

Oscilaciones y Campos

Oscilaciones y Campos

Alonso Sepúlveda S.

Rector de la Universidad de Antioquia
Alberto Uribe Correa

Vicerrector de Docencia
Óscar Sierra Rodríguez

Coordinador del Programa de Educación Ude@
Guillermo León Ospina Gómez

Autor
Alonso Sepúlveda S.

Corrector de estilo
Daniel Aldana Estrada

Primera edición, febrero de 2006

Todos los derechos reservados. No se permite la reproducción, archivo o transmisión total o parcial de este texto mediante ningún medio, ya sea electrónico, mecánico, óptico, de fotorreproducción, memoria o cualquier otro sin permiso de los editores de Ude@.

Imagen de la portada

Fotografía de la escultura "Mariamulata cartagenera" Esta escultura, donada a la Universidad por el maestro Enrique Grau Araújo el 29 de mayo de 2000, pertenece a la extensa colección de mariamulatas, serie trabajada en pinturas al óleo, dibujos al carboncillo y al pastel, serigrafías, esculturas en bronce y una construcción, obras de diversos tamaños que han recorrido el mundo y que muestran la admiración del artista por todo lo creado y su sentido respeto por todo lo viviente. Su base es de concreto reforzado, está elaborada en lámina de hierro patinada y se encuentra a un costado de la plazoleta central, junto al bloque administrativo.

El "Hijo predilecto de Cartagena" (que realmente nació en Panamá en 1920) recibió honoris causa el título de Maestro en Artes Plásticas en 1999 y al año siguiente cumplió la promesa de donar a nuestra institución una de sus obras monumentales. En la carta enviada para ese evento, dijo: "Que la Mariamulata cartagenera sea puente de unión entre la costa nuestra y la montaña vuestra". El maestro Grau murió en abril de 2004.

© Universidad de Antioquia
ISBN: 978-958-714-437-6

Impreso en Medellín (Colombia).

Sobre el autor

Alonso Sepúlveda S.

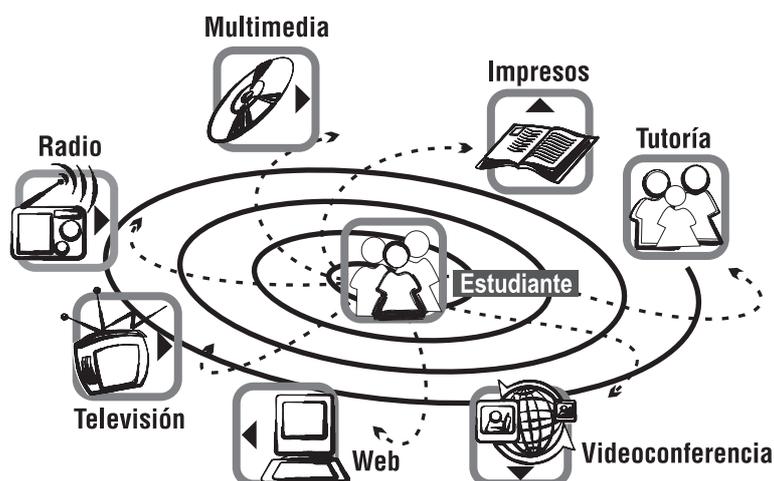
Graduado en Física en la Universidad de Antioquia, realizó estudios de posgrado en el Hunter College de Nueva York. Profesor jubilado del Instituto de Física de la Universidad de Antioquia, donde se desempeñó como docente en los cursos de *Historia de la Física*, *Electromagnetismo*, *Relatividad* y *Física Matemática*. Es investigador del Centro Internacional de Astrofísica de la Universidad de Roma “La Sapienza”. Ha publicado *Los conceptos de la Física*, *Estética y simetrías* y artículos de divulgación e investigación en diversas revistas. Actualmente prepara otros dos textos: *Electromagnetismo* y *Lecciones de Física Matemática*.

Cómo usar este libro

Como estudiante del programa Ude@, usted es el centro del modelo educativo y puede controlar el proceso de aprendizaje mediante la organización del tiempo alrededor de sus intereses. La autonomía, la disciplina, la creatividad y el trabajo en equipo son características que le ayudarán en su formación, para solucionar problemas reales de la sociedad, recurriendo al método de la ingeniería.

La Universidad de Antioquia, a través del programa Ude@, ha puesto a su disposición contenidos académicos en diferentes medios con el fin de facilitarle el aprendizaje mediante las tecnologías de informática y telecomunicaciones clásicas y modernas:

- Televisión
- Impresos
- Web
- Multimedia
- Videoconferencias



El texto Ude@

En el modelo Ude@ los conocimientos son aportados por cada medio en igualdad de importancia y con las fortalezas propias de cada uno de ellos, pero el texto desempeña un papel fundamental en el aprendizaje ya que es el que más diversidad ofrece en términos de funcionalidad y cantidad de contenidos. El texto Ude@ no sólo permite analizar con más detalle y profundidad los contenidos de cada curso, sino que facilita en mayor medida la realización de ejercicios, tareas y autoevaluaciones.

Estructura del texto Ude@

La estructura del texto es lineal, con una progresión gradual de cada tema, lo cual hace más fácil la transmisión del contenido de una manera lógica.

La división del texto está dada por capítulos que, a su vez, agrupan módulos (sesiones de clase). Al empezar cada capítulo se encuentra un “Contenido breve” en la columna externa, que incluye una lista del número y el título de los módulos que componen el capítulo. Por su parte cada módulo contiene, en su primera página, un índice temático del contenido, objetivos específicos, preguntas básicas y una introducción, que le guiarán en el proceso de aprendizaje sobre el tema en particular de cada sesión de clase.

Los iconos y la interrelación de medios

El material Ude@ ha sido producido de manera integral, teniendo como objetivo primordial el autoestudio. Por tanto, la producción de los contenidos se desarrolla en los diferentes formatos (radio, televisión, web, multimedia, videoconferencias), con enlaces entre los mismos. La esencia de este enlace está dada por los iconos Ude@.

Los iconos, como representaciones gráficas de la realidad, serán los elementos gráficos que le ayudarán a guiarse en su navegación por los diferentes medios. El espacio gráfico de cada página del texto está dividido en dos columnas: en la interior, más ancha, podrá observar todo lo relacionado con el desarrollo del contenido y las correspondientes figuras (gráficas, fotos, etc.), mientras que en la exterior encontrará las llamadas a otros medios. Estas llamadas permiten que haya interrelación y retroalimentación entre los mismos.

Los iconos de radio, televisión, multimedia, mapa conceptual, videoconferencia o web le indicarán la ruta a seguir. Por ello es importante que sepa que sobre el tema que está estudiando en el módulo impreso, también hay material disponible en otros medios, y que ese material representa valor agregado puesto que el contenido de los diferentes formatos no se repite sino que se complementa.

El mapa conceptual

Al comienzo del texto Ude@ usted encontrará cinco mapas conceptuales del curso, que lo orientarán en el universo temático de la disciplina. Esta herramienta pedagógica hace posible la integración conceptual, jerárquica y funcional, en forma gráfica y espacial, de todos los contenidos.

Sugerencias para el estudiante Ude@

Es importante que durante su proceso de aprendizaje se pregunte constantemente si de verdad comprendió el significado de los términos y su uso. Una buena manera de comprobarlo es explicándole el concepto a otra persona. No dude en solicitar ayuda a su tutor.

- Antes de iniciar el estudio de un capítulo lea el contenido breve y la presentación.
- Las preguntas básicas de cada módulo le ayudarán a valorar la comprensión de los nuevos conceptos presentados y de la temática tratada a lo largo del mismo.
- El estudio de los ejemplos intercalados en los bloques de texto y la solución de los ejercicios incrementarán sus habilidades en la solución de problemas reales.
- Tome apuntes, plantéese preguntas y trate de resolverlas.

Tabla de contenido

Capítulo 1: Movimiento oscilatorio

Módulo 1

Cinemática, dinámica y energía en el movimiento armónico simple 3

Módulo 2

Algunos osciladores típicos 11

Módulo 3

Superposición de movimientos armónicos simples 19

Módulo 4

Oscilaciones amortiguadas, forzadas y resonancia 25

Capítulo 2: Gravitación

Módulo 5

La teoría newtoniana de la gravitación 35

Módulo 6

El campo gravitacional 47

Módulo 7

Energía potencial y potencial gravitacional 55

Capítulo 3: Electricidad

Módulo 8

Carga eléctrica y ley de Coulomb 63

Módulo 9

El campo electrostático 69

Módulo 10

El movimiento de cargas en campos eléctricos 75

Módulo 11

Energía potencial y potencial electrostático 81

Capítulo 4: Ley de Gauss y aplicaciones

Módulo 12

Ley de Gauss 91

Módulo 13

Conductores y dieléctricos 99

Módulo 14

Dieléctricos 107

Módulo 15	
Capacitancia y condensadores	113
Módulo 16	
Energía del campo eléctrico	119
Capítulo 5: Corriente eléctrica y circuitos	
Módulo 17	
Carga eléctrica	125
Módulo 18	
Circuitos de corriente continua	133
Capítulo 6: Magnetismo	
Módulo 19	
Campo magnético	143
Módulo 20	
Fuerza y torque magnéticos sobre una corriente eléctrica	153
Módulo 21	
Motores y aparatos de medida	159
Módulo 22	
Campo magnético y corrientes	163
Módulo 23	
Fuerza entre corrientes eléctricas	171
Módulo 24	
Circulación y flujo del campo magnético	175
Módulo 25	
Magnetización en la materia	183
Capítulo 7: Campos electromagnéticos dependientes del tiempo	
Módulo 26	
Ley de inducción de Faraday-Henry	191
Módulo 27	
Fuerza electromotriz de movimiento	201
Módulo 28	
Ley de Ampère-Maxwell	207
Módulo 29	
Inductancia y energía del campo magnético	213
Módulo 30	
Circuitos acoplados	223

Prólogo

El presente texto explora los fundamentos de la teoría de las oscilaciones y los campos gravitacional y electromagnético.

El primer tema es de amplia aplicación en física e ingeniería y se implementa allí en la descripción de fenómenos tan diversos como péndulos, osciladores mecánicos y eléctricos, oscilaciones de estructuras y diseños antisísmicos. En esta obra se presenta la descripción básica de estos temas introduciendo conceptos como elongación, frecuencia, período, pulsos y resonancia, aplicados a las oscilaciones libres, forzadas y a los fenómenos de resonancia.

La segunda parte del libro se dedica a explorar los fundamentos de la teoría de campos, y se divide a su vez en dos temas de gran importancia. El primero de ellos —la teoría newtoniana de la gravitación— se constituye en el primer ejemplo de propuesta física de alto desempeño, pues realizó la primera descripción precisa del movimiento de los astros, basada en la dinámica de Newton. Esta teoría habría de durar como edificio teórico único desde 1687 hasta la proposición por Einstein en 1915 de la teoría general de relatividad, que es a la vez una nueva teoría de la gravitación. Es necesario tener en cuenta que a nivel del sistema solar y de los estudios de dinámica de galaxias las correcciones introducidas por la teoría de Einstein son tan sutiles que la de Newton conserva buena parte de su capacidad descriptiva.

El segundo tema —el campo electromagnético— se presenta a continuación en su versión independiente del tiempo insistiendo primero en los fenómenos electrostáticos, en la definición del campo eléctrico y en la exploración de diversos temas como conductores, dieléctricos, energía, condensadores, corrientes y resistencias. A continuación se delinean los aspectos centrales del campo magnetostático, su relación con imanes, brújulas y corrientes y se propone el estudio de las fuerzas y torques magnéticos.

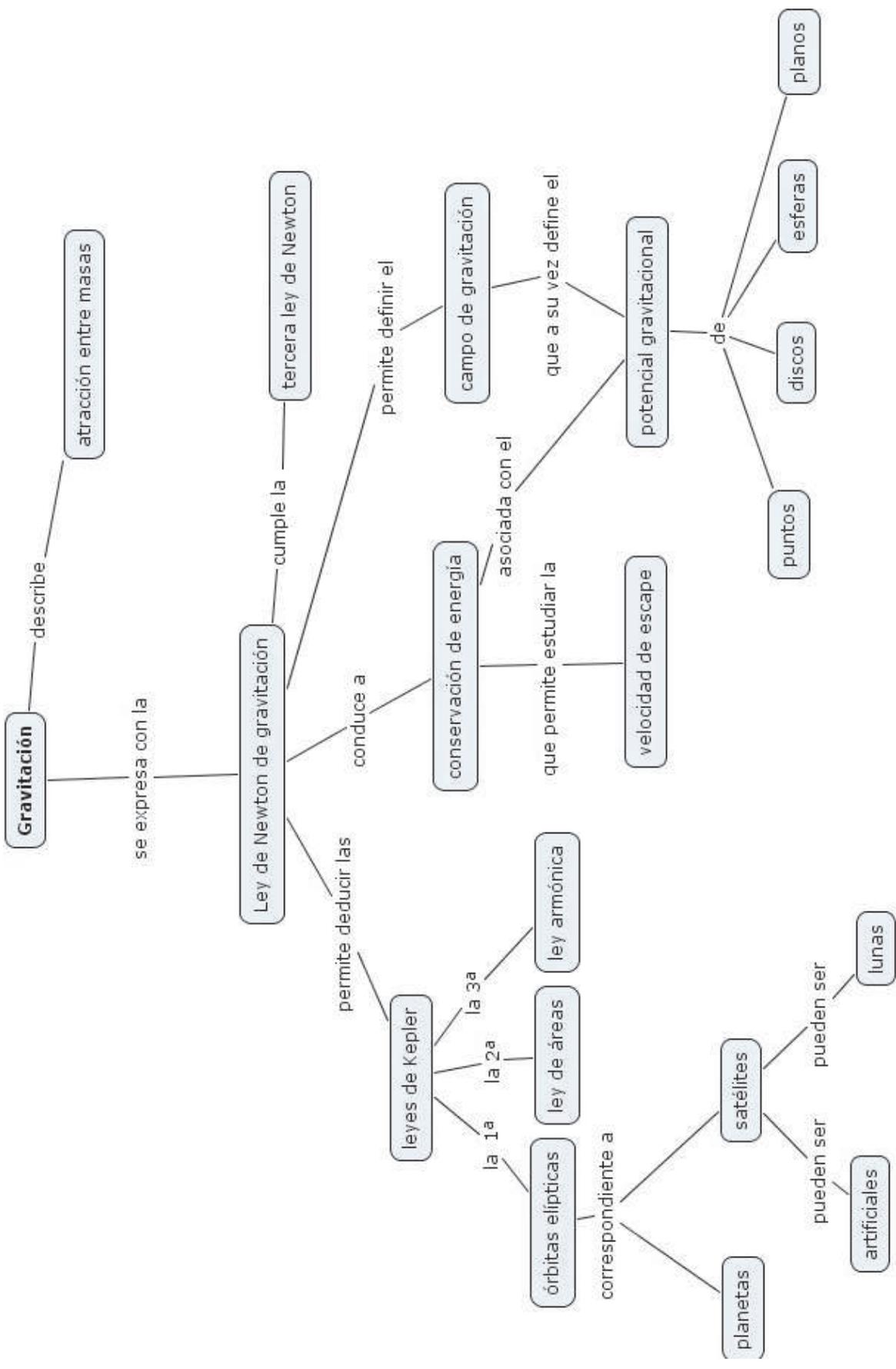
Al final del texto se aborda el tema de los campos dependientes del tiempo, comenzando con la posibilidad de generación de campos eléctricos debido a campos magnéticos variables con el tiempo y al efecto recíproco que permite la producción de campos magnéticos mediante campos eléctricos con dependencia temporal. De este modo se prepara el terreno para la teoría de las ondas electromagnéticas que se aborda en el siguiente curso y que es fundamento de las técnicas modernas de telecomunicaciones.

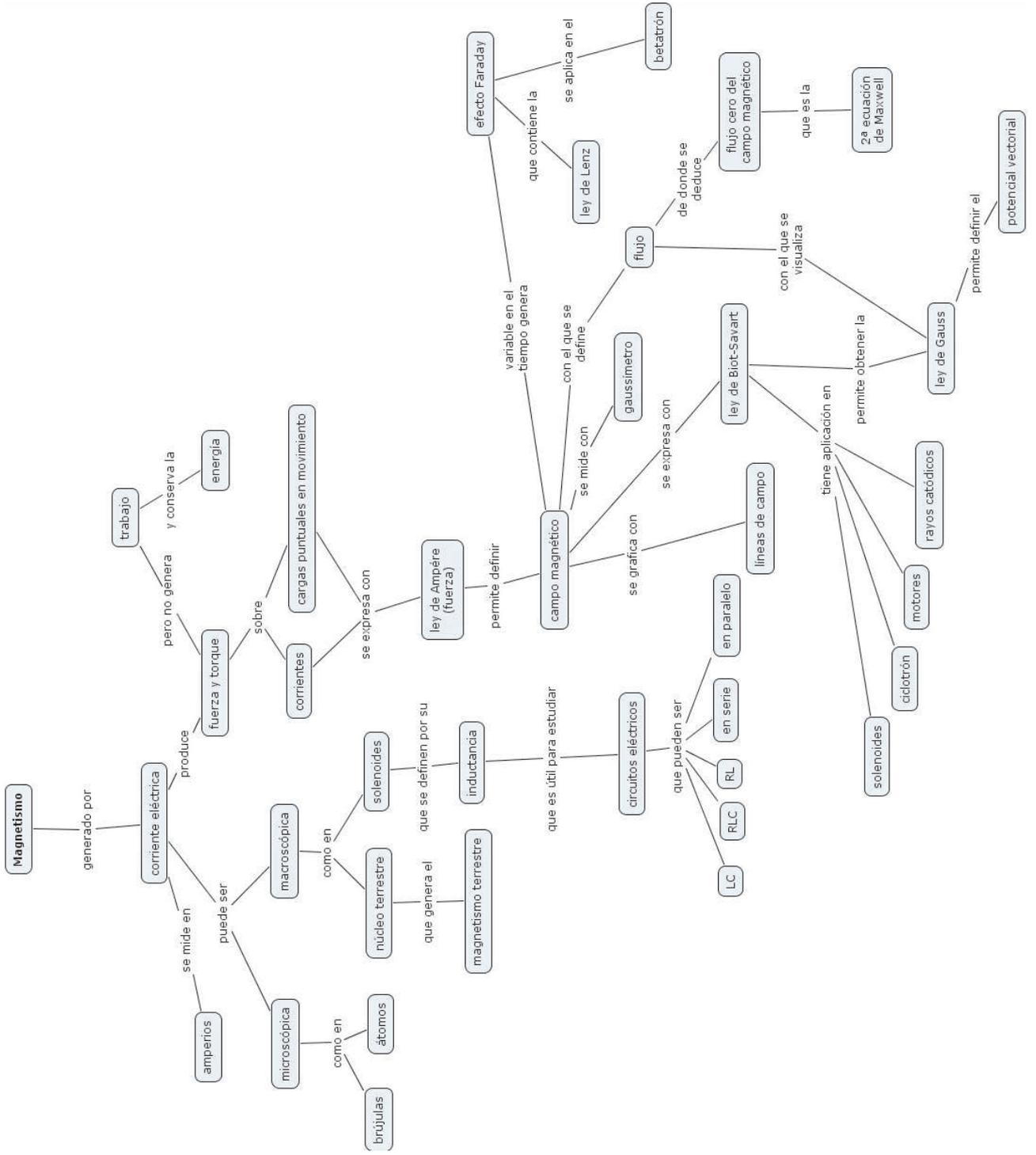
Un conjunto de ejemplos ilustrativos y problemas de aplicación se presenta al final del texto, con el propósito de reforzar lo dicho durante el curso.

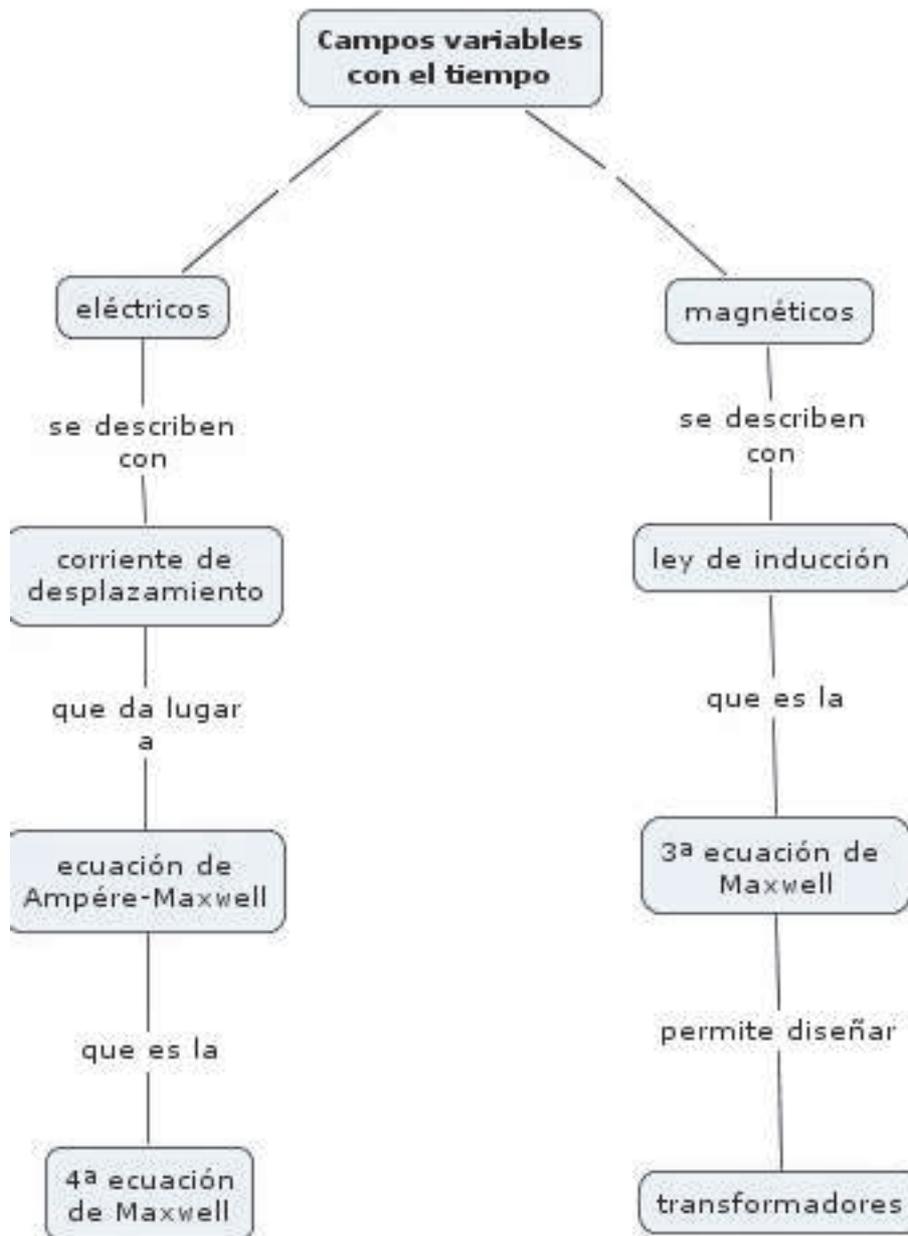
Es pertinente expresar aquí mi agradecimiento al equipo de trabajo de Ude@, por su ayuda, asesoría y colaboración permanentes en cada una de las etapas de la producción y corrección tanto del material escrito como del gráfico. Gracias por ello a Álvaro, Diana, Adriana, Cristina, Daniel, Lorena, Paola, Marcela, Iván y Jorge.

Alonso Sepúlveda S.

Medellín, enero 15 de 2006.







Capítulo 1

Movimiento oscilatorio



La música proviene de las oscilaciones del aire generadas en diversos instrumentos.

Presentación

De acuerdo a la cinemática, el movimiento más simple es el rectilíneo uniforme, que se mantiene a sí mismo en ausencia de fuerzas. Le sigue en simplicidad el movimiento uniformemente acelerado, generado por una fuerza constante, como es el caso de la gravedad cercana a la superficie terrestre. En general, diversas

Contenido breve

Módulo 1

Cinemática, dinámica y energía en el movimiento armónico simple

Módulo 2

Algunos osciladores típicos

Módulo 3

Superposición de movimientos armónicos simples

Módulo 4

Oscilaciones amortiguadas, forzadas y resonancia

fuerzas producen movimientos con diferente aceleración; así, la fuerza central que gobierna el movimiento planetario corresponde a aceleraciones de la forma $1/r^2$, y masas unidas a resortes experimentan aceleraciones proporcionales a la deformación del resorte, de acuerdo con la ley de Hooke $F = -kx$.

Uno de los movimientos más corrientes es el que se conoce como *periódico* u *oscilatorio*, pues su característica esencial es la repetición en el tiempo. Entre ellos están: el movimiento de la Tierra alrededor del Sol, el movimiento pendular, las vibraciones de los átomos en un reloj de cuarzo, las olas, las ondas de sonido, la luz, los latidos cardíacos, las mareas, las ondas de radio, los circuitos de corriente alterna. Ciertamente, algunos de estos movimientos corresponden a ondas, otros a oscilaciones; en todos los casos, sin embargo, la periodicidad es su característica fundamental.

En los módulos siguientes se explora una familia bastante importante de movimientos periódicos, que puede estudiarse con relativa facilidad: el movimiento armónico simple (M.A.S.). Este tipo especial de movimiento está regido por fuerzas o torques que dependen *linealmente* de la variable independiente. Los movimientos regidos por acciones no lineales pueden ser periódicos mas no armónico simples.

Módulo 1

Cinemática, dinámica y energía en el movimiento armónico simple

Contenidos del módulo

- 1.1 Cinemática del movimiento armónico simple
- 1.2 Las condiciones iniciales del movimiento
- 1.3 Dinámica del movimiento armónico simple
- 1.4 Energía mecánica en el movimiento armónico simple

Objetivos del módulo

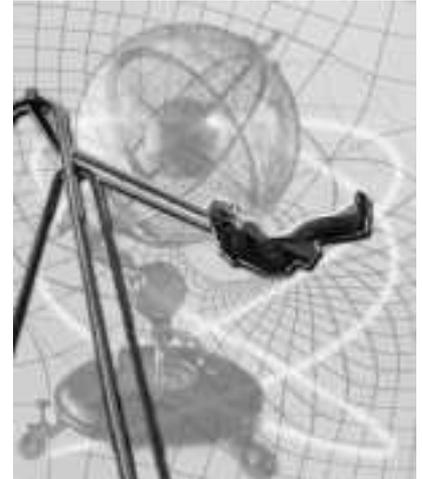
1. Definir el movimiento periódico y el armónico simple.
2. Definir amplitud, elongación, fase, frecuencia, período.
3. Estudiar la posición, velocidad y aceleración en el movimiento armónico simple.
4. Estudiar la conexión entre amplitud, fase y condiciones iniciales del movimiento.
5. Estudiar la conexión entre el movimiento armónico simple y las fuerzas recuperadoras.
6. Realizar consideraciones sobre energía en el movimiento armónico simple.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un movimiento periódico? ¿Qué es un movimiento armónico simple?
2. ¿Qué son: amplitud, elongación, fase, frecuencia, período?
3. ¿Cuál es la cinemática del movimiento armónico simple?
4. ¿Cómo es la dinámica del movimiento armónico simple?
5. ¿Cuáles son las relaciones de energía en el movimiento armónico simple?

Introducción

Este módulo está dedicado a establecer las características básicas del más sencillo de los movimientos periódicos: el movimiento armónico simple. Ante todo deben proponerse las definiciones de amplitud, fase, frecuencia y período, para continuar con el estudio de la velocidad y la aceleración y su conexión con las fuerzas recuperadoras. Se establece también la conexión entre las condiciones de frontera, la amplitud y la fase.



Para pequeñas amplitudes un columpio es un oscilador armónico.



Heinrich Rudolph Hertz (1857-1894)

Físico alemán nacido en Hamburgo. Descubrió las ondas electromagnéticas de baja frecuencia, llamadas luego ondas hertzianas, confirmando con ello la teoría de Maxwell. Abrió así el camino para la radio y la telegrafía inalámbrica. En 1887 descubrió el *efecto fotoeléctrico*, según el cual la luz ultravioleta provoca la emisión de electrones desde algunos metales. Este efecto fue luego descrito por Einstein. La unidad de frecuencia lleva su nombre, hertz o hercio.

1.1 Cinemática del movimiento armónico simple

Entre los movimientos periódicos el más sencillo de describir matemáticamente es el *movimiento armónico simple* (M.A.S.), que corresponde al desplazamiento de una porción de materia de acuerdo a la regla

$$x = A \cos(\omega t + \phi). \quad (1.1)$$

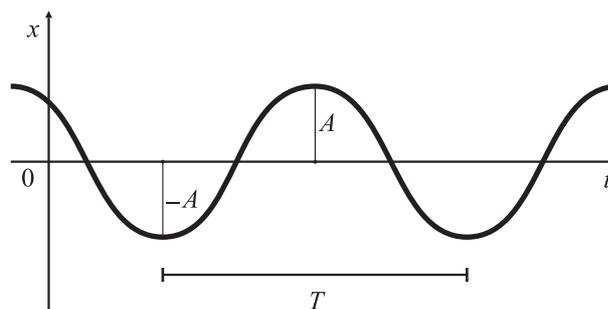


Figura 1.1. Gráfica de elongación versus tiempo en el movimiento armónico simple.

Gráficamente se representa en la figura 1.1; A , ω y ϕ son constantes conocidas respectivamente como *amplitud*, *frecuencia angular* y *constante de fase*; t es el tiempo y x la *elongación*. La cantidad $\omega t + \phi$ se conoce como la *fase* del movimiento. Puesto que los valores extremos de la función coseno son $+1$ y -1 , es cierto que los valores máximo y mínimo de la elongación x son $x_{max} = A$ y $x_{min} = -A$. Así pues, la amplitud es el valor máximo de la elongación.

La función coseno se repite a sí misma cada vez que la fase $\omega t + \phi$ alcanza un valor que sea múltiplo de 2π . En particular es cierto que

$$\begin{aligned} \cos(\omega t + \phi) &= \cos(\omega t + \phi + 2\pi) \\ &= \cos\left[\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \phi\right], \end{aligned}$$

de modo que la oscilación se repite transcurrido un intervalo de tiempo $T = 2\pi/\omega$, al que conocemos como *período*. Es útil también definir la frecuencia f en la forma $f = 1/T$, de modo tal que si T representa el tiempo (en segundos) transcurrido para una oscilación completa, entonces f da el número de oscilaciones por unidad de tiempo: *ciclos/s* u *oscilaciones/s*, unidad conocida como *hertz*. Nótese que las unidades de ω son *radianes/s*.

La velocidad de un objeto que ejecuta un M.A.S. puede obtenerse por derivación respecto al tiempo de la ecuación (1.1). Se obtiene:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t + \phi). \quad (1.2)$$

La evolución temporal de la velocidad se representa en la figura 1.2. Es fácil concluir de la ecuación (1.2) que los valores máximo y mínimo de la velocidad, correspondientes a $\sin(\omega t + \phi) = 1$ y a $\sin(\omega t + \phi) = -1$, son respectivamente $v_{max} = \omega A$ y $v_{min} = -\omega A$. Obsérvese que la posición y la velocidad tienen una diferencia de fase de 90° .

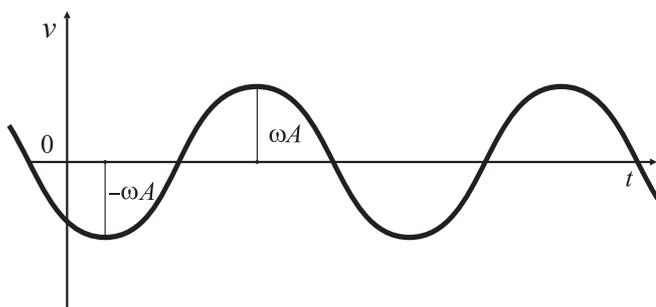


Figura 1.2. Gráfica de velocidad versus tiempo en el movimiento armónico simple.

El comportamiento de la aceleración de una masa que ejecuta un M.A.S. puede ser entendido de un modo simple. Derivando respecto al tiempo la ecuación (1.2) se tiene:

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi). \quad (1.3)$$

Y reemplazando la ecuación (1.1) se sigue que:

$$a = -\omega^2 x, \quad (1.4)$$

de modo que la elongación x y la aceleración tienen un desfase de 180° , como se ve de la comparación entre las figuras 1.1 y 1.3. El signo “menos” en la ecuación (1.4) significa que la elongación y la aceleración se realizan en direcciones opuestas, lo que es característico de las fuerzas recuperadoras que causan el M.A.S. Es fácil concluir que las aceleraciones máxima y mínima son, respectivamente, $a_{max} = \omega^2 x_{max} = \omega^2 A$ y $a_{min} = -\omega^2 x_{min} = -\omega^2 A$.

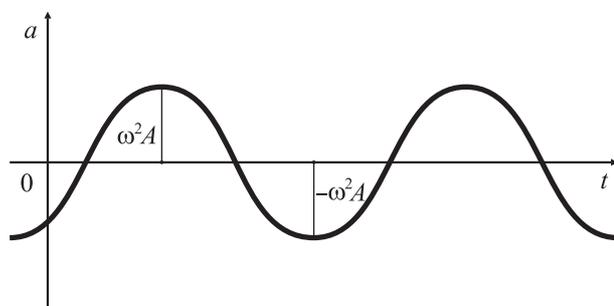


Figura 1.3. Gráfica de aceleración versus tiempo en el movimiento armónico simple.

La ecuación (1.1), con la que se comenzó el análisis, se refiere solo a desplazamientos sobre el eje coordenado x , aunque el estudio pudo haberse efectuado para M.A.S. que ocurren en el eje y o el z , o más en general, en el plano o en el espacio. Así, en el caso general, es posible escribir

$$\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{r},$$

donde $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{i}}x + \hat{\mathbf{j}}y + \hat{\mathbf{k}}z$ y $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{i}}a_x + \hat{\mathbf{j}}a_y + \hat{\mathbf{k}}a_z$.



Vea el documento "Solución a la ecuación del oscilador armónico" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

Ejemplo 1.1

Un objeto ejecuta un M.A.S. con una amplitud $A = 3$ cm, con un período de 3 s y una velocidad inicial de 0,2 m/s. Escriba las expresiones para su posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo.

Solución:

Si el período es de 3 s, la frecuencia es $\omega = 2\pi/T = 2,09$ rad/s; de (1.2) con $v = 0,2$ cm/s en $t = 0$ se sigue: $\phi = -0,096$ rad. Reemplazando en (1.1), (1.2), (1.3) obtenemos:

$$\begin{aligned}x &= 3 \cos(2,09t - 0,096), \\v &= -6,27 \sin(2,09t - 0,096), \\a &= -13,1 \cos(2,09t - 0,096).\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2

Si la velocidad de un M.A.S. es $v = 2,8 \cos(5,2t + 2,5)$, ¿cuál es su amplitud? ¿Cuál es su período? Determine su posición en $t = 2$ s.

Solución:

Por comparación de $v = 2,8 \cos(5,2t + 2,5)$ con (1.2) se sigue que: $\omega A = 2,8$ y $\omega = 5,2$, de donde es fácil concluir que $A = 0,54$. Puesto que $\omega = 5,2$, es cierto entonces que $T = 2\pi/\omega = 1,29$ s. Por integración de $v = 2,8 \cos(5,2t + 2,5)$ se concluye que $x = 0,54 \sin(5,2t + 2,5)$, de donde, para $t = 2$, $x = 0,176$.

1.2 Las condiciones iniciales del movimiento

La mecánica newtoniana contiene ecuaciones de movimiento que se expresan mediante ecuaciones diferenciales con derivadas de segundo orden respecto al tiempo. Obsérvese, en efecto, que la ecuación (1.4), que describe el oscilador armónico, puede ser escrita en la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad (1.5)$$

cuya solución es $x = A \cos(\omega t + \phi)$, que contiene *dos* constantes de integración, A y ϕ . En lo que sigue se prueba que estas constantes pueden ser evaluadas si se conocen la posición x_0 y velocidad inicial v_0 , de la masa que realiza el M.A.S. Para comprobarlo es suficiente tomar las ecuaciones (1.1) y (1.2) evaluadas en $t = 0$; se sigue que

$$x_0 = A \cos \phi \quad \text{y} \quad v_0 = -\omega A \sin \phi.$$

Dividiendo la segunda sobre la primera se obtiene:

$$\tan \phi = \frac{v_0}{\omega x_0}, \quad (1.6)$$

y realizando la operación $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$, es posible probar que

$$A = \sqrt{x_0^2 + v_0^2/\omega^2}, \quad (1.7)$$

con lo que resulta que las parejas (A, ϕ) y (x_0, v_0) contienen la misma información física, suponiendo conocido el valor de ω que, como se verá en casos específicos, está determinado por las características físicas del sistema oscilante.

Ejemplo 1.3

Un M.A.S. comienza su movimiento con una posición inicial $x_0 = 2$ cm y una velocidad inicial $v_0 = 5$ cm/s. ¿Cuáles son la amplitud y la fase?

Solución:

De (1.6): $\phi = -1,107$ rad, y de (1.6): $A = 4,47$ cm.

Ejemplo 1.4

Si la amplitud y la velocidad inicial de un M.A.S. son 4 cm y 3 cm/s, ¿cuál es la fase? ¿Desde qué punto se inició el movimiento?

Solución:

De (1.6) y (1.7): $\phi = -0,025$ y $x_0 = 3,87$ cm.

1.3 Dinámica del movimiento armónico simple

La cinemática básica del M.A.S. está dada por la ecuación (1.4), cuya solución es la ecuación (1.1). La ecuación (1.5) puede escribirse:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x,$$

que corresponde a la segunda ley de Newton para una masa m que se mueve en el eje x bajo la acción de una fuerza proporcional al desplazamiento. Esta ley de fuerza expresa, en particular, la acción de un resorte de acuerdo con la ley de Hooke, $F = -kx$, si se escribe $k = m\omega^2$. La constante elástica del resorte es k . Así pues, la frecuencia angular y el período de oscilación de la masa están dadas, respectivamente, por:

$$\omega = \sqrt{k/m}, \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}.$$

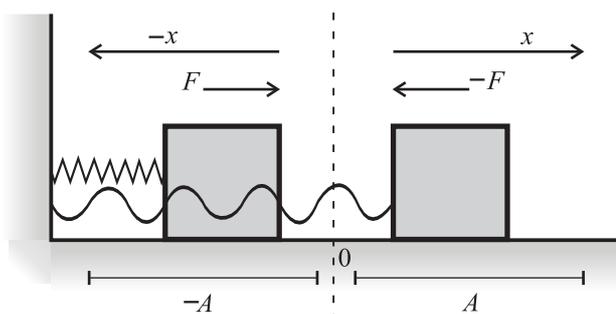


Figura 1.4. Sistema oscilante masa-resorte.

La conclusión que puede obtenerse de lo anterior es bastante simple: *fuerzas proporcionales al desplazamiento, y de dirección contraria a este, generan M.A.S.* En el caso aquí analizado la variable x es lineal, y representa una distancia. Pero, como se verá después, en el péndulo simple y en el de torsión puede ser también un ángulo. Continuando con el oscilador formado por una masa y un resorte que obedece la ley de Hooke lineal, $F = -kx$, puede entenderse el signo “menos” como indicador de que la fuerza es opuesta en dirección al desplazamiento. La figura 1.4 y la animación que la acompaña muestran que la fuerza es *restauradora*, es decir,



Robert Hooke (1635-1703)

Físico y astrónomo inglés, contemporáneo de Newton, con quien tuvo una disputa por la prioridad en el descubrimiento de la ley de inverso cuadrado para la gravitación. De hecho, cuando Newton la publicó se ofendió por no habersele reconocido su trabajo. Fue estudiante y luego profesor en Oxford y ayudante de Robert Boyle, el descubridor de una de las leyes básicas de los gases. Descubrió la rotación de Júpiter utilizando un telescopio de reflexión construido por él. Es conocido por la ley que lleva su nombre y que describe el comportamiento elástico de los resortes y en general de los cuerpos elásticos. Realizó innumerables observaciones con el microscopio compuesto, entre ellas sobre la estructura del corcho y sobre microfósiles; estas últimas le permitieron vislumbrar, mucho antes de Charles Darwin, la evolución de las especies.



Vea la animación *Dinámica del M.A.S.* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.



Vea la animación *Energía en el M.A.S.* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

intenta regresar la masa a su posición de equilibrio. Esta posición es la que ocupa la masa si está en reposo. Cualquier alejamiento de esta posición debe involucrar una fuerza restauradora. La masa oscilante se mueve sobre una superficie sin fricción. Veamos en detalle el movimiento del oscilador, si la masa m , unida al resorte de constante k , es soltada desde el reposo en $x_0 = A$.

El origen coordenado se escoge, por simplicidad, en la posición de equilibrio O . De la ecuación (1.6) se sigue que $\phi = 0$, y la ecuación (1.7) se satisface idénticamente. A medida que la masa se acerca a la posición de equilibrio la fuerza disminuye progresivamente hasta anularse en el punto O , a partir del cual la dirección de la fuerza se invierte y la masa se desacelera debido a la magnitud creciente, pero opuesta, de la fuerza hasta llegar a la posición $x = -A$, desde la cual el movimiento recomienza pero esta vez hacia la derecha. Al pasar nuevamente por O la fuerza se anula y aumenta en módulo, con dirección hacia la izquierda, por lo cual al final se detiene en $x = A$, completando así un ciclo de oscilación.

Ejemplo 1.5

Una masa de 2 kg unida a un resorte oscila con una amplitud de 0,5 m y comienza su movimiento desde el reposo. Calcule la posición inicial x_0 , la fase y el período, si el resorte tiene una constante de 15 N/m. ¿Cuál es la fuerza que inicialmente realiza el resorte sobre la masa?

Solución:

El período está dado por $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k} = 2,29$ s; de (1.1) se obtiene $x_0 = A = 0,5$ m. Reemplazando en (1.2): $\phi = \pi/2$. Finalmente, $F_0 = -kx_0 = -7,5$ N.

1.4 Energía mecánica en el movimiento armónico simple

Considérese una vez más el sistema masa-resorte regido por una fuerza $F = -kx$, que es conservativa según lo estudiado en el curso anterior. La energía potencial de un resorte de constante k tiene la forma $E_p = \frac{1}{2}kx^2$. De las ecuaciones (1.1) y (1.2) se sigue que las energías cinética y potencial están dadas por

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi),$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi).$$

Si se tiene en cuenta que $\omega^2 = k/m$, puede escribirse la energía mecánica total como

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)] = \frac{1}{2}kA^2.$$

Puesto que k y A son constantes, la energía total es, en efecto, conservada. Esto es cierto en tanto sea despreciable la fricción, que actúa como una fuerza disipativa.

El sistema masa-resorte puede ser estudiado desde el punto de vista del intercambio entre formas de energía. Cuando la masa es dejada en libertad desde su distancia máxima A coincidente con x_0 (pues $v_0 = 0$ según (1.6)), la energía mecánica total es potencial ($\frac{1}{2}kA^2$). A medida que la masa se mueve hacia la izquierda su

energía cinética aumenta a expensas de la potencial hasta que en el origen coordinado es máxima y su energía potencial es cero. Cuando el movimiento continúa hacia la izquierda la energía cinética disminuye hasta hacerse cero en $x = -A$, punto donde toda la energía es potencial. Al regresar el oscilador hacia la derecha cambia una vez más a cinética en el origen y luego a potencial en $x = A$, completándose un ciclo de oscilación. El sistema masa-resorte es por tanto un oscilador de energía.

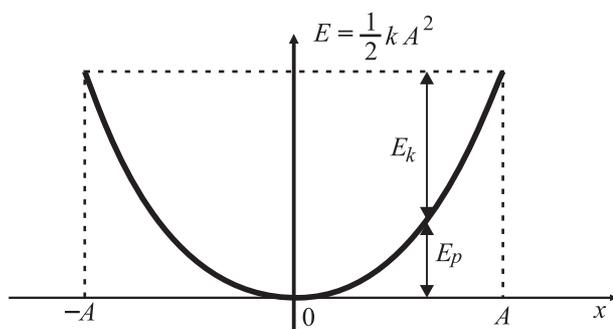


Figura 1.5. Conservación de energía en el movimiento armónico simple.

La figura 1.5 permite ver esto de una forma más clara. De la ecuación

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (1.8)$$

es fácil ver que en los extremos $x = \pm A$ es cierto que $E_p = \frac{1}{2}kA^2$ y $E_k = 0$, y que en $x = 0$: $E_p = 0$ y $E_k = \frac{1}{2}kA^2$. La curva sólida corresponde a E_p . La suma en cada punto es la energía total E . Obsérvese que el M.A.S. está asociado a una forma cuadrática en la energía potencial.

Ejemplo 1.6

En un sistema masa-resorte con $k = 20$ N/m y $m = 0,5$ kg, la masa se suelta desde el reposo en $x = 3$ cm. Escriba las expresiones para x, v y a como funciones del tiempo. Calcule su energía mecánica.

Solución:

La frecuencia angular del M.A.S. es $\omega = \sqrt{k/m} = 6,37$ rad/s. De (1.6) y (1.7) se concluye que $A = 3$ cm y $\phi = 0$. En consecuencia, de (1.1), (1.2) y (1.3): $x = 3 \text{ sen}(6,327t)$, $v = -18,91 \text{ cos}(6,327t)$, $a = -120,09 \text{ sen}(6,327t)$. La energía mecánica está dada por $E = \frac{1}{2}kA^2 = 90$ J.

Ejemplo 1.7

Una masa de 1 kg unida a una cuerda de 3 m se suelta desde un ángulo inicial de 6° . Calcule la velocidad con que pasa por el punto más bajo de la trayectoria.

Solución:

La conservación de la energía mecánica entre los puntos más bajo y más alto de la trayectoria se escribe: $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0$. Escogiendo el cero de la energía potencial en el punto más bajo de la trayectoria se tiene $h = 0$, además $v_0 = 0$, y de la geometría de la figura 2.3 se tiene que $h_0 = l(1 - \cos \theta_0)$. Luego $v = 0,567$ m/s.

Ejemplo 1.8

Utilizando la conservación de la energía mecánica para un sistema masa-resorte, calcule el período de la oscilación.



Vea el documento "Oscilaciones anarmónicas" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

Solución:

De $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = E = \frac{1}{2}kA^2$ se sigue:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

Un cuarto de la oscilación se realiza entre 0 y A, y tiene una duración de $T/4$; así, puede escribirse:

$$\int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{m}{k}} \int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}.$$

El cambio de variable $x = A \sin \theta$ permite realizar la integración y concluir que $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Módulo 2

Algunos osciladores típicos

Contenidos del módulo

- 2.1 Sistema vertical masa-resorte
- 2.2 Péndulo simple
- 2.3 Péndulo compuesto
- 2.4 Péndulo de torsión
- 2.5 Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme

Objetivos del módulo

- 1. Calcular el período de péndulos simples y compuestos, para pequeñas oscilaciones.
- 2. Calcular los períodos del sistema masa-resorte y del péndulo de torsión.
- 3. Estudiar la conexión entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme.

Preguntas básicas

- 1. ¿Cuál es el período de los osciladores más simples?
- 2. ¿Qué son pequeñas oscilaciones?
- 3. ¿Qué conexión existe entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme?

Introducción

El sistema masa-resorte considerado en secciones anteriores se rige según la ley de Hooke $F = -kx$. En esta sección veremos otros sistemas en los que la acción externa, ya sea la fuerza o el torque, es proporcional al desplazamiento o al ángulo, y en forma tal que la relación es lineal. Solo relaciones de este tipo generan M.A.S.



El péndulo puede utilizarse para medir el tiempo.



Vea la animación *Péndulo simple* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

2.1 Sistema vertical masa-resorte

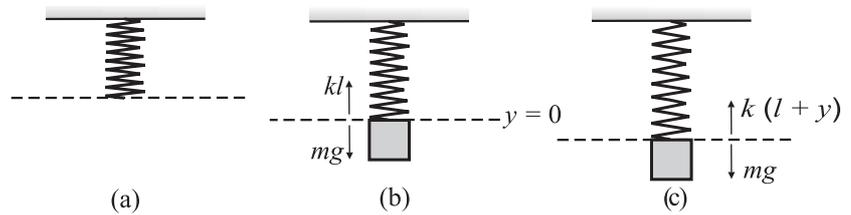


Figura 2.1. Un sistema vertical masa-resorte es puesto en oscilación.

La figura 2.1 muestra la siguiente secuencia: (a) Un resorte suspendido. (b) Al resorte le ha sido añadida una masa m , por lo cual, si está en equilibrio, el resorte se estira una distancia $l = mg/k$. (c) La masa m se jala hacia abajo una distancia y y se suelta. El sistema comienza entonces a oscilar bajo la acción de las fuerzas $k(l+y)$ y mg . Si se escoge el eje y positivo hacia abajo la segunda ley de Newton toma la forma

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - k(l+y),$$

y como $mg = kl$, la ecuación se simplifica y se logra la expresión

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{m} y = 0, \quad (2.1)$$

que describe un oscilador armónico simple de frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$. La oscilación se realiza con un desplazamiento y respecto al equilibrio dado por $y = A \cos(\omega t + \phi)$.

Ejemplo 2.1

En el momento en que una masa unida a un resorte pasa por su posición de equilibrio, su velocidad es de 0,4 m/s. Si la constante del resorte es de 10 N/m y la masa es de 2 kg, calcule la amplitud y la fase. Escriba las ecuaciones de movimiento.

Solución:

La frecuencia angular es $\omega = \sqrt{k/m} = 2,23$ rad/s. De (3.2) y (3.3) se tiene $\phi = \pi/2$ y $A = 0,18$ m, de modo que, según (1.1), (1.2) y (1.3): $x = 0,18 \cos(2,23t + \pi/2) = -0,18 \sin(2,23t)$, $v = -0,4 \cos(2,23t)$, $a = 0,9 \sin(2,23t)$.

2.2 Péndulo simple

Considérese una masa m aproximadamente puntual que puede oscilar en el extremo de una cuerda de masa despreciable y de longitud l , alrededor de su posición vertical de equilibrio (figura 2.2). Sobre la masa actúan su peso y la tensión de la cuerda. Al descomponer el peso en sus partes tangencial y normal resultará que el movimiento del péndulo será debido a la componente *tangencial* de su peso, $mg \sin \theta$, que actúa en sentido contrario al del aumento del ángulo. En consecuencia:

$$ma_t = -mg \sin \theta.$$

La aceleración tangencial se expresa como $a_t = \alpha l$, siendo α la aceleración angular $\alpha = d^2 \theta / dt^2$, por lo cual:

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.$$

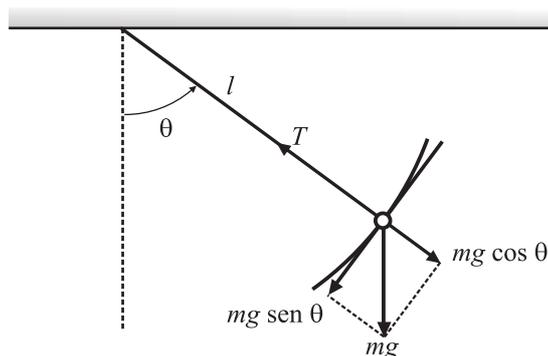


Figura 2.2. Fuerzas en el péndulo simple.

Debido a la presencia del término trigonométrico, esta ecuación no es, ciertamente, la de un oscilador armónico simple, pero se reduce a ella para pequeñas oscilaciones. Es en efecto cierto que para ángulos menores de 10° se cumple que $\sin \theta \simeq \theta$, donde el ángulo θ está medido en radianes. En consecuencia, *para pequeñas oscilaciones el péndulo simple es un oscilador armónico*:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta \simeq 0.$$

Para pequeñas amplitudes la frecuencia angular del péndulo es $\omega = \sqrt{g/l}$ y su período es $T = 2\pi\sqrt{l/g}$. Es cierto entonces que el período de un péndulo, para pequeñas oscilaciones, es independiente de su amplitud. Esta ley de *isocronismo del péndulo* fue descubierta por Galileo a finales del siglo XVI.

Ejemplo 2.2

Un niño en un columpio oscila con una amplitud x_m de 40 cm, medida horizontalmente (figura 2.3). Si la masa del niño es de 15 kg y el columpio tiene una longitud de 2,5 m, ¿cuál es su período? ¿Cuál su velocidad máxima? ¿Qué altura máxima alcanza?

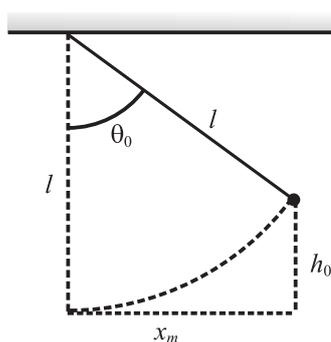


Figura 2.3. Geometría de la condición inicial del péndulo del ejemplo 2.2.

Solución:

El período del péndulo es $T = 2\pi\sqrt{l/g} = 3,17$ s. De acuerdo a la gráfica, $x_m = l \sin \theta_0$, de donde se deduce que el ángulo máximo es $\theta_0 = 9,2^\circ$; también, $h_0 =$



Vea el documento "Para ángulos pequeños $\sin \theta \cong \theta$ " en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

$l(1 - \cos \theta_0) = 0,032$ m, que es la máxima altura alcanzada; así pues, de la conservación de la energía, planteada entre los puntos más alto y más bajo de la trayectoria, y escogiendo el cero del potencial en el punto más bajo del péndulo, se concluye que $v = 0,793$ m/s. Observe que la información sobre la masa es irrelevante.

2.3 Péndulo compuesto

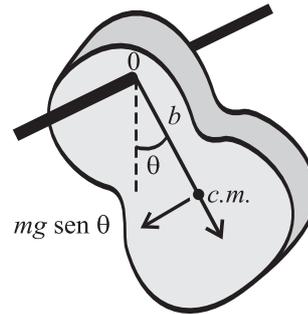


Figura 2.4. El péndulo compuesto.

Sea una masa m que puede girar alrededor de un punto 0 , no coincidente con su centro de masa, y situado a distancia b de este (figura 2.4). El torque alrededor de 0 , debido a su peso concentrado en su centro de masa, es $\tau = bmg \sin \theta$, y como según la dinámica de rotación $\tau = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$, donde I es su momento de inercia respecto a 0 , puede escribirse:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -bmg \sin \theta = 0,$$

expresión que para pequeñas amplitudes θ se reduce a la de un oscilador armónico simple de frecuencia $\omega = \sqrt{bmg/I}$:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{bmg}{I} \theta \simeq 0.$$

Ejemplo 2.3

Una varilla uniforme de longitud 1 m oscila alrededor de su extremo (figura 2.5). Calcule el período de sus pequeñas oscilaciones.

Solución:

El momento de inercia de la varilla, respecto a un eje que pasa por su centro de masa, es $I_0 = ml^2/12$. De acuerdo al teorema de Steiner el momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase a través de su extremo es $I = I_0 + m(l/2)^2 = ml^2/3$. Con $b = l/2$ y $g = 9,8$ m/s², el período de este péndulo compuesto es $T = 2\pi\sqrt{I/bmg} = 1,64$ s.

2.4 Péndulo de torsión

Si un sólido (un disco, por ejemplo, como en la figura 2.6) se suspende de una fibra elástica, su posición de equilibrio corresponderá a un punto situado en una línea vertical que pasa por su centro de masa. Si se gira el cuerpo un pequeño ángulo

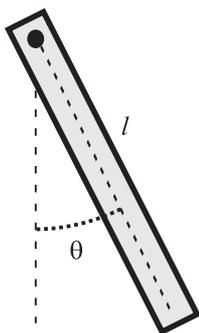


Figura 2.5. Una varilla oscilante es un péndulo compuesto.

θ , la fibra responderá ejerciendo sobre el cuerpo un torque en sentido contrario a θ y proporcional a él: $\tau = -\kappa\theta$. Esta expresión es el análogo rotacional de la ley de Hooke. Aquí κ es la constante de torsión de la fibra y es diferente para cada material. Bajo este torque el cuerpo, de momento de inercia I , responderá según la ecuación:

$$\tau = I\alpha = -\kappa\theta,$$

es decir

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\kappa}{I}\theta = 0,$$

correspondiente a un movimiento armónico simple de frecuencia $\omega = \sqrt{\kappa/I}$.

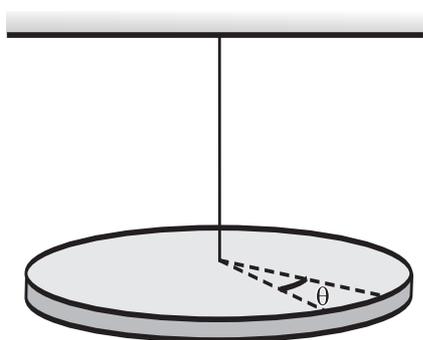


Figura 2.6. Un disco que oscila alrededor de su eje es un péndulo de torsión.

Ejemplo 2.4

Una esfera de radio 10 cm y masa 2 kg se encuentra suspendida de una cuerda. Si el período como péndulo de torsión es de 5 s, ¿cuál es el valor de la constante de torsión κ ?

Solución:

El período del péndulo es $T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$. Puesto que el momento de inercia de una esfera, respecto a un eje que pasa por su centro de masa es $I = \frac{2}{5}mR^2$, podremos escribir $T = 2\pi\sqrt{2mR^2/5\kappa}$. Despejando κ obtenemos: $\kappa = 5T^2/8\pi^2mR^2 = 79,16$ Nm.



Vea la animación *M.A.S.* y *M.C.U.* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

2.5 Relación entre el movimiento armónico simple y el movimiento circular uniforme

El movimiento armónico simple puede ser considerado como la proyección, sobre un eje diametral, de un movimiento circular uniforme (figura 2.7).

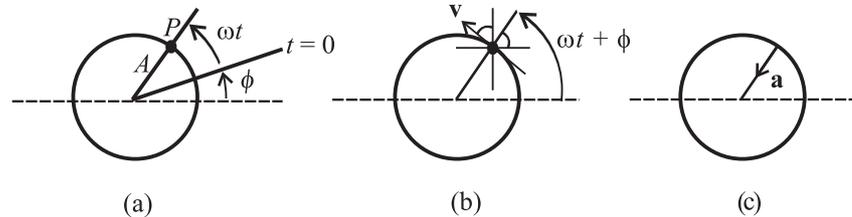


Figura 2.7. Gráficas de posición, velocidad y aceleración en el M.C.U. cuyas proyecciones horizontales describen un M.A.S.

Demostración:

Considérese una partícula P en movimiento uniforme y de modo tal que en $t = 0$ su distancia al centro forme un ángulo ϕ con el eje horizontal x . En cualquier instante t su radio vector A formará con el eje x un ángulo $\omega t + \phi$, por lo cual su movimiento se describe como

$$x = A \cos(\omega t + \phi).$$

Se concluye que la proyección horizontal de la velocidad v es de la forma

$$v_x = -v_0 \sin(\omega t + \phi),$$

y como en el movimiento circular uniforme $v_0 = \omega A$, es cierto que

$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi).$$

Finalmente, ha de tenerse en cuenta que en el movimiento circular uniforme la única aceleración es centrípeta. De acuerdo a la cinemática, $a = v^2/A = \omega^2 A$, de modo que su componente horizontal será:

$$a_x = -a \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x.$$

Queda así probada la conexión entre el M.A.S. y el M.C.U. *El movimiento armónico simple es una proyección del movimiento circular uniforme.* Recíprocamente, el movimiento circular uniforme puede ser considerado como superposición de dos movimientos armónicos simples perpendiculares y de la misma frecuencia. Esto es, si $x = A \cos(\omega t + \phi)$ y $y = A \sin(\omega t + \phi)$, entonces $x^2 + y^2 = A^2$, que es la ecuación de un círculo, y como $v_x = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$ y $v_y = A\omega \cos(\omega t + \phi)$, se tiene que $v_0^2 = v_x^2 + v_y^2 = A^2\omega^2$, es decir, $v_0 = \omega A$, que es la ecuación que describe el movimiento circular uniforme.

También, de $a_x = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi)$ y $a_y = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi)$ se tiene $a^2 = a_x^2 + a_y^2 = A^2\omega^4$, tal que $a = \omega^2 A$, ecuación que proporciona la aceleración en un M.C.U.

Ejemplo 2.5

Un objeto gira a 100 rev/s en un círculo de radio 20 cm. Considere el movimiento de su sombra sobre el eje x y escriba las expresiones para x , v y a como funciones del tiempo.

Solución:

Con $\omega = 2\pi f = 628,3$ rad/s se obtiene, de (1.1), (1.2) y (1.3) en unidades M.K.S.:

$$\begin{aligned}x &= 0,20 \cos(628,3t), \\v &= -125,66 \operatorname{sen}(628,3t), \\a &= -78952,178 \operatorname{sen}(628,3t).\end{aligned}$$

Módulo 3

Superposición de movimientos armónicos simples

Contenidos del módulo

- 3.1 Con igual dirección y frecuencia
- 3.2 Con igual dirección y diferente frecuencia
- 3.3 Con direcciones perpendiculares

Objetivos del módulo

- 1. Estudiar el movimiento resultante de la combinación de dos movimientos armónicos simples, sean ellos de igual dirección o perpendiculares, y de igual o diferente frecuencia.
- 2. Estudiar el fenómeno de los pulsos.
- 3. Estudiar la generación de las figuras de Lissajous.

Preguntas básicas

- 1. ¿Qué tipo de trayectoria genera la combinación de dos M.A.S.?
- 2. ¿Qué es un pulso?
- 3. ¿Qué son las figuras de Lissajous?

Introducción

En este módulo se explora el resultado de la superposición de dos movimientos armónicos simples. La atención estará dirigida en particular a la adición de movimientos con igual dirección y frecuencias iguales o diferentes, y a movimientos con direcciones perpendiculares. Al final se introduce la noción de *pulso*.



El metrónomo es utilizado por los músicos como ayuda en la composición de una pieza musical.



Vea la animación *Superposición con frecuencias iguales* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

3.1 Con igual dirección y frecuencia

El desplazamiento de una partícula bajo la acción de dos M.A.S. de igual frecuencia y en la misma dirección está descrito por:

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

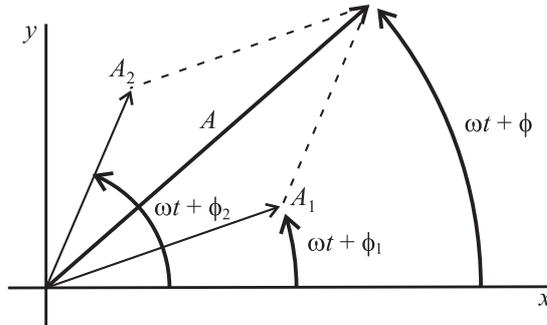


Figura 3.1. Composición de dos M.C.U. cuya proyección horizontal describe la suma de dos M.A.S.

Gráficamente (figura 3.1) este movimiento corresponde a la proyección sobre el eje horizontal de la resultante de la suma de dos vectores que giran alrededor de 0 con la misma velocidad angular ω . En consecuencia el vector resultante tiene la misma velocidad angular ω . Así, si A es el módulo de la resultante, entonces la proyección horizontal de la resultante será

$$x = A \cos(\omega t + \phi),$$

y por tanto:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = A_1 \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cos(\omega t + \phi_2).$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$$

y factorizando, puede escribirse:

$$\cos \omega t [A \cos \phi - A_1 \cos \phi_1 - A_2 \cos \phi_2] = \text{sen } \omega t [A \text{ sen } \phi - A_1 \text{ sen } \phi_1 - A_2 \text{ sen } \phi_2].$$

Puesto que $\cos \omega t$ y $\text{sen } \omega t$ son linealmente independientes debe ser cierto que cada corchete se anula, y en consecuencia:

$$A \text{ sen } \phi = A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2, \quad (3.1)$$

$$A \cos \phi = A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2.$$

a. Dividiendo el primer término por el segundo se obtiene la fase ϕ :

$$\tan \phi = \frac{A_1 \text{ sen } \phi_1 + A_2 \text{ sen } \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}. \quad (3.2)$$

b. Elevando al cuadrado cada una de las ecuaciones (3.1) y sumándolas se obtiene la amplitud:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_1 - \phi_2). \quad (3.3)$$

Analice en detalle los siguientes casos particulares:

- $\phi_1 = \phi_2$, en el cual los dos movimientos están *en fase*, e interfieren constructivamente (se suman).
- $\phi_1 = \phi_2 + \pi$, en el cual los dos movimientos están *en contrafase*, e interfieren destructivamente (se restan). Se anulan por completo si $A_1 = A_2$.
- $\phi_1 = \phi_2 + \pi/2$. Los dos movimientos están *en cuadratura*.

En cada uno de los tres casos evalúe A y ϕ .

Ejemplo 3.1

Considere una partícula sometida simultáneamente a los dos siguientes M.A.S.: $x_1 = 5 \sin(3t)$ y $x_2 = 8 \sin(3t + \pi/2)$. Calcule el movimiento resultante.

Solución:

Por comparación con (1.1) se tiene: $A_1 = 5$, $A_2 = 8$, $\phi_1 = 0$, $\phi_2 = \pi/2$. En consecuencia, de (3.2) y (3.3): $\phi = -34,33$ rad y $A = 9,43$, por lo cual

$$x = A \cos(\omega t + \phi) = 9,43 \cos(3t - 34,23).$$

3.2 Con igual dirección y diferente frecuencia

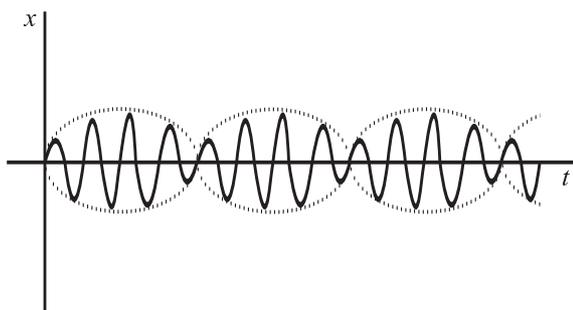


Figura 3.2. Un pulso es la superposición de dos M.A.S. de frecuencias cercanas.

Recurriendo a la figura 3.2, donde ahora $\omega_1 \neq \omega_2$, resulta que los vectores, al rotar, no mantienen constante en el tiempo su suma, ni la resultante gira con velocidad angular constante. Para simplificar sea $\phi_1 = \phi_2 = 0$, con lo cual puede probarse que

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]},$$

de modo que *la amplitud de la resultante oscila*; esto se conoce como “modulación de la amplitud”. La frecuencia de esta oscilación es $\omega = |\omega_1 - \omega_2|$.

Simplificando un poco más, haremos $A_1 = A_2$, con lo cual

$$x = x_1 + x_2 = A[\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t],$$

y como:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right),$$

se sigue que

$$x = 2A \cos \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right].$$

Esta ecuación indica que el movimiento resultante es oscilatorio con frecuencia angular $(\omega_1 + \omega_2)/2$ y amplitud $A' = 2A \cos [(\omega_1 - \omega_2)t/2]$. La gráfica correspondiente, que en el caso acústico produce un sonido conocido como pulso (*beat* es su nombre inglés), tiene la forma indicada en la figura 3.2. La línea punteada muestra la *modulación de la amplitud* de la oscilación.

Ejemplo 3.2

Una partícula está sometida a los dos siguientes M.A.S.: $x_1 = 5 \text{ sen } (6t)$ y $x_2 = 5 \text{ sen } (7t)$. Calcule la amplitud y la frecuencia del pulso resultante.

Solución:

Puesto que $A_1 = A_2$ el valor de A' está dado por $A' = 2A_1 \cos [(\omega_1 - \omega_2)t/2] = 10 \cos (0,25t)$. En consecuencia:

$$x = A' \cos [(\omega_1 + \omega_2)t/2] = [10 \cos (0,25t)] \cos (6,5t).$$

3.3 Con direcciones perpendiculares

Se produce cuando una partícula que se mueve en un plano está sometida a dos M.A.S. perpendiculares, uno en el eje x , otro en el y , del tipo:

$$x = A \cos \omega_1 t, \quad y = B \cos(\omega_2 t + \alpha). \tag{3.4}$$

La forma exacta del movimiento de la partícula depende del valor de la diferencia de fase α y de la relación entre ω_1 y ω_2 .

Algunos casos interesantes son:

- a. $\alpha = 0, \omega_1 = \omega_2$. Se tiene, entonces, $y = Bx/A$, que corresponde a una oscilación a lo largo de una recta. En este caso los dos movimientos están en fase.
- b. $\alpha = \pi, \omega_1 = \omega_2$. Hay un desfase de 180° y el movimiento de la partícula se realiza a lo largo de la línea $y = -Bx/A$.
- c. $\alpha = \pi/2, \omega_1 = \omega_2$. Con un desfase de 90° obtenemos $x = A \cos \omega t, y = B \text{ sen } \omega t$, de donde se concluye que el movimiento de la partícula se realiza a lo largo de la elipse $x^2/A^2 + y^2/B^2 = 1$, y en dirección de las agujas del reloj. Si $\alpha = -\pi/2$, la elipse es recorrida en el sentido contrario a las agujas del reloj. La elipse tiene la forma indicada en la figura 3.3a.

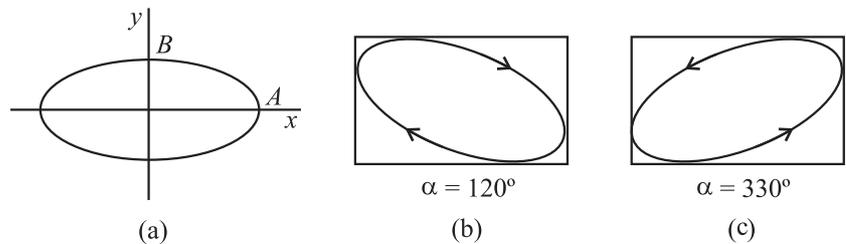


Figura 3.3. Tres ejemplos de combinación de dos M.A.S. en direcciones perpendiculares.

d. Para valores de α de 120° y 330° las trayectorias son las mostradas en las figuras 3.3b y 3.3c.

Las figuras más interesantes, asociadas al nombre de *Lissajous*, corresponden a la interferencia de dos movimientos oscilatorios perpendiculares de *diferentes* frecuencias. En la figura 3.4 se ilustran varios casos con diferentes valores de ω_1/ω_2 y α . Una buena muestra de estas figuras se encuentra en el libro de física de Alonso Finn, sección 10.9.

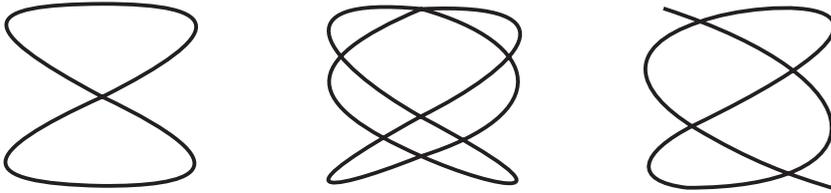


Figura 3.4. Tres ejemplos de figuras de Lissajous.

Ejemplo 3.3

Obtenga la ecuación que rige el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de dos M.A.S. perpendiculares del siguiente tipo: $x = 2 \text{ sen } \omega t$, $y = 4 \text{ sen } (\omega t + \pi/2)$.

Solución:

La expresión para y es equivalente a $y = 4 \text{ cos } \omega t$; formando $\text{sen}^2 \omega t + \text{cos}^2 \omega t$, a partir de las dos oscilaciones perpendiculares se concluye que el movimiento resultante se realiza a lo largo de la elipse $x^2/4 + y^2/16 = 1$ y en sentido contrario a las agujas del reloj. En efecto, obsérvese que x aumenta a partir de $t = 0$, mientras y disminuye.

Módulo 4

Oscilaciones amortiguadas, forzadas y resonancia

Contenidos del módulo

- 4.1 Oscilaciones amortiguadas
- 4.2 Oscilaciones forzadas y resonancia

Objetivos del módulo

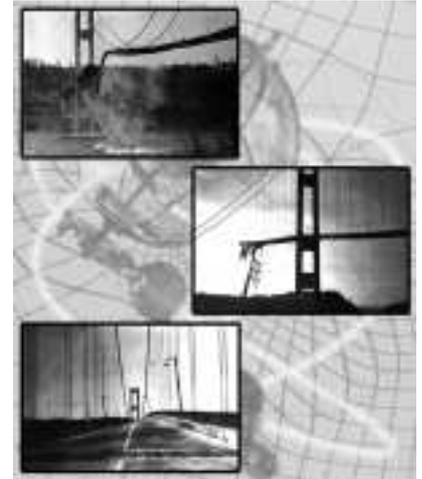
- 1. Estudiar las consecuencias de la presencia de fuerzas disipativas.
- 2. Estudiar el efecto de fuerzas externas que actúan sobre osciladores.
- 3. Estudiar el fenómeno de resonancia.

Preguntas básicas

- 1. ¿Cuál es el efecto de una fuerza disipativa?
- 2. ¿Qué es una oscilación forzada?
- 3. ¿Qué es resonancia?

Introducción

Las fuerzas disipativas son frecuentes en los sistemas físicos. Aparecen en el movimiento de cuerpos en medios viscosos como el aire o el agua, y son comunes cuando una superficie se desliza sobre otra. En este módulo se considera el efecto causado por estas fuerzas sobre el movimiento de un oscilador armónico. Además de fuerzas disipativas se incluyen fuerzas externas, que permiten mantener el movimiento de los osciladores a pesar de la disipación. Importante en esta situación es el concepto de *resonancia*.



El colapso del puente de Tacoma fue un efecto de la resonancia entre el viento y la estructura.



Vea el documento "Ecuaciones diferenciales" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.



Vea la animación *Oscilaciones amortiguadas* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

4.1 Oscilaciones amortiguadas

En los diversos ejemplos considerados hasta ahora, como el sistema masa-resorte, el péndulo simple, el compuesto y el de torsión, se ha visto que la amplitud de la oscilación (es decir, el máximo alejamiento de la coordenada respecto a su posición de equilibrio) es siempre la misma. Esto es debido a que se han dejado fuera de consideración las fuerzas de fricción o de viscosidad, que usualmente están presentes en estos sistemas. Consideremos en particular el sistema masa-resorte sometido a una fuerza viscosa proporcional a la velocidad y opuesta a ella en dirección, y a la fuerza recuperadora del resorte. Este tipo de fuerza, conocida como ley de Stokes, tiene la forma $F = -\lambda v$. Así, la ecuación de movimiento de la masa es de la forma:

$$ma = -kx - \lambda v,$$

o también:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (4.1)$$

donde $\omega^2 = k/m$ y $2\beta = \lambda/m$.

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, para amortiguación pequeña (caso *subamortiguado*), es de la forma:

$$x = Ae^{-\beta t} \cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t + \alpha), \quad (4.2)$$

donde α y A son constantes que estarán determinadas por las condiciones iniciales. El período de este movimiento es $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$. No es difícil verificar por sustitución directa que la ecuación (4.2) satisface la ecuación diferencial (4.1). De la presencia del exponencial $e^{-\beta t}$ es claro que la amplitud de la oscilación decrece con el tiempo, esto es: la oscilación se amortigua. El comportamiento del oscilador en el tiempo se muestra en la figura 4.1. Tanto la energía potencial como la cinética decrecen con el tiempo, dando lugar a la disipación de la energía total del sistema, usualmente en forma de calor.

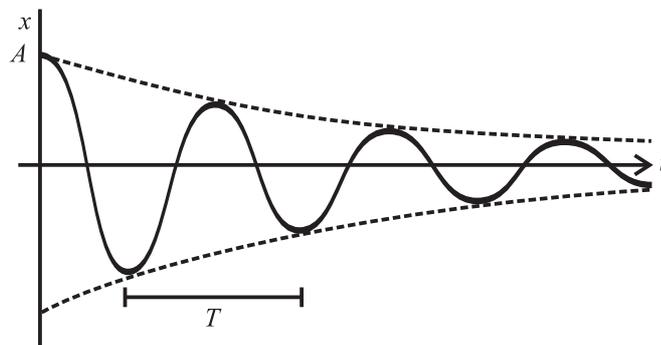


Figura 4.1. Gráfica de elongación versus tiempo para un movimiento subamortiguado.

Si la amortiguación es grande ($\beta > \omega$), lo que ocurre por ejemplo si el sistema masa-resorte no está en un medio poco viscoso como el aire, sino sumergido en un líquido, la solución a la ecuación (4.1) toma la forma *sobreamortiguada*:

$$x = \frac{A}{2} e^{-\beta t} \left[e^{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t + \alpha} + e^{-\sqrt{\beta^2 - \omega^2}t + \alpha} \right]. \quad (4.3)$$

El movimiento no corresponde ahora a una oscilación. En la solución se nota la ausencia de los términos trigonométricos que son típicos de una oscilación. En vez

de oscilar, la masa se acerca lentamente a su posición de equilibrio sin sobrepasarla (figura 4.2, línea *a*).

El caso *crítico*, correspondiente a $\beta = \omega$, tiene como solución

$$x = (A + Bt)e^{-\beta t} \quad (4.4)$$

y corresponde a la línea *b* de la figura 4.2. Tampoco corresponde a una oscilación; en este caso la masa se acerca a su posición de equilibrio sin sobrepasarlo, y algo más rápido que en el caso sobreamortiguado.

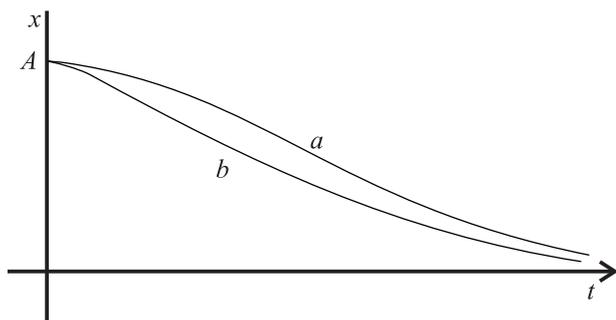


Figura 4.2. Movimiento sobreamortiguado (a) y crítico (b).

Ejemplo 4.1

¿Qué tiempo t' se necesita para que la amplitud de un movimiento armónico subamortiguado disminuya a la mitad?

Solución:

Si $x = A/2$ en $t = t'$, se sigue en (4.2) que

$$e^{\beta t'} = 2 \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \beta^2} t' + \alpha \right).$$

El valor de t' no puede ser obtenido de esta ecuación por medios analíticos; esta es una ecuación trascendental que es solucionable por métodos numéricos, una vez que se provean los valores de β , ω y α .

4.2 Oscilaciones forzadas y resonancia

Debido a la presencia de la fricción viscosa (que es lo usual en sistemas tales como un columpio, un sistema masa-resorte oscilando verticalmente, o un péndulo), los sistemas llegan finalmente a su estado de reposo, después de disipar gradualmente su energía mecánica. En presencia de disipación viscosa, la oscilación puede persistir solo si una acción externa es ejercida sobre el sistema, con el propósito de suplir la pérdida de energía por fricción. El caso más simple es el de una fuerza externa oscilante de la forma $F = F_0 \cos \omega_e t$, donde ω_e es la frecuencia angular de la fuerza externa. La ecuación de movimiento del oscilador forzado y amortiguado, en una dimensión, es:

$$ma = \sum_i F_i \quad (4.5)$$

$$= -kx - \lambda v + F_0 \cos \omega_e t, \quad (4.6)$$



Vea el documento "Ecuaciones diferenciales" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

equivalentemente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_e t, \quad (4.7)$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del oscilador, y $2\beta = \lambda/m$. La ecuación diferencial (4.4) es lineal e inhomogénea. El término inhomogéneo es $(\frac{F_0}{m}) \cos \omega_e t$. De acuerdo a la teoría de ecuaciones diferenciales una ecuación diferencial inhomogénea posee dos tipos de solución, una para la ecuación homogénea, coincidente con la ecuación (4.2) y cuyas soluciones pueden ser sobre o subamortiguada o crítica, como se discutió en la sección anterior. En cualquiera de los tres casos el movimiento eventualmente desaparece, razón por la cual la solución homogénea también se llama transitoria o *transiente*.

La solución que persiste es la inhomogénea, asociada a la fuerza externa. La teoría de las ecuaciones diferenciales permite demostrar que este segundo tipo de solución es de la forma

$$x = B \cos(\omega_e t - \alpha), \quad (4.8)$$

con

$$B = F_0/m[(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4\beta^2 \omega_e^2]^{1/2} \quad \text{y} \quad \tan \alpha = 2\beta \omega_0/(\omega_0^2 - \omega_e^2). \quad (4.9)$$

Como se ve, la amplitud B de la oscilación no es ahora una constante determinada por las condiciones iniciales de la oscilación; más bien, depende de la amplitud F_0 de la fuerza externa y de su frecuencia. Mientras más pequeño sea el factor de amortiguación β , mayor será la influencia del término $\omega_0^2 - \omega_e^2$, hasta el punto de que, para osciladores sumergidos en medios de baja viscosidad, la amplitud B de la oscilación puede crecer catastróficamente si la frecuencia de la fuerza externa es igual a la frecuencia natural de oscilación. Este efecto se conoce como *resonancia*.

De la expresión (4.8) para la amplitud, y por derivación respecto a ω_e , se sigue que B tiene un máximo (véase el problema 35) para una frecuencia externa $\omega_e = \omega_A = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$. El valor máximo de B es

$$B_m = \frac{F_0}{2m\beta \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Para valores de la frecuencia externa iguales a ω_A se dice que hay *resonancia de amplitud*.

Compárense ahora las expresiones para la velocidad y la fuerza externa. De (4.8) se obtiene:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_e B \sin(\omega_e t - \alpha) = -\frac{\omega_e F_0 \sin(\omega_e t - \alpha)}{m \sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_e^2}} = v_0 \sin(\omega_e t - \alpha), \quad (4.10)$$

en donde v_0 dado por

$$v_0 = \frac{\omega_e F_0}{m \sqrt{(\omega_e^2 - \omega_0^2)^2 + 4\beta^2 \omega_e^2}} \quad (4.11)$$

toma su valor máximo (véase el problema 36) en $\omega_e = \omega_0$, valor para el cual, de acuerdo con (4.9), $\alpha = \pi/2$. Esto significa que para $\omega_e = \omega_0$ la fuerza externa y la velocidad tienen la misma variación temporal $\cos \omega_0 t$; es decir, con $\alpha = 0$ la fuerza y la velocidad están *en fase*. Para esta frecuencia la velocidad y la energía cinética son máximas y se dice que hay *resonancia de energía*. Por tanto: *hay resonancia*

de energía cuando la frecuencia ω_e de la fuerza aplicada es igual a la frecuencia natural de oscilación ω_0 . En estas condiciones el oscilador absorbe energía del modo más eficiente posible. Tal vez el ejemplo más conocido es el del padre que empuja el columpio con su hijo, con una frecuencia igual a la frecuencia natural del columpio.

Hemos de observar que cuando la amortiguación es muy pequeña no hay diferencia notable entre resonancia de amplitud y de energía: $\omega_A \simeq \omega_0$.

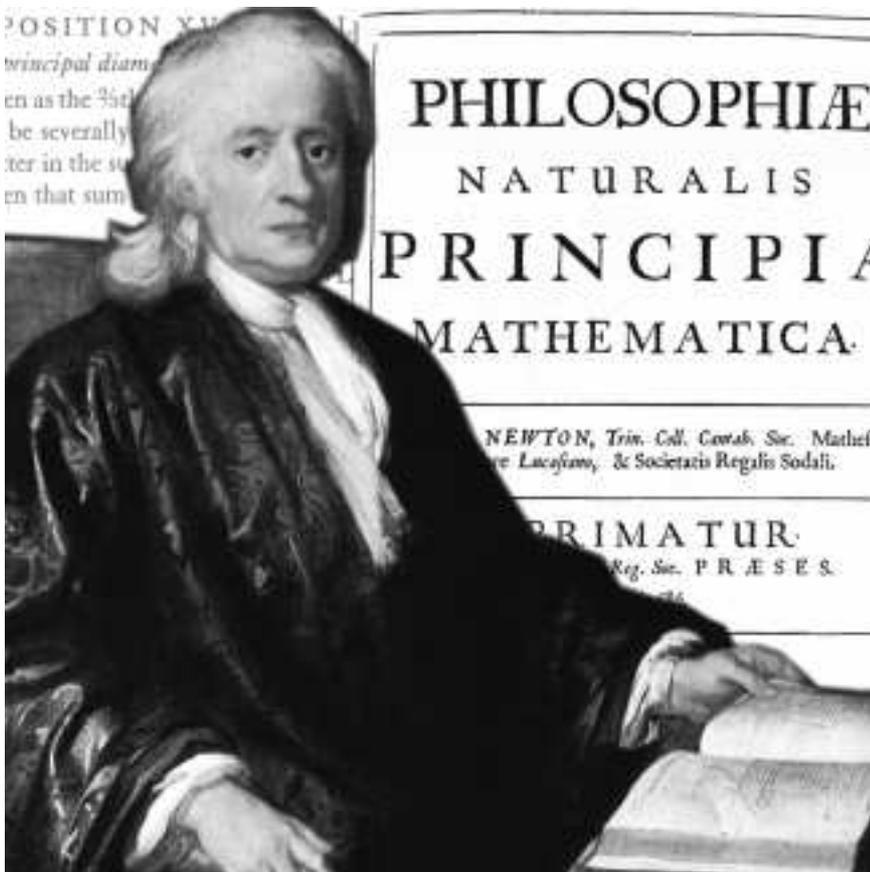
La resonancia puede ser nociva en sistemas mecánicos, pero es bastante útil en los circuitos eléctricos, pues permite en los receptores de radio “sintonizar la emisora”. En efecto, las ondas que vienen de una emisora de radio generan oscilaciones forzadas sobre el circuito del radio receptor. “Sintonizar” significa variar la frecuencia natural del oscilador eléctrico interno del aparato de radio, para que coincida con la frecuencia de la emisora. Cuando esta coincidencia ocurre la absorción de energía es máxima, y esa frecuencia será la que se escucha.



Visite la página
www.wsdot.wa.gov/TNBhistory/default.htm

Capítulo 2

Gravitación



Issac Newton, axiomatizador de la mecánica, aparece aquí con el frontispicio de los *Principia*.

Presentación

Galileo Galilei realizó estudios sistemáticos sobre la caída libre, los péndulos y el movimiento de los proyectiles. El resultado de estos trabajos fue la fundamentación de la mecánica, uno de cuyos frutos mayores se resume en la siguiente

Contenido breve

Módulo 5

La teoría newtoniana de la gravitación

Módulo 6

El campo gravitacional

Módulo 7

Energía potencial y potencial gravitacional

frase: *Todos los cuerpos, independientemente de su masa, caen con la misma aceleración.* Esta afirmación toma un sentido más profundo en el trabajo de Newton.

Por la misma época, Johannes Kepler obtuvo las leyes básicas que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Sus investigaciones pueden sintetizarse como sigue: a) Los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, con el Sol en uno de los focos, b) Hay una ley que regula la velocidad de su recorrido, conocida como ley de las áreas, c) Una tercera ley relaciona la distancia al Sol y el período de revolución.

Isaac Newton fue el diseñador de la gran síntesis que unificó la física terrestre de Galileo con la cinemática celeste de Kepler al proponer sus tres leyes del movimiento que son los axiomas de la mecánica: a) Ley de inercia, b) Ley de fuerza, c) Ley de acción-reacción. Estas leyes son el núcleo de su gran obra *Principia*.

El movimiento planetario puede ser descrito con el auxilio de estas leyes, si además se acepta la gran idea newtoniana de la gravitación universal: todos los cuerpos experimentan una atracción debida a sus masas; atracción que es universal, es decir, que se ejerce entre cada pareja de cuerpos sin importar dónde se encuentren, aunque ciertamente la magnitud de su atracción depende de la distancia que los separe.

La teoría de Newton describe con alta precisión el movimiento de los planetas alrededor del Sol, incluyendo la distorsión en la elipticidad de sus órbitas debido a las perturbaciones generadas por los otros planetas. En efecto, el cálculo de perturbaciones, iniciado por Newton y perfeccionado por Laplace, permitió no solo estudiar las anomalías en los movimientos planetarios, sino incluso predecir la existencia de dos nuevos planetas, Neptuno y Plutón, que fueron localizados en las regiones del cielo predichas por la teoría de Newton. La teoría de la gravitación permitió descubrir, además, que no solo las elipses son posibles, pues en general los movimientos celestes se realizan siguiendo cónicas. Estas curvas incluyen el círculo, la elipse, la parábola y la hipérbola. Mientras que los planetas se mueven siempre en elipses, algunos cometas se desplazan siguiendo elipses de alta excentricidad, y otros, no periódicos, se mueven a lo largo de hipérbolas o parábolas. El movimiento del cometa asociado al nombre de Halley fue descrito con precisión por Edmund Halley, amigo de Newton, quien corrió con los gastos de la primera edición de los *Principia*.

Con la teoría de Newton es posible describir el movimiento de la Luna, la periodicidad y altura de las mareas, el movimiento de las lunas de los otros planetas y de los satélites artificiales que orbitan el nuestro o que viajan a la Luna o a otros planetas. Con la teoría de Newton se han calculado, entre muchas, las trayectorias de las naves *Apolo* que fueron a la Luna, *Pathfinder* que voló a Marte y *Voyager I* y *II* que ya han salido del sistema solar.

La idea de Newton es también un primer paso en la construcción de teorías sobre la estructura a gran escala del universo, y en particular permite estudiar la estructura y la evolución de las estrellas, las galaxias y los cúmulos de galaxias.

En las siguientes secciones se verá cómo el concepto de fuerza gravitacional da lugar con relativa facilidad a un concepto muy útil, el de *campo gravitacional*, y a otro, el de *potencial gravitacional*, cuyo valor esencial es que simplifica la matemática de la gravitación y permite probar que la energía mecánica de un sistema gravitante es una cantidad conservada.

Un punto que no puede dejarse fuera de consideración es el siguiente: los fenómenos gravitacionales tienen carácter *lineal*, es decir, las fuerzas de gravitación son aditivas, esto es, se suman como vectores.

Es importante señalar que la teoría de Newton sobrevivió desde 1687, fecha en que fue enunciada, hasta 1915 cuando Einstein la reemplazó por su Teoría Gene-

ral de la Relatividad, de la cual la mecánica newtoniana es una excelente aproximación. La nueva teoría es no lineal, y no solo da una descripción más acertada de los fenómenos astronómicos a nivel del sistema solar sino que sienta unas bases más sólidas para la astrofísica y la cosmología. Más que ser solo una teoría de la gravedad, la teoría de Einstein involucra una nueva idea sobre el espacio y el tiempo.

Módulo 5

La teoría newtoniana de la gravitación

Contenidos del módulo

- 5.1 Las leyes de Kepler
- 5.2 La gravitación es una fuerza central
- 5.3 La ley de gravitación
 - 5.3.1 La constante de Cavendish
 - 5.3.2 Fuerzas centrales y ley de las áreas
 - 5.3.3 La constante de Kepler
 - 5.3.4 La masa del Sol
 - 5.3.5 La masa de la Tierra

Objetivos del módulo

1. Presentar las tres leyes de Kepler del movimiento planetario.
2. Demostrar que, de acuerdo a la dinámica, la gravitación es una fuerza central.
3. Presentar la forma general de la ley de gravitación universal.
4. Estudiar el método de evaluación de la constante de Cavendish.
5. Demostrar que la segunda ley de Kepler se cumple para fuerzas centrales.
6. Evaluar y realizar aplicaciones de la constante de Kepler.
7. Calcular las masas de la Tierra y el Sol por métodos astronómicos.

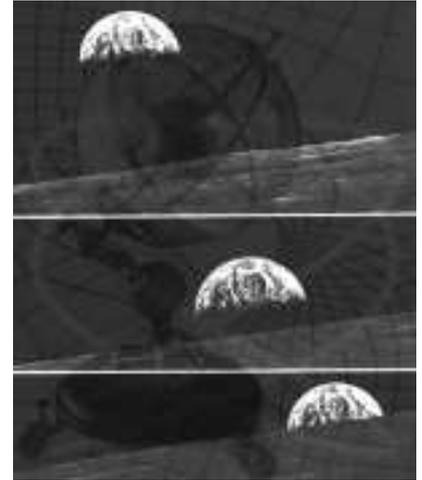
Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son las leyes que rigen el movimiento planetario?
2. ¿Qué se entiende por una fuerza central?
3. ¿Cuál es la forma general de la ley de gravitación universal?
4. ¿De qué cantidades depende la fuerza de gravitación?
5. ¿Cómo se evalúa la constante de Cavendish?
6. ¿De la noción de fuerza central cómo se deduce la ley de las áreas?
7. ¿Qué características tiene la constante de Kepler?
8. ¿Cómo pueden calcularse por métodos astronómicos las masas de la Tierra y el Sol?

Introducción

La idea de que la explicación del movimiento planetario necesitaba el concurso de una fuerza era bastante clara para varios investigadores en la época de Newton. La Tierra no era ya considerada como el centro del universo desde que fue aceptado el sistema heliocéntrico de Copérnico que reemplazó el antiguo geocentrismo griego y medieval. De acuerdo con el modelo de Copérnico, alrededor del Sol giran los planetas, entre ellos la Tierra. Si esta posee gravedad, también deben poseerla los demás planetas, el Sol y la Luna.

Gilles de Roverbal, cerca del año 1643, pensaba que cada partícula de materia es capaz de ejercer una acción sobre cualquier otra, por lo cual, en particular, la Luna y la Tierra se atraen, y la Luna no cae sobre la Tierra debido a la resistencia que presenta el éter, medio sutil que ocupa todo el universo.



La teoría newtoniana de gravitación permite describir el movimiento del sistema Tierra-Luna.

Alfonso Borelli, en 1665, opinaba que la atracción entre los cuerpos era contrarrestada por una tendencia centrífuga a abandonar la trayectoria curva siguiendo una trayectoria tangente. Suponía que, además de la atracción, era necesaria una fuerza tangente.

En la misma época, Robert Hooke creía que el movimiento planetario podía explicarse con los mismos principios que describen el movimiento pendular y que en los cálculos detallados deberían tenerse en cuenta las atracciones entre los diversos cuerpos celestes, con lo que anticipó la idea central del cálculo de perturbaciones. Descubrió luego que la fuerza que mantiene a los planetas en movimiento alrededor del Sol debe ser inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa de él.

Aunque Newton había encontrado esta ley unos diez años antes, Hooke reclamó el derecho del descubrimiento aun cuando sus modelos se referían a órbitas planetarias circulares. Newton fue el primero en demostrar que el movimiento en elipses, el cual corresponde a las órbitas planetarias, es causado por una fuerza central del tipo inverso cuadrado. Hooke, Halley y Wren conocían la forma matemática de la ley y su conexión con la tercera ley de Kepler, pero no lograron conectarla con las otras dos leyes de Kepler.

5.1 Las leyes de Kepler

Las leyes del movimiento planetario descubiertas a comienzos del siglo XVII por el astrónomo polaco Johannes Kepler afirman que:

1. Los planetas recorren órbitas elípticas con el Sol en uno de los focos (figura 5.1).
2. La recta trazada desde el Sol al planeta (llamada el radio vector) barre áreas iguales en tiempos iguales. (Se le conoce como ley de las áreas.)
3. El cuadrado del período de revolución de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

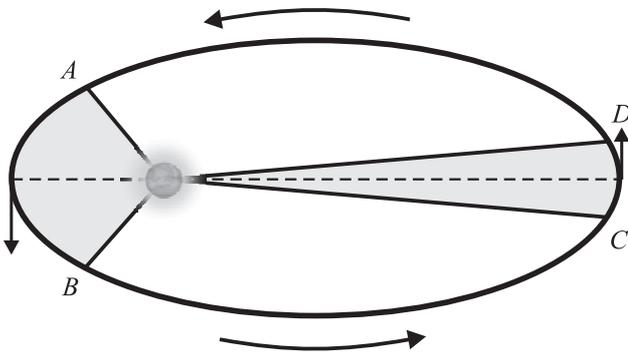


Figura 5.1. Las órbitas planetarias son elipses en las que se satisface la ley de las áreas.

La primera ley elimina las órbitas circulares y las combinaciones de órbitas circulares de la astronomía griega y copernicana. Ya no hay ecuantes, ni excéntricas, ni epiciclos, solo una elipse para cada planeta. La segunda ley elimina la uniformidad del movimiento pues revela que a mayor distancia del Sol menor es la velocidad del planeta.

En efecto, en la figura 5.1, en la que las dos áreas sombreadas son iguales, puede verse que el arco AB correspondiente a la distancia mínima del planeta al Sol es mayor que el arco CD asociado a la distancia máxima. En consecuencia, como las dos áreas son barridas en el mismo tiempo, los arcos AB y CD tardarán lo mismo en ser recorridos, y como $AB > CD$, entonces la velocidad del planeta será mayor mientras menor sea su distancia al Sol.

La tercera ley, conocida como *ley armónica*, tiene la forma

$$T^2 = KR^3, \quad (5.1)$$

donde T es el período de revolución del planeta alrededor del Sol y R su distancia media, definida como el semieje mayor de la elipse. K , la constante de Kepler, tiene el mismo valor para el movimiento de *cualquier* planeta alrededor del Sol; su valor puede ser establecido sin dificultad, si T es el período terrestre (1 año) y R la distancia media Tierra-Sol (150 millones de kilómetros). Si como unidad de tiempo escogemos el año y como unidad de distancia la de la Tierra al Sol conocida como Unidad Astronómica (UA), puede escribirse, de (5.1):

$$T^2 = R^3, \quad (5.2)$$

con R en UA y T en años. Para el movimiento de los satélites de un mismo planeta

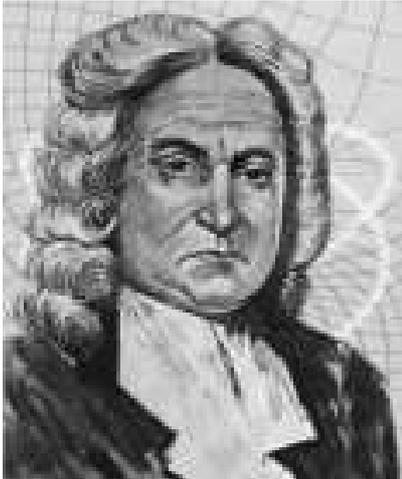


Johannes Kepler (1571-1630)

Astrónomo alemán. Los datos astronómicos obtenidos por él en el observatorio astronómico de Tycho Brahe, con quien trabajó desde 1600, le permitieron obtener sus tres leyes del movimiento planetario, enclavadas en una astronomía heliocéntrica de tipo copernicano. Estas leyes eliminaron los epiciclos y las ecuantes de Ptolomeo y Copérnico, propiciando el nacimiento de la nueva astronomía newtoniana. Trabajó también sobre óptica, en particular en la refracción de la luz. Publicó diversas obras en óptica y astronomía: *Dióptrica*, *El misterio cósmico*, *La armonía del mundo*, entre otras.



Vea la animación *Ley de las áreas* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.



Edmund Halley (1656-1742)

Matemático y astrónomo inglés amigo de Newton, quien le animó a escribir los *Principia* y financió su publicación. Utilizando la teoría newtoniana de gravitación calculó por vez primera la órbita de un cometa de 1682, afirmando que era el mismo observado en 1531 y 1607, y que retornaría en 1758, lo que en efecto ocurrió. En su honor este cometa lleva su nombre. Fue visto también en 1835, 1910 y 1986. Entre 1698 y 1700 realizó una expedición científica marítima para estudiar la declinación magnética, lo que le permitió hacer el mapa magnético de la Tierra. Desde 1720 fue director del Observatorio de Greenwich. Realizó medidas muy precisas de la distancia Tierra-Sol utilizando el tránsito de Venus frente al Sol.

la constante de Kepler cambia y es cierto que $T^2 = K'R^3$.

Desde la época de los griegos es conocido el período de revolución de los planetas respecto a las estrellas. La tercera ley permite entonces calcular su distancia media. Por ejemplo, Júpiter tiene un período de 11.9 años, de modo que su distancia media al Sol es de $R = T^{2/3} = 5,2$ UA.

La ley armónica permite deducir que la velocidad de un planeta es tanto mayor cuanto más cerca se encuentre del Sol. Si, por simplicidad, se supone una órbita circular, entonces, de $v = 2\pi R/T$ y de (5.1), por eliminación de T se concluye que

$$v^2 = \frac{4\pi^2}{KR}.$$

En consecuencia, Júpiter se mueve más lentamente que Marte, y este más lentamente que Mercurio.

Ejemplo 5.1

Si el período de la Luna alrededor de la Tierra es de 28 días, ¿cuál debe ser el período de un satélite que orbita la Tierra a una distancia de 1/10 de la distancia Tierra-Luna?

Solución:

De la tercera ley de Kepler para el sistema Tierra-Luna: $T_0^2 = K'R_0^3$, y para el sistema Tierra-satélite: $T^2 = K'R^3$, donde K' es la constante de Kepler. Por eliminación de K' se tiene $T = T_0(R/R_0)^{3/2} = 28/10^{3/2}$ días.

5.2 La gravitación es una fuerza central

La demostración de Hooke de que el movimiento de la Tierra alrededor del Sol (supuesto circular, por simplicidad) es causado por una fuerza central, dirigida hacia el centro del Sol, se basa en la expresión obtenida por Christiaan Huygens para la fuerza centrípeta. Si se quiere mantener un planeta de masa m en movimiento circular alrededor del Sol es necesaria una fuerza centrípeta de la forma:

$$F_c = m \frac{v^2}{r}.$$

Si se asume que el planeta se mueve uniformemente, su velocidad puede expresarse como el cociente de su circunferencia y su período alrededor del Sol:

$$v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Se obtiene entonces:

$$F_c = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}.$$

La tercera ley de Kepler ($T^2 = Kr^3$) puede ser usada aquí para eliminar T^2 , con lo cual:

$$F_c = \frac{4\pi^2 m}{K} \frac{1}{r^2}. \quad (5.3)$$

En consecuencia, la fuerza centrípeta que mantiene un planeta en movimiento circular alrededor del Sol debe ser inversa al cuadrado de la distancia. Este es en esencia el argumento de Hooke.

En el momento en que Newton comienza su gran síntesis, hay un conjunto de elementos dispersos que es necesario poner en concordancia: las tres leyes de

Kepler, las leyes de la caída libre, la noción de inercia, las leyes de movimiento, la fuerza centrípeta y la idea de la gravitación como una fuerza.

Newton asume que la fuerza de gravedad de la Tierra, responsable de la caída de los cuerpos, se extiende hasta la Luna y es la causante de su movimiento alrededor de la Tierra. Si esto es correcto deberá existir una conexión entre las aceleraciones de la caída libre y centrípeta de la Luna con el radio de la Tierra y la distancia Tierra-Luna. La relación entre la aceleración centrípeta de la Luna ($a_c = v^2/r$) y la aceleración de la gravedad (g) para un cuerpo cercano a la superficie terrestre es

$$\frac{a_c}{g} = \frac{v^2}{rg}.$$

Al reemplazar por los valores $T = 27$ días, $r = 380\,000$ km y $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, conocidos en la época de Newton, se obtiene $a_c/g \simeq 1/3517$, donde el símbolo \simeq significa “aproximadamente igual a”.

Si la aceleración de gravedad, según (5.2), depende del inverso cuadrado, entonces:

$$\frac{a_c}{g} = \frac{R^2}{r^2},$$

donde R y r son, respectivamente, el radio terrestre y la distancia Tierra-Luna. Puesto que $r \simeq 60R$, es cierto entonces que $a_c/g \simeq 1/3600$, número bastante cercano a $1/3517$.

La concordancia entre estos dos números revela cuán plausible es la hipótesis newtoniana sobre la existencia de una única fuerza responsable del movimiento de la Luna y de los proyectiles.

Los cálculos presentados aquí son simplificaciones del caso real en que la órbita es una elipse con la Tierra en uno de los focos. En su libro *Principia* Newton establece su formulación general que en este aspecto se sintetiza así: la trayectoria parabólica del proyectil galileano y la órbita elíptica kepleriana son generadas por la misma acción, la fuerza de gravitación terrestre.

5.3 La ley de gravitación

Consideraciones bastante simples han permitido concluir que si el movimiento de la Luna es debido a una fuerza, esta debe ser centrípeta y debe variar con el inverso del cuadrado de la distancia. Newton concibió que el movimiento de la Luna y de una manzana en caída libre son causados por una sola fuerza que se extiende de la Tierra a la Luna: la gravedad terrestre.

¿Qué otros factores determinan esta ley de fuerza? Con el fin de averiguarlo y lograr construir la ley de gravitación, considérese una situación particular, la atracción entre la Tierra y una manzana, con masas m_t y m_m , y separadas entre sus centros una distancia r (figura 5.2).

Si se asume, con Newton, que el *peso* de la manzana corresponde a la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ella, entonces, puesto que el peso es proporcional a la masa, la fuerza gravitacional ejercida por la Tierra es proporcional a la masa de la manzana, esto es:

$$F \propto m_m.$$

Por otro lado, de acuerdo a la tercera ley de Newton, la manzana debe ejercer sobre la Tierra una acción igual en magnitud y opuesta en dirección, por lo que la



Escuche la biografía de *Newton* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

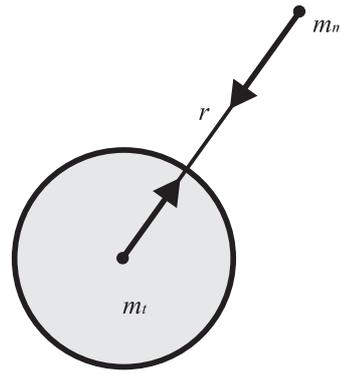


Figura 5.2. La Tierra y la manzana se atraen con fuerzas iguales y opuestas.

fuerza de gravedad ejercida por la manzana sobre la Tierra debe ser proporcional a la masa de esta; así pues:

$$F' \propto m_t.$$

Puesto que $F = F'$, debe ser cierto que

$$F \propto m_t m_m. \quad (5.4)$$

De esta ecuación y (5.3), equivalente a la proporcionalidad $F \propto 1/r^2$, es posible escribir la ley de fuerza que gobierna la acción gravitacional entre la manzana y la Tierra:

$$F \propto \frac{m_t m_m}{r^2}.$$

Asumiendo que *todos* los factores han sido tenidos en cuenta, esta expresión de proporcionalidad puede ser transformada en una igualdad mediante la introducción de una *constante universal*, conocida como constante de Cavendish. Entonces:

$$F = \frac{G m_t m_m}{r^2}. \quad (5.5)$$

Esta ecuación ha sido propuesta pensando solo en la acción mutua entre la Tierra y una manzana. En otro lugar se ha dicho que la acción de la Tierra se extiende, al menos, hasta la Luna. No es difícil aceptar la idea de que la gravitación debe ser extendida a los otros planetas en su relación con el Sol, a la interacción de los planetas y sus lunas y, en general, a las acciones mutuas entre todas las porciones de materia existentes. Este paso, dado por Newton, es el que da origen a la teoría de la gravitación *universal*.

En forma completamente general puede enunciarse así:

Cada pareja de partículas, de masas m_1 y m_2 , separadas una distancia r , ejerce entre sí una fuerza gravitacional atractiva, proporcional al producto de sus masas e inversa al cuadrado de la distancia que los separa. Explícitamente, la fuerza atractiva que m_1 ejerce sobre m_2 es de la forma:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (5.6)$$

En esta ecuación, como se indica en la figura 5.3, $\hat{\mathbf{u}}_r$ es un vector unitario dirigido del cuerpo 1 al 2. El signo menos afirma que la fuerza gravitacional es atractiva. Correspondientemente, la fuerza gravitacional que m_2 ejerce sobre m_1 es opuesta a (5.6), esto es: $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$.

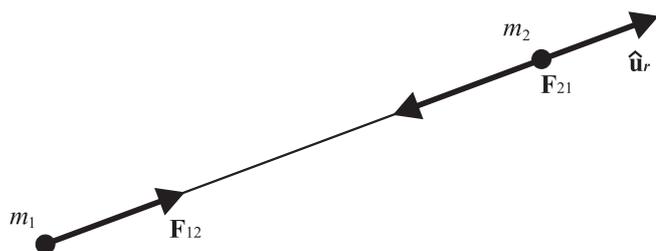


Figura 5.3. Fuerzas gravitacionales entre una pareja de masas puntuales.

Ejemplo 5.2

La masa de Júpiter puede calcularse conociendo los parámetros de uno de sus satélites. Por ejemplo, Io tiene un período de 1,77 días y una órbita de radio $4,22 \times 10^5$ km. ¿Cuál es la masa de Júpiter?

Solución:

Puesto que la fuerza gravitacional es centrípeta, la ejercida por Júpiter, de masa M , sobre uno de sus satélites, de masa m , puede escribirse:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GMm}{r^2},$$

y como $v = 2\pi r/T$, se concluye que

$$M = 4\pi^2 r^3 / T^2.$$

Al reemplazar los datos se obtiene $M = 6,99 \times 10^7$ kg.

Ejemplo 5.3

Calcule la fuerza de gravitación que las dos masas iguales de la figura 5.4 ejercen sobre la tercera masa.

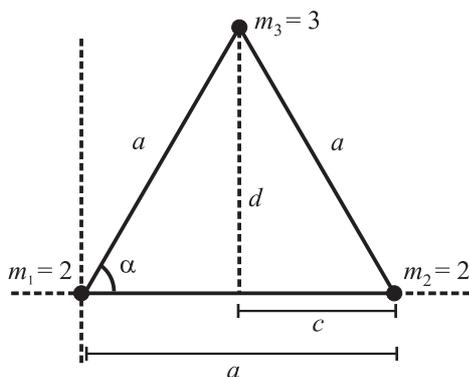


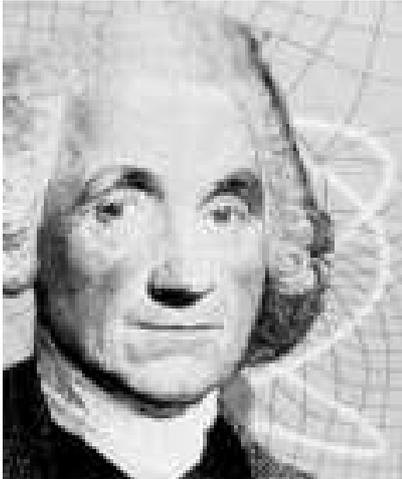
Figura 5.4. Masas en el ejemplo 5.3.

Solución:

La teoría de la gravitación admite que la fuerza que un conjunto de masas puntuales ejerce sobre otra masa m es igual a la suma vectorial de las fuerzas que cada una ejerce sobre m . Así, las componentes netas de las fuerzas sobre m_3 son:

$$\sum F_x = -\frac{Gm_3m_1}{a^2} \cos \alpha + \frac{Gm_3m_2}{a^2} \cos \alpha = \frac{Gm_3}{a^2} (-m_1c + m_2c),$$

$$\sum F_y = -\frac{Gm_3m_1}{a^2} \sin \alpha - \frac{Gm_3m_2}{a^2} \sin \alpha = -\frac{Gm_3}{a^2} (m_1d + m_2d).$$



Henry Cavendish (1731-1810)

Físico y químico inglés, excéntrico y tímido, descubridor del hidrógeno, al que hizo arder en el interior de una vasija cerrada para obtener agua. Demostró la presencia de CO_2 en la atmósfera y estudió el ácido nítrico. Uno de sus trabajos más importantes lo realizó utilizando una balanza de torsión, construida por él, para medir la constante de gravitación, que ahora lleva su nombre, con una aproximación de 1%. Se anticipó a Coulomb en su ley de inverso cuadrado y a la regla de Ohm que relaciona voltaje y corriente. Fue miembro de la Real Sociedad de Londres desde 1760.

Así pues:

$$\mathbf{F} = \frac{GM_3}{a^3} [\hat{\mathbf{i}}(m_2 - m_1)c + \hat{\mathbf{j}}(m_2 + m_1)d].$$

Con $d = a\sqrt{3}/2$ y $c = a/2$:

$$\mathbf{F} = \frac{GM_3}{2a^2} [\hat{\mathbf{i}}(m_2 - m_1) + \hat{\mathbf{j}}(m_2 + m_1)\sqrt{3}].$$

Basta reemplazar los datos conocidos.

5.3.1 La constante de Cavendish

El número G que aparece en (5.6) es una constante universal, asociada al nombre de Henry Cavendish, quien la evaluó en 1798 utilizando medidas terrestres. Como se verá en los ejercicios posteriores, esta constante puede evaluarse por métodos puramente astronómicos. La novedad del método de Cavendish fue poner en interacción masas de tamaños relativamente pequeños. El valor de esta constante en el sistema M.K.S. es de $6,673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$.

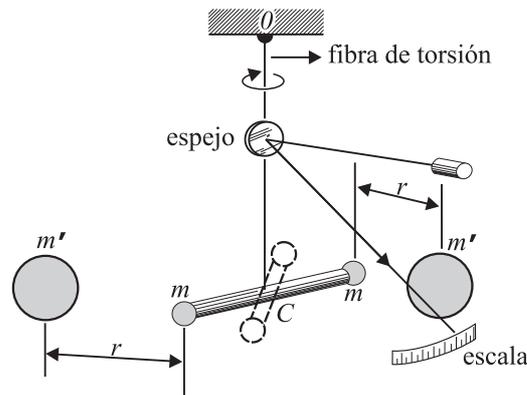


Figura 5.5. La balanza de Cavendish permite medir la constante G .

La balanza de Cavendish (figura 5.5) consta de dos esferas pequeñas montadas en los extremos de una varilla horizontal delgada, sostenida en su centro por una fibra vertical de propiedades torsionales conocidas. Un pequeño espejo fijo a la fibra permite reflejar un haz de luz que da la medida de la rotación de las esferitas, debida a la acción gravitacional de otro par de esferas mayores mantenidas fijas.

Una vez conocido el valor de G es posible realizar una amplia gama de cálculos, como: fuerza gravitacional entre cualquier pareja de cuerpos; órbitas planetarias, de cometas y satélites; masas de cuerpos gravitantes; campos de diversas distribuciones de masa. A continuación se estudian algunos ejemplos sencillos.

5.3.2 Fuerzas centrales y ley de las áreas

Según la teoría de Newton, la fuerza de gravedad ejercida por el Sol va en dirección $-\hat{\mathbf{u}}_r$. Esto significa que se trata de una *fuerza central*, dependiente en su módulo de la distancia r al planeta, por lo cual puede escribirse como $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{u}}_r$. En consecuencia el torque que un planeta experimenta debido a la gravitación del Sol es

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (r\hat{\mathbf{u}}_r) \times (f(r)\hat{\mathbf{u}}_r) = rf(r)\hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_r = \mathbf{0},$$

y puesto que el torque y el momento angular están conectados por la expresión $\tau = d\mathbf{L}/dt$, se infiere que *el momento angular del planeta es constante en el tiempo*: $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{cte}$. Así pues, como \mathbf{L} es constante y perpendicular al plano formado por \mathbf{r} y \mathbf{v} , se concluye que este plano permanece invariable en su orientación a medida que el planeta se mueve alrededor del Sol.

La conservación del momento angular en el movimiento de un planeta tiene otra consecuencia importante, conocida como ley de las áreas. De acuerdo a la figura 5.6, el radio vector que va del Sol al planeta barre un área diferencial dA en un tiempo dt . La geometría analítica asegura que esta área tiene una magnitud $|\mathbf{r} \times d\mathbf{r}|/2$, y como $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$, se tiene que $dA/dt = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|/2$. Puesto que $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ se concluye que:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{|\mathbf{L}|}{2m}.$$

Como $|\mathbf{L}| = L$ es una constante del movimiento también lo será dA/dt . De acá se sigue que el radio vector que conecta el planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales, afirmación conocida como la segunda ley de Kepler. Es válida para fuerzas centrales independientemente de la forma de la función $f(r)$.

Esta conclusión contrasta con la primera ley de Kepler, sobre las órbitas elípticas, que es válida solo para fuerzas centrales de la forma $1/r^2$. En los *Principia*, Newton demostró que las fuerzas centrales de la forma $1/r^2$ dan lugar a órbitas circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas, dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Estas curvas se conocen como *cónicas*.

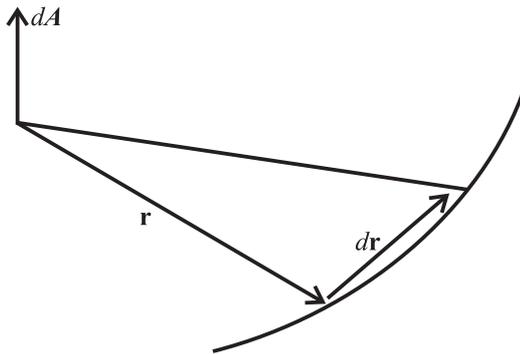


Figura 5.6. Geometría para la demostración de la ley de las áreas.

Ejemplo 5.4

El afelio y el perihelio (r_a y r_p) son, respectivamente, la máxima y la mínima distancia del Sol a la Tierra. Conocida la velocidad de la Tierra en el perihelio (v_p), calcule su velocidad en el afelio (v_a).

Solución:

Teniendo en cuenta que la velocidad y el radio vector son perpendiculares en el afelio y el perihelio, como se concluye de la gráfica 5.1, la conservación del momento angular se escribe $r_a v_a = r_p v_p$, por lo cual $v_a = r_p v_p / r_a$.

5.3.3 La constante de Kepler

La ecuación (5.3) se refiere a la fuerza de gravitación ejercida por el Sol sobre un planeta de masa m ; de la ley de gravitación universal (5.6), podemos evaluar

también la fuerza gravitacional entre el Sol ($m_1 = m_s$) y el planeta ($m_2 = m$). Puesto que las dos expresiones deben ser coincidentes, puede escribirse:

$$F = \left(\frac{4\pi^2 m}{K} \right) \frac{1}{r^2} = \frac{Gm_s m}{r^2}.$$

Se obtiene, para la constante K , de Kepler:

$$K = \frac{4\pi^2}{Gm_s}. \quad (5.7)$$

Esta expresión muestra que en efecto, como lo propuso Kepler, la constante K es la misma para todos los planetas. Basta observar que depende solo de la masa del Sol, que es el centro de los movimientos planetarios.

Es simple constatar que la constante K toma otro valor si se considera el movimiento de los satélites de *un mismo* planeta. Por ejemplo, la constante de Kepler para el movimiento de los satélites de Júpiter, cuya masa es m_J , tiene la forma

$$K' = \frac{4\pi^2}{Gm_J}.$$

5.3.4 La masa del Sol

Reemplazando (5.7) en la tercera ley de Kepler (5.1) se obtiene la siguiente expresión para la masa del Sol:

$$m_s = \frac{4\pi^2 R^3}{GT^2},$$

donde T es el período de revolución de cualquier planeta del sistema solar, supuesta una órbita circular de radio R . Sea, en particular, la Tierra ($T = 1 \text{ año} = 3,15 \times 10^7 \text{ s}$, $R = 150 \times 10^6 \text{ km}$). Con estos datos se obtiene: $m_s = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

¿Cómo rehacer este cálculo para obtener la masa de la Tierra?

Si se conoce la distancia de un satélite a su planeta y su período de revolución, puede calcularse la masa del planeta.

5.3.5 La masa de la Tierra

En la sección 5.3, un argumento en la construcción de la ley de gravitación es la identidad, propuesta por Newton, entre la fuerza de gravitación que la Tierra ejerce sobre un objeto y el peso de este. De la ley surgida de estas consideraciones surge una consecuencia importante concerniente a la caída libre.

Considérese una vez más la manzana de Newton (m_m). La atracción que la Tierra (m_t) ejerce sobre ella está dada por (5.5):

$$F = \frac{Gm_t m_m}{r^2}.$$

El *peso* de un cuerpo es proporcional a la masa, como ha sido visto en el curso anterior de *Física I*, de modo que $W = m_m g$, donde g representa la aceleración de gravedad terrestre. Por tanto:

$$F = \frac{Gm_t m_m}{r^2} = W = m_m g.$$

En consecuencia, la aceleración de gravedad terrestre tiene el valor

$$g = \frac{Gm_t}{r^2}. \quad (5.8)$$

A partir de esta ecuación pueden hacerse al menos dos consideraciones importantes, a saber:

1. La aceleración de gravedad terrestre está determinada por la masa de la Tierra y la distancia r (consideraciones posteriores han de demostrar que la gravedad en el interior de la Tierra aumenta con r). En cercanías de la superficie terrestre ($r \simeq R = 6370$ km) el valor de g es cercano a 9.8 m/s^2 , lo que permite calcular la masa de la Tierra, obteniéndose un valor de $5,96 \times 10^{24}$ kg.
2. La ecuación (5.8) permite concluir que el valor de la aceleración de gravedad disminuye con la altura (desde la superficie). El cociente entre la aceleración de la gravedad a la distancia de la Luna y la gravedad en la superficie da el valor correcto para el cuadrado de la relación entre el radio terrestre y la distancia Tierra-Luna, como se vio en la sección 5.3.

Módulo 6

El campo gravitacional

Contenido del módulo

- 6.1 La noción de campo gravitacional
 - 6.1.1 Tres teoremas importantes

Objetivos del módulo

1. Introducir las líneas de campo gravitacional.
2. Definir el campo de gravitación.
3. Aplicar a la gravitación el principio de superposición vectorial.
4. Proponer las ecuaciones que describen el campo de un sistema de partículas y de una distribución continua.
5. Estudiar la unidades del campo de gravitación.

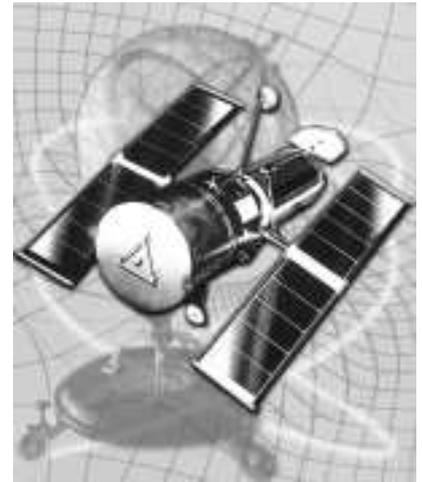
Preguntas básicas

1. ¿Qué es una línea de campo?
2. ¿Cómo se define el campo de gravedad de una masa?
3. ¿Qué propone el principio de superposición para fuerzas?
4. ¿Cómo es el campo de un sistema de masas y de una distribución continua?
5. ¿Hay diferencia alguna entre aceleración de gravedad y campo de gravedad?
6. ¿Cuáles son las unidades del campo de gravedad?

Introducción

Newton propuso su teoría de gravitación como una teoría de *acción a distancia*; esto quiere decir que una masa como el Sol es capaz de ejercer acciones en puntos lejanos del espacio. Aunque esta idea fue rechazada por los seguidores de Descartes que exigían la presencia de una *acción por contacto*, de un modo paulatino ganó aceptación hasta que en el siglo XIX fue aceptada con cierta naturalidad.

En este módulo se propone la noción de *campo gravitacional* y se demuestran tres teoremas importantes concernientes al campo en el exterior y el interior de un cascarón esférico, y al campo en el exterior de una distribución esférica de masa.



El telescopio espacial, en órbita alrededor de la Tierra, permite observar el universo con gran detalle.

6.1 La noción de campo gravitacional

De acuerdo con Newton, un cuerpo esférico de masa M , como la Tierra, ha de atraer gravitacionalmente a un “cuerpo de prueba” m , como la manzana de Newton, colocada en sus alrededores. La fuerza es radial y depende de la masa de ambos cuerpos y la distancia entre sus centros. Puesto que M es un cuerpo de gran masa en comparación con m , permanecerá prácticamente en reposo bajo la acción de m . Podemos, así, localizar m en cada punto del espacio (figura 6.1) y trazar el correspondiente vector de fuerza que indica su atracción por M , a la que sin pérdida de generalidad consideramos puntual. El espacio entero puede llenarse con estos vectores. Con el fin de presentar la situación de un modo fácilmente visible puede trazarse un conjunto de líneas igualmente espaciadas angularmente (figura 6.2) que da información en cada punto sobre la dirección de la fuerza gravitacional; donde las líneas estén más juntas, mayor será la magnitud de la fuerza. Puesto que las líneas están más separadas cuanto mayor es la distancia al centro, la fuerza decrece con la distancia.

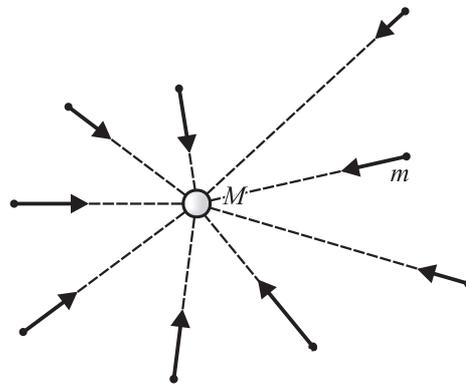


Figura 6.1. Líneas de fuerza gravitacional.

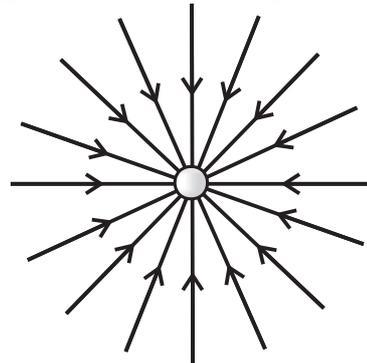


Figura 6.2. Representación de las líneas de fuerza gravitacional que muestra la simetría esférica.

Puede asumirse que las líneas representan, más que a F , al cociente F/m que no depende de la magnitud de la masa de prueba. A este cociente, cuya magnitud es $F/m = g = GM/r^2$, se le conoce como el *campo gravitacional* de la masa M . Es una cantidad que depende solo de la masa que genera el campo y de la distancia r desde M al punto del espacio donde se mide g .

Desde el punto de vista matemático el campo gravitacional de una masa *pun-*

La fuerza \mathbf{F} está enteramente especificado por la magnitud y dirección del vector

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -\frac{GM}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (6.1)$$

Ahora bien, la teoría de Newton considera que la fuerza de gravitación puede ser sumada vectorialmente, es decir, satisface el principio de superposición vectorial. Esto significa que la fuerza de gravitación debida a una colección de pequeños cuerpos m_1, m_2, m_3, \dots , sobre algún otro corpúsculo de prueba de masa m (figura 6.3), puede escribirse en la forma:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \rightarrow m} = - \sum_{i=1}^n \frac{GM_i m}{r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i}. \quad (6.2)$$

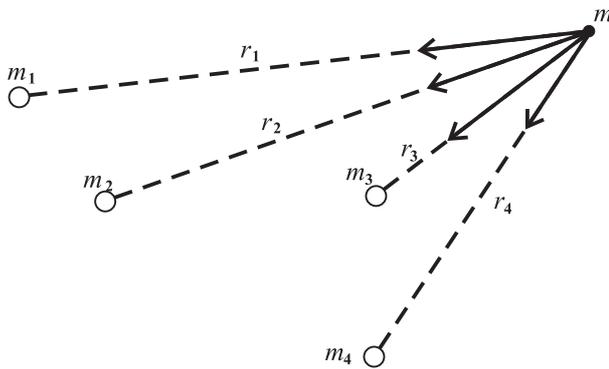


Figura 6.3. Fuerza gravitacional de un conjunto de masas sobre la masa m .

La expresión $\mathbf{F}_{i \rightarrow m}$ describe la fuerza gravitacional que la partícula de masa m_i ejerce sobre aquella de masa m . El vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_{r_i}$ va de m_i a m .

Si la anterior ecuación se divide por m se obtiene el campo gravitacional en el punto P , asociado al sistema de n partículas. Es importante notar que en el cálculo del campo de gravitación en un punto P solo importan las fuerzas ejercidas por las n partículas sobre una masa de prueba m colocada en P sin importar las acciones mutuas entre las n partículas.

Para el caso simple de dos partículas de igual masa sus líneas de campo se muestran en la figura 6.4.

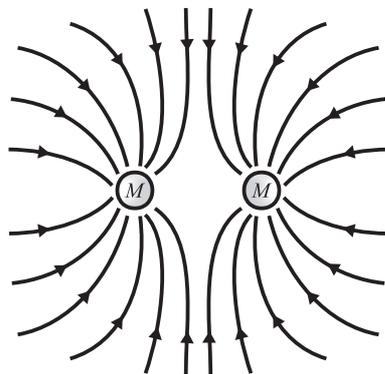


Figura 6.4. Campo gravitacional de dos masas iguales.

En síntesis, el campo de una partícula puntual se describe con (6.1), y el de un sistema de partículas con (6.2). Un caso de suma importancia es el de un cuerpo

extenso, como una esfera, un cilindro, una placa o una línea de masa. Estos cuerpos, desde el punto de vista del cálculo diferencial, pueden considerarse formados por elementos diferenciales cuya suma sigue una regla del tipo (6.2), solo que en vez de una suma se tiene una integral. Así, el campo de gravitación de un cuerpo que ha sido descompuesto en diferenciales de masa de magnitud dM (figura 6.5) está dado por:

$$\mathbf{g} = \int_M \frac{d\mathbf{F}_{dM \rightarrow m}}{m} = - \int_M \frac{G dM}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \quad (6.3)$$

donde ahora, de acuerdo con la figura 6.5, $\hat{\mathbf{u}}_r$ señala en la dirección que va de dM al punto del espacio donde se evalúa \mathbf{g} .

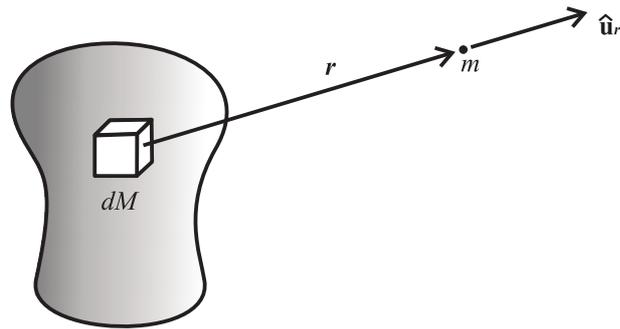


Figura 6.5. Geometría para el cálculo del campo de gravitación debido a un elemento diferencial de masa.

El diferencial dM depende en general de la posición, pues existen distribuciones inhomogéneas de masa, lineal, superficial o volumétrica. En los casos homogéneos, la densidad es constante.

De acuerdo a la definición (6.1) del campo \mathbf{g} , es posible expresar la fuerza de gravedad que un cuerpo de masa m experimenta en un campo gravitacional en la forma:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}. \quad (6.4)$$

Esta es la generalización de la ecuación que describe el peso de un cuerpo en cercanías de la superficie terrestre, como se vio en el curso anterior de *Física I*, solo que ahora implica un campo de gravedad no necesariamente constante e igual a $9,8 \text{ m/s}^2$. Ha de observarse entonces que el peso de un cuerpo disminuye con la altura y que, de (6.4), las unidades del campo de gravedad en el sistema M.K.S. son N/kg , es decir, m/s^2 ; así pues, el campo de gravedad tiene unidades de aceleración.

Ejemplo 6.1

Campo de gravitación de una varilla homogénea de longitud L y masa M (figura 6.6).

Solución:

Como la varilla es homogénea es cierto que su densidad lineal de masa λ es constante: $\lambda = M/L = dM/dx$, por lo que $dM = M dx/L$. La componente x del campo de gravitación generado por la masa diferencial dM es:

$$dg_x = - \frac{gdM}{(h-x)^2} = - \frac{GM}{L} \frac{dx}{(h-x)^2},$$

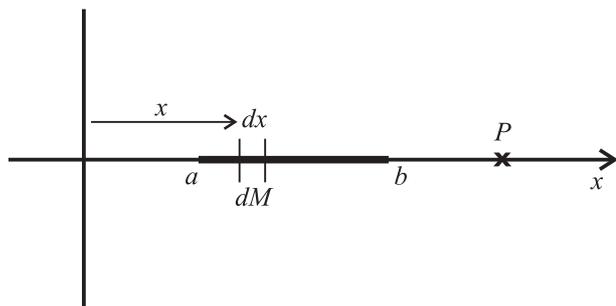


Figura 6.6. Geometría para el cálculo del campo gravitacional de una varilla uniforme.

y en consecuencia:

$$g_x = -\frac{GM}{L} \int_a^b \frac{dx}{(h-x)^2} = -\frac{GM}{L} \frac{1}{h-x} \Big|_a^b$$

$$= \frac{GM}{(h-a)(h-b)}.$$

Se ha tenido en cuenta que $L = b - a$. Pruebe que la componente g_y es nula. Obsérvese que en el límite $h \gg a$ y $h \gg b$:

$$g_x = \frac{GM}{h^2(1-a/h)(1-b/h)} \rightarrow \frac{GM}{h^2},$$

lo que indica que, vista a gran distancia, la varilla se verá como un punto.

6.1.1 Tres teoremas importantes

Teorema 1:

El campo gravitacional en el exterior de un cascarón esférico homogéneo es el mismo que si su masa estuviese concentrada en su centro (figura 6.7a).

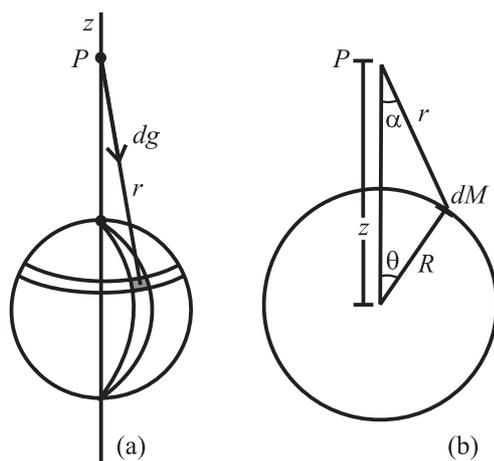


Figura 6.7. Geometría para el cálculo del campo gravitacional en el exterior de un cascarón esférico.

Demostración:

Puesto que la densidad superficial de masa σ es constante, es cierto que $\sigma =$

$M/A = dM/dA$, donde A y dA son el área total y el área diferencial (figura 2.13); como $A = 4\pi r^2$ y $dA = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, el diferencial de masa se expresa como:

$$dM = M \sin \theta d\theta d\varphi / 4\pi. \quad (6.5)$$

De otro lado, el teorema del coseno (figura 6.7b) puede expresarse en las dos formas siguientes:

$$R^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos \alpha, \quad (6.6)$$

$$r^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \theta. \quad (6.7)$$

De (6.6) se sigue, tomando diferenciales (nótese que z es constante):

$$r dr = zR \sin \theta d\theta. \quad (6.8)$$

Si se elimina $\sin \theta d\theta$ entre (6.8) y (6.5) se obtiene:

$$dM = \frac{r dr d\varphi}{zR}. \quad (6.9)$$

Ahora bien, el campo de gravedad en dirección z y en el punto P en el exterior del cascarón, debido a un elemento diferencial de masa dM , es:

$$dg_z = -\frac{GdM}{r^2} \cos \alpha = -\frac{GM}{8\pi z} \frac{r dr d\varphi}{zRr^3} (z^2 - R^2 + r^2), \quad (6.10)$$

de modo que el campo neto en z está dado por la integral:

$$g_z = -\frac{GM}{4z^2 R} \int_{z-R}^{z+R} \left[\frac{(z^2 - R^2)}{r^2} + 1 \right] dr,$$

cuyo resultado,

$$g_z = -\frac{GM}{z^2},$$

es idéntico al campo en z de una masa puntual M . Solo hay campo radial, y debido a la simetría y a la uniformidad de la distribución de masa, cada componente tangencial del campo es compensada exactamente por otra en dirección opuesta, lo que cancela el campo tangencial neto.

Teorema 2:

El campo gravitacional en el interior de un cascarón esférico homogéneo es nulo.

Demostración:

De la figura 6.8 es fácil ver que en este caso el campo en z está dado por:

$$dg_z = -\frac{GdM}{r^2} \cos(180 - \alpha),$$

de donde se tiene que el campo neto es:

$$g_z = -\frac{GM}{4z^2 R} \int_{R-z}^{R+z} \left[\frac{(z^2 - R^2)}{r^2} + 1 \right] dr.$$

Obsérvese que, respecto al cálculo del teorema 1, solo ha cambiado el límite inferior de la integral. El resultado de la integral es cero.

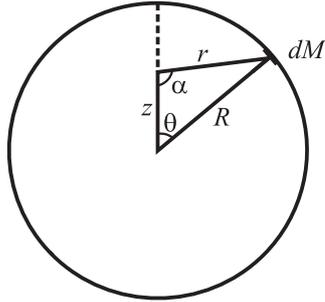


Figura 6.8. Geometría para el cálculo del campo gravitacional en el interior de un cascarón esférico.

Teorema 3:

El campo gravitacional en el exterior de una distribución esférica de masa de densidad constante es el mismo que si su masa estuviese concentrada en su centro.

Demostración:

Del teorema 1 se concluye que en el exterior de un cascarón esférico homogéneo de radio z y masa M el campo gravitacional es $dg = GdM/r^2$. De acuerdo a la figura 6.9 el campo en z debido a la masa M está dado por $g = (G/Z^2) \int dM = GM/z^2$.

Se propone como problema demostrar que el campo gravitacional en un punto r , en el interior de una masa esférica homogénea de radio R , es $g = GMr/R$.

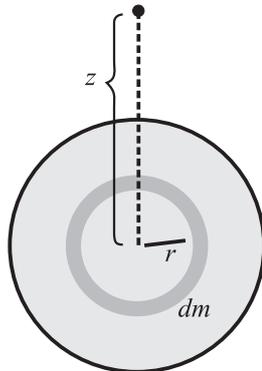


Figura 6.9. Geometría para el cálculo del campo gravitacional en el exterior de una distribución esférica.

Módulo 7

Energía potencial y potencial gravitacional

Contenidos del módulo

- 7.1 Energía potencial gravitacional
- 7.2 Potencial gravitacional
 - 7.2.1 Distribuciones de masa

Objetivos del módulo

1. Estudiar, para el caso gravitacional, los teoremas de trabajo y energía potencial y cinética.
2. Definir la energía potencial gravitacional.
3. Estudiar la conservación de energía cuando hay gravitación.
4. Demostrar que la fuerza de gravitación es conservativa.
5. Definir el potencial gravitacional.
6. Establecer la conexión entre campo y potencial.
7. Escribir la forma del potencial para un sistema de partículas y una distribución.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define la energía potencial gravitacional?
2. ¿Es conservativa la fuerza de gravitación?
3. ¿Dónde puede escogerse cero la energía potencial gravitacional?
4. ¿Qué significa velocidad de escape?
4. ¿Cómo se define el potencial gravitacional de una partícula, un sistema y una distribución?

Introducción

En esta sección se generaliza la noción de energía potencial gravitacional que en el curso anterior de *Física I* fue introducida para el caso de aceleración de gravedad constante. Este desarrollo permite reconstruir la expresión para conservación de energía mecánica, que a su vez conduce a la conclusión de que la fuerza de gravedad es conservativa. Se introduce adicionalmente la noción de potencial gravitacional.

Estos conceptos se aplican a distribuciones discretas y continuas de masa.



En este grabado antiguo el hombre se asoma al borde del universo para ver su maquinaria.

7.1 Energía potencial gravitacional

Con el propósito de extender la noción de energía potencial gravitacional al caso general contemplado en la teoría de Newton de gravitación es necesario evaluar el trabajo realizado por una fuerza de la forma (5.6), debida a una masa puntual M que actúa sobre una partícula de prueba m . Para que el campo gravitacional de M mueva m entre los puntos a y b es necesario que realice un trabajo

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_a^b \frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r} = -GMm \int_a^b \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{GMm}{r} \Big|_a^b = - \left(\frac{GMm}{r_b} - \frac{GMm}{r_a} \right) = -(E_p(b) - E_p(a)). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Se ha tenido en cuenta que $\hat{\mathbf{u}}_r \cdot d\mathbf{r} = dr$ y se ha definido la energía potencial gravitacional de la partícula m ubicada en el punto r del campo de M , en la forma

$$E_p(r) = -\frac{GMm}{r}. \quad (7.2)$$

La ecuación (7.1) es la nueva versión gravitacional del *teorema del trabajo y la energía potencial gravitacional*. Conviene observar que la definición (7.2) ha sido propuesta en forma tal que la energía potencial gravitacional es nula en el infinito: $E_p(\infty) = 0$. Esta calibración de la energía potencial solo puede hacerse para distribuciones de masa de extensión finita.

De (7.1) se puede concluir que el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada es nulo, por lo cual la fuerza gravitacional es conservativa. De modo equivalente, el trabajo realizado para mover un cuerpo m entre los puntos a y b depende solo de las coordenadas de estos puntos y no de la trayectoria específica entre ellos.

El anterior teorema puede complementarse con el correspondiente *teorema del trabajo y la energía cinética*, si se evalúa el trabajo de acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot d\mathbf{r} = m \int_a^b d\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 \Big|_a^b = \left(\frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{1}{2}mv_a^2 \right) = (E_c(b) - E_c(a)). \end{aligned} \quad (7.3)$$

De (7.1) y (7.3) es posible concluir que

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - \frac{GMm}{r_a} = \frac{1}{2}mv_b^2 - \frac{GMm}{r_b}, \quad (7.4)$$

expresión correspondiente a la *conservación de la energía mecánica* (cinética y potencial gravitacional), de una masa puntual en el campo de otra masa puntual o en el exterior de una masa esférica homogénea.

En forma general, la conservación de la energía puede plantearse en la forma:

$$[E_c + E_p]_a = [E_c + E_p]_b,$$

donde E_p es la energía potencial gravitacional de una partícula m ubicada en el campo gravitacional de cualquier otra partícula o distribución.

Ejemplo 7.1

Velocidad de escape: Calcule el valor mínimo de la velocidad con que un cuerpo

debe ser lanzado desde la superficie terrestre para que escape de su campo gravitacional.

Solución:

Las condiciones iniciales de posición y velocidad son v_0 y R . Escapar del campo de gravedad terrestre significa alcanzar una distancia $r \rightarrow \infty$ con una velocidad mínima, es decir, cero. Así pues, reemplazando en (7.4):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R^2} = 0,$$

de donde se concluye que $v_0 = \sqrt{2GM/R}$. Obsérvese que la velocidad de escape es independiente de m . Reemplazando los valores de M y R dados en la tabla al final del módulo, se tiene que $v_0 = 1,12 \times 10^4$ m/s, es decir: un objeto *cualquiera* lanzado desde la superficie terrestre con una velocidad de 11,2 km/s escapará de la gravedad terrestre.

7.2 Potencial gravitacional

En el caso de masas puntuales, la fuerza de gravitación (5.6) que M ejerce sobre m puede escribirse

$$\mathbf{F}_{M \rightarrow m} = -\frac{GMm}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{GMm}{r} \right) \hat{\mathbf{u}}_r.$$

De acuerdo con (7.2) se obtiene

$$\mathbf{F}_{M \rightarrow m} = -\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial E_p(r)}{\partial r}.$$

En el caso particular de una masa puntual la fuerza gravitacional solo tiene componente radial. Un análisis detallado muestra que para sistemas de partículas o sólidos la fuerza gravitacional tiene en general componentes tangenciales además de la radial. Si se tiene en cuenta que el término

$$\hat{\mathbf{u}}_r \frac{\partial E_p(r)}{\partial r}$$

es la componente radial del operador gradiente, representado como ∇ , la fuerza de gravedad que un sistema de partículas o un cuerpo extenso ejerce sobre una masa de prueba m puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{F}_{M \rightarrow m} = -\nabla E_p(r). \quad (7.5)$$

En forma general, la conexión (7.5) entre fuerza y energía potencial puede ser obtenida partiendo de la definición de trabajo y teniendo en cuenta (7.1):

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -(E_p(b) - E_p(a)),$$

que equivale, en forma diferencial, a

$$dE_p = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Puesto que, de acuerdo con la regla de la cadena para funciones de varias variables es cierto que:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz,$$



Vea el documento "Gradiente" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

expresión equivalente al producto escalar

$$dE_p = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{r},$$

es posible escribir

$$dE_p = \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial E_p}{\partial z} \right) \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

de donde se concluye que:

$$\mathbf{F} = - \left(\hat{\mathbf{i}} \frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}} \frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}} \frac{\partial E_p}{\partial z} \right).$$

El paréntesis es, precisamente, la definición del gradiente de E_p en coordenadas cartesianas. Así: $\mathbf{F} = -\nabla E_p$.

Ahora bien, puesto que el potencial gravitacional es siempre proporcional a la masa m de prueba, es siempre posible escribir

$$E_p(\mathbf{r}) = m\mathcal{G}(\mathbf{r}),$$

donde se ha introducido el *potencial gravitacional* \mathcal{G} . En consecuencia la fuerza de gravitación generada por M toma la forma

$$\mathbf{F}_{M \rightarrow m} = m\mathbf{g} = -m\nabla\mathcal{G}.$$

De esta ecuación se deduce la conexión entre el campo gravitacional y su potencial:

$$\mathbf{g} = -\nabla\mathcal{G}.$$

El conjunto de puntos que tiene el mismo valor del potencial gravitacional forma lo que se conoce como *superficie equipotencial*. De acuerdo a la definición del gradiente, el campo de gravitación es perpendicular a la superficie equipotencial. En particular, las líneas de campo de una masa esférica homogénea son radiales y las superficies equipotenciales son esferas concéntricas (figura 7.1).

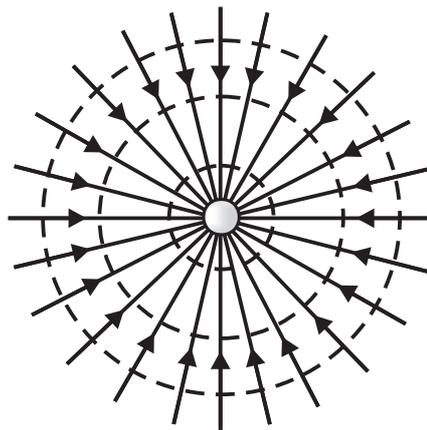


Figura 7.1. Líneas de campo gravitacional y equipotenciales de una masa puntual o esférica de densidad constante.

7.2.1 Distribuciones de masa

Los cálculos realizados en la sección anterior permiten generalizar la energía y el potencial gravitacionales de una partícula de masa m en presencia de distribuciones de masa discretas (colecciones de partículas) o continuas (distribuciones lineales, superficiales o volumétricas). La energía potencial de una partícula m en presencia de una colección de masas m_i es la suma de las energías potenciales de cada pareja (m, m_i) ; esto es consecuencia de que la fuerza neta sobre m es la suma de las fuerzas que cada partícula m_i ejerce sobre ella. De un modo análogo, la energía potencial de una partícula de masa m en presencia de una distribución continua puede evaluarse calculando la contribución sobre m de cada elemento diferencial de masa dM . Mientras que en el caso discreto es una suma, en el continuo será una integral. Las expresiones correspondientes son

$$E_p = m \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i}, \quad G = \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i}$$

$$E_p = m \int_M \frac{G dM}{r}, \quad \mathcal{G} = \int_M \frac{G dM}{r}.$$

La energía potencial de una colección de n masas m_i es igual a la suma de las energías potenciales de cada pareja:

$$E_p = G \sum_{i,j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}},$$

donde r_{ij} es la distribución entre las masas m_i y m_j . La suma se realiza sobre i, j de 1 a n con $i > j$.

Ejemplo 7.2

¿Qué expresión describe la energía total del sistema Sol-Tierra-Luna?

Solución:

Si las masas del Sol, la Tierra y la Luna son, respectivamente, m_s, m_t, m_l , puede escribirse, desde el sistema inercial correspondiente al centro de masa:

$$E = -\frac{Gm_s m_t}{r_{st}} - \frac{Gm_s m_l}{r_{sl}} - \frac{Gm_t m_l}{r_{tl}} + \frac{1}{2} m_s v_s^2 + \frac{1}{2} m_t v_t^2 + \frac{1}{2} m_l v_l^2.$$

Ejemplo 7.3

Calcule el potencial gravitacional sobre el eje de un anillo uniforme de radio a y masa M , y a una distancia z de su centro (figura 7.2).

Solución:

Para un anillo homogéneo es cierto que

$$\frac{dM}{M} = \frac{\text{arco diferencial}}{\text{circunferencia}} = \frac{a d\phi}{2\pi r},$$

por lo cual $dM = M d\phi / 2\pi$. El potencial diferencial, en un punto z , debido a la masa dM , es:

$$d\mathcal{G} = dg \cos \alpha = \frac{G dM}{r} = \frac{G M d\phi}{r 2\pi},$$

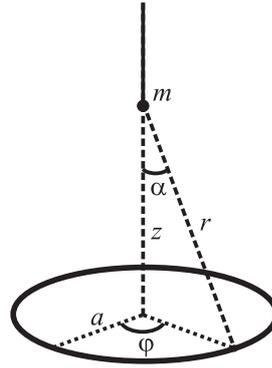


Figura 7.2. Geometría para el cálculo del potencial en el eje de un anillo.

y se deduce que:

$$\mathcal{G} = -\frac{GM}{2\pi r} \int_0^{2\pi} d\varphi = -\frac{GM}{r} = -\frac{GMz}{(a^2 + z^2)^{1/2}},$$

que también puede escribirse:

$$\mathcal{G} = -\frac{GM}{z^2 (1 + a^2/z^2)^{1/2}}.$$

La última forma permite encontrar el límite cuando $z \gg a$, lo que da lugar a $\mathcal{G} = -GM/z$. Visto desde lejos el anillo es un punto.

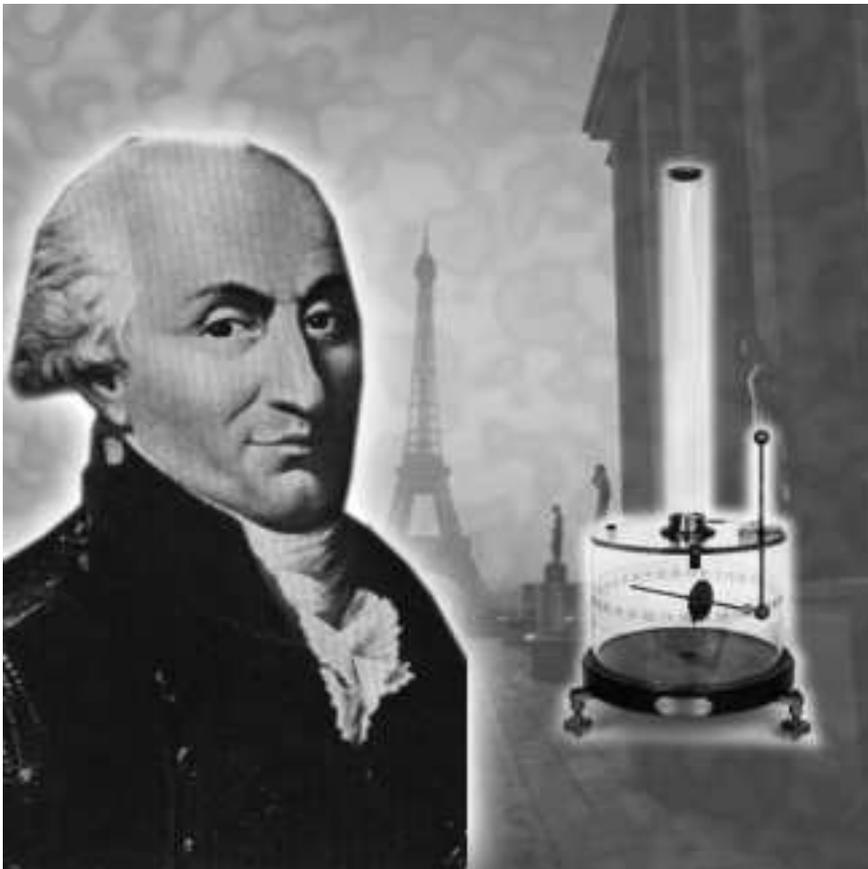
Datos planetarios

La siguiente tabla muestra algunos de los más importantes valores de los parámetros planetarios. Son de utilidad en la solución de los problemas planteados al final del capítulo.

Cuerpo	Masa (kg)	Radio (km)	Semieje mayor (km)	Período (s)
Sol	$1,99 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^8$	—	—
Mercurio	$3,18 \times 10^{23}$	$2,43 \times 10^6$	$5,79 \times 10^{10}$	$7,60 \times 10^6$
Venus	$4,88 \times 10^{24}$	$6,06 \times 10^6$	$1,08 \times 10^{11}$	$1,94 \times 10^7$
Tierra	$5,98 \times 10^{24}$	$6,37 \times 10^6$	$1,49 \times 10^{11}$	$3,16 \times 10^7$
Marte	$6,42 \times 10^{23}$	$3,37 \times 10^6$	$2,28 \times 10^{11}$	$5,94 \times 10^7$
Júpiter	$1,90 \times 10^{27}$	$6,99 \times 10^7$	$7,78 \times 10^{11}$	$3,74 \times 10^8$
Saturno	$5,68 \times 10^{26}$	$5,85 \times 10^7$	$1,43 \times 10^{12}$	$9,35 \times 10^8$
Urano	$8,68 \times 10^{25}$	$2,33 \times 10^7$	$2,87 \times 10^{12}$	$2,64 \times 10^9$
Neptuno	$1,03 \times 10^{26}$	$2,21 \times 10^7$	$4,50 \times 10^{12}$	$5,22 \times 10^9$
Plutón	$1,40 \times 10^{22}$	$1,50 \times 10^6$	$5,91 \times 10^{12}$	$7,82 \times 10^9$
Luna	$7,36 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^6$	—	—

Capítulo 3

Electricidad



Charles Augustin Coulomb, iniciador de la electrostática.

Presentación

Los fenómenos electrostáticos más simples, como los asociados a la atracción que sobre plumas o trozos de paja es capaz de ejercer un trozo frotado de ámbar, fueron conocidos por los griegos alrededor del siglo VII a.C.

Contenido breve

Módulo 8

Carga eléctrica y ley de Coulomb

Módulo 9

El campo electrostático

Módulo 10

El movimiento de cargas en campos eléctricos

Módulo 11

Energía potencial y potencial electrostático

Si en un día seco, después de usar un peine se le acerca a pequeños trozos de papel, estos serán atraídos. Fenómenos similares ocurren si se frota una varilla de vidrio o de ámbar con un trapo o con una piel. Como resultado estos cuerpos quedan *electrificados*. Al realizar experimentos con ellos puede comprobarse que ámbar y ámbar se repelen, vidrio y vidrio se repelen, pero ámbar y vidrio se atraen. Esto conduce a aceptar la existencia de dos clases de electricidad, que Benjamín Franklin llamó positiva (para el vidrio) y negativa (para el ámbar).

En el año 1600, el inglés William Gilbert descubrió que la electrificación que experimentaba el ámbar era un fenómeno bastante general, y realizó una primera clasificación de los materiales según sus características eléctricas. Las sustancias, según Gilbert, pueden dividirse en dos grupos:

1) Vidrio, cristal, piedras preciosas, entre otros. Ámbar, resinas, azufre. Estos dos subgrupos tienen lo que luego se llamará electricidad positiva y negativa, en su orden.

2) Perlas, coral, madera, metales, cuerpos que no adquieren por frotamiento ninguna propiedad de atracción sobre otros. Forman un grupo que incluye a los conductores. Si no es observable la electrificación de estos cuerpos se debe solo a que transfieren con facilidad su carga eléctrica.

Esta clasificación fue el origen de la posterior división de los materiales en conductores y dieléctricos.

En 1785 Charles Augustin Coulomb estableció experimentalmente que la interacción entre cuerpos pequeños y electrificados, por frotamiento por ejemplo, sigue una ley de inverso cuadrado, análoga a la acción gravitacional. La noción importante que surge a través de estos experimentos es la de *carga eléctrica*, noción que desempeña en la electricidad un papel análogo al de la masa en la gravitación.

Los experimentos posteriores de Ampère sobre corrientes eléctricas establecieron una primera conexión entre los fenómenos eléctricos y los magnéticos, conexión que fue profundizada en los experimentos de Faraday que probaron la existencia de campos eléctricos generados por campos magnéticos variables. Como se verá en su momento, las teorías sobre los fenómenos eléctricos y magnéticos encontraron su síntesis en los trabajos de Maxwell.

De estos trabajos experimentales y de las teorías que los describen surgió la mayor parte de la tecnología eléctrica y de telecomunicaciones que caracteriza nuestra época.

Módulo 8

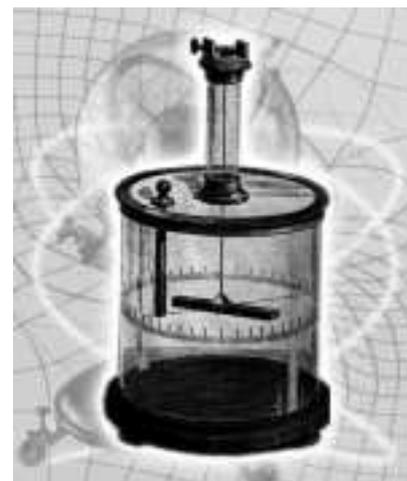
Carga eléctrica y ley de Coulomb

Contenido del módulo

8.1 La ley de Coulomb

Objetivos del módulo

1. Presentar la balanza de torsión.
2. Presentar el concepto de carga eléctrica.
3. Mostrar que hay dos tipos de carga.
4. Presentar la forma general de la ley de Coulomb.
5. Introducir el coulomb como unidad de carga.
6. Introducir la permitividad del vacío.
7. Presentar la cuantización de la carga.
8. Presentar la conservación de la carga.
9. Mostrar que la fuerza eléctrica satisface el principio de superposición y es central.
10. Estudiar el campo electrostático debido a distribuciones de carga.



Con la balanza de Coulomb es posible medir la fuerza entre cargas eléctricas.

Preguntas básicas

1. ¿Qué se entiende por electrificación?
2. ¿Cuántas clases de carga eléctrica existen?
3. ¿Cómo se utiliza en electrostática la balanza de torsión?
4. ¿Qué partículas tienen cargas positiva y negativa?
5. ¿Cuál es la forma general de la ley de Coulomb?
6. ¿De qué cantidades depende la fuerza eléctrica?
7. ¿Cómo se evalúa la constante en la ley de Coulomb?
8. ¿Cómo se define el coulomb?
9. ¿Cómo se define la permitividad del vacío?
10. ¿Cómo se expresa el campo de una distribución de cargas?
11. ¿Qué diferencia hay entre “campo eléctrico” y “campo electrostático”?

Introducción

Los experimentos revelan que en la interacción de cuerpos cargados eléctricamente participan dos tipos de electricidad, conocidos ahora como positiva y negativa. Los experimentos llevados a cabo en el siglo XX han mostrado que la materia está hecha de pequeñas partículas, los átomos, y estos, a su vez, están conformados por protones, cuya carga es positiva, y electrones, cuya carga es numéricamente igual pero negativa. Actualmente se cree que los bloques fundamentales de la materia ordinaria son los *quarks*, partículas que portan cargas que son o $1/3$ o $2/3$ de la carga del electrón. Se sospecha que esta es la mínima cantidad posible de electricidad; es decir, la carga eléctrica está *cuantizada*, vale decir, viene siempre en múltiplos enteros de la carga elemental.



Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

Físico e ingeniero militar francés, miembro, durante la Revolución, del comité de pesas y medidas que adoptó el sistema métrico decimal. Realizó estudios en electrostática, fricción, elasticidad y torsión de los materiales, conocimientos que utilizó para construir la balanza que lleva su nombre. Descubrió las leyes de interacción entre cargas y la de interacción entre polos magnéticos. En su honor la unidad de carga eléctrica lleva su nombre.

8.1 La ley de Coulomb

La ley que describe la interacción entre cuerpos electrificados fue descubierta por Charles de Coulomb en 1785 haciendo uso de una balanza de torsión, que había sido diseñada originalmente para medir las propiedades de torsión de fibras delgadas. La adaptación de Coulomb (figura 8.1) dio lugar a un aparato análogo al utilizado por Cavendish para la medida de la constante G de gravitación. El dispositivo de Coulomb consta de una varilla delgada horizontal suspendida de una fibra de propiedades torsionales conocidas. En ambos extremos de la varilla se colocan pequeñas esferas conductoras A y B. Una tercera esfera conductora C se coloca en una posición fija y cercana a B. Al cargar B y C eléctricamente la repulsión hace girar la varilla hasta que el torque ejercido es equilibrado por el torque opuesto de la fibra. De la medida del ángulo de rotación de la varilla puede evaluarse la fuerza eléctrica.

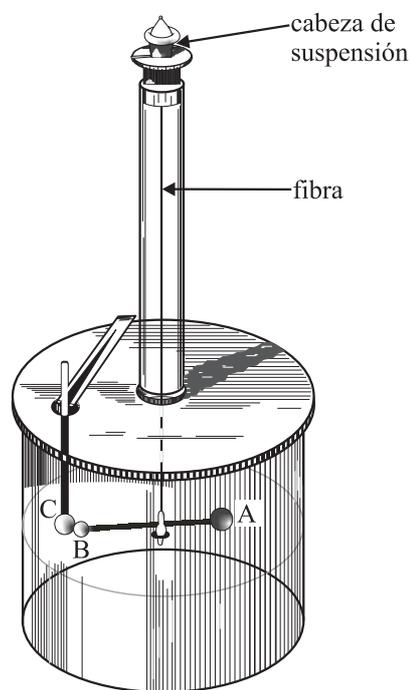


Figura 8.1. La balanza de Coulomb.

El experimento, realizado con diferentes cantidades de carga, permite evaluar la relación entre “cantidad de electricidad”, es decir, *carga eléctrica*, y la fuerza de interacción. El experimento se repite para cargas de distinto signo en las esferas B y C que previamente han sido alejadas. El resultado que describe la fuerza que la carga q_1 ejerce sobre la carga q_2 separadas una distancia r (figura 8.2) puede sintetizarse en la siguiente ecuación vectorial:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_{12}}. \quad (8.1)$$

La carga eléctrica es un concepto nuevo, de hecho el más importante de la teoría de la electricidad. No es reducible a ninguno de los conceptos de la mecánica, y puede definirse de manera operacional precisa, es decir, tiene sentido físico la definición de *cantidad de electricidad*. Es obvia la analogía con la ley de gravitación, excepto que la “carga gravitacional” es la masa. En el caso eléctrico hay



Vea la demostración *Fenómenos electrostáticos* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

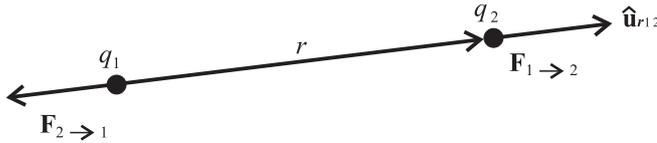


Figura 8.2. La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales satisface la tercera ley de Newton.

dos cantidades nuevas: la carga y la constante k . Por esta razón puede fijarse arbitrariamente la constante y determinarse experimentalmente la unidad de carga, o fijarse la unidad de carga y determinarse la constante. En el sistema internacional de unidades se ha optado por definir la unidad de carga, a la que se conoce como el *coulomb* (C). Como se verá después, en el capítulo sobre magnetismo el coulomb se define en términos del amperio: cuando una corriente eléctrica fluye por un alambre, la cantidad de carga eléctrica que atraviesa en un segundo su sección transversal es un coulomb. Con esta definición resulta que la constante k toma el valor de $8,9875 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2$. Es corriente expresar esta constante en la forma:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0},$$

donde ϵ_0 se conoce como la *permitividad del vacío*. Resulta, así, que

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2. \quad (8.2)$$

De esta manera, 1 coulomb es la cantidad de electricidad que colocada en una partícula puntual a una distancia de 1 m de otra igual la repele con una fuerza de $1/4\pi\epsilon_0$ newtons.

En estas unidades la carga del electrón es de $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

En (8.1) la carga ha de ser entendida como una cantidad algebraica y siempre real. Si las dos cargas en interacción son del mismo signo, $(++)$ o $(--)$, la fuerza va en dirección $\hat{\mathbf{u}}_{r_{12}}$, es decir, es repulsiva, pero si las cargas son de signo contrario, $(+-)$ o $(-+)$, la fuerza tendrá dirección $-\hat{\mathbf{u}}_{r_{12}}$ y es por tanto atractiva. En principio esta ley es válida para cargas puntuales, como la de gravitación lo es para masas puntuales. Para distribuciones discretas o continuas deberán implementarse integrales o sumatorias. La interacción eléctrica satisface, además, la tercera ley de Newton, de modo que la fuerza que q_2 ejerce sobre q_1 es $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}$.

Todos los experimentos realizados, sin excepción, revelan que la carga eléctrica, al igual que la masa, es una cantidad que se conserva a través de todos los procesos. Esto significa que la cantidad de electricidad involucrada en un proceso se mantiene igual independientemente de las transformaciones que tengan lugar.

La ley de Coulomb (8.1), expresada en unidades MKS, es entonces:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_{12}}. \quad (8.3)$$

La fuerza eléctrica es central, al igual que la gravitacional, y satisface el principio de superposición vectorial, por lo cual la fuerza eléctrica neta que una partícula de carga q experimenta debido a la presencia de una colección de n cargas puntuales q_i es de la forma $\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \rightarrow q}$, esto es:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_{i \rightarrow m} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i}. \quad (8.4)$$

El vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_{r_i}$ va de q_i a q (figura 8.3).

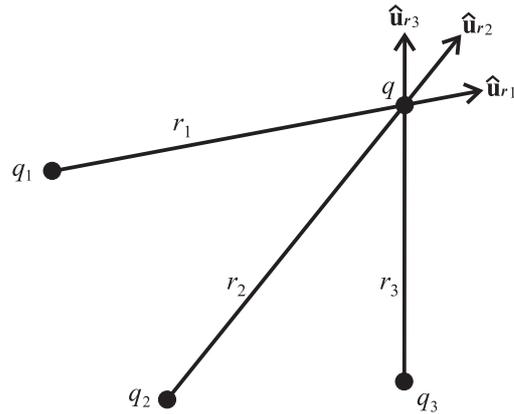


Figura 8.3. Fuerza eléctrica sobre q debida a una colección de cargas puntuales.

La fuerza que una distribución continua de cargas (lineal, superficial o volumétrica) ejerce sobre una carga de prueba q está dada por:

$$\mathbf{F} = \int_Q \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_r. \tag{8.5}$$

De acuerdo con la figura 8.4, $\hat{\mathbf{u}}_r$ señala en la dirección que va de dQ al punto del espacio donde se sitúa la carga q .



William Gilbert (1544-1603)

Físico y médico británico, médico personal de Isabel I de Inglaterra y de su sucesor, Jacobo I. Fue uno de los pioneros en el estudio del magnetismo. Se le debe la idea de que la Tierra es un imán esférico gigante, lo que explica la orientación norte-sur de las brújulas. Estudió el ámbar y los efectos eléctricos asociados a él. Acuñó los términos *eléctrico* (de electron, nombre griego del ámbar) y *polo magnético*. Su obra más conocida se titula *El magneto*.

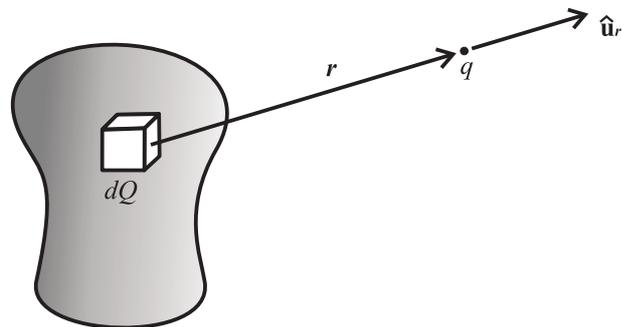


Figura 8.4. Fuerza eléctrica sobre q debida a una carga diferencial dQ .

El diferencial dQ depende en general de la posición, pues en general las distribuciones pueden ser inhomogéneas. En los casos homogéneos, la densidad es constante.

Ejemplo 8.1

Calcule en coordenadas cartesianas las componentes cartesianas de la fuerza que el sistema (q_1, q_2) de la figura 8.5 ejerce sobre una carga q colocada en un punto de coordenadas (x, y) .

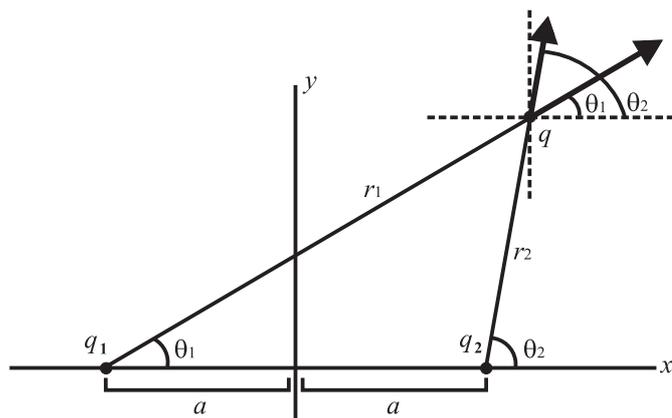


Figura 8.5. Fuerza ejercida por q_1 y q_2 sobre q .

Solución:

Las componentes x y y de la fuerza que q_1 y q_2 ejercen sobre q son:

$$\begin{aligned}
 F_x &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \cos \theta_1 + \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \cos \theta_2 \\
 &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right], \\
 F_y &= \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} \sen \theta_1 + \frac{q_2 q}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \sen \theta_2. \\
 &= \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{q_2}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right].
 \end{aligned}$$

Se ha tenido en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \sen \theta_1 &= \frac{y}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}}, & \sen \theta_2 &= \frac{y}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}}, \\
 \cos \theta_1 &= \frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}}, & \cos \theta_2 &= \frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Ejemplo 8.2

Un par de masas m iguales con la misma carga positiva q se encuentran suspendidas de un punto común con cuerdas de la misma longitud l , como se indica en la figura 8.6. El campo gravitacional terrestre homogéneo g está presente. Si el ángulo que forma la cuerda con la vertical es conocido, ¿cuál es el valor de la carga?

Solución:

La situación que muestra el diagrama es simétrica, de modo que los ángulos a izquierda y derecha son iguales. Las dos cargas están, por tanto, sobre la misma horizontal y la distancia que las separa es $2x$. El diagrama de las fuerzas que actúan sobre la carga de la derecha (figura 8.7) da lugar a las siguientes condiciones de

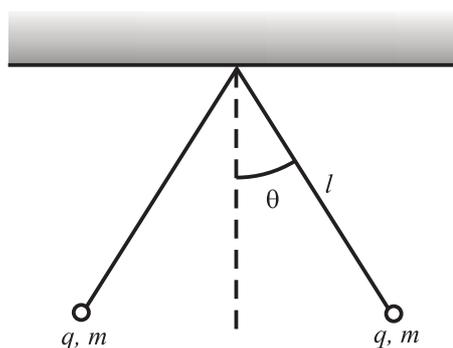


Figura 8.6. Fuerza entre dos cargas iguales suspendidas de hilos iguales.

equilibrio:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 &\implies T \cos \theta = mg, \\ \sum F_y = 0 &\implies T \sin \theta = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2} = F_e.\end{aligned}$$

Dividiendo la segunda por la primera y teniendo en cuenta que $x = l \sin \theta$ se obtiene:

$$q^2 = \frac{16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^3 \theta}{\cos \theta}.$$

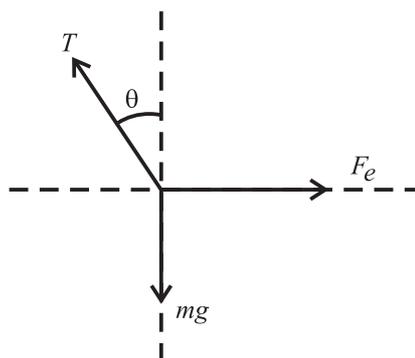


Figura 8.7. Fuerzas sobre la carga de la derecha en la figura 8.6.

Módulo 9

El campo electrostático

Contenidos del módulo

- 9.1 La definición de campo eléctrico
- 9.2 Las líneas de campo

Objetivos del módulo

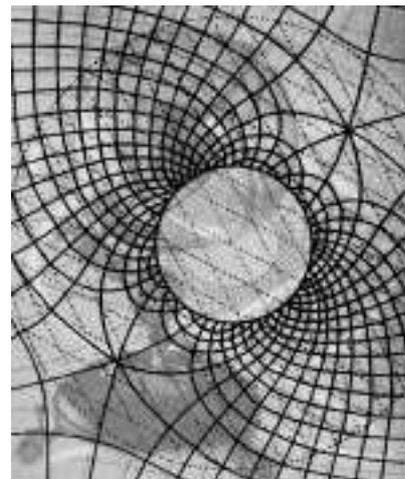
1. Definir el campo electrostático.
2. Aplicar a la electrostática el principio de superposición vectorial.
3. Proponer las ecuaciones que describen el campo debido a distribuciones de carga.
4. Introducir las líneas de campo eléctrico.
5. Establecer la diferencia entre líneas de campo de cargas positivas y negativas.
6. Estudiar las unidades del campo electrostático.
7. Comparar con el caso gravitacional.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define el campo eléctrico de una carga?
2. ¿Cuál es el campo eléctrico de una carga puntual?
3. ¿Qué es una línea de campo?
4. ¿Qué propone el principio de superposición para campos?
5. ¿Cómo es el campo de un sistema de masas y de una distribución continua?
6. ¿Cuáles son las unidades del campo eléctrico?

Introducción

Una de las nociones más importantes de la teoría electromagnética es la de campo eléctrico, que puede establecerse en estrecha analogía con la noción de campo gravitacional. En este módulo se establece la definición básica de campo eléctrico, y la idea asociada de líneas de campo; se la implementa luego para distribuciones discretas y continuas; además se proponen algunas aplicaciones elementales. En todos los casos se tratará con campos producidos por cargas o distribuciones de carga en reposo, caso conocido como *electrostática*.



Las líneas de campo son una construcción útil para visualizar las acciones eléctricas.

9.1 La definición de campo eléctrico

El campo eléctrico puede definirse realizando una construcción análoga a la utilizada para definir el campo gravitacional. Así como se definió el campo gravitacional en términos del cociente \mathbf{F}/m , puede definirse el campo eléctrico \mathbf{E} debido a una carga Q localizado en cierto punto del espacio como la fuerza que Q ejerce sobre una carga de prueba q localizada en ese punto, dividida por q , es decir:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}_{Q \rightarrow q}}{q}. \quad (9.1)$$

Es necesario tener en cuenta que la carga de prueba q que se utiliza para definir el campo eléctrico debe ser lo suficientemente pequeña para no alterar la distribución de carga original responsable del campo. Por ello es usual definir el campo de una distribución cualquiera, discreta o continua, de un conductor o un aislante, en la forma:

$$\mathbf{E} = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\mathbf{F}}{q}.$$

Como caso particular, el campo eléctrico debido a una carga puntual Q , de acuerdo con (8.3), tiene la forma:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_r, \quad (9.2)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_r$ es el vector unitario que apunta desde Q hacia el punto donde se evalúa el campo \mathbf{E} .

En forma más general, y teniendo en cuenta el principio de superposición, válido tanto para las fuerzas como los campos, se puede concluir que el campo de una distribución discreta ha de ser la suma de los campos de cada carga, mientras que el de una distribución continua se obtiene sumando los diferenciales de carga en que se descomponga la distribución, es decir, integrando. Así pues, el campo de una colección discreta de n cargas puntuales y de una distribución continua de carga puede expresarse como:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{F}_{i \rightarrow q}}{q} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \hat{\mathbf{u}}_{r_i} \quad (9.3)$$

$$\mathbf{E} = \int_Q \frac{d\mathbf{F}_{dQ \rightarrow q}}{q} = \int_Q \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (9.4)$$

Para distribuciones continuas las densidades lineal, superficial y volumétrica se definen respectivamente como: $\lambda = dQ/d\ell$, $\sigma = dQ/dA$, $\rho = dq/dV$. Para distribuciones homogéneas es cierto que: $\lambda = Q/l$, $\sigma = Q/A$, $\rho = Q/V$.

Nótese que, según la definición (9.1), la fuerza que un campo \mathbf{E} ejerce sobre una carga puntual q es

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (9.5)$$

Ejemplo 9.1

Calcule el campo eléctrico debido a un disco de radio R y a una placa infinita con densidad superficial de carga σ constante. Aplique el resultado al caso de un par de placas paralelas.

Solución:

Conviene en este problema utilizar coordenadas cilíndricas como se muestra en la figura 9.1 y tener en cuenta que para una placa es cierto que $dQ = \sigma dA$, con σ

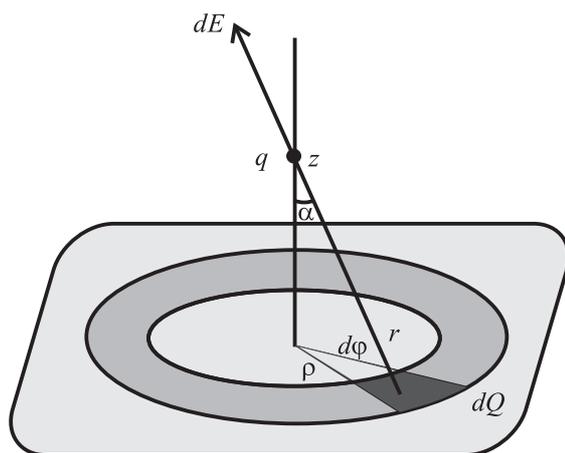


Figura 9.1. Coordenadas cilíndricas para el estudio del campo eléctrico de una placa plana cargada.

constante. La componente z del campo eléctrico debido al elemento diferencial de área $dA = \rho d\rho d\phi$ es una proyección $\cos \alpha$ de la forma

$$\begin{aligned} dE_z &= dE \cos \alpha = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \\ &= \frac{\sigma z \rho d\rho d\phi}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

con $\cos \alpha = z/r$ y $r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$. Como una primera aplicación puede calcularse el campo en el eje de un disco de radio R . Se tiene entonces, después de integrar en ϕ entre 0 y 2π y luego en ρ entre 0 y R :

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]. \end{aligned}$$

Ahora, el campo en z de un disco muy grande ($R \rightarrow \infty$), es decir, de un plano infinito, es en consecuencia:

$$E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0 |z|},$$

es decir:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ si } z > 0, \text{ y}$$

$$E_z = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ si } z < 0.$$

Mediante un análisis gráfico, y con la ecuación anterior, puede demostrarse con facilidad que:

1. Entre un par de placas paralelas con densidades de carga iguales y del mismo signo el campo es cero y en el exterior es σ/ϵ_0 .
2. Entre un par de placas paralelas con densidades de carga iguales y de signo opuesto el campo es σ/ϵ_0 y en el exterior es cero.

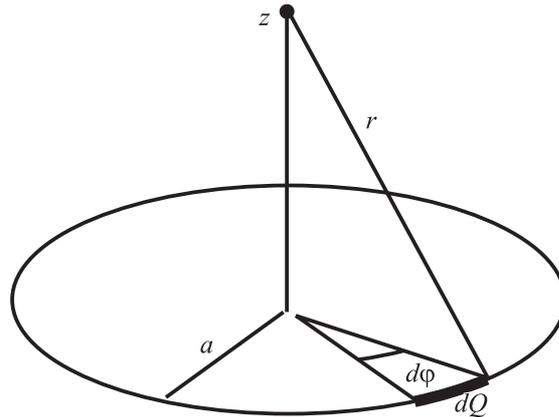


Figura 9.2. Geometría para el estudio del campo eléctrico en el eje de un anillo.

Ejemplo 9.2

Evalúe el campo a una distancia z del centro y sobre el eje de un anillo homogéneo de carga Q y radio a (figura 9.2).

Solución:

Como en el ejercicio anterior, se utilizan coordenadas cilíndricas. Ha de tenerse en cuenta que el elemento diferencial de carga que genera el campo en z es $dQ = \lambda dl = \lambda a d\varphi$, y como para un anillo homogéneo es cierto que $\lambda = Q/2\pi a$, puede escribirse $dQ = Q d\varphi/2\pi$. Debido a la simetría y homogeneidad del anillo no hay campo en dirección perpendicular a z , y la componente diferencial en dirección z es:

$$dE_z = dE \cos \alpha = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha = \frac{Qz d\varphi}{8\pi^2 r^3}.$$

Después de integrar en φ entre 0 y 2π se obtiene:

$$E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (a^2 + z^2)^{3/2}},$$

cuyo límite para $z \gg a$ es $E_z = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$.

A gran distancia el campo de un anillo se convierte en el de una carga puntual.

9.2 Las líneas de campo

Como se deduce de (9.5), la dirección del campo eléctrico es la misma dirección de la fuerza que este campo ejerce sobre una carga de prueba positiva: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Una imagen conveniente, que ya fue explorada en el caso de la gravitación, sugiere llenar el espacio con vectores radiales que salen de la carga Q y terminan en el infinito. Estas son las líneas de campo de la carga Q positiva (figura 9.3a).

Es obvio de (9.2) que las líneas de campo de una carga Q negativa vienen radialmente desde el infinito y entran en la carga (figura 9.3b). Esta doble situación ocurre en electrostática pero no en gravitación, pues la masa es de un solo signo (positivo por convención). Como puede observarse, las líneas de campo están más concentradas en las cercanías de la carga, lo que indica que el campo es más intenso en esas zonas y disminuye a medida que aumenta la distancia.

Ahora bien, cuando hay más de una carga la construcción de las líneas de campo debe hacerse siguiendo las reglas de la suma de vectores. Estas reglas indican

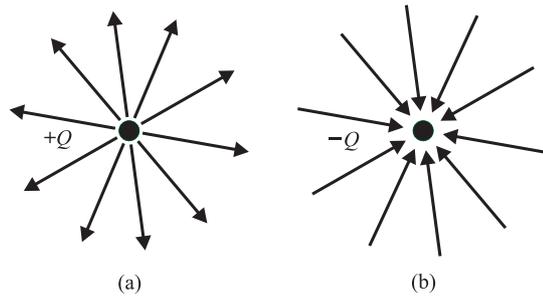


Figura 9.3. Líneas de campo eléctrico de cargas positiva (a) y negativa (b)

que la suma de vectores tiene un resultado único, razón por la cual dos líneas de campo nunca pueden cruzarse, pues de hacerlo significaría que un vector resultante de una suma puede tener en un mismo punto dos direcciones simultáneas. Esta es una de las reglas básicas en la construcción de líneas de campo. La otra es que estas líneas salen de las cargas positivas y llegan a las negativas. Dos cargas positivas iguales tienen el mismo número de líneas de campo; una pareja de cargas de igual valor pero de signo distinto tienen igual número de líneas pero con dirección opuesta; las líneas que salen de la positiva llegan todas a la negativa. Las figuras 9.4 y 9.5 muestran las líneas de campo en estos dos casos, en tanto que la figura 9.6 muestra las correspondientes a cargas de distinta magnitud y de distinto signo. En el último caso no todas las líneas de una confluyen en la otra; la diferencia entre el número de líneas va al (o viene del) infinito.

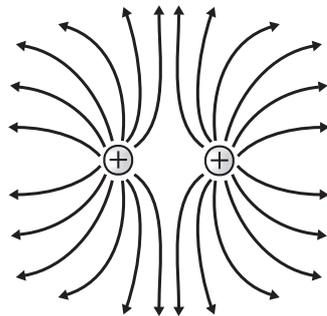


Figura 9.4. Líneas de campo eléctrico de dos cargas positivas iguales.

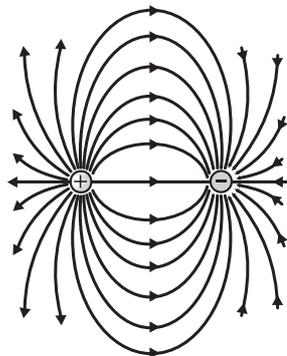


Figura 9.5. Líneas de campo eléctrico de dos cargas iguales y de signo opuesto.

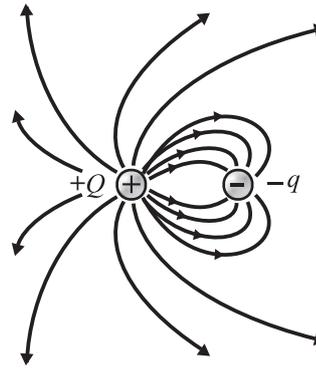


Figura 9.6. Líneas de campo eléctrico de dos cargas diferentes y de signo opuesto.

Las líneas de campo eléctrico de un disco tienen la forma mostrada en la figura 9.7.

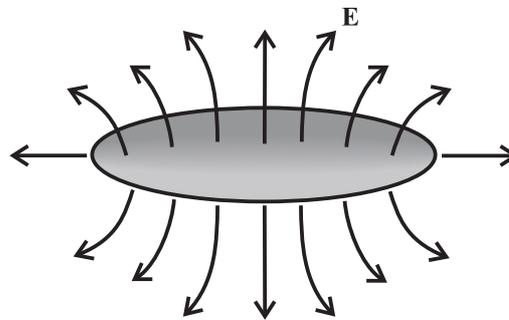


Figura 9.7. Líneas de campo eléctrico de un disco circular.

Módulo 10

El movimiento de cargas en campos eléctricos

Contenidos del módulo

- 10.1 Carga puntual en un campo eléctrico uniforme
- 10.2 Dipolo eléctrico

Objetivos del módulo

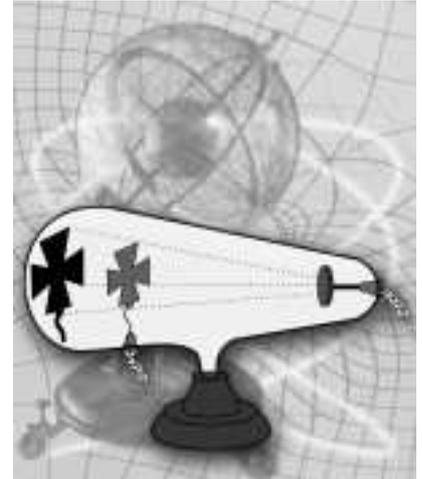
1. Estudiar el movimiento de cargas en campos eléctricos uniformes.
2. Estudiar el movimiento parabólico de cargas.
3. Proponer la analogía entre gravitación y electrostática.
4. Definir el dipolo eléctrico.
5. Estudiar la fuerza y el torque experimentados por un dipolo.
6. Estudiar las oscilaciones de un dipolo.

Preguntas básicas

1. ¿Cuáles son las analogías entre el movimiento parabólico en gravitación y en electricidad?
2. ¿Qué es un dipolo eléctrico?
3. ¿Puede un dipolo eléctrico ser un oscilador armónico simple?
4. ¿Cuál es la frecuencia de oscilación de un dipolo?

Introducción

Este módulo se dedica a describir el movimiento de partículas puntuales en campos eléctricos uniformes. Un primer caso es el de una partícula en el interior de un par de placas paralelas; a continuación se define el dipolo eléctrico y se estudian las oscilaciones que experimenta cuando se coloca en un campo eléctrico.



El tubo de rayos catódicos permite estudiar las fuerzas que actúan sobre los electrones y sus propiedades fundamentales.

10.1 Carga puntual en un campo eléctrico uniforme

De acuerdo con el ejemplo 9.1 el campo eléctrico entre un par de placas paralelas horizontales con densidad de carga constante es uniforme y va dirigido hacia abajo, si la placa superior es positiva y la inferior negativa. Una partícula puntual q que se lanza en su interior experimenta una fuerza dada por (9.5): $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Esta ecuación asegura que una carga *positiva* dejada en libertad en un campo externo experimenta una fuerza, y en consecuencia una aceleración, en dirección del campo, una carga negativa se acelera en dirección de $-\mathbf{E}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton el movimiento de una carga q está descrito por la ecuación:

$$m\mathbf{a} = q\mathbf{E}. \quad (10.1)$$

En componentes cartesianas:

$$m\ddot{x} = qE_x, \quad (10.2)$$

$$m\ddot{y} = qE_y, \quad (10.3)$$

$$m\ddot{z} = qE_z. \quad (10.4)$$

Es suficiente integrar estas ecuaciones y proveer las condiciones iniciales que permiten evaluar las constantes de integración. La solución de las ecuaciones (10.2), (10.3), (10.4) para un campo eléctrico constante es:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2} \frac{qE_x}{m} t^2, \quad (10.5)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2} \frac{qE_y}{m} t^2, \quad (10.6)$$

$$z = z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2} \frac{qE_z}{m} t^2. \quad (10.7)$$

Escogiendo el sistema de coordenadas como muestra la figura 10.1, es posible analizar algunos casos simples:

1. Si el movimiento comienza en el punto $(0, h, 0)$, con velocidad inicial $(0, 0, 0)$, y como $(E_x, E_y, E_z) = (0, -E, 0)$, se tiene, de (10.5), (10.6) y (10.7):

$$x = 0, \quad y = h - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad z = 0.$$

El movimiento es uniformemente acelerado en dirección y e inercial en x y z .

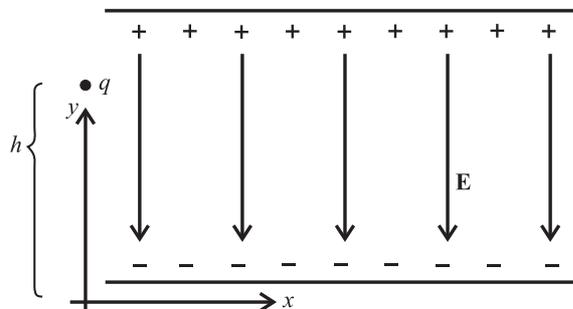


Figura 10.1. Una carga q en el campo eléctrico de un par de placas paralelas.

2. Si las condiciones iniciales son $(v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha, 0)$ y $(0, 0, 0)$, se tendrá:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad (10.8)$$

$$y = y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2, \quad (10.9)$$

$$z = 0. \quad (10.10)$$

Estas ecuaciones corresponden a un movimiento parabólico, enteramente análogo al de un proyectil. Nótese que en efecto la aceleración, tanto en este caso como en el de la gravedad, es constante. En estos cálculos ha sido ignorada la fuerza de gravedad. ¿Cómo se modifican estos resultados si se incluye un campo gravitacional g constante?

10.2 Dipolo eléctrico

Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas iguales y opuestas separadas una distancia a (figura 10.2).

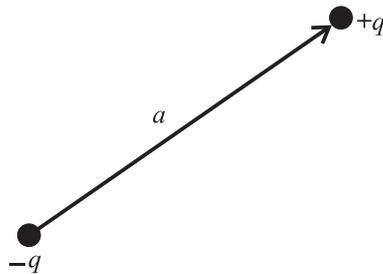


Figura 10.2. Dipolo eléctrico.

El momento de dipolo del sistema se define como:

$$\mathbf{p} = q\mathbf{a}, \quad (10.11)$$

donde el vector \mathbf{a} va de la carga negativa a la positiva.

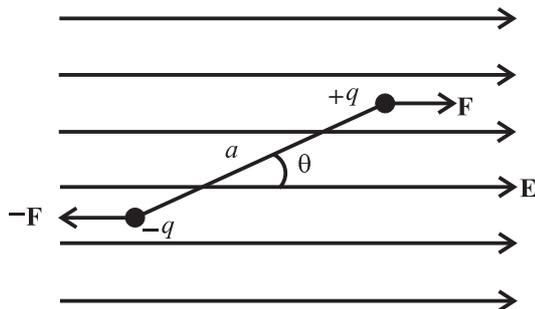


Figura 10.3. Fuerzas experimentadas por un dipolo colocado en un campo eléctrico.

Si el dipolo se coloca en un campo eléctrico homogéneo, cada una de las cargas experimenta una fuerza en dirección contraria, por lo cual, de acuerdo a la figura 10.3, la fuerza neta sobre el dipolo es cero; la fuerza neta no será nula si el dipolo se coloca en un campo eléctrico inhomogéneo. Las dos fuerzas en cualquiera de

los dos casos producen un torque neto diferente de cero. De acuerdo a la figura 10.3, el torque neto que el dipolo experimenta en un campo homogéneo es:

$$\tau = Fa \operatorname{sen} \theta,$$

y como $F = qE$ y $p = aq$, el torque puede escribirse:

$$\tau = pE \operatorname{sen} \theta.$$

La anterior ecuación es exactamente la definición de un producto vectorial; el torque puede entonces expresarse como:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \quad (10.12)$$

En consecuencia, el torque máximo o mínimo sobre el dipolo ocurre si es perpendicular al campo eléctrico y es nulo si el dipolo es paralelo o antiparalelo al campo \mathbf{E} . Si el dipolo se coloca inicialmente en una posición en la que \mathbf{p} y \mathbf{E} no sean colineales, comenzará a oscilar. En efecto, si el momento de inercia del dipolo es I , y α su aceleración angular, el movimiento del dipolo, gobernado por la ecuación $\tau = I\alpha = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, da lugar a:

$$I\ddot{\theta} = -pE \operatorname{sen} \theta.$$

El signo “menos” proviene de que en la figura (10.3) el ángulo θ tiene dirección antihoraria mientras que la dirección de $\mathbf{p} \times \mathbf{E}$ es horaria. Para ángulos pequeños es cierto que $\operatorname{sen} \theta \simeq \theta$, por lo cual, de (11.2):

$$\ddot{\theta} + \frac{pE}{I} \theta \simeq 0.$$

Esta ecuación asegura que para ángulos pequeños el dipolo oscila en forma armónica simple, con frecuencia $\omega = \sqrt{pE/I}$.

Ejemplo 10.1

Campo eléctrico de un dipolo puntual

Solución:

El resultado del ejemplo 8.1 puede ser aplicado a la evaluación del campo de un dipolo eléctrico si se hace $q_1 = -q$ y $q_2 = q$ y se tiene en cuenta que $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$. De este modo se obtienen las siguientes componentes cartesianas:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right],$$

$$E_y = \frac{qy}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{[(x+a)^2 + y^2]^{3/2}} + \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \right].$$

El campo de un dipolo puntual se obtiene en el límite $a \ll x$ y $a \ll y$; esto significa que el tamaño del dipolo es muy pequeño en comparación con la distancia desde la que se evalúa el campo. En este límite es cierto que:

$$\begin{aligned} [(x-a)^2 + y^2]^{-3/2} &= [x^2 + y^2 + a^2 - 2ax]^{-3/2} \simeq [x^2 + y^2 - 2ax]^{-3/2} \\ &= [r^2 - 2ax]^{-3/2} \simeq \frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^5}, \\ [(x+a)^2 + y^2]^{-3/2} &= [x^2 + y^2 + a^2 + 2ax]^{-3/2} \simeq [x^2 + y^2 + 2ax]^{-3/2} \\ &= [r^2 + 2ax]^{-3/2} \simeq \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^5}. \end{aligned}$$

En esta aproximación, con $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y $p = 2qa$, es fácil demostrar que las componentes cartesianas se reducen a:

$$E_x = \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} [-1 + 3 \cos^2 \theta],$$
$$E_y = \frac{3p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \cos \theta.$$

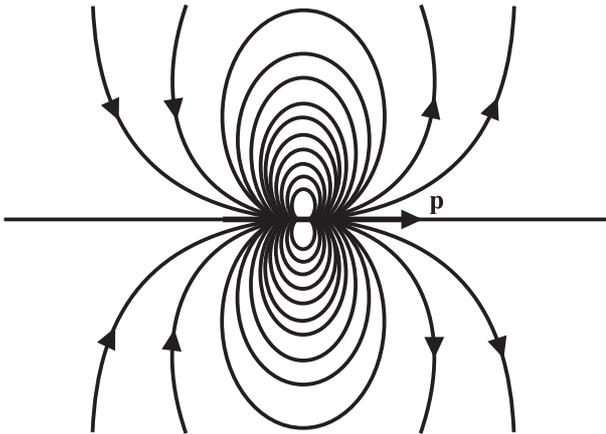


Figura 10.4. Campo eléctrico de un dipolo puntual.

Las líneas de campo eléctrico de un dipolo puntual se muestran en la figura 10.4. En el ejemplo 11.3 se presenta el cálculo del campo eléctrico en coordenadas esféricas, basado en el concepto de potencial.

Módulo 11

Energía potencial y potencial electrostático

Contenidos del módulo

- 11.1 Energía potencial electrostática
- 11.2 Potencial electrostático
 - 11.2.1 Carga puntual
 - 11.2.2 Distribuciones de carga

Objetivos del módulo

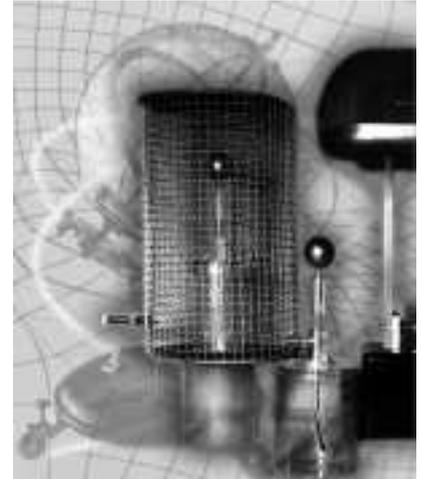
1. Estudiar, para el caso electrostático, los teoremas de trabajo y energía, potencial y cinética.
2. Definir la energía potencial electrostática.
3. Estudiar la conservación de energía.
4. Demostrar que la fuerza electrostática es conservativa.
5. Definir el potencial electrostático.
6. Establecer la conexión entre campo y potencial.
7. Escribir la forma del potencial para un sistema de partículas y una distribución.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define la energía potencial eléctrica?
2. ¿Es conservativa la fuerza electrostática?
3. ¿Cómo se define el potencial electrostático?
4. ¿Puede escogerse cero en algún punto el potencial electrostático?
5. ¿Cómo se define el potencial electrostático de una distribución?

Introducción

El campo electrostático es conservativo. Esto significa que es posible plantear una ley de conservación de la suma de la energía cinética y potencial para el caso electrostático. En este módulo se propone el concepto de potencial eléctrico, en estrecha analogía con el caso gravitacional. Se obtiene la forma que adopta la conservación de energía y se realizan algunas aplicaciones simples.



El interior de la jaula de Faraday cargada es una región equipotencial; carece, por tanto, de campo eléctrico.

11.1 Energía potencial electrostática

El trabajo realizado por el campo electrostático para mover una carga puntual q a lo largo de una trayectoria arbitraria tiene la forma:

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (11.1)$$

En estricta analogía con (7.1) se define diferencia de energía potencial entre dos puntos como el negativo del trabajo realizado entre ellos; así pues:

$$\Delta E_p = E_p(b) - E_p(a) = -q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (11.2)$$

De (11.2) puede concluirse que *el campo electrostático es conservativo*. En efecto, el trabajo realizado por el campo electrostático sobre una partícula q para moverla alrededor de una trayectoria cerrada es nulo:

$$W = q[E_p(a) - E_p(a)] = -q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (11.3)$$

De otro lado, la definición de trabajo ha sido elaborada en (7.3) para dar el teorema del trabajo y la energía cinética. De (11.4) y (7.5) es posible obtener la regla de conservación de energía en el caso electrostático

$$[E_c + E_p]_a = [E_c + E_p]_b.$$

Ejemplo 11.1

Calcule la energía potencial de una carga puntual situada entre un par de placas paralelas verticales con cargas iguales y opuestas separadas una distancia d .

Solución:

De (11.2) se deduce que el trabajo realizado para mover la carga q entre las placas, situadas en $x = 0$ y $x = d$, es:

$$E_p(d) - E_p(0) = -q \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Si $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{i}}E$, donde E es constante, puede escribirse:

$$E_p(d) - E_p(0) = -q \int_0^d E dx = -qE(d - 0) = -qEd.$$

Es claro que solo puede evaluarse la *diferencia* de energía potencial entre los dos puntos, por lo cual puede escogerse un nivel de referencia cero, como en el caso gravitacional. Sea, por ejemplo, $E_p(0) = 0$, de donde se concluye que $E_p(d) = -qEd$.

11.2 Potencial electrostático

La *diferencia de potencial* entre dos puntos se define como la diferencia de energía potencial por unidad de carga, es decir:

$$\Delta V = \frac{\Delta E_p}{q} = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}. \quad (11.4)$$

La unidad de energía potencial electrostática es obviamente la misma de trabajo, el joule en el sistema M.K.S. o el ergio en el cgs. La unidad de potencial electrostático conocida como *voltio* (V) equivale, según (11.4), a *joule/coulomb*. Esto significa que el trabajo que se realiza para mover una carga de 1 C a través de una diferencia de potencial de 1 V es de 1 J. De (11.4) se concluye también que las unidades de campo eléctrico (N/C según (9.1)) pueden expresarse como V/m.

En física atómica y de partículas elementales se utiliza una unidad de energía conocida como *electrón-voltio* (eV); equivale a la energía que gana un electrón (cuya carga es de $1,6 \times 10^{-19}$ C) cuando viaja a través de una diferencia de potencial de 1 V. De (9.1) se sigue que $1 \text{ eV} = (1,6 \times 10^{-19} \text{ C}) \times (1 \text{ V}) = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Como se verá en las secciones que siguen, los puntos del espacio con el mismo valor del potencial pueden agruparse en dos tipos: *volúmenes* si se trata de conductores, y *superficies* si se trata de aislantes o del exterior de distribuciones arbitrarias. En el último caso se habla de *superficies equipotenciales*.

11.2.1 Carga puntual

El potencial electrostático de una carga puntual q puede ser calculado a partir de (11.4), con $\mathbf{E} = q\hat{\mathbf{u}}_r/4\pi\epsilon_0 r^2$:

$$\begin{aligned}\Delta V &= - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_b^a \frac{q\hat{\mathbf{u}}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_b} - \frac{1}{r_a} \right] = V(b) - V(a).\end{aligned}$$

De acá puede observarse que si la trayectoria es cerrada ($b = a$) la diferencia de potencial es nula, lo que equivale a trabajo nulo sobre una trayectoria cerrada; es decir, el campo es conservativo.

El *potencial electrostático* de una carga puntual q se define como

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (11.5)$$

en forma tal que el potencial en el infinito toma un valor nulo.

En el caso de una carga puntual q que se mueve en el campo de una carga puntual Q , la conservación de energía toma la forma:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_a} = \frac{1}{2}mv_b^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r_b}. \quad (11.6)$$

Obsérvese que (7.3) y (11.5), que son ecuaciones formalmente idénticas, difieren sin embargo en el signo de la energía potencial; esto se debe a que la gravitación es siempre atractiva (las masas son siempre del mismo signo), mientras que la fuerza eléctrica entre cargas del mismo signo es repulsiva.

11.2.2 Distribuciones de carga

El potencial electrostático en algún punto del espacio, debido a una distribución discreta de cargas q_i , puede calcularse conociendo la fuerza neta que la distribución ejerce sobre una carga de prueba q colocada en ese punto; el trabajo por unidad de carga de prueba q para moverla de a hasta b da la diferencia de potencial entre esos dos puntos y permite definir el potencial electrostático de un sistema de n partículas q_i en la forma

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad (11.7)$$



Vea el documento "Gradiente" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

donde r_i representa la distancia desde q_i hasta el punto donde se evalúa el potencial.

Si la distribución de carga es continua, el procedimiento anterior se convierte en la suma de un conjunto de diferenciales de potencial dV , debido cada uno a un dQ , lo que en fin de cuentas genera una integral sobre la carga de la distribución:

$$V = \int_Q \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11.8)$$

En concordancia, la energía potencial de una carga q colocada en el campo de potencial de una distribución, discreta y continua, se evalúa teniendo en cuenta que $E_p = qV$, y toma respectivamente la forma:

$$E_p = q \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}, \quad E_p = q \int_Q \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (11.9)$$

Un análisis completamente análogo al de la sección 2.3.8 permite establecer la conexión entre la fuerza eléctrica y la energía potencial electrostática, que es la versión diferencial de (11.4): $\mathbf{F} = -\nabla E_p$; dada la conexión entre \mathbf{F} y \mathbf{E} y la existente entre E_p y V es posible concluir que:

$$\mathbf{E} = -\nabla V. \quad (11.10)$$

Las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales para una carga puntual positiva se muestran en la figura 11.1a, para una negativa en la figura 11.1b, para una pareja (+-) en la figura 11.2 y para una pareja (++) en la figura 11.3.

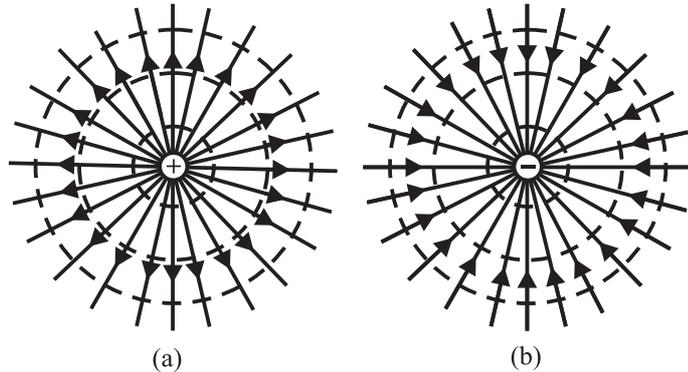


Figura 11.1. Las superficies equipotenciales de cargas puntuales positivas (a) y negativas (b) son círculos concéntricos.

Ejemplo 11.2

Calcule el potencial eléctrico en el interior y el exterior de un cascarón esférico homogéneo de carga Q y radio R .

Solución:

De acuerdo a (11.8) y a la figura 11.4, con $dQ = \sigma dA = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \frac{\sigma R^2 \sin \theta}{r} d\theta d\varphi.$$

Utilizando (6.8) se obtiene

$$V = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=z-R}^{z+R} r dr d\varphi = \frac{4\pi\sigma R^2}{4\pi\epsilon_0 z} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}. \quad (11.11)$$

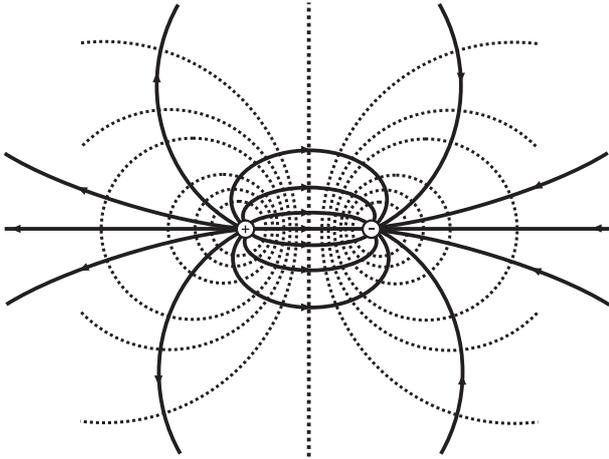


Figura 11.2. Las líneas de campo punteadas representan las superficies equipotenciales de una pareja de cargas iguales y de signo opuesto.

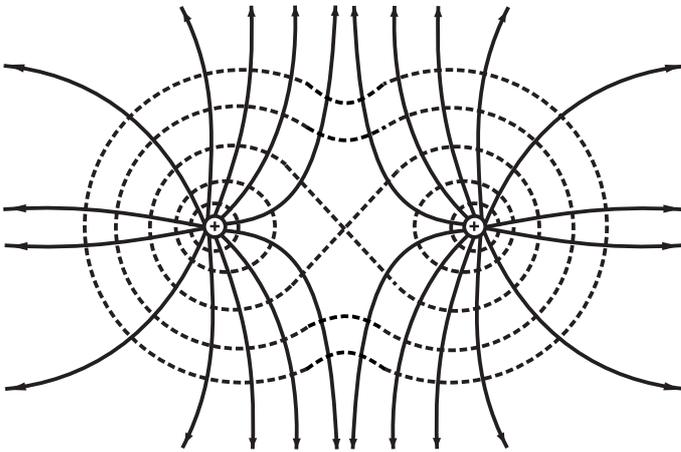


Figura 11.3. Superficies equipotenciales (punteadas) de una pareja de cargas iguales y positivas.

En consecuencia, el potencial electrostático de un cascarón esférico cargado es el mismo que si su carga estuviese concentrada en su centro.

A partir de esta ecuación es posible calcular el campo eléctrico haciendo uso de (11.10). Para esto ha de tomarse en cuenta que en general la variable z que aparece en (11.11) es en efecto una variable radial, por lo cual

$$\mathbf{E} = -\nabla V = -\nabla \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (11.12)$$

Como en el caso de la gravitación, el campo eléctrico en el exterior de un cascarón esférico es el mismo que si toda su carga estuviese concentrada en su centro.

¿Cuál es el potencial en el interior?

Ejemplo 11.3

Calcule el potencial eléctrico de un dipolo puntual. ¿Cuál es la energía potencial de un dipolo?

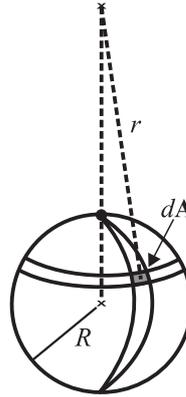


Figura 11.4. Geometría para el cálculo del potencial de un cascarón esférico.

Solución:

El potencial del dipolo de la figura 8.5 con $q_1 = -q'$, $q_2 = q'$ y $2a = b$, se calcula, de acuerdo con (11.5) y (11.7), como la suma de los potenciales de cada carga:

$$V = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right].$$

Si r es la distancia del origen al punto donde se coloca una carga de prueba q , las reglas del coseno para r_1 y r_2 afirman que:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= b^2 + r^2 + 2br \cos \theta, \\ r_2^2 &= b^2 + r^2 - 2br \cos \theta. \end{aligned}$$

En el caso de dipolo puntual, definido como el campo para $r \gg b$, es cierto que $b^2 + r^2 \simeq r^2$, de modo que $r_1^2 \simeq r^2 + 2br \cos \theta$ y $r_2^2 \simeq r^2 - 2br \cos \theta$; en consecuencia, después de hacer uso del teorema del binomio se sigue que:

$$r_1 \simeq r \left[1 + \frac{b}{r} \cos \theta \right], \quad r_2 \simeq r \left[1 - \frac{b}{r} \cos \theta \right], \quad r_1 r_2 \simeq r^2,$$

donde se han desechado potencias b^2/r^2 y mayores. Al reemplazar en el potencial se obtiene:

$$V = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{11.13}$$

En términos de los vectores \mathbf{p} y \mathbf{r} el potencial de dipolo se expresa como:

$$V = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Mientras que el potencial de una carga puntual depende de $1/r$, el de un dipolo puntual depende de $1/r^2$. En el problema 31 se introduce el *cuadrupolo*, cuyo potencial depende de $1/r^3$.

La expresión (11.13) está escrita en coordenadas esféricas. Nótese, en efecto, que el ángulo ϕ avanza alrededor del eje horizontal, y que θ es el ángulo polar. De acuerdo con (11.10) el campo eléctrico en coordenadas esféricas está dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla V = - \left[\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{\theta} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right] \\ &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2\hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta]. \end{aligned}$$

Esta expresión es más compacta que la correspondiente en coordenadas cartesianas obtenida en el ejemplo 10.1.

La energía potencial de un dipolo colocado en un campo eléctrico externo \mathbf{E} puede calcularse evaluando el trabajo que el campo realiza al rotar el dipolo. De acuerdo al curso anterior de *Física I*, el trabajo realizado por un torque τ al rotar un cuerpo un ángulo $d\theta$ está dado por $dW = \tau d\theta$, y puesto que según la sección 10.2 $\tau = pE \sin \theta$, puede escribirse:

$$dW = \tau d\theta = pE \sin \theta d\theta.$$

Al integrar esta expresión entre los ángulos θ_0 y θ se sigue, asumiendo por simplicidad que el campo E es uniforme:

$$\begin{aligned} W &= pE \int_{\theta_0}^{\theta} \sin \theta d\theta = -pE \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} \\ &= -pE(\cos \theta - \cos \theta_0) = E_p(\theta) - E_p(\theta_0). \end{aligned}$$

La energía potencial del dipolo puede por tanto ser escrita como $E_p(\theta) = -pE \cos \theta + cte$. La constante puede ser anulada calibrando el potencial apropiadamente; si se escoge el nivel de referencia de modo que la energía potencial sea cero en $\theta_0 = 90^\circ$ se consigue que la constante se anule, dando lugar a que la energía potencial del dipolo pueda expresarse como $E_p = -pE \cos \theta$; esta ecuación equivale a:

$$E_p = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}.$$

La energía potencial mínima de un dipolo en un campo externo ocurre cuando \mathbf{p} y \mathbf{E} son paralelos; en esta posición el dipolo está en equilibrio estable. La máxima energía ocurre si \mathbf{p} y \mathbf{E} son antiparalelos, caso en el cual el equilibrio es inestable. Cuando el dipolo oscila hay un intercambio entre energías cinética y potencial.

Capítulo 4

Ley de Gauss y aplicaciones



Las investigaciones de Benjamín Franklin le permitieron concluir que el rayo es un fenómeno eléctrico.

Presentación

La formulación de la electrostática realizada en los módulos anteriores ha utilizado la ley de Coulomb y la definición del campo eléctrico. Esta forma de acercamiento al tema se basa en propiedades que pueden ser calculadas punto a punto. Tal ha

Contenido breve

Módulo 12

Ley de Gauss

Módulo 13

Conductores y dieléctricos

Módulo 14

Dieléctricos

Módulo 15

Capacitancia y condensadores

Módulo 16

Energía del campo eléctrico

sido el caso en la evaluación de los campos en cada punto del espacio debido a diferentes tipos de distribuciones.

Un acercamiento diferente, de tipo integral, se propone en el módulo 12, basado en la noción de flujo del campo eléctrico. Se expresa en la llamada ley de Gauss, con la cual pueden evaluarse los campos electrostáticos en situaciones de alta simetría.

Se desarrollan diversos ejemplos para ilustrar cómo las simetrías permiten evaluar en forma simple lo que en el capítulo anterior exigía un largo proceso de cálculo.

Los módulos 13 y 14 exploran las propiedades básicas de los conductores y los dieléctricos, mientras el siguiente introduce la noción de capacitancia y su aplicación a la teoría de condensadores, preámbulo importante de la teoría de circuitos eléctricos.

El capítulo finaliza con el estudio de la energía almacenada en el campo electrostático.

Módulo 12

Ley de Gauss

Contenidos del módulo

- 12.1 El concepto de flujo
- 12.2 La ley de Gauss

Objetivos del módulo

1. Definir el flujo de un campo vectorial.
2. Calcular el flujo del campo eléctrico de una carga puntual.
3. Utilizar el principio de superposición para evaluar flujos de sistemas de cargas.
4. Obtener el flujo del campo eléctrico de una distribución discreta o continua de cargas.
5. Proponer las cargas eléctricas como fuentes o sumideros.
6. Obtener la ley de Gauss.
7. Estudiar desde la ley de Gauss los campos de diversos tipos de distribuciones.
8. Mostrar, a través de ejemplos, que la ley de Gauss es aplicable solo a situaciones de alta simetría.

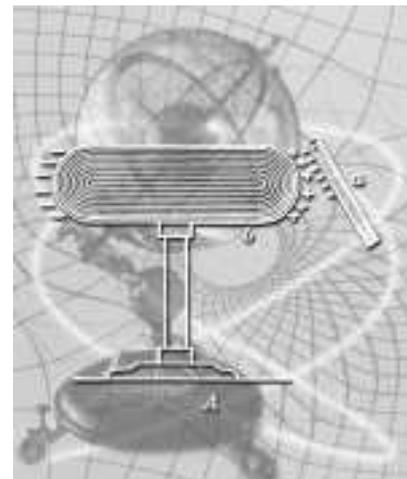
Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define el flujo de un campo vectorial?
2. ¿Qué conexión existe entre flujos máximo, mínimo o cero y la orientación relativa entre el campo y la superficie?
3. ¿Tiene sentido definir el flujo de un campo escalar, como la temperatura o la densidad de la atmósfera?
4. ¿Cómo es el flujo eléctrico de una carga puntual?
5. ¿Qué significa que una carga positiva es fuente del campo eléctrico?
6. ¿Cómo es la conexión entre flujo y principio de superposición?

Introducción

La noción de flujo de un campo vectorial surgió con la teoría de los fluidos, como una construcción bastante enraizada en lo intuitivo, aunque luego se convirtió en un concepto abstracto con cada vez mayor aplicación en la teoría de campos. Es un concepto imprescindible en el estudio de la estructura matemática de teorías como la gravitación, la acústica, la electricidad y el magnetismo. De hecho, al final de este curso podrá verse cómo hace parte de la enunciación de las leyes generales del campo electromagnético asociadas al nombre de Maxwell.

En este módulo se propone la definición general del flujo de un campo vectorial y se estudia cómo este concepto permite expresar la ley de Coulomb en una forma bastante elegante y general, dotándola de un gran contenido físico. La ley de Gauss permite entender las cargas eléctricas como fuentes o sumideros de líneas de campo eléctrico, en un sentido análogo a como los grifos y los desagües son, en su orden, fuentes y sumideros de un campo hidrodinámico.



Una barra cargada separa las cargas de un conductor neutro. El proceso se llama "cargar por inducción".

12.1 El concepto de flujo

La definición de flujo de un campo vectorial involucra dos cantidades básicas: el *campo* cuyo flujo se quiere definir y la *superficie* a través de la cual fluye. Un ejemplo sencillo permite establecer la conexión entre estas dos cantidades que dan lugar a la idea de flujo: piénsese en la corriente de un río que fluye suavemente. Si colocamos un aro, con una fina malla, dentro de la corriente de fluido de velocidad \mathbf{v} , será fácil notar que la mayor cantidad de agua posible atraviesa la malla si su plano es perpendicular a la corriente, y que no hay flujo que lo atraviese si su plano es paralelo a la corriente. Si se admite, como lo establece el análisis vectorial, que una superficie diferencial como la mostrada en la figura 12.1 es una cantidad *vectorial* $d\mathbf{A}$ (cuyo módulo es el *área*), podrá hacerse la siguiente afirmación: el flujo máximo (o mínimo) ocurre si los vectores \mathbf{v} y $d\mathbf{A}$ son paralelos (o antiparalelos), y el flujo es nulo si los dos vectores son perpendiculares.

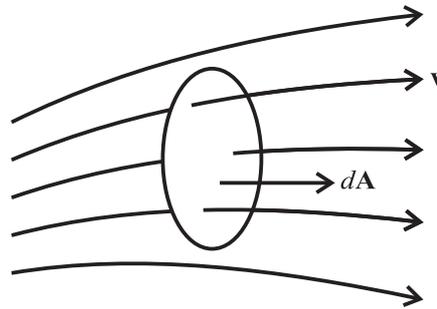


Figura 12.1. El flujo se define en términos del campo \mathbf{v} y del diferencial de superficie $d\mathbf{A}$.

Estas consideraciones sugieren la siguiente definición del flujo diferencial $d\phi$ del campo de velocidad \mathbf{v} del fluido a través de la superficie diferencial $d\mathbf{A}$:

$$d\Phi = \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (12.1)$$

Es obvio, de la definición de producto escalar, que el flujo es cero si \mathbf{v} y $d\mathbf{A}$ son perpendiculares y es máximo (o mínimo) si son paralelos (o antiparalelos). La dirección del vector superficie puede escogerse arbitrariamente; la única condición es que su dirección sea perpendicular al plano del elemento diferencial de área.

La superficie ha sido escogida diferencial por dos razones:

1. No es obligatorio que la superficie sea plana. Puede pensarse, por ejemplo, en calcular el flujo a través de una malla cóncava, caso en el cual cada elemento diferencial $d\mathbf{A}$ tiene diferente dirección.
2. En el caso más general el campo de velocidad tiene diferente dirección y magnitud en diferentes puntos.

Cuando se dispone de una superficie finita a través de la cual quiere calcularse el flujo de una corriente \mathbf{v} inhomogénea, ha de descomponerse la superficie en elementos diferenciales y realizar luego la integral:

$$\Phi = \int_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}. \quad (12.2)$$

Un caso de notable importancia en la teoría de campos es el cálculo del flujo a través de una superficie *cerrada*. Por convención se escoge la dirección del vector

diferencial de superficie apuntando hacia *afuera* del volumen, como se indica en la figura 12.2.

En este caso la integral de flujo se expresa en la forma:

$$\Phi = \oint_A \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}, \quad (12.3)$$

donde el círculo en la integral indica que la superficie es cerrada.

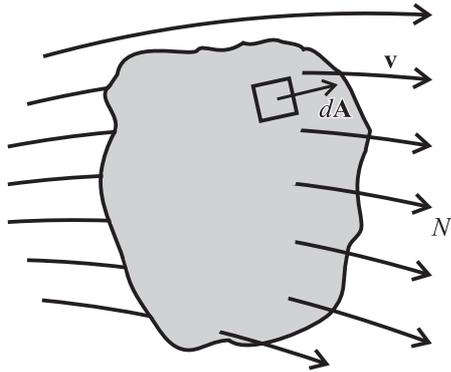


Figura 12.2. Líneas de campo que atraviesan una superficie cerrada. El vector de superficie va siempre hacia afuera.



Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

Matemático, físico y astrónomo alemán. director del observatorio de la Universidad de Gotinga en 1807. Es considerado el más grande matemático de todos los tiempos. Colaboró desde 1831 con Weber en investigaciones sobre el magnetismo. La unidad del campo de inducción magnética lleva su nombre. En astronomía se hizo famoso por haber calculado la órbita de Ceres basándose en solo tres observaciones del asteroide. Hizo notables contribuciones a la electrostática, a la aritmética, al álgebra y la geometría, siendo el fundador de las geometrías no euclidianas. Entre sus obras destacan *Disquisiciones sobre Aritmética*, *Teoría del movimiento de los cuerpos celestes* y *Disquisiciones generales sobre las superficies curvas*.

12.2 La ley de Gauss

Sea una carga puntual q rodeada de una superficie esférica imaginaria a la que se conoce como *superficie gaussiana*. El flujo a través de esta superficie es

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \oint_A \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r dA = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_{4\pi r^2} dA \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Se ha tenido en cuenta que la dirección de $d\mathbf{A}$ es radial. El resultado (12.4), conocido como ley de Gauss, asegura que la carga q es la *fuentes* del flujo de su campo eléctrico. El flujo neto a través de la gaussiana esférica es proporcional a la carga encerrada. Nótese que el término $1/r^2$ en la ley de Coulomb es compensado exactamente por el r^2 del elemento de área; esto significa que el resultado es válido exclusivamente para fuerzas centrales del tipo $1/r^2$.

Si la carga q se rodea de otras superficies cerradas no esféricas, como en la figura 12.3, puede concluirse que, independiente de la forma de la superficie, el número de líneas de campo que las atraviesa a todas es el mismo, de modo que *el flujo neto a través de cualquier superficie cerrada que rodee a una carga puntual es el mismo*.

Si la superficie cerrada se dibuja por fuera de la carga puntual, el número de líneas que entra es el mismo de las que sale, lo que da un flujo neto cero: *si en el interior de la gaussiana no hay carga alguna, el flujo neto es cero*.

El principio de superposición vectorial permite averiguar lo que sucede si hay más de una carga puntual en el interior de una gaussiana. El campo eléctrico neto

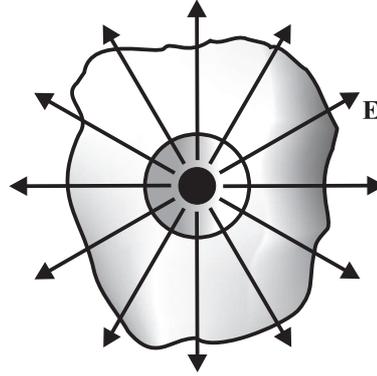


Figura 12.3. Las diferentes superficies que rodean a la misma carga son atravesadas por el mismo flujo.

debido a una colección de cargas puntuales es la suma de los campos producidos por cada carga, de modo que el flujo total se escribe

$$\Phi \oint_A (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots) \cdot d\mathbf{A} = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$$

y como cada uno de los flujos es proporcional a la carga encerrada se sigue que

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots = \frac{q_1}{\epsilon_0} + \frac{q_2}{\epsilon_0} + \dots = \frac{q}{\epsilon_0},$$

donde q es la carga total encerrada en la superficie.

Si en vez de una colección de cargas puntuales se tiene una distribución continua (lineal, superficial o volumétrica), bastará descomponerla en elementos diferenciales, cada uno de los cuales genera un flujo diferencial igual a dq/ϵ_0 . La suma sobre todos ellos da la carga total dividida sobre ϵ_0 . La ley de Gauss es el enunciado general de este resultado: *el flujo eléctrico neto a través de una superficie gaussiana (cerrada) es proporcional a la carga neta contenida en su interior:*

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (12.5)$$

La gaussiana puede escogerse en forma arbitraria; algunas cargas pueden estar dentro, otras fuera, pero en cualquier caso el campo \mathbf{E} en (12.5) es el debido a *todas* las cargas, estén dentro o fuera de la superficie. Ciertamente, al flujo neto solo contribuyen las cargas que estén en el interior de la gaussiana.

La ley de Gauss es una afirmación completamente general acerca del campo electrostático y representa una propiedad global (integral), a diferencia de la ley de Coulomb que representa una propiedad local (puntual). A pesar de su generalidad, la ley de Gauss es aplicable en un número bastante limitado de casos particulares en los que es simple escoger de antemano la forma apropiada de la gaussiana. La integral gaussiana en (12.5) puede evaluarse una vez que se conoce la forma matemática de la superficie que hace simple la integral, lo cual es posible en muy pocos casos. Aunque en principio la gaussiana puede ser cualquier superficie, la integral solo puede realizarse en casos de alta simetría, como en esferas, líneas de carga, superficies y cilindros homogéneos, en los que la forma más útil de la gaussiana es una equipotencial. En estos casos altamente simétricos es posible anticipar la forma de las líneas de campo y de las superficies equipotenciales. Solo en estas situaciones puede usarse la ley de Gauss para evaluar los campos. En general, las superficies gaussianas se escogen como superficies equipotenciales.

Ejemplo 12.1**Campo eléctrico de una carga puntual****Solución:**

El campo de una carga puntual debe presentar simetría esférica pues no hay razón para que sea más intenso en unas direcciones que en otras, y por la misma razón su dirección debe ser radial; cualquier otra geometría viola la simetría esférica. Por ello se escoge una gaussiana *esférica* para la cual $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{e}}_r dA$, y como el campo es radial, $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{e}}_r E$. Reemplazando en (12.5):

$$\oint_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Puesto que el campo tiene simetría radial, su valor ha de ser el mismo en todos los puntos que estén a la misma distancia de q , por lo cual E puede retirarse de la integral sobre la esfera; así:

$$E \oint_A dA = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (12.6)$$

de donde se obtiene el campo eléctrico de una carga puntual

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Este ejercicio es el recíproco del cálculo con el que se comenzó esta sección.

Ejemplo 12.2**Campo eléctrico de una esfera homogénea****Solución:**

En el teorema 3 de la sección 6.1.1 se calculó el campo gravitacional en el exterior de una distribución de masa esférica y homogénea de radio R , que resulta ser proporcional a $1/r^2$. En contraste con este valor, el campo en el interior es proporcional a r .

Ahora bien, el campo gravitacional de una masa puntual y el campo eléctrico de una carga puntual son ambos de la forma $1/r^2$. Esto sugiere que los cálculos en electricidad y gravitación tienen la misma estructura formal, por lo que es cierto que, trasladando el teorema 3 de la sección 6.1.1 al caso eléctrico, puede afirmarse que el campo eléctrico en el exterior de una esfera con carga homogénea es proporcional a $1/r^2$, y en el interior es proporcional a r .

Se demuestra aquí que este resultado puede ser obtenido en una forma muy simple utilizando la ley de Gauss y la simetría de la distribución de carga.

Si se traza una gaussiana esférica en el *exterior* de la esfera, la carga estará toda en su interior de modo que (como en el ejemplo 12.1) $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$ es de nuevo válida, por lo cual *el campo eléctrico en el exterior de una distribución esférica y homogénea de carga es el mismo que si toda la carga estuviese concentrada en su centro*:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (12.7)$$

Si la gaussiana esférica se traza en el *interior* de la esfera de radio R , en la ley de Gauss ha de tomarse en cuenta que solo una fracción de la carga está en el interior de la gaussiana. La carga interna es $q' = \rho V'$, donde $V' = 4\pi R'^3/3$ es el volumen de la gaussiana y la densidad volumétrica de carga ρ es constante. Puesto que $\rho = q/V = q/4\pi R^3/3$, siendo q la carga total de la esfera, es cierto que

$q' = qr^3/R^3$. Reemplazando en la ley de Gauss y teniendo en cuenta la simetría de la distribución, se concluye que

$$E \oint_{4\pi r^2} dA = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{qr^3}{\epsilon_0 R^3}.$$

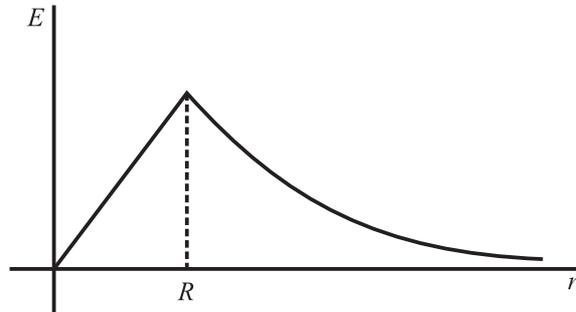


Figura 12.4. El campo eléctrico de una esfera homogénea de carga crece con r en el interior y decrece en el exterior como $1/r^2$.

En consecuencia, *el campo eléctrico en el interior de una distribución de carga esférica y homogénea depende linealmente de r y se escribe:*

$$E = \frac{qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}. \quad (12.8)$$

Obsérvese que (4) y (12.8) coinciden en $r = R$, como se indica en la figura 12.4, la que además revela que el campo en el interior de la distribución tiende a cero cuando r tiende a cero.

Ha de notarse con sumo cuidado que este cálculo tan simple se apoya de manera crucial en la simetría de la distribución de carga. Si, en vez de ser constante, la densidad depende de r , la simetría esférica se mantiene puesto que hay en tal caso cascarones esféricos de igual densidad y las equipotenciales son aún esféricas. Sin embargo, si la densidad depende por ejemplo del ángulo polar θ , la densidad varía angularmente, lo que hace que las equipotenciales no sean esféricas, y como no se conoce de antemano su forma no son utilizables como gaussianas, impidiendo con ello implementar la ley de Gauss.

Ejemplo 12.3

Campo eléctrico de una distribución inhomogénea de simetría radial

Solución:

Considérese una distribución esférica cuya densidad es máxima en el centro y decrece a cero en $r = R$ en la forma $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, siendo R el radio de la distribución. De $\rho = dq/dV$, y notando que un cascarón esférico de espesor diferencial dr tiene un volumen $dV = 4\pi r^2 dr$, se sigue que la carga q' contenida en una esfera de radio r es

$$q' = \int \rho dV = \rho_0 \int (1 - r/R) dV = \rho_0 \int_0^r (1 - r/R) 4\pi r^2 dr \quad (12.9)$$

$$= \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \left[1 - \frac{3r}{4R} \right], \quad (12.10)$$

y que la carga total q de la esfera, obtenida de (12.9) con $r = R$, es:

$$q = \frac{\pi\rho_0 R^3}{3}. \quad (12.11)$$

Eliminando ρ_0 entre (12.9) y (12.11) se obtiene:

$$q' = q \left(4 - \frac{3r}{R} \right). \quad (12.12)$$

El campo en el *exterior* se calcula con

$$E \oint_{4\pi r^2} dA = \frac{q}{\epsilon_0},$$

que da lugar a

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

El campo en el *interior* se calcula con

$$E \oint_{4\pi r^2} dA = \frac{q'}{\epsilon_0},$$

de donde se concluye que

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(4 - \frac{3r}{R} \right).$$

Ejemplo 12.4

Campo eléctrico de un alambre largo

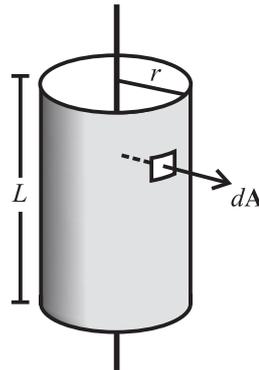


Figura 12.5. La gaussiana apropiada para un alambre largo cargado es cilíndrica.

Solución:

Un alambre muy largo con una distribución lineal de carga λ constante tiene las mismas propiedades para todo valor de z y todo valor del ángulo azimutal. Estas simetrías dan lugar a que el campo sea radial, como en la figura 12.5. Una gaussiana conveniente es el cilindro equipotencial de radio r y longitud L , cuyas bases no contribuyen al flujo, pues el vector de superficie y el campo son perpendiculares. El flujo neto proviene de la pared lateral cuyo vector de superficie es radial como el campo; en consecuencia, $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$. La carga neta encerrada en la gaussiana es $q' = \lambda L$, de modo que la ley de Gauss es ahora

$$E \oint dA = E(2\pi rL) = \frac{q'}{\epsilon_0} = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}.$$

Se concluye entonces que

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Módulo 13

Conductores y dieléctricos

Contenidos del módulo

- 13.1 Conductores
- 13.2 Dieléctricos

Objetivos del módulo

1. Establecer, a nivel atómico, la diferencia entre un conductor y un aislante.
2. Establecer la diferencia entre electrones de valencia y de conducción.
3. Deducir las propiedades del campo y de las distribuciones de carga en conductores.
4. Introducir las nociones de dipolo natural e inducido.
5. Estudiar el fenómeno de polarización.
6. Presentar el vector de polarización.
7. Presentar algunos problemas de aplicación sobre conductores y aislantes.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define un conductor? ¿Cuál es su diferencia con un dieléctrico?
2. ¿Cuál es la diferencia fundamental entre electrones de valencia y de conducción?
3. ¿Cómo son el potencial y el campo eléctrico en el interior de un aislante?
4. ¿Cómo es el campo eléctrico en la superficie de un conductor?
5. ¿Cómo se distribuye el exceso de carga en un conductor?
6. ¿Cómo es el campo eléctrico en el interior de un conductor hueco?
7. ¿A nivel atómico qué diferencia un conductor de un aislante?
8. ¿Qué son electrones de conducción?
9. ¿Qué diferencia los dipolos naturales de los inducidos?
10. ¿Cómo se define la polarización de un material?

Introducción

Las piedras, los árboles, los animales, el mundo natural en síntesis, están hechos de átomos. Estos últimos son estructuras consistentes en un núcleo formado por protones y neutrones alrededor del cual orbitan electrones. Los átomos son la base para la formación de estructuras más complejas como son las moléculas. Los sólidos, líquidos y gases son las formas usuales como vemos agregarse los átomos y moléculas. En estado natural la carga neta de los materiales es nula, es decir, el número de protones y electrones es el mismo.

Los electrones que orbitan los átomos pueden clasificarse en dos tipos: de conducción y de valencia. Los materiales que contienen electrones de conducción y de valencia son los *conductores* típicos: hierro, plata, oro, mercurio, cobre, entre otros. Las propiedades básicas de estos están determinadas por los electrones de conducción. Los materiales en los que los electrones de valencia son la mayoría, y escasos o inexistentes los electrones de conducción, se denominan *aislantes* o dieléctricos.

Este módulo hace énfasis en los campos asociados a conductores, con una primera referencia a materiales dieléctricos.



En un dieléctrico los dipolos elementales se reorientan en presencia de un campo eléctrico.

13.1 Conductores

Los electrones de conducción están situados en las capas más externas del átomo y su enlace con el núcleo es tan débil que gozan de una buena movilidad en el material, hasta el punto de que si este se sitúa en un campo eléctrico, los electrones de conducción, al moverse en dirección contraria al campo externo, ocupan posiciones en la superficie del material, como se indica en la figura 13.1, dando lugar a que la región de la izquierda tenga alta carga negativa, mientras la zona derecha, con deficiencia de electrones, se torna positiva. El desplazamiento de estos electrones genera un campo eléctrico en el interior del material, opuesto en dirección al campo externo. La migración termina en el momento en que el campo generado por los electrones logra anular el campo en el interior. A partir de ese momento la situación en el interior del material se torna estacionaria, con su interior desprovisto de campo eléctrico; así pues, *el interior de un conductor en equilibrio electrostático es una región equipotencial*.

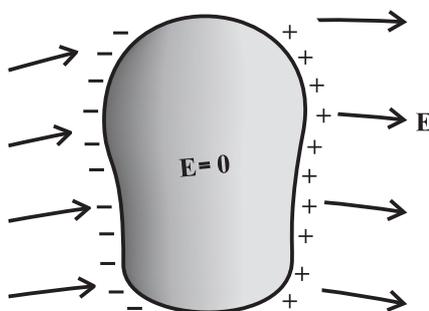


Figura 13.1. El campo eléctrico en el interior de un conductor en equilibrio electrostático es nulo.

Si a un conductor que no está en un campo externo se le añaden cargas eléctricas, estas se desplazan a la *superficie* del conductor ubicándose en posiciones tales, y con una tal densidad superficial, que su campo en el interior sea nulo; solo así el conductor es capaz de alcanzar el equilibrio electrostático.

Si además se coloca el conductor cargado en un campo externo, la reubicación de los electrones de conducción y los añadidos anularán en su interior el campo externo.

Así pues, *en un conductor en equilibrio estacionario las cargas excedentes se ubican en su superficie*. Puesto que la situación es estacionaria, no pueden existir campos tangenciales en la superficie; estos provocarían una migración de electrones que al final darían lugar al anulamiento de todo campo interno; esto es: *el campo eléctrico en un conductor en equilibrio es nulo en su interior, y en la superficie es normal a ella*.

Puede usarse la ley de Gauss para calcular el campo en el exterior de un conductor cargado en equilibrio. Para esto se dibuja un pequeño cilindro (figura 13.2) con las bases paralelas a la superficie, una en el exterior, otra en el interior del conductor. Como el campo en el interior es nulo y en el exterior es normal a la superficie, la única contribución al flujo proviene de la base exterior del cilindro (la superficie lateral no contribuye pues el campo y el vector de superficie son perpendiculares). Entonces, como la carga encerrada en la pequeña gaussiana es $q = \sigma A$,

de la ley de Gauss se sigue:

$$\oint E_n dA = E_n A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}.$$

En consecuencia, el campo *normal* en la superficie del conductor es

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (13.1)$$

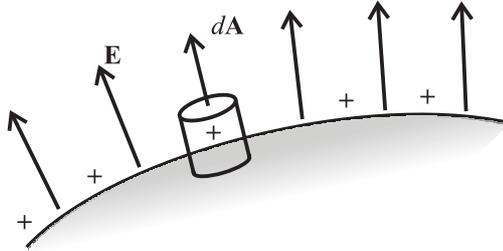


Figura 13.2. Geometría para el cálculo del campo eléctrico en el exterior de un conductor.

En síntesis, para un conductor en equilibrio electrostático es cierto que:

1. El campo eléctrico es cero en todos los puntos de su interior.
2. Si no es neutro, la carga reside en su superficie.
3. El campo en su superficie es normal y tiene un valor $E = \sigma/\epsilon_0$.
4. No hay campo tangencial en la superficie.
5. En un conductor hueco el campo eléctrico es nulo, si no hay cargas en la cavidad.
6. En un conductor irregular la carga tiende a acumularse en las zonas de menor radio de curvatura (véase el ejemplo 13.1).

Así pues, en una esfera conductora de radio R y carga total Q , el campo eléctrico en su interior es cero y en su exterior es radial y con valor

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Equivalentemente, el potencial en su interior es constante y en el exterior es

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Ejemplo 13.1

Sean dos esferas de radios R_1 y R_2 con carga total Q conectadas por un alambre conductor de longitud $l > R_1 + R_2$. Calcule sus densidades superficiales de carga.

Solución:

Como las esferas están conectadas y están en equilibrio electrostático, sus potenciales son iguales: $V_1 = V_2$; si Q_1 y Q_2 son las cargas en su superficie, entonces

estarán a potenciales $V_1 = Q_1/4\pi\epsilon_0 R_1 = V_2 = Q_2/4\pi\epsilon_0 R_2$; entonces $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$. De esta ecuación y de $Q = Q_1 + Q_2$ se deduce que $Q_1 = QR_1/(R_1 + R_2)$ y $Q_2 = QR_2/(R_1 + R_2)$. En consecuencia las densidades de carga son:

$$\sigma_1 = Q_1/4\pi R_1^2 = Q/4\pi R_1(R_1 + R_2),$$

$$\sigma_2 = Q_2/4\pi R_2^2 = Q/4\pi R_2(R_1 + R_2),$$

de modo que

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

Si $R_2 < R_1$, entonces $\sigma_2 > \sigma_1$, lo que prueba que la densidad de carga es mayor en las zonas de menor radio de curvatura, como en las puntas de los pararrayos.

Ejemplo 13.2

Calcule los diversos campos asociados al sistema de la figura 13.3, donde una esfera uniforme de carga Q y radio a está rodeada de un cascarón conductor esférico neutro de radios b y c .

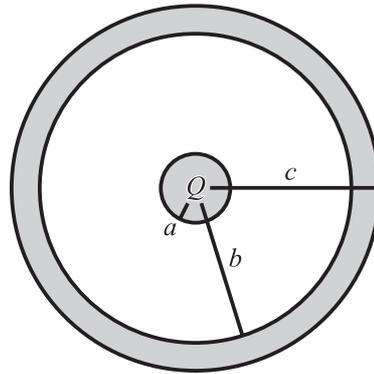


Figura 13.3. Una esfera de carga uniforme rodeada de un cascarón conductor.

Solución:

Una gaussiana esférica de radio $r < a$ contiene una carga $Q' = Qr^3/a^3$, como en el ejemplo 12.2. Por tanto:

$$E = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \quad \text{para} \quad r < a.$$

Una gaussiana esférica con $a < r < b$ contiene en su interior la carga Q , de modo que según el ejemplo 12.2:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{para} \quad a < r < b.$$

Hasta este punto se han obtenido resultados conocidos. El interés de este problema viene en lo que sigue:

El conductor es neutro, es decir, hay tantas cargas positivas como negativas. Si no estuviera presente la esfera de carga Q , el cascarón que lo rodea tendría en cada punto una carga neta cero. Pero la presencia del campo de la esfera separa las cargas del conductor atrayendo hacia $r = b$ las negativas y dejando positivas

en $r = c$. Esta migración de cargas de conducción da lugar a que el interior del cascarón conductor ($b < r < c$) sea neutro, esto es:

$$E = 0 \quad \text{en} \quad a < r < b.$$

Ahora bien, ¿cuánta carga hay en $r = b$? Esta puede calcularse dibujando una gaussiana en el interior del cascarón, y es cierto que en esta zona el campo es cero. La ley de Gauss dice entonces que la carga neta encerrada por la gaussiana también debe ser nula, por lo que la carga neta en la superficie $r = b$ es $Q' = -Q$. Y puesto que el conductor es neutro, la carga en $r = c$ ha de ser $Q'' = Q$. De este modo la carga $Q' + Q''$ en el conductor sigue siendo cero.

Finalmente, una gaussiana esférica con $r > c$ encierra una carga neta $Q - Q + Q = Q$, por lo cual:

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{para} \quad r > c.$$

¿Qué campo se obtiene en $r > c$ si se dibuja un pequeño cilindro gaussiano en el entorno de $r = c$ como en la figura 13.2? ¿Es consistente con el resultado ya obtenido?

El campo eléctrico en las diversas zonas tiene la forma indicada en la figura 13.4.

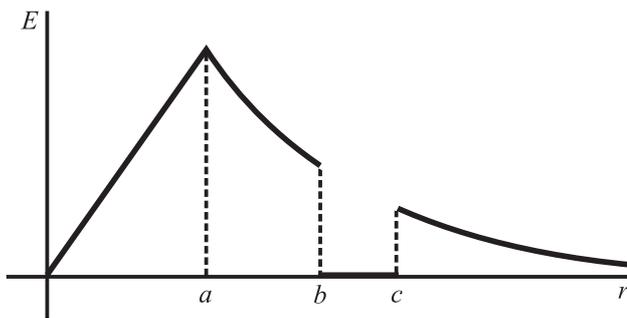


Figura 13.4. Campo eléctrico en las diversas zonas de la figura 13.3. Entre b y c el campo es cero.

Ejemplo 13.3

El mismo anterior añadiendo una carga q al cascarón conductor.

Solución:

Los resultados del ejercicio anterior son válidos aquí para $r < a$ y $a < r < b$. En el interior del cascarón el campo es cero por lo que, según la ley de Gauss, la carga neta encerrada en la gaussiana $b < r < c$ ha de ser cero. Por ello la carga en $r = b$ ha de ser $-Q$ y corresponde a electrones de conducción. Una carga $+Q$ debe aparecer en $r = c$. Una gaussiana $r > c$ encierra una carga neta $Q - Q + Q + q = Q + q$, de modo que el exceso q de carga se sitúa en $r = c$. El campo en $r > c$ es

$$E = \frac{Q + q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$



Vea la demostración *Polarización del agua* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

13.2 Dieléctricos

De acuerdo a la teoría cuántica, la distribución de electrones alrededor de un átomo puede ser representada como una nube de probabilidad cuya densidad indica mayor presencia de electrones. En un átomo libre el centro de carga negativo, que es el análogo del centro de masa, coincide con el centro de carga positivo, que a su vez coincide con el núcleo. Esto da lugar a que un átomo libre, en ausencia de un campo externo, tenga un momento de dipolo nulo. En contraste, si el átomo se coloca en un campo eléctrico, la nube electrónica se desplaza en dirección opuesta al campo logrando que los centros de carga positivo y negativo no coincidan. Como consecuencia el átomo exhibe un momento de dipolo eléctrico *inducido*, que tiende a ser orientado según la dirección del campo polarizador. Las moléculas de gran simetría, como el CO_2 , no presentan momento de dipolo eléctrico *natural*, pero sí lo presentan moléculas de menor simetría como el agua, constituida por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, ubicados en los vértices de un triángulo isósceles, como en la figura 13.5. Según las reglas de la mecánica cuántica, el centro de carga negativa queda cerca del átomo de oxígeno, mientras el de carga positiva queda cerca al punto medio entre los dos hidrógenos. Esto da lugar a un dipolo neto de la molécula del agua de $6,2 \times 10^{-30}$ Cm. Este dipolo *natural* \mathbf{p} puede ser reorientado por la presencia de un campo eléctrico externo.

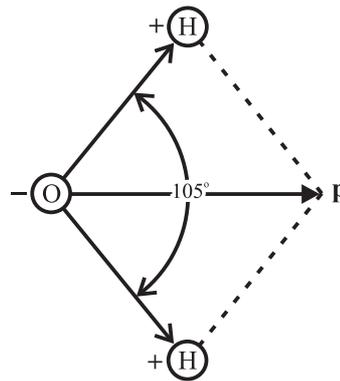


Figura 13.5. Momento de dipolo eléctrico de la molécula de agua.

Los momentos de dipolo de algunas moléculas son:

HCl	$3,4 \times 10^{-30}$ Cm
CO	$0,4 \times 10^{-30}$ Cm
H ₂ S	$5,3 \times 10^{-30}$ Cm
SO ₂	$5,3 \times 10^{-30}$ Cm
NH ₃	$5,0 \times 10^{-30}$ Cm

Los sólidos que presentan polarización natural se conocen como *electretos*.

En general puede afirmarse que los átomos pueden presentar momentos de dipolo inducidos; las moléculas pueden tener momentos de dipolo naturales como es el caso del agua. Lo usual es que las moléculas polares que forman líquidos o gases no presenten macroscópicamente un momento de dipolo neto debido a la aleatoriedad en la orientación de las moléculas. Sin embargo, como puede verse en el experimento adjunto, un chorro de agua manifiesta atracción ante una barra electrizada debido a la reorientación de sus dipolos.

Así pues, los materiales pueden presentar momentos de dipolo naturales o inducidos, que pueden cambiar su dirección por la presencia de campos eléctricos.

Cuando esto ocurre se dice que los materiales están polarizados y la medida de este efecto se describe en términos del momento de dipolo promedio por unidad de volumen:

$$\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{p}}{dV}. \quad (13.2)$$

El nombre genérico de los materiales polarizables es el de *dieléctricos* o aislantes. Esta última denominación se debe a que, al ser dominantes en número los electrones de valencia, que tienen una gran ligadura al núcleo, la movilidad de estos es muy pequeña, dando lugar a que estos materiales sean excelentes aislantes o, lo que es lo mismo, malos conductores.

Módulo 14

Dieléctricos

Contenidos del módulo

- 14.1 Polarización y susceptibilidad
- 14.2 Desplazamiento eléctrico y ley de Gauss en dieléctricos

Objetivos del módulo

1. Estudiar la conexión entre polarización y campo polarizador.
2. Introducir la susceptibilidad eléctrica.
3. Definir la carga superficial de polarización.
4. Establecer la conexión entre carga de polarización y vector de polarización.
5. Definir el vector de desplazamiento eléctrico.
6. Definir la permitividad de un dieléctrico.
7. Establecer la ley de Gauss para dieléctricos.

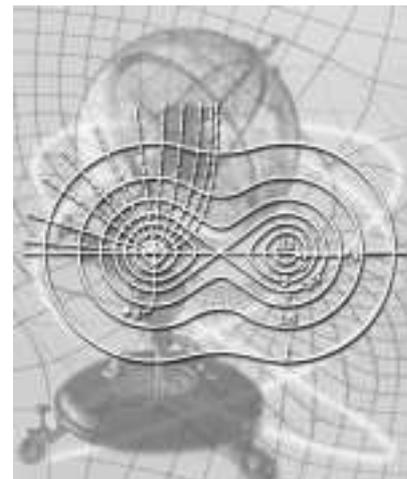
Preguntas básicas

1. ¿De qué depende la polarización de un material?
2. ¿Cuáles son las unidades de la susceptibilidad eléctrica?
3. ¿Cuál es la conexión entre carga superficial de polarización y vector de polarización?
4. ¿Cómo se define el vector de desplazamiento?
5. ¿Cómo se define la permitividad de un dieléctrico?

Introducción

En un material sumergido en un campo eléctrico, los dipolos naturales se reorientan, o se inducen debido a la redistribución de carga de los electrones en las moléculas. En cualquiera de estos casos se dice que el material está *polarizado*. En su interior puede definirse el vector de polarización que corresponde al momento de dipolo promedio por unidad de volumen, el cual está asociado por (13.2) a las cargas de polarización que aparecen en el material. La introducción de estas cargas hace necesario establecer con claridad la diferencia entre cargas libres y cargas de polarización, lo que de una manera natural sugiere la introducción del vector de desplazamiento, con el cual puede escribirse la ley de Gauss en forma más general.

A los materiales polarizables se les conoce con el nombre de *dieléctricos*.



Líneas de campo electrostático y equipotenciales.

14.1 Polarización y susceptibilidad

La figura 14.1 muestra que debido al campo externo el material que se coloca en un campo eléctrico adquiere una carga superficial positiva a la derecha y negativa a la izquierda, debida al corrimiento de las nubes electrónicas. A la carga que aparece en las superficies como efecto del campo polarizado se le llama *carga superficial de polarización*. Si el medio material es inhomogéneo aparecen en su interior *cargas volumétricas de polarización*. La suma de las cargas superficiales y volumétricas de polarización es siempre cero pues la polarización no genera carga neta en los dieléctricos. En particular, si el material es homogéneo hay solo cargas superficiales cuya suma es cero. Si el material es homogéneo, e isotópico (es decir, no solo tiene las mismas propiedades en cada punto sino que además son las mismas en diferentes direcciones), es experimentalmente cierto que el vector de polarización es paralelo al de campo eléctrico. En este caso es posible escribir:

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (14.1)$$

Es fácil demostrar que χ_e , conocida como *susceptibilidad eléctrica*, es una cantidad adimensional. Para la mayoría de las sustancias tiene valores positivos. La ecuación (14.1) es una relación válida experimentalmente en muchos casos y que asegura que la relación entre el campo externo y la polarización que genera es lineal.

El valor de la susceptibilidad eléctrica para algunas sustancias es como sigue:

Vidrio	8
Aceite	1.1
Alcohol	24
Agua	78
Hidrógeno	$5,0 \times 10^{-4}$
Oxígeno	$5,0 \times 10^{-4}$
CO ₂	$9,2 \times 10^{-4}$
Aire	$5,4 \times 10^{-4}$

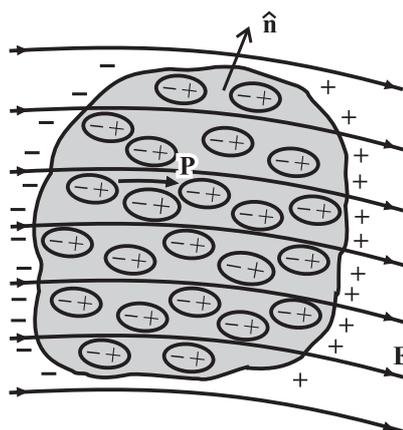


Figura 14.1. La aparición o reorientación de dipolos en un material da lugar a cargas superficiales de polarización.

La conexión entre la polarización y la carga superficial de polarización puede ser establecida con facilidad en el caso simple de la placa dieléctrica de la figura 14.2, de grueso l y área A . Hay un campo E externo perpendicular a la placa que

genera un vector de polarización y cargas superficiales, como se indica en la figura. El momento de dipolo de la placa es, de acuerdo a (13.2), $p = PV$, equivalente a $P = (PA)l$. Puesto que el dipolo eléctrico también se escribe $p = ql$, es cierto que la carga neta sobre una de las caras de la placa es $q = PA$, de modo que la carga superficial de polarización (q/A) es $\sigma = P$. Un argumento más refinado permite extender este resultado al caso de materiales de forma arbitraria ubicados en campos externos no homogéneos. Es entonces posible demostrar que la carga superficial de polarización en cualquier punto de la superficie está dado por:

$$\sigma_P = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad (14.2)$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ en la figura 14.2 es el vector unitario normal a la superficie que limita el dieléctrico. Obsérvese que P y σ tienen las mismas unidades.

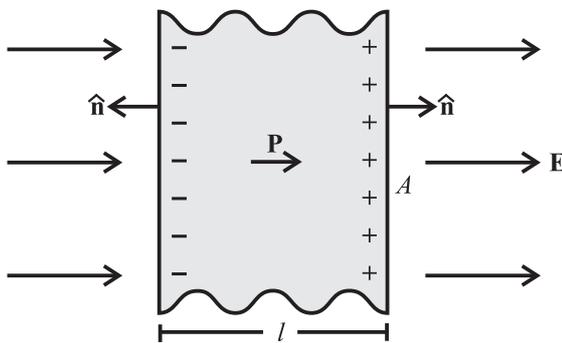


Figura 14.2. Cargas superficiales de polarización inducidas por el campo \mathbf{E} .

Las *cargas de polarización* se deben a redistribuciones de carga en el volumen, cargas que no tienen movilidad en el material, a diferencia de las llamadas *cargas libres*, que no surgen en el proceso de polarización sino que pueden añadirse a voluntad. Las cargas libres tampoco viajan en los dieléctricos, pero sí pueden hacerlo en los gases o los metales. En el caso general es necesario tomar en cuenta ambos tipos de carga y tener presente que ambas generan campos eléctricos.

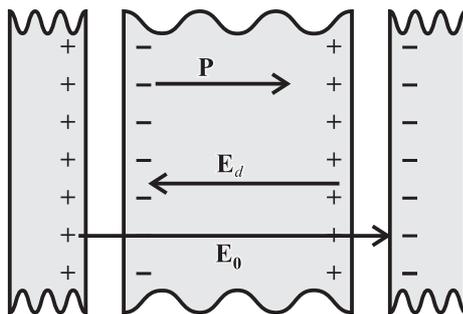


Figura 14.3. Una placa dieléctrica colocada entre las placas de un condensador.

Un par de placas conductoras con cargas iguales y de signo contrario, con densidad superficial σ_l , generan entre ellas un campo $E_0 = \sigma_l/\epsilon_0$. Si entre las placas, como en la figura 14.3, se coloca una placa dieléctrica, sobre las superficies cercanas a las placas conductoras aparecerán cargas de polarización, que solo existen si las placas están cargadas. Este es el sentido en que puede afirmarse que las cargas de polarización son cargas “ligadas”. Ahora bien: ambas cargas, libres y

ligadas, generan campo eléctrico y puede verse que el campo eléctrico \mathbf{E}_P generado por las cargas de polarización se opone en dirección al campo de las placas del condensador. Si las placas están en contacto con el dieléctrico se puede afirmar que la densidad de carga superficial *neto* sobre la superficie de la izquierda es $\sigma = \sigma_l + \sigma_p$, es decir, $\sigma = \sigma_l - P$, donde se ha tenido en cuenta la diferencia de signo entre las cargas. Sobre la placa de la derecha los signos son los opuestos. En presencia del dieléctrico la placa aparece con una carga efectiva $\sigma_l - P$, que genera un campo $E = \sigma/\epsilon_0$. Con esta ecuación, y despejando σ_l , se obtiene:

$$\sigma_l = \epsilon_0 E + P. \quad (14.3)$$

14.2 Desplazamiento eléctrico y ley de Gauss en dieléctricos

La aparición de E y P en la misma expresión sugiere definir el vector \mathbf{D} , conocido como vector de desplazamiento eléctrico, en la forma:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (14.4)$$

Multiplicando escalarmente (14.4) por $\hat{\mathbf{n}}$ es cierto entonces que $\sigma_l = \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, por lo cual integrando sobre la superficie del conductor:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q_l, \quad (14.5)$$

donde $q_l = \int \sigma_l dA$.

La ecuación 14.5 tiene una validez bastante más general pues puede aplicarse para evaluar el campo \mathbf{D} en ausencia o en presencia de dieléctricos. Ha de notarse de (14.4) que en una región donde no haya dieléctricos es cierto que $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$. La ecuación (14.5) afirma que *el flujo del campo \mathbf{D} es proporcional a la carga libre encerrada en la superficie*. Esta es una forma más general de la ley de Gauss que incluye (12.5) como caso particular si $\chi_e = 0$. Recuérdese que la ley de Gauss (12.5) afirma que el flujo del campo \mathbf{E} depende de *todas* las cargas encerradas en la superficie. De (14.1) y (14.4) se obtiene

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}. \quad (14.6)$$

Se ha introducido la nueva cantidad ϵ , conocida como *permitividad del dieléctrico*, y es tal que $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$. En el vacío: $\epsilon = \epsilon_0$. Las unidades de ϵ y ϵ_0 son $\text{C}^2\text{s}^2\text{m}^{-3}\text{kg}^{-1}$. La ecuación $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ es válida para medios isotrópicos, y, si además son homogéneos, la ley de Gauss (14.5) toma la forma:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q_l}{\epsilon}. \quad (14.7)$$

Comparando con (12.5) queda claro que en presencia de dieléctricos ha de cambiarse ϵ_0 por ϵ . La carga que se incluye en (14.7) es solo la libre, ya que el efecto de las cargas de polarización está incluido en \mathbf{D} .

Si se considera el caso de una carga puntual puede verse que su campo en el vacío es $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$, mientras que si está rodeada por un dieléctrico su campo es $E' = q/4\pi\epsilon r^2$, de donde se deduce que $E'/E = \epsilon_0/\epsilon$; puesto que lo corriente es que $\epsilon > \epsilon_0$, será cierto que $E' < E$. Así pues, el dieléctrico reduce el campo de la carga debido a que el efecto de polarización genera cargas de signo opuesto que apantallan el efecto de q .

Ejemplo 14.1

Una carga puntual Q está rodeada por un cascarón dieléctrico de radios a y b y permitividad ϵ . Calcule los campos en las diferentes regiones.

Solución:

De acuerdo a la figura 14.4 hay tres zonas en orden creciente de distancias:

- $r < a$. Excepto por la carga puntual, en esta zona hay vacío, de modo que es aplicable (14.7) para una gaussiana esférica con $\epsilon = \epsilon_0$. Así pues, $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$.
- $a < r < b$. Utilizando de nuevo (14.7) es cierto que en el interior del cascarón dieléctrico $E = Q/4\pi\epsilon r^2$.
- $r > b$. En esta zona de vacío, $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$.

Como se ve, la ecuación (14.7) incluye la ley de Gauss (12.5) cuando no hay medios materiales presentes.

Calcule la polarización y las cargas de polarización. ¿Cuál es la carga neta sobre la superficie $r = a$?

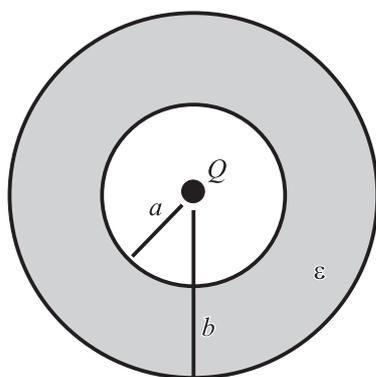


Figura 14.4. Un cascarón dieléctrico con una carga puntual en su centro.

Módulo 15

Capacitancia y condensadores

Contenidos del módulo

- 15.1 Capacitancia de un conductor aislado
- 15.2 Condensadores
 - 15.2.1 Condensador plano
- 15.3 Condensadores en serie y paralelo
 - 15.3.1 En serie
 - 15.3.2 En paralelo

Objetivos del módulo

1. Definir la capacitancia de un conductor aislado.
2. Definir el condensador eléctrico.
3. Definir la capacitancia de un condensador.
4. Reconocer el papel de una batería en un circuito eléctrico.
5. Presentar diversos tipos de condensadores.
6. Estudiar el condensador plano.
7. Introducir los condensadores en serie y paralelo.
8. Proponer la noción de condensador equivalente.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define la capacitancia de un conductor aislado y de un condensador?
2. ¿Qué es un condensador?
3. ¿Qué papel desempeña una batería en un circuito?
4. ¿Cuáles son las características de un condensador plano?
5. ¿Qué diversas geometrías tienen los condensadores?
6. ¿Cómo son los diagramas de condensadores en serie y en paralelo?
7. ¿Qué significa el término “condensador equivalente”?

Introducción

El módulo se inicia presentando la definición de capacitancia, que relaciona el potencial de un conductor con su carga eléctrica. Esta noción, a su vez, fundamenta la definición del condensador eléctrico. Un condensador es un sistema formado por dos conductores que tienen cargas $+Q$ y $-Q$, con la propiedad especial de que siendo eléctricamente neutros, son capaces, sin embargo, de almacenar energía eléctrica en cantidades dependientes de su forma geométrica y de su contenido de dieléctricos. Los condensadores son de alto uso en diseños electrónicos y de ingeniería eléctrica. Muchos aparatos de uso doméstico los involucran, como radios, equipos de sonido, televisores, videograbadoras, limpiabrisas, entre otros. El precursor del condensador eléctrico se encuentra en la botella de Leyden, de amplio uso en el siglo XVIII, consistente en una botella de vidrio recubierta en su exterior e interior con láminas metálicas.

Especialmente útiles son los diseños que involucran arreglos de condensadores en serie y en paralelo. A estos temas se dedica el presente módulo.



La botella de Leyden, usada en el siglo XVIII para almacenar electricidad, contiene una capa metálica interna y otra externa, que la convierten en un condensador eléctrico.

15.1 Capacitancia de un conductor aislado

De la sección 13.1 sobre conductores se sabe que el potencial en la superficie de una esfera de radio R y de un cilindro de radio R y longitud L , ambos conductores y con carga total Q , es respectivamente:

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}, \quad V = \frac{Q}{2\pi\epsilon L} \ln(R/a).$$

Estas expresiones son válidas si los conductores están rodeados por un dieléctrico ϵ . Si más bien es el vacío el que los rodea, el coeficiente ha de ser ϵ_0 .

El coeficiente Q/V es en ambos casos independiente de la carga y dependiente solo de la geometría y de ϵ , característica que es general pues en todos los casos el potencial en la superficie de un conductor es directamente proporcional a la carga neta que reside en su superficie. Este cociente es de interés tanto teórico, como en el diseño de instrumental eléctrico, y amerita un nombre y una definición. Se define la *capacidad* de un conductor aislado en la forma:

$$C = \frac{Q}{V}.$$

De los cálculos para la esfera y el cilindro se deduce que la capacidad depende no solo de la geometría del conductor sino también de la presencia o ausencia de dieléctrico. La capacidad de la esfera y el cilindro conductores se expresan como:

$$C = 4\pi\epsilon R, \quad C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(R/a)}.$$

Puesto que la permitividad de un dieléctrico es usualmente mayor que la del vacío se concluye que el dieléctrico que rodea a un conductor aumenta su capacidad.

Las unidades de capacitancia son CV^{-1} , en unidades elementales: $m^{-2} kg^{-1} s^2 C^2$. Esta unidad MKS se conoce como *faradio* (F), unidad demasiado grande para fines prácticos por lo que se usan sus submúltiplos, el microfaradio ($\mu F = 10^{-6}$ F) y el picofaradio ($pF = 10^{-12}$ F). Un faradio es la capacitancia de un conductor aislado cuyo potencial es de un voltio cuando su carga es de un coulomb.

15.2 Condensadores

Es cierto que el campo eléctrico de un conductor aislado se extiende por todo el espacio. Es posible confinar en alto grado el campo eléctrico mediante apropiadas combinaciones de conductores. En el caso óptimo, permitido por arreglos esféricos, el confinamiento es total. Como se verá, esto significa confinar la energía del campo electrostático.

El arreglo más simple que permite confinar un campo eléctrico es el formado por dos conductores, uno con carga $+Q$, el otro con $-Q$ y a potenciales V_1 y V_2 . A este sistema se le llama *condensador* o *capacitor*. La diferencia de potencial entre los conductores es $\Delta V = V_2 - V_1$. La capacitancia del condensador se define como:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

Por definición, la capacitancia es un número positivo (deben involucrarse solo los módulos de Q y ΔV .)

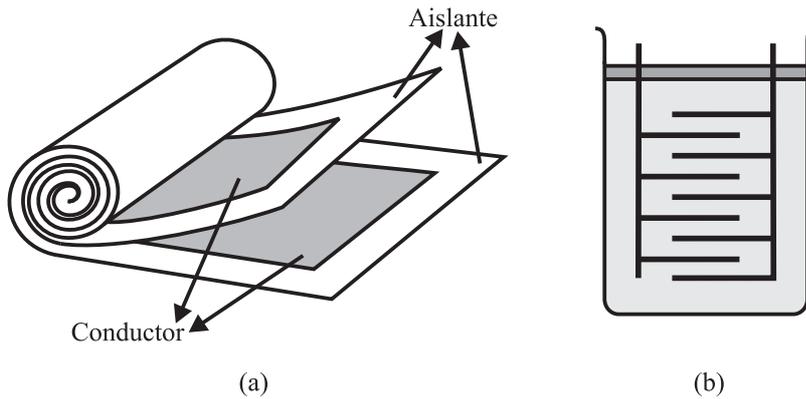


Figura 15.1. Condensador enrollado (a) y de múltiples placas (b).

La disposición de los dos conductores toma formas muy variadas, desde el condensador simple de placas paralelas, pasando por los cascarones cilíndricos concéntricos y esféricos concéntricos, hasta los condensadores formados por dos largas tiras metálicas recubiertas de dieléctrico y arrolladas en espiral (figura 15.1a). Estos tipos de condensador de geometría fija tienen una capacitancia constante. Los receptores de radio utilizan un tipo de condensador de capacitancia variable, permitido por la presencia de un conjunto de placas metálicas que se deslizan respecto a otro conjunto. La figura 15.1b muestra un condensador de múltiples placas sumergida en una solución dieléctrica.

15.2.1 Condensador plano

Un condensador plano está formado por un par de placas planas y paralelas separadas una distancia d , cada una con área A y usualmente con un dieléctrico en su interior (figura 15.2).

Puesto que el campo entre las placas es $E = \sigma/\epsilon$, la diferencia de potencial entre ellas es

$$\Delta V = V_d - V_0 = - \int_0^d \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \sigma d/\epsilon.$$

En consecuencia, la capacitancia del condensador es

$$C = \frac{\epsilon A}{d}.$$

Como será claro cuando se realicen las consideraciones sobre energía, la presencia del dieléctrico aumenta la capacidad de confinamiento de carga eléctrica, y en consecuencia, de almacenamiento de energía eléctrica.

Los condensadores se conectan a una fuente externa de energía que provee la diferencia de potencial entre sus placas. La fuente más utilizada es la batería química, en la que una reacción química provee la diferencia de potencial. Mientras el símbolo de un condensador es el que aparece en la figura 15.5, el de una batería es el que se muestra en el centro de la figura 18.1.

Ejemplo 15.1

Una placa dieléctrica de permitividad ϵ se introduce en un condensador de placas paralelas de modo que lo llena completamente (figura 15.2). Calcule los campos D y E , las cargas de polarización y la capacitancia. Las cargas libres sobre ambas placas son iguales y opuestas.

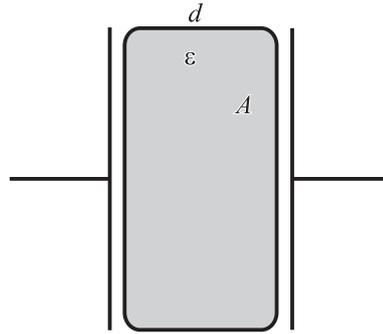


Figura 15.2. Condensador de placas paralelas con dieléctrico.

Solución:

En la figura 15.3 se han dibujado los vectores \mathbf{D} . La ley de Gauss aplicada a la gaussiana 1 permite concluir que el campo D (y en consecuencia el E) es cero en el exterior. La ley de Gauss para \mathbf{D} aplicada a la gaussiana 2 ha de incluir solo la carga libre σ , así:

$$DA = \sigma A, \quad \text{es decir} \quad D = \sigma, \quad \text{y} \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}.$$

La polarización es $P = \epsilon_0 \chi_e E = \epsilon_0 \chi_e \sigma / \epsilon$ y la carga superficial de polarización sobre la placa positiva vale $\sigma_p = P$.

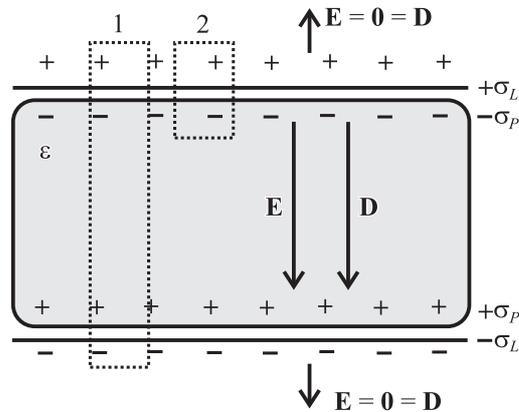


Figura 15.3. Gaussianas para el cálculo de \mathbf{D} en un condensador de placas paralelas.

Ejemplo 15.2

Se introducen dos placas dieléctricas planas ϵ_1 y ϵ_2 que llenan un condensador de placas paralelas como se muestra en la figura 15.4. Las cargas libres σ sobre las placas son iguales y opuestas.

Solución:

La ley de Gauss (14.7) aplicada sobre las gaussianas cuyos cortes son las líneas punteadas 1, 2 y 3 permiten concluir respectivamente que:

1. Los campos E y D son cero fuera del condensador.
2. $D_1 = \sigma$.

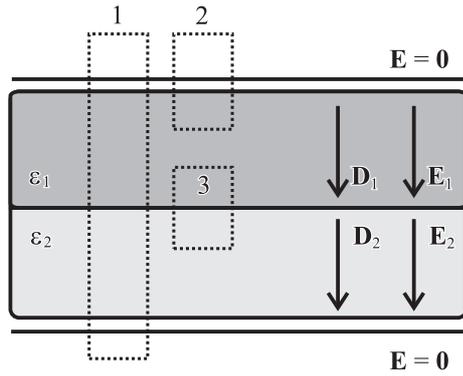


Figura 15.4. Condensador de placas paralelas con dos placas de dieléctrico.

3. $D_1 = D_2 \therefore \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$.

En síntesis: $D_1 = D_2 = \sigma$, $E_1 = D_1/\epsilon_1 = \sigma/\epsilon_1$, $E_2 = \epsilon_1 E_1/\epsilon_2 = \sigma/\epsilon_2$.

Ha de observarse con cuidado que el campo D es el mismo en el interior del condensador pues su valor depende solo de las cargas libres que están sobre las placas metálicas; la superficie que separa los dieléctricos no contiene cargas libres. Los campos E_1 y E_2 son diferentes en los dos dieléctricos pues su valor depende de las cargas de polarización que son distintas en las superficies del primer y segundo dieléctricos. Dibuje las cargas sobre todas las superficies.

15.3 Condensadores en serie y paralelo

15.3.1 En serie

La figura 15.5 muestra un arreglo de condensadores en serie, en el que la placa negativa de un condensador está conectada a la placa positiva del condensador contiguo, y la negativa de este a la positiva del que le sigue. En consecuencia el módulo de la carga de cada placa es el mismo y los signos se alternan. Los dos extremos del sistema están conectados a una batería que provee la diferencia de potencial. Como se ve, las placas de condensadores contiguos tienen cargas iguales y opuestas.



Figura 15.5. Condensadores en serie.

Si $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots$ son diferencias de potencial entre las placas de cada uno, y C_1, C_2, \dots sus capacitancias, es cierto que

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}, \quad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}, \quad \dots$$

Como el campo E entre las placas va siempre en la misma dirección, la diferencia de potencial total es la suma de las diferencias de potencial, de modo que

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \right) Q.$$

En consecuencia, la capacitancia de un condensador equivalente al arreglo en serie y que satisface $\Delta V = Q/C$ es

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (15.1)$$

15.3.2 En paralelo

La figura 15.6 muestra una combinación de dos condensadores conectados a la misma fuente de potencial; como consecuencia, la carga neta (en las placas del mismo lado) será la suma de las cargas de cada placa:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

y como

$$Q_1 = C_1 \Delta V, \quad Q_2 = C_2 \Delta V,$$

puede concluirse que la capacitancia del condensador equivalente (con la misma diferencia de potencial) es

$$C = C_1 + C_2. \quad (15.2)$$

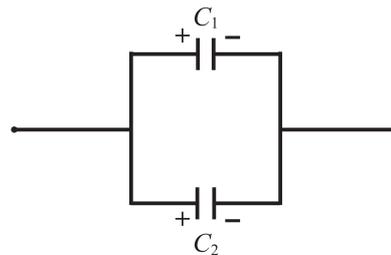


Figura 15.6. Condensadores en paralelo.

Ejemplo 15.3

Calcule la capacitancia equivalente al arreglo de la figura 15.7.

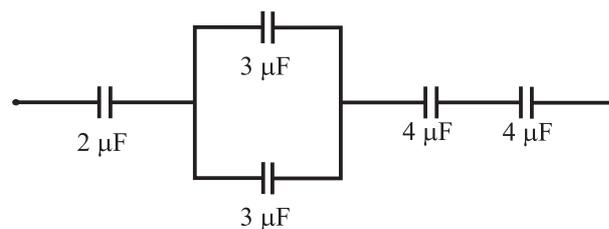


Figura 15.7. Arreglo de condensadores en serie y paralelo.

Solución:

Utilizando (15.1) y (15.2) el sistema puede ser reducido en la forma siguiente (figura 15.8):



Figura 15.8. Condensadores equivalentes a la figura 15.7.

Módulo 16

Energía del campo eléctrico

Contenidos del módulo

- 16.1 Energía almacenada en un condensador eléctrico
- 16.2 La energía del campo eléctrico

Objetivos del módulo

1. Proponer que un condensador almacena energía eléctrica.
2. Calcular la energía almacenada por un condensador.
3. Estudiar la energía y la densidad de energía almacenada por el campo eléctrico.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se carga un condensador?
2. ¿Cuál es la energía almacenada por un condensador?
3. ¿Dónde se localiza la energía del campo eléctrico: en este o en las cargas?

Introducción

Cargar un condensador significa establecer una diferencia de potencial entre sus placas, para lo cual se necesita una fuente que provea las cargas y la diferencia de potencial necesarias. Esto implica un gasto de energía que se acumula en el condensador. Así pues, resulta que *un condensador es un artefacto que almacena energía eléctrica*.

Es cierto además que, en general, un campo eléctrico posee energía, y la teoría que se ha visto hasta ahora permite evaluar su densidad volumétrica. De hecho, cuando una partícula cargada eléctricamente se mueve en un campo eléctrico, este provee la energía necesaria para el movimiento; en otras palabras, es la fuente del campo de fuerza eléctrica. Pero no solo el campo eléctrico posee energía, también el gravitacional, y como se verá más tarde, el campo magnético.

Así pues, el concepto de energía se extiende en este módulo: no solo la poseen las partículas, sino también los campos.



Las baterías *generan* corriente eléctrica mediante reacciones químicas. La botella de Leyden *almacena* energía electrostática.

16.1 Energía almacenada en un condensador eléctrico

Supóngase que un condensador de capacitancia C tiene una carga q y que entre sus placas hay una diferencia de potencial V . Si se le quiere añadir una carga dq traída desde el infinito, ha de realizarse un trabajo $dW = V dq$ que equivale a la cantidad en que aumenta la energía del condensador. Puesto que $V = q/C$, se tiene que el aumento de la energía del condensador está dado por

$$dE = V dq = \frac{q}{C} dq.$$

Si se quiere calcular la energía necesaria para cargar el condensador desde $q = 0$ hasta $q = Q$ debe integrarse la anterior ecuación, lo que da lugar a

$$E = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (16.1)$$

Utilizando $C = Q/V$ esta expresión toma también las formas alternas

$$E = \frac{CV^2}{2} = \frac{QV}{2}.$$

La anterior ecuación es válida en general para calcular la energía almacenada en un conductor, aunque sea aislado. Hacerlo específico para condensadores implica solo introducir más de un conductor.

Ejemplo 16.1

Calcule la energía eléctrica almacenada en un condensador de placas paralelas de área A y ancho d con un dieléctrico ϵ en su interior.

Solución:

Puesto que la capacidad del condensador es $C = \epsilon A/d$, y $V = Ed$, usando $E = CV^2/2$ puede escribirse

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon A}{d} \right) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (Ad),$$

donde E es el campo eléctrico entre las placas. Como Ad es el volumen del condensador, que corresponde (despreciando los efectos de borde) al volumen ocupado por el campo eléctrico, puede decirse que la densidad volumétrica de energía del campo eléctrico es

$$\mu = \frac{E}{Ad} = \frac{1}{2} \epsilon E^2. \quad (16.2)$$

La energía almacenada en un condensador es mayor mientras mayor sea su permitividad. Cargas altas, es decir energías altas, pueden almacenarse usando un buen aislante.

Ejemplo 16.2

Condensador esférico

Solución:

Un condensador esférico consta de un par de cascarones esféricos concéntricos de radios a y b , entre los cuales hay un dieléctrico ϵ . Calcule la capacitancia y la energía almacenada si la carga positiva es Q .

De la ley de Gauss

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = Q,$$

se sigue

$$D(4\pi r^2) = Q,$$

de donde

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}.$$

Es cierto entonces que

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_a^b \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{Q(a-b)}{4\pi\epsilon ab}. \end{aligned}$$

En consecuencia, la capacitancia es:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\epsilon ab}{(b-a)},$$

por lo cual la energía almacenada en el condensador es

$$E = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2(b-a)}{8\pi\epsilon ab}.$$

Fácilmente se prueba que este resultado se obtiene también con

$$E = \frac{\epsilon}{2} \int \mathbf{E}^2 dV,$$

donde $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}$.

16.2 La energía del campo eléctrico

Aunque (16.2) fue obtenida para un condensador de placas paralelas puede demostrarse que es válida independientemente de la forma geométrica del condensador. Nótese, en efecto, que (16.2) no contiene referencias a la geometría del condensador sino solo al campo E y a la permitividad del medio. Es posible demostrar que esta ecuación tiene validez general para campos electrostáticos y expresa que la energía del campo puede asumirse localizada *en el espacio* que rodea las cargas, mientras que (16.1) expresa que la energía puede suponerse almacenada en las cargas. Estas dos interpretaciones son equivalentes en el caso estático. Una vez que se comience el estudio de la dinámica del campo electromagnético se verá que la primera interpretación es la más apropiada, pues permite entender los casos, como la luz, en que la energía electromagnética viaja en forma de ondas en ausencia de cargas.

Así pues, la densidad volumétrica de energía y la energía total de un campo eléctrico se expresan como:

$$u = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2, \quad E = \frac{\epsilon}{2} \int_V \mathbf{E}^2 dV, \quad (16.3)$$

donde dV es un diferencial de volumen del campo.

Ejemplo 16.3

¿Cuál es la energía almacenada en una esfera uniformemente cargada de radio R con carga total Q ?

Solución:

Los campos eléctricos en el interior y exterior de una distribución de carga con simetría esférica son radiales e iguales, respectivamente, a:

$$E_1 = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 R^3}, \quad E_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

La energía total de la distribución se escribe:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \mathbf{E}^2 (4\pi r^2 dr) \\ &= 2\pi\epsilon_0 \int_0^\infty \mathbf{E}^2 r^2 dr \\ &= 2\pi\epsilon_0 \left[\int_0^R \mathbf{E}_1^2 r^2 dr + \int_R^\infty \mathbf{E}_2^2 r^2 dr \right] \\ &= 2\pi\epsilon_0 \frac{3Q^2}{40\pi^2\epsilon_0^2} = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Capítulo 5

Corriente eléctrica y circuitos

Contenido breve

Módulo 17

Corriente eléctrica

Módulo 18

Circuitos de corriente continua



La ley de Ohm, que es la más simple conexión entre corriente eléctrica y diferencia de potencial, permite definir *resistencia* eléctrica.

Presentación

En los materiales conductores los electrones de las últimas capas atómicas están débilmente ligados a los núcleos por lo que presentan una gran movilidad y pueden desplazarse por todo el material. Este movimiento es de tipo aleatorio y no genera

en consecuencia una corriente eléctrica neta, observable macroscópicamente. Sin embargo, si se establece una diferencia de potencial entre dos puntos del conductor, es posible una corriente macroscópica permanente. Como se sabe, la diferencia de potencial equivale a la presencia de un campo eléctrico en el interior del material, que provoca el movimiento de los electrones de conducción en dirección opuesta a la del campo eléctrico. Esto significa que aparece una *corriente eléctrica* en el conductor.

Este módulo se dedica a explorar los conceptos necesarios para describir los fenómenos asociados a las corrientes eléctricas, como son la resistencia, la resistividad y la conductividad, a exponer la ley de Ohm, los arreglos de resistencias en serie y paralelo y la teoría de los circuitos de corriente continua.

Módulo 17

Corriente eléctrica

Contenidos del módulo

- 17.1 Corriente y resistencia
- 17.2 Ley de Ohm
- 17.3 Resistividad y conductividad
- 17.4 Ley de Ohm y densidad de corriente
- 17.5 Potencia eléctrica
- 17.6 Resistencias en serie y paralelo
 - 17.6.1 En serie
 - 17.6.2 En paralelo

Objetivos del módulo

1. Definir corriente eléctrica.
2. Introducir la noción de resistencia eléctrica.
3. Presentar la ley de Ohm.
4. Definir resistividad y conductividad eléctricas.
5. Definir la densidad de corriente eléctrica.
6. Establecer la conexión entre campo eléctrico y densidad de corriente.
7. Calcular la potencia necesaria para mantener una corriente.
8. Estudiar arreglos de resistencias en serie y paralelo.

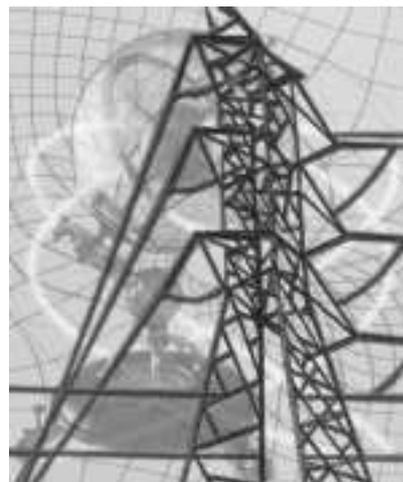
Preguntas básicas

1. ¿Qué es una corriente eléctrica?
2. ¿Cómo se definen resistencia, resistividad y conductividad?
3. ¿Qué significa y qué variables relaciona la ley de Ohm?
4. ¿Cómo se define la densidad de corriente?
5. ¿Qué diferencia corriente y densidad de corriente?
6. ¿Cuál es la relación entre $V = IR$ y $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$?
7. ¿En qué se emplea la potencia recibida por una resistencia?
8. ¿Cuáles son las resistencias equivalentes para redes en serie y paralelo?

Introducción

En el interior de un conductor entre cuyos extremos se mantiene una diferencia de potencial aparece una corriente eléctrica. Esto significa que hay desplazamiento de electrones de un punto a otro del material. En general se dice que hay una corriente eléctrica en casos tan diversos como el flujo de electrones en el interior de un tubo de televisión, en el viaje de los iones de un borne al otro de una batería de automóvil o de una pila de linterna, o en el viaje de las partículas elementales cargadas en el interior de un acelerador.

En algunos de estos casos las cargas viajan en el vacío y pueden ser aceleradas por el campo eléctrico hasta alcanzar muy altas velocidades, como es el caso en los aceleradores. En el caso específico de un electrón de conducción en un metal este se encuentra rodeado por núcleos atómicos y por los restantes electrones lo que da lugar a la aparición de una resistencia al movimiento. Como se verá, la ley de Ohm es la expresión que conecta la corriente con la resistencia y el potencial necesario para establecer la corriente.



La corriente eléctrica es transportada hacia las ciudades por redes conductoras.

17.1 Corriente y resistencia

Si un chorro de partículas eléctricamente cargadas se mueve a lo largo de un tubo de sección transversal A , bajo la acción de una diferencia de potencial $V_a - V_b$ entre los planos a y b (figura 17.1), la corriente eléctrica puede definirse como la carga neta por unidad de tiempo que atraviesa la sección transversal del alambre:

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (17.1)$$

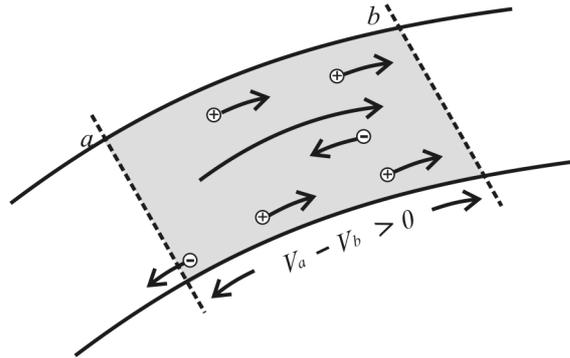


Figura 17.1. Bajo la acción de la diferencia de potencial $V_a - V_b$ las cargas positivas se mueven hacia la derecha.

Por convención, la dirección de la corriente será la de las cargas positivas, es decir, la del campo eléctrico que ocasiona su movimiento. En el caso de los conductores, y puesto que los núcleos atómicos están en reposo en el material, siendo los electrones los responsables de la corriente, resultará que la corriente eléctrica fluye en dirección contraria al movimiento de los electrones. Ciertamente, es posible el caso en el que cargas de diverso signo estén en movimiento; en tal situación la corriente de las cargas positivas coincide en dirección con la velocidad promedio de las cargas positivas y la corriente de las cargas negativas tiene dirección opuesta al movimiento de las cargas positivas.

La unidad de corriente eléctrica es el *amperio*, correspondiente a *coulomb/segundo*: $1 \text{ A} = \text{C/s}$.

Una definición altamente útil en la teoría del campo electromagnético es la de *densidad de corriente eléctrica*, correspondiente a la carga por unidad de área y de tiempo que fluye a través de una sección transversal A . Sus unidades son $\text{C/cm}^2 \cdot \text{s}$ y se representa con la letra J , así:

$$J = \frac{dQ}{dA dt}, \quad (17.2)$$

es decir, $J = dI/dA$. Densidad de corriente es corriente por unidad de área. De (17.2), en consecuencia, es posible establecer la siguiente conexión entre I y J :

$$I = \int J dA,$$

ecuación que es válida si la dirección de la corriente es perpendicular al plano del área A . En forma general, y escribiendo la densidad de corriente como un vector \mathbf{J} , puede expresarse I en términos del flujo del vector \mathbf{J} :

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (17.3)$$

Es importante tener en cuenta que el movimiento de los electrones en los conductores no se realiza exactamente en dirección opuesta al campo \mathbf{E} interior debido a las interacciones de los electrones viajeros con los demás. Estas colisiones dan lugar, por una parte, a que una fracción de la energía del movimiento se disipe en forma de calor, y por otra, a que la trayectoria de cada electrón siga un camino quebrado como se muestra en la figura 17.2, en la que E es el campo eléctrico aplicado al conductor y v_d la velocidad promedio de las cargas positivas.

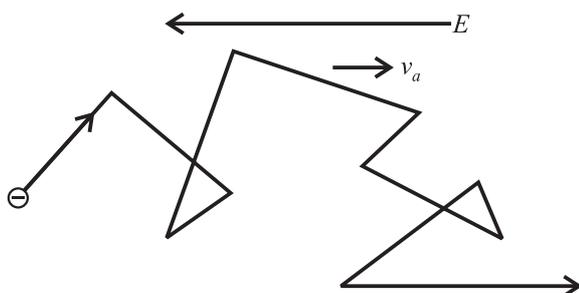


Figura 17.2. Camino de un electrón en un conductor debido a la presencia de un campo \mathbf{E} y de colisiones con otros electrones.

Como consecuencia, el avance efectivo a lo largo del conductor se realiza no con la velocidad adquirida por el electrón sino con una velocidad promedio a lo largo del conductor, que se conoce como *velocidad de arrastre*. Es posible, en efecto, establecer una conexión entre la magnitud de la corriente y la velocidad de arrastre. Basta notar que si la densidad volumétrica de las cargas libres del conductor es n , entonces la carga contenida en un elemento de volumen dV es $dQ = nq dV$; como este elemento de volumen de longitud dl se desplaza con una velocidad promedio v_d , puede escribirse $dQ = nqA dl = nqAv_d dt$, de modo que la corriente que fluye por el alambre está relacionada con la velocidad de arrastre por la expresión $I = nqAv_d$. La densidad de corriente asociada es entonces $\mathbf{J} = nq\mathbf{v}_d$.

17.2 Ley de Ohm

Si entre los dos extremos de un alambre conductor se establece una diferencia de potencial, una corriente eléctrica fluye a lo largo del alambre. Los experimentos realizados por George Simon Ohm a mitad del siglo XIX le permitieron concluir que la relación entre el voltaje aplicado y la corriente en el conductor es lineal:

$$V = IR. \quad (17.4)$$

Esta relación se cumple para muchos conductores a los que se llama *óhmicos*.

La cantidad R describe la resistencia que el material presenta al flujo de electricidad. Mientras mayor sea el voltaje necesario para establecer la misma corriente, mayor será la resistencia. Un excelente conductor presenta una resistencia baja. Si diferentes materiales conductores se someten a la misma diferencia de potencial, el que tenga una resistencia mayor transmitirá una corriente menor.

La unidad de resistencia es el ohmio (Ω), y puede escribirse, de acuerdo con la ley de Ohm: 1 ohmio = 1 voltio / 1 amperio, o también: $1 \Omega = 1 \text{ V/A}$. El símbolo usado para una *resistencia* en los gráficos con circuitos es como aparece en la figura 17.3.

Ejemplo 17.1

¿Cuáles son las unidades elementales del ohmio?



George Simon Ohm (1787-1854)

Físico alemán nacido en Erlangen. Su descubrimiento más importante es la ley que lleva su nombre y en la que la constante de proporcionalidad R se mide desde 1861 en las unidades que llevan su nombre. Realizó también investigaciones en acústica, descubriendo que el oído humano es capaz de distinguir los armónicos de un sonido complejo. Fue profesor en Nuremberg y Erlangen.

Solución:

Puesto que $R = V/I$ y como voltio $= E \times m$ y $E = F/q = \text{newton/coulomb}$, las unidades de R son $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Ejemplo 17.2

Un alambre de 1 m de largo está conectado a una diferencia de potencial de 12 V y tiene una resistencia de 24Ω . ¿Cuál es el valor de la corriente que circula por él? ¿Cuántos electrones por segundo cruzan su sección transversal?

Solución:

De la ley de Ohm se sigue que $I = V/R = 0,5 \text{ A}$, y como $I = q/t = n|e|/t$, donde $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$ es la carga del electrón, se tienen $n/t = 0,5/1,6 \times 10^{-19} = 3,1 \times 10^{18}$ electrones/segundo fluyendo a lo largo del alambre.

17.3 Resistividad y conductividad

La resistencia de un alambre metálico depende de su longitud y de su sección transversal. Los experimentos revelan que la resistencia eléctrica de un alambre es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su área transversal:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \quad (17.5)$$

El factor ρ , conocido como *resistividad*, depende solo de las propiedades físicas del material, como su estructura atómica y su temperatura. Al inverso de la resistividad se le conoce como *conductividad* (σ). Los factores ρ y σ son importantes porque son independientes de la forma geométrica del conductor: alambres, conos, espirales, tirabuzones, del mismo material tienen la misma resistividad. ¿Cuáles son las unidades de la resistividad?

Los valores de la resistividad (en $\Omega \cdot \text{m}$) de algunos metales (a 20°C) son:

Plata	$1,59 \times 10^{-8}$
Cobre	$1,67 \times 10^{-8}$
Oro	$2,35 \times 10^{-8}$
Hierro	$9,71 \times 10^{-8}$
Plomo	$20,65 \times 10^{-8}$

El mejor conductor (menor resistividad) es la plata. En contraste, la resistividad de algunos buenos aislantes (a 20°C) es:

Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$
Cuarzo	$7,5 \times 10^{17}$
Teflón	10^{13}
Diamante	10^{11}

La resistividad es una función de la temperatura y con buena aproximación puede expresarse como

$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - 293)],$$

donde α es el coeficiente de resistividad térmica y es usualmente del orden de 10^{-3} para metales. En la última ecuación la temperatura T se mide en grados Kelvin (K).

Ejemplo 17.3

¿Cuál es la resistencia de un alambre de cobre de 1 mm de radio por el cual circula una corriente de 15 A, si su longitud es de 1 m? ¿Cuál es la densidad de corriente?

Solución:

De (17.5) y conocida la resistividad del cobre (1.67×10^{-8}) se deduce que

$$R = 1,67 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m} \frac{1 \text{ m}}{\pi(1 \times 10^{-3})^2} \text{ m}^2 = 0,0053 \Omega.$$

La densidad de corriente es

$$J = \frac{I}{A} = \frac{15 \text{ A}}{\pi((1 \times 10^{-3})^2) \text{ m}^2} = 4,77 \times 10^6 \text{ A/m}^2.$$

17.4 Ley de Ohm y densidad de corriente

La ley de Ohm, $V = IR$, fue escrita en una forma apta para trabajar la teoría de circuitos eléctricos; de hecho incluye variables cuyos valores pueden ser determinados instrumentalmente usando voltímetros, amperímetros y óhmetros.

Hay otra forma de la ley de Ohm cuya utilidad se hace manifiesta cuando estos temas se ven a la luz de la teoría de campos, contexto en el que conviene utilizar \mathbf{E} , en vez de la diferencia de potencial, y \mathbf{J} en vez de la corriente eléctrica. Mientras V e I muestran su utilidad en la teoría de circuitos, \mathbf{E} y \mathbf{J} lo hacen cuando se trata de enfatizar el aspecto de campo. La conexión entre I y V tiene su contraparte en la relación entre \mathbf{J} y \mathbf{E} y puede establecerse acudiendo al caso del alambre conductor de longitud l y sección A .

Reemplazando V, I y R en $V = IR$, usando $V = El, I = JA$ y $R = \rho l/A$ se sigue que $E = J\rho$. Teniendo en cuenta que $\rho = 1/\sigma$ y acudiendo al carácter vectorial del campo eléctrico y la densidad de corriente puede escribirse la siguiente versión de la ley de Ohm, cuya forma es válida de manera general:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}. \quad (17.6)$$

La anterior es una ecuación de campo, válida en cualquier punto del espacio. En la teoría del campo electromagnético se la considera como una ecuación más importante que la ley de Ohm, a la que contiene.

17.5 Potencia eléctrica

La resistencia eléctrica de los conductores da lugar a disipación de energía (efecto Joule), que se manifiesta por ejemplo en el calentamiento hasta el rojo de las resistencias de una parrilla. Debido a estas pérdidas se hace necesario el suministro de energía desde alguna fuente, usualmente una batería. Sin estas pérdidas debidas a las colisiones el movimiento de las cargas sería acelerado en vez del movimiento con velocidad de arrastre constante.

¿Cuánta potencia es necesario suministrar para mantener la corriente en un circuito? Un elemento ΔQ que se mueve a lo largo de un alambre desde un potencial V_1 a un potencial V_2 gana una energía $V\Delta Q$. La potencia suministrada es entonces

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = V \frac{\Delta Q}{\Delta t} = VI. \quad (17.7)$$

Esta ecuación es válida para cualquier conductor. En particular, si el material obedece la ley de Ohm, $V = IR$, es cierto que

$$P = I^2 R \quad \text{o} \quad P = \frac{V^2}{R}. \quad (17.8)$$

Ejemplo 17.4

¿Qué potencia suministra una batería a un circuito que contiene una resistencia de $10\ \Omega$?

Solución:

De $P = V^2/R$ se sigue $P = 1,44\ \text{V}^2/\Omega$. Demuestre que las unidades *voltio*²/*ohm* corresponden a *vatios*.

Ejemplo 17.5

Una bombilla casera de $60\ \text{W}$ se conecta a $120\ \text{V}$. ¿Cuál es la corriente que circula por su filamento? ¿Cuál es la resistencia del filamento, si este obedece la ley de Ohm?

Solución:

De la expresión $P = VI$ se sigue $I = P/V = 60\ \text{W}/120\ \text{V} = 0,5\ \text{A}$. La resistencia del filamento es $R = V/I = 120\ \text{V}/0,5\ \text{A} = 240\ \Omega$.

17.6 Resistencias en serie y paralelo

17.6.1 En serie

En la figura 17.3 se muestra un arreglo de resistencias en serie en el que la diferencia de potencial es V , y es cierto que

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Puesto que la corriente que atraviesa el arreglo es la misma, ya que no se ramifica y además se conserva, se tiene que $V_1 = IR_1$, $V_2 = IR_2$ y $V_3 = IR_3$. Reemplazando se tiene que:

$$V = I(R_1 + R_2 + R_3).$$

La resistencia equivalente al arreglo en serie es aquella que porta la misma corriente I y está sometida a la diferencia de potencial V , de modo que $V = IR$. La resistencia equivalente tiene el valor

$$R = R_1 + R_2 + R_3. \quad (17.9)$$

En un circuito de varias resistencias en serie es cierto que

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

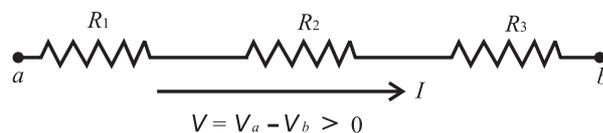


Figura 17.3. Resistencias en serie.

17.6.2 En paralelo

Un arreglo en paralelo corresponde al de la figura 17.4, en el que cada una de las resistencias está conectada a los mismos puntos a y b , por lo que la diferencia de

potencial entre los extremos de cada resistencia es la misma. En este caso se tiene que $V = I_1 R_1$ y $V = I_2 R_2$. Ahora bien, puesto que la carga eléctrica es una cantidad que se conserva ha de ser cierto que al ramificarse en el punto a y al reunirse en b ha de cumplir que $I = I_1 + I_2$, por lo cual:

$$I = V \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

y como la resistencia equivalente R está sometida al mismo potencial V se concluye que, en general, para un arreglo en paralelo:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (17.10)$$

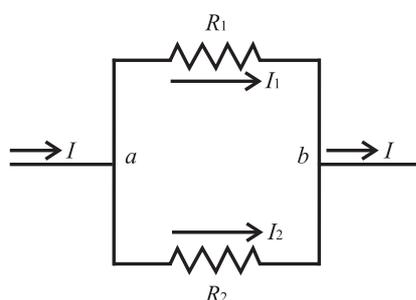


Figura 17.4. Resistencias en paralelo.

Ejemplo 17.6

Evalúe la resistencia equivalente al arreglo de resistencias de la figura 17.5.

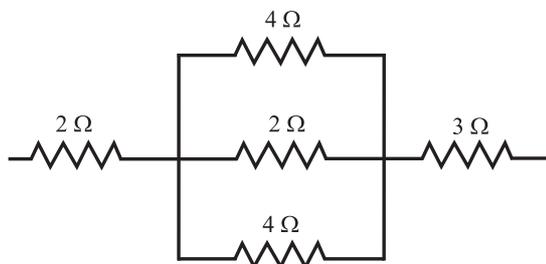


Figura 17.5. Arreglo de resistencias en serie y paralelo.

Solución:

Utilizando en secuencia las ecuaciones (17.9) y (17.10) el sistema puede ser reducido como lo muestra la figura 17.6.



Figura 17.6. Resistencias equivalentes en serie del ejemplo 17.6.

Módulo 18

Circuitos de corriente continua

Contenidos del módulo

- 18.1 Fuerza electromotriz
- 18.2 Leyes de Kirchhoff
- 18.3 Carga y descarga de condensadores
 - 18.3.1 Carga de un condensador
 - 18.3.2 Descarga de un condensador

Objetivos del módulo

1. Establecer la diferencia entre corrientes continua, directa y alterna.
2. Definir la fuerza electromotriz (fem).
3. Señalar artefactos que producen fem.
4. Enunciar las leyes de Kirchhoff.
5. Estudiar la carga y descarga de condensadores.

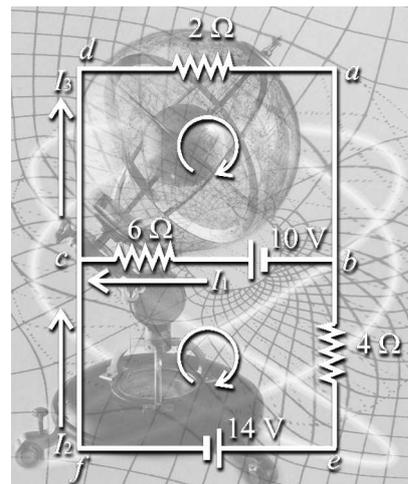
Preguntas básicas

1. ¿Qué es corriente continua, directa, alterna?
2. ¿Qué es fuerza electromotriz?
3. ¿Cuáles mecanismos generan fem?
4. ¿Qué son los polos de una batería?
5. ¿Cuál es el enunciado de las leyes de Kirchhoff?
6. ¿Qué leyes básicas incluyen las leyes de Kirchhoff?
7. ¿Cómo es el proceso de carga y descarga de un condensador?
8. ¿Cómo invierte la energía una batería cuando carga un condensador?

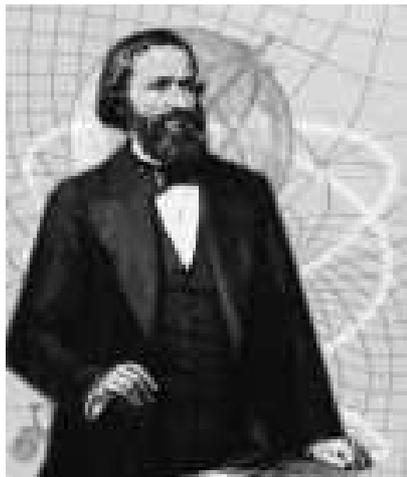
Introducción

En un circuito de corriente *continua*, la corriente eléctrica, aunque puede variar con el tiempo, mantiene siempre una misma dirección. Un caso particular es el de la corriente *directa*, en el cual la corriente mantiene invariable su magnitud y dirección de flujo. Una situación más general, que será abordada en secciones posteriores, es el de la corriente *alterna*, caso en el cual esta oscila en dirección de flujo y en magnitud.

En este módulo se estudian las leyes básicas de los circuitos, que incluyen baterías, resistencias y condensadores. Estas leyes, asociadas al nombre de Kirchhoff, están en el centro del diseño de los circuitos eléctricos de los aparatos de uso casero e industrial.



Las leyes de Kirchhoff permiten calcular las corrientes en una red.



Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Físico alemán nacido en Konisberg, profesor en las universidades de Berlín, Breslau y Heidelberg. En 1845 enunció las leyes que llevan su nombre y que permiten calcular las corrientes y potenciales en un circuito. Colaboró con Bunsen en la invención del espectroscopio, comenzando con ello la rama de la química y la óptica conocida como análisis espectral. Utilizando este instrumento ambos investigadores descubrieron el cesio y el rubidio. Entre sus obras se destaca un curso de física matemática en cuatro volúmenes.

18.1 Fuerza electromotriz

Para que un condensador se cargue y para que una corriente fluya por una resistencia es necesaria la presencia de una fuente de energía. Un tipo de fuente bastante común es la *batería*, como las de automóvil o las de linterna. Otras fuentes son los generadores eléctricos que producen la energía que llega por redes a los hogares, fábricas y oficinas, provenientes de centrales hidro o termoeléctricas; las celdas solares son otra de las fuentes. En todos los casos se trata con transformaciones de energía que la llevan a forma eléctrica.

El interés fundamental en este capítulo estará en las baterías, que son una fuente común de *fuerza electromotriz* abreviada como *fem*. Esta palabra tiene un uso extendido en teoría de circuitos, en electrónica e ingeniería eléctrica, aunque no es muy precisa pues lo que una batería genera no es una fuerza sino una diferencia de potencial. Es a esta a la que se llama *fem*. Una batería tiene dos polos: el positivo (ánodo) es aquel desde el que fluyen cargas positivas y está a potencial más alto que el negativo (cátodo), punto al que llegan las cargas positivas que salen del ánodo. En la práctica los portadores de carga son usualmente los electrones, de modo que estos fluyen desde el cátodo al ánodo. En el exterior de la batería la corriente (flujo de cargas positivas) va del polo positivo al negativo, mientras en su interior va del negativo al positivo.

Las reacciones químicas presentes en el interior de una batería son las responsables de la diferencia de potencial entre sus bornes, pero también su estructura interna es responsable de que presente resistencia al flujo de corriente en su interior, a lo que se conoce como *resistencia interna*. Aunque pequeña, esta resistencia es responsable de que la diferencia de potencial V entre los bornes de la batería no sea igual a su *fem* \mathcal{E} . La conexión entre las dos es $V = \mathcal{E} - Ir$, donde r es la resistencia interna e I el valor de la corriente. Solo si el interruptor de la batería está abierto y no fluye corriente es cierto que $V = \mathcal{E}$.

Es usual que las baterías estén determinadas por el valor de su fem: baterías de 12 V como las de los autos, cuya resistencia interna es de unos 0,005 Ω , o de 1,5 V como las de linternas, con resistencia interna del orden de 1 Ω , etc. En general, la resistencia interna de una batería es mucho menor que la de los elementos del circuito, por lo que en muchos casos puede ser despreciada.

En una batería en proceso de transferir cargas, como cuando carga un condensador, es cierto que $V = \mathcal{E} - Ir$, mientras que en una batería en el proceso de ser cargada es cierto que la corriente en su interior fluye en sentido contrario por lo que $V = \mathcal{E} + Ir$.

18.2 Leyes de Kirchhoff

Las reglas para calcular las corrientes que pasan por las resistencias y las cargas acumuladas en los condensadores, en términos de las fem de las baterías involucradas en el circuito, pueden calcularse haciendo uso de las reglas propuestas por Gustav Kirchhoff en 1845. Estas leyes son expresión de las leyes de conservación de la carga eléctrica y la energía. Pueden establecerse en la forma siguiente:

Regla de los nodos:

La suma de las corrientes en un nodo es cero.

Un nodo es un punto donde confluyen y de donde salen corrientes. Las corrientes que entran a un nodo se consideran positivas y las que salen se asumen negativas. Esta regla establece que las corrientes que entran igualan a las que salen, lo que equivale a la conservación de la carga eléctrica.

Regla de las mallas:

La suma de todas las diferencias de potencial a lo largo de cada trayectoria cerrada de una red es cero.

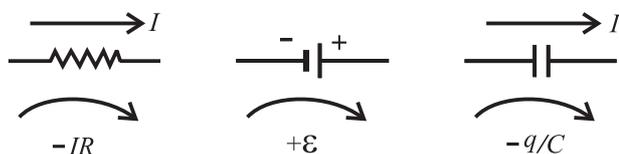


Figura 18.1. Signos de los potenciales de una resistencia, una batería y un condensador. La dirección de recorrido del circuito está dada por la flecha curva.

Para hacer efectiva esta regla, además de asignar direcciones a las corrientes, hay que escoger direcciones de recorrido del circuito cerrado. La figura 18.1 muestra las convenciones asociadas a esta regla. Se sintetizan del siguiente modo:

- Al pasar por una resistencia la diferencia de potencial es negativa si esta se recorre en la dirección de la corriente y positiva si se recorre en dirección contraria.
- Al pasar por una batería, la diferencia de potencial es positiva si el recorrido va en dirección de $- a +$ (que es la dirección de la fem), y negativa en el otro caso.
- Al pasar por un condensador la diferencia de potencial es negativa si se recorre el circuito en dirección de la corriente y positiva en el caso opuesto.

Ejemplo 18.1

Evalúe las corrientes en la malla de la figura 18.2.

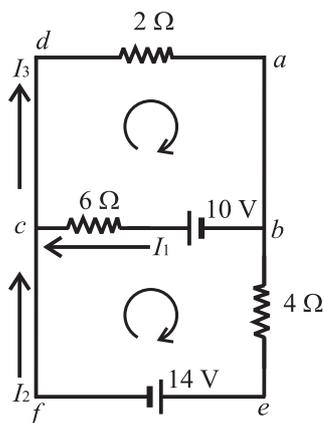


Figura 18.2. Circuito con resistencias y baterías.

Solución:

La dirección de las corrientes puede escogerse como se indica en la figura. Cualquier otra escogencia es aceptable pues los signos finales de las corrientes dirán si la escogencia original fue la acertada o lo es la opuesta. Las mallas serán recorridas en las direcciones mostradas. Valen también otras opciones.

De la primera regla, aplicada al punto c :

$$I_1 + I_2 - I_3. \quad (18.1)$$

Si esta regla se aplica al nodo b da el mismo resultado. Hay solo una regla para corrientes.

La segunda regla, aplicada a la malla $abcd$, dice:

$$10 - 6I_1 - 2I_3 = 0, \quad (18.2)$$

y aplicada a la malla $befcb$ da lugar a:

$$-14 + 6I_1 - 10 - 4I_2 = 0. \quad (18.3)$$

Reemplazando I_3 de (18.1) en (18.2) se obtiene:

$$10 - 8I_1 - 2I_2 = 0. \quad (18.4)$$

Quedan dos ecuaciones, (18.3) y (18.4), con dos incógnitas. Si se elimina entre ellas I_1 se tiene que

$$I_2 = -3,$$

y reemplazando el valor de I_2 en (18.4):

$$I_1 = 2.$$

Finalmente, por reemplazo en (18.1):

$$I_3 = -1.$$

Que I_2 e I_3 sean negativas indica que la dirección de estas dos corrientes es opuesta a la asumida inicialmente.

18.3 Carga y descarga de condensadores

18.3.1 Carga de un condensador

En la figura 18.3 se muestra un circuito que contiene un condensador y una resistencia conectados a una batería de fem \mathcal{E} .

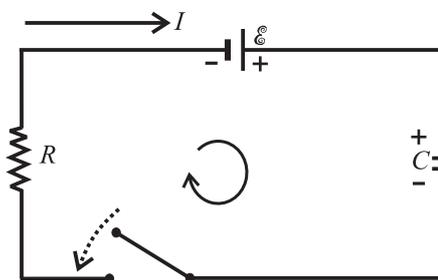


Figura 18.3. Cuando se cierra el interruptor se establece una corriente que carga el condensador.

Al comienzo no hay carga en el condensador ($q = 0$ en $t = 0$) y se cierra el interruptor. Comienza a viajar por el circuito una corriente en la dirección indicada

que, en parte, da lugar a disipación en la resistencia y en parte carga el condensador con la polaridad indicada de las placas. Puesto que solo hay una malla, la corriente es única y la segunda regla de Kirchhoff da lugar a

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - IR = 0,$$

que puede también escribirse

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - \frac{dq}{dt}R.$$

Con el propósito de integrar esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden e inhomogénea conviene homogenizarla, lo que puede lograrse con facilidad si primero se la escribe en la forma

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}(q - \mathcal{E}C) = 0.$$

Si se define la nueva variable $u = q - \mathcal{E}C$ la ecuación diferencial toma la forma

$$RC\frac{du}{dt} + u = 0.$$

Al multiplicarla por dt/u se obtiene

$$RC\frac{du}{u} + dt = 0,$$

cuya integral es

$$RC\ln u + t = D,$$

es decir, reemplazando de nuevo u :

$$RC\ln(q - \mathcal{E}C) + t = D.$$

La constante de integración D puede evaluarse imponiendo la condición inicial $q = 0$ en $t = 0$, y se obtiene $D = RC\ln(-\mathcal{E}C)$, de modo que la solución tiene la forma:

$$RC\ln\left(1 - \frac{q}{\mathcal{E}C}\right) + t = 0.$$

Despejando q se obtiene, finalmente:

$$q = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-t/RC}\right). \quad (18.5)$$

El producto RC , que tiene unidades de tiempo, se llama *constante de tiempo del circuito* y es una medida de la eficacia en la carga del condensador. Mientras que (18.5) describe la evolución de la carga de las placas del condensador, la corriente que viaja por el circuito tiene la forma:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/RC}. \quad (18.6)$$

Mientras que en $t \rightarrow \infty$ la carga del condensador es máxima e igual a $q_{\infty} = \mathcal{E}C$, la corriente decrece a cero (figura 18.4).

La energía cedida por la batería es el trabajo hecho para mover las cargas hasta las placas del condensador, esto es: $W = q_{\infty}\mathcal{E} = \mathcal{E}^2C$. La energía total almacenada en el condensador es

$$E_C = \frac{q_{\infty}^2}{2C} = \frac{\mathcal{E}^2C}{2},$$



Vea la animación *Carga de un condensador* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

lo que indica que la mitad del trabajo hecho por la batería se almacena en el condensador y la otra mitad se disipa en la resistencia: en efecto, de $P = I^2 R$ se sigue:

$$P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2t/RC}.$$

Si esta ecuación se integra entre $t = 0$ y $t \rightarrow \infty$ se obtiene

$$E = \frac{\mathcal{E}^2 C}{2},$$

que es la otra mitad de la energía cedida por la batería.



Vea la animación *Descarga de un condensador* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

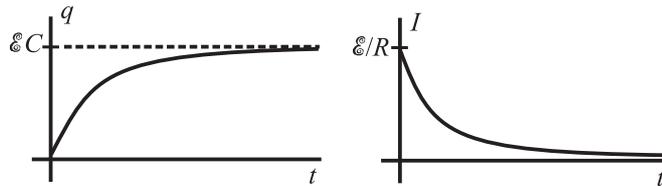


Figura 18.4. Dependencia temporal de la carga y la corriente en la carga del circuito de la figura 18.3.

18.3.2 Descarga de un condensador

Un condensador con carga q_0 y capacitancia C está conectado a una resistencia R . Al comienzo el interruptor está abierto de modo que ninguna corriente viaja por el circuito ($I_0 = 0$ en $t = 0$). Cuando el interruptor se cierra una corriente comienza a fluir desde la placa positiva como se indica en la figura 18.5, hasta que la carga del circuito se reduce a cero.

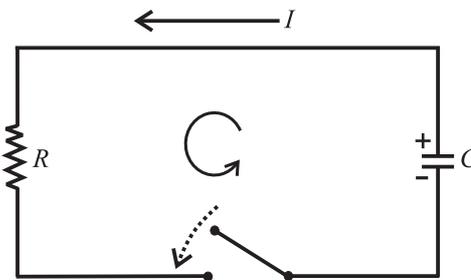


Figura 18.5. Al cerrar el interruptor se descarga el condensador.

La segunda regla de Kirchhoff asegura que

$$-\frac{q}{C} - IR = 0,$$

por lo cual:

$$RC \frac{dq}{dt} + q = 0.$$

Si esta ecuación se escribe en la forma

$$RC \frac{dq}{q} + dt = 0,$$

puede integrarse para dar

$$q = q_0 e^{-t/RC},$$

donde q_0 es la carga en la placa positiva en $t = 0$.

La corriente que pasa por la resistencia es

$$I = dq/dt = \frac{-q_0}{RC} e^{-t/RC}.$$

Es cierto entonces que la corriente y la carga decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$ (figura 18.6).

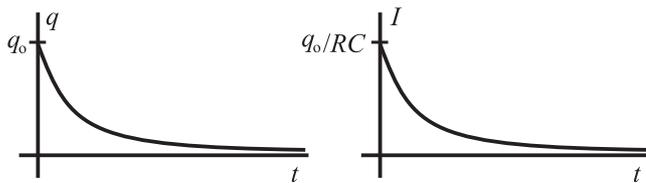


Figura 18.6. Dependencia temporal de la carga y la corriente en la descarga del circuito de la figura 18.5.

Capítulo 6

Magnetismo



La brújula interactúa con el campo magnético terrestre permitiendo determinar el norte de la Tierra.

Presentación

Algunos historiadores atribuyen a los chinos el primer contacto con los materiales magnéticos, pues utilizaban artefactos de magnetita (Fe_3O_4) con la forma de cucharillas que podían girar en el plano de una tabla de adivinación, de las cuales

Contenido breve

Módulo 19

Campo magnético

Módulo 20

Fuerza y torque magnéticos sobre una corriente eléctrica

Módulo 21

Motores y aparatos de medida

Módulo 22

Campo magnético y corrientes

Módulo 23

Fuerza entre corrientes eléctricas

Módulo 24

Circulación y flujo del campo magnético

Módulo 25

Magnetización en la materia

tal vez surgieron las brújulas. Aunque estos artefactos parecen haber surgido en el siglo XIII a.C., su referencia más documentada proviene del año 83 a.C. Las brújulas, consistentes en pequeñas agujas de magnetita que podían girar sobre la punta de un eje, eran comunes en China cerca del año 271 d.C y en el siglo XII en la república de Amalfi, al sur de Italia, sitio del nacimiento de Flavio Gioja a quien allí se atribuye su invención. En el siglo VI d.C. los chinos descubrieron que los imanes podían ser usados para magnetizar por frotamiento pequeñas agujas de hierro.

Las brújulas, construidas con pequeñas agujas de imán natural o mediante frotamiento de agujas de hierro contra imanes naturales, presentan, como es bien conocido, la característica de que uno de sus extremos se orienta siempre hacia el norte geográfico de la Tierra; a este extremo se le llama el norte de la brújula. Al otro, que apunta al sur geográfico, se le llama el sur de la brújula.

El conocimiento de los fenómenos magnéticos avanzó muy poco durante la Edad Media, exceptuando el reconocimiento de la existencia de dos regiones muy definidas en los imanes, a las que se llamó *polos magnéticos*. Suspendiendo barras de magnetita de una cuerda sus polos pueden identificarse observando si se orientan al norte o al sur; de este modo no tardó en reconocerse que *polos de igual clase se repelen y de distinta clase se atraen*.

En 1600, William Gilbert, después de 18 años de experimentos con imanes y materiales eléctricos, publica su libro *De magnete*, que incluye la primera gran clasificación de estos materiales y en el que propone que la Tierra es un gran imán. Puesto que el polo norte de la brújula ha de ser atraído por un sur, entonces *el polo norte terrestre es un polo sur magnético*, y recíprocamente. En 1750 John Mitchell demuestra que la acción de un imán sobre otro puede deducirse de una ley de inverso cuadrado entre los polos del imán, ley de fuerza que fue luego verificada por Coulomb en 1785. Coulomb también sugirió que debería ser imposible separar los dos polos de un imán sin a la vez crear otra pareja de polos. Este hecho ha sido comprobado por toda la experimentación posterior, pudiéndose concluir que *los polos magnéticos existen siempre en parejas*, es decir, que *no existen polos magnéticos aislados*. En estos mismos años Coulomb descubrió la ley de inverso cuadrado para interacción eléctrica que lleva su nombre. El siguiente mayor avance experimental en magnetismo tuvo lugar en 1820 cuando Oersted notó, durante una clase, la deflexión de la aguja de una brújula cercana a una corriente eléctrica. Puede concluirse entonces que una corriente también genera magnetismo que interactúa con las brújulas. En consecuencia parece haber dos clases de magnetismo, el de los imanes (y brújulas) y el de las corrientes. Con esta única observación se inició la unificación entre electricidad y magnetismo. En menos de una semana, Ampère verificó la observación de Oersted y realizó una extensa investigación de la que surgió la siguiente conclusión: *todo magnetismo se debe a corrientes*. La propuesta de Ampère significa que un imán puede ser entendido como un sistema microscópico de corrientes, que junto con las corrientes macroscópicas de los experimentos de Oersted deben bastar para entender el magnetismo.

De estos temas, restringidos a situaciones independientes del tiempo, es decir *estacionarias*, se ocupa este capítulo. El gran avance siguiente, que inauguró la electrodinámica, fue iniciado por Faraday y Henry y será tema del capítulo 7.

Módulo 19

Campo magnético

Contenidos del módulo

- 19.1 El campo magnético
- 19.2 Fuerza magnética sobre una carga
- 19.3 Carga en movimiento en un campo magnético
 - 19.3.1 Aplicaciones

Objetivos del módulo

1. Utilizar nociones geográficas para identificar los polos norte y sur de una brújula.
2. Utilizar brújulas para identificar los polos de un imán.
3. Reconocer la existencia de dos polos en los imanes.
4. Reconocer las diferencias entre electricidad y magnetismo.
5. Introducir las líneas de campo magnético.
6. Presentar una definición del campo magnético.
7. Presentar la ley de fuerza entre campo magnético y cargas eléctricas en movimiento.
8. Estudiar el movimiento de cargas en campos magnéticos.
9. Estudiar el selector de velocidades, el espectrómetro de masas y el ciclotrón.



Las líneas de campo magnético terrestre van aproximadamente a lo largo de los meridianos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es un polo magnético?
2. ¿Puede aislarse un polo por división de un imán?
3. ¿Cómo se define la dirección de un campo magnético?
4. ¿Interactúa un imán con cargas en reposo?
5. ¿Qué ley describe la interacción entre un campo magnético y una carga?
6. ¿Qué es un selector de velocidades?
7. ¿Para qué se utiliza un espectrómetro de masas?
8. ¿Cómo funciona un ciclotrón?

Introducción

La propiedad de ciertos materiales denominada *magnetismo* la muestran en estado natural el hierro, el manganeso, el cobalto y muchos de sus compuestos aunque no es una propiedad universal como la gravitación, pues no la poseen todos los cuerpos, y los que la poseen la presentan más intensa en ciertas zonas a las que se han llamado polos. No parece, además, estar relacionada con la electricidad, pues ni el ámbar, ni el caucho, entre muchos otros, la presentan. Aunque diferente a la gravitación y la electricidad, parece conveniente describirla en un lenguaje análogo a ellas pues su acción sobre las brújulas depende de su posición y su dirección. Por ello en lo que sigue se introduce la noción de *campo magnético*, entendiendo con este concepto la zona del espacio donde se manifiestan los efectos de imanes y corrientes sobre brújulas.

Oersted y Ampère realizaron experimentos con imanes, brújulas y corrientes con los que lograron establecer que, además de la interacción entre imanes y brújulas y entre brújulas y corrientes, existe también interacción entre corrientes, las que, como se sabe, están conformadas por un flujo de cargas. El propósito de este módulo es el de proponer el concepto de campo magnético y la ley matemática que describe la interacción entre cargas en movimiento y campo magnético.

19.1 El campo magnético

Por definición el polo norte de una brújula es el extremo que se orienta al norte geográfico terrestre. A este extremo se le distingue con una marca de color (figura 19.1).

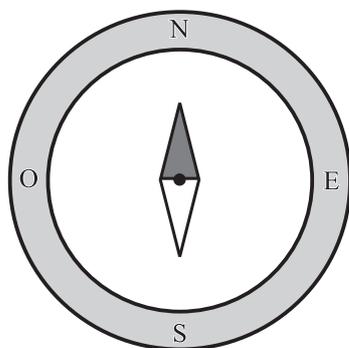


Figura 19.1. Una brújula consta de una pequeña aguja suspendida de un pivote.

Considérese una barra imantada; si se la suspende de un hilo, es decir, si se la deja actuar como brújula, puede determinarse su polo norte y puede comprobarse que su polo norte y el polo sur de la brújula se atraen. Ahora bien, si se coloca la barra imantada en una superficie horizontal y se exploran sus alrededores con la brújula resulta que (figura 19.2):

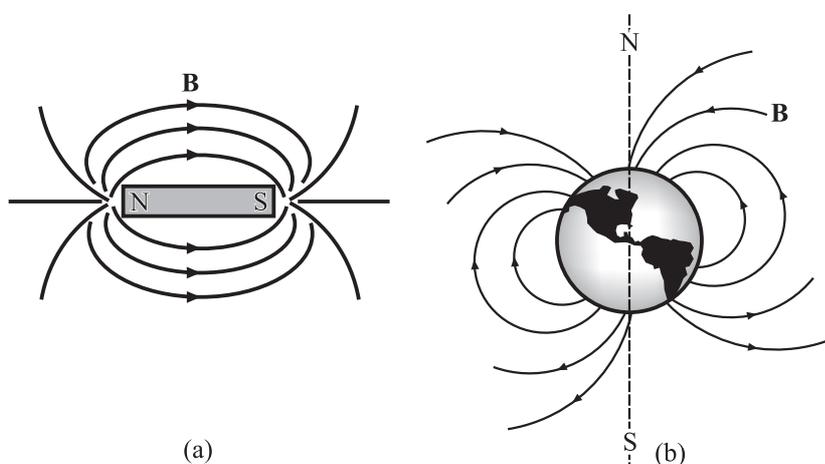
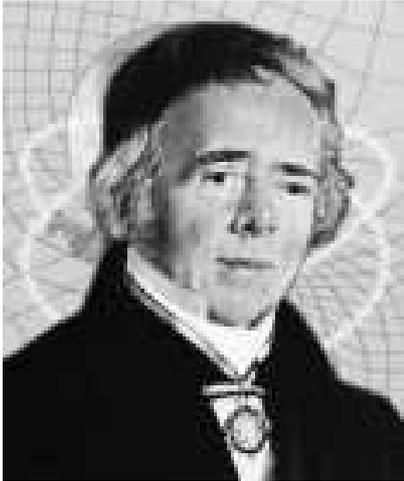


Figura 19.2. Líneas de campo magnético, (a) de una barra imantada, (b) de la Tierra.

- Es posible definir las líneas de acción magnética, o de *campo* magnético, como aquellas coincidentes punto a punto con la dirección de una brújula.
- Es posible asignar la dirección de las líneas de campo magnético como aquella que va del polo sur al polo norte de la brújula.
- El plano, y en general el espacio alrededor del imán, puede asumirse lleno de estas líneas, cuya densidad da información sobre la intensidad de la acción del imán.



Vea la demostración *Fenómenos magnéticos* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.



Hans Christian Oersted (1777-1851)

Físico y químico danés. Estudió y fue profesor en la Universidad de Copenhague. En 1820 descubrió durante el desarrollo de una clase que una corriente eléctrica afecta la orientación de una brújula, con lo que estableció la primera conexión entre electricidad y magnetismo, que a su vez inspiraron los trabajos de André Marie Ampère y Michael Faraday.

Una buena ayuda en la “visualización” de los patrones de líneas del campo se consigue esparciendo limadura sobre un imán que ha sido cubierto con un papel, como se muestra en la figura 19.3.

Aunque un método posible de medir la intensidad del campo magnético puede ser dotar la brújula de un volante de reloj para medir el torque que el campo realiza sobre la aguja, resulta más simple una medida utilizando corrientes, como se expone en el capítulo siguiente. Para simplificar, se dará por supuesto por ahora que el campo magnético, al que se llamará \mathbf{B} , es conocido.

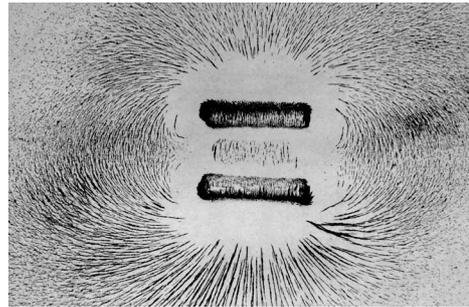


Figura 19.3. Las limaduras de hierro esparcidas en los alrededores de un imán dan una idea de las líneas de campo magnético.

19.2 Fuerza magnética sobre una carga

Los experimentos de Oersted y Ampère permiten llegar a la conclusión de que un campo magnético ejerce fuerzas sobre una corriente, por tanto también sobre una carga en movimiento. Los experimentos permiten concluir que *la fuerza magnética sobre una carga q que se mueve con velocidad \mathbf{v} en un campo magnético \mathbf{B} tiene la forma:*

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (19.1)$$

donde $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ es un producto vectorial. De acuerdo con el análisis vectorial, el producto vectorial es un vector expresable en la forma:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}}(vB \sin \theta),$$

donde v y B son los módulos de \mathbf{v} y \mathbf{B} , y θ es el ángulo que va del primer vector al segundo siguiendo la regla de la mano derecha (figura 19.4).

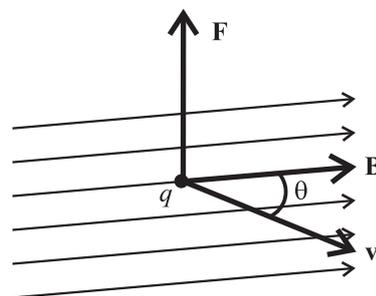


Figura 19.4. La fuerza magnética sobre la carga q es proporcional al producto $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.

Regla de la mano derecha: *curve los dedos de la mano derecha en el sentido de rotación que va de \mathbf{v} a \mathbf{B} ; el pulgar extendido señala la dirección de $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$.*

La dirección del producto vectorial y por tanto de la fuerza es perpendicular al plano que contiene los vectores \mathbf{v} y \mathbf{B} . La magnitud de la fuerza magnética es, así:

$$F = qvB \sin \theta. \quad (19.2)$$

De esta ecuación se sigue que:

- Si se invierte el signo de la carga, se invierte la dirección de la fuerza.
- La fuerza magnética sobre q es nula si el campo magnético y la velocidad son paralelas.
- La fuerza magnética es máxima si el campo y la velocidad son perpendiculares.
- Un campo magnético no ejerce fuerza alguna sobre una carga en reposo, a diferencia del campo eléctrico que actúa sobre cargas en reposo o en movimiento.

Es importante notar que mientras que la fuerza eléctrica que algún campo \mathbf{E} ejerce sobre una carga va en la misma dirección del campo \mathbf{E} , la fuerza magnética sobre una carga en movimiento es siempre perpendicular a \mathbf{B} .

El carácter de producto vectorial de la fuerza magnética tiene una consecuencia de primer orden: *la fuerza magnética no realiza trabajo sobre la carga en movimiento*. Esto se deduce fácilmente si se piensa que el trabajo diferencial dW realizado para mover una carga q una distancia diferencial $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ puede escribirse:

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} dt.$$

Puesto que la fuerza y la velocidad son vectores perpendiculares, su producto escalar es nulo, por lo cual $dW = 0$. Es cierto entonces que, cualquiera sea el campo \mathbf{B} , este nunca cambia el módulo de la velocidad de la carga, aunque sí puede alterar su dirección. *El campo magnético no cambia la energía cinética de una partícula cargada.*

De (19.2) se concluye que \mathbf{B} , al que daremos el nombre más preciso de vector de *inducción magnética*, tiene unidades (conocidas como *teslas*) (T), expresables en unidades elementales en la forma:

$$B = \frac{F}{qv} = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{Kg}}{\text{C} \cdot \text{s}}.$$

En estas unidades el valor de B en la superficie terrestre es del orden de $0,5 \times 10^{-4}$ T; los grandes campos generados en el laboratorio son del orden de 25 T. Ha sido conveniente definir una unidad más pequeña que es el *gauss* (G), en la forma $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$. En estas unidades el campo B terrestre es 0,5 G.

Ejemplo 19.1

Un protón entra a una zona donde existe un campo magnético B de 2 T en dirección z . La velocidad de la partícula cargada forma con el eje x un ángulo $\alpha = 30^\circ$ como en la figura 19.5, y tiene un módulo de $10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Calcule la fuerza sobre la carga.

Solución:

De acuerdo con los datos: $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{k}}B$, $\mathbf{v} = v_0(-\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha)$, de modo que

$$\mathbf{F} = qvB(-\hat{\mathbf{i}} \cos \alpha + \hat{\mathbf{j}} \sin \alpha) \times \hat{\mathbf{k}} = qvB(\hat{\mathbf{i}} \sin \alpha + \hat{\mathbf{j}} \cos \alpha).$$



Nikola Tesla (1856-1943)

Físico e inventor norteamericano de origen serbio. En 1884 se radicó en Estados Unidos donde trabajó en las compañías Edison y Westinhouse. Más tarde, en su propio laboratorio desarrolló el motor de corriente alterna. En 1893 su sistema de corriente alterna fue adoptado en la central hidroeléctrica de las cataratas del Niágara. En 1891 inventó la bobina Tesla, un transformador de alta frecuencia.

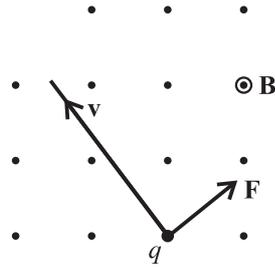


Figura 19.5. Fuerza magnética sobre una carga en movimiento. El símbolo \odot significa que el campo \mathbf{B} sale del plano del papel.

Puesto que la carga del protón es $1,6 \times 10^{-19}$ C se tiene que

$$\mathbf{F} = 1,6 \times 10^{-14}(\hat{\mathbf{i}} + 1,73\hat{\mathbf{j}})\text{N}.$$

El módulo de esta fuerza es $F = 0,52$ N.

19.3 Carga en movimiento en un campo magnético

De la figura 19.5 se puede concluir que si \mathbf{v} y \mathbf{B} son perpendiculares la fuerza sobre la carga tiene el carácter de una fuerza centrípeta por lo cual

$$F = m \frac{v^2}{r},$$

donde r es el radio de la órbita circular recorrida por la carga. Así pues,

$$m \frac{v^2}{r} = qvB,$$

de donde

$$r = \frac{mv}{qB}. \quad (19.3)$$

Una carga en movimiento en un campo magnético, con velocidad inicial perpendicular al campo \mathbf{B} , recorre una trayectoria circular de radio (19.3).

La velocidad angular a lo largo de la órbita, conocida como *frecuencia de ciclotrón*, es

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}, \quad (19.4)$$

y el período es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

Estos resultados son el caso particular de una situación más general en la que la carga entra al campo magnético con una dirección arbitraria de la velocidad. Para simplificar, sea un campo magnético dirigido en x : $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}}B$ (figura 19.6). La fuerza magnética es entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\hat{\mathbf{i}}v_x + \hat{\mathbf{j}}v_y + \hat{\mathbf{k}}v_z) \times (\hat{\mathbf{i}}B) \\ &= qB(-\hat{\mathbf{k}}v_y + \hat{\mathbf{j}}v_z) = \hat{\mathbf{i}}F_x + \hat{\mathbf{j}}F_y + \hat{\mathbf{k}}F_z. \end{aligned}$$

Igualando los términos que contienen los mismos vectores unitarios, puede escribirse:

$$F_x = 0 = m\dot{v}_x, \quad (19.5)$$

$$F_y = qBv_z = m\dot{v}_y, \quad (19.6)$$

$$F_z = -qBv_y = m\dot{v}_z. \quad (19.7)$$

En (19.5), (19.6) y (19.7) \dot{v} representa la derivada temporal de v , es decir, la aceleración. La ecuación (19.5) permite concluir que el movimiento a lo largo del eje x , coincidente con la dirección del campo magnético, es inercial: $\dot{v}_x = 0 \implies v_x = \text{constante}$. Además, reemplazando v_z de (19.6) en (19.7) puede escribirse

$$\ddot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y$$

y una ecuación análoga para v_z . Multiplicando la primera por \hat{j} y la segunda por \hat{k} se obtiene la ecuación de movimiento $\ddot{\mathbf{v}} + (qB/m)^2 \mathbf{v} = 0$, donde \mathbf{v} se sitúa en el plano (y, z) . Esta situación describe el movimiento circular uniforme, según lo tratado en la sección 2.5. Como consecuencia, el movimiento general de una carga en un campo magnético homogéneo es la combinación de un movimiento circular uniforme cuya órbita es perpendicular a \mathbf{B} y un movimiento uniforme en dirección de \mathbf{B} . Esta combinación produce la hélice de la figura 19.6.

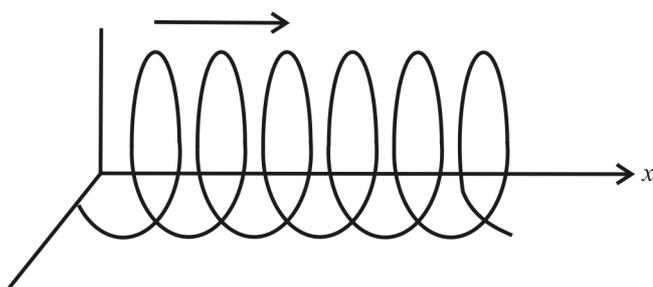


Figura 19.6. Movimiento en hélice de una carga en movimiento en un campo magnético uniforme.

19.3.1 Aplicaciones

Cuando una partícula cargada eléctricamente se coloca en un campo eléctrico experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$; si además la carga está en movimiento en un campo magnético, esta experimenta una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. En general, si una carga eléctrica q se mueve en una región del espacio donde coexisten campos eléctricos y magnéticos, la fuerza que sobre ella actúa está dada por la *fuerza de Lorentz*:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (19.8)$$

Algunas aplicaciones de esta ecuación se desarrollan enseguida.

a. El selector de velocidades

Un alambre caliente por el que circula una corriente es capaz de emitir electrones. En este fenómeno, conocido como efecto Edison, las partículas liberadas tienen un conjunto amplio de valores de velocidad. En algunas aplicaciones



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928)

Físico holandés. Suponiendo que la materia está conformada por partículas eléctricamente cargadas predijo el cambio en la longitud de onda de la luz que viaja en un campo magnético intenso. Este efecto, comprobado por su alumno Pieter Zeemann, le dio el Premio Nobel de Física en 1902. Las reglas de transformación que llevan su nombre predicen la contracción de longitudes y el retardo de relojes en movimiento, ideas que fueron reelaboradas por Einstein para construir su teoría de la relatividad especial.

conviene seleccionar del flujo de cargas aquellas que tengan iguales valores de la velocidad. Esto puede lograrse haciendo pasar el haz de partículas entre un par de placas de condensador que a su vez están dentro de un campo magnético, y en modo tal que \mathbf{E} y \mathbf{B} sean perpendiculares (figura 19.7). Un electrón que entra al campo combinado experimenta la acción hacia arriba del campo eléctrico y la acción hacia abajo del campo magnético (obsérvese que \mathbf{E} y \mathbf{B} son perpendiculares). Si la fuerza resultante es cero, la trayectoria del electrón continúa rectilínea hasta el final de las placas, garantizándose con ello que su velocidad está determinada por la igualdad de fuerzas

$$-|q|E = -|q|vB,$$

esto es, el arreglo de la figura 19.7 selecciona electrones con velocidad

$$v = \frac{E}{B}. \tag{19.9}$$

Una aplicación frecuente del selector de velocidades se analiza en las líneas siguientes.

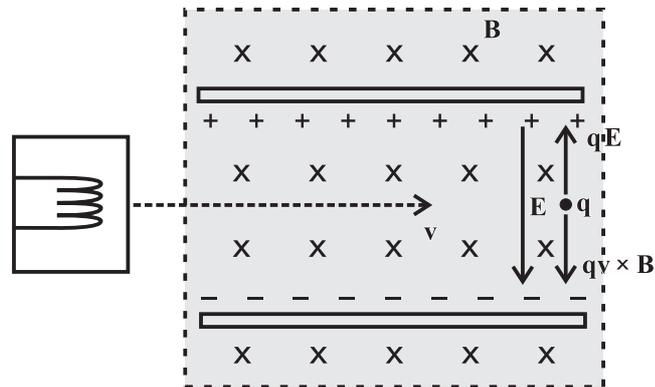


Figura 19.7. Una carga q se mueve rectilíneamente entre las placas si $qE = qvB$. El símbolo X significa que el campo B entra al plano del papel.

b. El espectrómetro de masas

Los isótopos de un elemento químico son versiones del mismo elemento que difieren en el número de neutrones del núcleo. Por ejemplo, hay diferentes isótopos del carbono: C^{12} y C^{14} . Este elemento tiene 6 protones en su núcleo, de modo que el primer isótopo tiene 6 neutrones mientras el segundo tiene 8. Esto hace que las masas de los isótopos sean diferentes. Si a los isótopos presentes en una muestra se les logra ionizar una vez, es decir, si se le extrae a cada uno un electrón, sobre ellos puede ejercerse la acción de campos eléctrico y magnético. Al ionizarlo, cada isótopo queda convertido en un ión positivo.

El modelo de Bainbridge de un espectrómetro de masas mostrado en la figura 19.8 cumple el objetivo de separar isótopos ionizados con la misma carga neta q . El haz de átomos se hace pasar por el selector de velocidades de la izquierda de donde emergen solo los que tengan una velocidad $v = E/B_0$. Los campos del selector son E y B_0 . A continuación los átomos entran a una zona donde hay un campo magnético B que los obliga a recorrer una trayectoria semicircular de radio $r = mv/qB$ (ver (19.3)) que termina en el punto P donde hay una placa fotográfica para detectar la llegada o un recolector de isótopos. Reemplazando

en esta última ecuación el valor de v se obtiene la relación q/m para cada espécimen:

$$\frac{q}{m} = \frac{E}{B_0 B r}. \quad (19.10)$$

Considérense dos isótopos con la misma carga q y de masas m_1 y m_2 . La relación entre los radios de sus trayectorias es

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2}{m_1}.$$

Mientras mayor sea la masa, mayor será el radio de la trayectoria circular.

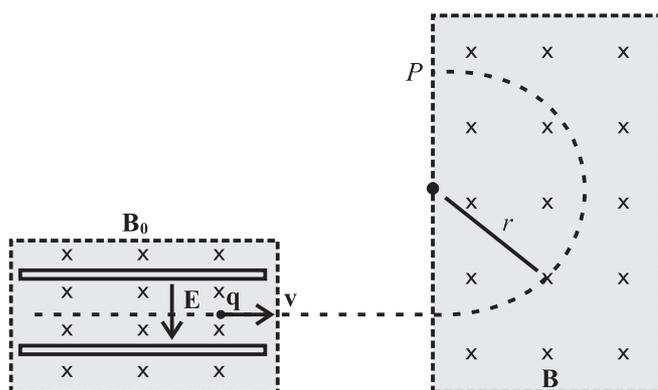


Figura 19.8. Espectrómetro de masa Brainbidge.

c. El ciclotrón

Una de las herramientas más poderosas en el estudio de las partículas elementales es el acelerador de partículas, una de cuyas versiones más eficientes es el ciclotrón, inventado por Ernest Orlando Lawrence y Milton Stanley Livingston en 1934.

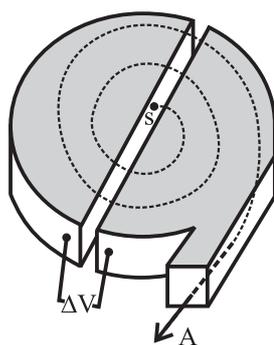


Figura 19.9. Versión simple de un ciclotrón.

Este aparato contiene un par de cavidades en forma de D (figura 19.9) dentro de las cuales circulan las partículas que se quieren acelerar. Todo el sistema se coloca en una cámara de vacío para evitar colisiones de las partículas bajo estudio con los átomos de la atmósfera. Las dos cámaras se someten a una diferencia de potencial que cambia periódicamente de signo de modo que mientras

una D es positiva la otra es negativa. En el espacio entre las D y casi en el centro hay una fuente S de partículas, las que se dirigen hacia la D que en ese momento tenga el signo de potencial apropiado para ser atraída; las partículas comienzan a viajar ahora en el interior de la cavidad conductora (en la que, como se sabe, no hay campo eléctrico) bajo la acción de un campo magnético perpendicular a las cámaras semicirculares. El campo magnético obliga a las cargas a moverse en semicírculo hasta que sale de la D, momento en el que la polaridad cambia de modo que la otra D atrae la carga que ahora ingresa a la cámara donde sigue una trayectoria circular con mayor velocidad y en consecuencia mayor radio. Al emerger encuentra frente a sí una D que ha cambiado de polaridad y la acelera, repitiéndose el proceso hasta que la trayectoria alcanza un radio máximo en el que la partícula se retira del sistema en el punto A. La frecuencia con que ha de cambiar la polaridad del potencial entre las D ha de ser igual a la frecuencia de ciclotrón (19.4): $\omega = qB/m$. Cada media vuelta la energía cinética de la partícula aumenta en $q\Delta V$ al pasar de una D a la otra, siendo el cambio debido solo al campo eléctrico. Cuando se trata de alcanzar velocidades no muy altas (correspondientes a energías hasta del orden de 20 MeV) puede utilizarse (19.4); esta ecuación debe ser reescrita para tomar en cuenta efectos relativistas si las energías cinéticas son mayores de 20 MeV.

Ejemplo 19.2

Si un ciclotrón tiene un radio de salida de 0,5 m y el campo magnético es de 1,5 T, ¿con qué frecuencia debe oscilar el potencial para acelerar electrones? ¿Qué energía cinética alcanzan?

Solución:

La frecuencia de ciclotrón es

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{(1,6 \times 10^{-19} \text{ C})(1,5 \text{ T})}{(9,1 \times 10^{-31} \text{ kg})} = 0,26 \times 10^{12} \text{ rad/s,}$$

correspondiente a una frecuencia de

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 4 \times 10^{10} \text{ Hz.}$$

La velocidad que alcanza el electrón en el momento de la salida es

$$v = \omega r = 0,26 \times 10^{12} \times 0,5 = 0,13 \times 10^{12} \text{ m/s}$$

y la energía cinética de salida es

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0,77 \times 10^{-8} \text{ J.}$$

¿Cuál es el equivalente en MeV?

Módulo 20

Fuerza y torque magnéticos sobre una corriente eléctrica

Contenidos del módulo

- 20.1 Fuerzas sobre corrientes
- 20.2 Torques sobre corrientes
- 20.3 Momento de dipolo magnético

Objetivos del módulo

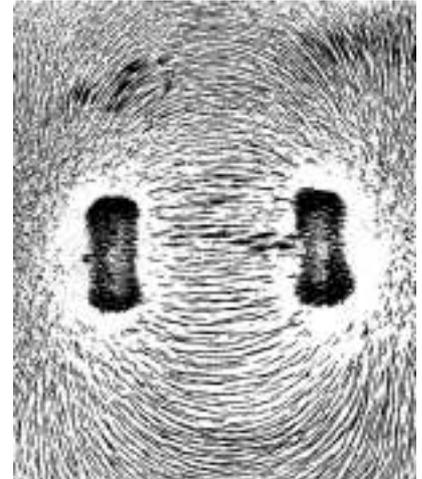
1. Demostrar que un campo magnético ejerce fuerzas sobre corrientes eléctricas.
2. Demostrar que un campo magnético uniforme no ejerce fuerzas netas sobre corrientes cerradas.
3. Evaluar el torque que un campo magnético ejerce sobre una espira de corriente.
4. Definir el momento de dipolo magnético.
5. Establecer la analogía entre dipolos eléctrico y magnético.

Preguntas básicas

1. ¿Qué expresión describe la fuerza magnética sobre una corriente?
2. ¿Puede ser nula la fuerza magnética sobre una corriente?
3. ¿Cómo es el torque de un campo magnético sobre una corriente?
4. ¿De qué variables depende el momento de dipolo magnético?
5. ¿Cuáles son las posiciones de equilibrio estable e inestable de un dipolo magnético en un campo externo?
6. ¿Qué analogías pueden establecerse entre dipolos eléctrico y magnético?

Introducción

Un campo magnético ejerce fuerza sobre cargas en movimiento. Una corriente eléctrica está formada por un flujo de cargas, que en los conductores consisten en electrones que se mueven con una velocidad de arrastre v_d . Así, un campo magnético ejerce fuerzas y torques sobre corrientes en alambres, y en general sobre distribuciones volumétricas \mathbf{J} de corriente. Este módulo se dedica a explorar tales efectos. Como se verá, aquí se encuentra el principio del funcionamiento del motor eléctrico.



Las limaduras de hierro en las cercanías de los polos de un imán dan una imagen del campo magnético.



André Marie Ampère (1775-1836)

Físico y matemático francés nacido en Lyon. Estudió la desviación de la aguja de una brújula en presencia de una corriente eléctrica, efecto que había sido descubierto por Hans Christian Oersted, de donde obtuvo la ley de fuerza de Ampère. La unidad de medida de corriente eléctrica lleva su nombre. Realizó investigaciones en cálculo de probabilidades, cálculo de variaciones y ecuaciones diferenciales parciales.

20.1 Fuerzas sobre corrientes

En la figura 20.1 se muestra un sector de un alambre que porta una corriente eléctrica. Si la densidad volumétrica de cargas es n (número de cargas/volumen), la corriente se expresa como

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{nq}{\Delta t} \Delta V. \quad (20.1)$$

El factor $1/\Delta t$ puede ser reemplazado por $v_a/\Delta l$, donde v_a es la velocidad de arrastre, junto con $\Delta V = A\Delta l$, para dar

$$I = nqAv_a.$$

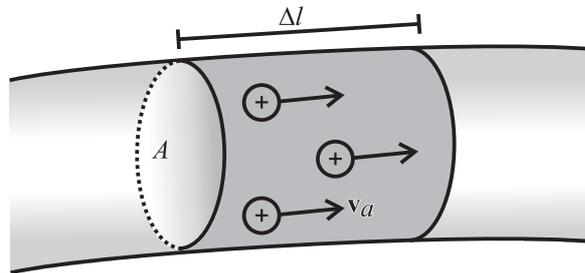


Figura 20.1. Corriente que fluye por un alambre de sección transversal A .

De otro lado, la fuerza que el conjunto $nq\Delta V$ de cargas experimenta debido a la acción del campo magnético es

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{F} &= \Delta Q \mathbf{v}_a \times \mathbf{B} = I \mathbf{v}_a \times \mathbf{B} dt. \\ &= I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Ha de notarse que la corriente va en dirección $d\mathbf{l}$. La fuerza neta experimentada por un alambre finito de extremos a y b colocado en un campo \mathbf{B} (figura 20.2) puede evaluarse integrando (20.2):

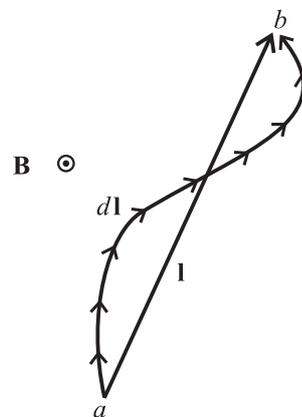


Figura 20.2. Elementos diferenciales de línea en el cálculo de la fuerza magnética sobre una corriente.

$$\mathbf{F} = \int_a^b I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (20.3)$$

Puesto que la corriente que viaja por el alambre es la misma en cada sector, I puede retirarse de la integral (20.3) para dar:

$$\mathbf{F} = I \int_a^b d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (20.4)$$

Dos casos simples pueden ser analizados aquí:

- a. *Corriente rectilínea en un campo B uniforme.* Puesto que el campo \mathbf{B} es el mismo en todos los puntos del alambre, puede ser retirado de la integral (20.4):

$$\mathbf{F} = I \left[\int_a^b d\mathbf{l} \right] \times \mathbf{B} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (20.5)$$

- b. *Corriente cerrada en un campo \mathbf{B} uniforme.* En este caso puede escribirse: $\mathbf{F} = I [\oint d\mathbf{l}] \times \mathbf{B}$; solo que ahora la espira es cerrada. La figura 20.3 muestra que la longitud *vectorial* de la curva (que es lo que evalúa la integral cerrada) es cero. Ha de tenerse muy presente que esta integral es muy distinta a $\oint dl$, que es una integral *escalar* cuyo valor es la longitud de la curva.

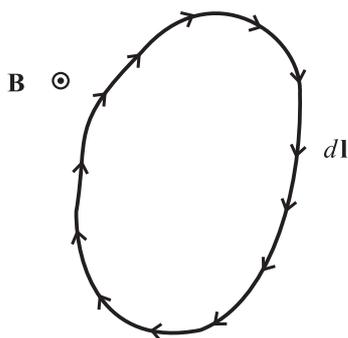


Figura 20.3. Corriente eléctrica cerrada.

Así pues: *un campo magnético uniforme no ejerce fuerza neta sobre una espira de corriente.* Como se verá luego, este campo uniforme, aunque no ejerce fuerzas, sí ejerce torques.

La expresión (20.3) puede extenderse sin dificultad al caso de corrientes volumétricas consistentes en el movimiento de partículas de densidad volumétrica ρ ; basta tener en cuenta que

$$I dl = \frac{dQ}{dt} dl = dQ \frac{dl}{dt} = \frac{dQ}{dA dt} (dA dl) = J dV.$$

La ecuación (20.3) se escribe ahora:

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV, \quad (20.6)$$

donde la integral se realiza sobre el volumen de la distribución de cargas.

Ejemplo 20.1

Un arco de corriente (figura 20.4) se coloca en un campo magnético B homogéneo de dirección \hat{j} . ¿Cuál es la fuerza que ejerce el campo sobre el semicírculo?

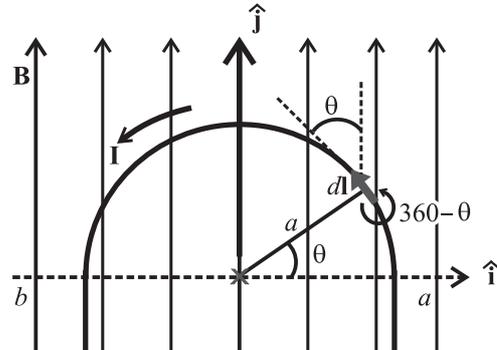


Figura 20.4. Arco de corriente en un campo magnético.

Solución:

De la figura se nota que la fuerza magnética sobre el elemento $d\mathbf{l}$ es, de acuerdo con (20.3) y la regla de la mano derecha, perpendicular al plano del papel, cualquiera que sea la posición del elemento en la figura. Esto permite extraer de la integral el vector unitario \hat{k} (que sale del plano del papel), y permite escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= I \int_a^b d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = IB \hat{k} \int_a^b dl \sin(360 - \theta) \\ &= -IB \hat{k} \int_a^b dl \sin \theta = -IB \hat{k} \int_0^{\pi/2} (a d\theta) \sin \theta = +IB \hat{k} \left(\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} \right). \\ &= -2IaB \hat{k}. \end{aligned}$$

Si la integral se extendiese de 0 a 2π el resultado sería cero de acuerdo con el caso del literal b .

20.2 Torques sobre corrientes

Se ha concluido que un campo magnético homogéneo no ejerce fuerza neta sobre una espira cerrada, cualquiera sea su forma. El siguiente desarrollo revela que un campo magnético ejerce torques sobre espiras. Por simplicidad el tratamiento se restringe a espiras rectangulares en un campo homogéneo aunque el resultado es válido para espiras de cualquier forma geométrica.

Considérese la espira rectangular de lados l y l' de la figura 20.5a a lo largo de la cual fluye la corriente I . La regla de la mano derecha da las direcciones indicadas de las fuerzas sobre los cuatro lados. Las fuerzas sobre los lados da y bc son iguales y de signos opuestos por lo que no afectan ni traslacional ni rotacionalmente la espira; sin embargo, las fuerzas que actúan sobre los elementos ab y cd , aunque iguales en magnitud y antiparalelas, actúan generando un torque neto sobre la espira (figura 20.5b). Si cada una de las fuerzas es $F = IlB$ (nótese que el campo y el alambre son perpendiculares), el torque respecto al eje (que pasa por el centro de la figura 20.5b) debido a cada fuerza será $\tau = F(l'/2) \cos \theta = (Ill'B/2) \cos \theta$. El torque neto tiene dirección que entra al plano del papel y se expresa como

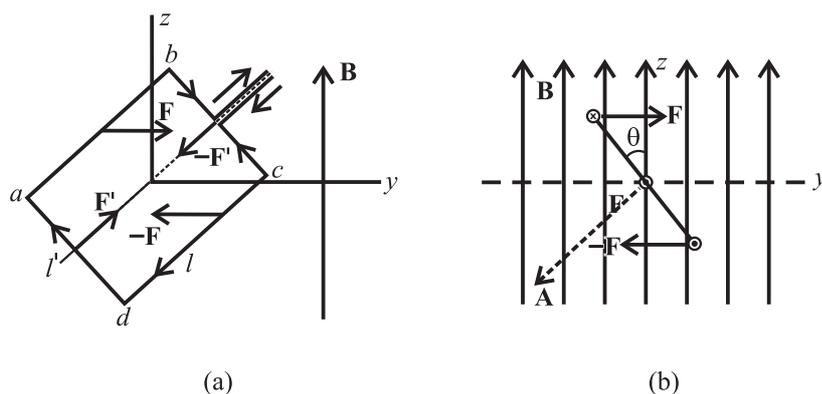


Figura 20.5. Geometría para el cálculo del torque magnético sobre una espira rectangular con corriente.

$$\tau = -2(Il'B/2) \cos \theta = -AIB \cos \theta, \quad (20.7)$$

donde $A = ll'$ es el área de la espira. En forma vectorial:

$$\tau = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}. \quad (20.8)$$

El vector \mathbf{A} que representa la superficie de la espira cuya área es ll' está dirigido como se muestra en la figura 20.5b, siguiendo una regla de mano derecha: se sigue con los dedos de la mano derecha la trayectoria de la corriente y el pulgar extendido da la dirección del vector de superficie. Con esta convención es posible comprobar que (20.7) y (20.8) son equivalentes.

Aunque esta expresión ha sido deducida para una espira rectangular es válida cualquiera sea su forma. En efecto, considérese una espira de forma arbitraria, como en la figura 20.6, que ha sido dividida en elementos infinitesimales cada uno de los cuales responde según (20.8).

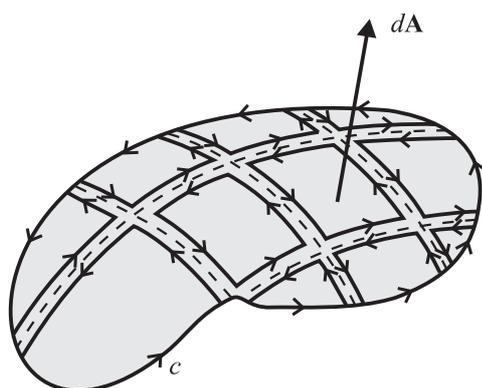


Figura 20.6. Geometría para el cálculo del torque magnético sobre una corriente cerrada arbitraria.

En el dibujo se nota que las corrientes de cada una de las pequeñas áreas tienen compañeras en las áreas contiguas con las cuales se cancela dando lugar a que las únicas corrientes que no se anulan con otras son las de la frontera externa que forman la corriente de la espira original. Ha de tomarse en cuenta que los “senderos” que separan las áreas se anulan en el límite. Así pues, el torque que

experimenta una espira macro o microscópica colocada en un campo magnético *homogéneo* es (20.8), donde ahora \mathbf{A} es la superficie total de la espira.

Ejemplo 20.2

Una espira circular de radio 2 cm y con 100 vueltas porta una corriente de 50 mA. Si se la coloca en un campo magnético de 20 mT y la espira forma un ángulo de 30° con \mathbf{B} (figura 20.6), ¿cuál es el torque ejercido sobre la espira?

Solución:

De $\tau = I\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ se sigue:

$$\tau = NIAB \sin \theta = 100 \times 50 \times 10^{-3} \times \pi \times (0,2)^2 \times 0,5 = 0,314 \text{ Nm.}$$

20.3 Momento de dipolo magnético

Un dipolo eléctrico, como fue definido en (10.9), experimenta un torque cuando se coloca en un campo eléctrico. Su forma, dada por (10.12), es $\tau = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$, ecuación que presenta una notable semejanza con (20.8). En ambas aparecen los torques y los campos responsables de ellos. Dada la analogía el producto $I\mathbf{A}$ se denomina *momento de dipolo magnético* \mathbf{m} y es tal que

$$\mathbf{m} = I\mathbf{A}. \quad (20.9)$$

Con esta definición la ecuación (20.8) se escribe

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (20.10)$$

Mientras en la definición de dipolo eléctrico aparecen la carga y la distancia, en la de dipolo magnético aparecen la corriente y la superficie que ella cubre. Son conceptos paralelos y de gran aplicación en la teoría de la generación de las ondas electromagnéticas.

De (20.10) se sigue que cuando un dipolo magnético se coloca en un campo externo el torque tiende a alinear \mathbf{m} con \mathbf{B} (figura 20.7). En esta posición el torque es nulo y la espira permanece en equilibrio estable: una ligera perturbación del paralelismo regresa el dipolo a su posición original. Si el dipolo se coloca en el campo de modo tal que μ y \mathbf{B} sean antiparalelos, el torque es de nuevo cero pero el equilibrio es inestable: basta una ligera perturbación para que el dipolo se aleje de su posición.

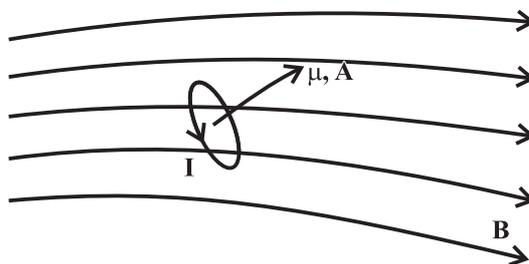


Figura 20.7. Dipolo magnético colocado en un campo magnético.

Es posible comprobar, como en el caso del dipolo eléctrico estudiado en la sección 3.5, que si el dipolo se deja en libertad en el momento en que forma con el campo un ángulo pequeño, el resultado será un movimiento armónico simple.

Módulo 21

Motores y aparatos de medida

Contenidos del módulo

- 21.1 El motor eléctrico
- 21.2 El galvanómetro
 - 21.2.1 Amperímetros y voltímetros

Objetivos del módulo

1. Mostrar el diseño y los principios de funcionamiento de un motor eléctrico.
2. Detallar el diseño de un instrumento básico de medida: el galvanómetro.
3. Estudiar la forma de conexión de un amperímetro y un voltímetro.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo funciona un motor eléctrico?
2. ¿Qué es un galvanómetro y para qué se utiliza?
3. ¿En qué se fundamenta el diseño de un motor y un galvanómetro?
4. ¿Cómo se conectan en un circuito un amperímetro y un voltímetro?
5. ¿Qué características tienen las resistencias de un amperímetro y un voltímetro?

Introducción

Desde el punto de vista de la aplicación práctica del tema de torques magnéticos sobresale la invención del motor eléctrico, con cuyo estudio se inicia este módulo.

Ahora bien, una vez quedan establecidas las unidades de medida se vuelve necesario diseñar y construir instrumentos que permitan realizar las medidas de variables básicas como son corriente y voltaje. La existencia de fuerzas y torques entre campos magnéticos y corrientes permite el diseño de un instrumento fundamental, el galvanómetro (nombrado así en honor a Luigi Galvani), que es la base del amperímetro y el voltímetro. En este módulo se estudia el funcionamiento de este aparato y la forma como amperímetros y voltímetros se incluyen en los circuitos eléctricos.



Diversos electrodomésticos utilizan el motor eléctrico.



Luigi Galvani (1737-1798)

Anatomista, fisiólogo y médico italiano nacido en Bolonia. En 1786 observó durante una tormenta que las patas de una rana se contraían al tocar sus nervios con unas tijeras, y que ocurría lo mismo si saltaba una chispa en un generador electrostático. Estas y otras observaciones le llevaron a proponer la idea de que hay una forma de electricidad animal a la que llamó *fuerza vital*. En 1772 fue elegido presidente de la Academia de Ciencias de Bolonia.

21.1 El motor eléctrico

Una espira $abcd$ se coloca entre los polos norte y sur de un par de imanes como se muestra en la figura 21.1. La espira es capaz de rotar sobre su eje AC y por ella viaja una corriente que viene de una fuente externa \mathcal{E} que produce una corriente directa constante.

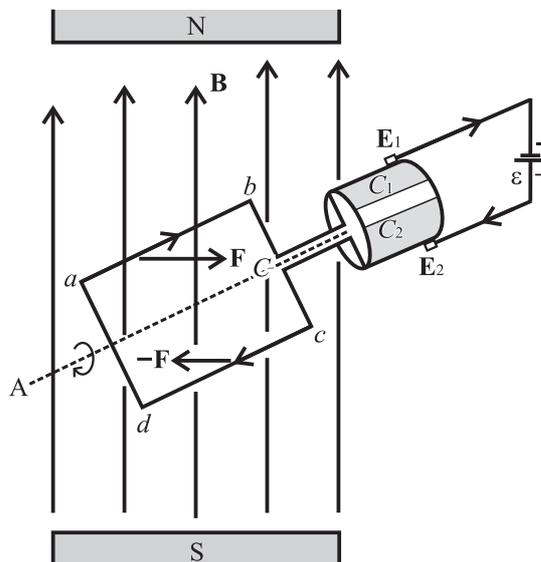


Figura 21.1. El principio del motor eléctrico.

En el instante que muestra la figura las fuerzas F sobre los lados ab y cd tienen la dirección indicada, y son responsables de un torque que hace rotar la espira. En el punto C por donde entra y sale la corriente de la espira hay un *conmutador*, que es un pequeño dispositivo capaz de cambiar cada media vuelta la dirección de entrada de la corriente. Las escobillas E_1 y E_2 rozan la superficie de un cilindro sobre el cual se han colocado dos caparazones semicilíndricos conductoras C_1 y C_2 que giran con la espira. Cada media vuelta las escobillas pasan de C_1 a C_2 invirtiendo la dirección de entrada de la corriente. Esta inversión es responsable de que el torque haga girar la espira siempre en la misma dirección. En la figura 21.2 se muestran algunos instantes del proceso. Comenzando con la posición representada en la figura 21.1, la espira gira hasta alcanzar la posición vertical (en la parte superior la corriente entra, en la inferior sale); un instante después la espira alcanza la posición horizontal, momento en el cual tiene lugar la inversión de corriente. En ese instante la espira continúa su giro *por inercia* y viaja hasta la última posición mostrada en que la corriente que entraba ahora sale y la posición y las corrientes vuelven a coincidir con la situación original. Esta combinación entre inercia e inversión de las corrientes hacen que la espira gire siempre en la misma dirección, constituyendo lo que se llama un motor eléctrico. Repita el análisis de la secuencia de la figura 21.2 sin la existencia del conmutador. Puede probarse que la espira oscila sin dar la vuelta completa. En este último caso la espira se comporta como un dipolo magnético oscilante.

21.2 El galvanómetro

La versión que aquí se presenta de este instrumento se conoce como galvanómetro de D'Arsonval y consiste en esencia en una espira con corriente, sobre la cual

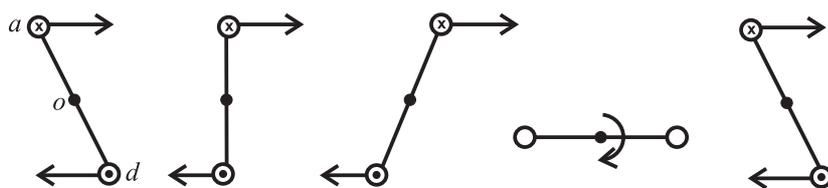


Figura 21.2. Secuencia de movimiento de la espira en un motor eléctrico (vea la figura 21.1).

un campo magnético ejerce un torque (figura 21.3). Un campo magnético casi uniforme es generado por polos enfrentados de imanes permanentes. El torque magnético tiende a alinear la espira en forma que su área sea perpendicular al campo \mathbf{B} , solo que un muelle M se opone a esta acción, logrando equilibrar la acción del campo. Resulta entonces que

$$\tau = k\alpha = IAB,$$

donde k es la constante elástica del muelle, α es el ángulo que gira la espira y A su área. Se deduce entonces que existe una relación lineal entre la corriente que pasa por la espira y el ángulo α :

$$I = \left(\frac{k}{AB} \right) \alpha.$$

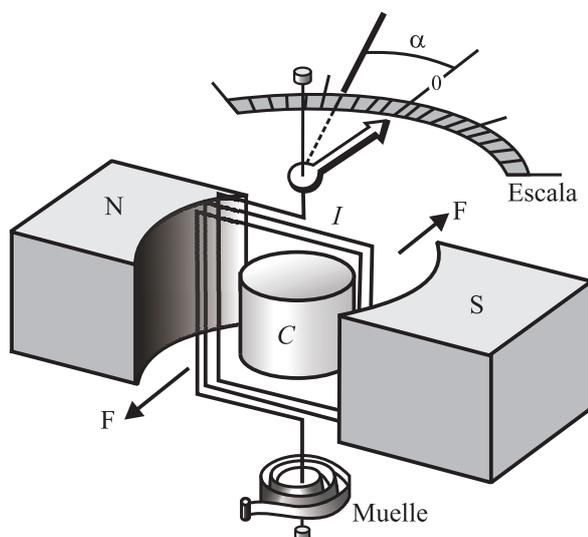


Figura 21.3. Galvanómetro de D'Arsonval.

Esta proporcionalidad permite medir corrientes mediante la medida del ángulo. De hecho, la escala señalada por la aguja del instrumento se calibra directamente en amperios.

21.2.1 Amperímetros y voltímetros

Esta pareja de instrumentos desciende directamente del galvanómetro adaptándose su escala para medir corrientes o diferencias de potencial.

Para poderse medir, la corriente debe pasar directamente por el *amperímetro*, por lo cual se le debe conectar en serie, como en la figura 21.4a. Para evitar una reducción en la corriente original del circuito, un amperímetro ideal debería tener una resistencia R_a cero. Basta en la práctica que R_a sea mucho menor que R .

Para medir la diferencia de potencial entre las terminales de una resistencia, el *voltímetro* debe ser conectado en paralelo con R' (figura 21.4b). Un voltímetro ideal debería tener una resistencia infinita de modo que ninguna corriente pase a través de él. Basta sin embargo con que su resistencia R' sea mucho mayor que aquella sobre la cual viaja la corriente original.

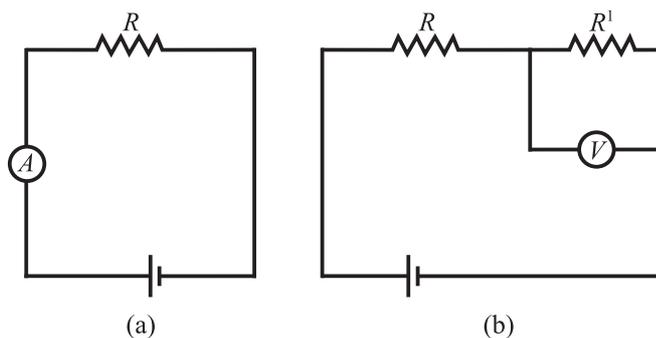


Figura 21.4. Circuitos básicos que incluyen: (a) un amperímetro, (b) un voltímetro.

Módulo 22

Campo magnético y corrientes

Contenidos del módulo

- 22.1 Ley de Biot-Savart
- 22.2 Aplicaciones

Objetivos del módulo

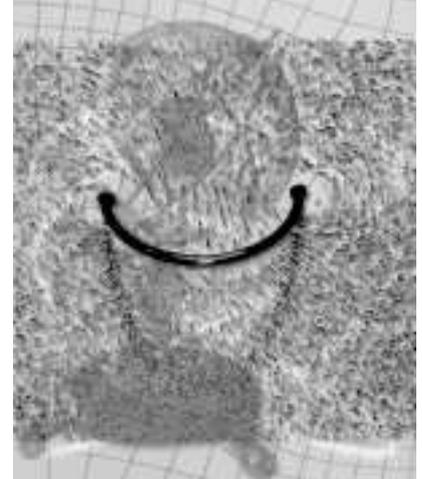
1. Presentar la ecuación que describe un campo magnético.
2. Determinar las variables básicas de un campo magnético.
3. Establecer en forma matemática la idea de Ampère de que el magnetismo se debe a corrientes eléctricas.
4. Introducir la permeabilidad magnética.
5. Estudiar los campos magnéticos de diversas configuraciones de corriente.

Preguntas básicas

1. ¿Qué variables determinan la forma de las líneas del campo magnético?
2. ¿Qué es la permeabilidad magnética?
3. ¿Cómo se aplica la regla de la mano derecha para determinar la dirección del campo magnético?
4. ¿Hay magnetismo debido a cargas en reposo?
5. ¿Cómo son las líneas de campo de una corriente rectilínea, una espira, un solenoide?

Introducción

El descubrimiento de Oersted sobre la desviación de la aguja de una brújula cuando se le acerca a una corriente implica que una brújula no solo interactúa con otras o con imanes sino también con corrientes eléctricas, lo que sugiere que las corrientes también generan campos magnéticos. En este módulo se propone la ley que describe la generación de campos magnéticos mediante corrientes.



Limaduras de hierro en cercanías de una corriente eléctrica. La respuesta es idéntica que con imanes.



Jean Baptiste Biot (1774-1862)

Físico, astrónomo y matemático nacido en París. Demostró el origen extraterrestre de los meteoritos. Realizó estudios sobre refracción de la luz los gases y los cambios en el plano de polarización de la luz que pasa a través de una solución de azúcar, para lo cual inventó el polariscopio. Elaboró con Felix Savart la ley que describe la forma de los campos magnéticos y su dependencia con la corriente eléctrica.

22.1 Ley de Biot-Savart

André Marie Ampère, Jean Baptiste Biot y Felix Savart descubrieron que una corriente ejerce fuerzas sobre un imán y estudiaron en detalle la interacción. El resultado de sus experimentos indica que el campo magnético puede ser descrito en forma vectorial mediante la ecuación

$$\mathbf{B} = k_m I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}, \quad (22.1)$$

en la cual la constante k_m que fija la intensidad de la interacción tiene un valor

$$k_m = \frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{T m A}^{-1} = 10^{-7} \text{m kg C}^{-2}.$$

μ_0 se conoce como la *permeabilidad del vacío*. En los fenómenos magnéticos desempeña el papel que ϵ_0 tiene en los eléctricos. En electricidad la fuente diferencial es dq , mientras en magnetismo lo es $I d\mathbf{l}$, conocido como *elemento de corriente*.

Obsérvese que:

- El campo \mathbf{B} es proporcional al elemento de corriente $I d\mathbf{l}$. En el caso eléctrico, el campo \mathbf{E} es proporcional al elemento de carga dq .
- El campo magnético no es central, es decir, no va hacia el elemento de corriente; más bien está regido por una regla de mano derecha: ir con los dedos desde $d\mathbf{l}$ hasta $\hat{\mathbf{u}}_r$, la dirección del pulgar extendido indica la dirección de \mathbf{B} . De modo equivalente: si en la figura 22.1 se toma con la mano la corriente, de modo que el pulgar extendido apunte en dirección de $d\mathbf{l}$, los demás dedos describirán la dirección de \mathbf{B} .
- Como en el caso electrostático, el campo magnético depende de $1/r^2$.

La figura 22.1 muestra un elemento de corriente y los vectores asociados al campo \mathbf{B} . El campo debido a un elemento de corriente es

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}. \quad (22.2)$$

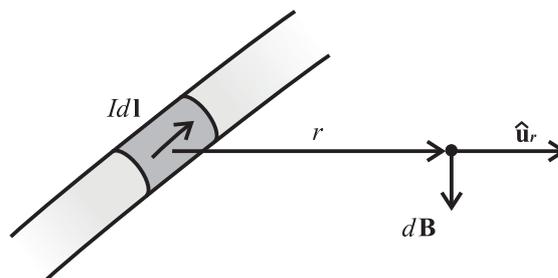


Figura 22.1. El elemento de corriente y $\hat{\mathbf{u}}_r$ determinan la dirección del campo magnético.

La ecuación (22.1) es válida estrictamente para corrientes estacionarias, es decir, independientes del tiempo. Una sola carga en movimiento es una corriente no estacionaria, pues su campo en cada punto del espacio se modifica a medida que se mueve. Sin embargo, si se considera una carga de baja velocidad puede calcularse su campo en forma aproximada. Para esto basta tener en cuenta (20.1), por lo cual:

$$I d\mathbf{l} = \frac{nq}{dt} dV d\mathbf{l} = nq\mathbf{v} dV,$$

con lo cual (22.1) puede escribirse

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} (ndV),$$

expresión en la que ndV es el número total N de cargas. Si hay solo una carga puntual puede probarse que (ndV) “se cancela” con la integral para dar

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}. \quad (22.3)$$

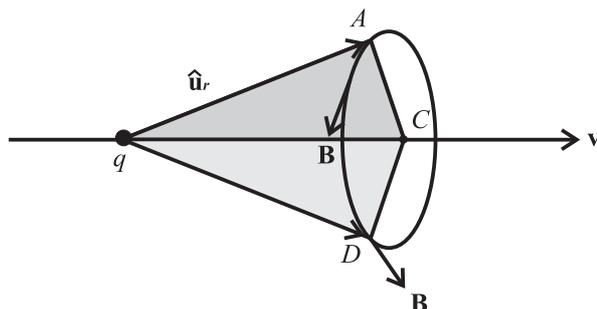


Figura 22.2. Geometría para evaluar la dirección de las líneas de campo magnético de una carga en movimiento uniforme.

La forma de las líneas de campo magnético de una carga puntual en movimiento puede obtenerse de (22.3). La figura 22.2 indica la posición de la carga y las direcciones de $\hat{\mathbf{u}}_r$ y \mathbf{v} que forman el triángulo qAC . De (22.3) se sigue que la dirección de \mathbf{B} es perpendicular al triángulo. La figura se puede rotar alrededor del eje qC para dar qCD , plano al cual es perpendicular el campo \mathbf{B} . El módulo de \mathbf{B} es el mismo para los dos triángulos. Si la rotación se hace lentamente, se verá que el campo recorre una trayectoria circular. Las líneas de campo magnético de una carga puntual se representan en la figura 22.3 y corresponden a círculos concéntricos perpendiculares a la dirección de la velocidad.

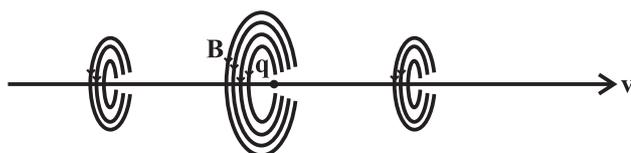


Figura 22.3. Líneas de campo magnético de una carga en movimiento uniforme.

El campo eléctrico de una carga con baja velocidad es

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{\mathbf{u}}_r.$$

De esta ecuación y (22.3) se deduce la conexión entre los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} de una carga puntual a baja velocidad:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \quad (22.4)$$

22.2 Aplicaciones

Ejemplo 22.1

Campo magnético de una corriente eléctrica rectilínea

Solución:

Este campo puede calcularse partiendo de (22.2) y utilizando la geometría de la figura 22.4:

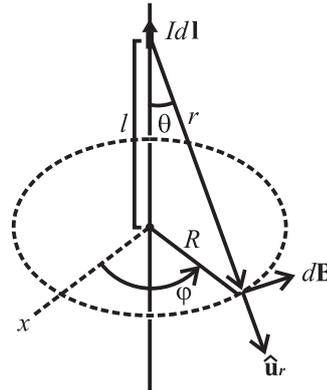


Figura 22.4. Una corriente rectilínea produce un campo magnético de círculos concéntricos.

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \sin(\pi - \theta) \hat{\mathbf{u}}_\phi.$$

Esta expresión debe ser integrada sobre la variable l ; al hacerlo no cambia la dirección del vector unitario $\hat{\mathbf{u}}_\phi$, por lo que puede ser extraído de la integral. Entonces

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{\mathbf{u}}_\phi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{r^2} \sin(\pi - \theta).$$

De la figura 22.4 es cierto que $\tan \theta = R/l$, y puede hacerse el cambio de variable de l a θ con $\cot \theta = l/R$, de donde $dl = -R \csc^2 \theta d\theta$; además: $r = R \csc \theta$; de este modo la integral toma la forma

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \hat{\mathbf{u}}_\phi \int_\pi^0 \sin \theta d\theta = \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (22.5)$$

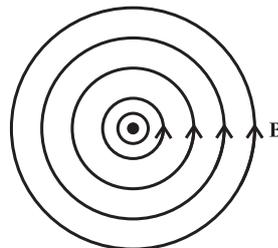


Figura 22.5. Campo magnético de un alambre rectilíneo. Vista superior.

En el cambio de variable se ha tenido en cuenta que los extremos $(-\infty, \infty)$ en l corresponden a $(\pi, 0)$ en θ . Obsérvese que, igual que en el caso del alambre eléctricamente cargado, el campo decrece como $1/r$. La forma de las líneas de campo magnético se muestra en la figura 22.5 Estas líneas pueden trazarse con una regla de mano derecha: si se toma el alambre con la mano derecha y el pulgar apunta con la corriente, los demás dedos dan la dirección de \mathbf{B} .

Ejemplo 22.2

Campo magnético de una espira circular

Solución:

En el anillo horizontal de la figura 22.6, la dirección del campo magnético en el punto P, debido a un elemento de corriente, puede obtenerse de (22.2). Resulta que $d\mathbf{B}$ en P tiene componentes vertical y horizontal. La simetría del problema asegura que un elemento de corriente opuesto al dibujado en la figura (es decir, en Q y sobre el anillo) da lugar a un campo en P que presenta una componente vertical del mismo signo y una horizontal de signo opuesto a los del primer elemento. Puesto que el proceso de integración implica una suma sobre los elementos diferenciales de corriente, resultará que las componentes horizontales se cancelan y las verticales se suman. En síntesis, en un punto P sobre el eje z existe solo $dB_z = dB \cos \theta$. Entonces, con

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} :$$

$$B_z = \int dB_z = \int dB \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl}{r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cos \theta \int dl .$$

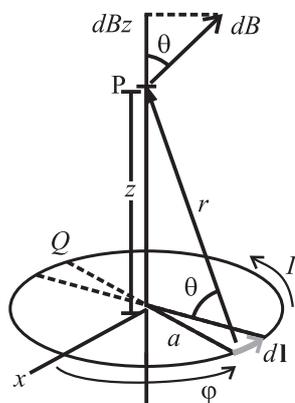


Figura 22.6. El elemento de corriente $I dl$ de un anillo genera en P un campo magnético diferencial.

Los términos r^2 y θ han sido retirados de la integral pues permanecen constantes cuando se integra sobre el anillo, cuya variable de integración es ϕ . Con $dl = a d\phi$ se sigue:

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{a}{r} \int dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \frac{a}{r} 2\pi a \\ &= \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} . \end{aligned} \quad (22.6)$$

El cálculo anterior ha permitido calcular solo el campo en el eje. Un procedimiento más complejo permite demostrar que las líneas de campo magnético en todo el espacio tienen la forma que se muestra en la figura 22.7. Observe que si se toma la corriente con la mano, y con el dedo pulgar apuntando en su dirección, los dedos dan la dirección del campo.

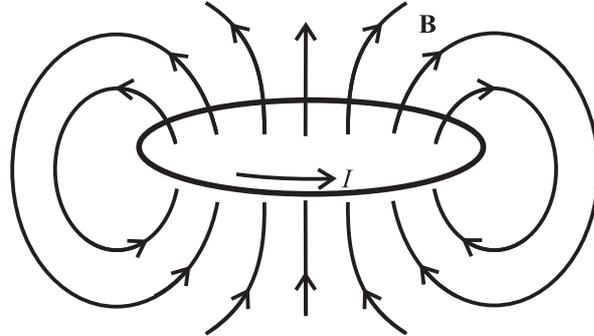


Figura 22.7. Campo magnético de un anillo con corriente.

El momento de dipolo magnético de la espira $m = IA = I\pi a^2$ permite reescribir (22.6) en la forma

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

El campo magnético de un dipolo magnético *puntual* corresponde al caso en que la distancia de observación es mucho mayor que el tamaño del anillo: $z \gg a$, con la cual se obtiene

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi|z|^3}.$$

Ejemplo 22.3

Campo magnético de un solenoide

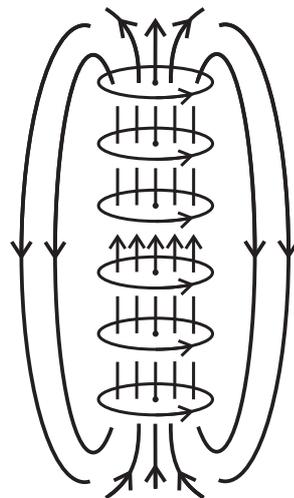


Figura 22.8. Un solenoide con corriente y sus líneas de campo magnético.

Solución:

Un solenoide es un conjunto de espiras coaxiales y de igual radio por las que circula la misma corriente (figura 22.8). En la práctica experimental usualmente adopta la forma de un apretado arrollamiento de alambre conductor sobre un cilindro. Su campo magnético es básicamente idéntico al de un imán natural (ver figuras 19.2a y 19.3), por lo que se usa en muchas aplicaciones en vez de aquellos. Si en el interior de un solenoide con corriente se coloca una barra de hierro se obtiene un electroimán.

El cálculo del campo en su interior y exterior puede ser notablemente simplificado si se asume que el arrollamiento es muy apretado de modo que la transición entre una y otra espira es muy suave. Si en el solenoide hay n espiras por unidad de longitud y si se toma un anillo dz , como en la figura 22.9, a lo largo del cual fluye una corriente dI puede escribirse para el campo en el origen de coordenadas O , de acuerdo con (22.6):

$$dB = \frac{\mu_0}{2} dI \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2} (nI dz) \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Integrando sobre la longitud del solenoide:

$$dB = \frac{\mu_0 n I a^2}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Este procedimiento equivale a una integración sobre anillos diferenciales. El cambio de variable $z = a \tan \varphi$ permite transformar la integral en

$$\frac{1}{a^2} \int \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{a^2} \sin \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2},$$

con lo cual el campo se escribe

$$B = \frac{\mu_0 n I L}{\sqrt{L^2 + 4a^2}}. \quad (22.7)$$

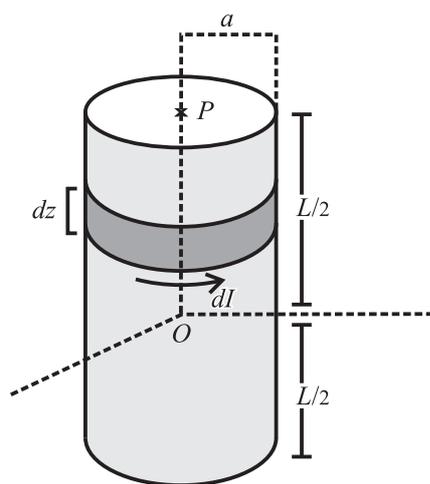


Figura 22.9. Geometría para el cálculo del campo magnético en el interior de un solenoide.

Las líneas del campo magnético del solenoide tienen la forma mostrada en la figura 22.8. Son idénticas a las de un imán natural. Esto implica que los experimentos entre imanes y brújulas dan el mismo resultado si el imán se reemplaza

por un solenoide. Asimismo, si en la interacción entre dos imanes se reemplaza uno de ellos por un solenoide, la interacción persiste; si también el otro imán se reemplaza por un solenoide, la interacción sigue existiendo. Esto significa, como se estudia en el siguiente módulo, que dos corrientes interactúan magnéticamente.

Si la longitud del solenoide es grande en comparación con su radio ($L \gg a$), el campo magnético toma la forma simple

$$B = \mu_0 n I. \quad (22.8)$$

¿Cuánto vale el campo B sobre el eje y en el punto P de la figura 22.9?

Módulo 23

Fuerza entre corrientes eléctricas

Contenidos del módulo

- 23.1 Corrientes paralelas
- 23.2 Corrientes perpendiculares

Objetivos del módulo

1. Demostrar que dos corrientes eléctricas interactúan magnéticamente.
2. Demostrar que dos corrientes paralelas con igual dirección se atraen y con diferente dirección se repelen.
3. Estudiar la fuerza entre alambres perpendiculares con corriente.
4. Estudiar la fuerza entre una corriente rectilínea y una espira de corriente.

Preguntas básicas

1. ¿Que expresión describe la fuerza magnética entre corrientes paralelas?
2. ¿Puede ser nula la fuerza magnética entre dos corrientes?
3. ¿Hay torques entre corrientes paralelas?
4. ¿Hay torques entre corrientes perpendiculares?
5. ¿Cómo son las fuerzas y torques entre una espira y una corriente rectilínea?

Introducción

Un campo magnético ejerce fuerza sobre una corriente; de otra parte, una corriente genera un campo magnético. De acuerdo con Ampère todo magnetismo se debe a corrientes, sean ellas macroscópicas como las de los circuitos o microscópicas como las de los imanes naturales. En este módulo se verá de qué modo una corriente eléctrica interactúa magnéticamente con otra. El estudio se realiza para dos casos simples: corrientes paralelas y corrientes perpendiculares.



Una corriente eléctrica ejerce fuerzas sobre una brújula. Este efecto fue descubierto por Oersted en 1820.

23.1 Corrientes paralelas

Sea un par de corrientes eléctricas paralelas y del mismo sentido, I_1 e I_2 , separadas una distancia r (figura 23.1). El campo magnético debido a I_1 tiene la forma (22.5):

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\phi. \quad (23.1)$$

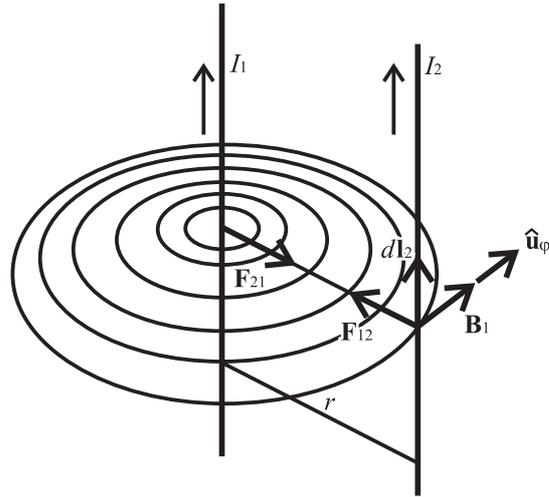


Figura 23.1. Interacción magnética entre corrientes paralelas y del mismo sentido.

La fuerza que el campo de I_1 realiza sobre la corriente I_2 está dada por (20.3), que en este caso toma la forma

$$\mathbf{F}_{12} = I_2 \int d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1. \quad (23.2)$$

Por sustitución de (23.1) en (23.2) se obtiene la regla que expresa la *interacción entre corrientes*:

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} \int d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_\phi.$$

El producto $d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_\phi$ vale $-dl_2 \hat{\mathbf{u}}_r$, de modo que

$$\mathbf{F} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 l_2}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (23.3)$$

La dirección $-\hat{\mathbf{u}}_r$ indica que *dos corrientes paralelas y en el mismo sentido se atraen, y en sentido contrario se repelen*. La fuerza entre corrientes paralelas es directamente proporcional al producto de las corrientes e inversamente proporcional a la distancia entre ellas. No es difícil convencerse de que la fuerza que la primera ejerce sobre la segunda es igual y opuesta a la que la segunda ejerce sobre la primera: $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, lo que implica que, al menos en el caso estacionario, la interacción magnética entre corrientes satisface la tercera ley de Newton.

La fuerza por unidad de longitud entre dos corrientes, cada una de 1 A y separadas 1 m, es de

$$\frac{F}{l_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 (1\text{A})(1\text{A})}{2\pi (1\text{m})} = 2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}.$$

Esta expresión permite establecer la definición experimental del amperio: es la corriente que al pasar por dos alambres paralelos separados 1 m produce sobre cada uno de ellos una fuerza por unidad de longitud de $2 \times 10^{-7} \text{ Nm}^{-1}$.

Experimentalmente es más fácil medir la fuerza entre corrientes (lo que se hace con la llamada balanza de corrientes) que medir la fuerza entre cargas eléctricas. Por ello en la preparación de un patrón de medida se prefiere establecer primero el patrón de corriente y a partir de él el de carga. De este modo, el coulomb se define como la cantidad de carga eléctrica que pasa en 1 s por un alambre que porta 1 A. Desde el punto de vista conceptual es más fundamental la carga que la corriente, pero por razones prácticas se define primero el patrón de corriente. Esto quiere decir que desde el punto de vista práctico los sistemas MKSC y MKSA son equivalentes, aunque el más elemental es el primero.

23.2 Corrientes perpendiculares

En la figura 23.2 aparece una corriente I_1 que sale del plano del papel y que genera a su alrededor un campo magnético

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\phi.$$

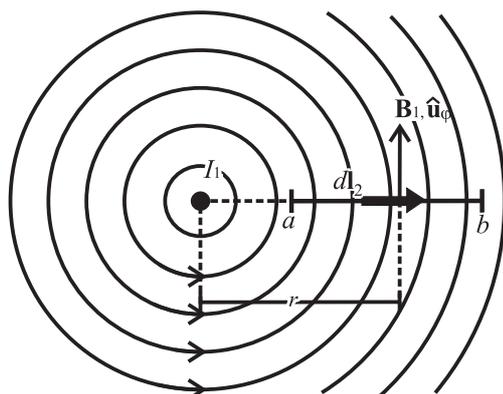


Figura 23.2. Interacción entre corrientes perpendiculares.

Perpendicular a I_1 hay una segunda corriente I_2 , ubicada en el plano del papel, uno de cuyos diferenciales $d\mathbf{l}_2$ experimenta una fuerza

$$\begin{aligned} d\mathbf{F}_{12} &= I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} d\mathbf{l}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_\phi \\ &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{dr}{r} \hat{\mathbf{u}}_z, \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $d\mathbf{l}_2 = \hat{\mathbf{u}}_r dr$ y $\hat{\mathbf{u}}_z$ sale del plano del papel. Así, la fuerza experimentada por I_2 cuyos extremos son a y b es

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right). \quad (23.4)$$

Las ecuaciones (23.3) y (23.4) permiten estudiar las fuerzas que experimenta la espira de la figura 23.3, con corriente I_2 y colocada en el campo de una corriente

rectilínea I_1 . Las líneas de campo de I_1 entran por la derecha (\times) y salen por la izquierda (\cdot). Las fuerzas sobre los lados ab y cd de la espira son iguales y de dirección contraria. Sus módulos son

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Las fuerzas sobre los lados bc y da son respectivamente:

$$F' = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi b} \quad \text{y} \quad F'' = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a},$$

y las direcciones son como se muestra en la figura 23.3.

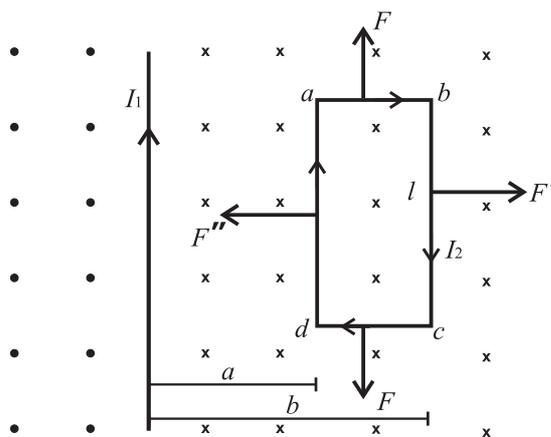


Figura 23.3. Fuerzas sobre una espira colocada en el campo magnético de una corriente rectilínea.

Módulo 24

Circulación y flujo del campo magnético

Contenidos del módulo

- 24.1 Ley de Ampère
- 24.2 Flujo del campo magnético

Objetivos del módulo

1. Definir la circulación del campo magnético.
2. Deducir la ley de Ampère.
3. Introducir en el magnetismo la noción de flujo.
4. Mediante el estudio de líneas conocidas de campo magnético concluir que su flujo es cero.
5. Establecer la inexistencia de cargas magnéticas.
6. Establecer que un polo magnético no es una fuente de líneas sino un lugar de tránsito de ellas.

Preguntas básicas

1. ¿Cómo se define la circulación de un campo vectorial?
2. ¿Qué expresa la ley de Ampère?
3. ¿En qué casos es útil la ley de Ampère para calcular campos?
4. ¿Es en algún caso no nulo el flujo de un campo magnético?
5. ¿Qué es una carga magnética?
6. ¿Son idénticos una carga magnética y un polo magnético?

Introducción

En el caso electrostático el campo \mathbf{E} puede ser evaluado utilizando (9.4), en tanto que en el caso magnetostático el campo \mathbf{B} se calcula con (22.1). En la electrostática es conveniente introducir la integral de flujo que permite evaluar los campos en los casos de alta simetría. De un modo análogo, el campo \mathbf{B} debido a distribuciones de corriente de alta simetría puede ser calculado utilizando una integral de circulación del campo magnético. El cálculo revela que la circulación de \mathbf{B} es proporcional a la corriente.

De otro lado, como en el caso electrostático, conviene introducir la integral de flujo magnético, la que siempre tiene un valor nulo. Esto significa que el campo magnético no tiene fuentes, es decir, puntos donde comienzan o terminan las líneas del campo magnético.

En este módulo se exploran la circulación y el flujo del campo magnetostático.



El gaussímetro permite medir el flujo magnético que atraviesa una espira.

24.1 Ley de Ampère

El campo magnético de una corriente rectilínea tiene la forma (22.5):

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{u}}_\phi \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

Las líneas de campo tienen la forma mostrada en la figura 22.5. A partir de esta expresión puede calcularse la *circulación* del campo magnético. En forma general, la circulación de un campo vectorial \mathbf{B} se define como la integral del producto escalar del campo con el elemento diferencial de distancia $d\mathbf{l}$, realizada a lo largo de una trayectoria cerrada:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}. \quad (24.1)$$

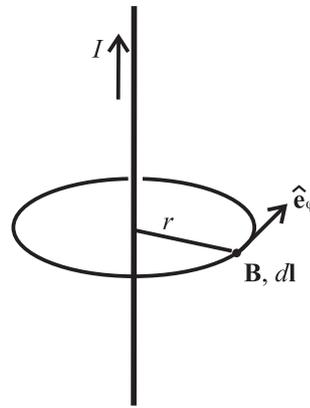


Figura 24.1. Geometría para el cálculo del campo de una corriente rectilínea.

Si se escoge la trayectoria circular indicada en la figura 24.1, donde \mathbf{B} y $d\mathbf{l}$ son paralelos, resulta que el producto escalar en (24.1) se reduce a Bdl , con $dl = r d\phi$, por lo cual puede escribirse

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_C B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_C \frac{dl}{r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_{2\pi} \frac{r d\phi}{r} = \mu_0 I.$$

Este resultado es más general de lo que aquí aparece pues es *válido para cualquier forma de la trayectoria*. Esto puede comprenderse con facilidad si se considera la curva de la figura 24.2, en la que cada elemento diferencial de la trayectoria se ha aproximado a un arco de círculo. La circulación es una integral compuesta de elementos $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ cada uno de los cuales tiene un valor

$$B dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (r d\phi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} (d\phi).$$

Se observa que al cancelarse r , el diferencial Bdl es independiente del radio del círculo. Por tanto, al integrar sobre el ángulo completo 2π se obtiene $\mu_0 I$ como valor de la circulación, independientemente de la forma de la trayectoria. De este modo puede afirmarse que *la circulación del campo magnético es proporcional a la corriente eléctrica que atraviesa la curva cerrada c*:

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (24.2)$$

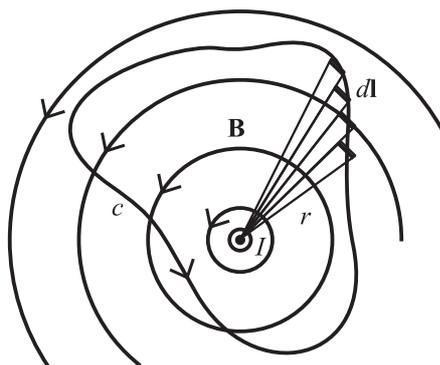


Figura 24.2. La circulación de un campo magnético es independiente de la forma de la trayectoria.

Esta expresión, conocida como ley de Ampère, es válida en el caso estacionario. Si existen n corrientes que atraviesan la misma curva cerrada, ha de reemplazarse I por $\sum_{i=1}^n I_i$ (figura 24.3). La ley de Ampère está asociada a una regla de mano derecha: si los dedos van en dirección de la trayectoria c , el pulgar extendido apuntará en dirección del flujo de corriente positiva. A la trayectoria de integración se le conoce como *amperiana*.

Aunque de validez general en magnetostática, la ley de Ampère es aplicable al cálculo de campos magnéticos solo en situaciones de alta simetría. En el caso general, con o sin simetrías, (22.1) es aplicable.

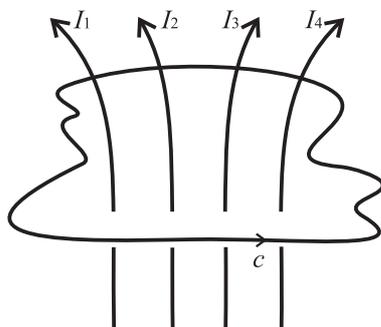


Figura 24.3. La integral de circulación es proporcional a las corrientes que atraviesan la curva cerrada c .

Los siguientes cálculos se restringen a situaciones con alta simetría.

Ejemplo 24.1

A lo largo de un cilindro muy largo de radio R (figura 24.4) fluye una corriente I distribuida de modo uniforme. Calcule el campo magnético en el interior y el exterior del cable.

Solución:

- a. Para $r < R$ hay una corriente I' encerrada en la amperiana circular; puesto que la corriente está distribuida de modo uniforme en el área, es cierto que

$$\frac{I'}{I} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2},$$

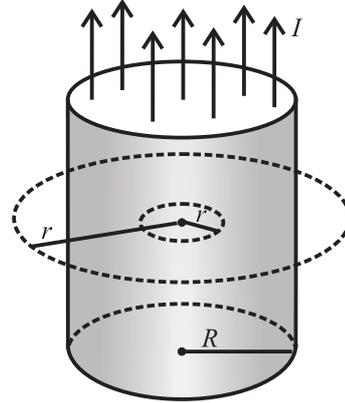


Figura 24.4. Cilindro con corriente uniforme a lo largo de su eje, y dos amperianas, interior y exterior.

de donde

$$I' = I \frac{r^2}{R^2}.$$

La ley de Ampère se escribe

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B(2\pi r) = \mu_0 I'.$$

Al reemplazar I' se obtiene

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2},$$

de modo que el campo \mathbf{B} aumenta linealmente desde el eje hasta la superficie.

- b. Para $r > R$ la corriente incluida en la amperiana es I , de modo que, al igual que en el caso de la corriente rectilínea:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

La variación del campo con la distancia se representa en la figura 24.5. Obsérvese que en $r = R$ los campos interior y exterior son iguales.

Si la corriente solo viaja por la superficie del cilindro puede demostrarse que

$$\begin{aligned} \text{a) } B &= 0 & \text{si } r < R, \\ \text{b) } B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{si } r > R. \end{aligned}$$

Ejemplo 24.2

Campo magnético de una placa plana con corriente uniforme λ por unidad de área (figura 24.6a).

Solución:

Se define la densidad λ de corriente superficial como corriente por unidad de longitud transversa a la corriente. De $\lambda = dI/dy$ se deduce que la amperiana punteada

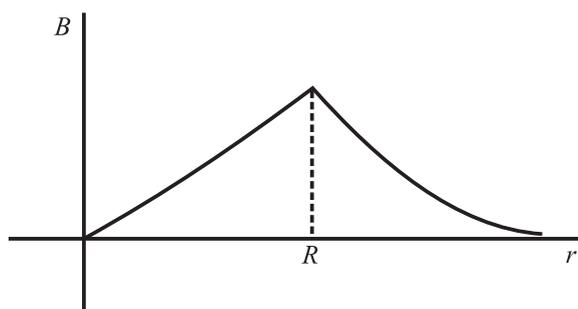


Figura 24.5. Variación con la distancia radial del campo magnético de un cilindro con corriente.

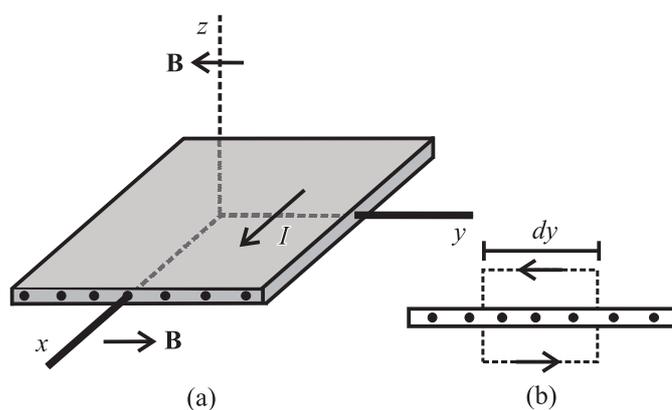


Figura 24.6. Una placa plana con corriente puede considerarse formada por muchos filamentos de corriente, que dan campo \mathbf{B} en direcciones $\pm y$.

de la figura 24.6b contiene una corriente $dI = \lambda dy$, de modo que la ley de Ampère se expresa

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0(\lambda dy).$$

Si se concibe la placa plana como formada de muchos filamentos de corriente que fluyen en dirección x cada uno de cuyos campos es circular, puede comprenderse que el campo neto ha de tener dirección $-y$ por encima y y por debajo de la placa, no existiendo por tanto componente vertical. Así, la integral de circulación es

$$\oint_c B dl = 2By = \mu_0 \lambda y,$$

lo que da lugar al campo uniforme

$$B = \frac{\mu_0 \lambda}{2}.$$

Ejemplo 24.3

Campo magnético de un solenoide de n espiras por unidad de longitud y corriente I (figura 24.7)

Solución:

El campo magnético del solenoide puede describirse como la suma de los campos de muchas espiras paralelas estrechamente empacadas. La geometría de las líneas

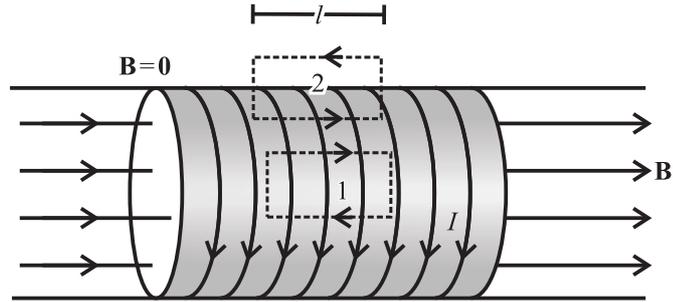


Figura 24.7. Un solenoide largo con corriente produce un campo magnético interno a lo largo de su eje, y nulo en el exterior.

de campo de cada una muestra que, debido a la curvatura de las líneas en el exterior del solenoide, los campos allí tienden a anularse; el anulamiento es perfecto si el solenoide es infinito. En el interior las líneas de campo se superponen para producir un campo magnético axial uniforme. Esto puede verse si se considera la amperiana 1: note que las líneas de campo van hacia la derecha, pero el recorrido de la amperiana en los trayectos superior e inferior es opuesto.

La ley de Ampère aplicada a la amperiana 2 da lugar a

$$Bl = \mu_0 nIl,$$

de donde se concluye que, en efecto, el campo magnético en el interior de un solenoide muy largo es constante e igual a

$$B = \mu_0 nI,$$

en concordancia con (22.8).

Ejemplo 24.4

Calcule el campo magnético en el interior de un solenoide de 50 cm de longitud que contiene 500 vueltas y tiene un radio de 0,5 cm, si por él fluye una corriente de 0,2 A.

Solución:

Ha de notarse ante todo que la longitud del solenoide es mucho mayor que su radio, de modo que la expresión $B = \mu_0 nI$ es válida. Reemplazando se obtiene: $B = 2,5 \times 10^{-5}$ T.

24.2 Flujo del campo magnético

En el módulo 12 se ha definido el flujo de un campo vectorial mediante la ecuación (12.2). El flujo del campo magnético a través de una superficie abierta A tiene la forma:

$$\Phi_m = \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (24.3)$$

El flujo magnético tiene unidades de Tm^2 a las que se conoce como *weber* (Wb); puede demostrarse que en unidades elementales: $\text{Wb} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$.

Las líneas de campo magnético de una carga en movimiento son cerradas (figura 22.3), igualmente lo son las de una corriente rectilínea (figura 22.5), de una espira (figura 22.7) o de un solenoide finito (figura 22.8). Es esta una característica común de *todos* los campos magnéticos, sean o no estacionarios, incluyendo el

campo magnético de los imanes. Este último caso puede ser entendido una vez se estudien las corrientes microscópicas que son la fuente del magnetismo de los imanes naturales.

Es posible demostrar, partiendo de (22.1), que *el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero*. Esta aseveración no será demostrada aquí, dada su dificultad matemática, pero de ella pueden extraerse algunas conclusiones simples:

- Si las líneas de campo magnético son cerradas significa que no tienen puntas. En el caso del campo eléctrico las cargas eléctricas son los lugares a donde confluyen o de donde salen las líneas de campo eléctrico; es decir, las líneas de campo eléctrico tienen puntas. La consecuencia de la inexistencia de puntas en los campos magnéticos es que *no hay cargas magnéticas*.
- Los polos magnéticos no son las fuentes de las líneas del campo magnético, pues solo son lugares por donde ellas pasan, no donde comienzan o terminan. Las cargas eléctricas son *fuentes* (o sumideros) de líneas de campo eléctrico, en tanto que los polos magnéticos son *zonas de tránsito* de líneas.
- El número de líneas de campo magnético que entra a una superficie cerrada es igual al número de líneas que sale.

Estas proposiciones se ilustran en la figura 24.8.

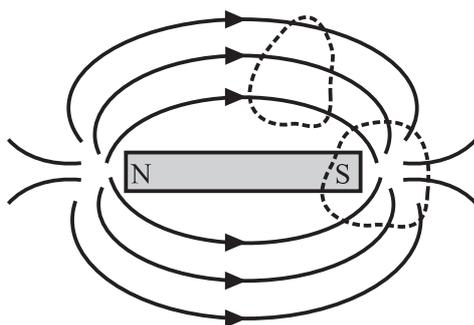


Figura 24.8. El flujo de líneas del campo magnético siempre es nulo.

Ejemplo 24.5

Calcule el flujo magnético a través de la espira rectangular de la figura 24.9, si el campo es el debido a una corriente rectilínea I .

Solución:

De la definición de flujo, de la forma del campo de una corriente I , e integrando sobre el área de la espira puede escribirse la siguiente secuencia:

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\mathbf{u}}_\phi \right) \cdot (\hat{\mathbf{u}}_\phi c dr) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} c \int_a^b \frac{dr}{r} \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} c \ln \left(\frac{b}{a} \right),\end{aligned}$$

$\hat{\mathbf{u}}_\phi$ entra al plano del papel.

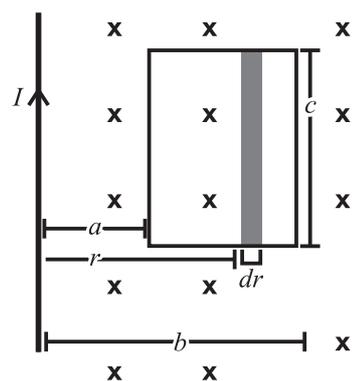


Figura 24.9. Geometría para el cálculo del flujo magnético sobre una espira colocada en el campo de una corriente rectilínea.

Ejemplo 24.6

Calcule el flujo magnético a través de un área perpendicular al eje del solenoide de radio R del ejemplo 24.3.

Solución:

De la definición de flujo, tomando en cuenta que los vectores \mathbf{B} y \mathbf{A} son paralelos, y reemplazando el valor del campo magnético constante en el interior del solenoide, se puede demostrar que $\Phi_m = BA = \mu_0 \pi n I R^2$.

Módulo 25

Magnetización en la materia

Contenidos del módulo

- 25.1 Materiales magnéticos
 - 25.1.1 Diamagnetismo
 - 25.1.2 Paramagnetismo
 - 25.1.3 Ferromagnetismo
- 25.2 Vector de magnetización
 - 25.2.1 Intensidad magnética y ley de Ampère
 - 25.2.2 Susceptibilidad y permeabilidad

Objetivos del módulo

1. Clasificar los materiales magnéticos.
2. Definir diamagnetismo, paramagnetismo y ferromagnetismo.
3. Definir el vector de magnetización, la corriente de magnetización y la intensidad de campo magnético.
4. Definir susceptibilidad y permeabilidad.
5. Establecer la ley de Ampère en materiales magnetizables.

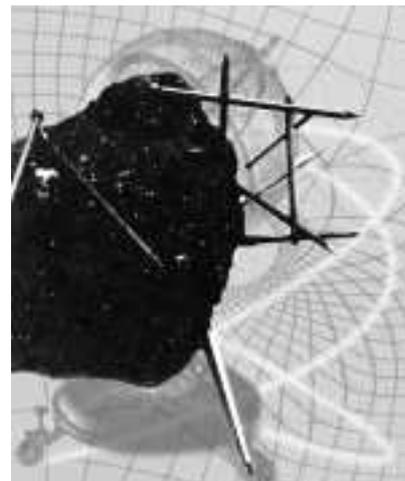
Preguntas básicas

1. ¿Cuál es la diferencia entre materiales diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos?
2. ¿Cómo se definen la magnetización, la corriente de magnetización y la intensidad de campo magnético?
3. ¿Cuál es la conexión entre susceptibilidad y permeabilidad?
4. ¿Cuál es la forma de la ley de Ampère en materiales magnéticos?

Introducción

Los átomos son sistemas formados por núcleos constituidos por protones y neutrones; alrededor de los núcleos orbitan electrones cuyo movimiento equivale a la existencia de corrientes microscópicas que pueden considerarse como minúsculos dipolos magnéticos. En estado natural es muy probable que estos dipolos tengan orientaciones aleatorias lo que macroscópicamente da un momento de dipolo nulo. Estos son los materiales que no presentan imantación natural. En presencia de campos magnéticos externos los momentos de dipolo pueden reorientarse de modo tal que presenten efectos notables a nivel macroscópico; tales son los materiales diamagnéticos y paramagnéticos. En otra categoría se ubican los materiales que presentan imantación natural, conocidos como ferromagnetos.

Este módulo se dedica a establecer las características básicas de estos materiales y a exponer las leyes del magnetismo en presencia de materiales magnéticos, en particular la forma que adopta la ley de Ampère.



Un pedazo de magnetita imanta clavos y los atrae.

25.1 Materiales magnéticos

Las diferentes sustancias pueden ser clasificadas magnéticamente en varios grupos dependiendo de su estructura interna y su respuesta a los campos magnéticos externos. La clasificación más simple es como sigue:

- Diamagnéticos.
- Paramagnéticos.
- Ferromagnéticos.

Un estudio introductorio de las propiedades de estos materiales se presenta en lo que sigue.

25.1.1 Diamagnetismo

Considérese un electrón girando alrededor de un núcleo. En estado natural los momentos de dipolo equivalentes a estas corrientes están orientados de manera aleatoria por lo que el momento de dipolo magnético neto del material es cero. En este caso, el momento de dipolo de cada átomo es diferente de cero y el material es paramagnético.

Es sin embargo posible que en átomos con varios electrones el momento de dipolo magnético de cada átomo sea nulo. Este es el caso de los materiales diamagnéticos. Si se aplica a un material de este tipo un campo magnético la fuerza magnética que experimentan los electrones provoca una perturbación en su movimiento, equivalente a la presencia de una corriente adicional, es decir, a la aparición de un momento de dipolo magnético *inducido* que se orienta en dirección *opuesta* al campo magnético externo. Este efecto es independiente de la orientación del átomo en el campo, es el mismo para todos ellos y equivale a que el material se ha convertido en un imán muy débil que se opone al campo externo. Resulta así que un material diamagnético es débilmente *repelido* por un campo magnético. Este comportamiento es común para todas las sustancias aunque el efecto está en muchos casos enmascarado por el paramagnetismo.

25.1.2 Paramagnetismo

Este fenómeno se presenta en los materiales en los que hay electrones desapareados cuyo momento de dipolo magnético no es cancelable con el de otro electrón. Ocurre por ejemplo en el aluminio, el oxígeno y el hierro. En estos materiales hay un momento de dipolo magnético *permanente*. Aunque en estado natural su orientación es aleatoria y sus efectos se cancelan, si se someten a un campo magnético externo los torques generados por este tienden a alinearlos a lo largo del campo externo. A este efecto de orientación se opone el desorden térmico debido a las vibraciones de los átomos que impiden su completo alineamiento en dirección del campo. El torque logra que la energía potencial de los dipolos sea menor si estos se alinean en la misma dirección del campo externo. Esto significa que *en un campo magnético externo una sustancia paramagnética adquiere una magnetización en la dirección del campo*. La consecuencia es que el material desarrolla un comportamiento magnético que lo convierte en un imán inducido que es *atraído* por el campo externo.

Debido a que los dipolos permanentes son unas mil veces mayores que los inducidos, en la mayoría de las sustancias los efectos diamagnéticos son poco notorios.

25.1.3 Ferromagnetismo

El diamagnetismo y el paramagnetismo solo son observables en materiales colocados en campos magnéticos externos; en ausencia de campos externos su imantación desaparece, a diferencia de los ferromagnetos, que pueden exhibir imantación natural. En efecto, en algunos materiales como Fe, Co, Ni, Gd la magnetización permanece aun después de retirar el material del campo magnetizante. En estos materiales los momentos de dipolo permanentes tienden a alinearse de forma espontánea, lo que genera los imanes naturales. Las interacciones entre los dipolos magnéticos intrínsecos de los electrones (llamados *espines*) da como resultado una orientación paralela de los espines en regiones muy pequeñas conocidas como *dominios*, cuyas dimensiones son del orden de 10^{-8} a 10^{-12} m³ y contienen entre 10^{21} y 10^{17} átomos.

En estos materiales los dominios se orientan en diferentes direcciones lo que puede producir una magnetización neta nula (figura 25.1a). La muestra está entonces demagnetizada. Pero si se aplica un campo externo los dominios tienden a reorientarse en la dirección del campo (figura 25.1b), y su tamaño puede también variar, generando así los imanes. La magnetización lograda aumenta con la intensidad del campo externo, existiendo una imantación máxima que se logra cuando todos los dominios se orienten en dirección del campo.

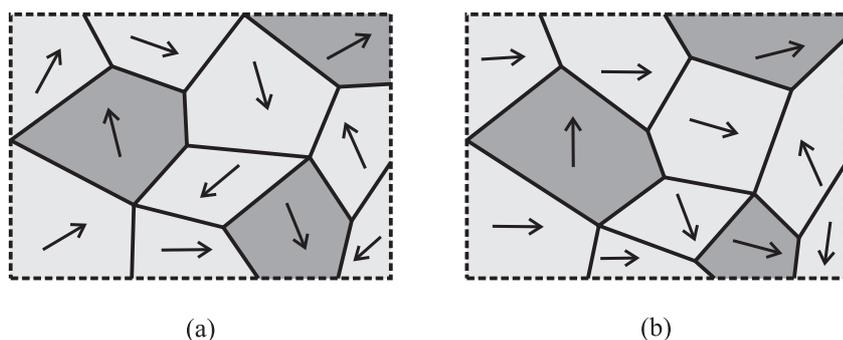


Figura 25.1. Dominios magnéticos (a), cuya orientación (b) cambia al aumentar el campo magnetizante.

Usualmente el efecto de reorientación es duradero, es decir, permanece una vez se elimina el campo externo, creándose entonces un imán permanente. La duración de la imantación depende crucialmente de factores como la temperatura y la estructura atómica del material. Para cada sustancia ferromagnética existe una *temperatura de Curie* por encima de la cual desaparecen los dominios y la sustancia se vuelve paramagnética.

25.2 Vector de magnetización

Basado en los experimentos comenzados en 1820, Ampère propuso la idea de que todo magnetismo es debido a corrientes eléctricas. El magnetismo de los imanes naturales sería causado por corrientes microscópicas. En efecto, la teoría moderna sobre la materia asegura que hay corrientes electrónicas correspondientes a dipolos magnéticos microscópicos, con los cuales se puede describir un imán natural o una barra magnetizada.

Así, la barra imantada de la figura 25.2 puede describirse como constituida por pequeñas espiras cuyo eje es paralelo al eje del imán. Las corrientes tienden a cancelarse entre sí en el interior del material, pues las que son adyacentes tienen

direcciones contrarias, pero se suman sobre la superficie lateral de la barra, dando lugar a una corriente de magnetización I_m bastante similar a la de un solenoide.

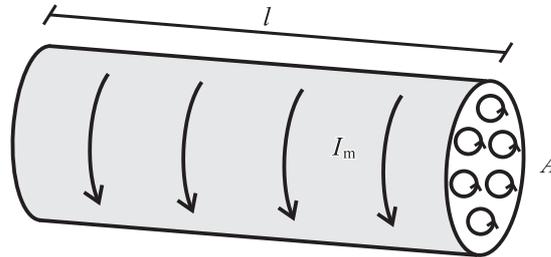


Figura 25.2. Descripción con microcorrientes del magnetismo de un imán.

Cualquiera sea el origen de los dipolos magnéticos, es decir, sean ellos inducidos como en los materiales diamagnéticos o permanentes como en los paramagnéticos y ferromagnéticos, es posible definir un vector que corresponda al momento de dipolo magnético por unidad de volumen:

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{m}}{dV}. \quad (25.1)$$

Esta cantidad, conocida como *vector de magnetización*, tiene unidades de $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$, esto es, corriente/longitud.

La conexión entre el módulo de este vector y la corriente de magnetización se establece así: en el cilindro de la figura 25.2, de área transversal A y longitud l , el momento magnético total es $m = M(Al) = (Ml)A$, y como $m = I_m A$, se concluye que $I_m = Ml$, lo que asegura que M es la corriente de magnetización por unidad de longitud. Esta no es una corriente de conducción sino una corriente “ligada”, en el mismo sentido que las cargas de polarización no son cargas libres sino cargas “ligadas”.

25.2.1 Intensidad magnética y ley de Ampère

La figura 25.3 representa un cilindro magnetizable colocado en el interior de un solenoide con corriente nI por unidad de longitud, es decir, una corriente nIR . El campo magnético del solenoide reorienta los dipolos de la barra metálica convirtiéndola en un imán y desarrollando sobre su superficie una corriente de magnetización $I_m = Ml$. Así pues, el sistema barra-solenoide es equivalente a un único

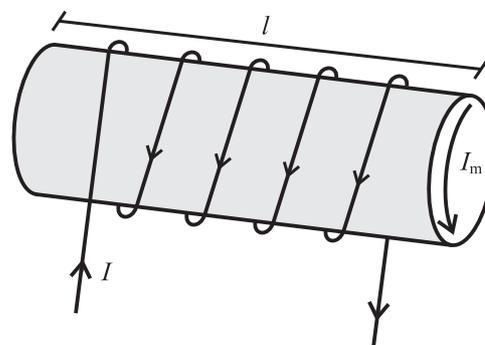


Figura 25.3. Cilindro magnetizable en el interior de un solenoide con corriente I .

solenoides con una corriente $I + I_m = (nI + M)l$ que viaja por su superficie en dirección perpendicular al eje del sistema. Esta corriente neta es responsable del campo magnético, de modo que, en vez de $B = \mu_0 nI$ como es el caso del solenoide hueco, debe escribirse

$$B = \mu_0(nI + M) \quad \text{o} \quad nI = \frac{B}{\mu_0} - M.$$

Con base en lo anterior puede definirse el vector \mathbf{H} , conocido como *intensidad del campo magnético*, en la forma

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}. \quad (25.2)$$

Las unidades de H y M son las mismas. En el caso particular del solenoide es cierto que $H = nI$, es decir: $Hl = nIl$, donde $nIl = I_l$ es la corriente *en el solenoide* a la que se llama corriente *libre*. La última igualdad ($Hl = nIl = I_l$) puede escribirse en la forma de una integral de circulación:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_l. \quad (25.3)$$

Esta ecuación, obtenida con argumentos sobre solenoides, tiene validez general, como también la definición (25.2), y será llamada ley de Ampère en medios magnéticos. Se resume así: *la circulación del campo \mathbf{H} es igual a la corriente libre total que atraviesa la trayectoria c .*

25.2.2 Susceptibilidad y permeabilidad

La magnetización que un material experimenta al ser colocado en un campo externo es tanto mayor cuanto mayor sea el campo y depende de características específicas como la estructura atómica del material y su temperatura. Para materiales lineales, isotrópicos y homogéneos (esto es, materiales para los cuales la magnetización depende de la primera potencia de H , cuyas propiedades no dependen de la dirección y son las mismas en todos sus puntos) es cierto que

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}. \quad (25.4)$$

La constante χ_m se llama *susceptibilidad magnética* del material y es una cantidad adimensional. Al reemplazar \mathbf{M} en (25.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(\mathbf{H} + \chi_m \mathbf{H}) \\ &= \mu \mathbf{H}. \end{aligned}$$

El coeficiente

$$\mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (25.5)$$

se conoce como *permeabilidad* del medio material y tiene las mismas dimensiones de la permeabilidad del vacío μ_0 .

En el caso de medios lineales, isotrópicos y homogéneos la ley de Ampère (25.3) da lugar con (25.5) a la forma que adopta (24.2) en medios magnetizables

$$\oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu I_l. \quad (25.6)$$

En esta expresión debe tenerse cuidado en incluir en I_l solo las corrientes libres, pues las de magnetización han sido tomadas en cuenta en la definición de μ .

La siguiente tabla muestra la susceptibilidad magnética de algunas sustancias. Las seis de la izquierda son diamagnéticas ($\chi_m < 0$), y las seis de la derecha son paramagnéticas ($\chi_m > 0$).

Hidrógeno	$-2,1 \times 10^{-9}$	Oxígeno	$2,1 \times 10^{-6}$
Nitrógeno	$-5,0 \times 10^{-9}$	Magnesio	$1,2 \times 10^{-5}$
Sodio	$-2,4 \times 10^{-6}$	Aluminio	$2,3 \times 10^{-5}$
Cobre	$-1,0 \times 10^{-5}$	Tungsteno	$6,8 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1,7 \times 10^{-5}$	Titanio	$7,1 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2,2 \times 10^{-5}$	Platino	$3,0 \times 10^{-4}$

Ejemplo 25.1

A lo largo de un cilindro muy largo de radio R y permeabilidad μ fluye una corriente uniforme I . Calcule el campo magnético en el interior y el exterior del cilindro.

Solución:

Puesto que la corriente está distribuida de manera uniforme sobre el área transversa es cierto que

$$\frac{I}{\pi R^2} = \frac{I'}{\pi r^2},$$

donde I' es la corriente libre encerrada en la curva amperiana de radio r . Por la simetría y la regla de la mano derecha el campo \mathbf{B} tiene la dirección mostrada en la figura 25.4, coincidente con la dirección de la amperiana, por lo cual el producto escalar en (25.6) es Bdl de modo que

$$\oint B dl = B(2\pi r) = \mu I' = \mu I \frac{r^2}{R^2},$$

de donde en $r < R$:

$$B = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}.$$

En el exterior, la amperiana de radio r contiene toda la corriente I de modo que, en $r > R$, la ecuación (25.6) conduce a

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}.$$

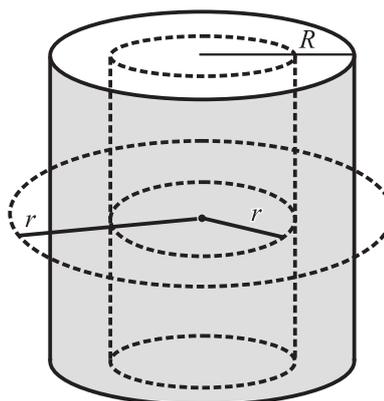


Figura 25.4. Amperianas en un medio magnetizable con corriente axial I distribuida uniformemente.

Capítulo 7

Campos electromagnéticos dependientes del tiempo



Michael Faraday, iniciador con Joseph Henry de la electrodinámica.

Presentación

El estudio realizado hasta ahora sobre los campos eléctricos y magnéticos ha sido restringido a situaciones independientes del tiempo, esto es, a cargas estáticas y

Contenido breve

Módulo 26

Ley de inducción de Faraday-Henry

Módulo 27

Fuerza electromotriz de movimiento

Módulo 28

Ley de Ampère-Maxwell

Módulo 29

Inductancia y energía del campo magnético

Módulo 30

Circuitos acoplados

a corrientes estacionarias. Es posible, sin embargo, generar campos magnéticos variables; para ello basta poner en movimiento un imán o un solenoide o hacer circular por un solenoide una corriente que varía con el tiempo.

Los experimentos realizados en 1830 y 1831 por Michael Faraday y Joseph Henry llegaron a la conclusión de que un campo magnético variable con el tiempo es capaz de inducir corrientes sobre un circuito cercano. Este fenómeno, conocido como *efecto Faraday*, es el fundamento del funcionamiento de los generadores de corriente, del transformador eléctrico, los alternadores de automóvil y el teléfono, entre muchos otros logros tecnológicos.

De acuerdo con Maxwell, el efecto de inducción implica la generación de un campo eléctrico a partir de un campo magnético variable con el tiempo. La pregunta que luego surge en su mente es la siguiente: ¿No será posible, recíprocamente, generar un campo magnético a partir de un campo eléctrico variable con el tiempo? La respuesta afirmativa a esta pregunta obliga a reformular la ley de Ampère para incluir campos magnéticos debidos a corrientes y a campos eléctricos variables con el tiempo. De acá partió la teoría de las ondas electromagnéticas que no solo dio una base física a la óptica sino que abrió el camino a la tecnología de telecomunicaciones que es esencial en nuestra época. De acuerdo con la teoría propuesta por Maxwell, en la que cuatro ecuaciones son suficientes para entender la dinámica del campo electromagnético, existen ondas de campo eléctrico y magnético que viajan en el vacío o en los medios transparentes a la velocidad de la luz.

Módulo 26

Ley de inducción de Faraday-Henry

Contenidos del módulo

- 26.1 El efecto de inducción
 - 26.1.1 Ley de Lenz
- 26.2 Campo eléctrico inducido
 - 26.2.1 El betatrón
 - 26.2.2 Corrientes de Foucault

Objetivos del módulo

1. Estudiar el efecto de inducción.
2. Introducir la fem inducida.
3. Introducir el campo eléctrico inducido.
4. Presentar la ley de inducción de Faraday-Henry.
5. Introducir la ley de Lenz.
6. Establecer las relaciones entre cambio del campo magnético y la dirección de la fem.
7. Mostrar que el campo eléctrico inducido es de líneas cerradas y por tanto no conservativo.
8. Estudiar el betatrón.
9. Estudiar las corrientes de Foucault.

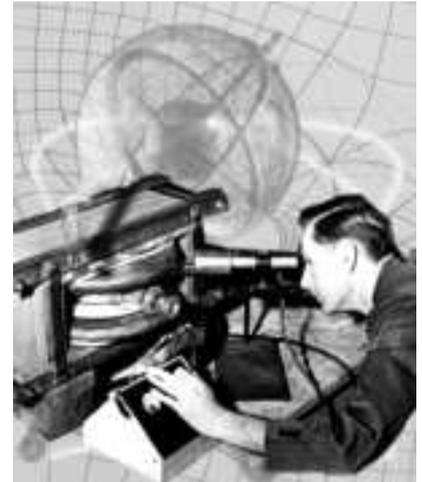
Preguntas básicas

1. ¿En qué consiste el efecto de inducción?
2. ¿Cómo cambia la inducción al reemplazar imanes por solenoides?
3. ¿Cuál es la forma de la ley de inducción de Faraday-Henry?
4. ¿Qué es una fem inducida?
5. ¿Qué conexión existe entre ley de Lenz y conservación de energía?
6. ¿Es conservativo el campo eléctrico inducido?
7. ¿Cómo son las líneas del campo eléctrico inducido?
8. ¿Cómo funciona un betatrón?
9. ¿Qué son corrientes de Foucault?

Introducción

Asociado a una carga eléctrica hay siempre un campo eléctrico, en tanto que a una carga en movimiento se asocia siempre un campo magnético. Si las corrientes (que son electricidad en movimiento) generan magnetismo, ¿no podrá recíprocamente el magnetismo generar corrientes?

Con esta idea de simetría en mente Faraday intentó comprobar la aparición de corriente en una espira de alambre colocada cerca de un solenoide con corriente. Después de repetidos ensayos y con el uso de galvanómetros más sensibles descubrió que solo cuando la corriente en un solenoide aumenta o disminuye aparece una corriente sobre la espira. Los experimentos le revelaron que el mismo efecto ocurre si el solenoide se reemplaza por un imán en movimiento.



Investigador frente a un pequeño betatrón.



Michael Faraday (1791-1867)

Físico y químico británico de origen humilde. Desde 1821 se dedicó al estudio de la electricidad. Desarrolló el primer motor eléctrico y descubrió la ley de inducción. Introdujo el concepto de líneas de fuerza. Inventó la jaula de Faraday utilizada para aislar un recinto de campos eléctricos. Descubrió la desviación del plano de polarización de la luz al atravesar un medio transparente colocado en un campo magnético. Su trabajo hizo posible la tecnología eléctrica, la electroquímica y la teoría electromagnética. Fue miembro de la Royal Society de Londres.



Vea la demostración *Inducción electromagnética* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

26.1 El efecto de inducción

La figura 26.1 muestra un solenoide por el cual circula una corriente constante provista por una batería. Cuando el solenoide se mueve hacia la espira de alambre localizada a su derecha aparece sobre esta una corriente *inducida* I en la dirección indicada. Si el solenoide se mueve hacia la izquierda la dirección de la corriente inducida se invierte. Lo primero que puede advertirse es que, cuando el solenoide se acerca, el flujo magnético que atraviesa la espira aumenta, y cuando el solenoide se aleja el flujo disminuye.

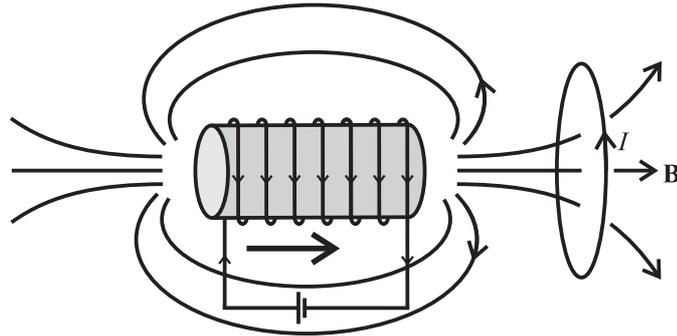


Figura 26.1. Un solenoide con corriente constante se mueve hacia una espira conductora.

El experimento puede repetirse con un solenoide en reposo (figura 26.2). En el momento en que el interruptor A se cierra se establece progresivamente una corriente en el solenoide y se nota que mientras la corriente crece hasta su valor máximo $I_0 = \mathcal{E}/R$, donde \mathcal{E} es la fuerza electromotriz de la batería, se induce una corriente sobre la espira con la dirección indicada. Si el circuito se abre, mientras la corriente en el solenoide se reduce hasta cero, la corriente inducida tiene la dirección contraria. Si el circuito se cierra, el flujo sobre la espira aumenta, y si se abre disminuye.

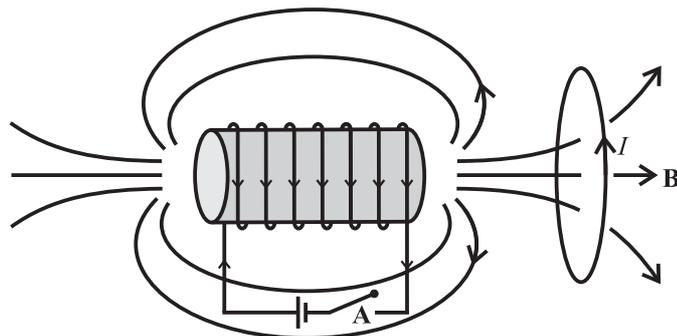


Figura 26.2. La corriente sobre el solenoide fijo cambia al cerrar o abrir el interruptor.

El solenoide puede reemplazarse por un imán; si este se mueve hacia la derecha se induce una corriente como se indica en la figura 26.3, y si se mueve hacia la izquierda la corriente inducida se invierte. Los resultados mostrados en las figuras 26.1, 26.2 y 26.3 son los mismos, y en todos ellos el cambio de flujo magnético sobre la espira se realiza de la misma manera.

Otras variantes son las siguientes: un solenoide con corriente constante mantenido en reposo mientras la espira se mueve hacia él; un solenoide con corriente

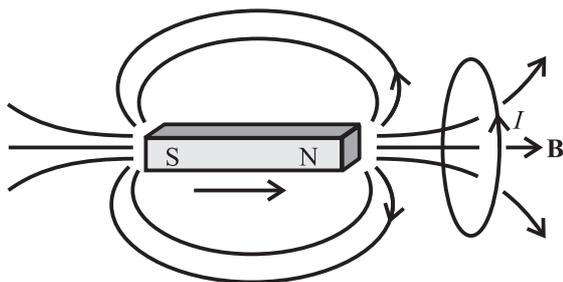


Figura 26.3. Imán en movimiento hacia una espira conductora.

variable (provista por un mecanismo de corriente alterna) y una espira, ambos fijos; un solenoide con corriente constante, mantenido en reposo, mientras la espira gira frente a él. En todos estos casos el resultado es la aparición de una corriente en la espira, asociado al cambio de flujo sobre la espira. Los experimentos permiten concluir que la intensidad de la corriente inducida depende de la rapidez con que cambia el flujo del campo magnético.

En síntesis puede concluirse que *la variación del flujo magnético sobre una espira está asociado a la aparición sobre ella de una corriente*. Este es el contenido de la ley de inducción de Faraday-Henry. Este efecto fue descubierto por Henry un año antes de Faraday, aunque la prioridad en la publicación corresponde a Faraday.

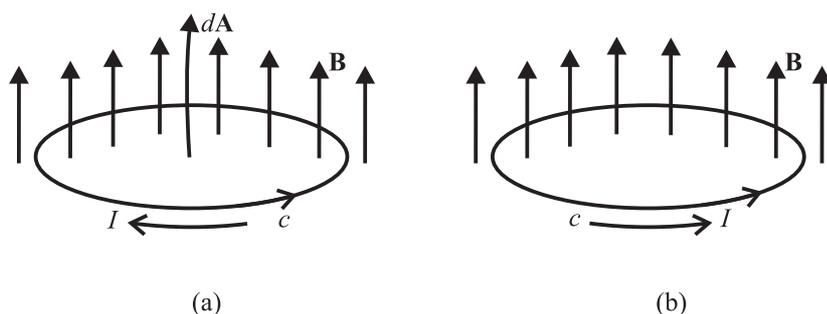


Figura 26.4. Dirección de la corriente inducida. En (a) aumenta con el tiempo el campo magnético externo, en (b) disminuye.

Las figuras 26.4a y 26.4b establecen la conexión entre la dirección del flujo y la corriente inducida. De acuerdo con la regla de mano derecha la dirección del recorrido de una trayectoria cerrada está dada por los dedos si el pulgar apunta en dirección del área dA . En la figura 26.4a el campo magnético con dirección del pulgar aumenta con el tiempo y la corriente inducida va en dirección contraria a c , mientras que en la figura 26.4b el campo con dirección del pulgar disminuye y la corriente inducida va en dirección de c . Es decir:

- Si $\frac{d\Phi_m}{dt} > 0$, la corriente inducida va en dirección opuesta a c .
- Si $\frac{d\Phi_m}{dt} < 0$, la corriente inducida va en dirección de c .

La aparición de una corriente en la espira, que es un circuito cerrado, implica la existencia de una *fem inducida* \mathcal{E} que hace circular las cargas. La fem estudiada en la sección 18.1 proviene de una batería. En el presente caso la fem surge por inducción. La ley de Faraday-Henry puede escribirse en la forma:



Vea la animación *Campo eléctrico inducido* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.



Joseph Henry (1797-1878)

Físico norteamericano nacido en Albany, Nueva York. Primer secretario del Instituto Smithsonian. Descubrió, independientemente de Faraday, el efecto de inducción, pero lo publicó después. Descubrió la inducción mutua y mejoró los electroimanes. En 1831 montó un telégrafo eléctrico y ayudó a Samuel Morse y Charles Wheatstone a construir los suyos, aunque luego tuvo con Morse una polémica por esta invención. Inventó el transformador eléctrico. Su nombre se asignó en 1893 a la unidad de inductancia, el henrio.

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (26.1)$$

Recuérdese que una fem es una diferencia de potencial. El signo “menos” responde por la conexión entre la dirección de la corriente inducida y el signo de la derivada del flujo; será estudiado con detalle en la siguiente sección. En el caso de N espiras atravesadas por el mismo campo, (26.1) toma la forma

$$\text{fem} = -\frac{d(N\Phi_m)}{dt} = -N\frac{d(\Phi_m)}{dt}. \quad (26.2)$$

Ejemplo 26.1

Una bobina formada con 100 espiras rectangulares de lados 10 y 20 cm, una encima de la otra, se coloca con su eje paralelo a un campo magnético $B = 0,5(1 + 0,4t)$ medido en teslas. Si la resistencia del alambre es de 4Ω , ¿qué corriente se induce sobre la bobina?

Solución:

Puesto que \mathbf{B} y $d\mathbf{A}$ son paralelos, y como el campo es espacialmente uniforme, es cierto que $\Phi_m = BA = 0,5 \times 0,1 \times 0,2 \times (1 + 0,4t) = 0,01 \times (1 + 0,4t)$. La derivada temporal es

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = 0,004.$$

De acuerdo con la ley de inducción este es el valor de la fem \mathcal{E} ; según la ley de Ohm la corriente inducida es $I = \mathcal{E}/R = 0,004/4 = 0,001$ A.

26.1.1 Ley de Lenz

Propuesta por Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865), la ley de Lenz hace más preciso el significado del signo “menos” que aparece en (26.1): *el sentido de la corriente inducida es tal que su propio campo magnético se opone a la variación del flujo del campo magnético responsable del efecto de inducción.*

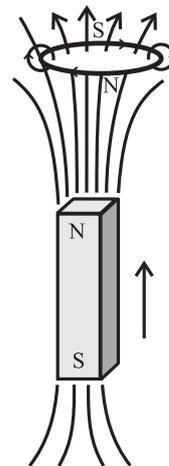


Figura 26.5. Ley de Lenz: el campo \mathbf{B} producido por la corriente inducida se opone al aumento del flujo a través de la espira.

En efecto, en las figuras 26.1, 26.2, 26.3 y 26.4 es claro que el campo magnético de la corriente inducida se opone al *aumento* del campo del imán o del solenoide;

los pequeños anillos a izquierda y derecha de la espira de la figura 26.5 corresponden al campo de la corriente inducida. Si en vez de acercarse se aleja el imán se invierten I y la dirección de su campo, aunque la dirección del campo del imán es la misma. En síntesis, el campo de la corriente inducida se opone al cambio del campo inductor: si a este se le trata de aumentar, el campo de la corriente inducida lo disminuye, y si se le trata de disminuir, el campo de la corriente inducida lo aumenta.

Visto de otro modo (figura 26.5), al acercarse el imán a la espira aumenta el flujo sobre la espira. El campo de la espira equivale al de un imán con el S arriba y el N abajo, por lo que inducir una corriente en la espira equivale a crear un imán que se opone al original.

Una violación a la ley de Lenz equivale a que la corriente inducida refuerce con su campo a un campo que aumenta. Este refuerzo produce un campo neto aun más intenso que a su vez produce más campo, lo que da lugar a una cadena en la que la corriente inducida crece sin cesar contraviniendo el principio de conservación de la energía.

26.2 Campo eléctrico inducido

La atención de Faraday se concentró en la corriente inducida en la espira. Maxwell sugirió que la espira solo sirve para manifestar la presencia de un campo eléctrico inducido por el campo magnético variable con el tiempo, campo inducido que existe esté o no presente la espira. Puesto que la fem es inducida en una trayectoria cerrada significa: 1) que las líneas de campo eléctrico inducido han de ser cerradas y 2) que la circulación del campo eléctrico inducido *no* es cero, por lo cual *el campo eléctrico inducido no es conservativo*, en contraste con el campo eléctrico generado por cargas en reposo (sección 11.1). De otro lado, si las líneas de campo eléctrico inducido son cerradas han de carecer de fuentes, es decir, no hay cargas de donde surjan ni donde confluyan estas líneas de campo, por lo cual *el campo eléctrico inducido tiene flujo cero*.

De acuerdo con la sección 18.1 la fem inducida, asociada a un campo eléctrico inducido \mathbf{E} , puede escribirse en la forma

$$\text{fem} = \mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Así, la ley de Faraday-Henry (26.1) puede escribirse como una conexión entre un campo magnético variable con el tiempo y el campo eléctrico inducido:

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}. \quad (26.3)$$

En la anterior ecuación se ha hecho uso de la definición (24.3) del flujo del campo magnético. La integral de circulación se realiza sobre la trayectoria cerrada c que rodea la superficie A de acuerdo con la regla de la mano derecha (figura 26.6).

Ha de tenerse en cuenta que las unidades de la fem son voltios, es decir, $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{C}^{-1}$, coincidentes con las unidades de flujo magnético/tiempo Wb/s , lo que puede probarse si se convierte Wb a MKS . Es cierto entonces que voltio = weber $\cdot \text{s}^{-1}$.

Ejemplo 26.2

Considere el campo magnético en el interior de un solenoide largo, alimentado con una corriente $I = I_0 \cos(\omega t)$. Calcule el campo eléctrico inducido.

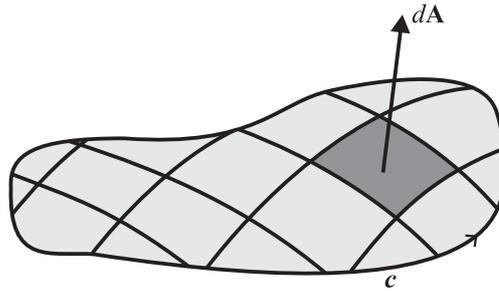


Figura 26.6. Conexión entre trayectoria y diferencial de superficie.

Solución:

El campo magnético en el interior de un solenoide largo es homogéneo, es de la forma $B = \mu_0 n I$, donde n es el número de espiras por unidad de longitud, y está dirigido axialmente. Por simetría, el campo eléctrico inducido que tiene líneas de campo cerradas debe situarse en un plano perpendicular al eje del solenoide.

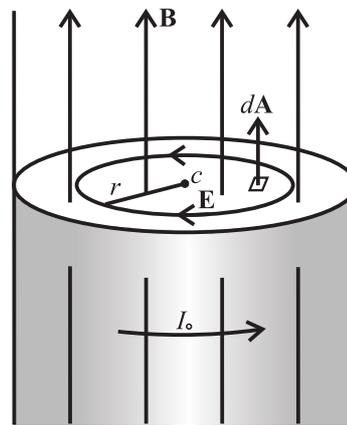


Figura 26.7. Campo eléctrico inducido en el interior de un solenoide con corriente que aumenta con el tiempo.

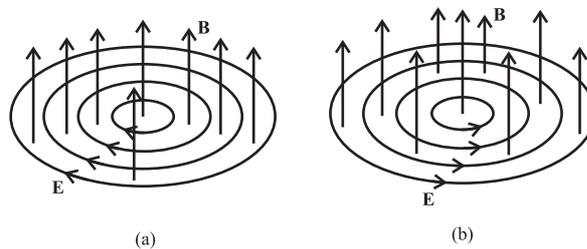


Figura 26.8. Líneas de campo eléctrico inducido en el interior de un solenoide. (a) Si B aumenta y (b) si B disminuye.

En la figura 26.7 se muestra la dirección de una de las líneas de E cuando B está aumentando. La figura 26.8a muestra la forma del campo E si B aumenta, mientras en 26.8b aparecen las líneas de E si B disminuye.

Como \mathbf{B} y $d\mathbf{A}$ son paralelos en la figura 26.7, se sigue

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B_0 \cos(\omega t) (\hat{\mathbf{k}}) \cdot (\hat{\mathbf{k}} dA) \\ &= B_0 \cos(\omega t) \int dA = B_0 \cos(\omega t) (\pi r^2).\end{aligned}$$

Al tomar la derivada temporal e igualar a la fem se obtiene

$$\frac{d\Phi_m}{dt} = B_0 \omega \pi r^2 \text{sen}(\omega t).$$

Si la trayectoria en la integral de circulación se escoge como se indica en la figura 26.7, de acuerdo con la figura 26.6, entonces

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -E(2\pi r).$$

En consecuencia, de acuerdo a la ley de inducción $B_0 \omega \pi r^2 \text{sen}(\omega t) = -(-E2\pi r)$, y por tanto el campo eléctrico inducido es de la forma

$$E = \frac{1}{2} B_0 \omega r \text{sen}(\omega t).$$

El campo eléctrico inducido es oscilante, depende linealmente del radio y no es conservativo.

26.2.1 El betatrón

El efecto Faraday posibilita el funcionamiento de un aparato usado en la investigación sobre las partículas elementales: el betatrón. Se trata de un gran aro hueco en el que se inyectan electrones u otras partículas subatómicas y que se coloca entre un par de potentes polos de un electroimán con corriente variable con el tiempo (figura 26.9).

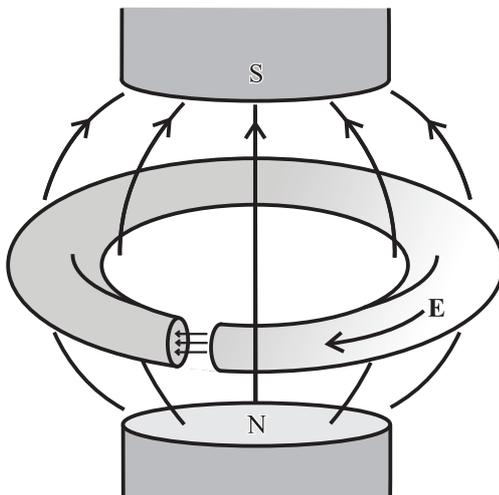


Figura 26.9. Esquema básico de un betatrón.

El campo magnético variable con el tiempo genera un campo eléctrico de líneas cerradas que acelera las partículas que se encuentran en el interior del aro. Usualmente estas partículas alcanzan altas velocidades y son utilizadas como proyectiles

contra otras partículas con el propósito de averiguar su estructura interna y sus interacciones mutuas.

26.2.2 Corrientes de Foucault

Si el polo norte de un imán se acerca a una placa conductora (figura 26.10) el flujo del campo magnético aumenta y se induce en la placa una corriente de conducción. El campo magnético de la corriente inducida se opone al aumento del flujo del campo del imán; es decir, el campo magnético de la corriente inducida se comporta en la superficie de la placa como el norte de otro imán y repele al imán original.

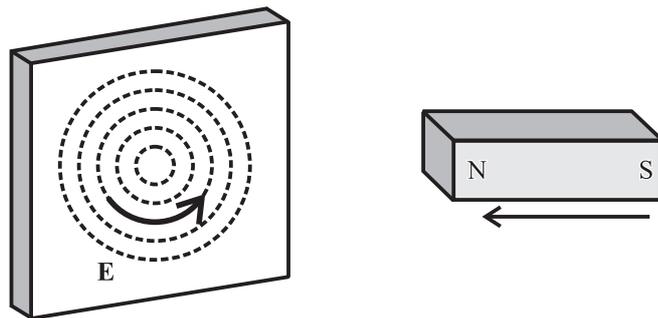


Figura 26.10. Corrientes de Foucault inducidas sobre una placa conductora cuando un imán se acerca.

Estas corrientes, también llamadas corrientes parásitas, de Foucault o de remolino (en inglés: *eddy currents*), se establecen en piezas de metal voluminosas que se mueven en un campo magnético o cerca de las cuales se mueve un imán. Un buen ejemplo se muestra en la figura 26.11a en la que una placa metálica oscila en un campo magnético. Al entrar la placa en el campo se inducen en ella corrientes debido al flujo magnético cambiante que la atraviesa. La dirección de estas corrientes es tal que su campo magnético se opone al aumento del flujo del campo del imán dando lugar a la aparición de un norte en el lado de la placa que enfrenta al norte del imán y a un sur en el lado opuesto de la placa. Esto da lugar a fuerzas repulsivas que retardan el péndulo, apareciendo además calor en la placa debido al efecto Joule. Si se hacen ranuras en la placa (figura 26.11b) las corrientes parásitas se reducen notablemente (¿por qué?).

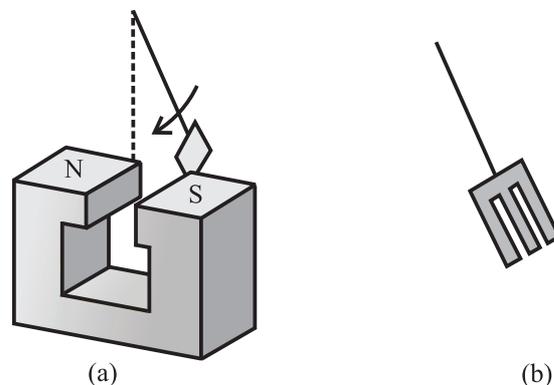


Figura 26.11. (a) Corrientes parásitas en un péndulo de placa conductora. (b) Las corrientes parásitas disminuyen si se hacen ranuras en la placa.

Las corrientes de Foucault, que son verdaderas corrientes de conducción, disipan calor por efecto Joule. Por esta razón se calientan los transformadores. Para reducir estas corrientes el núcleo del transformador se fabrica con placas de hierro separadas por aislantes que aumentan la resistencia del bloque reduciendo por tanto la corriente. Este es un efecto de inducción molesto que conviene reducir. Sin embargo es posible obtener de él un buen provecho. Hay un tipo de estufas sin gas ni resistencias, sino electroimanes que generan corrientes de Foucault en los utensilios metálicos de cocción, los que al generar calor por efecto Joule permiten la cocción de los alimentos.

Módulo 27

Fuerza electromotriz de movimiento

Contenidos del módulo

- 27.1 Inducción y movimiento relativo
- 27.2 El generador eléctrico

Objetivos del módulo

1. Introducir la fem de movimiento.
2. Establecer la equivalencia entre una fem de campo inducido y una fem de movimiento.
3. Estudiar la generación de corriente por cambio de área y por rotación de espiras.
4. Estudiar los fundamentos del generador eléctrico.
5. Presentar los rudimentos de los motores de corriente alterna y corriente continua.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una fem de movimiento? ¿Qué la diferencia de cualquier otra fem?
2. ¿Se genera un campo eléctrico cuando cambia el área de una espira en un campo magnético?
3. ¿Cómo se describe la generación de corriente en una espira?
4. ¿Qué es un generador eléctrico?
5. ¿Qué diferencia el diseño de un generador de corriente alterna de uno de corriente continua?

Introducción

La ley de inducción de Faraday-Henry puede ser utilizada para describir la existencia de la fuerza electromotriz que genera corriente en un circuito de área variable o en una espira rotante, colocados en un campo magnético *estacionario*. La espira rotante permite construir los modelos más sencillos de generadores de corriente, también llamados dinamos.



Sala de máquinas de una central hidroeléctrica.

27.1 Inducción y movimiento relativo

En la ley de inducción (26.3) aparece la derivada temporal del flujo del campo magnético. Como se ha visto en el ejemplo 26.2 es suficiente un campo magnético variable con el tiempo para generar un campo eléctrico, responsable de una fem. Sin embargo, puesto que la derivada temporal puede actuar sobre cualquiera de los factores que aparecen en la definición de flujo, habrá una fem si:

- El campo \mathbf{B} cambia con el tiempo.
- El tamaño de la superficie atravesada por el campo (superficie de flujo) cambia con el tiempo.
- La orientación de la superficie cambia con el tiempo.

Obviamente se obtendrá también una fem por combinación de los casos anteriores.

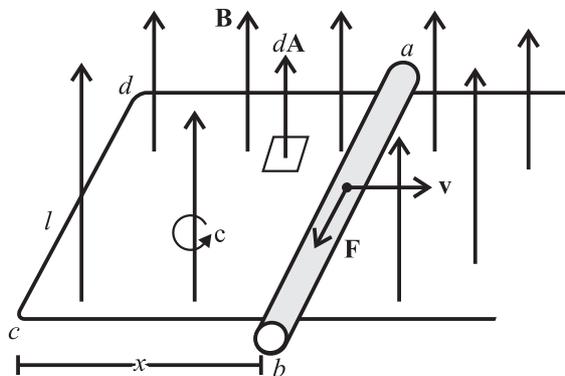


Figura 27.1. Una varilla ab se desliza sobre un alambre en U, generándose una fem entre a y b .

Como ilustración se propone estudiar un circuito $abcd$ formado por un alambre en U y una varilla que se desliza sobre él con velocidad constante \mathbf{v} , perpendicular a un campo magnético \mathbf{B} constante en el tiempo y uniforme (figura 27.1). Esta situación implica un cambio en el tamaño del área de flujo $abcd$, por lo que ha de aparecer una fem en el circuito. Las cargas móviles de la varilla experimentan una fuerza $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ que las obliga a moverse a lo largo de ab creándose una diferencia de potencial entre los extremos de la varilla. De acuerdo con la ley de inducción esto equivale a la aparición de un campo \mathbf{E} responsable de la fem y con dirección ab . Es decir, $qE = qvB$, por lo que el campo inducido es $E = vB$. Como ab es el único tramo del circuito donde existe la fem, la integral de circulación del campo \mathbf{E} es

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -El = -(vB)l.$$

El signo “menos” proviene de que la dirección de \mathbf{E} y la de recorrido de c son opuestas. La derivada temporal del flujo es

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_m}{dt} &= \frac{d}{dt} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \frac{d}{dt} \int B dA \\ &= \frac{d}{dt} (Bxl) = Bvl, \end{aligned}$$



Vea la animación *fem y fuerza de Lorentz* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

y por comparación se obtiene (26.3). En este caso la fem se llama *fem de movimiento*.

Ejemplo 27.1

¿Qué corriente se genera en el circuito $abcd$ de la figura 27.1 si la velocidad de la varilla es de 1 m/s, su longitud es de 1 m, el campo B es de 0,5 T y la resistencia del circuito es de 2Ω ?

Solución:

La fem es

$$\mathcal{E} = \text{fem} = Blv = 0,5V = IR = 2I,$$

por tanto $I = 0,25 \text{ A}$.

27.1.1 El generador eléctrico

Un ejemplo adicional de generación de fem por movimiento es el caso de una espira conductora que gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular ω , en presencia de un campo magnético constante en el tiempo y uniforme (figura 27.2a).

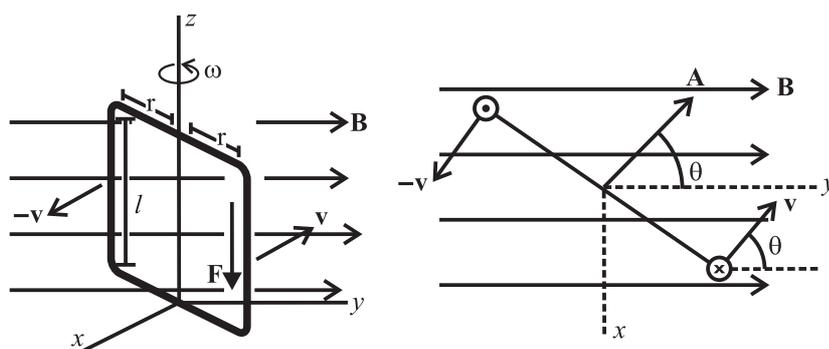


Figura 27.2. (a) Una espira gira alrededor del eje vertical en un campo B uniforme. (b) Vista superior.

La fuerza magnética que actúa sobre cada carga q en las secciones verticales del alambre es

$$F = qvB \sin \theta = qvB \sin \omega t = qE,$$

equivalente a una fuerza eléctrica en cada sección vertical.

El campo eléctrico inducido en la varilla es $E = vB \sin \omega t$ y la fem es

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = (vB \sin \omega t)(2l).$$

Obsérvese que no hay fem debida a las porciones horizontales de la espira. Como $v = \omega r$, puede escribirse

$$\text{fem} = 2\omega r l B \sin \omega t = (2rl)B\omega \sin \omega t = BA\omega \sin \omega t,$$

donde A es el área de la espira. El flujo del campo magnético y su derivada temporal son

$$\begin{aligned} \Phi_m &= BA \cos \omega t, \\ \frac{d\Phi_m}{dt} &= -BA\omega \sin \omega t = -\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}, \end{aligned}$$

que es otra vez la ley de inducción. Así pues, la generación de fem por movimiento en una espira rotante puede describirse también con la ley de Faraday-Henry.

Si se estudia la figura 27.2b podrá comprenderse que la dirección de la corriente inducida cambia cada media vuelta, por lo que la espira puede convertirse en la base de un *generador de corriente alterna* (figura 27.3a). Las escobillas E_1 y E_2 permanecen fijas mientras la espira gira con sus aros. La forma sinusoidal de la corriente inducida se muestra en la figura inferior. Si la conexión a las terminales de la espira se realiza como en la figura 27.3b se obtiene corriente *continua*, siempre positiva aunque dependiente del tiempo. Las escobillas E_1 y E_2 cambian ahora cada media vuelta de terminal F de la espira. Por esta razón los semiaros F se llaman conmutadores.



Ernst Werner von Siemens (1816-1892)

Ingeniero e inventor alemán. Su primera patente en 1842 fue un proceso electrolítico para cubrir metales. En 1847 fundó la compañía Siemens. Perfeccionó el telégrafo de Wheatstone y tendió las primeras líneas en Europa y Rusia. En 1866 inventó la dinamo, que produce corriente alterna con un electroimán móvil, siendo esta la primera máquina práctica generadora de corriente eléctrica, que hizo posible la aplicación industrial y casera de la electricidad.

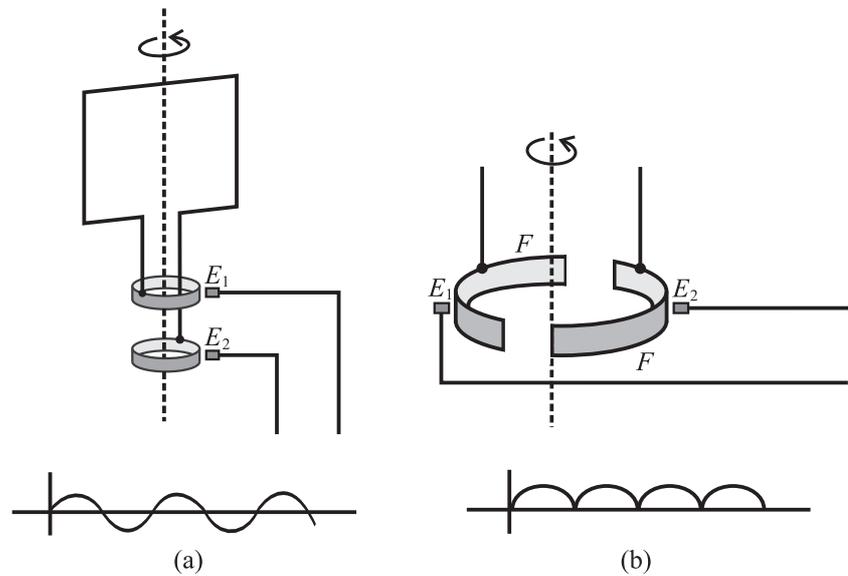


Figura 27.3. (a) Generador de corriente alterna. (b) Generador de corriente continua.

Esta es la arquitectura básica de un generador de corriente. El resto son detalles importantes de ingeniería: optimizar la forma de los campos, decidir el número y la disposición de las espiras para construir los rotores, escoger la fuente que moverá las espiras, realizar el estudio de la potencia de salida, minimizar las pérdidas de energía, entre otros. En la producción industrial de electricidad la fuente es una caída de agua, o un chorro de gas. Estos son el punto de partida de las centrales hidroeléctricas, geotérmicas y nucleares. En todos estos casos lo que se busca es mantener el movimiento de las espiras; de este modo el generador es capaz de transformar energía mecánica en energía eléctrica.

Como es bien sabido, la corriente eléctrica es uno de los pilares del mundo moderno.

Los primeros modelos de generadores, también llamados dinamos, fueron ideados por Faraday y Henry pero fue Siemens el primero en fabricar un generador de tipo industrial.

Ejemplo 27.2

Un generador de corriente alterna contiene 10 espiras de $0,1 \text{ m}^2$ cada una, que giran a 50 Hz. Si la resistencia del alambre de las espiras es de 10Ω y el campo magnético es de $0,5 \text{ T}$, ¿cuál es la fem que genera? ¿Cuál es la corriente producida?

Solución:

$$\begin{aligned} \text{fem} &= NA\omega \text{sen } \omega t \\ &= 10 \times 0,1 \times (2\pi \times 50) \text{sen } (2\pi \times 50t) \\ &= 314 \text{sen } (314t). \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{314}{10} \text{sen } (314t) = 31,4 \text{sen } (314t). \end{aligned}$$

Módulo 28

Ley de Ampère-Maxwell

Contenidos del módulo

- 28.1 Conservación de la carga eléctrica
- 28.2 La ecuación de Ampère-Maxwell
- 28.3 Las ecuaciones de Maxwell

Objetivos del módulo

1. Introducir la conservación de la carga eléctrica.
2. Introducir la corriente de desplazamiento.
3. Implementar una modificación en la ley de Ampère-Maxwell.
4. Presentar la ecuación de Ampère-Maxwell.
5. Estudiar la generación de un campo magnético por cambio del flujo eléctrico.
6. Presentar y discutir las ecuaciones de Maxwell.

Preguntas básicas

1. ¿Qué es una ley de conservación?
2. ¿Hay alguna excepción a la conservación de la carga eléctrica? ¿Hay otras leyes de conservación?
3. ¿Qué es una corriente de desplazamiento?
4. ¿Qué modificación propone Maxwell a la ley de Ampère? ¿Por qué?
5. ¿Cuál es la principal predicción de la ley de Ampère-Maxwell?
6. ¿Cuál es el significado de cada una de las ecuaciones de Maxwell?

Introducción

Los experimentos realizados hasta la fecha revelan que la carga eléctrica total en cualquier proceso natural se conserva. No hay excepción conocida a esta ley; esta evidencia obliga, como se verá en este módulo, a replantear la ley de Ampère, trabajo que fue realizado por Maxwell y que dio nacimiento a la ecuación de Ampère-Maxwell. La predicción fundamental de esta ecuación, confirmada por la experiencia, es que un flujo eléctrico variable con el tiempo da origen a un campo magnético inducido. Resulta entonces que los campos magnéticos pueden generarse por corrientes o por inducción, así como los eléctricos pueden generarse por cargas o por inducción.

Con la ley de Ampère-Maxwell se completa el sistema de cuatro ecuaciones en que se basa (junto con la fuerza de Lorentz) la teoría del campo electromagnético.



Las ecuaciones de Maxwell son el eje de la teoría electromagnética.

28.1 Conservación de la carga eléctrica

Uno de los estudios de más interés en física es el de las cantidades que se conservan en los diversos procesos naturales. La dinámica de partículas enseña que en un sistema aislado, es decir, sometido solo a las acciones entre sus partes, acciones conocidas como fuerzas internas, se conservan el momento lineal total, el momento angular total y la energía mecánica (incluyendo la calorífica). Si hay campos electromagnéticos habrá de incluirse el momento lineal del campo, su momento angular y su energía. De estos tópicos se hablará en el curso de *Física III*. La mecánica incluye, además, la conservación de la masa; los experimentos electromagnéticos permiten concluir que hay también conservación de la carga: *en todos los procesos naturales la cantidad de carga eléctrica se mantiene constante*.

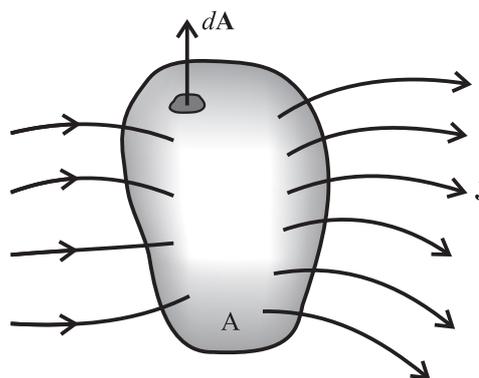


Figura 28.1. Si la carga que fluye desde la superficie cerrada es mayor que la que entra, en el interior debe disminuir la densidad.

Esta última ley puede describirse así:

Considérese una región del espacio limitada por una superficie cerrada A (figura 28.1). Si la carga se conserva y hay un flujo de cargas hacia el exterior mayor que hacia el interior, la densidad de carga en el interior debe estar disminuyendo. (Como analogía, si por un orificio practicado en un recipiente con gas fluye materia hacia el exterior, en su interior debe estar disminuyendo su densidad; de otro modo adentro se estaría creando materia.) Si se conserva la carga, la corriente eléctrica de salida debe ser igual a la rata de disminución de la carga en el interior, por lo cual

$$I = -\frac{dq}{dt}.$$

De la ley de Gauss para cargas en el vacío, ecuación (12.4), y reemplazando q puede escribirse:

$$I + \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (28.1)$$

De la definición (17.3) de densidad de corriente es cierto que la corriente eléctrica neta que atraviesa una superficie *cerrada* ha de ser

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{A}. \quad (28.2)$$

En el caso estacionario (derivada temporal nula), se concluye de (28.1) que $I = 0$, es decir que la integral en (28.2) se anula. Esto significa que la cantidad de carga que sale por unidad de tiempo es igual a la que entra, estableciéndose entonces un flujo de corriente *estacionario* (figura 28.2).

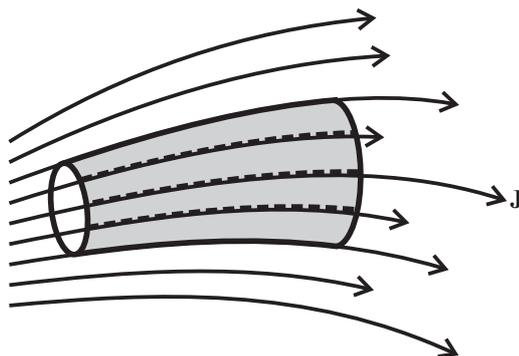


Figura 28.2. Flujo estacionario: carga por unidad de tiempo que sale y entra son iguales.

28.2 La ecuación de Ampère-Maxwell

En el caso general, dependiente del tiempo, (28.1) exige la adición de un nuevo término I_d al que Maxwell llamó *corriente de desplazamiento*:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A},$$

de modo tal que en la ecuación de Ampère (24.2) la corriente I ha de reemplazarse por $I + I_d$. Una parte de la nueva corriente está formada por el flujo de cargas mientras la otra es un término asociado a flujos eléctricos variables con el tiempo. La ecuación de Ampère ha de modificarse convirtiéndose en la ecuación de Ampère-Maxwell

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \quad (28.3)$$

En esta ecuación, la integral de circulación se realiza sobre un contorno C que contiene un área A . La nueva ecuación está de acuerdo con la ley de conservación de la carga eléctrica, pues cuando la integral de flujo del lado derecho se realiza sobre una superficie *cerrada*, la integral de circulación del campo magnético se anula ya que la trayectoria se hace nula. De otro lado, (28.3) propone que *un campo magnético puede ser generado por corrientes y por flujos eléctricos dependientes del tiempo*.

Ejemplo 28.1

Carga de un condensador

En la figura 28.3 se muestra un condensador que se carga mediante un alambre por el que fluye corriente. Estudie el proceso.

Solución:

Cuando la carga comienza a establecerse sobre las placas del condensador también el campo eléctrico de las cargas comienza a ocupar la región entre las placas. Este campo tiene una dirección que va de la placa positiva a la negativa. Sus líneas van de la placa positiva a la negativa. Debido a que el campo eléctrico varía con el tiempo aparece un campo magnético inducido entre las placas cuya forma circular, determinada por la simetría y por el flujo nulo del campo magnético, es mostrada en la figura 28.4.

En el proceso de descarga del condensador la dirección del campo eléctrico se mantiene aunque decrece en magnitud, pero se invierte la dirección del magnético.

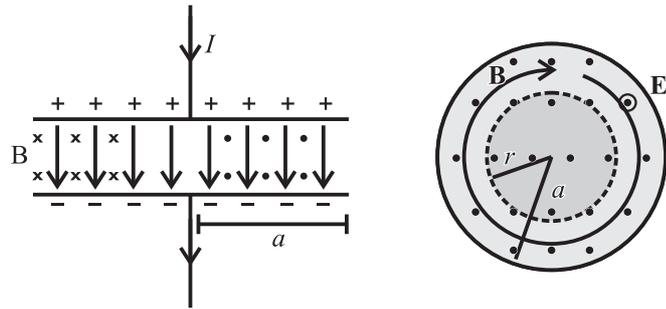


Figura 28.3. En el proceso de carga de un condensador aparece un campo eléctrico debido a la carga en las placas y un campo magnético inducido. Vistas lateral y superior.

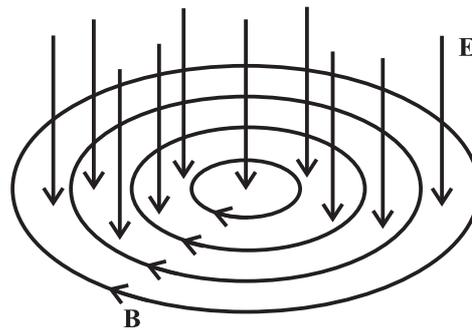


Figura 28.4. Líneas de campo \mathbf{E} y \mathbf{B} en el interior del condensador en proceso de carga de la figura 28.3.

En la región entre las placas $I = 0$ y el flujo del campo eléctrico a través de un área circular de radio r es

$$\Phi_e = (\pi r^2)E,$$

donde se ha supuesto por simplicidad que el campo \mathbf{E} es uniforme. Como el campo eléctrico y la densidad de carga para un par de placas paralelas están relacionadas por

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{A\epsilon_0} = \frac{Q}{(\pi a^2)\epsilon_0},$$

donde $A = \pi a^2$ es el área total de cada placa, entonces el flujo del campo eléctrico toma la forma

$$\Phi_e = \frac{Qr^2}{\epsilon_0 a^2}.$$

La ecuación de Ampère-Maxwell entre las placas es entonces

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \left(0 + \epsilon_0 \frac{r^2}{a^2} \frac{dQ}{dt} \right) = \mu_0 I \frac{r^2}{a^2} \\ &= B(2\pi r). \end{aligned}$$

Se obtiene para el campo magnético inducido:

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}.$$

La corriente de desplazamiento correspondiente a un cilindro de radio r dentro del condensador es

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d}{dt} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = I \frac{r^2}{a^2},$$

de modo que la corriente de desplazamiento total dentro de las placas del condensador es

$$I_d = I.$$

Esto indica que la corriente I que viene por el alambre hacia el condensador se suspende en las placas pero es reemplazada por la corriente de desplazamiento $I_d = I$, que viaja dentro del condensador hasta alcanzar la otra placa donde otra vez es I . Este comportamiento asegura la continuidad de la corriente en un circuito donde hay condensadores, pues lo que fluye a través de él es $I + I_d$. En ocasiones se reduce a I y en otras a I_d .

28.3 Las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones fundamentales del electromagnetismo fueron propuestas por Maxwell en 1865 como un conjunto de cuatro ecuaciones que describen la dinámica del campo electromagnético en términos de las cargas y las corrientes. Para un sistema conformado por cargas y corrientes en el vacío, es decir, sin la intervención de medios polarizables ni magnetizables, las cuatro ecuaciones son las siguientes

$$\begin{aligned} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{q}{\epsilon_0}, \\ \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} &= 0, \\ \int_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= -\frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}, \\ \oint_c \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Aunque estas ecuaciones han sido exploradas a lo largo del curso, dada su importancia excepcional en la ciencia y la tecnología de nuestra época conviene hacer una síntesis de su significado:

La primera ecuación, conocida como ley de Gauss, válida según Maxwell aun para situaciones dependientes del tiempo, afirma que las fuentes de las líneas del campo eléctrico son las cargas eléctricas y que en consecuencia las líneas de campos eléctricos inducidos (que no son generadas directamente por cargas) tienen flujo cero.

La segunda ecuación, que Maxwell también asume válida en situaciones dependientes del tiempo, afirma que el flujo del campo magnético es siempre cero, es decir, que sus líneas de campo, o son cerradas o terminan y comienzan en el infinito, y por tanto no hay cargas magnéticas. Los polos de los imanes no son por tanto fuentes de líneas de campo magnético sino solo zonas de alta densidad de líneas.

La tercera ecuación, ley de inducción de Faraday-Henry, afirma que es posible generar fem mediante flujos magnéticos variables con el tiempo, y que, en particular, pueden generarse campos eléctricos de líneas cerradas por variación temporal de campos magnéticos. Estos campos eléctricos inducidos no son conservativos, esto es, hacen trabajo neto al mover una carga a lo largo de una trayectoria cerrada. Solo los campos electrostáticos son conservativos.



James Clerk Maxwell (1831-1879)

Físico y matemático escocés nacido en Edinburgo. Realizó investigaciones en áreas muy diversas, como estudios sobre los anillos de Saturno, los colores fundamentales y la fundamentación de la estadística de Maxwell-Boltzmann. Su trabajo esencial fue la unificación de la electricidad y el magnetismo en las ecuaciones que llevan su nombre. Estas ecuaciones permiten afirmar que la luz es una onda electromagnética y que es posible, como lo hizo Henrich Hertz, generar ondas \mathbf{EB} en el laboratorio. Miembro de la Royal Society. Entre sus obras se destacan: *Tratado de electricidad y magnetismo*, *Materia y movimiento*, *Tratado del calor*. Su teoría electromagnética es la más alta cumbre teórica del siglo XIX.



Escuche el audio *Unificación de fuerzas* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*



Escuche la biografía de *Maxwell* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

La cuarta ecuación, ley de Ampère-Maxwell, afirma que campos magnéticos pueden generarse mediante corrientes o mediante el flujo de un campo eléctrico variable con el tiempo. Esta ecuación se complementa con la ley de inducción y cierra una cadena causal en el sentido de que muestra que campos electromagnéticos dependientes del tiempo pueden generarse uno de otro por inducción: un campo $\mathbf{B}(t)$ genera un campo $\mathbf{E}(t)$, el que a su vez genera un campo $\mathbf{B}(t)$, el que a su vez, etc. De este modo es posible tener un campo electromagnético que se desprenda de las cargas y viaje como un ente autónomo. En efecto, Maxwell demostró que sus ecuaciones conducen por manipulación matemática a una ecuación de ondas para los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , que viajan en el vacío a la misma velocidad que la luz. En este punto comienza la posibilidad del establecimiento de las telecomunicaciones. Estos serán temas del curso de *Física III*.

Las cuatro ecuaciones de Maxwell proveen la *dinámica del campo electromagnético*, es decir, dadas las cargas y las corrientes estas ecuaciones permiten evaluar los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . Para tener una teoría completa es necesario adicionar la fuerza de Lorentz que provee la *dinámica de las cargas* y que responde a la pregunta sobre cómo los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} determinan el movimiento de las partículas cargadas.

Módulo 29

Inductancia y energía del campo magnético

Contenidos del módulo

- 29.1 Inductancia
- 29.2 Energía del campo magnético
 - 29.2.1 La densidad de energía magnética
- 29.3 Circuitos electromagnéticos
 - 29.3.1 Circuito RL
 - 29.3.2 Oscilaciones libres
 - 29.3.3 Oscilaciones forzadas

Objetivos del módulo

1. Definir el autoflujo de una espira o bobina
2. Introducir la noción de inductancia.
3. Estudiar la energía almacenada en un inductor.
4. Implementar al campo magnético la noción de energía.
5. Ampliar los circuitos eléctricos introduciendo las bobinas.
6. Estudiar circuitos RL, LC y RLC.
7. Estudiar la oscilación de energía en formas eléctrica y magnética.
8. Presentar la analogía entre circuitos electromagnéticos y mecánicos.

Preguntas básicas

1. ¿Qué se entiende por autoflujo?
2. ¿Cómo se define la inductancia de un circuito?
3. ¿De qué factores depende la energía de una bobina y de un campo magnético?
4. ¿De qué elementos se compone un oscilador electromagnético?
5. ¿Cómo ocurren las oscilaciones de energía en un circuito LC?
6. ¿Por qué un oscilador mecánico es análogo a un circuito LC?

Introducción

En los estudios sobre el campo eléctrico fueron propuestas las nociones de capacitancia y condensador. Este último se presenta en la práctica como un sistema de dos placas capaz de almacenar energía eléctrica. En este módulo se realizan consideraciones análogas en magnetismo que conducen a las nociones de inductancia e inductor. En la práctica un inductor es usualmente una bobina (es decir, un solenoide), que es un artefacto capaz de almacenar energía magnética. En ambos casos, el eléctrico y el magnético, es posible definir la densidad volumétrica de energía de los campos. Junto con las resistencias y las baterías, el condensador y la bobina son elementos típicos de los circuitos. Diversas combinaciones serán estudiadas en la sección final. Una de las más interesantes y de mayor aplicación es el circuito oscilante LC.



Una bobina permite almacenar energía magnética, como un condensador almacena energía eléctrica.

29.1 Inductancia

Un circuito por el que fluye una corriente I produce a su alrededor un campo magnético proporcional a I de la forma (22.1)

$$\mathbf{B} = k_m I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{u}}_r}{r^2}.$$

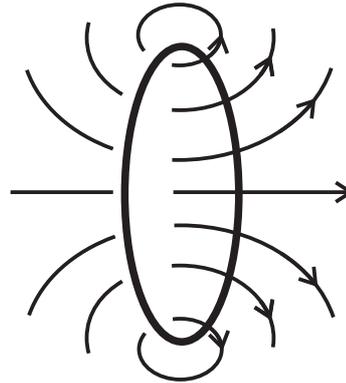


Figura 29.1. El flujo del campo magnético de una espira a través de sí misma es proporcional a la corriente.

El flujo del campo magnético de la espira de la figura 29.1 a través de su propia área, llamado *autoflujo*, es proporcional a I y puede escribirse

$$\Phi_m = LI. \quad (29.1)$$

El coeficiente L se llama *inductancia* y depende de la geometría del circuito. Sus unidades son, de acuerdo con (29.1): $\text{WbA}^{-1} = \text{m}^2 \cdot \text{kg} \cdot \text{C}^{-2} = \text{henrio}$, cuyo símbolo es H.

Si la corriente en la espira cambia con el tiempo también cambia el autoflujo y se induce, según la ley de Faraday-Henry, una fem de la forma

$$\text{fem} = \mathcal{E}_L = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L\frac{dI}{dt}.$$

Este fenómeno recibe el nombre de *autoinducción*. La fem autoinducida actúa en dirección opuesta al cambio con el tiempo de I . Para indicar en un circuito que un elemento presenta inductancia apreciable se utiliza en los diagramas el símbolo L correspondiente a la bobina de la figura 29.3.

Para una bobina de N vueltas el autoflujo total es

$$N\Phi_m = LI, \quad (29.2)$$

y la fem autoinducida se escribe

$$\mathcal{E}_L = -N\frac{d\Phi_m}{dt},$$

donde Φ_m es el autoflujo de cada espira.

Ejemplo 29.1

Calcule la inductancia de un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud y radio R alimentado con una corriente I .

Solución:

En el exterior de un solenoide largo el campo magnético es casi nulo, de modo que se confina al interior y tiene un valor constante

$$B = \mu_0 n I.$$

Este campo tiene dirección axial, de modo que si se calcula su flujo a través de una superficie perpendicular al eje, el flujo magnético a través de cada vuelta se escribe

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B dA = (\mu_0 n I) \int dA \\ &= (\mu_0 n I)(\pi R^2), \end{aligned}$$

tal que, según (29.2), la inductancia es

$$L = N \frac{\Phi_m}{I} = \mu_0 n N \pi R^2.$$

Ejemplo 29.2

Un cable coaxial consiste en un par de superficies cilíndricas de radios a y b coaxiales que portan corrientes iguales pero de dirección opuesta (figura 29.2). Las corrientes opuestas confinan el campo magnético en la zona entre los cilindros. Calcule la inductancia de un tramo del cable de longitud h .

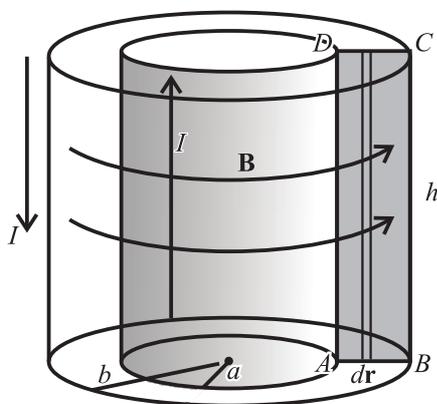


Figura 29.2. Sección de un cable coaxial.

Solución:

Si la corriente interior fluye hacia arriba y la exterior hacia abajo, las líneas de campo magnético tienen la dirección dada en la figura por la regla de la mano derecha. Estas líneas atraviesan en forma perpendicular el área $ABCD$ entre los cilindros por lo que el producto escalar $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}$ es igual $B dA$. El campo magnético entre los dos cilindros puede obtenerse trazando una amperiana circular de radio $a < r < b$ perpendicular al eje del cable. De la ley de Ampère se obtiene para el campo magnético

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Tomando un diferencial de área $h dr$ el flujo es, entonces,

$$\begin{aligned}\Phi_m &= \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int B dA = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} (h dr) \\ &= \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = LI.\end{aligned}$$

La inductancia del cable coaxial es

$$L = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

29.2 Energía del campo magnético

Puesto que la fem autoinducida por una espira o una bobina (en general por un *inductor*) se opone a que una batería establezca una corriente en un circuito de forma instantánea, esta debe hacer trabajo contra el inductor. De la energía provista por la batería parte se disipa en las resistencias por efecto Joule, parte se almacena en los condensadores y parte en el inductor. Esto puede comprenderse si se tiene en cuenta que en un circuito formado por una batería, un condensador, una resistencia y un inductor, la fem total está dada por la fem (\mathcal{E}) de la batería y la fem (\mathcal{E}_L) de autoinducción: $\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_L$. Esta fem total es la que logra hacer circular la corriente a través de la resistencia y cargar el condensador. Puede escribirse entonces

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E} + \mathcal{E}_L = IR + \frac{q}{C},$$

explícitamente

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}. \quad (29.3)$$

Al multiplicar por I esta expresión, y tomando en cuenta que

$$\mathcal{E}I = \frac{dE}{dt}, \quad (29.4)$$

donde E es la energía del circuito, resulta

$$\frac{dE}{dt} = I^2 R + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2}{2C} \right). \quad (29.5)$$

De acuerdo con esta ecuación la potencia de la batería se invierte en cargar el condensador estableciendo en él una carga, en cargar el inductor (una bobina por ejemplo) estableciendo en ella una corriente y el resto se disipa en la resistencia. La energía del condensador, como se dedujo en (16.1), es

$$E_C = \frac{q^2}{2C},$$

y la almacenada en un inductor L es

$$E_L = \frac{1}{2} LI^2. \quad (29.6)$$

Ejemplo 29.3

Calcule la energía contenida en un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud, de radio R y longitud l , por el que circula una corriente I .

Solución:

De acuerdo con el ejemplo 29.1 la inductancia de una bobina larga es $L = N\Phi_m/I = \mu_0 n N \pi R^2$; según (29.6) la energía magnética que almacena es

$$E_L = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n N \pi R^2)I^2.$$

Reemplazando I de la expresión para el campo magnético de la bobina $B = \mu_0 n I$ se obtiene

$$E = \frac{B^2 V}{2\mu_0}, \quad (29.7)$$

donde V es el volumen $\pi R^2 l$ de la bobina. Se ha usado $N = nl$.

Ejemplo 29.4

¿Cuánta energía magnética se almacena en un solenoide de $20 \mu\text{H}$ por el que circula una corriente de 5 A ?

Solución:

$$E = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times (5)^2 = 250 \mu\text{H} \cdot \text{A}^2 = 250 \mu\text{J}.$$

Obsérvese que si la corriente se duplica, la energía almacenada se cuadruplica.

29.2.1 La densidad de energía magnética

La ecuación (29.6) da la energía almacenada en un inductor y (29.7) la energía almacenada en una bobina larga. Esta última ecuación asegura que la energía de la bobina reside en el campo magnético que existe en el interior de la bobina. La densidad de energía magnética (energía/volumen) de la bobina es, entonces,

$$u = \frac{E}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0}. \quad (29.8)$$

Aunque esta ecuación ha sido obtenida en el caso particular de una bobina larga, su validez es general y expresa la densidad volumétrica de energía de cualquier campo magnético, incluso dependiente del tiempo. Así, la energía total contenida en un campo magnético es

$$E = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV. \quad (29.9)$$

Ejemplo 29.5

¿Cuánta energía magnética se almacena en el sector de cable coaxial del ejemplo 29.2?

Solución:

El campo magnético entre las superficies es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

y de (29.9) la energía se escribe

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int_{r=a}^{r=b} \int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} \int_0^h \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 r dr d\phi dz \\ &= \frac{\mu_0 h I^2}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

29.3 Circuitos electromagnéticos

29.3.1 Circuito RL

En la figura 29.3 se muestra un circuito formado por una batería, una resistencia y una bobina. La fuerza electromotriz neta proviene de la batería (\mathcal{E}) y la autoinducción de la bobina (\mathcal{E}_L) que son fuente de la corriente que va a través de la resistencia. Es cierto que

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = IR,$$

es decir,

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0. \quad (29.10)$$

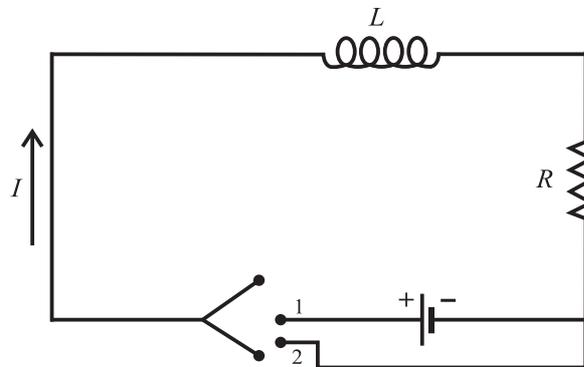


Figura 29.3. Carga y descarga del circuito RL.

Dos casos importantes pueden ser analizados con esta ecuación:

- Se cierra el circuito en 1 de modo operan la batería, la resistencia y la bobina. En un circuito que contenga solo una batería y una resistencia, en el mismo momento de conectar la batería debería establecerse una corriente $I = \mathcal{E}/R$ según la ley de Ohm. Pero todo circuito tiene alguna inductancia, de modo que al conectar la batería e iniciarse el flujo de corriente, hay una oposición debido a la fem autoinducida, lo que hace que la corriente $I = \mathcal{E}/R$ se establezca de modo no instantáneo. Este fenómeno puede describirse con (29.10), la que puede escribirse en la forma

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} \left(I - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) = 0,$$

equivalente a

$$\frac{du}{dt} + \frac{R}{L} u = 0$$

si se define

$$u = I - \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

La solución a esta ecuación diferencial ordinaria de primer orden, con la condición inicial $I = 0$ en $t = 0$, es de la forma

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-Rt/L} \right).$$

La corriente en el circuito crece desde cero en $t = 0$ hasta $I = \mathcal{E}/R$ en $t \rightarrow \infty$, de acuerdo con la ley de Ohm, solo que la corriente tarda en llegar a este valor debido a la autoinducción de la bobina.

- Después de un tiempo suficientemente largo la corriente en el circuito es $I = \mathcal{E}/R$. Entonces se levanta 1 y se cierra 2. Esto significa que en $t = 0$ hay una corriente $I_0 = \mathcal{E}/R$ en un circuito sin batería, con una bobina y una resistencia. La situación para $t > 0$ se describe haciendo $\mathcal{E} = 0$ en (29.10):

$$\frac{dI}{dt} + IR = 0,$$

cuya solución es

$$I = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (29.11)$$

La corriente decrece desde I_0 hasta cero en un tiempo finito, no de modo instantáneo, por la presencia de la autoinducción. El valor R/L se llama *constante de tiempo del circuito RL*.

Con (29.11) puede calcularse la potencia disipada por la resistencia:

$$P = \frac{dE}{dt} = I^2 R = \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2Rt/L},$$

de donde se deduce por integración que la energía total disipada por la resistencia es

$$E = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}^2}{R} e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{R^2} \right) L = \frac{1}{2} LI_0^2,$$

coincidente con la energía inicial del circuito, residente en la bobina.

29.3.2 Oscilaciones libres

Entre los circuitos simples tal vez el más interesante es el circuito LC pues presenta la característica de asemejarse en todo a un oscilador mecánico como el estudiado en el módulo 2.

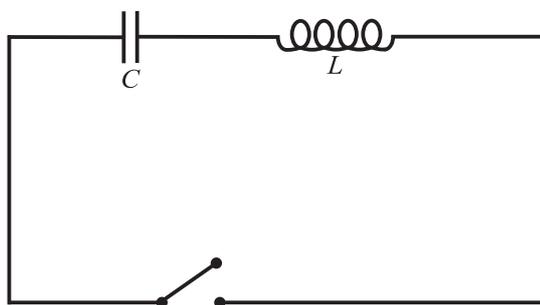


Figura 29.4. Circuito oscilante LC.

La figura 29.4 muestra un circuito formado por un condensador de capacitancia C y una bobina de inductancia L . La ecuación que describe este circuito es (29.3) con $\mathcal{E} = R = 0$:



Vea la animación *Circuito LC oscilante* en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Como

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (29.12)$$

esta ecuación equivale a

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (29.13)$$

Derivando esta ecuación respecto al tiempo y teniendo en cuenta que $I = dq/dt$ se llega a

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0. \quad (29.14)$$

Las expresiones (29.13) y (29.14) describen un oscilador armónico de frecuencia angular

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

La forma de (29.13) es exactamente la misma del oscilador *mecánico* (2.1), solo que ahora se trata de un oscilador *electromagnético*. Esta analogía y la existente entre la ecuación (29.12) y la definición de velocidad permiten establecer la correspondencia: $y \leftrightarrow q$ y $v \leftrightarrow I$. La solución a (29.14) tiene la forma:

$$I = A \cos(\omega t + \phi). \quad (29.15)$$

Esta expresión da la corriente en el circuito en cada instante en términos de las constantes A y ϕ que pueden evaluarse conocidos los valores iniciales de la carga y la corriente. Ante todo, la carga en el condensador puede hallarse por integración de

$$I = \frac{dq}{dt}$$

que da lugar a

$$q = \int I dt = \frac{A}{\omega} \sin(\omega t + \phi). \quad (29.16)$$

Si la carga inicial en el condensador es q_0 y la corriente inicial es I_0 , es posible probar de (29.15) y (29.16) que

$$A = \sqrt{I_0^2 + \omega^2 q_0^2}, \quad \tan \phi = \frac{q_0}{\omega I_0}.$$

Las consideraciones de energía realizadas en el módulo 1, según las cuales en un oscilador mecánico se intercambian periódicamente la energía cinética y potencial, pueden también realizarse en el oscilador electromagnético. En efecto, si se tiene en cuenta que en este oscilador no hay fem externa, entonces de (29.4) la energía total es constante, por lo cual (29.5) se reduce a

$$\frac{1}{2}LI^2 + \frac{q^2}{2C} = E, \quad (29.17)$$

ecuación análoga a (1.8) y donde es posible identificar formas cinética y potencial de energía electromagnética. Con este propósito conviene comparar (2.1) y (29.14) cuyas formas originales son:



Vea el documento "Solución a la ecuación del oscilador armónico" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + ky = 0,$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{C} I = 0.$$

La correspondencia que esta pareja de ecuaciones sugiere es la siguiente: $k \leftrightarrow 1/C$, $m \leftrightarrow L$. Estas equivalencias, que no son igualdades, sugieren que así como un resorte almacena energía potencial elástica, un condensador almacena energía potencial eléctrica, y que la inductancia es el análogo de la masa, es decir que:

- La autoinducción es interpretable como un coeficiente de inercia asociable al campo magnético.
- La energía cinética de una masa m es análoga a la energía magnética.

Dicho de otro modo: el oscilador electromagnético intercambia energía entre un condensador que actúa como un resorte y una bobina que actúa como una masa en movimiento. Ha de tenerse presente que, en consecuencia, la autoinducción es un comportamiento de tipo inercial; la fem autoinducida se opone al cambio en la corriente como la inercia se opone al cambio en el movimiento.

Esta correspondencia tiene la ventaja de que permite resolver problemas de circuitos electromagnéticos como si fueran sistemas mecánicos. Obsérvese, finalmente, que la frecuencia natural de estos sistemas $\omega = \sqrt{k/m}$ y $\omega = 1/\sqrt{LC}$ están determinadas por propiedades inerciales (m y L) y elásticas (k y C). Un condensador es un “resorte eléctrico”.

29.3.3 Oscilaciones forzadas

Si en (29.3) se asume que la fem externa es oscilante puede escribirse para un circuito RLC:

$$\mathcal{E}_0 \sin \omega_e t - L \frac{dI}{dt} = IR + \frac{q}{C}.$$

Derivando respecto al tiempo se obtiene una ecuación que describe oscilaciones forzadas con amortiguación:

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \mathcal{E}_0 \omega \cos \omega_e t. \quad (29.18)$$

Esta ecuación describe el circuito de la figura 29.5.

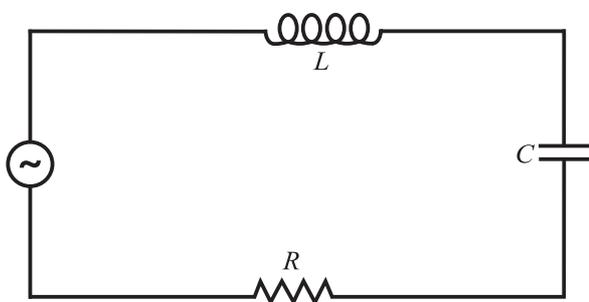


Figura 29.5. Circuito RLC con fem externa oscilante.



Vea el documento "Ecuaciones diferenciales" en su multimedia de *Oscilaciones y Campos*.

La comparación con (4.6) permite establecer la siguiente correspondencia: $x \leftrightarrow I$, $m \leftrightarrow L$, $k \leftrightarrow 1/C$, $\lambda \leftrightarrow R$, $F_0 \leftrightarrow \mathcal{E}_0\omega$, lo que muestra que la fuerza viscosa en el oscilador mecánico se corresponde con el efecto de disipación de Joule y que la fuerza externa tiene su equivalente en la fem de la batería. La ecuación (29.18) puede escribirse en la forma (4.7):

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\beta\frac{dI}{dt} + \omega_0^2I = \frac{\mathcal{E}_0\omega}{L} \cos \omega_e t, \quad (29.19)$$

con $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ y $2\beta = R/L$. Los desarrollos adicionales, del todo análogos a los de la sección 1.7, se proponen como problema al final del capítulo.

Módulo 30

Circuitos acoplados

Contenidos del módulo

- 30.1 Inducción mutua
- 30.2 El transformador

Objetivos del módulo

1. Definir la inducción mutua entre circuitos.
2. Definir el coeficiente de inducción mutua.
3. Establecer la diferencia entre inducción y autoinducción.
4. Estudiar los principios del transformador eléctrico.
5. Estudiar las relaciones entre voltaje, corriente y número de vueltas en un transformador.
6. Presentar las definiciones de primario y secundario de un transformador.

Preguntas básicas

1. ¿Qué se entiende por inductancia mutua? ¿Qué la diferencia de la autoinducción?
2. ¿De qué depende el coeficiente de inducción?
3. ¿En qué se basa un transformador eléctrico?
4. ¿En un transformador qué son el primario y el secundario?

Introducción

El efecto de autoinducción permite la generación de una fem aun cuando exista una sola espira sobre la cual cambie la corriente. En este módulo final se explora con más detalle el efecto de inducción entre dos espiras cercanas, lo que permite definir la inductancia mutua M , noción afín a la inductancia L . La interacción resultante entre circuitos cercanos permite el diseño de un aparato de alta utilidad en la transmisión eficiente de energía eléctrica, a través de redes, para largas distancias. A este artefacto, el transformador, se dedica la última sección.



Los transformadores permiten regular la corriente y el voltaje para transmitir electricidad a grandes distancias.

30.1 Inducción mutua

En el módulo anterior se ha considerado el efecto de inducción que una espira o una bobina ejerce sobre sí misma. Considérese ahora el efecto de inducción entre espiras o bobinas cercanas 1 y 2, con corrientes variables I_1 e I_2 y número de espiras N_1 y N_2 , como en la figura 30.1. Debido al cambio de flujo de 1 sobre 2 se induce una fem en 2, y debido al cambio de flujo de 2 sobre 1 se induce una fem en 1. El resultado neto es una interacción entre 1 y 2. A estas fem hay que adicionar las de autoinducción.

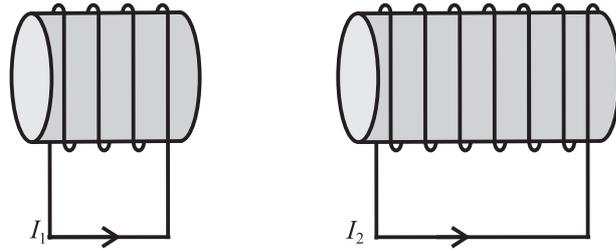


Figura 30.1. Dos circuitos interactúan debido a su inducción mutua.

Considérese primero la fem inducida en 2 debido a la variación de la corriente I_1 . Si $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ representa el flujo debido a 1 que atraviesa una vuelta de la bobina 2, el flujo total sobre 2 es $N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2}$ y esta cantidad es proporcional a I_1 , es decir:

$$N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} I_1,$$

donde $M_{1 \rightarrow 2}$ es el coeficiente de inductancia mutua.

Del mismo modo, $N_1 \Phi_{2 \rightarrow 1}$ es el flujo neto debido a I_2 sobre las N_1 espiras de 1, y como este flujo neto es proporcional a I_2 puede escribirse:

$$N_1 \Phi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} I_2.$$

Puede demostrarse que $M_{1 \rightarrow 2} = M_{2 \rightarrow 1}$ y será llamado M .

La fem inducida por 2 sobre las N_1 espiras de 1 es

$$V_1 = -N_1 \frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt},$$

y la fem inducida por 1 sobre las N_2 espiras de 2 es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

Ejemplo 30.1

Si la inducción mutua del sistema de la figura 30.1 es de $200 \mu\text{H}$ y las corrientes varían como $I_1 = 2t$ e $I_2 = 1,5t$, ¿cuál es la fem inducida en cada bobina?

Solución:

$$V_1 = -M \frac{dI_2}{dt} = -200 \times 1,5 = 300 \text{ V},$$

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = -200 \times 2 = 400 \text{ V}.$$

Ejemplo 30.2

En la figura 30.2 se muestra un solenoide de radio a y corriente I_2 colocado dentro de un solenoide mayor de radio b , n_1 espiras por unidad de longitud y corriente variable I_1 . Calcule la inductancia mutua y la fem inducida en la bobina interna si $I_1 = I_0 \sin \omega t$.

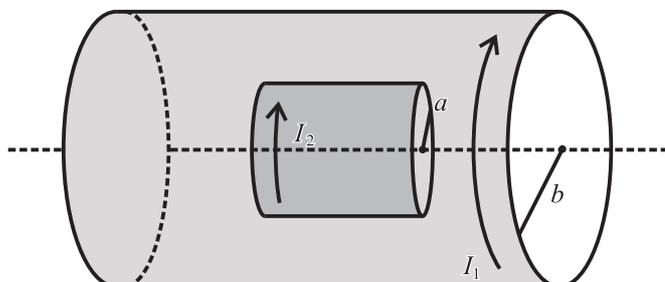


Figura 30.2. Geometría para el cálculo de la inductancia mutua entre dos bobinas.

Solución:

Es cierto que $N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2} = M I_1$, de modo que M se calcula como

$$M = \frac{N_2 \Phi_{1 \rightarrow 2}}{I_1}.$$

El flujo del solenoide grande sobre el pequeño ($\Phi_{1 \rightarrow 2}$) se debe a un campo magnético uniforme $B = \mu_0 I_1 n_1$; escogiendo un área transversa a B , el flujo tiene el valor $\Phi_{1 \rightarrow 2} = \mu_0 n_1 I_1 (\pi a^2)$, de modo que, reemplazando en M , se obtiene para la inductancia mutua

$$M = \mu_0 n_1 N_2 (\pi a^2).$$

La fem inducida en la espira pequeña es

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = (\mu_0 n_1 N_2 \pi a^2 I_0 \omega) \cos \omega t.$$

30.2 El transformador

Este aparato utiliza la inducción mutua para cambiar el voltaje suministrado por un circuito. Son instalados por las compañías de electricidad para reducir las pérdidas por efecto Joule en el transporte de energía eléctrica a grandes distancias.

En esencia un transformador consiste en un par de bobinas arrolladas sobre un núcleo de hierro laminado (figura 30.3) que logra concentrar altamente el flujo magnético. El diseño en láminas reduce las corrientes de Foucault y por tanto las pérdidas por calentamiento. La bobina *primaria* lleva una corriente I_1 y N_1 vueltas, y la *secundaria* una corriente I_2 y N_2 vueltas.

El flujo magnético es prácticamente el mismo sobre cada vuelta de cada bobina, es decir, en cada vuelta se induce casi la misma fem. Así, si $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ es el flujo total de la bobina 1 sobre cada vuelta de la bobina 2, entonces la fem total sobre 2 es

$$V_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{1 \rightarrow 2}}{dt}.$$

De modo análogo la fem total de la bobina 2 sobre la 1 es

$$V = -N_1 \frac{d\Phi_{2 \rightarrow 1}}{dt}.$$

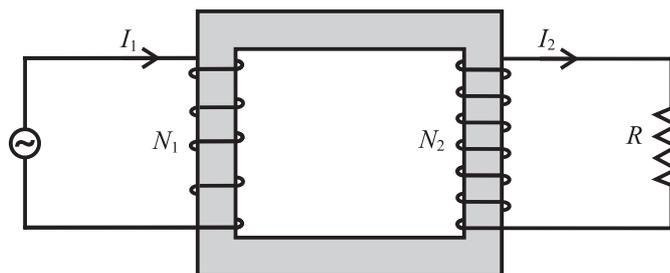


Figura 30.3. El transformador eléctrico.

Puesto que $\Phi_{1 \rightarrow 2}$ es muy cercano a $\Phi_{2 \rightarrow 1}$ se tiene que

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (30.1)$$

- Si $N_2 > N_1$ el transformador eleva el voltaje en 2. Se llama transformador elevador de voltaje.
- Si $N_2 < N_1$ el transformador reduce el voltaje en 2. Se llama transformador reductor de voltaje.

La eficiencia de un transformador común está entre 90 y 99 %, de modo que con buena aproximación puede decirse que las potencias de entrada y salida son iguales: $P_1 = P_2$, y como $P_1 = V_1 I_1$ y $P_2 = V_2 I_2$, puede asegurarse que:

$$1 = \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_2 I_2}{V_1 I_1} = \frac{N_2 I_2}{N_1 I_1},$$

tal que

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1}. \quad (30.2)$$

Un elevador de voltaje reduce la corriente en el secundario mientras un reductor de voltaje eleva la corriente en el secundario.

En la central hidroeléctrica el generador se conecta a la bobina primaria de un transformador elevador de voltaje y las líneas de transmisión se conectan a la bobina secundaria (230 000 V). En el primario la corriente es alta y el voltaje moderado, mientras en el secundario la corriente es baja y el voltaje alto. Puesto que la potencia disipada por efecto Joule es $P = I^2 R$, al reducir la corriente que va por la línea de transmisión las pérdidas por calentamiento se reducen notablemente. En la estación de distribución el voltaje se reduce hasta cerca de 20 000 V, y cuando el usuario va a recibir el servicio se disminuye el voltaje hasta 110-220 V, y se aumenta la corriente.

Ejemplo 30.3

Se propone pasar de 120 V a 12 V de modo que en el secundario la corriente sea de 350 mA. Si en el primario hay 400 vueltas, ¿cuántas habrá en el secundario y cuál será la corriente en el primario?

Solución:

De (30.1): $N_2 = 40$ vueltas.

De (30.2): $I_1 = 35$ mA.

Ejemplo 30.4

A la salida del generador en una central hidroeléctrica hay un voltaje de 14 000 V y

una corriente de 12 A; mediante un transformador se aumenta el voltaje a 140 000 y la resistencia de la red de distribución es de 100ω . ¿Qué corriente pasa por el secundario? ¿Cuál es la pérdida de potencia?

Solución:

De (30.1) y (30.2):

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{I_1}{I_2}.$$

Se sigue que la corriente en el secundario es de $I_2 = 12 \times 14000/140000 = 1,2$ A y la relación del número de vueltas es $N_2 = 10N_1$.

La pérdida de potencia por efecto Joule es $P = I_2^2 R = (1,2)^2 \times 100 = 144$ J; si no se utiliza el transformador la corriente transmitida de 12 A se transmite con una pérdida de $P' = I_1^2 R = (12)^2 \times 100 = 14\,400$ J, de modo que la relación es de

$$\frac{P'}{P} = 100.$$

La utilización del transformador reduce la pérdida a la centésima parte.

Problemas

Capítulo 1

Nota: en todos los casos asuma $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

1. Un objeto describe un M.A.S. con una aceleración máxima de 10 m/s^2 , tiene un período de 2 s y una fase de 90° . Escriba las expresiones para su posición, velocidad y aceleración, en función del tiempo.
2. ¿A qué distancia del punto de equilibrio se encuentra el bloque de un sistema masa-resorte, cuando su velocidad es la mitad de la velocidad máxima? ¿Cuál es su velocidad cuando su posición es la mitad de su amplitud?
3. Una partícula vibra con una frecuencia de 100 Hz y una amplitud de 5 mm. Calcule la velocidad y la aceleración cuando pasa por el punto de equilibrio. Escriba la posición como función del tiempo.
4. Una partícula vibra a 100 ciclos/s y con una amplitud de 1,0 m. ¿Cuál es su frecuencia? Calcule su velocidad, su posición y su fase cuando pasa por el punto $x = 0,7 \text{ cm}$.
5. Sea un M.A.S. con $x_0 = 10 \text{ cm}$ y un período de 4 s. Cuando la partícula pasa por su máximo de distancia, ¿cuál es su aceleración?
6. Demuestre que la posición y la velocidad en el M.A.S. pueden escribirse en la forma:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t ,$$
$$v = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t .$$

7. Un oscilador armónico tarda 10 segundos en realizar cinco oscilaciones. Encuentre el período, la frecuencia y la frecuencia angular.
8. Una masa $m = 0,5 \text{ g}$ unida a un resorte se suelta desde $x_0 = 0,1 \text{ m}$. Calcule su período, su frecuencia y su fase.
9. Un cuerpo de $0,5 \text{ kg}$ oscila con un período de 1 s y su elongación es de 10 cm. ¿Cuál es su energía total?
10. Una masa de $1,5 \text{ kg}$, unida a un resorte, comienza su movimiento con $x_0 = 10 \text{ cm}$ y $v_0 = 20 \text{ cm/s}$. ¿Cuál es el valor de la constante del resorte? ¿Cuál su energía mecánica?
11. Una partícula de masa $m = 0,5 \text{ kg}$ realiza un M.A.S. de amplitud 1,0 m, con un período de 0,25 s. Calcule la aceleración, la fuerza que ejerce el resorte y la energía cinética cuando su posición es $x = 6 \text{ cm}$.
12. Una masa de 100 g unida a un resorte de constante elástica 40 N/m oscila sobre una superficie horizontal con amplitud de 5 cm. Calcule la velocidad de la masa cuando $x = 0,7 \text{ cm}$, y la energía total del sistema.
13. Un cuerpo de masa m cuelga de un resorte de constante k que lo estira una distancia h . Demuestre que el período de sus oscilaciones es el mismo de las pequeñas oscilaciones de un péndulo de longitud h .
14. El período de oscilación de un cuerpo colgado de un resorte es 0,5 s. ¿En cuántos centímetros la masa alargó el resorte?
15. Un bloque de $0,7 \text{ kg}$ cuelga de un resorte de constante k . Si se deja que el bloque alcance suavemente su posición de equilibrio el resorte se habrá deformado 10 cm. A continuación el bloque se jala hacia abajo otros 10 cm y se deja en libertad. Evalúe la constante del resorte, la amplitud y el período. ¿Cuál es la energía potencial cuando el muelle se libera?
16. Para un péndulo simple de 2 m, que oscila con una amplitud de 3° , exprese el ángulo que forma con la vertical y su velocidad angular como funciones del tiempo.

17. ¿Cómo cambia el período de un péndulo simple de pequeña oscilación, si su longitud se reduce a la mitad?
18. ¿Cuánto se retardaría un péndulo en 24 horas si su longitud se aumentase en 1 mm?
19. Un reloj de péndulo en tierra registra un tiempo de 3 minutos mientras un cohete asciende hasta su altura máxima con una aceleración de 3 m/s^2 . Demuestre que la relación entre los dos períodos de dos péndulos, uno en tierra y otro igual en el cohete (T y T') es $T = T'/\sqrt{1+a/g}$.
20. Un péndulo simple colgado en el interior de una cúpula tiene un período de 15 s. ¿Qué tan alta es la cúpula?
21. Si la aceleración de la gravedad en la superficie de la Luna es $1/6$ de su valor en la superficie terrestre, ¿cuál es el período de un péndulo en la Luna, si en la Tierra es de 1 s?
22. ¿Cuál es el período de un péndulo en un ascensor en caída libre?
23. Un disco uniforme de radio de 20 cm con una masa de 0,5 kg oscila alrededor de un eje que pasa por su borde y es paralelo al eje del disco. Calcule su período para pequeñas oscilaciones.
24. Un péndulo físico oscila con una frecuencia de 0,7 Hz; si su masa es de 2 kg y su punto de suspensión se sitúa a 0,4 cm del centro de masa, ¿cuál es su momento de inercia?
25. Un disco de radio 20 cm está unido a una fibra que va a lo largo de su eje. Si el período de este péndulo de torsión es de 3 s, ¿cuál es la constante de torsión κ de la fibra?
26. Demuestre que el movimiento resultante de la combinación de $x = A \sin \omega t$ y $y = B \sin (\omega t + \alpha)$ es la siguiente elipse rotada:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

27. Un bloque de 2 kg oscila inicialmente con una amplitud de 10 cm. Después de 2 minutos su amplitud ha decrecido hasta 6 cm. ¿Cuál es el valor de la constante de amortiguación β ?
28. Sea un oscilador poco amortiguado con $\beta^2 = 0,002\omega^2$. Si la masa se libera en $t = 0$ desde el reposo, con $x_0 = 0,5 \text{ m}$, calcule la fase y la amplitud.
29. Un bloque suspendido de un resorte oscila inicialmente con una amplitud de 20 cm. Después de 2 minutos la amplitud ha disminuido a la mitad. ¿Después de cuánto tiempo habrá disminuido a la cuarta parte?
30. Asuma que para un oscilador amortiguado $\beta \ll \omega_0$, tal que la amplitud permanece aproximadamente constante durante algunas pocas oscilaciones. Demuestre que la energía se expresa como $E \simeq \frac{1}{2}\omega_0^2 A^2 e^{-2\gamma t}$ y que la potencia disipada, definida por $P = dE/dt$, es $P = E/\tau$, siendo τ el tiempo necesario para que la amplitud de la oscilación se reduzca a la mitad.
31. Supóngase un sistema masa-resorte con período de 3 s y amplitud de 0,5 m. Si después de 100 oscilaciones su amplitud se ha reducido a 0,3 m, ¿cuál es el valor de β ?
32. Demuestre que la velocidad en un movimiento subamortiguado puede escribirse en la forma:

$$v = -A\omega_0 e^{-\beta t} \sin (\omega t + \alpha + \delta),$$

$$\text{con } \tan \alpha = \frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}.$$

33. Utilizando la expresión para la energía mecánica total, y por derivación temporal, demuestre que en el movimiento oscilatorio amortiguado la potencia disipada es $dE/dt = -\lambda v^2$, de modo que la energía *siempre* decrece con el tiempo.

34. Para un oscilador forzado subamortiguado y resonante, es decir $\omega_e = \omega_0$, la ecuación de movimiento es:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \omega_0 t.$$

Demuestre, por sustitución directa, que el desplazamiento de la masa está dado por:

$$x = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t.$$

Interprete el último término.

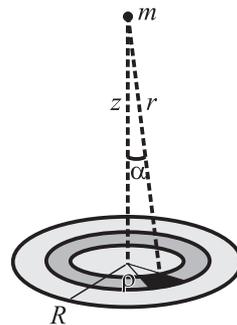
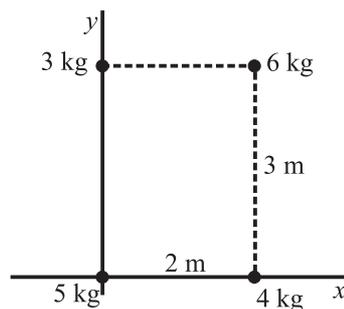
35. Demuestre que el máximo de B en (4.9) ocurre para $\omega_e = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ y está dado por

$$B_m = \frac{F_0}{2m\gamma^2 \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}}.$$

36. Demuestre que el máximo de v_0 en (4.11) ocurre para $\omega_e = \omega_0$.
37. Demuestre que las unidades del período en las ecuaciones $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ $T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$ son las de tiempo.
38. Un péndulo cónico consiste de una pequeña masa unida a una cuerda, de modo tal que la masa describe en su movimiento un círculo horizontal. Demuestre que el período de este péndulo es $T = 2\pi\sqrt{(l/g) \cos \theta}$.
39. Considere un cubo de lados a, b, c , que flota en agua con su lado a vertical. La densidad del bloque es ρ en g/cm^3 y la del agua la supondremos igual a 1 g/cm^3 . Si el bloque se empuja dentro del líquido y se suelta, demuestre que su movimiento es armónico simple. ¿Cuál es su frecuencia?
40. Un cuerpo pequeño se desliza sin fricción en el fondo de una cavidad esférica de radio R . Demuestre que el período de sus pequeñas oscilaciones es el mismo que el de un péndulo simple de longitud R .
41. Una esfera sólida de radio R rueda sin deslizar en un canal cilíndrico de radio $5R$. Para pequeñas oscilaciones demuestre que la esfera ejecuta un M.A.S. con $T = 2\pi\sqrt{28R/5g}$.

Capítulo 2

1. Compare la fuerza de atracción entre dos esferas de 10 kg cada una y separadas 1 m, con la atracción entre la Tierra y una de las esferas situada sobre su superficie.
2. ¿Cuál es la aceleración de gravedad en la superficie del Sol?
3. Cuando se va desde el piso hasta la terraza de un edificio de 50 m, ¿cuál es el cambio en el valor de la aceleración de gravedad?
4. ¿Cuánto pesaría en la superficie del Sol un hombre de 70 kg? ¿Y en la Luna?
5. Un satélite orbita la Tierra en un círculo de radio 300 km. Encuentre su velocidad orbital y su período de revolución.
6. Calcule las componentes del campo gravitacional en el centro de la figura 1.
7. Calcule el campo gravitacional sobre el eje del anillo uniforme de radio a y masa M de la figura 2.
8. Calcule el campo y el potencial gravitacional en un punto sobre el eje de una placa circular uniforme de radio R y densidad superficial de masa σ constante (figura 2).



Figuras 1 y 2.

9. Calcule el campo gravitacional debido a una placa homogénea e infinita de densidad superficial de masa σ .
10. Calcule el potencial gravitacional en el exterior de un cascarón esférico de radio R . Demuestre que el campo en el interior del cascarón es nulo.
11. Calcule el potencial gravitacional a una distancia h del centro de una esfera de radio R , para $r < R$ y $r > R$.
12. Calcule las componentes del campo gravitacional y el potencial en el punto P del semicírculo homogéneo de radio a y masa m de la figura 3.

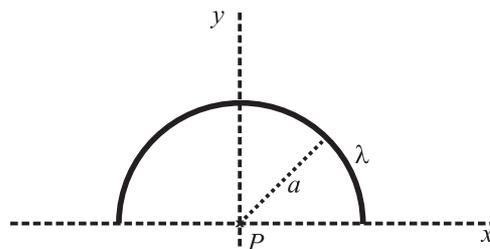


Figura 3.

13. Calcule las componentes del campo gravitacional en el punto P de la figura 4, si el arco de radio a tiene una densidad lineal λ y el arco de radio b una densidad 2λ .

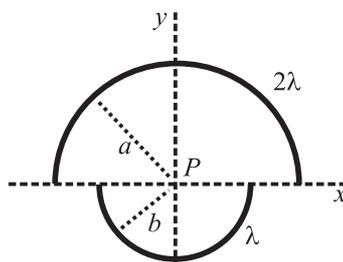


Figura 4.

14. ¿Cuál es el campo de gravedad en la superficie de Marte, si su masa es 0,107 de la masa de la Tierra y su radio es 0,53 del terrestre?
15. Calcule la máxima distancia a la que el cometa Halley puede estar del Sol si su mínima distancia es cercana a 0,57 unidades astronómicas y su período es de 75,6 años.
16. Un satélite que orbita la Tierra tiene un perigeo de 450 km y un apogeo de 2200 km. ¿Cuál es la relación entre sus velocidades en el perigeo y el apogeo?
17. Un satélite geoestacionario es aquel que se mantiene en el espacio sobre el mismo punto del ecuador terrestre, es decir, su período de rotación es el mismo que el de la Tierra. ¿A qué distancia del centro de la Tierra orbita?
18. Un cuerpo se suelta desde una altura h por encima de la superficie terrestre. Demuestre que la velocidad que alcanza al llegar a la superficie es
- $$v^2 = 2GM(1/R - 1/h).$$
19. Si un meteorito de 200 kg que viene del espacio lejano con velocidad inicial despreciable choca la Tierra, ¿con qué energía cinética llega a la superficie?
20. Calcule la energía potencial de una masa m , a) en la superficie terrestre, b) a una distancia igual a la de la Luna. ¿Cuál es la relación de las energías potenciales en las superficies de la Tierra y la Luna?
21. Un proyectil se lanza verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de 10 000 m/s. Ignorando la fricción atmosférica, ¿a qué altura alcanzaría a subir?
22. ¿Qué velocidad adicional debe imprimirse a un satélite geoestacionario para que escape del campo gravitacional terrestre?
23. Dos masas esféricas iguales están separadas una distancia L (figura 5). Una tercera masa m se suelta desde un punto P equidistante de las dos masas. Calcule la aceleración de m . Demuestre que, para pequeñas distancias z , el movimiento es armónico simple.

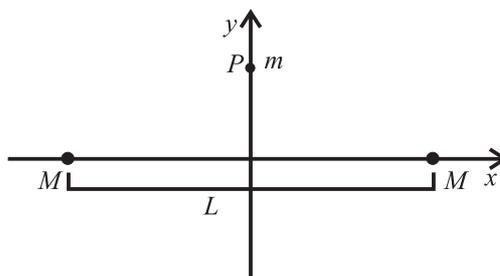


Figura 5.

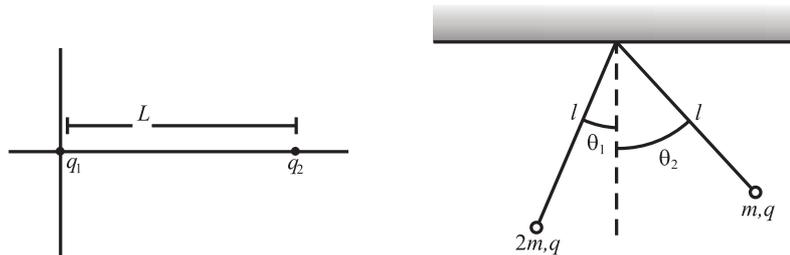
24. ¿Cuánto trabajo es necesario realizar para mover una masa de 100 kg de 1 a 3 radios terrestres?
25. Calcule el trabajo necesario para mover un satélite que orbita un planeta de masa M , de una órbita de radio R_1 a otra superior de radio R_2 .
26. Un satélite se mueve en órbita circular alrededor de un planeta de radio R , a una distancia h de su centro y con un período T . Demuestre que la densidad del planeta, supuesto homogéneo, es

$$\rho = \frac{3\pi}{gT^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^3 .$$

27. Una partícula m se deja caer libremente desde la superficie de la Tierra, moviéndose a lo largo de un canal diametral que la atraviesa. ¿Cuál es la ecuación de movimiento de la masa? Demuestre que el movimiento es armónico simple. ¿Cuál es el período? Calcule la velocidad cuando pase por el centro de la Tierra.

Capítulo 3

1. Demuestre que la relación entre la fuerza eléctrica y la gravitacional entre un protón y un electrón es $2,227 \times 10^{39}$. La fuerza gravitacional, en consecuencia, no puede responder por la existencia de los átomos, dado que es una fuerza considerable solo para objetos de gran masa.
2. ¿En qué punto sobre el eje x , en la figura 1, la fuerza ejercida por las dos cargas positivas q_1 y q_2 , sobre una tercera, es cero?
3. Dos cargas de igual magnitud y masa, una el doble de la otra, están suspendidas de cuerdas de igual longitud como lo indica la figura 2. ¿Cuáles son los ángulos θ_1 y θ_2 ?



Figuras 1 y 2.

4. ¿Cuál es la fuerza entre los dos protones en la molécula de hidrógeno, si su separación media es 40 nm?
5. Dos cargas iguales de igual masa están suspendidas de cuerdas l y $2l$, como en la figura 3. ¿Cuáles son los ángulos θ_1 y θ_2 ?

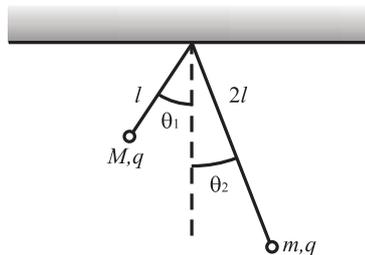
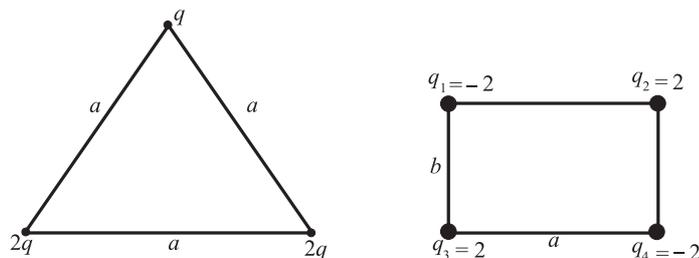


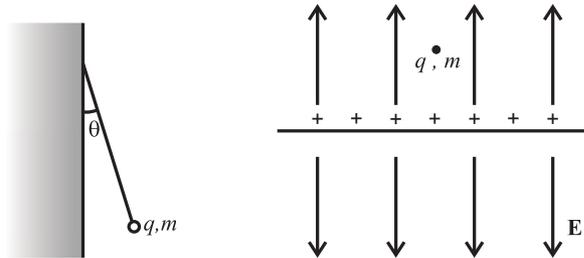
Figura 3.

6. ¿En qué punto del plano en que se ubican las tres cargas de la figura 4 el campo eléctrico es nulo? ¿Cuáles son las componentes del campo \mathbf{E} en el centro del triángulo?
7. Calcule el campo eléctrico en el centro del rectángulo de la figura 5.



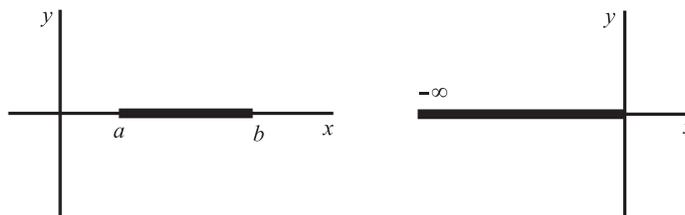
Figuras 4 y 5.

8. Dibuje las líneas de campo en el plano de un sistema de tres cargas iguales colocadas en los vértices de un triángulo equilátero.
9. Una carga puntual q se encuentra unida a una placa plana homogénea con densidad superficial de carga σ , por medio de un hilo, como muestra la figura 6. Si la masa de la partícula es m , ¿cuál es el ángulo que forma el hilo con la placa?
10. Una partícula de carga q y masa m se encuentra en equilibrio estático sobre una placa plana de densidad superficial σ constante, como indica la figura 7. ¿Cuál ha de ser el valor de σ ?



Figuras 6 y 7.

11. Evalúe las componentes cartesianas del campo eléctrico de la varilla homogénea de longitud $b - a$ que se muestra en la figura 8.
12. Calcule el campo eléctrico en el origen coordenado debido a la varilla homogénea seminfinita de la figura 9.



Figuras 8 y 9.

13. Calcule el campo eléctrico en el punto de coordenadas $(l/2, l/2)$ de la figura 10. Las dos varillas perpendiculares de longitud l son homogéneas.

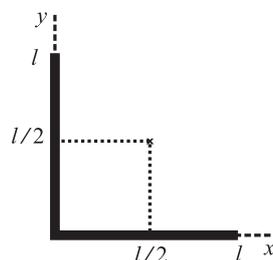
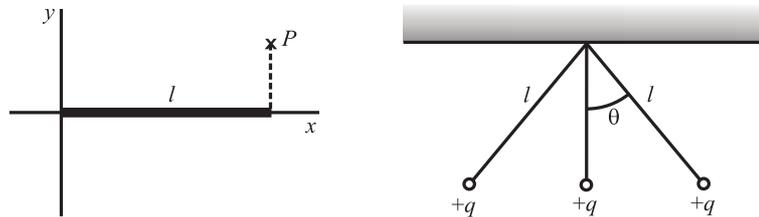


Figura 10.

14. Demuestre que el campo eléctrico sobre el eje de un anillo homogéneo de radio a y carga Q es máximo en el punto $z = a\sqrt{2}$ y tiene el valor $E_m = Q/6\sqrt{3}\pi\epsilon_0 a^2$.
15. Demuestre que el campo de un disco de radio R y densidad superficial σ visto desde $z \gg R$ es el mismo que el de una carga puntual $Q = 4\pi\sigma R^2$.

16. Demuestre que el campo de un anillo visto desde $z \gg R$ es el mismo que el de una carga puntual.
17. Calcule el campo eléctrico en el interior y el exterior de una esfera homogénea de carga Q y radio R .
18. ¿Qué carga q debe colocarse en el eje de un anillo homogéneo de carga Q y a distancia h para que permanezca en equilibrio? La carga q tiene masa m .
19. Un electrón entra a un campo eléctrico de 5×10^3 N/C, en la misma dirección del campo. ¿Qué aceleración adquiere? ¿Cuánto recorre antes de llegar al reposo?
20. Calcule en el punto P , de la figura 11, el campo eléctrico de una varilla inhomogénea de longitud l y $\lambda = \lambda_0(1 - x/l)$.
21. Calcule el valor de la carga que mantiene en equilibrio el sistema de la figura 12, con $\theta = 30^\circ$ y $l = 0,5$ m, en presencia de la gravedad terrestre.

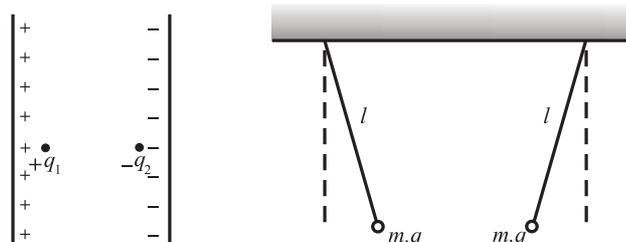


Figuras 11 y 12.

22. Calcule el campo eléctrico en el punto P a lo largo del eje de una varilla homogénea de longitud l y carga Q , si $x < l$.
23. Calcule el campo eléctrico en el centro de una espira semicircular inhomogénea de radio a y $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$.
24. Calcule el campo eléctrico en el centro de una espira inhomogénea de radio a y $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$.
25. Una carga puntual $-|q|$ se deja en libertad en el eje de un anillo homogéneo de carga Q y radio a . Demuestre que la carga oscila de modo armónico simple con frecuencia angular

$$\omega = \left(\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m a^3} \right).$$

26. Muy cerca a las paredes internas de un par de placas paralelas de cargas opuestas se liberan dos cargas q_1 y q_2 como indica la figura 13. ¿En qué punto, respecto a la placa de la izquierda, se encuentran? Considere solo la interacción entre las cargas y las placas.
27. Un par de cargas iguales y de signo opuesto y con masas iguales están suspendidas de dos cuerdas, como indica la figura 14. Expresar el ángulo θ en términos de los otros parámetros.



Figuras 13 y 14.

28. Un electrón se deja libre cerca de la placa negativa de un par de placas paralelas de signo contrario e igual densidad de carga σ . Si la distancia entre las placas es l , calcule: a) el campo eléctrico entre las placas, b) la aceleración, c) la velocidad al llegar a la segunda placa.
29. Si un electrón tiene una energía cinética de 10 eV, ¿qué velocidad lleva?
30. Calcule el potencial eléctrico en el interior y el exterior de una esfera homogénea de carga Q y radio R .
31. La distribución de cargas de la figura 15 se conoce como *cuadrupolo eléctrico*. Calcule el potencial y el campo eléctrico en un punto sobre el eje y . ¿Cuál es la dependencia de \mathbf{E} con y , si $y \gg a$?

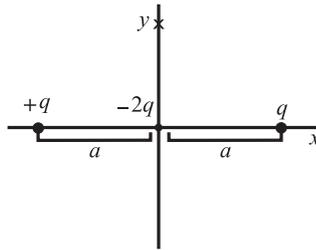


Figura 15.

32. Calcule el potencial en el punto P sobre el eje de un cilindro homogéneo de radio R y longitud l , con carga Q (figura 16).

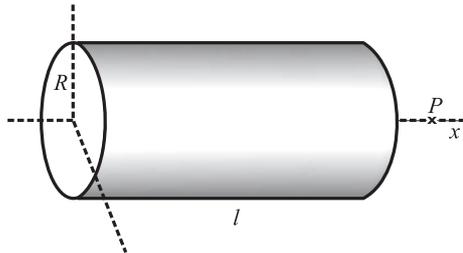


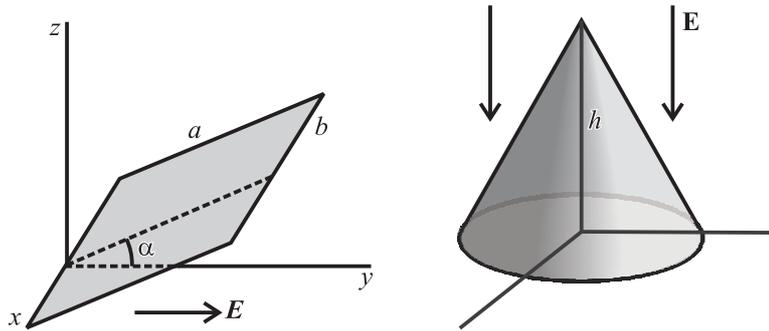
Figura 16.

Capítulo 4

1. Calcule el flujo de un campo eléctrico constante de dirección y a través de la placa plana mostrada en la figura 1.
2. Calcule el flujo del campo eléctrico sobre la placa del problema anterior si

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{i}} + E_y \hat{\mathbf{j}}.$$

3. Calcule el flujo del campo \mathbf{E} constante a través del cono de la figura 2.



Figuras 1 y 2.

4. Determine el flujo a través de cada una de las superficies cerradas mostradas en la figura 3.

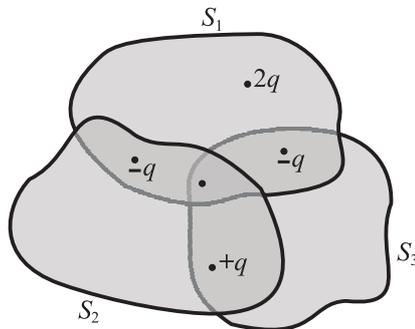
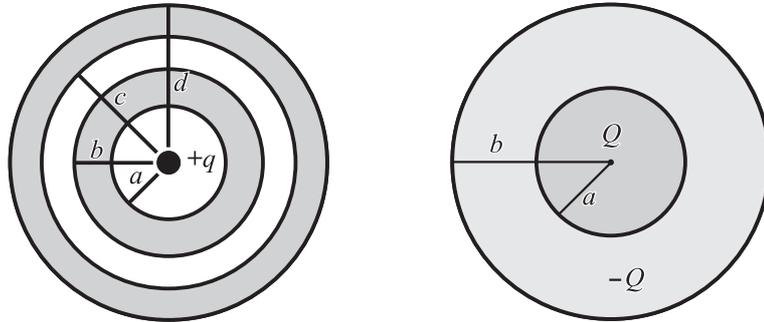


Figura 3.

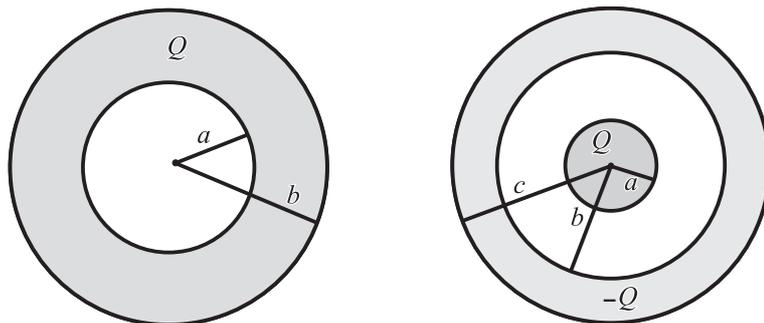
5. La densidad volumétrica de carga en una esfera es de la forma $\rho = \rho_0(1 - r^2/a^2)$, con $r \leq a$ y donde a es el radio de la esfera. ¿Cuál es su carga total? ¿Cuál es el campo dentro y fuera de la esfera?
6. Una carga puntual se coloca en el centro de un cascarón esférico conductor neutro de radio a . ¿Cuál es el campo dentro y fuera?
7. Si la densidad superficial de carga sobre un cascarón esférico es σ , demuestre que el campo E fuera de él es σ/ϵ_0 .
8. Una placa cuadrada se coloca perpendicular a un campo E uniforme. ¿Qué carga superficial aparece sobre cada lado de la placa?
9. Una carga puntual q^+ está rodeada por dos cascarones conductores esféricos neutros de radios a, b y c, d , como en la figura 4. Calcule el campo E en las diferentes zonas.

10. Una esfera de carga uniforme Q y radio a está rodeada por un cascarón uniforme de carga $-Q$ y radios a y b (figura 5). Calcule los campos en las distintas zonas.



Figuras 4 y 5.

11. Un cascarón esférico de carga uniforme Q tiene radios a y b (figura 6). Calcule los campos en las diferentes zonas.
12. Una esfera de carga uniforme Q y radio a está rodeada por un cascarón esférico conductor con carga $-Q$ y radios b y c , como en la figura 7. Calcule los campos en las distintas zonas.

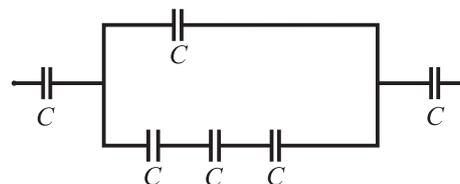
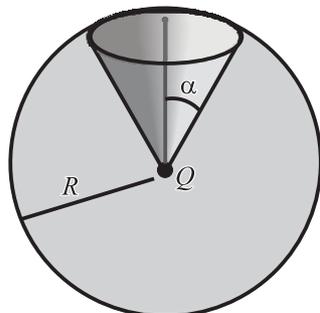


Figuras 6 y 7.

13. Un alambre recto muy largo de densidad lineal de carga λ está rodeado por un cascarón cilíndrico conductor de radios a y b . Calcule el campo E en las distintas zonas.
14. Una carga puntual q está en el centro de una esfera de radio R (figura 8). Demuestre que el flujo a través de un cascarón de ángulo polar α es

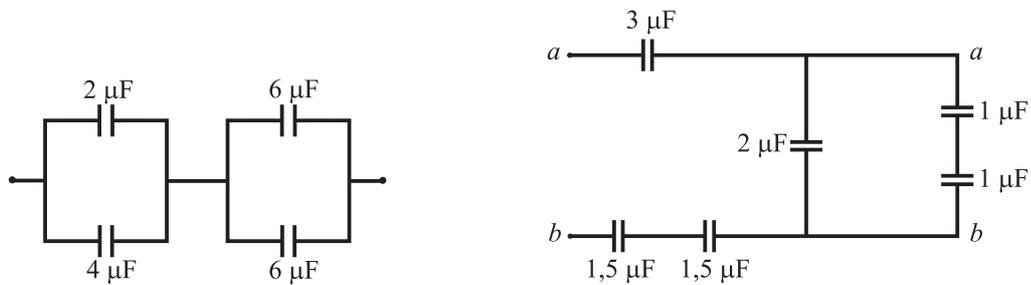
$$\Phi = \frac{Q}{2\epsilon_0}(1 - \cos \theta).$$

15. Calcule la capacitancia equivalente del sistema de la figura 9.



Figuras 8 y 9.

16. Demuestre que la susceptibilidad eléctrica χ_e es una cantidad adimensional.
17. Calcule la capacitancia equivalente del arreglo de la figura 10.
18. ¿Cuál es el condensador equivalente al de la figura 11? ¿Qué carga hay en el condensador de $3 \mu\text{F}$, si la diferencia de potencial entre a y b es de 12 V ?



Figuras 10 y 11.

19. En referencia a la figura 12, se carga primero C_1 cerrando A_1 , con A_2 abierto; luego se abre A_1 y se cierra A_2 para cargar C_2 . ¿Cuál es la carga inicial de C_1 y la final en cada condensador?

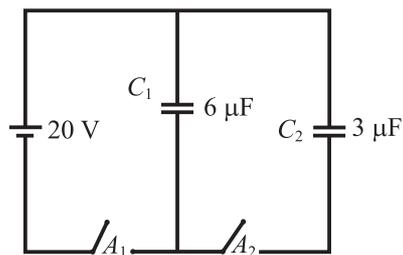


Figura 12.

20. Cuando la diferencia de potencial aplicada a un condensador aumenta en 30 V su carga aumenta en 10^{-4} C . ¿Cuál es la capacidad?
21. ¿Cuál es la capacitancia de un condensador esférico de radios 10 cm y 15 cm ? ¿Cuál es la carga sobre cada placa si la diferencia de potencial es de 12 V ?
22. Demuestre que la capacitancia de un condensador cilíndrico de radios R_1 y R_2 y longitud L es

$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(R_2/R_1)}.$$

23. Un condensador esférico tiene radios R_1 y R_2 . Un condensador cilíndrico tiene radios R_1 y R_2 . ¿Qué longitud debe tener el cilindro si las dos capacitancias son iguales?
24. En la figura 13 se muestra un condensador de placas paralelas de ancho L en cuyo interior se coloca una placa dieléctrica ϵ de espesor $l < L$ que divide el espacio interno en tres zonas. Calcule los campos E y D en las tres zonas, la polarización y las cargas superficiales y netas, si la carga libre es σ . Utilice las gaussianas indicadas con líneas punteadas.

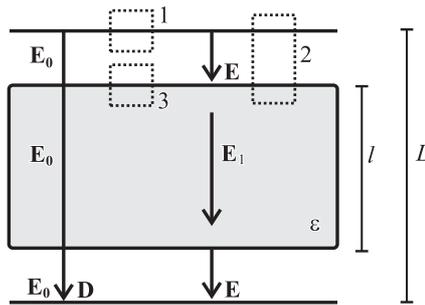
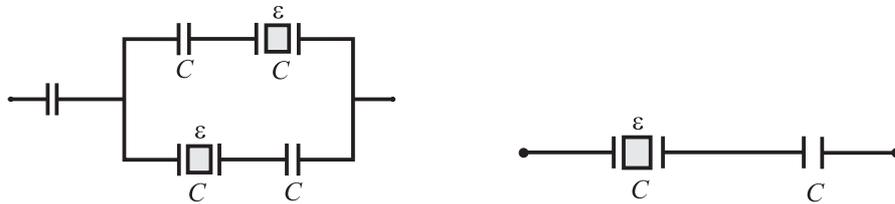


Figura 13.

25. Un condensador sin dieléctrico se conecta a una diferencia de potencial V_1 . Si se le introduce un dieléctrico ϵ su carga cambia en ΔQ . ¿Cuál es el valor de ϵ ?
26. Calcule la capacitancia equivalente a los sistemas de las figuras 14, 15 y 16.



Figuras 14 y 15.

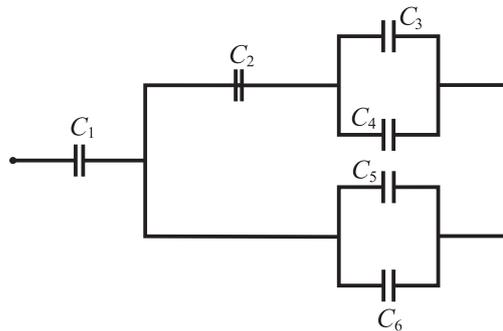


Figura 16.

27. Pruebe que

$$E = \frac{1}{2}\epsilon \int E^2 dV$$

puede obtenerse siguiendo el procedimiento del ejemplo 16.2 para un condensador esférico.

28. Una batería típica de automóvil tiene una diferencia de potencial entre sus bornes de 12 V y almacena $3,6 \times 10^6$ J. ¿Qué capacitancia debe tener un condensador que almacene esta energía?
29. Un condensador de placas paralelas con una separación entre ellas de 1 mm tiene una capacitancia de 10^{-9} F si hay vacío entre sus placas. Si se conecta a una batería de 12 V, ¿qué campo eléctrico hay entre las placas? ¿Qué carga tienen las placas? ¿Cuál es la energía almacenada?
30. Demuestre que la energía eléctrica de una distribución de volumen de carga uniforme Q de radio R es:

$$E = \frac{3Q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

si $\epsilon = \epsilon_0$ en todo el espacio.

31. ¿Cuál es la energía eléctrica almacenada en un condensador cilíndrico de radios R_1 y R_2 y longitud L ?
32. Un cascarón esférico conductor de radio R_1 está rodeado de un cascarón dieléctrico de radios interior y exterior a y b ; hay un cascarón conductor externo de radio $R_2 > b$ (figura 17). ¿Cuál es la capacitancia de este condensador?

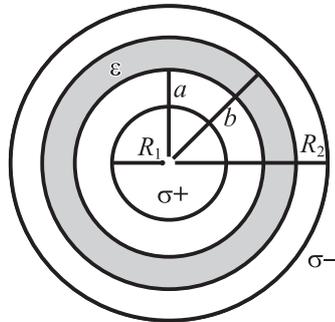
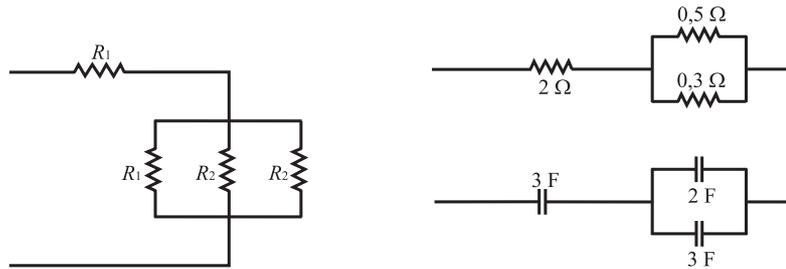


Figura 17.

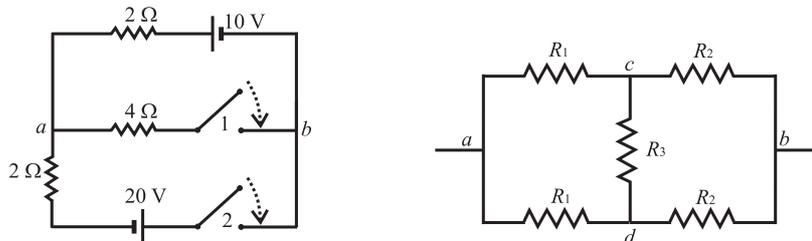
Capítulo 5

- Un alambre de cobre de 5 cm de longitud tiene una resistencia de 5Ω a 20°C . ¿Cuál es su radio?
- En referencia a la figura 1, ¿cuál ha de ser la relación R_1/R_2 para que la resistencia equivalente sea igual a R_2 ?
- Calcule la resistencia y la capacidad equivalentes al arreglo de la figura 2.



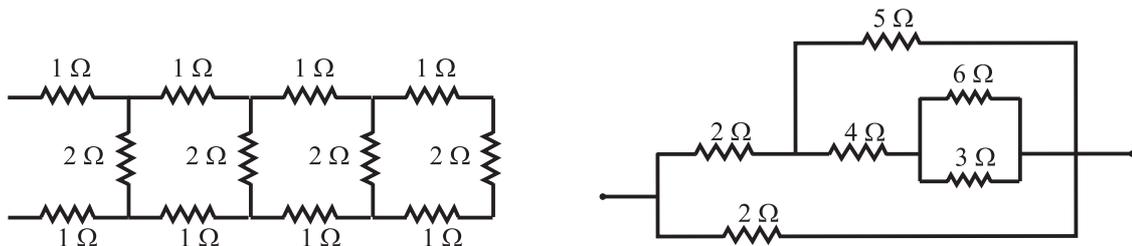
Figuras 1 y 2.

- En referencia a la figura 3, calcule las corrientes en el circuito con:
 - 1 abierto, 2 cerrado.
 - 1 cerrado, 2 abierto.
 - 1 y 2 cerrados.
 - En el último caso, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b ?
 - En la figura 4, ¿qué diferencia de potencial hay entre los puntos a y b ? ¿Entre c y d ? ¿Cuál es la resistencia equivalente? Utilice $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$ y $R_3 = 6 \Omega$.



Figuras 3 y 4.

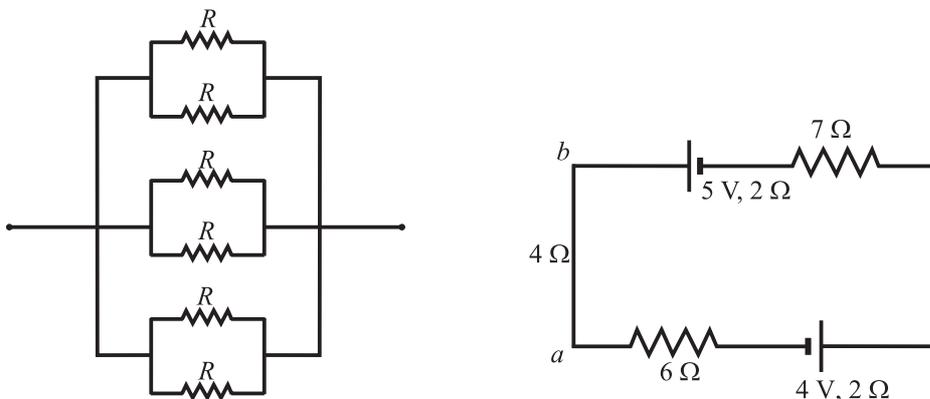
- Calcule la resistencia equivalente al arreglo de las figuras 5 y 6.



Figuras 5 y 6.

- Demuestre que la resistencia equivalente de la figura 7 es $R/9$.

7. En el circuito de la figura 8, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los puntos a y b ? ¿Cuál es la corriente?



Figuras 7 y 8.

8. Evalúe las corrientes en el circuito de la figura 9.

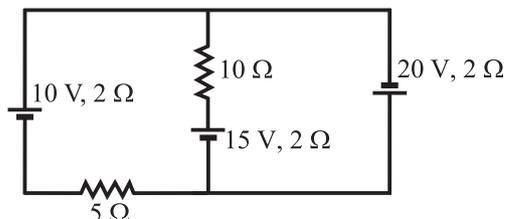


Figura 9.

9. Una batería de 12 V tiene una resistencia interna de $0,005 \Omega$; si por ella pasa una corriente de 250 A, en el mismo sentido de la fem, ¿qué diferencia de potencial hay entre sus bornes?
10. Si la máxima potencia recomendada para una resistencia de 1000Ω es $0,25 \text{ W}$, ¿cuál es la máxima corriente? ¿La máxima diferencia de potencial?
11. ¿Cuánta energía disipa una bombilla de 60 W conectada a una fuente de 120 V , si se deja encendida un día?
12. Si se conectan en serie dos resistencias, de 200 y 400Ω , cada una de las cuales tiene una potencia máxima recomendada de $0,4 \text{ W}$, ¿cuál es la máxima corriente? ¿La máxima diferencia de potencial? ¿Y si las resistencias se conectan en paralelo?
13. ¿Cuánta ha de ser la fem en la batería de la figura 10 para que la corriente sea de 2 A en sentido antihorario? ¿Y si el sentido es horario?

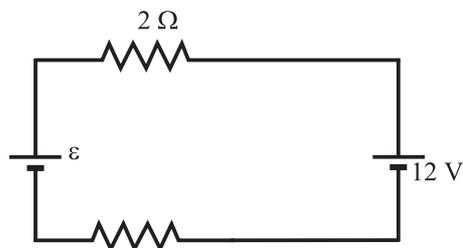
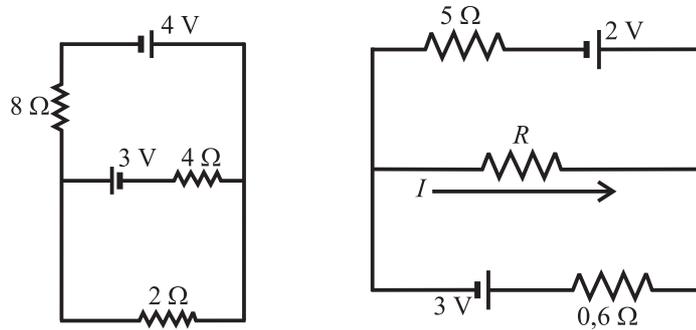


Figura 10.

14. En el circuito de la figura 11 evalúe la corriente que pasa por cada resistencia.

15. En el circuito de la figura 12, ¿cuál es el valor de la resistencia R si la corriente I es de 0,5 A?



Figuras 11 y 12.

16. **Puente de Wheatstone.** Este artefacto se utiliza medir resistencias (figura 13). Se quiere evaluar R conocidos R_1, R_2 y R_4 . R_2 y R_4 son fijos y R_1 es variable pero se puede medir en cada instante. A es un amperímetro que permite medir la corriente que pasa entre a y b . Si R_1 se varía hasta que la corriente marcada por A sea cero, demuestre que

$$R = \frac{R_1 R_4}{R_2}.$$

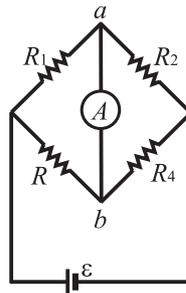


Figura 13.

17. En la resistencia de un tipo de cafetera eléctrica circula una corriente de 3 A si el voltaje es de 220 V. ¿Qué potencia disipa? Si esta cafetera calienta 0,5 l de agua desde 20 °C hasta la ebullición en 1 minuto, ¿cuánto calor ha transferido al agua?
18. En la figura 14, ¿cuál es la fem si $I = 2$ A?

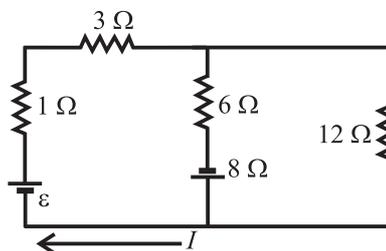


Figura 14.

19. Un condensador en un circuito RC se carga hasta un 50% en 1 s. ¿Cuál es su constante de tiempo?
20. El material dieléctrico en el interior de un condensador tiene una conductividad muy pequeña pero no nula, por lo que el condensador se descarga muy lentamente. Si un condensador de 5 μ F pierde la mitad de su carga en 2 horas, ¿cuál es la resistencia interna del condensador?

21. En la figura 15 calcule la corriente en la resistencia de $2\ \Omega$.

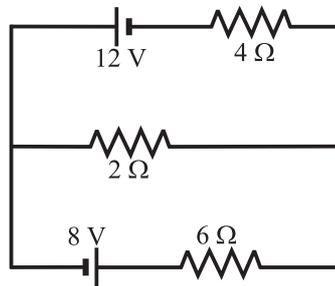


Figura 15.

22. Un condensador de $500\ \text{pF}$ tiene una carga inicial de $5\ \mu\text{C}$. Si se descarga a través de una resistencia de $1,5 \times 10^7\ \Omega$, ¿cuál es su constante de tiempo? ¿En cuánto tiempo se descarga en un 90%?

Capítulo 6

- Una partícula con carga q y masa m entra a una región donde hay un campo magnético homogéneo B con velocidad v (figura 1). Calcule la distancia y de salida.

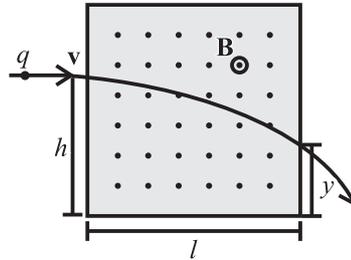


Figura 1.

- ¿Cuál debe ser el valor del campo B para que la carga q , de masa m , que entra con velocidad v horizontal, salga rozando el borde de la placa? (figura 2).

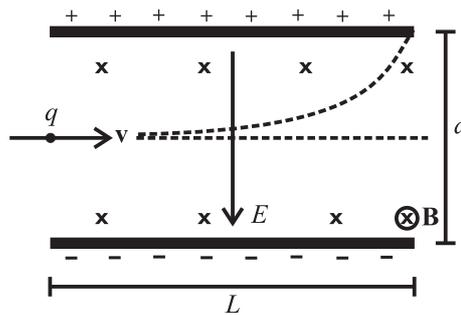
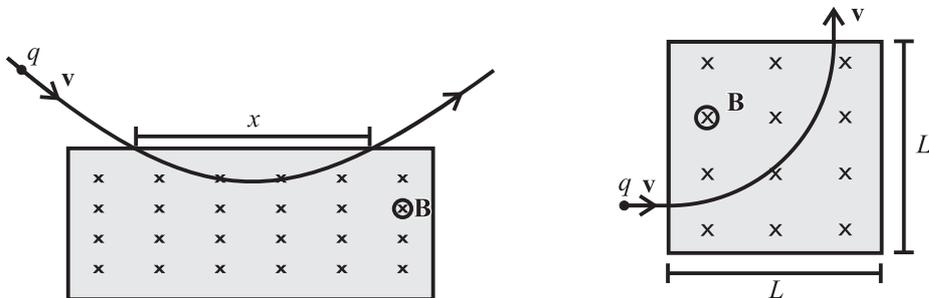


Figura 2.

- Una carga q de masa m entra oblicuamente al campo magnético homogéneo de la figura 3. Calcule la distancia x .
- Una carga q de masa m entra al campo B uniforme (figura 4) con velocidad normal al campo. ¿Si sale perpendicular, cuál es la velocidad de entrada?



Figuras 3 y 4.

- Una carga q de masa m entra perpendicular al campo B de la figura 5 y sale perpendicular. Demuestre que $q/m = 4v/BD$.

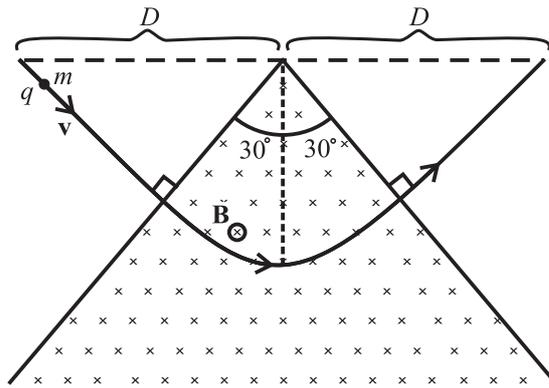


Figura 5.

6. Una corriente I circula por el alambre ab colocado en un campo magnético uniforme B y en presencia del campo de gravedad terrestre (figura 6). ¿Cuál debe ser el valor de I para que la varilla permanezca en equilibrio?

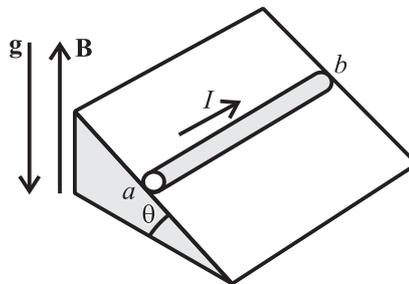
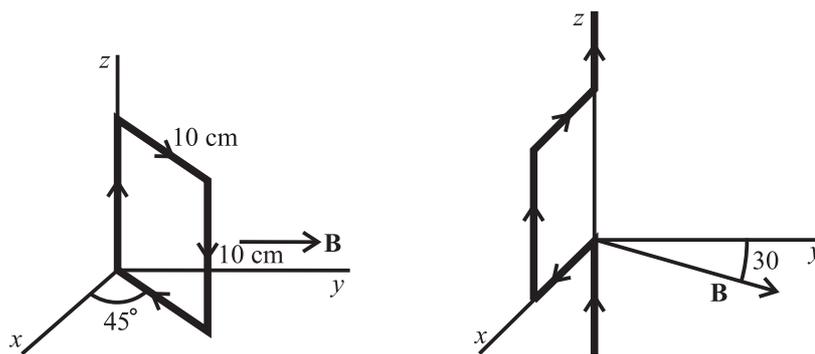


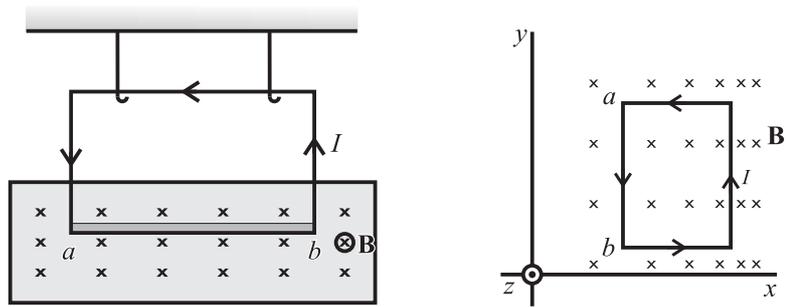
Figura 6.

7. Una espira vertical (figura 7) puede girar alrededor del eje z . Por ella circula una corriente de 15 A y se encuentra en un campo magnético de 0,1 T. ¿Cuál es el torque que el campo ejerce sobre ella?
8. El alambre de la figura 8 se coloca en un campo magnético en el plano xy y forma un ángulo de 30° con el eje y . ¿Cuál es el torque sobre la espira?



Figuras 7 y 8.

9. En la figura 9 una varilla conductora ab , de masa m , por la que circula una corriente I se sumerge en un campo magnético uniforme B . ¿Cuál ha de ser el valor de la corriente para que no haya tensión en los alambres verticales?
10. Una espira de corriente se encuentra sumergida en un campo $B_z = B_0(1 + x/a)$ como en la figura 10. ¿Cuál es la fuerza sobre cada lado? ¿Cuál es la fuerza neta? ¿Cuál es el torque neto?



Figuras 9 y 10.

11. Calcule las fuerzas sobre los tramos de corriente (todos iguales) de la figura 11.

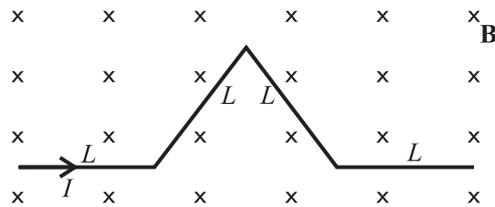
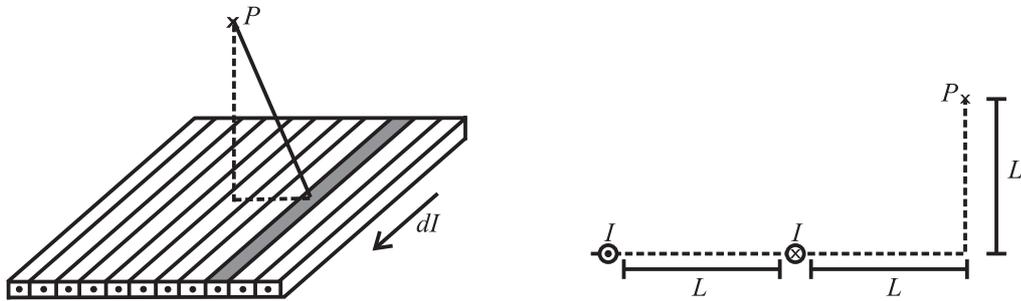


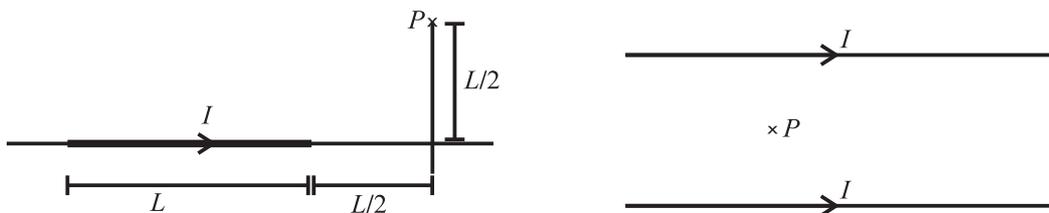
Figura 11.

12. Utilizando (22.1) calcule el campo magnético debido a la placa plana de la figura 12, descomponiendo la placa en corrientes diferenciales.
13. En la figura 13, ¿cuál es el campo en P debido a las dos corrientes, si $I = 10$ A y $L = 10$ cm?



Figuras 12 y 13.

14. Calcule en P el campo magnético debido a la porción L de corriente (figura 14).
15. Calcule el campo magnético en la mitad de los dos alambres (figura 15).



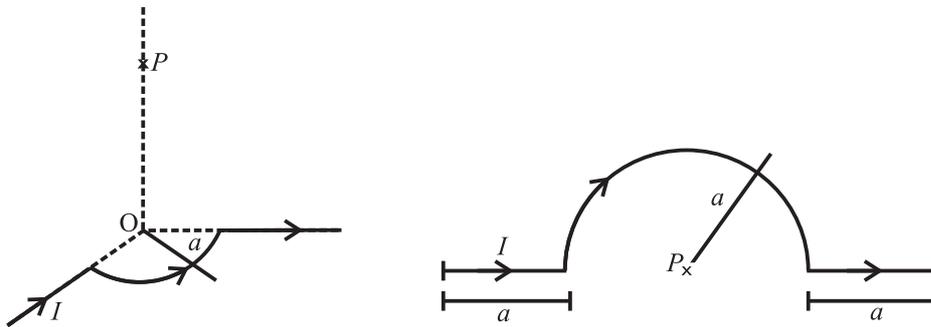
Figuras 14 y 15.

16. Calcule los campos magnéticos en los puntos a, b y c debidos a las corrientes de las figuras 16 y 17.



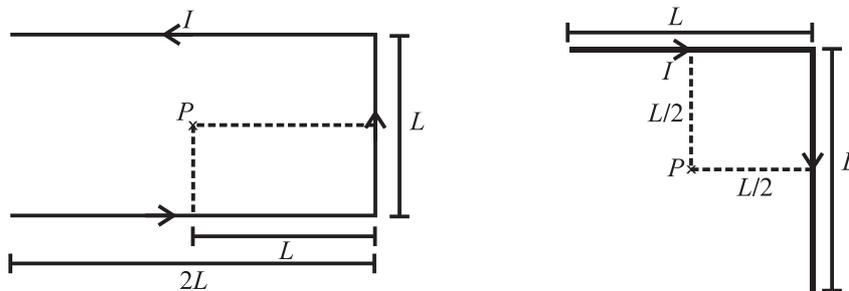
Figuras 16 y 17.

17. ¿Qué corriente debe pasar por un alambre recto para que a 10 cm de su eje su valor sea el mismo que el campo magnético terrestre?
18. Sean dos alambres rectos con corrientes I y $3I$ que circulan en el mismo sentido. ¿Dónde es nulo el campo B ? ¿Dónde es nulo si las direcciones en que circulan las corrientes son opuestas?
19. Dibuje las líneas de campo magnético de un par de alambres largos paralelos con corrientes en la misma dirección.
20. Calcule el campo B en el punto P debido a las tres porciones de alambre en las figuras 18 y 19.



Figuras 18 y 19.

21. Calcule el campo B en el punto P debido a las porciones de alambre de las figuras 20 y 21.



Figuras 20 y 21.

22. Calcule el campo magnético en el punto P debido a una porción rectilínea de corriente (figura 22).

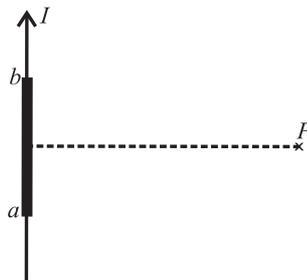
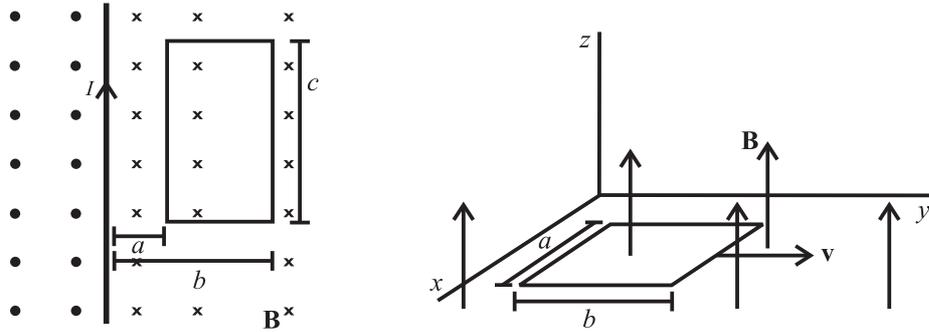


Figura 22.

23. Un poco antes de salir de un ciclotrón los protones describen un círculo de radio 0,4 m; la frecuencia de ciclotrón es 10^7 Hz. Calcule B , v , E_c .
24. ¿Cuál es el momento magnético de un electrón en un átomo de hidrógeno si su órbita promedia es de $0,53 \times 10^{-10}$ m?
25. Considere un cilindro de radio a por el que fluye una corriente I , rodeado por un cascarón cilíndrico de radios interior $b > a$ y exterior $c > b$ por el que fluye una corriente en dirección opuesta. Calcule el campo magnético en las diferentes zonas.
26. Demuestre que el campo magnético en el extremo de un solenoide de n vueltas y corriente I es $B = \mu_0 n I / 2$.
27. Una bobina toroidal es un solenoide de forma circular, en forma de un roscón. Utilizando la ley de Ampère calcule el campo magnético en su interior y exterior.
28. Demuestre que en unidades elementales la unidad de flujo magnético se expresa: $\text{Wb} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$.
29. Una espira se coloca en el plano horizontal y es atravesada por un campo magnético $\mathbf{B} = 3\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{k}}$. ¿Cuál es el flujo magnético?
30. Calcule el flujo magnético a través de la espira de lados horizontal a , vertical b , de la figura 10.
31. Considere un cilindro de radio a y permeabilidad μ_1 por el que fluye una corriente uniforme I_1 . El cilindro está recubierto de un cascarón de radio interior a y exterior b , con permeabilidad μ_2 y corriente uniforme I_2 . Calcule los campos B en las diversas zonas.

Capítulo 7

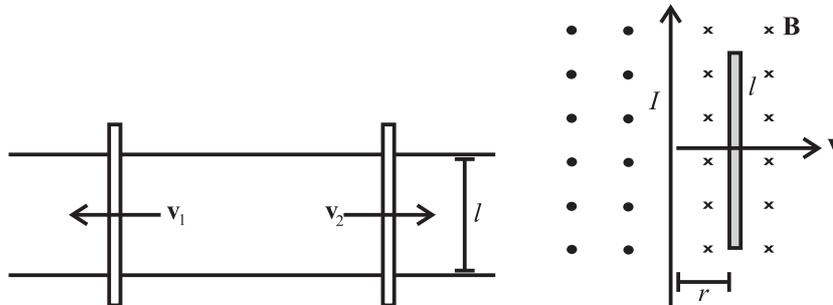
1. Un alambre recto (figura 1) porta una corriente $I = I_0 \cos \omega t$. Calcule la fem inducida sobre la espira plana.
2. Una espira plana ubicada en el plano xy (figura 2) se mueve en dirección y con velocidad \mathbf{v} constante. Hay un campo magnético $B_z = B_0(1 + y/a)$. Calcule la fem inducida sobre la espira.



Figuras 1 y 2.

3. Un par de varillas conductoras se deslizan sobre un riel de alambre con velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 (figura 3). Calcule la fem. ¿Qué ocurre si $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_1$?
4. Una varilla conductora se mueve con velocidad constante en un campo magnético uniforme (figura 4). Demuestre que la fem inducida entre sus extremos es

$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v l}{2\pi r}.$$

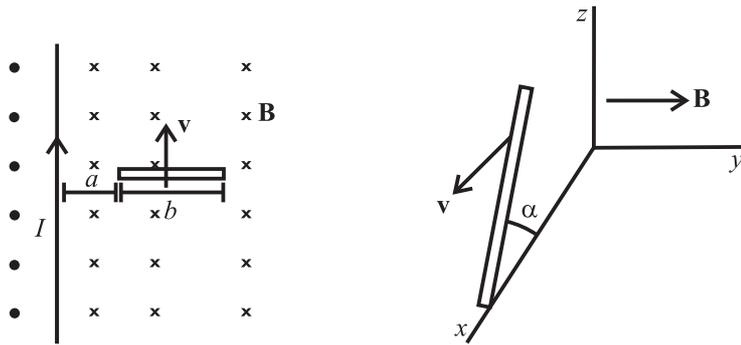


Figuras 3 y 4.

5. Una espira circular de alambre de radio R es perpendicular a un campo $B = \alpha + \beta t$. Calcule el flujo magnético que la atraviesa y la fem inducida.
6. Una varilla conductora se mueve con velocidad constante en las cercanías de una corriente rectilínea constante I (figura 5). Demuestre que la fem inducida es

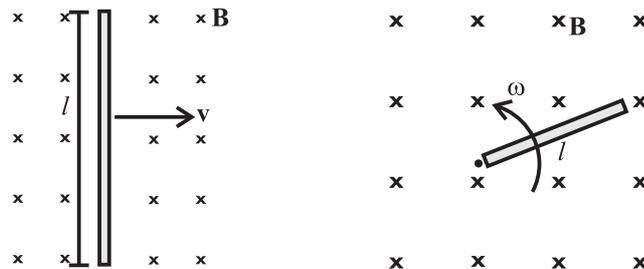
$$\mathcal{E} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln(1 + b/a).$$

7. Una varilla conductora con inclinación α constante (figura 6) se mueve en dirección x en un campo magnético uniforme B_y . Calcule la diferencia de potencial entre sus extremos.



Figuras 5 y 6.

8. Una varilla conductora de longitud a se mueve en un campo magnético uniforme con velocidad constante \mathbf{v} (figura 7). Calcule la diferencia de potencial entre sus extremos.
9. Una varilla de longitud R gira con velocidad angular ω constante en un campo magnético uniforme (figura 8). Calcule la diferencia de potencial entre sus extremos.
10. Las aspas de un helicóptero tienen 3 m de largo y giran a 6 Hz. Si la componente vertical del campo magnético terrestre es $0,5 \times 10^{-4}$ T, ¿cuál es la diferencia de potencial entre el eje y la punta del aspa?



Figuras 7 y 8.

11. Si el campo magnético en el ejemplo 26.2 es $B = B(t)$, independiente de la posición, demuestre que el campo eléctrico inducido es

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

12. Un alambre conductor abc doblado en ángulo se coloca perpendicular a un campo magnético uniforme (figura 9). Sobre el alambre se desliza una varilla de longitud l con velocidad constante. Demuestre que para $0 < t < D/v$ la fem es

$$\mathcal{E} = Blv^2 t \tan \alpha.$$

13. En un diagrama de flujo magnético versus tiempo represente la evolución temporal en los dos casos mostrados en la figura 10, en los que una espira entra a un campo magnético: a) $l_1 < l_3$, b) $l_1 > l_3$

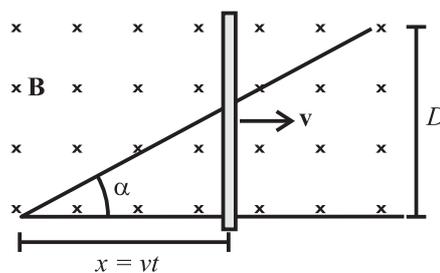


Figura 9.

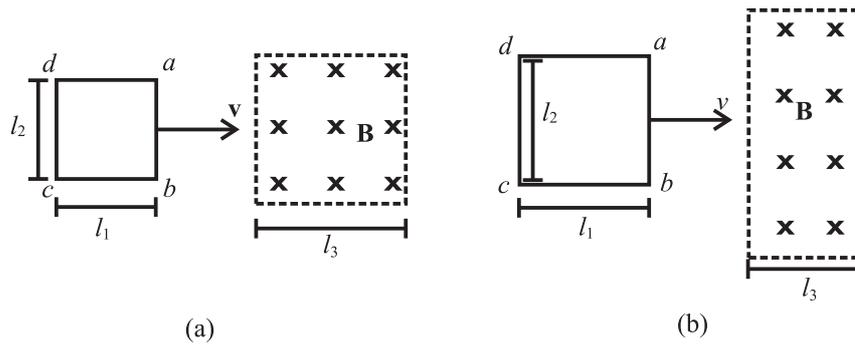


Figura 10.

14. Una barra conductora de longitud $l > R$ (figura 11) se mueve en un campo magnético uniforme con velocidad constante. Calcule la fem entre sus extremos.

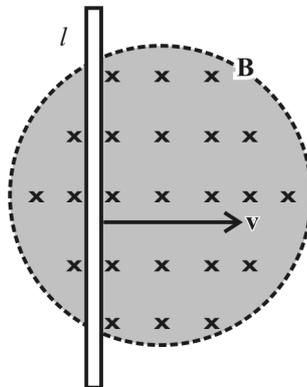


Figura 11.

15. Una espira circular de alambre de 5 cm de radio se coloca perpendicular a un campo magnético de 1,5 T. Si la resistencia de la espira es de $2,5 \omega$, ¿cuál es la corriente inducida?
16. Un aro circular de radio r se coloca en un campo magnético $B = B_0 e^{-\alpha t}$ en $t > 0$. Calcule la fem inducida y la corriente si la resistencia del aro es R .
17. La varilla de la figura 27.1, de 1 m de longitud, se mueve en un campo de 3 T. Si la resistencia del circuito es de 2ω , ¿qué velocidad tiene la varilla si la corriente inducida es de 0,3 A?
18. Si la corriente que circula por un solenoide largo de radio a y n espiras por unidad de longitud (figura 12) es $I = I_0 \cos \omega t$, demuestre que el campo eléctrico inducido para $r > a$ es

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega R^2}{2r} \text{sen } \omega t$$

y para $r < a$:

$$E = \frac{\mu_0 n I_0 \omega r}{2} \text{sen } \omega t.$$

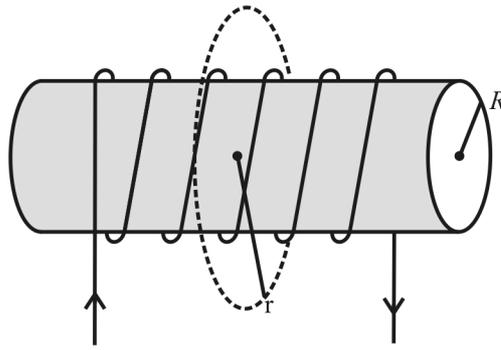


Figura 12.

19. Si la corriente I_1 en la figura 30.2 es $I_1 = 10e^{-1,5t}$ y el solenoide tiene 500 vueltas/m y un radio de 10 cm, ¿cuánta fem se induce en el solenoide pequeño si su radio es de 5 cm y tiene 250 vueltas/cm?
20. Sobre un solenoide de 0,5 m de longitud y 5 cm de radio se enrolla una bobina de 100 vueltas en su sección central. ¿Cuánto vale L ?
21. El flujo magnético en un circuito con 3 A es 1,3 Wb. ¿Cuál es el valor de L ?
22. ¿Cómo varía la corriente en una bobina de $L = 50$ mH si su fem es de 2 V?
23. Demuestre que la inductancia equivalente de dos bobinas en serie es $L = L_1 + L_2$.
24. Si el campo magnético de la Tierra vale $0,5 \times 10^{-4}$ T y el eléctrico vale 100 V/m, calcule la relación entre sus energías eléctrica y magnética.
25. Compare la energía almacenada en una bobina de 1000 vueltas y corriente de 5 A, con la almacenada en un condensador de 0,1 mm de separación entre placas y diferencia de potencial de 10 V.
26. Un condensador de 3 pF en un circuito LC está inicialmente cargado. A los 0,3 s de cerrar el circuito la carga baja a 0,25 de su valor. ¿Cuánto vale L ?
27. Un voltaje $V = 10 \text{sen}(2000t)$ se aplica entre las terminales de un condensador de placas paralelas. ¿Cuál es el campo magnético inducido en su interior?
28. En un circuito RL con $L = 2$ nH calcule la resistencia si la corriente aumenta hasta un 90 % de su máximo en 3 s.
29. Una batería de 12 V, una resistencia de 3ω y una bobina de 5 H se conectan en serie. En el momento en que la corriente es máxima calcule la potencia disipada en la resistencia y la energía almacenada en la bobina.
30. Una bobina con una resistencia interna de 1ω se conecta a una batería de 10 V. Si un segundo después de cerrar el circuito la corriente es de 5 A, ¿cuál es el valor de L ?
31. Una batería de 12 V se conecta a un circuito RL con $R = 5 \omega$ y $L = 0,4$ H. Cuando la corriente es la mitad de su valor máximo, ¿cuánta energía hay en la bobina?
32. Demuestre que la solución a la ecuación que rige las oscilaciones de un circuito RLC, ecuación (29.18), es $I = I_0 \text{sen}(\omega t - \alpha)$ con

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{[R + (\omega L - 1/\omega C)^2]^{1/2}},$$

$$\tan \alpha = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}.$$

33. Un generador produce una corriente de 10 A a 400 V. Mediante un transformador se eleva el potencial a 450 V y se transmite mediante una línea de 30ω . ¿Qué porcentaje se pierde por efecto Joule?

Bibliografía

1. Alonso M, Finn EJ. 1995. *Física*. Wilmington, EUA: Addison Wesley.
2. Gettys WE, Keller FJ, Skove MJ. 1994. *Física clásica y moderna*. México: McGraw-Hill.
3. Kraus ID, Fleisch DA. 1999. *Electromagnetismo con aplicaciones*. México: McGraw-Hill.
4. Serway RA. 1996. *Física*. Tomo 1. México: McGraw-Hill.
5. Serway RA. 1999. *Física*. Tomo 2. México: McGraw-Hill.

Ude@

Para ser, saber y saber hacer
Universidad de Antioquia



Física II

Oscilaciones y campos

Correcciones y erratas

En ec. (1.3) es cos en vez de sen.

Después de la ec. (1.4) debe decir:

«Es facil concluir que la aceleración máxima es $a_{\max} = \omega^2 x_{\max} = \omega^2 A$.»

En la solución al ejemplo 1.1 cambiar 0.096 por 0.032.

En el ejemplo 1.2 debe decir: «Si la velocidad de un M.A.S en m/s...».

La ec. (1.6) debe ser: $\tan \phi = -v_0 / \omega x_0$.

Ejemplo 1.3: «Un M.A.S. ... y una velocidad inicial $v_0 = 5\text{cm/s}$. Si la frecuencia angular es 1.25 rad/s . ¿Cuáles son la amplitud y la fase?»

Solución al ejemplo 1.4: $\phi = -0.255\text{ rad}$.

Ejemplo 1.5: «Una masa de 2 kg unida a un resorte oscila con una amplitud de 0.5 m y en $t = 0$ está en reposo...»

En la solución al ejemplo 1.5:

«... Reemplazando en (1.2): $\phi = 0$ »

En la solución al ejemplo 1.6:

$$x = 3 \cos(6.327t), \quad v = -18.91 \sin(6.327t), \\ a = -120.09 \cos(6.327t)$$

En sección 2.3: «Sea una masa... en un centro de masa, es $\tau = -bmg \sin \theta$...»C

«... puede escribirse:

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -bmg \sin \theta. »$$

Solución de ejemplo 2.4:

$$T = 2\pi \sqrt{2mR^2 / 5k}, \quad k = 5T^2 / 8\pi^2 mR^2 = 79.16\text{Nm}$$

En la seccion 2.5 al final de página:

$$v_y = A\omega \cos(\omega t + \phi)$$

En la solución a ejemplo 2.5:

$$a = -78952.172 \cos(628.3t)$$

Sección 3.2: «Recurriendo a la figura 3.1»

En la sección 4.1, cambiar ω por ω_0 .

En la ec. (4.3) reemplazar $A/2$ por A .

En solución del ejemplo 5.2

$$M = 4\pi^2 r^3 / T^2 G$$

$$M = 1.9 \times 10^{27} \text{ kg}$$

Ejemplo 5.3; pag 42: cambiar M_3 por m_3 .

Ejemplo 6.1, solución, pág. 50:

$$dg_x = -\frac{G dM}{(h-x)^2} = -\frac{GM}{L} \cdot \frac{dx}{(h-x)^2}$$

Pág. 51: «Se ha tenido en cuenta que $L = b - a$. Prube que la componente g_y es nula en $x = (a + b)/2$ ».

Pág. 52: suprimir cita de figura 2.13

«... como $A = 4\pi R^2$ y $dA = R^2 \sin \theta d\phi$... »

«Si se elimina $\sin \theta d\theta$... se obtiene:

$$dM = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{r dr d\phi}{ZR} \text{ »}$$

En pág. 53 al final de la Demostración:

$$g = GMr / R^3$$

En sección 7.2.1:

$$g = \sum_{i=1}^n \frac{GM_i}{r_i}$$

«donde r_{ij} es la *distancia* entre las masas...»

En el ultimo renglón (pág. 59):

$$d\mathcal{E} = -\frac{G dM}{r} = -\frac{G}{r} \frac{M d\phi}{2\pi}$$

Pág. 60:

$$\frac{GM}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \text{ en vez de } \frac{GMz}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

Ejemplo 13.1:

«... conductor de longitud $l \gg R_1 + R_2 \dots$ »

Pág. 149: ecuación siguiente a (19.7) debe ser:

$$\ddot{v}_y + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_y = 0$$

Pág 166 última ecuación debe ser:

$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi R} I \mu_\phi \int_\pi^0 \text{etc.}$$

Pág 221 en ec. (29.18) cambiar ω por ω_e

en ec. (29.19) cambiar ω por ω_e

En pág 225: «El flujo del solenoide grande...

... magnético uniforme $B = \mu_0 I_1 M_1; \dots$ »

«La fem inducida en la espina pequeña es

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} = -(\mu_0 M_1 N_2 \pi a^2 I_0 \omega) \cos \omega t \text{ »}$$

Problemas

Capítulo 1

10. «Una masa de 1.5 Kg unida a un resorte de constante $k = 2 \text{ N/m}$, comienza...»
14. «El periodo... ¿En cuántos centímetros la masa alarga el resorte cuando el sistema esta en reposo?»
25. «Un disco de radio 20 cm y masa 2 kg esta unido...»
30. «... para que la amplitud de la oscilación se reduzca a $1/\sqrt{e}$ de su valor».

Capítulo 2

26. «... a una distancia h de su superficie...

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^3$$

↑

Capítulo 3

19. «Un electrón con velocidad 10 m/s entra a un campo...»
25. ...Demuestre que si $z \ll a$ la carga oscila...

Capítulo 4

5. «... con $r \leq a$...»
8. «Una placa cuadrada *conductora* se coloca...»
14. α en vez de θ

Capítulo 5

6. $R/6$ en vez de $R/9$.

Capítulo 6

4. «... Si sale perpendicular y el radio del círculo es $2L/3$, ¿cuál es la velocidad de entrada?»

Capítulo 7

12. «Un alambre conductor abc doblado un ángulo α se coloca...»
32. Cambiar ω por ω_e en las 3 ecuaciones.