \to (P \to R)$
- $[(P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (P \vee Q)] \to (R \vee S)$

¿Cuáles son las interpretaciones y conclusiones de las tablas de verdad realizadas anteriormente?, ¿Qué regularidades encuentras entre las tablas de verdad de cada una de las proposiciones anteriores?, ¿Qué relaciones y **regularidades** encuentras entre estas proposiciones con las reglas de inferencia?

Conjetura temporal: ¿Qué visualizaciones emergen de las anteriores tablas de verdad?, ¿puedes afirmar contundentemente alguna afirmación?, ¿trata de realizar algunas validaciones de lo que afirmaste?

A.8. Tema Nº 6: Estudio de los cuantificadores universal y existencial

TÓPICO/S GENERATIVO/S	¿Todos los elementos de cualquier conjunto cumplen con la propiedad característica de cualquier conjunto? ¿Cómo podemos nombrar mediante palabras la cantidad de objetos matemáticos que cumplen con una cierta característica?
METAS DE COMPRENSIÓN	**Diferenciar entre una proposición cuantificada universal y existencialmente.**
DESEMPEÑOS DE COMPRENSIÓN	**Diferenciar semánticamente y a partir de la propiedad característica de los conjuntos y sus elementos, los cuantificadores universales o existenciales de las proposiciones matemáticas.**
VALORACIÓN CONTINUA Y FINAL	**Debatir las cuantificaciones de los enunciados propuestos.**

Estrategias empleadas para conjeturar: debatir la cuantificación de los enunciados matemáticos dados y hacer reconstrucciones a los enunciados.

Según Manzano & Huertas (2004) definen los cuantificadores como:

> *"[…] expresiones del lenguaje que se utilizan para decir una propiedad de todos los elementos de un conjunto, a estos cuantificadores los llamamos: universales, en tanto que los cuantificadores existenciales se utilizan para mencionar que al menos un elemento cumple una cierta propiedad".*

A.8.1. Cuantificador Universal

El cuantificador hace referencia a la totalidad de elementos de un conjunto que cumplen una cierta propiedad característica.

Según Negrete (2002) se define: *“El cuantificador universal se considera una propiedad de las proposiciones, cuando al cuantificar sus términos, la referencia a los elementos de un conjunto abarca a todos ellos, se dice que su cantidad es universal”.*

La siguiente es la lista que resume las expresiones semánticas comúnmente utilizadas para expresar el cuantificador universal:

Para cada…

Cada…

Para todo…

Todo…

Cualquiera…

Ningún…: Que es la negación del universal.

El cuantificador universal se simboliza con: $\forall x$

EJEMPLO ILUSTRATIVO

- **Todos** los seres humanos tienen sangre.

Sea:

A**:** Conjunto de los seres humanos.

B**:** Conjunto de los seres que tienen sangre

Por tanto la simbolización del anterior enunciado es: $\forall_x \left(A_x \Rightarrow B_x\right)$

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- **Cada** número par es divisible por dos.

P **:** Conjunto de números pares.

D **:** Conjunto de números divisibles por dos.

Por tanto la simbolización del anterior enunciado es: $\forall_x \left(P_x \Rightarrow D_x\right)$

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

Actividad: simboliza cada uno de los siguientes enunciados y dé ejemplos particulares de cada uno de los enunciados.

- **Para todos** los cuadrados se cumple la propiedad de ser rombo.

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- **Cualquiera** que sea el número cuadrado es impar.

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- **Todo** múltiplo de dos es divisible por dos o por cinco.

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

A.8.2. Cuantificador Existencial

Se considera una propiedad de las proposiciones derivada de la cantidad. Cuando al cuantificar sus elementos, la referencia de los elementos no cumple todos con la propiedad de un conjunto, se dice que la cantidad de dicha proposición es existencia o particular.

La siguiente es la lista que resume las expresiones semánticas comúnmente utilizadas para expresar el cuantificador existencial o particular:

Existe…

Hay…

Al menos uno…

Mínimamente uno…

Alguno de…

Algunos…

El cuantificador existencial se simboliza con: $\exists x$

Ejemplo ilustrativo

- Existe un número par que es primo.

P **:** Conjunto de los números pares.

S **:** Conjunto de los números primos.

Por tanto la simbolización del anterior enunciado es: $(\exists_x)(P_x \wedge S_x)$

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- Al menos unos números impares son primos.

I **:** Conjunto de los números pares.

S **:** Conjunto de los números primos.

Por tanto la simbolización del anterior enunciado es: $(\exists_x)(I_x \wedge S_x)$

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- Mínimamente un cuadrado es un rectángulo.

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

- Algunos de los hombres inteligentes son profesionales.

Comentario: discute con tus compañeros de clase si el enunciado anterior es verdadero o falso.

A.8.3. Actividad conceptual: cuantificaciones universales y existenciales

Dadas las siguientes proposiciones, que se encuentran cuantificadas, identifica qué clase de cuantificación se realiza. Y determina su valor de verdad, esto es, si se trata de una proposición cuantificada universalmente bastará tomar un caso que no cumpla la propiedad enunciada en la proposición (contraejemplo), en tanto que si se trata de una proposición cuantificada existencialmente trate de verificar que todos los casos posibles cumplen con la propiedad enunciada en la proposición.

Posteriormente y con la ayuda de su docente, proponga pruebas de validación de las proposiciones.

Sugerencia: Emplee para la validación de los enunciados pruebas ostensivas, esto es materiales concretos o mostraciones que muestren que el enunciado es válido para todos o algunos casos; o pruebas intelectuales, esto es, pruebas en donde se razone deductivamente a partir de las reglas de inferencia y teorías matemáticas pertinentes a la semántica de la proposición. Finalmente, realice la respectiva simbolización de cada uno de los enunciados.

- Todos los rombos son cuadrados.

____

____

- Algunos números compuestos (no primos) tienen solamente dos divisores.

____

____

- Ninguna fracción se puede representar por medio de un decimal de finitas cifras.

- Solamente los números pares mayores que dos son iguales a la suma de dos números primos.

Este enunciado expresa una creencia, es la famosa conjetura de Goldbach, pero aunque ha de ser verdadero o falso, no sabemos exactamente cuál de los dos valores adoptará si finalmente alguien consigue demostrar matemáticamente el enunciado o su negación. Se trata de un enunciado, aunque quizá nunca descubramos su valor de verdad.

- Solamente el cuadrado es rombo.

Recuerdas las definiciones de cuadrado y rombo.

¿Todos los cuadrados son rectángulos?

¿Recuerdas las definiciones de rectángulo?

- Toda área de un polígono se puede descomponer en áreas de triángulos que no se solapan.

Conjetura: Trata de conjeturar, empleando la visualización geométrica: ¿cuál es el patrón de triángulos, con regiones no comunes, en que se puede descomponer una región poligonal?

Sugerencia: para ello sistematiza tus razonamientos en el Cuadro 23 presentado a continuación.

Polígono	Número de triángulos en su región poligonal
Triángulo	
Cuadrilátero	
Pentágono	
Hexágono	
Heptágono	
Eneágono (Polígono de ene-lados)	

Cuadro 23. Sistematización de conjeturas de la descomposición en triángulos (con regiones no comunes) de una región poligonal.

Toda la cantidad de los números naturales de tres cifras en los cuales una cifra se halla repetida dos veces es 235.

Sugerencia: Emplea el Cuadro 24 para sistematizar tus razonamientos.

Cifra que se repite dos veces, (en el número de tres cifras)	Lista de números de tres cifras separados por comas
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	

Cuadro 24. Sistematización de las conjeturas encontradas en los números naturales de tres cifras, en los cuales una cifra se halla repetida en dos veces.

Conjetura: ¿Qué posibles enunciados pueden emerger novedosos de la anterior actividad?, escríbelos.

___

___

- Existen triángulos que tienen dos de sus ángulos iguales.

___

___

- Algunos números reales pueden dividirse por cero.

___

___

- Mínimamente las diagonales de los pentágonos regulares se cortan en el interior formando otros pentágonos.

___

___

Sugerencia: se propone al estudiante que realice varios diseños de pentágonos regulares y que haga el trazo de sus diagonales y que el estudiante haga inferencias respecto de las visualizaciones geométricas encontradas con la proposición existencial presentada.

- Simboliza completamente los siguientes enunciados y discuta su veracidad:

- Algunos números reales positivos son mayores que cero.

___

- Ningún objeto es a la vez redondo y cuadrado.

- Para todo X número real, X=X y X$\geq$X.

- Ningún hombre es totalmente juicioso y totalmente estúpido.

- Hay protoplasmas que son sustancias vivientes.

- No todos los caballos y vacas son cuadrúpedos.

- Todas las cuevas no son refugios.

- Ningún cuento de hadas es una historia cierta.

- Ninguna naranja es dulce o salada.

Resuelve la siguiente actividad sobre una encuesta aplicada a unos estudiantes sobre la preferencia de frutas.

En una encuesta aplicada a un grupo conformado por veinte estudiantes, en donde todos respondieron, se les pregunta por el gusto a las frutas: manzana, cereza y banano. La encuesta arrojó los siguientes datos:

- Tres solamente prefieren la manzana.
- Cinco prefieren solamente la cereza.
- Uno solamente prefiere el banano.
- Ocho prefieren el banano.
- Cuatro prefieren solamente la manzana y la cereza, pero no el banano.
- Dos prefieren solamente la manzana y el banano, pero no la cereza.
- Cuatro prefieren solamente la cereza y el banano, pero no la manzana.

Sugerencia: Emplee el diagrama de Venn (ver Ilustración 38) para sistematizar el razonamiento, designando cada uno de los conjuntos y luego responde las preguntas:

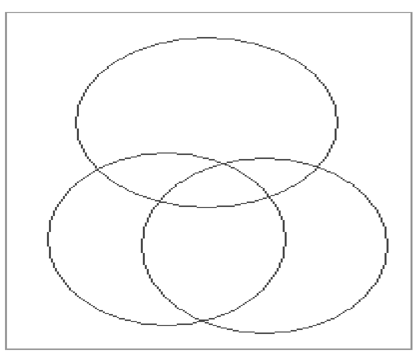


Ilustración 38. Diagrama de Venn que representa la intersección entre tres conjuntos.

- ¿Cuántos estudiantes prefieren las tres frutas?

____

- ¿Cuántos estudiantes prefieren la cereza o el banano, pero no la manzana?

____

- ¿Cuántos estudiantes si prefieren la manzana, entonces les gusta la cereza?

____

- ¿Cuántos estudiantes prefieren solamente el banano?

____

- ¿Cuántos estudiantes prefieren únicamente la cereza?

____

- ¿Cuántos estudiantes prefieren sólo la manzana?

____

- ¿Cuántos estudiantes prefieren la manzana y el banano, pero no la cereza?

____

Conjetura temporal: redacte conjeturas en torno a la actividad anterior y posteriormente mediante pruebas verifique si la proposición es verdadera o si por el contrario es falsa. **Recuerda que es importante en la escritura de los enunciados el manejo de los conectivos lógicos**.

A.9. Actividad conceptual final

- Realizar inferencias lógicas a partir de premisas de enunciados, en los cuales intervienen conectivos lógicos entre sus estructuras sintácticas.

A continuación se presenta algunos problemas lógicos, se recomienda realizar una sistematización de los datos e inferencias obtenidas para lograr eficiencia en tus conclusiones.

1. Una joven asiste a una reunión. Le presentan a cuatro hombres rápidamente, **cada uno** menciona su nombre y el tipo de trabajo al que se dedica. Desgraciadamente a la chica le falló un poco la memoria **y** a la media hora sólo recordaba que había conocido al señor Castro, al señor Botero, al señor Marín y al señor Ramírez. Se acuerda también que uno de ellos es fotógrafo, que hay un tendero, un banquero y un cantante, pero le resulta imposible señalar un nombre para cada uno. Su anfitriona se niega a refrescarle la memoria, pero le propone cuatro pistas. Por fortuna la lógica de la muchacha es mejor que su memoria y, rápidamente, empareja cada hombre con su profesión. ¿Puedes hacerlo tú? Aquí están las pistas.

    - El señor Botero habla con el banquero sobre la posibilidad de obtener un préstamo.
    - El señor Castro conoció al fotógrafo cuando le contrató para hacer las fotografías de su boda.
    - El cantante y el señor Botero son amigos, pero nunca han tenido tratos de negocios.
    - **Ni** el señor Marín **ni** el cantante conocían al señor Ramírez antes de la fiesta.

Sugerencia: El Cuadro 25 te permite registrar cada una de la información que consigas en las deducciones obtenidas. Te aconsejamos que pongas una "***x"*** en la casilla a un dato, indicando que **no** es verdad, y **un punto** en la casilla que corresponda a un dato que **sea verdadero.**

APELLIDO / OFICIO	MARÍN	CASTRO	RAMÍREZ	BOTERO
BANQUERO				
TENDERO				
FOTÓGRAFO				
CANTANTE				

Cuadro 25. Registro de cada una de la información que consigas a partir de las deducciones obtenidas.

2. Cuatro empleados de una empresa de negocios: el presidente, el contador, el vendedor y el tesorero; se apellidan, sin seguir ningún orden en particular: Botero, Paris, Posada y Castro. **Cada uno** de ellos tiene una hermana soltera, empleada como secretaria de uno de los otros tres hombres. Los nombres de los empleados son: Roberto, Martín, Enrique y Gabriel; y los de las secretarias: Roberta, Martina, Enriqueta y Gabriela; sin seguir ningún orden en particular. **Ninguna** secretaria trabaja para el hombre que lleva el mismo nombre propio que ella (o sea que Roberto no trabaja con Roberta, así igual para los otros). Recientemente los cuatro hombres decidieron invitar una noche a sus secretarias al restaurante. **Cada uno** acompañó a su propia secretaria. Apoyándose en las pistas que damos a continuación, intente determinar los nombres completos de los empleados y los nombres de sus secretarias respectivas.

- El señor Botero acompañó a Martina; llegaron al restaurante después que el presidente, pero antes que Enrique y la señorita Castro.
- Gabriela iba acompañada por el tesorero.
- Martina llegó inmediatamente después de Roberto, e inmediatamente antes que el señor Paris; no iba con el contador, que llegó al segundo, acompañando a la hermana de Martín.

Sugerencia: Completar el Cuadro 26, consignando todos los datos propuestos en esta actividad.

Cargo del empleado / Nombre		Presidente	Contador	Vendedor	Tesorero
Roberto					
Enrique					
Gabriel					
Martin					
Castro					
París					
Botero					
Posada					
Secretaria	Enriqueta				
	Roberta				
	Martina				
	Gabriela				

Cuadro 26. Sistematización de los datos propuestos en la actividad.

- Andrés, Lucas, Mauricio, Jorge y Pablo, han decidido vender refrescos y golosinas en el estadio, cada uno de los chicos vende sólo una clase de mercancía. Partiendo de las pistas siguientes, intente determinar el nombre completo de todos ellos y la mercancía que venden.

  - Uno de ellos se apellida Mora
  - Jorge, que no se apellida López, no vende crispetas de maíz
  - El que se apellida Díaz no vende ni gaseosa ni caramelos
  - Los cinco chicos son: Mauricio, Jorge, el que se apellida Soto, el que se apellida Restrepo y el que vende helados
  - El apellido de Andrés no es ni López ni Restrepo. Ni Andrés ni el que se apellida Restrepo venden caramelos.
  - Ni el vendedor de agua ni el vendedor de helados se llaman Paco o se apellidan Díaz.

Sugerencia: Usa el Cuadro 27 que se muestra a continuación. Se sugiere usar una “**X”** en la casilla que indique algo que **no** es verdad y una **“O”** en la casilla que corresponda a un dato que **sea verdadero.**

NOMBRE / PRODUCTO	ANDRÉS	LUCAS	MAURICIO	JORGE	PABLO
GASEOSAS					
AGUA					
HELADOS					
CARAMELOS					
CRISPETAS					

Cuadro 27. Referente a la sistematización de la actividad.

Sugerencia: Consigna en tu cuaderno todas las observaciones que tienes a cerca de las situaciones anteriores.

A.10. Evaluación de inferencias inductivas y deductivas

NOTA: Al finalizar la evaluación se les preguntará a los estudiantes por las estrategias y procedimientos presentados para la solución de los ítems del test. Estas respuestas están consignadas en el archivo llamado: **"trabajo de estrategias"** que aparece grabado en el **CD** que complementa el informe final de investigación.

1. El enunciado: ***"Es agradable estudiar razonamiento lógico matemático, siempre que se tenga una buena compañía"*** es equivalente a:

   a. Es agradable estudiar razonamiento lógico matemático con una buena compañía.
   b. O es agradable estudiar razonamiento lógico matemático, o se tiene buena compañía.
   c. Si se tiene buena compañía, es agradable estudiar razonamiento lógico matemático.
   d. Si es agradable estudiar razonamiento lógico matemático, entonces se tiene buena compañía.

3. David expresa su petición a sus padres para el regalo de niño Dios: "***Quiero un viaje a Andes o una moto".*** La única manera de que sus padres no le cumplen su petición es que:

   a. Le dan los dos regalos.
   b. Le dan solamente un regalo.
   c. No le dan **ninguno** de los regalos.
   d. Le regalan la moto o el viaje.

3. La negación del enunciado***: "Ninguna persona es solidaria"*** es equivalente a:
   a. **No todas** las personas son solidarias.
   b. **Algunas** personas son solidarias.
   c. **Todas** las personas son poco solidarias.
   d. **Todas** las personas **no** son solidarias.

De acuerdo con la siguiente información, conteste las preguntas 4 y 5.

"Si soy mayor de edad, entonces tengo 18 años o más".

4. Tener 18 años o más es una condición:

    a. **Suficiente pero no necesaria** para ser mayor de edad.
    b. **Necesaria pero no suficiente** para ser mayor de edad.
    c. **Necesaria y suficiente** para ser mayor de edad.
    d. **Ni necesaria ni suficiente** para ser mayor de edad.

5. Ser mayor de edad es una condición:

    a. **Suficiente y necesaria** para tener 18 años o más.
    b. **Ni suficiente ni necesaria** para tener 18 años o más.
    c. **Suficiente** para tener 18 años o más.
    d. **Necesaria** para tener 18 años o más.

Con base en la siguiente información conteste las preguntas 6 y 7.

La coordinadora de convivencia de un colegio interrogó a cuatro estudiantes sospechosos de haber hurtado un objeto, obteniendo las siguientes declaraciones:

- Andrea dijo que Pablo es el ladrón.
- Pablo dijo que Juana es la ladrona.
- Camilo dijo que no era el ladrón.
- Juana afirma que Pablo miente al decir que yo soy la ladrona.

Sugerencia: suponga que una de las cuatro declaraciones es verdadera y realice en cada caso grafos para realizar sus inferencias. El docente te puede explicar que es un grafo.

6. Sabiendo que uno de los cuatro es el ladrón y que de sus declaraciones sólo una es verdadera y las demás falsas, el ladrón es:

a. Andrea   b. Pablo   c. Juana   d. Camilo

7. Conociendo que uno de los cuatro sospechosos es el ladrón y que de sus declaraciones solamente una es falsa y las otras verdaderas, el ladrón es:

a. Andrea
b. Pablo
c. Camilo
d. Juan

8. Ser paralelogramo es una condición:

a. **Suficiente pero no necesaria** para ser rectángulo.
b. **Necesaria pero no suficiente** para ser rectángulo.
c. **Necesaria y suficiente** para ser rectángulo.
d. **Ni necesaria ni suficiente** para ser rectángulo.

Contesta, de acuerdo con el siguiente enunciado lógico, la pregunta 9.

Si 1/5 es mayor que 1/50, **entonces** 1/50 es menor que 1/5

9. El contra recíproco del enunciado anterior es:

a. Si 1/50 es mayor o igual que 1/5, entonces 1/5 es menor o igual que 1/50.
b. Si 1/5 es menor que 1/50, entonces 1/50 es mayor que 1/5.
c. Si 1/50 es mayor que 1/5, entonces 1/5 es menor a 1/50.
d. Si 1/50 es menor que 1/5, entonces 1/5 es mayor que 1/50.

De acuerdo con la siguiente información responda las preguntas 10 y 11. (Puedes obtener todas las inferencias de la información en el cuadro adjunto).

La limpieza de los cuartos de un hotel requiere la terminación de cinco procesos. El siguiente cuadro indica la duración de cada proceso en minutos y la secuencia de realización de ellos.

PROCESO	DURACIÓN EN MINUTOS	INICIA
A	14	Simultáneamente
B	26	
C	29	Cuando finalice el proceso A
D	25	Cuando finalice el proceso B
E	28	Cuando finalicen los procesos B y C

10. El tiempo mínimo necesario para realizar la limpieza de los cuartos es:

a. 63 min. b. 71 min. c. 122 min. d. 79 min.

11. Si se incrementa el proceso C en trece minutos, entonces los minutos en que se retrasan la limpieza de los cuartos es:

a. 12 b. 13 c. 84 d. No se modifica

12. la negación del enunciado “Si te portas bien, entonces te llevo al cine” es:

a. Si no te portas bien entonces no te llevo al cine.
b. Si te portas bien entonces no te llevo al cine.
c. Te portas bien y no te llevo al cine.
d. Te porta bien y te llevo al cine.

13. La negación lógica de “ser blanco” es:

a. Ser negro b. No ser blanco c. Ser de color distinto al blanco d. Ser rojo.

14. Hay tres bolsas con las siguientes etiquetas **“bolas rojas”**, **“bolas blancas”** y **“bolas rojas y blancas”**. Las tres etiquetas están equivocadas. ¿Sería posible, sin mirar, saber con toda seguridad el verdadero contenido de cada una de las bolsas, abriendo **sólo una** de ellas y extrayendo sólo una bola y de cuál bolsa?

    Sugerencia: haga una simulación en clase con su docente acatando las condiciones de la actividad. Recuerde que si las etiquetas están equivocadas en cada bolsa, es porque en la bolsa que dice bolas rojas no hay bolas rojas, y así en las demás.

    a. **Si**, de la marcada “bolas rojas”.
    b. **No**, es **necesario** al menos ver el contenido de dos de las bolsas.
    c. **Si**, de la bolsa marcada “bolas rojas y blancas”.
    d. **Si**, de la bolsa marcada “bolas blancas”.

De acuerdo con la siguiente información responda las preguntas 15 a 18. (Puedes obtener todas las inferencias de la información en el cuadro adjunto).

Janeth, Nadia y Claudia tienen dos labores cada una: actriz, modelo, corredora de autos, escultora, detective privado y representante de cosméticos. Se sabe que:

- La escultora y la corredora de autos iban a la escuela con Janeth.
- La modelo compró maquillaje a la representante de cosméticos.
- Claudia le ganó en un juego de tenis tanto a Nadia como a la modelo.
- La actriz y la escultora eran compañeras de cuarto.
- La actriz salía con el hermano de la modelo.
- Nadia le debe a la corredora de autos $ 100000.

Sugerencia: Emplee la siguiente tabla para sistematizar las inferencias arrojadas de la información dada al comienzo de la actividad, colocando una **x** en donde la información no se cumpla y una **o** en donde la información se cumpla.

NOMBRE / LABOR	JANETH	NADIA	CLAUDIA
ACTRIZ			
MODELO			
CORREDORA DE AUTOS			
ESCULTORA			
DETECTIVE PRIVADO			
REPRESENTANTE DE COSMÉTICOS			

15. La chica representante de cosméticos es:

a. Janeth.
b. Claudia.
c. Claudia y Nadia.
d. Nadia.

1. Las labores de Claudia son:

a. Modelo y Actriz. b. Actriz y Corredora de auto. c. Modelo y Corredora de auto.
d. Escultora y Actriz.

2. La chica escultora es:

a. Claudia. b. Nadia. c. Janeth. d. No puede saber

3. Las labores de Janeth son:

a. Modelo y Actriz. b. Actriz y Escultora c. Modelo y Detective privada
d. Escultora y Detective privada.

Anexo B

ANEXO B: PARTICIPACIÓN EN EVENTOS Y CAPÍTULOS DE LIBRO

B.1. PONENCIAS Y CONFERENCIAS

En este anexo se presentan los resúmenes de las ponencias y conferencias que se realizaron en distintos eventos académicos en Colombia y Estados Unidos.

- **Título de la ponencia: "Comprensión de los razonamientos conjeturales, inductivos y deductivos en el marco de la enseñanza para la comprensión".**

  Evento: XVI Congreso Nacional de Matemáticas.

  Lugar: Plaza Mayor, Centro de Convenciones. Medellín.

  Fecha: 16 al 19 de Julio de 2007.

  Resumen: Este informe de comunicación breve hace alusión a la presentación de los avances que se han obtenido hasta el momento de la investigación de corte experimental, referida a la comprensión de los razonamientos conjeturales inductivos y deductivos a partir del marco pedagógico de la enseñanza para la comprensión, marco teórico pedagógico engendrado y desarrollado ampliamente en el Proyecto Cero de la Universidad de Harvard, de donde se ha tenido presente las cuatro dimensiones de la comprensión y los cuatro elementos de la comprensión. Además se soporta la investigación a partir del marco didáctico matemático de Nicolás Balacheff y Lakatos, en lo referente a las conjeturas y los contraejemplos.

- **Título de la ponencia: “Dificultades en la comprensión de las pruebas y demostraciones de enunciados matemáticos, en estudiantes de primeros años de universidad”.**

  Evento: Octavo Encuentro Colombiano de Matemáticas Educativas.

  Lugar: Santiago de Cali, Universidad del Valle.

  Código ISBN: 958-97614-7-2.

  Resumen: La presente comunicación breve está enmarcada dentro del desarrollo del trabajo de investigación en educación matemática desde un diseño experimental, el cual tiene como objetivo principal indagar y realizar aportes en torno al aprendizaje y la enseñanza de la comprensión de las pruebas y demostraciones de enunciados matemáticos. El aspecto central es diseñar una propuesta de intervención pedagógica, que contenga aspectos tales como: conjeturas, contraejemplos, estilos escritos y no escritos de las estructuras o tipos de prueba y demostraciones, entre otros.

  El trabajo de investigación pretende profundizar en la teoría de Nicolás Balacheff, que hace referencia con la enseñanza de la prueba, además, en lo que respecta al marco teórico pedagógico, el estudio se enmarca en la teoría de enseñanza para la comprensión.

- **Título del taller: “Razonamientos Inductivos y deductivos”.**

  Evento: Foro Educativo Nacional, Ministerio de Educación Nacional.

  Lugar: Paipa, Boyacá.

  Fecha: 24, 25 y 26 de octubre de 2006.

Dirección en la Web:
www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles132962_archivo5.pdf -

Objetivos: Realizar argumentaciones lógicas deductivas e inductivas empleando los conceptos de implicación, criterios de validez de una argumentación y valores de verdad que puede adoptar cierto enunciado matemático, además interpretar diferentes enunciados y argumentos propuestos.

Descripción: Realizar inferencias de carácter inductivo en determinadas actividades numéricas, para posteriormente realizar procesos de generalización, en las reglas de formación. En cuanto a las inferencias de carácter deductivo, realizar a partir de premisas en los cuales intervienen conectivos lógicos entre sus estructuras sintácticas.

Proponer conjeturas, conclusiones y argumentos lógicos matemáticos a partir de enunciados escritos en nuestro lenguaje.

- **Título de la conferencia: “Estrategias para conjeturar en la clase de matemáticas”.**

Evento: II Encuentro de Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Lugar: Medellín, Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.

Fecha: 16 de noviembre de 2007.

Palabras clave: Conjetura, Prueba: Validación, Objetos Matemáticos, Enunciados, Contraejemplos, Semántica y Sintaxis.

Resumen: El presente trabajo pretende situar el contexto del descubrimiento en el aula de clase de matemáticas. Para ello esta ponencia que está enmarcada dentro de la tesis de maestría: “Los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales en el aula de clase: el contexto del descubrimiento y de validación” pretende indagar desde los marcos teóricos de Imre Lakatos y Nicolás Balacheff y Enseñanzas para la Comprensión, por las estrategias efectivas que permitan que los estudiantes en el aula de clase conjeturen enunciados y comprendan los procesos de validación.

- **Título de la ponencia: "Interpretación, análisis y categorización en los registros presentados por estudiantes adultos al momento de establecer razonamientos conjeturales y de prueba en la clase de matemáticas".**

  Evento: Fourth International Congress of Qualitative Inquiry & Couch Stone Symposium.

  Lugar: University of Illinois at Urbana-Champaign, Estate of Illinois, Estados Unidos.

  Fecha: Mayo 14 al 17 de 2008.

  Resumen: La ponencia es producto de la tesis de investigación de maestría en Educación Matemática: *"Razonamientos Inductivos, Deductivos y Conjeturales: El Contexto de la Conjeturas y las Pruebas Matemáticas en el Aula de Clase"* , la cual tiene como marco teórico: teorías de la prueba de Nicolás Balacheff, del descubrimiento matemático de Imre Lakatos y Enseñanzas para la comprensión, también los criterios de rigor del enfoque cualitativo de la investigación: credibilidad, auditabilidad y transferibilidad propuestos por Guba y Lincoln. Se pretende compartir con la comunidad internacional presente en University of Illinois, los criterios de rigor empleados en el método de la investigación: el análisis, la interpretación y categorización original de los datos, a partir de las dificultades, las conjeturas y las pruebas construidas por los estudiantes adultos en instituciones de Antioquia, Colombia; tomados a partir de una guía didáctica que previamente ha sido sometida a juicio de expertos.

- **Título de la ponencia: "Criterios de rigor en una investigación cualitativa en educación matemática: Los contextos de justificación y de descubrimiento matemático".**

  Evento: The Fifth International Congress of Qualitative Inquiry (QI2009).

Lugar: University of Illinois at Urbana-Champaign, Estate of Illinois, Estados Unidos.

Fecha: Mayo 20-23, 2009.

Resumen: La presente ponencia expone como se tuvieron en cuenta los criterios de rigor en la investigación cualitativa: **“la comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: el contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas**”. Se realiza un análisis de cómo se tuvieron en cuenta los criterios: credibilidad, auditabilidad o confirmabilidad y transferibilidad o aplicabilidad. Es importante realizar este análisis ya que dicha investigación dota de algunas categorías y explicación de procesos inmersos en estos contextos que facilitan la instrucción y el aprendizaje en los estudiantes. En la investigación cualitativa, realizada en los contextos de prueba y de descubrimiento en la clase de matemáticas, se dejó que los estudiantes construyeran espontáneamente sus pruebas frente a los enunciados propuestos en la guía didáctica. Finalmente se discutió cómo se llevó a cabo la triangulación metodológica, de investigadores, teórica y de datos.

- **Título de la ponencia: “La investigación cualitativa y el análisis de contenido en la educación matemática: dificultades presentadas por los estudiantes en los contextos de descubrimiento y justificación en clase de matemáticas”.**

Evento: The Fifth International Congress of Qualitative Inquiry (QI2009)**.**

Lugar: University of Illinois at Urbana-Champaign, Estate of Illinois, Estados Unidos.

Fecha: Mayo 20-23, 2009.

Resumen: El trabajo hace parte de la tesis de investigación cualitativa de Maestría en Educación Matemática: “**Razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: el contexto de la conjetura y las pruebas matemáticas en el aula de clase”** intervenida en contextos de aula en grupos de estudiantes de dos poblaciones distintas: uno a nivel de Educación media y otro trabajado en seccionales de la Universidad de Antioquia.

La investigación consiste en realizar un análisis de contenido de los registros escritos presentados por los estudiantes en contextos de justificación y descubrimiento matemático en la clase. El marco teórico retoma las teorías de Enseñanza para la comprensión (Harvard University), teorías de las pruebas de Nicolás Balacheff y las teorías del descubrimiento en matemáticas de Imre Lakatos.

- **Título de la ponencia: "La comprensión y la investigación cualitativa en la educación matemática: Los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales".**

  Evento: The Fifth International Congress of Qualitative Inquiry (QI2009)**.**

  Lugar: University of Illinois at Urbana-Champaign, Estate of Illinois, Estados Unidos.

  Fecha: Mayo 20-23, 2009.

  Resumen: Este artículo pretende responder a la pregunta: ¿Qué comprende el estudiante de acuerdo a los contenidos, propósitos, praxis y comunicación desarrollados en la intervención de la investigación cualitativa: La comprensión de los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales: el contexto de justificación y descubrimiento en la clase de matemáticas?, para ello se presenta cada una de las dimensiones de la comprensión según el Marco de Harvard University y posteriormente se hace un análisis de lo recolectado durante la investigación y que implicaciones tienen éstas en los procesos de conjetura y de prueba en la clase de matemáticas.

- **Título del Taller: "La comprensión en el razonamiento inductivo, deductivo y conjetural en la clase de matemáticas". "las conjeturas y pruebas matemáticas en el aula de clase".**

  Evento: VI encuentro de Enseñanza de las ciencias y las matemáticas.

Lugar: Medellín, Universidad de Antioquia.

Palabras claves: Razonamiento, comprensión, inducción, deducción, abducción, conjetura temporal, conjetura omnitemporal, contraejemplo localizado, contraejemplo total, casos particulares, generalización, reglas de inferencia, enunciados.

Resumen: "El presente artículo reseña las dificultades que los estudiantes han tenido en sus razonamientos en la clase de matemáticas y en algunos conceptos geométricos, inmersos en los números poligonales; así como también las apreciaciones frente al trabajo realizado durante este semestre en el Instituto Tecnológico Metropolitano. Finalmente como docente de matemáticas y con el propósito de contribuir al mejoramiento, se expresan sugerencias a los docentes de matemáticas como estrategias de enseñanza y aprendizaje para sus clases.

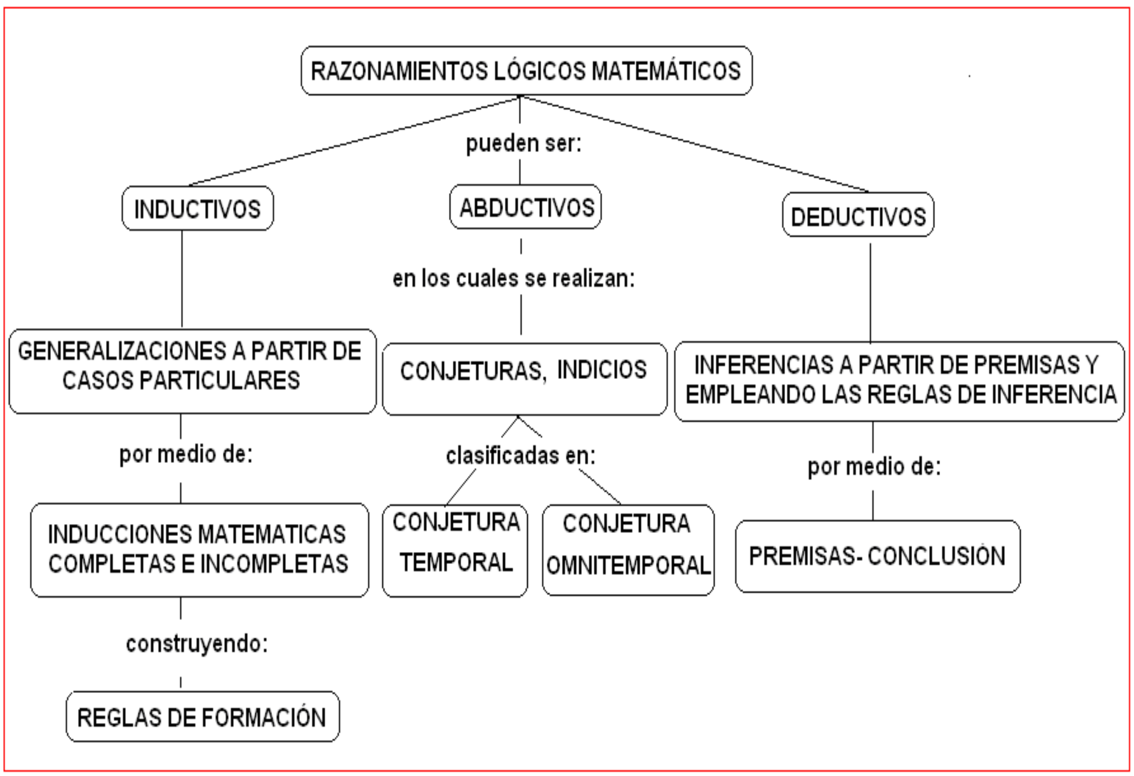


Ilustración 39: Mapa conceptual referente a los razonamientos inductivos, deductivos y conjeturales

- **Título de la ponencia: "Dificultades en la comprensión de la demostración matemática a dos columnas en los primeros años de universidad".**

Evento: XIII Encuentro Escuela Regional de Matemáticas **(ERM)**

Lugar: Universidad Tecnológica de Pereira.

Fecha: Septiembre 11 al 15 de 2006.

Palabras clave: Proposición, método inductivo deductivo, pedagogía para la compresión, demostración.

Resumen: Esta ponencia pretende divulgar los avances de una investigación de intervención de aproximación didáctica en el aula, que explora la enseñanza y el aprendizaje de la demostración de teoremas matemáticos, en la escritura de afirmación-razón o a dos columnas, en los primeros años de universidad. Se tienen en cuenta las experiencias vividas por los ponentes con los estudiantes del curso Pensamiento Matemático IV, de la Licenciatura en Básica con énfasis en Matemáticas de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia. Este trabajo parte de los estudios que han realizado algunos investigadores en este tópico, entre ellos Patricio G. Herbst (Michigan State University), Nicolás Balacheff (Laboratorie Leibniz, Grenoble, France) y Yasuchiro Sekuguchi (Yamaguchi University, Japón). El marco teórico que fundamenta esta investigación es la Pedagogía de la Enseñanza para la Comprensión, particularmente se tienen en cuenta las cuatro dimensiones de la comprensión (contenido, método, praxis y comunicación).

Dirección en la Web:
ciencias.udea.edu.co/documentos/reacreditacion2/anexos/Anexo%2050.../Ponencias%20 grupo%20Educación%20Matematicas.doc

B.2. CAPÍTULOS DE LIBRO

Nombre del capítulo: "Razonamientos matemáticos inductivos y deductivos".

Nombre del libro: Razonamiento Lógico, Razono y actuó con lógica.

Páginas del libro: 9 a la 37.

ISBN: 978-958-714-176-4.

Editorial: Universidad de Antioquia-Dirección de Regionalización.

Resumen: muchos estudiantes cuando piensan en lógica matemática se imaginan una serie de números, símbolos griegos y problemas sin solución. Pero lo que poco se conoce es que la lógica es una disciplina que se practica diariamente. Se emplea la lógica cada vez que se analiza la veracidad de una afirmación, se descubre cuando una actividad es posible o imposible de ejecutar, se elige entre varias opciones la acertada para llevar a cabo una acción o cuando se comprende que para aprobar un examen el procedimiento indicado es estudiar con anterioridad.

La lógica se aplica en las ciencias exactas y naturales como la física, la química, la ingeniería y la biología para demostrar hipótesis, aplicar teorías y realizar experimentos. En las ciencias sociales y humanas como la psicología, la filosofía, el derecho y las ciencias de la comunicación para interpretar la realidad de nuestro entorno, refutar o reafirmar argumentos; o para analizar formular y ejecutar investigaciones de carácter social. La aplicación de la lógica en la ciencia y en la vida diaria es determinante.

Este capítulo pretende proporcionar algunos conceptos básicos sobre la lógica matemática, instrumentos necesarios para el análisis de situaciones hipotéticas, premisas, tesis y relaciones causa-efecto, para la diferenciación entre razonamientos válidos e inválidos y para la comprensión de la estructura lógica sintáctica de los enunciados.

Anexo C

ANEXO C: GLOSARIO DE PALABRAS

Estas son algunas de las palabras empleadas a lo largo de este trabajo de investigación en referencia a conceptos matemáticos.

ADJUNCIÓN: regla de inferencia que permite a cualquier otra premisa agregar otra premisa a ésta, por medio del conectivo lógico disyuntivo “o”.

BICONDICIONAL: proposición compuesta que adopta la estructura lógica sintáctica. “si y sólo si”

CÁLCULO SOBRE LOS ENUNCIADOS: Pruebas que se fundamentan en definiciones o en propiedades características explícitas.

CAMPO CONCEPTUAL: Es un conjunto de definiciones de un mismo concepto en diferentes textos y en grados diferentes.

CONDICIÓN NECESARIA: está asociada al condicional.

CONDICIÓN SUFICIENTE: condición asociada al condicional.

CONDICIONAL: proposición compuesta que adopta la estructura lógica sintáctica: “si… entonces…”

CONECTIVO LÓGICO: partícula monaria o binaria que puede ser la negación o de enlace como la conjunción, la disyunción, el condicional y el bicondicional. Algunos textos de lógica consideran como conectivos primitivos la negación y la disyunción ya que los demás conectivos pueden definirse en base a éstos.

CONJETURA: es un enunciado lógico el cual está en algún momento con factibilidad de ser probado su veracidad o falsedad dentro de una teoría matemática. Proposición no demostrada rigurosamente.

CONJUNCIÓN: proposición compuesta que adopta la estructura sintáctica: "….y…"

CONTRADICCIÓN: proposición siempre falsa.

CONTRARRECÍPROCO: proposición equivalente a la proposición condicional. Si la proposición condicional es P entonces Q, el contrarrecíproco de ésta será: no Q entonces no P.

DEDUCTIVO: procedimiento lógico que permite derivar premisas de otras por medio de reglas de inferencia.

DEFINICIÓN: Discurso o texto que aclara o fija el resultado de una palabra.

DEMOSTRACIÓN: Centrada en una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas, lo que caracteriza a las demostraciones como género del discurso estrictamente codificado.

DIAGRAMA DE VENN: curvas cerradas que se emplean para delimitar los elementos de un conjunto.

DISYUNCIÓN: proposición compuesta que adopta la estructura sintáctica: "… o…"

ECONOMÍA DE LA LÓGICA: Es el ahorro en el proceso de la demostración haciendo uso de las propiedades y reglas que mantienen la validez del proceso.

EJEMPLO GENÉRICO: Consiste en la explicación de razones de validez de una aserción para la validación de operaciones o trasformaciones de un objeto, en calidad de representante característico de determinada clase.

EMPIRICISMO INGENUO: Consiste en asegurar la validez de un enunciado después de haberlo vertiendo en algunos casos particulares

EQUIVALENCIA LÓGICA: es una proposición que tiene los mismos valores de verdad en su tabla que otra. Además una equivalencia lógica si se hace el bicondicional con su proposición equivalente, la tabla de verdad de la proposición bicondicional corresponderá en todas su filas a valores verdaderos.

ESQUEMA SEMÁNTICO: la semántica tiene que ver con los contextos que representa un cierto símbolo, son las significaciones.

ESQUEMA SINTÁCTICO: es la estructura esquelética base de enunciados, es la forma interna de la semántica.

EXPERIENCIA CRUCIAL: Proceso que consiste en verificar una proposición de un caso para el cual no se asume que si es válido ahora entonces funcionará siempre.

EXPERIENCIA MENTAL: Se centra en la acción interiorizándola y separándola de su ejecución sobre una representante en particular. Se desarrolla en una temporalidad anecdótica, pero las operaciones y relaciones que inician la prueba nunca están designadas por supuesto en práctica, las operaciones y las relaciones que sirven de preludio nunca son escogidas por el resultado de su puesta en práctica.

EXPLICACIÓN: Está situada al nivel del locutor. Él establece y garantiza la validez de una proposición, se arraiga en sus conocimientos y en lo que constituye su racionalidad, es decir sus propias reglas de decisión de la verdad, en el momento que aparece la explicación en el discurso, esta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor, la base de la explicación es esencialmente la lengua natural.

FUNDAMENTOS ENDÓGENOS: Criterios que surgen a partir de la experimentación para fundamentar las conjeturas.

FUNDAMENTOS EXÓGENOS: Referencias y conocimientos reconocidos culturalmente.

IMPLICACIÓN: es cuando un condicional adopta un valor de verdad verdadero.

INDUCTIVO: procedimiento en el cual se deduce conclusiones generales a partir de casos particulares. Es frecuente en matemáticas emplear el principio de inducción matemática completa e incompleta.

INFERENCIA CONJUNTIVA O CONJUNCIÓN: regla de inferencia que permite en un razonamiento enlazar dos hipótesis con el conectivo lógico conjuntivo: “y”.

INFERENCIA: razonamiento que se realiza a partir de unas premisas o hipótesis determinadas y validado por una regla lógica.

INTERACCIÓN SOCIAL: Es el motor de los procesos de validación.

LÓGICA: rama de la matemática que estudia los enunciados lógicos sus valores de verdad y la validez de las deducciones a partir de los criterios de validación**.**

MODUS PONENDO PONENS: regla de inferencia que dice que si se tienen como premisas un condicional y el antecedente de dicho condicional, entonces se puede concluir el consecuente de dicho condicional.

MODUS TOLLENDO PONENS: regla de inferencia que dice que si se tienen como premisas un condicional y el antecedente de dicho condicional, entonces se puede concluir el consecuente de dicho condicional.

MODUS TOLLENDO TOLLENS: regla de inferencia que dice que si se tienen como premisas un condicional y la negación del consecuente de éste, entonces se puede concluir la negación del antecedente de dicho condicional.

PREMISA: hipótesis.

PROCESO DE VALIDACIÓN: Actividad intelectual que tiene como fin asegurar la validez de una proposición, y eventualmente producir una explicación, una prueba o una demostración.

PROPOSICIÓN ATÓMICA: proposición en la que no aparece ningún conectivo lógico ni ninguna negación.

PROPOSICIÓN MOLECULAR: proposición en la que aparecen proposiciones atómicas enlazadas por conectivos lógicos.

PROPOSICIÓN: enunciado del cual podemos afirmar de que es verdadero o falso, pero no ambas valores en simultáneo.

PRUEBA PRAGMÁTICA: Se denomina a las pruebas que recurren a la acción o la ostensión.

PRUEBA: Cuando una explicación es reconocida y aceptada, conviene para diseñarla disponer de un término que permite marcar su distinción del sujeto locutor; se selecciona el termino Prueba. El paso de la explicación a la prueba hace referencia a un proceso social por el cual un discurso que asegure la validez de una proposición cambia de posición siendo aceptada por una comunidad. Esta posición no es definitiva; con el tiempo evolucionar simultáneamente con el avance de los saberes en los cuales se apoya, por otro lado, una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra.

PRUEBAS INTELECTUALES: Son aquellas pruebas que se paran de la acción, y se apoyan en formulaciones de las propiedades en juego y sus relaciones.

RAZONAMIENTO: Según Balacheff la palabra razonamiento se utilizan para designar la actividad intelectual no completamente explícita, que se ocupa de la manipulación de la información dicha o adquirida, para producir una nueva información.

TABLA DE VERDAD: registro por columnas y filas de posibles valores de verdad de una proposición.

TAUTOLOGÍA: proposición siempre verdadera.

TESIS: conclusión.

VALIDEZ: palabra empleada para aprobar que todos los pasos de un razonamiento lógico no advierten inconsistencias ya sea de tipo lógico o semántico.

VALOR DE VERDAD: se le define a una proposición lógica y éste puede ser verdadero ó falso en la lógica bivalente.