UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

SIGNIFICADOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA MANIFESTADOS POR PROFESORES DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA INGENIERÍA

ERIC ALBERTO HERNÁNDEZ SASTOQUE

Autor

LUCÍA ZAPATA CARDONA PhD.

Directora de Tesis

Tesis para optar el título de Doctor en Educación

Línea Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

DOCTORADO EN EDUCACIÓN

MEDELLÍN

2017

A Ruth, Laura y Ana
mis motores de superación

Agradecimientos

Agradezco a Dios por su presencia generadora de mi fe.

A mi esposa Ruth, porque gracias a su infinito amor aprendo a ser mejor cada día.

A mis hijas Laura y Ana, por ser mi fuente de inspiración y por apoyarme en todo momento.

A mi madre Natividad y mi hermana Emilse, por su apoyo incondicional.

A la Dra. Lucía Zapata, mi directora de tesis, por acompañarme en este trayecto de mi formación académica; por su profesionalismo, sus orientaciones en el desarrollo de esta investigación. Mi admiración y gratitud por participar en mi formación.

A los colegas del Área de Matemáticas de mí universidad por su compromiso con el programa de formación continua.

Al Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo, Profesor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por su hospitalidad, amabilidad y orientaciones como profesor responsable de mi pasantía en la Universidad de Granada.

A los profesores del Doctorado en Educación, Línea de Educación Matemática, y a los estudiantes de maestría y doctorado de la Universidad de Antioquia, por sus múltiples aportes en el seminario permanente.

A la Facultad de Educación, al Departamento de Educación Avanzada y en especial a los profesores de la Línea de Educación Matemática de la Universidad de Antioquia, por favorecer mi formación doctoral.

Al Grupo de Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas (GECEM), por su acompañamiento.

Al Dr. Ruthber Escorcia Caballero exrector y al Ing. Juan Carlos De la Rosa Serrano, exdecano de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Magdalena, por su apoyo administrativo para la realización del doctorado.

Y, finalmente, a mi Universidad del Magdalena por su apoyo institucional para la realización del doctorado.

Facultad de Educación

Contenido

Lista de Tablas .... **x**

Lista de Figuras .... **xi**

Lista de Anexos .... **xii**

Resumen **13**

Abstract **16**

Resumo **19**

Planteamiento del Problema **23**

Objetivo de la investigación 33

Marco Teórico **35**

Significado 36

Una mirada lingüística y semiótica. 36

Una mirada filosófica. 40

Una mirada social. 43

La teoría de la práctica social 46

Comunidad de práctica. ***48***

Empresa conjunta. *49*

Compromiso mutuo. *49*

Repertorio compartido. *50*

***Significado a partir de la teoría de la práctica social.* 50**

Participación y cosificación.. 52

Demostración Matemática 54

Investigaciones relacionadas con la demostración. 54

***Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el área de cálculo.* 55**

***Investigaciones que relacionan la teoría de la práctica social.* 58**

Aproximaciones a la demostración matemática. 62

***Aproximaciones al concepto de la demostración.* 63**

***La demostración según el grado de abstracción.* 68**

***Roles de la demostración*.. 73**

Formación del Profesor Universitario 77

Conceptos de formación del profesor universitario. 79

***Formación inicial y formación continua.* 80**

Enfoques de la formación del profesor universitario. 81

La formación del profesor universitario en Colombia. 86

Formación de Ingenieros 90

El ingeniero. 90

Formación matemática de futuros ingenieros. 94

Una mirada de los primeros modelos de formación matemática de futuros ingenieros. **94**

Evolución de la formación matemática de futuros ingenieros. **97**

Contenidos, utilidad y competencias matemáticas en la formación de ingenieros. **105**

Enseñanza y aprendizaje del cálculo en ingeniería. 112

Aprendizaje situado y formación de ingenieros. 115

Metodología de la Investigación **118**

Paradigma y Enfoque de la Investigación 119

Diseño de la Investigación 123

Pregunta de investigación. 124

Participantes. 126

Trabajo de campo. 130

El programa de formación continua. **130**

Las actividades. **134**

Fuentes de información. **148**

Encuentros en el programa de formación continua. *148*

Autobiografía. *149*

Documentos. *150*

Entrevista. *151*

Proceso de análisis de la información. 152

Validación 160

Consideraciones Éticas 162

Análisis de la Información **165**

Demostración Matemática: Experiencias de Vida Académica y Profesional 167

Programa de Formación Continua: Un Escenario de Negociación de Significados de la Demostración Matemática 189

Inicios de interacción, liderazgo compartido y reflexión. 194

Acuerdos, desacuerdos, confusiones y experiencias de enseñanza como parte de la negociación de significados. 203

Un compromiso con la práctica. 218

La producción colectiva: materialización en la transformación de significados. 228

Significados de la Demostración y Formación Matemática de Ingenieros 241

Roles de la demostración en la formación matemática de ingenieros. 243

La demostración para el desarrollo del pensamiento lógico. ***243***

La demostración para la apropiación del conocimiento matemático. ***249***

La demostración como fundamentación teórica de nociones matemáticas. ***252***

Reflexiones a partir de la teoría de la práctica social. 260

Comunidades interdisciplinarias de práctica: un espacio de formación entre profesores de matemáticas e ingenieros. 265

Conclusiones **276**

Aspectos a tener presentes para Referencia Futura 286

Bibliografía **290**

Anexos **320**

Lista de Tablas

Tabla 1: Resumen de actividades del programa de formación continua........................ 136

Lista de Figuras

Figura 1: Esquema de interpretación del significado de acuerdo con la teoría de la práctica social 53

Figura 2: Trayectoria académica y profesional en la negociación de significados de la demostración matemática 168

Figura 3: Representación en GeoGebra para la demostración del teorema: la derivada de la función seno es la función coseno 195

Figura 4: Parte de la presentación del Teorema de Rolle por Gil y Díaz (2013, pág. 251). 205

Figura 5: Representación en GeoGebra de la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio. 230

Facultad de Educación

Lista de Anexos

Anexo 1: Actividad No. 3 320

Anexo 2: Actividad No. 6 325

Anexo 3: Producción de demostraciones usando GeoGebra y demostraciones pre-formales. Artículos publicados. 340

Anexo 4: Formato de consentimiento informado........ 354

Anexo 5: Actividad No. 4 356

Resumen

De acuerdo con la literatura revisada existe una diversidad de posturas acerca de la demostración matemática por parte de profesores, investigadores y matemáticos que están relacionadas con concepciones epistemológicas, roles y clasificaciones (Alcock, 2010; Balacheff, 2008; Crespo Crespo & Ponteville, 2004; Dos Santos & Ortega, 2013; Godino & Recio, 2001; Knuth, 2002; Recio, 2001; Radford, 2006; Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva, & Llinares, 2010; Weiss, Herbst, & Chen, 2009). Sin embargo, poco se sabe sobre los significados de la demostración que poseen los profesores en un área de las matemáticas como el cálculo diferencial y para programas de ingeniería. Existen varios modelos de formación matemática de ingenieros en los cuales las matemáticas cumplen roles diferentes (Romo-Vázquez, 2009, 2014, 2015). Los significados de la demostración que exhiben los profesores están relacionados con una concepción de formación matemática de ingenieros. El objetivo de esta investigación fue analizar los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros.

La tradición universitaria se ha basado en el trabajo individual de los profesores, en el que cada uno de ellos sigue su propio ritmo y considera sus clases como un lugar privado (Imbernón, 1994; Zabalza, 2004). Ese individualismo promueve la carencia de procesos compartidos y de pocos espacios de diálogo entre colegas de manera reflexiva acerca de su práctica (Bozu & Imbernón, 2009). Es posible que algunos profesores de acuerdo con sus significados de la demostración —enmarcados en un trabajo individual y con pocas opciones de diálogo con sus compañeros para reflexionar sobre su práctica de la demostración y su enseñanza— prefieran

ignorar la demostración de teoremas o mantener esquemas tradicionales de la demostración con poca relación con la formación matemática de futuros ingenieros.

Por lo tanto, la pregunta que formulé para este estudio fue: ¿Cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros? Para esta investigación el escenario que escogí para indagar esos significados que los profesores exhiben fue un programa de formación continua. La metodología empleada fue cualitativa bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico. El programa de formación se realizó durante el primer semestre del año 2014, con encuentros sabatinos de tres horas. Este programa se basó en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001, 2009) atendiendo al concepto de comunidad de práctica como su fundamentación metodológica. Los participantes en este estudio fueron un grupo de nueve (9) profesores de cálculo diferencial para ingeniería, inscritos en la facultad de ingeniería de una universidad pública en la costa norte colombiana.

La principal fuente de información fueron los encuentros de los profesores en el programa de formación continua. Otras fuentes de información fueron: autobiografías, entrevistas y artefactos documentales que sirvieron de información complementaria (notas de campo de las observaciones de los encuentros, copias de las producciones escritas de los profesores, copias de las relatorías de los encuentros y registros de audio de algunas conversaciones entre profesores).

Los resultados de la investigación muestran que los significados de la demostración que los profesores manifestaron en relación con cursos de cálculo diferencial para ingeniería son los negociados en sus trayectorias académicas (secundaria y terciaria) y profesionales. Se encontró que esos significados responden a una concepción formalista de la demostración donde se acentúan los aspectos sintácticos y el uso de reglas de inferencias evitando el recurso de la intuición.

La relación de la demostración matemática con la formación de ingenieros quedó planteada en roles de la demostración asociados con: el pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación del conocimiento matemático y la fundamentación teórica de nociones matemáticas. Esos significados responden a una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación de ingenieros (Kent y Noss, 2003), que contribuye al desarrollo de la competencia de razonar matemáticamente, la comprensión de conceptos matemáticos y la fundamentación matemática de algunas nociones que podrían ser útiles para un ingeniero. La concepción de los profesores acerca de la formación matemática de ingenieros estuvo relacionada con una matemática autónoma y general; la cual sirve de fundamentación teórica para el estudio de otros cursos de la carrera de ingeniería y para aplicaciones de la práctica ingenieril.

Abstract

According to the literature review, there are diverse opinions regarding the mathematical proof by professors, researchers and mathematicians that are related to epistemological conceptions, roles and classifications (Alcock, 2010; Balacheff, 2008; Crespo Crespo & Ponteville, 2004; Dos Santos & Ortega, 2013; Godino & Recio, 2001; Knuth, 2002; Recio, 2001; Radford, 2006; Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva, & Llinares, 2010; Weiss, Herbst, & Chen, 2009). However, little is known about the meanings of the proof that professors have in an area of mathematics such as differential calculus and for engineering programs. There are several models of mathematical education of engineers in which mathematics perform different roles (Romo-Vázquez, 2009, 2014, 2015). The meanings of the proof that professors exhibit are related to a conception of mathematical education of engineers. The aim of this research was to analyze the meanings of mathematical proof displayed by professors of differential calculus and their relation to mathematical education of engineers.

University tradition is based on individual work of the professors, where each one of them follows his/her own pace and conceives his/her classes as a private place (Imbernón, 1994; Zabalza, 2004). Such individualism promotes the lack of shared processes and few dialogue spaces among colleagues in a reflective way about their practice (Bozu & Imbernón, 2009). It is possible that some professors, according to their meaning of proof —within a framework of individual work and with few dialogue options with his/her colleagues to reflect on their practice of proof and its teaching— prefer to ignore the proof of theorems or to keep traditional schemes of proof with little relation to mathematical education of would-be engineers.

Therefore, the question I posed for this study was: Which are the meanings of mathematical proof displayed by differential calculus professors and how are these meanings related to the mathematical education of engineers? For this research, the setting I chose to inquire on these meanings that professors exhibit was a continuing education program. A qualitative methodology was used under a phenomenological-hermeneutic approach. The education program was carried out during the first semester of 2014, with 3-hour Saturday meetings. This program was based on the social practice theory (Wenger, 2001, 2009) with the concept of communities of practice as its methodological foundation. Participants in this study were a group of nine (9) differential calculus professors for engineering, ascribed to the School of Engineering of a public university in the Colombian Caribbean coast.

The main source of information were the meetings with professors in the continuing education program. Other information sources were: autobiographies, interviews and documentary artifacts that served as complementary information (fieldwork notes of meeting observations, copies of professors' written productions, copies of meeting reports and audio files of some conversations among professors).

Research results show that the meanings of the proof that professors presented in relation to differential calculus course for engineering are a product of negotiation in their academic (secondary and tertiary education) and professional careers. It was found that these meanings correspond to a formalist conception of the proof where syntactic aspects and the use of inference rules are highlighted, thus avoiding the use of intuition.

The relation of mathematical proof with the education of engineers was delineated in roles of proof associated with students' logical thought, the appropriation of mathematical knowledge and the theoretical foundation of mathematical notions. These meanings respond to an indirect usefulness of mathematics for the education of engineers (Kent and Noss, 2003), which contributes to the development of mathematical reasoning competences, understanding mathematical concepts and the mathematical foundation of some notions that could be useful for an engineer. The conception of professors about mathematical education for engineers was related to autonomous and general mathematics; which serves as theoretical foundation for the study of other courses of the engineering program and for applications of engineering.

Resumo

De acordo com a literatura revisada existe uma diversidade de posturas sobre a demonstração matemática por parte de professores, pesquisadores e matemáticos que estão relacionadas com concepções epistemológicas, papéis e classificações (Alcock, 2010; Balacheff, 2008; Crespo Crespo & Ponteville, 2004; Dos Santos & Ortega, 2013; Godino & Recio, 2001; Knuth, 2002; Recio, 2001; Radford, 2006; Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva, & Llinares, 2010; Weiss, Herbst, & Chen, 2009). No entanto, pouco se sabe sobre os significados da demonstração que possuem os professores em uma área das matemáticas como o cálculo diferencial e para programas de engenharia. Existem vários modelos de formação matemática de engenheiros nos quais as matemáticas cumprem papéis diferentes (Romo-Vázquez, 2009, 2014, 2015). Os significados da demonstração que exibem os professores estão relacionados com uma concepção de formação matemática de engenheiros. O objetivo desta pesquisa foi analisar os significados da demonstração matemática manifestados por professores de cálculo diferencial e sua relação com a formação matemática de engenheiros.

A tradição universitária tem se baseado no trabalho individual dos professores, no qual cada um deles segue seu próprio ritmo e considera suas aulas como um lugar privado (Imbernón, 1994; Zabalza, 2004). Esse individualismo promove a carência de processos compartidos e de poucos espaços de diálogo entre colegas de maneira reflexiva com respeito a sua prática (Bozu & Imbernón, 2009). É possível que alguns professores de acordo com seus significados da demonstração —enquadrados em um trabalho individual e com poucas opções de diálogo com seus colegas para refletir sobre sua prática da demonstração e seu ensino— prefiram ignorar a

demonstração de teoremas ou manter esquemas tradicionais da demonstração com pouca relação com a formação matemática de futuros engenheiros.

Portanto, a pergunta que formulei para este estudo foi: Quais são os significados da demonstração matemática manifestados por professores de cálculo diferencial e como se relacionam com a formação matemática de engenheiros? Para esta pesquisa o cenário que escolhi para indagar esses significados que os professores exibem foi um programa de formação contínua. A metodologia empregada foi qualitativa sob um enfoque fenomenológico-hermenêutico. O programa de formação se realizou durante o primeiro semestre do ano 2014, com encontros aos sábados de três horas. Este programa se baseou na teoria da prática social (Wenger, 2001, 2009) atendendo ao conceito de comunidade de prática como sua fundamentação metodológica. Os participantes neste estudo foram um grupo de nove (9) professores de cálculo diferencial para engenharia, inscritos na faculdade de engenharia de uma universidade pública no litoral norte colombiano.

A principal fonte de informação foram os encontros dos professores no programa de formação contínua. Outras fontes de informação foram: autobiografias, entrevistas e artefatos documentais que serviram de informação complementária (apontamentos de campo das observações dos encontros, cópias das produções escritas dos professores, cópias dos relatórios dos encontros e registros de áudio de algumas conversações entre professores).

Os resultados da pesquisa mostram que os significados da demonstração que os professores manifestaram em relação com cursos de cálculo diferencial para engenharia são os negociados em suas trajetórias acadêmicas (secundária e terciária) e profissionais. Encontrou-se que esses significados respondem a uma concepção formalista da demonstração onde se acentuam os aspectos sintáticos e o uso de regras de inferências evitando o recurso da intuição.

A relação da demonstração matemática com a formação de engenheiros ficou abordada em papéis da demonstração associados com: o pensamento lógico dos estudantes, a apropriação do conhecimento matemático e a fundamentação teórica de noções matemáticas. Esses significados respondem a uma utilidade indireta das matemáticas para a formação de engenheiros (Kent y Noss, 2003), que contribui ao desenvolvimento da competência de raciocinar matematicamente, a compreensão de conceitos matemáticos e a fundamentação matemática de algumas noções que poderiam ser úteis para um engenheiro. A concepção dos professores acerca da formação matemática de engenheiros esteve relacionada com uma matemática autônoma e geral; a qual serve de fundamentação teórica para o estudo de outros cursos da carreira de engenharia e para aplicações da prática de engenharia.

CAPÍTULO 1: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Planteamiento del Problema

En este apartado presento los elementos que constituyen el planteamiento del problema de esta investigación. Para ello, parto de mi experiencia acerca de la demostración como profesor de matemáticas en programas de ingeniería, lo cual sirvió de motivación para esta investigación. Luego, basado en la literatura revisada para este estudio, presento hechos que considero problemáticos y los relaciono con la necesidad de indagar sobre los significados de la demostración de profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería. Algunos hechos a los que hago alusión en este apartado son: la existencia de una diversidad de posturas sobre la demostración matemática; la poca documentación sobre significados de la demostración asociados con profesores universitarios del área del cálculo y en programas de ingeniería; la tendencia de desaparecer la demostración formal en cursos de cálculo para programas de ingeniería; las decisiones individualistas y el trabajo en solitario del profesor universitario; y, por último, con la formación continua de profesores.

A partir de mi experiencia como profesor universitario he observado que varios teoremas y sus demostraciones están presentes en los microdiseños de cursos de cálculo diferencial y en los libros de texto de cálculo que sirven de referencia para su orientación. Sin embargo, son variadas las opiniones y decisiones que los profesores asumen con respecto a la demostración en esos cursos para programas de ingeniería. Algunas de esas decisiones las he identificado en discusiones individuales e informales con colegas de mí universidad. Una de ellas radica en presentar teoremas o proposiciones privilegiando solamente la aplicación de sus resultados y omitiendo las demostraciones. Otra de tales decisiones consiste en presentar la demostración de proposiciones partiendo de definiciones, luego planteando el teorema y por último presentado la demostración en el tablero. En la universidad en la que me desempeño como profesor de cálculo no existen acuerdos formales entre los profesores para afrontar demostraciones matemáticas en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Además, poco se conoce sobre lo que cada profesor piensa acerca de la demostración matemática. Considero que lo interesante de esas decisiones de los profesores sobre la demostración en cursos de cálculo diferencial, más allá de la cuestión de enseñar o no la demostración y de cómo enseñarla, es que tales decisiones responden a los significados que ellos han construido de la demostración y que en ocasiones no son evidentes ni discutidas.

La literatura ha mostrado que existe una diversidad de posturas acerca de la demostración matemática por parte de profesores, investigadores y matemáticos que están relacionadas con concepciones epistemológicas, roles y clasificaciones. Algunas de esas posturas se registran en estudios que tratan aspectos de la demostración, como sus significados (Balacheff, 2008; Godino & Recio, 2001; Recio, 2001; Radford L. , 2006), perspectivas (Alcock, 2010; Weiss, Herbst, & Chen, 2009), concepciones (Crespo Crespo & Ponteville, 2004; Knuth, 2002; Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva, & Llinares, 2010) y perfiles (Dos Santos & Ortega, 2013). Sin embargo, poco se sabe acerca de las posturas que asumen los profesores a través de sus significados de la demostración en un área de las matemáticas como el cálculo diferencial y para programas de ingeniería.

La necesidad de indagar por los significados de la demostración que posean profesores de cálculo diferencial para ingeniería se relaciona con el riesgo que se puede tener al optar por una determina concepción de la demostración. De acuerdo con los significados que se tengan de la demostración así se tomarán decisiones acerca de omitir demostraciones en clase u orientarla de manera que poco se relacione con la formación matemática de futuros ingenieros.

Por ejemplo, según Recio (2001), la concepción formalista de la demostración acentúa los aspectos sintácticos, evitando el recurso de la intuición y prefiriendo el uso de reglas de inferencias formales. El 'formalismo', una escuela de pensamiento surgida en los inicios del siglo XX e introducida en el ámbito escolar durante la década del sesenta e inicios de los setenta, concibió las matemáticas como un sistema formal dotado de axiomas, definiciones, enunciados y demostraciones. Según Recio (2001), al exagerar el aspecto sintáctico de los sistemas axiomáticos mediante posiciones formalistas extremas, se corre el riesgo de reducir la demostración a un procedimiento exclusivamente algorítmico. Este autor considera que la demostración matemática en las instituciones educativas tiene un significado más amplio y que "junto al pensamiento estrictamente deductivo, se resalta también la necesidad de potenciar otros modos validativos [sic] de tipo empírico-inductivo, la formulación de conjeturas, los ejemplos y contraejemplos, los procesos de generalización, etc." (pág. 31).

Un significado de la demostración bajo esa concepción formalista poco se relacionaría con una formación matemática de ingenieros, pues estaría descontextualizada de la práctica propia de la ingeniería. Si ese fuera el caso de los profesores de cálculo diferencial se estaría perdiendo la posibilidad de trabajar la demostración a partir de algunas miradas diferentes a la formal en programas de ingeniería.

Varios de los estudios sobre significados de la demostración se establecen en términos de roles o funciones que cumple la demostración en las matemáticas y en la Educación Matemática (Bell, 1976; Hanna, 2000; Hemmi, 2006; Knuth, 2002; Pietropaolo, 2005; Torregrosa-Gironés, Haro, Penalva, & Llinares, 2010). Según De Villiers (2012) "tradicionalmente, la verificación (justificación o convicción) de la validez de las conjeturas se ha visto prácticamente como la única función o propósito de la demostración" (pág. 1). Entre otros roles asociados a significados de la demostración matemática están: la explicación, comunicación, sistematización (De Villiers, 1993); la exploración de significados de una definición o las consecuencias de una suposición (Hanna, 2000); y también, la posibilidad de trasferir métodos o técnicas a otros contextos matemáticos y de otras ciencias (Hemmi, 2006). A pesar de esta gama de roles para la demostración existe poca claridad acerca de cuáles de éstos u otros roles corresponden a los significados de la demostración que poseen los profesores de cálculo diferencial y que están relacionados con la formación matemática de futuros ingenieros.

Los estudios que relacionan la demostración con la formación matemática de ingenieros se centran principalmente en su enseñanza y aprendizaje (D'Andrea, Curia, & Lavalle, 2013; González, 2012; Gruenwald & Klymchuk, 2003; Klymchuk, 2008; Klymchuk, 2012; Van Asch, 1993), dejando por fuera los significados de los profesores. Además, la mayoría de las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática se han llevado a cabo en el área de la geometría (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013). Para el caso del cálculo se han tratado aspectos importantes de la demostración matemática, pero, según la literatura revisada, poco se ha documentado sobre los posibles significados de la demostración que puedan tener los profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería (Calvo, 2001; González, 2012; Klisinska, 2009).

Por otra parte, el enfoque tradicional de la demostración (definición–teorema–demostración–ejemplo–aplicación) en la enseñanza del cálculo para ingeniería casi ha desaparecido (Klymchuk, 2008). En ocasiones, se omite la demostración por decisiones individualistas sin haber mediado las correspondientes reflexiones críticas y colectivas de profesores en las que se establezcan argumentos a favor o en contra de la extinción o cambios de la demostración matemática en esos cursos para ingeniería. Lo señalado por Klymchuk (2008) puede ser tomado como una oportunidad para explorar otras formas de la enseñanza de la demostración. Por ejemplo, mediante el uso de un software dinámico se puede potenciar la función explicativa de la demostración durante la resolución de los problemas (Torregrosa-Gironés y otros, 2010). Para Hanna (2007), ciertos avances en matemáticas o en la misma Educación Matemática han influenciado a educadores matemáticos a omitir la demostración en sus clases, de tal manera que creen que ya no es fundamental ni en la teoría, ni en la práctica de las matemáticas. Como resultado de esto, Hanna (2007) señala que "muchos educadores parecen haber buscado alivio al esfuerzo de enseñar la demostración evitándola por completo" [1](pág. 3).

Otros autores como Van Asch (1993) señalan varios argumentos a favor y en contra de la demostración en cursos de matemáticas para estudiantes de ingeniería. El problema está abierto y cada vez más se aboga por mejorar la comprensión conceptual de las matemáticas para estudiantes de ingeniería, donde la demostración encuentra una posible justificación. Los profesores son los protagonistas de la toma de decisiones con respecto a la demostración matemática en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Tales decisiones pueden verse enriquecidas si se generan espacios de participación colectiva entre profesores para reconocer, reflexionar y transformar los significados de la demostración matemática de manera conjunta.

[1]Las traducciones para las citas textuales de documentos de idiomas diferentes al español fueron realizadas por el autor de esta investigación.

Es posible que algunos profesores, como parte de su práctica docente, prefieran ignorar la demostración de teoremas, mantener los esquemas tradicionales de la demostración o decidir promoverla bajo determinadas condiciones en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Cada profesor de forma individual toma sus decisiones acerca de la demostración en esos cursos de acuerdo con sus significados de la demostración. La tradición universitaria se ha basado en el trabajo individual de los profesores, en el que cada uno de ellos sigue su propio ritmo y considera sus clases como un lugar privado (Imbernón, 1994; Zabalza, 2004).

Propias de un trabajo aislado del profesor son sus rutinas de enseñanza dadas por razonamientos e ideas individuales sobre su práctica, pero cualquier reflexión individual sobre la propia práctica puede mejorar con la participación de otros. Ese individualismo promueve la carencia de procesos compartidos, así como pocos espacios de diálogo reflexivo entre colegas acerca de su práctica (Bozu & Imbernón, 2009). Aunque el individualismo puede desarrollar un trabajo más personal y creativo (Hargreaves, 1996), cuando éste implica aislamiento y carencia de trabajo en equipo debilita la comunicación y las relaciones entre los colegas.

El uso de la discrecionalidad en la labor docente es propio de la autonomía universitaria. Sin embargo, como lo señalan Hernández y Flores (2013):

> Se ha reconocido que es necesario dejar atrás las explicaciones del quehacer del docente centradas en una práctica marcada por el aislamiento, para adoptar planteamientos que asumen su participación en un núcleo profesional. De esta situación se deriva la necesidad de entender la labor de los profesores como un proceso de construcción de una cultura propia en la que la colaboración y la participación son los ejes principales. (pág. 102)

Es así como en la medida en que el profesor tome decisiones exclusivamente de manera individualista sobre la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingeniería, atendiendo exclusivamente a sus propios argumentos, puede estar confirmando una práctica docente marcada por el aislamiento. En este caso se puede estar ignorando una labor, como profesor, inmersa en una cultura en la que es necesario participar e interactuar con diversos aspectos, como son las necesidades de sus estudiantes, las prácticas exitosas o fallidas de sus colegas, los estudios de investigación relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, entre otras. El profesor universitario, novel o experimentado, para analizar su práctica docente necesita comunicarse intelectual o afectivamente con sus colegas, de tal manera que le permita analizar e introducir mejoras en su práctica (Imbernón, 2004). En procesos de comunicación e interacción social entre profesores es donde se da la negociación de significados que puede dar cuenta de un aprendizaje sobre un concepto (Wenger, 2001).

Es así como la presente investigación versa acerca de los significados de la demostración matemática, ubicando como protagonistas a profesores universitarios del área del cálculo diferencial para programas de ingeniería. Con base en los elementos expuestos en esta sección el interés de esta investigación está orientada por la siguiente la pregunta:

¿Cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros?

Un espacio propicio para abordar esta pregunta de investigación es el escenario de formación continua del docente universitario. Tradicionalmente la formación continua del docente ha sido dejada en manos de los profesores de manera individual, es decir, cada profesor universitario es responsable de su propia formación y decide los momentos, temáticas y propósitos de su formación. En algunos casos, la formación se orienta por intereses del propio individuo sin una conexión clara con sus actividades docentes, como, por ejemplo, programas de posgrado, cursos de informática, aprendizaje de otro idioma, entre otras. En otros casos, la formación se centra en asuntos de orden institucional que obedecen a procesos relacionados con productividad investigativa o procesos normativos y administrativos relacionados con los retos de aseguramiento de calidad de la institución (Zabalza, 2004). Sin embargo, pocos son los programas de formación continua para profesores universitarios del área de matemáticas que propician la reflexión acerca de asuntos particulares, como la práctica de la demostración y su enseñanza, de tal manera que permita identificar significados de la demostración matemática y la relación de esos significados con la formación matemática de ingenieros.

En ese sentido, en esta investigación apuesto por un programa de formación continua para los profesores de cálculo diferencial de ingeniería orientado con base en el constructo de 'comunidad de práctica' de la teoría de la práctica social (Wenger, 2001). Las comunidades de práctica son "grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o una pasión sobre un tema y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área mediante la interacción en forma permanente" (Wenger, McDermontt y Snyder, 2002, pág. 4). Este tipo de comunidades proporcionan un enfoque donde se aprende con y del otro. Se evitan relaciones jerárquicas y el aprendizaje está determinado por la negociación de significados. Para el programa de formación continua se tienen en cuenta las características de una comunidad de aprendizaje, de tal manera que se presta atención al hecho de que los significados son resultados del aprendizaje. Aquí el aprendizaje se concibe en la participación social de la práctica conjunta de los miembros de la comunidad. El aprendizaje se toma como social y enmarcado en una práctica común de un colectivo.

Asumir la teoría de la práctica social como enfoque teórico para esta investigación permite ver el programa de formación continua como un escenario que puede brindar oportunidades distintas a mantener el individualismo con que se tratan asuntos relacionados con la práctica de la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingenieros. La dinámica que se asume en el programa de formación permite la participación de los profesores a través de actividades que promueven el debate de asuntos relacionados con la demostración matemática mediante la reflexión de su experiencia y la de los otros. El trabajo colaborativo es esencial para el programa de formación, de tal manera que se escuchan las ideas del otro aceptando que ninguna idea es definitiva. Cuando se comparten, amplían o rechazan las opiniones del otro se enriquece la comprensión y la conversación es más informada (Boavida & Ponte, 2011). El profesor es visto como protagonista de su formación y dueño de su transformación.

Con respecto a la formación continua del docente universitario esta investigación cobra importancia en que presenta una aproximación de conformación de comunidad que reflexiona sobre asuntos que involucra su práctica docente. Este estudio brinda la oportunidad de un espacio de interacción y colaboración entre colegas que comparten necesidades y problemáticas similares. El valor de la experiencia de cada uno de los profesores se exalta al ponerla en un espacio común donde se expone y enriquece a través del reconocimiento del otro.

La presente propuesta de investigación permite avanzar sobre aspectos teóricos relacionados con los significados de la demostración en el campo de la Educación Matemática. Esos aspectos están relacionados con interpretar a partir de una perspectiva social, el significado de la demostración por parte de profesores de cálculo diferencial al servicio de programas de ingeniería. La teoría de la práctica social (Wenger, 2001) junto con diferentes aportes teóricos en asuntos como la demostración matemática, la formación matemática de ingenieros y la formación de docentes configuran un marco teórico útil para esta investigación. Interpretar los significados que los profesores poseen acerca de la demostración amplía la comprensión sobre las decisiones que ellos toman acerca de la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingenieros. De igual manera se aportan elementos para comprender significados de la demostración relacionados con la formación matemática de ingenieros.

En una dimensión práctica, esta investigación aporta a la comunidad de educadores matemáticos, a la institución donde están vinculados los profesores de cálculo y, por supuesto, a los profesores participantes de la investigación, reflexiones sobre la práctica de la demostración y su enseñanza en clases de cálculo diferencial para ingenieros. Reflexiones que tratan sobre demostraciones formales y no formales en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. De igual manera, se presentan demostraciones pre-formales y con uso de software, que pueden contribuir con la orientación de ciertos teoremas del cálculo diferencial en programas no matemáticos.

Esta investigación aporta elementos metodológicos para el trabajo con profesores universitarios del área de matemáticas. Las actividades y formas de trabajo colaborativo con el colectivo de profesores, para el desarrollo de propósitos comunes en el marco de una comunidad de práctica (Wenger, 2001), sirven de referente para la implementación de programas de formación continua relacionados con la demostración matemática. Esta investigación permite ampliar la comprensión de estudios que requieran utilizar la teoría de la práctica social en escenarios educativos que involucren la demostración matemática.

Objetivo de la investigación

Analizar significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros.

CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO

Marco Teórico

En este capítulo presento elementos teóricos acerca del significado, la demostración matemática, la formación de profesores universitarios y la formación matemática de ingenieros. Estos elementos teóricos son utilizados como referentes conceptuales para fundamentar e interpretar el proceso de investigación sobre significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial para ingeniería. Reconozco que la posición teórica adoptada para esta investigación es sólo una de varias perspectivas en el escenario educativo; sin embargo, la referencia teórica adoptada permite enmarcar los elementos de esta investigación en una fundamentación científica en la Educación Matemática.

Significado

El término ‘significado’, como muchos otros frecuentes en las ciencias en general, es de naturaleza polisémica, por lo que dependiendo del uso que se le requiera dar puede tomar distintos y disímiles alcances. Este término “ha tomado diversas acepciones no sólo en Educación Matemática, sino también en teorías sobre el lenguaje, filosofía del lenguaje, psicología y pedagogía” (Serrano, 2005, pág. 132). Al margen de su polisemia inherente, ensayar una definición o trazar una teoría sobre el significado no consiste más que en hallar lo que hace que determinadas notaciones se vuelvan significativas (Putnam, 1988).

La multiplicidad de acepciones que acompañan a la noción de significado hace que este término haya “sido objeto de controversias en las teorías del lenguaje, en semiótica (o semiología) y en la filosofía” (Serrano, 2005, pág. 134), por nombrar sólo algunos campos. Si bien estos debates no resultan desconocidos en el marco de las fundamentaciones de esta investigación, debe agregarse que la intención en este escrito es aproximarme a una idea de ‘significado’ que permita la comprensión de asuntos relacionados con la demostración matemática de profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería. Algunas miradas a la noción de ‘significado’ en diversas áreas, tales como la lingüística y la semiótica, la filosofía y a partir de la teoría de la práctica social serán presentadas a continuación, de tal manera que contribuyan con la comprensión del término ‘significado’ en este estudio.

Una mirada lingüística y semiótica.

En términos generales, en la lingüística y la semiótica, particularmente la inaugurada por Ferdinand de Saussure a comienzos del siglo XX (v. gr. Curso de Lingüística General, 2008), el significado se entiende como el contenido mental que le es atribuido a un signo lingüístico; concibiendo este último como la correspondencia que se establece entre un acontecimiento concreto vocal-gráfico y su representación a nivel de las ideas, es decir, el concepto mental que este acontecimiento suscita.

Debo anotar que para estudiar el enfoque clásico del significado en el campo lingüístico-semiótico se debe reconocer que en este marco conceptual el acontecimiento concreto vocal-gráfico (dado que puede ser oral o escrito)[2] no es equivalente al hecho de naturaleza física; sino que equivale al acontecimiento concreto. Lo destacable es que éste se encuentra revestido del 'valor' del sentido en virtud de su interrelación con otros acontecimientos gráfico-vocales dentro del sistema-lengua. Este hecho unido a la imagen recordatoria de otros momentos en que el acontecimiento vocal-gráfico se ha encontrado en la misma relación de sentido lo habilita para representar una imagen psíquica, es decir, el signo.

De esta manera, el signo lingüístico se presenta como una unidad con dos elementos constituyentes: por un lado, posee una forma sensible, perceptible, que es el acontecimiento gráfico-vocal; y, por el otro, una forma ideal, mental. Así, "llamamos signo a la combinación del concepto y de la imagen acústica" (Saussure, 2008, pág. 92). Los términos 'concepto' e 'imagen acústica' serán luego llamados 'significado' y 'significante' respectivamente en el tratamiento lingüístico en aras de resaltar la oposición que los separa y el vínculo que los une, y se dirá que "el lazo que une el significante al significado es arbitrario" (Saussure, 2008, pág. 93) por cuanto

[2] Para Saussure (2008), el término empleado para referirse a lo que aquí llamo 'acontecimiento concreto vocal-gráfico' es el de 'imagen acústica'. Acústica, no por ser un sonido, sino por estar asociada a un sonido, sea que lo escuche o lo escuche al leerlo. Imagen, por ser representación de un hecho sensorial de diverso tipo, no solo visual.

el significado no está ligado por relación alguna interior con la secuencia de sonidos que conforman el significante.

El vínculo que une a la 'cosa' con su 'nombre' no es simple. No obstante, se entiende que "todo medio de expresión recibido de una sociedad se apoya en principio en un hábito colectivo o, lo que viene a ser lo mismo, en la convención" (Saussure, 2008, pág. 94); así pues, el signo lingüístico es convencional. Pero la palabra 'arbitrario' usada en el párrafo anterior precisa una observación: Saussure (2008) sobre ella señaló que esta no debe dar idea de que el uso del significante dependa de la libre elección del hablante (este uso es establecido por el grupo lingüístico), sino que es arbitrario con relación al significado, con el cual no guarda en la realidad ningún lazo natural.

La noción de arbitrariedad asociada al vínculo entre el significante y el significado tiene una consecuencia importante para el marco conceptual que delimito: implica rechazar la presencia de ideas completamente hechas preexistentes a las palabras. Esto es, aceptar la naturaleza arbitraria y meramente convencional del vínculo de unión entre significante y significado conlleva rechazar la existencia de conceptos mentales o abstractos anteriores a las formas sensibles del signo.

A este nivel señalo como uno de mis presupuestos argumentales lo que se deriva de la noción de arbitrariedad en el vínculo significante-significado. Hago referencia al rechazo de la creencia de que los signos del lenguaje representen o se vinculen a algún tipo de pensamiento previamente existente. Igualmente, puntualizo el rechazo de la creencia (asociada y derivada de ésta) de que las estructuras sintácticas serían representaciones de las síntesis lógicas que vinculan aquellos pensamientos con predicados (Frank, 2011).

Por otra parte, de este carácter arbitrario y convencional del signo lingüístico, se deriva un hecho a primera vista contradictorio que el mismo Saussure (2008) denominó la inmutabilidad y, a la vez, la mutabilidad del signo. La lengua como sistema es recibida por el individuo como herencia social a partir de su proceso de socialización; así pues, como convención social, ésta es inmodificable por parte del individuo, sin embargo, como producto social la lengua está sujeta a cambios motivados por factores históricos, políticos, sociales, culturales o de otro tipo determinados por el conjunto de hablantes-oyentes que la utilizan. Esto quiere decir que la lengua es inmutable individualmente, pero mutable colectivamente. La evolución y transformación diacrónica de la lengua pone de manifiesto entonces que no solo existe dinamismo (noción de arbitrariedad) entre el significante y el significado, sino entre éstos y los hechos a los que hacen referencia, es decir, el referente, y que dan cuenta también del proceso de cambio operado sobre el sistema-lengua.

Saussure (2008) concibió el signo lingüístico como una relación diádica, es decir, como una relación que se establece entre dos términos, un significante y un significado. Pero la concepción de que se debe apelar también al referente a la hora de acercarse al signo lingüístico abrió en la historia del estudio del significado la puerta para la inclusión de un tercer elemento en la díada, que con esto pasaría a ser una tríada: significante, significado y referente. Los desarrollos o revisiones ulteriores a los trabajos de Saussure; por ejemplo, los planteados por Émile Benveniste no sitúan la arbitrariedad del signo lingüístico entre el significante y el significado, sino entre el signo lingüístico en su integralidad y la cosa que es nombrada o significada (el referente).

La lingüística y la semiótica contemporáneas prefieren la concepción triádica del signo lingüístico a la concepción dualista de corte saussureana. Entre otras cosas porque el dualismo relega a un plano marginal la vinculación del lenguaje con la realidad.

De esta forma, las teorías y los desarrollos post-saussureanos pueden ser descritos de manera sintética en el llamado "triángulo semiótico", el cual es un método gráfico de distribuir los componentes que integran un signo cualquiera, principalmente los lingüísticos, en los vértices de un triángulo equilátero[3].

Lo fundamental de este método-modelo es que en él se relacionan los tres componentes antes descritos: referente, significante y significado. A diferencia de Saussure que veía el significado solo en relación con el significante, en el 'triángulo semántico' el significado es un componente en permanente interacción tanto con la forma sensible del signo, como con la realidad que esta forma representa. Para una investigación lingüístico-semiótica sobre el significado se deberá entender que, si se toma partido por uno de los vértices del triángulo, no se está agotando la idea de 'significado', sino que este debe ser 'captado' en su continua interrelación con los otros componentes del "triángulo semiótico".

Una mirada filosófica.

En filosofía analítica una teoría del significado tiene como objetivo analizar la naturaleza del significado (Whiting, 2006). *Los Fundamentos de la Aritmética* (Frege, 1972) se constituye

[3] Este método lo crearon los semióticos Charles Kay Ogden e Ivor Armstrong Richards. En sus vértices se sitúan el significante, o forma sensible y meramente percibida del signo lingüístico; el significado, o concepto ideal y abstracto asociado a dicho significante (y que puede serlo de forma natural, de forma convencional o por relaciones semejanza) y, por último, referente u objeto real del mundo al que están asociados tanto significado como significante.

en un paradigma del estilo de hacer filosofía a partir de una concepción analítica. En esta obra el autor expone de manera explícita los tres principios a los que atenderá en su desarrollo sobre el concepto de número, principios que luego se convertirían en principios determinantes de gran parte de la filosofía analítica ulterior.

Los tres principios son: separar la lógica de la psicología, buscar el significado en el contexto de los enunciados completos y trazar la distinción entre concepto y objeto. El primer principio implica el tratamiento de la lógica y la definición de sus conceptos fundamentales sin el recurso a la intuición, colocando así a la lógica en un camino de objetividad que la alejara de la concepción tradicional que la vinculaba eminentemente a la formulación de reglas para pensar correctamente. El segundo principio conlleva ‘desdoblar’ las oraciones completas en los contextos más básicos de significación de las palabras para poder así analizarlas. Éste es el llamado “Principio de Contexto”, el cual es uno de los fundamentos esenciales de la filosofía del lenguaje desarrollada en el siglo XX. Por último, el tercer principio implica, al escindirse el concepto del objeto, la emergencia de distintos modos de significar, al igual que el reconocimiento de la diferencia entre los individuos y los distintos ‘conjuntos’ a los que pertenecen.

Esta última mención involucra la concepción de que el significado depende no solo de los distintos contextos, sino además de los distintos usos que se les otorgue a los términos; uso que a su vez está mediado por la pertenencia de los individuos a distintos grupos. Concepción capital para los fundamentos conceptuales de este trabajo de investigación. Así, para la filosofía analítica la teoría del significado ha sido fundamental; al punto de que Dummett (1999) la define como el estilo de la filosofía (o uno de esos estilos de filosofía) para los que la teoría del significado es central.

Como he argumentado, de la centralidad de las teorías del significado para la filosofía analítica se deriva la existencia de dos ideas pilares. La primera, que el significado de las expresiones del lenguaje depende del contexto en que se usan. La segunda, que la observación científica, empírica e intersubjetiva de los objetos abstractos, tales como conceptos o proposiciones es imposible, porque es a partir de tal uso como se debe inferir el significado de los objetos abstractos (Godino & Batanero, 1994). Una visión tal del significado de los objetos abstractos aplicados a la observación de los objetos matemáticos requeriría desprender a éstos de su historial platónico, según el cual son vistos como realidades que viven en un universo matemático de ideas puras, inamovibles e incontrovertibles. Esta opción es próxima a la conclusión lingüístico-semiótica que niega las ideas completamente hechas preexistentes a las palabras.

A la luz de esta reflexión, Serrano (2005) hace una interesante acotación cuando plantea que:

> Las reglas del lenguaje matemático (o para el habla matemática) se orientan a formalizar este lenguaje, en el sentido de evitar malentendidos entre sus usuarios o inconsistencias en el mismo lenguaje. Desde este punto de vista una formalización es necesaria. Sin embargo, algunas formas de pensamiento asociadas a algunos usos de un lenguaje pueden quedar fuera de las asociadas al uso que sigue las reglas del lenguaje formalizado. (pág. 139)

Al emplear un lenguaje formal como el de las matemáticas al interior del aula escolar, se debería reconocer que lo que entiende cada alumno es distinto y depende de la historia del uso que este alumno tiene con esos conceptos del lenguaje formal. De esta manera se invita a reconocer el papel especial que el contexto tiene en el proceso de construir significados.

Una mirada social.

De acuerdo con Lacasa, Vélez y Sánchez (2005) las nuevas racionalidades a partir de las cuales se entiende el significado, han superado la concepción según la cual:

> […] este término tiende a reducirse a una regla computacional en la que se limitan los significados a las asociaciones que los seres humanos crean de los estímulos que los rodean o de los componentes de sus procesos de pensamiento, pero sin dar mayor importancia al contexto en que esto ocurre. (pág. 38)

Hernández (2003) argumenta que los significados no podrían ser estas asociaciones descritas, porque la mente no puede ser concebida como un instrumento o herramienta en donde se depositan o son guardadas verdades de significado ahistóricos y esencialistas, sino que por el contrario esta mente es la *máquina* que crea los significados. Esta creación no puede desligarse del mundo circundante en el que se encuentra inmerso el individuo cuya mente está creando significados. Esta perspectiva lleva a considerar a la mente como algo más que un simple depósito donde se almacenan los significados o como un espejo de la naturaleza. Según Hernández (2003), esto es así porque:

> El conocimiento no opera como una realidad autónoma, sino como una representación, un significado socialmente construido, y, por tanto, su definición depende del lugar donde se habla, y del momento histórico y la cultura a la que se pertenece. (pág. 436)

Por tanto, no puede existir conocimiento sin un conocedor que pertenece a un particular contexto histórico, donde el significado es siempre producto de una construcción social-cultural. En esta línea de pensamiento se destacan autores como Lev Semionovich Vygotsky, Jerome Bruner y Kenneth Gergen, quienes con base en la psicología proponen la tesis de que el desarrollo humano es un permanente proceso de culturización en el que el sujeto interioriza una serie de instrumentos que le permiten controlar sus procesos mentales y su comportamiento. Esta propuesta es cercana a la idea de que la mente produce significados (no simplemente los almacena) en relación con el mundo circundante.

Conviene detenerse un instante en la apelación del aspecto social en relación con la construcción/creación de significados. Con respecto al origen de los significados se entiende con base en la perspectiva de Vigotsky que éste "se halla en las nuevas conexiones que el hombre establece a partir de los signos" (Arcila, Mendoza, Jaramillo, & Cañón, 2010, pág. 41). Los signos surgen en la cultura y el hombre debe apropiárselos, dado que le permiten, en un primer momento, establecer contacto con el mundo subjetivo de los otros, ser capaz de operar en referencia a ellos y luego en su propio mundo subjetivo (Vygotsky, 1987).

Los significados evolucionan siguiendo dos caminos complementarios; uno que involucra a la ontogénesis, es decir, a la evolución individual de cada persona y otro que apela a la cultura. De esta manera, se termina por entender que si los signos se hallan en la cultura, los significados, de igual modo, se encuentran también en ella (Vygotsky, 1987). Esto equivale a decir que en cuanto una persona ha alcanzado cierto nivel de maduración (ontogenética) está en capacidad de negociar los significados que se inscriben en la cultura y, de este modo, contribuir en la transformación continua de los mismos.

Por su parte, Bruner (1998), a partir de la llamada 'psicología cognoscitiva', en su concepción del Yo como un yo transaccional, reconoce que los significados al ser hechos producidos en virtud de transacciones son objetos de estudio válidos para la psicología. Con ello procura redimir a la ciencia psicológica del dominio hegemónico de aquellos modelos explicativos que se fundaban en suposiciones sobre conexiones estímulo-respuesta y materializadas en conductas observables.

La idea del Yo transaccional, a pesar de ser registrada como una teoría cognitiva, no representa la esencia de los modelos del procesamiento de la información, sino que más bien los controvierte. Bruner (1998) cuestionaba a la 'revolución cognitiva' por haber tomado al computador como analogía de la mente, porque los significados no pasan a ser vistos más que como componentes emergentes de programas (al estilo informático) de ejecución de conductas. Bruner afirma que los significados se derivan de negociaciones; que realiza cada ser humano en su proceso de construcción de significados. La negociación la encuentra Bruner exactamente en los dos caminos, en las dos líneas de desarrollo ya señalados por Vygotsky: la biología y la cultura. "Ahora bien, la evolución en los significados se produce cuando estas dos líneas de desarrollo, la biológica y la cultural, se entrecruzan. Esto ocurre en el momento en que el sujeto se apropia del lenguaje" (Arcila, Mendoza, Jaramillo, & Cañón, 2010, pág. 43).

Para Gergen (1996), los significados surgen cuando el individuo (un ente biológico) realiza transacciones con los artefactos culturales que lo rodean, por medio de la herramienta del lenguaje. En este autor se puede dilucidar una construcción teórica centrada en la crítica a la idea de objetividad del mundo que está fuera del hombre. En su visión, la realidad no es un hecho objetivo que el individuo deba representarse mentalmente y, por tanto, es inútil crear teorías universales que den cuenta y expliquen los fenómenos que se presentan en la mente.

Según Gergen (2006), el origen de los significados se encuentra en el entramado de las relaciones. El individuo, desde el momento mismo de su nacimiento, cae en y establece relaciones con una comunidad y en las acciones que coordina con esta comunidad es donde logra construir, deconstruir y co-construir de manera permanente (no estática) los significados.

La teoría de la práctica social.

Para esta investigación he escogido como marco conceptual y analítico la perspectiva social de la teoría de la práctica social, de Lave y Wenger (1991) y Wenger (2001). Entre las razones de dicha decisión se encuentra el hecho que esta teoría de corte social centra su interés en el aprendizaje como participación social. La propuesta de aprendizaje para Wenger (2001) es ubicarla en "el contexto de nuestra propia experiencia de participación en el mundo, como una parte de nuestra naturaleza humana, como un fenómeno fundamentalmente social que refleja nuestra naturaleza social como seres humanos capaces de conocer" (pág. 19).

Entre los presupuestos que fundamenta esta teoría se resalta como aspecto esencial el hecho de considerarnos como *seres sociales*. En este sentido, Wenger identifica el *conocer* en relación con la participación y, por ende, con el compromiso de los sujetos entorno a intereses y objetivos comunes que comprometen la cooperación entre los miembros de una comunidad. Así, el *significado* se entiende como el aprendizaje desde la perspectiva de la experiencia.

Estos presupuestos cobran sentido en mi investigación, pues al asumirnos como seres sociales y considerar que la participación social es vista como un proceso de aprender y conocer estoy comprometiéndome con asumir una mirada del profesor no sólo de manera individual sino como parte de una comunidad.

Esto implica asumir el aprendizaje de los profesores como participación social. Es así como los significados de la demostración matemática de los profesores de cálculo diferencial para ingeniería se concibe como un aprendizaje en términos de esta teoría.

Para caracterizar la participación social como un proceso de aprender y conocer Wenger (2001) establece los siguientes componentes:

1. significado: una manera de hablar de nuestra capacidad (cambiante) —en el plano individual y colectivo— de experimentar nuestra vida y el mundo como algo significativo.
2. práctica: una manera de hablar de los recursos históricos y sociales, los marcos de referencia y las perspectivas compartidas que pueden sustentar el compromiso mutuo de la acción.
3. comunidad: una manera de hablar de las configuraciones sociales donde la persecución de nuestras empresas se define como valiosa y nuestra participación es reconocible como competencia.
4. identidad: una manera de hablar del cambio que produce el aprendizaje en quiénes somos y de cómo crea historias personales de devenir en el contexto de nuestras comunidades (Wenger, 2001, pág. 22).

Según Wenger (2001), estos componentes están interconectados y se definen mutuamente, con los cuales se constituye el concepto de 'comunidad de práctica'. A continuación, detallaré este concepto y otros que están estrechamente relacionados y que son propios de esta teoría.

Comunidad de práctica.

La expresión 'comunidad de práctica' se puede interpretar como una unidad social en donde cada miembro lleva a cabo una empresa a través de la interrelación con otros miembros. A través de esas interrelaciones, cada individuo ajusta la empresa a fines comunes y busca una identidad en correspondencia con la comunidad. Las comunidades de práctica no son entidades independientes, pues se desarrollan en contextos históricos, sociales, culturales e institucionales. Entre las características que identifican a una comunidad de práctica se encuentran: el establecimiento de su propia dinámica de relaciones y de responsabilidades entre los miembros; la emergencia de actividades no planeadas y la evolución en forma autóctona en función de su propia dinámica (Wenger, 2001). Según Wenger, McDermontt y Snyder (2002) las comunidades de práctica son "grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas, o una pasión sobre un tema, y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área mediante la interacción en forma permanente" (pág. 4).

Al hablar de comunidad de práctica debe tenerse en cuenta que esta debe contar con tres características: el dominio, la comunidad y la práctica. El dominio se refiere al área de estudio de la comunidad, es decir, el tema que los convoca; la práctica hace referencia al campo de aplicación de los conocimientos y saberes desde el que se sustenta la experiencia; y la comunidad se relaciona con la interacción y el intercambio de saberes entre este conjunto dado de individuos. Estas características se hallan relacionadas por la interacción misma que configura la identidad, donde la confianza y la colaboración hacen posible que el conocimiento de la comunidad de práctica se mantenga, se desarrolle o se comparta.

Una comunidad de práctica tiene tres dimensiones: la empresa conjunta, el compromiso mutuo y el repertorio compartido. A continuación, describo cada una.

Empresa conjunta.

Para Wenger (2001) una empresa conjunta es "un recurso de coordinación, de comprensión, de compromiso mutuo" (pág. 109). No es una simple meta acordada por los participantes, sino que genera entre ellos relaciones de responsabilidad mutua que se convierten en parte integral de la práctica. El sentido de conjunta que se le atribuye a la empresa lo establece la negociación colectiva, con lo cual no todos deben estar de acuerdo con todo.

Compromiso mutuo.

El compromiso mutuo es una de las características de la práctica como fuente de coherencia de una comunidad. El compromiso mutuo hace alusión a la generación de relaciones de participación mutua por medio de las cuales los miembros de la comunidad realizan la práctica de acciones cuyo significado negocian conjuntamente. Es así como "en consecuencia, la afiliación a una comunidad de práctica es una cuestión de compromiso mutuo. Eso es lo que define a la comunidad" (Wenger, 2001, pág. 100).

Según Wenger, un compromiso mutuo no implica una homogeneidad de la participación de los miembros de una comunidad, pero crea relaciones entre ellos. El compromiso de cada participante con la práctica de la comunidad le va generando un lugar único y definiendo una identidad propia entre los demás participantes.

Repertorio compartido.

Según Wenger (2001), el repertorio compartido combina aspectos de la participación de los miembros de una comunidad como también las experiencias materializadas en acciones concretas. En palabras de Wenger (2001) el repertorio compartido:

> […] incluye rutinas, palabras, instrumentos, maneras de hacer, relatos, gestos, símbolos, géneros, acciones o conceptos que la comunidad ha producido o adoptado en el curso de su existencia y que han pasado a formar parte de su práctica. El repertorio combina aspectos cosificadores y de participación (pág. 110).

A este respecto, me resta agregar que la 'cosificación' a la que se hace referencia en la cita precedente se refiere al proceso de dar forma a la experiencia por medio de la producción de objetos que representen la experiencia misma en una cosa (de aquí, cosificación). En este sentido, los *aspectos cosificadores* apelan a abstracciones, símbolos, instrumentos, relatos, términos o conceptos que convierten en cosa algo de la práctica.

Significado a partir de la teoría de la práctica social.

Uno de los elementos importantes en la teoría de la práctica social en los cuales fundamento esta investigación es el significado. Según Wenger (2001), cuando se refiere al 'significado' no se centra principalmente ni en el significado dado en un diccionario ni en el significado como relación entre un 'signo' y un 'referente' ni como una pregunta esencial como problema filosófico. El 'significado' según la teoría de la práctica social se sitúa en un proceso que denomina 'negociación de significados', el cual expresa el proceso por el que experimentamos el mundo y nuestro compromiso en él como algo significativo. Esta negociación de significados, según Wenger (2001) es un proceso productivo en el que el significado no es prexistente, pero tampoco es simplemente inventado, es al mismo tiempo: histórico y dinámico, contextual y único. Es así, como para Wenger (2001) un significado "siempre es el producto de su negociación. El significado no existe en nosotros ni en el mundo, sino en la relación dinámica de vivir en el mundo" (pág. 79).

De esta manera, el significado emerge en las comunidades de práctica como producto de la negociación, de la transacción, del intercambio y de la interacción entre sus miembros y no puede ser circunscrito a un único lugar epistémico. La negociación del significado es un concepto con el que se hace referencia a la labor que los participantes en una interacción que realizan para lograr crear de manera conjunta el sentido de sus intercambios (el significado). Para realizar tal labor, los participantes se basan en los marcos de conocimiento que comparten, es decir, los dominios y sus aplicaciones como saberes.

Por lo tanto, para esta investigación indagar acerca de los significados de la demostración de profesores de cálculo diferencial para ingeniería se convierte en un proceso que sugiere enfocarse en la participación de los profesores en prácticas colectivas que busquen reflexionar y tomar acciones sobre la demostración para cursos de cálculo diferencial. La participación de los profesores permite un escenario donde se exponen las experiencias y conocimientos individuales bajo la interacción con los demás miembros de la comunidad de práctica. La participación de los profesores en la negociación de significados de la demostración promueve la construcción conjunta de conocimientos sobre la demostración y posibilita la movilidad de ideas, acciones e interpretaciones sobre la enseñanza de la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingeniería.

Según Wenger (2001) la negociación de significados tiene lugar en la convergencia de los procesos de 'participación' y de 'cosificación'. Estos procesos son descritos a continuación.

Participación y cosificación.

Wenger (2001) plantea que la participación "va más allá de la intervención directa en unas actividades específicas con unas personas concretas" (pág. 82), más bien, es una posibilidad de reconocimiento mutuo ante los miembros de una comunidad de práctica. Es una posibilidad de desarrollar una identidad mediada por las relaciones de participación. En la teoría de la práctica social, el concepto de materialización[4] es entendido como "el proceso de dar forma a nuestra experiencia produciendo objetos que plasman esta experiencia en una 'cosa'" (pág. 84). Wenger plantea los productos de la materialización como reflejos de las prácticas y como muestras de significados humanos.

La participación y la materialización conforman una dualidad que no se oponen, sino más bien se complementan. En este sentido Wenger (2001) plantea lo siguiente:

> La participación compensa las limitaciones inherentes a la cosificación. [...] Cuando la rigidez de su forma deja obsoleta a la cosificación, cuando su muda ambigüedad es engañosa o cuando su propósito se pierde en la distancia, la participación acude al rescate. [...] la cosificación también compensa las limitaciones inherentes a la participación. [...] cuando la informalidad de la participación está confusamente deslavazada, cuando la fluidez de su carácter implícito impide la coordinación, cuando su

[4] En esta investigación se asume materialización para lo que Wenger (2001) llama *cosificación*.

localidad es demasiado limitadora o su parcialidad es demasiado estrecha, la cosificación acude al rescate. (pág. 90).

La relación de los componentes de la teoría de la práctica social la describo brevemente para esta investigación de la siguiente manera: Partimos de la *comunidad de práctica* que busca llevar a cabo una *empresa conjunta*. En el desarrollo de esta empresa conjunta se dan permanentemente *negociación de significados* que supone dos procesos consecutivos y complementarios como son la *participación* y la *materialización*. En la participación se establecen *identidades* de los participantes de acuerdo al *compromiso mutuo* que asuma cada miembro con la empresa conjunta. Los procesos de participación y materialización se dan en un *repertorio compartido* de práctica. En particular, sin ser simple, describo de una manera esquemática el 'significado' como es entendido en la teoría de la práctica social como la experiencia de vivir en el mundo, de tal manera que a través de la negociación de significados se constituye en la participación y materialización (Figura 1)

Figura 1: Esquema de interpretación del significado de acuerdo con la teoría de la práctica social. Fuente: Elaboración propia.

Demostración Matemática

En esta sección presento, inicialmente, algunas investigaciones que consideré relevantes para contrastar el alcance de este estudio con otros que discuten la demostración matemática. Centro la atención en investigaciones que dan cuenta de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el cálculo y la demostración en la perspectiva de la teoría de la práctica social. Posteriormente, presento asuntos relacionados con aproximaciones de la demostración matemática, donde me refiero a aproximaciones al concepto de la demostración que contribuyeron a construir uno propio asumido para este estudio. Luego, me dedico a presentar dos asuntos que fueron relevantes para el trabajo de campo y el análisis de la información: la demostración según el grado de abstracción y los roles de la demostración en la Educación Matemática.

Investigaciones relacionadas con la demostración.

A continuación, presento dos grupos de investigaciones cuyos aportes sirvieron para identificar el alcance de este trabajo en contraste con otras que relacionan la demostración como objeto de estudio. En el primer grupo relaciono tres estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración asociados con el cálculo (Calvo, 2001; Klisinska, 2009; González, 2012). En el segundo grupo presento algunas investigaciones que se fundamentan en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) —como referencia teórica— y estudian aspectos relacionados con la formación de profesores o con el aprendizaje y la enseñanza de la demostración (Camargo, 2010; Clark, 2005; Gómez , 2007; Hemmi, 2006). Para cada una de estas investigaciones menciono las cercanías y distancias que puede tener esta investigación con relación a esos estudios.

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el área de cálculo.

Entre las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el área de cálculo revisadas en este estudio, se tienen los trabajos adelantados por Calvo (2001), Klisinska (2009) y González (2012). El estudio de Calvo (2001) trató el tema de la integral en un curso de transición, en las etapas elemental y avanzada, de estudios de matemática. La autora caracterizó esta etapa de transición y, en particular, el tipo de demostraciones que hacen los estudiantes. Calvo utilizó como marco teórico la transposición didáctica para la caracterización de la etapa de transición. Además, empleó aspectos de las actividades cognitivas conocidas como encapsulación, visualización y algoritmización en relación con la vinculación del estudiante con las tareas rutinarias, con el tratamiento de la información visual y con el manejo de los procesos, de los objetos resultantes de dichos procesos y de los símbolos usados.

Calvo (2001) encontró que en las características del período de transición se identificó una mayor responsabilidad del estudiante con su propio aprendizaje y con la actividad matemática que realiza, por lo tanto, existió un mayor compromiso en su contrato didáctico. En los resultados relacionados con las consideraciones teóricas, la autora encontró que la demostración es vista no sólo como una confirmación de validez de la cadena de deducciones, sino como “una importante herramienta para la explicación, descubrimiento, comunicación, validación y sistematización, y deberían ser todas éstas las razones por las que presentamos demostraciones y otros discursos justificativos en el aula” (pág. 155). Calvo consideró la importancia de las actividades de refutación y de elección de los contraejemplos para establecer no sólo la falsedad de afirmaciones, sino las razones por las que fallan dichas afirmaciones.

Mi investigación toma distancia con el estudio de Calvo (2001), porque la autora se refiere a estudiantes en un curso de transición entre educación secundaria y universitaria. Además, porque el enfoque del marco referencial tomado para el análisis de la información atiende sólo a características individuales del sujeto; mientras que en mi referente teórico se utiliza una postura sociocultural donde se enfatiza el trabajo en comunidad. Sin embargo, encuentro relevante la apreciación de la demostración que asume esta autora en sus conclusiones, pues plantea la demostración como herramienta para la explicación, descubrimiento, comunicación, validación y sistematización, lo cual contribuye con ampliar una idea formal de la demostración.

Por otra parte, en la investigación de Klisinska (2009) se estudiaron las relaciones entre las matemáticas académicas practicadas por matemáticos y las matemáticas practicadas en las aulas en todos los niveles educativos (educación primaria, secundaria y terciaria) enfocándose en la demostración. El estudio presentó una reseña histórica de la invención del Teorema Fundamental del Cálculo y su demostración, incluyendo su aparición en los libros de texto de cálculo. A través de entrevistas con matemáticos de diferentes áreas el estudio proporcionó una imagen del significado y la importancia que ellos le atribuyen al Teorema Fundamental del Cálculo. La autora utilizó la perspectiva de la teoría de la Transposición Didáctica para analizar los resultados del relato histórico y los datos acerca de las opiniones de los matemáticos.

Considero que el estudio de Klisinska (2009) aportó una referencia en mi investigación en relación con los resultados sobre el significado de un teorema y de su demostración por parte de matemáticos. Sin embargo, se tienen grandes diferencias en lo que respecta al enfoque epistemológico del estudio, pues, en mi caso considero un colectivo de profesores donde son relevantes las interacciones dialógicas que se presenten entre ellos en el proceso de negociación de significados de la demostración, mientras que para el estudio de Klisinska la participación de los matemáticos fue individual y a través de un cuestionario.

Por último, en el estudio de González (2012) se analizó si las *pruebas pre-formales* eran más significativas que las *pruebas formales* para los alumnos de un curso de cálculo en primer año de ingeniería. Entre los teoremas a los que se les dedicó una especial atención están: Unicidad del Límite y Valor Medio de Lagrange, empleando las pruebas formal y pre-formal. El autor estableció cuatro categorías: facilidad, claridad, gusto e influjo en el aprendizaje, para la comparación y valoración por los propios alumnos de los dos tipos de pruebas. González consideró los elementos planteados por Hanna (1989) para el significado de la demostración, como son: capacidad de convicción, ayuda a la comprensión, ayuda a la memorización y ayuda a la ilustración sobre cómo se aplica un teorema.

La metodología utilizada en el estudio de González (2012) fue de integración cualitativo-cuantitativa. Para el enfoque cualitativo, cohesionó los marcos metodológicos de investigación-acción y metodología de diseño. Para el enfoque cuantitativo comparó las respuestas aportadas por los alumnos en relación con los teoremas y el tipo de demostración (formal y pre-formal), analizando estadísticamente: correlaciones, comparaciones de muestras, de medias, de desviaciones típicas, y contrastes.

Entre los resultados de la investigación de González (2012) se encontró que los estudiantes de cálculo diferencial, en ingeniería, acogieron con interés y satisfacción la demostración pre-formal. Estos alumnos aceptaron el tipo pre-formal porque “para ellos es más fácil, más clara y más sencilla, incluso en mayor grado, que la prueba formal” (González, 2012, pág. 298). Un resultado de este estudio fueron las valoraciones positivas que dieron los estudiantes a la prueba pre-formal.

El trabajo de González (2012) fue un referente importante para mi investigación, puesto que, al trabajar con demostraciones en un curso de cálculo diferencial, para un programa de ingeniería, aportó resultados que fueron utilizados en el diseño de actividades del programa de formación continua para los profesores participantes. Los planteamientos de demostraciones de algunos teoremas de cálculo diferencial, según el rigor de sus argumentos, como es el caso de demostraciones pre-formales, fueron tomados de referencia para discusiones en actividades del programa de formación. Los criterios de rigor en la argumentación de demostraciones fueron focos de discusión para la negociación de significados de la demostración por parte de los profesores de cálculo diferencial participantes en este estudio.

Investigaciones que relacionan la teoría de la práctica social.

Algunos trabajos de investigación consideraron los espacios de formación inicial y continua de profesores como comunidades de práctica, utilizando entre los conceptos de la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) el de *negociación de significados* (Cobb, McClain, Silva, & Dean, 2003; Gómez, 2007). Este concepto es empleado para documentar el aprendizaje de los profesores. En particular, el estudio adelantado por Gómez (2007) con profesores en formación consideró algunos criterios para la construcción del significado como son: la confusión, dada por las dudas o el desconocimiento de los participantes del significado de algún asunto; el conflicto y su resolución, en cuanto dos o más miembros de la comunidad asumen posiciones contrarias con respecto a alguna cuestión; y la materialización, donde un significado se adopta por los miembros y forma parte del repertorio compartido. Además, en el citado estudio, el autor presentó un sistema de códigos emergentes que utilizó para identificar y sintetizar los diferentes episodios dados en la comunidad. Esto le permitió dar cuenta del repertorio compartido de prácticas de los profesores en formación y exponer situaciones que favorecieron la emergencia de la comunidad de práctica. La investigación llevada por Gómez (2007) fue útil para este trabajo, pues se convierte en un referente metodológico para resaltar procesos como la negociación de significados y establecer un sistema de códigos para el análisis de la información.

Entre los trabajos de investigación que hacen uso de la teoría de la práctica social de Wenger (2001), y que identifican aspectos sociales del aprendizaje o de la enseñanza de la demostración se encuentran los estudios de Clark (2005), Hemmi (2006) y Camargo (2010). El estudio de Clark (2005) describió la emergencia de una comunidad de práctica en un curso de estructuras matemáticas, bajo la perspectiva de la teoría social del aprendizaje de Wenger (2001) y de las normas sociomatemáticas de Cobb y Yackel (1998) . La empresa conjunta de esta comunidad era usar argumentos deductivos como criterio para aceptar una justificación matemática. El estudio de Clark examinó el aprendizaje de la demostración de los estudiantes en el curso de estructuras matemáticas. En este curso de nivel universitario y considerado como de transición, los estudiantes iniciaron con procedimientos matemáticos basados en álgebra y cálculo hasta llegar a la redacción de demostraciones rigurosas necesarias para las matemáticas de nivel superior. En la comunidad de práctica citada, la cual el autor llamó *comunidad de práctica de clase*, el papel del profesor fue de negociador entre la comunidad de la clase y la comunidad matemática. El aprendizaje pudo ser evidenciado por la forma como los estudiantes interactuaron con el profesor y con los demás estudiantes.

Mi propuesta de investigación toma distancia del estudio de Clark en la medida en que el escenario de negociación de significados de la demostración es con profesores universitarios y en el área de cálculo diferencial. Sin embargo, el estudio de Clark sirvió de referente para mi propuesta en lo relacionado con el proceso de constitución de un cuerpo de datos y del sistema de códigos.

Otra investigación de referencia para mi estudio fue la de Hemmi (2006), la cual describió las aproximaciones de los estudiantes a la demostración en el desarrollo de un programa de formación en matemática universitaria. La autora consideró como comunidad de práctica el Departamento de Matemáticas, en la que sus miembros tenían como empresa conjunta aprender matemáticas. A partir de una perspectiva sociocultural, se identificó a la demostración bajo las nociones de artefacto. En este sentido se toma el concepto de transparencia del artefacto cultural, el cual describe la intrincada relación entre el uso y la comprensión de los objetos. En esta mirada metodológica, la unidad de análisis fue el Departamento de Matemáticas y la producción de registros y datos se llevó a cabo a través de: la observación de algunas clases, entrevistas con matemáticos adscritos al programa, estudiantes de posgrado y estudiantes del Programa de Matemáticas y revisión de textos y materiales para la instrucción. El análisis de los datos se llevó a cabo con enfoques metodológicos tanto cualitativos como cuantitativos. Los resultados estuvieron relacionados con el significado de la demostración para su práctica de enseñanza y de cómo los matemáticos adscritos al programa trataron algunas funciones de la demostración. Además, se describió cómo estos matemáticos se refirieron a los cambios dados en las últimas décadas sobre la práctica matemática relacionada con el tratamiento de la demostración. La autora presentó un modelo teórico de tres diferentes estilos de enseñanza que recogió las perspectivas e intenciones pedagógicas de los matemáticos que participaron en el estudio, relacionadas con la enseñanza de la demostración.

El estudio realizado por Hemmi es afín a mi investigación en cuanto a tratar con la demostración a nivel universitario y en utilizar como referente teórico la teoría de la práctica social de Wenger (2001). La investigación de Hemmi fue útil para mi investigación en lo relacionado con el proceso y los resultados sobre la participación de los matemáticos con respecto al significado y las prácticas de enseñanza de la demostración en el nivel universitario.

Un estudio en Colombia que se tomó de referencia fue la investigación de Camargo (2010). La autora analizó el aprendizaje de la demostración de un grupo de estudiantes de un curso universitario de geometría plana. Estos estudiantes junto con su profesora conformaron una comunidad de práctica de clase, entendida en el sentido de Clark (2005), la cual se tomó como la unidad de análisis del estudio. La empresa conjunta fue la construcción colectiva de una porción de un sistema axiomático de la geometría plana. Este estudio asumió como parte del marco conceptual y analítico elementos de la perspectiva sociocultural propuesta por Lave y Wenger (1991) y el constructo de comunidad de práctica de la teoría de la práctica social de Wenger (2001). La investigación de Camargo (2010) sugirió una perspectiva sobre el aprendizaje de la demostración como un proceso de participación en prácticas matemáticas que dan significado a demostrar. La autora propuso una conceptualización para la demostración que incluye asumirla como un producto y como un proceso identificándolos como demostración matemática y actividad matemática, respectivamente. Esta dualidad la relacionó con la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) a través de la participación–materialización. Así mismo, vinculó la actividad demostrativa con un repertorio de prácticas compartidas en donde los estudiantes avanzaron en la participación de la práctica de demostrar. El diseño general de investigación se centró en registrar lo que decían o hacían la profesora y los estudiantes referido a la actividad demostrativa.

La investigación llevada por Camargo se constituye en un referente metodológico para mi propuesta de investigación en lo relacionado con el proceso de construcción del cuerpo principal de datos y con el sistema de códigos utilizado para hacer el análisis. Además, este estudio aportó elementos conceptuales de la demostración que fueron considerados en mi investigación.

A continuación, presento los elementos teóricos sobre la demostración como perspectivas conceptuales para fundamentar e interpretar el proceso de investigación sobre significados de la demostración por parte de profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería. Reconozco que la posición teórica adoptada para esta investigación es sólo una de varias perspectivas en el escenario educativo; sin embargo, la referencia teórica adoptada permitió enmarcar los elementos de mi investigación en una fundamentación científica de la Educación Matemática.

Aproximaciones a la demostración matemática.

Este escrito se basó en los avances investigativos sobre la demostración en el campo de la Educación Matemática. En este componente del marco teórico describo los siguientes aspectos de la demostración: aproximaciones conceptuales, clasificaciones y roles. Estos aspectos sobre la demostración contribuyeron a la construcción propia de una aproximación a la demostración y principalmente sirvieron como referente teórico para la comprensión y análisis de significados de la demostración que emergieron de los hallazgos de la investigación.

Aproximaciones al concepto de la demostración.

Los diversos sentidos de la palabra demostración pueden estar determinados por el uso de los términos explicación, argumentación, prueba, etc. Según Godino y Recio (2001) las diferencias en los tipos de situaciones en que se usan estos vocablos, sus rasgos característicos y los recursos expresivos puestos en juego en cada caso indican sentidos distintos del concepto de la demostración. Por lo tanto, presento a continuación algunas perspectivas de ellos y su relación con la demostración.

Para Balacheff (2000), la explicación es un discurso que "pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor. La explicación no se reduce necesariamente a una cadena deductiva." (pág. 12). Con base en el término explicación este autor expresa los conceptos de *prueba* y *demostración*. Para que una explicación sea una prueba debe asegurar su validez ante una comunidad en un momento dado. Dado el carácter social inherente a este proceso, una prueba puede ser aceptada por una comunidad, pero rechazada por otra, al igual que puede perder su estatus de prueba al evolucionar los saberes en los cuales se apoya. Ahora, para Balacheff las pruebas que relacionan a la comunidad matemática y tratan de una serie de enunciados (definiciones, axiomas, teoremas previos o elementos derivados de los enunciados que le preceden) que se organizan siguiendo un conjunto bien definido de reglas, se denomina demostración. Esta aproximación a la demostración dada por Balacheff es relevante para este estudio, al considerar la mediación de una comunidad para la validez de una prueba. De igual forma, relaciona elementos como definiciones, axiomas, etc., bajo unas reglas definidas que permiten ir aproximándome a lo que llamaré demostración.

Para Duval (1999), mientras que la argumentación responde a criterios de pertinencia relacionadas con lo creíble y el convencimiento de sí mismo o de otros, la demostración responde a criterios de validez, donde un enunciado es verdadero o se deduce de otros enunciados a través de un conjunto de reglas de deducción cuya validez es aceptada socialmente. El autor plantea que como la argumentación "obedece a vínculos de pertinencia entonces es más cercana a las prácticas discursivas espontáneas: su 'lógica' depende más de las leyes de la coherencia que de las leyes lógicas propiamente dichas" (pág. 14). Duval reconoce una distancia cognitiva entre la argumentación y la demostración que, aunque puede ser débil "no se debe tomar una argumentación como una demostración y viceversa" (pág. 15). Distinguir entre argumentación y demostración es pertinente para este estudio, pues permite profundizar sobre las características de cada una de ellas y a la vez pensar en la posibilidad de considerar a la argumentación como un proceso constitutivo en una demostración. Sin embargo, la postura de Duval sobre la demostración se aproxima más a un cálculo lógico como lo plantea Douek (2007).

Para Douek (2007) cualquier discurso no se puede aceptar como una argumentación y considera el término argumentación referido tanto al proceso que produce un discurso conectado lógicamente (pero no necesariamente deductivo) sobre un tema determinado, como al texto producido por el proceso. Según este autor una argumentación se compone de uno o más argumentos conectados lógicamente. Los argumentos son razones a favor o en contra de una proposición u opinión. Con respecto al término demostración, Douek la identifica como demostración matemática y corresponde a los textos que en el pasado y en la actualidad son reconocidos como demostraciones por las personas que trabajan en el campo matemático. Esta perspectiva abarca las demostraciones publicadas en los libros de texto de matemáticas de secundaria, las actuales y modernas demostraciones matemáticas y las que comunican resultados matemáticos en revistas especializadas. Esta acepción de la demostración por Douek sugiere asumir la expresión 'demostración matemática' próxima a un producto.

Otra perspectiva sobre el término demostración se encuentra en el trabajo de Godino y Recio (2001) que la plantea de modo genérico como el

> […] objeto emergente del sistema de prácticas argumentativas (o argumentos) aceptadas en el seno de una comunidad, o por una persona, ante situaciones de validación y decisión, esto es, situaciones que requieren justificar o validar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (pág. 406).

El planteamiento de Godino y Recio (2001) resalta la emergencia de la demostración en un sistema de prácticas argumentativas; lo que podría ayudar a considerar a la demostración como un proceso, más que como un producto acabado. Estos autores analizan los significados de la demostración en distintos contextos institucionales y personales, usando el marco teórico sobre los objetos matemáticos y sus significados desarrollados bajo el enfoque ontosemiótico para la investigación en Educación Matemática.

Por otra parte, las comunidades matemáticas en contextos sociales y culturales diferentes permiten encontrar estrategias de demostraciones diversas y formas de validación distintas de acuerdo con las características de esos contextos (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010). Según estos autores y bajo un enfoque de la socioepistemología, se entiende la demostración como

> […] una práctica social de la comunidad matemática que se lleva a cabo fundamentalmente para validar el conocimiento matemático adquirido por la sociedad.

> Esta práctica social no es la misma de una comunidad a otra y se ha modificado de una cultura a otra (pág. 285).

Esta postura de Crespo y otros (2010) permite reconocer a la demostración como un constructo de la humanidad permeado por las concepciones matemáticas, históricas y sociales de cada época. Además, según Moreno (1996) la demostración

> […] es una (para muchos la) actividad característica de la matemática; pero no es algo que se haya hecho siempre de la misma manera. De hecho, la actividad demostrativa ha evolucionado con la matemática misma, dejando, en cada momento, el testimonio de la íntima relación entre los métodos de la demostración y la naturaleza de los objetos matemáticos en cuestión (pág. 124).

Este planteamiento reafirma que la demostración siempre toma lugar en contextos históricos, filosóficos, culturales y sociales. La historia de las matemáticas es una fuente de ejemplos instructivos que puede ayudar al trabajo de enseñar la demostración (Grabiner, 2012).

Atendiendo a las aproximaciones anteriores sobre el concepto demostración y avanzando en una postura propia sobre el mismo término asumo en esta investigación a la demostración atendiendo a una visión de proceso y producto. Estos aspectos de proceso y producto señalados en ocasiones como polos, no son necesariamente opuestos, como lo plantea Arsac (2007). Este autor considera la definición de la demostración matemática en dos polos. El primero es un polo formal, en el cual se caracteriza la demostración matemática por su forma como un texto que respeta unas normas precisas. El segundo es un polo social o cultural, donde la demostración matemática es caracterizada por el proceso de validación utilizado por los matemáticos. Estos dos polos no son independientes en la medida en que las reglas que la demostración matemática debe cumplir surgen de acuerdos entre matemáticos y han sido modificadas históricamente. Resaltando el polo social o cultural de la demostración encuentro que el conocimiento matemático, puesto en escena a través de la demostración, coincide con las características de un conocimiento cultural como el planteado por Sierpinska y Lerman (1996) y entendido como socialmente producido, potencialmente cambiable, ligado con valores sociales y regulado socialmente.

La demostración en el contexto de la Educación Matemática se ve como un producto y como un proceso. Sin embargo, coincido con Camargo (2010) al encontrar en la revisión de literatura sobre la demostración el uso indistinto de la palabra demostración para referirse a un producto o a un proceso. Con la intención de establecer una diferencia entre estos dos aspectos de la demostración Camargo denomina 'demostración matemática' a la referencia que hace a un producto y menciona 'actividad demostrativa' a la alusión que hace a un proceso. Así, Camargo (2010) describe la 'demostración matemática' como un

> […] discurso que respeta ciertas reglas, fundamentado en un sistema teórico de referencia, mediante el cual se da validez a un enunciado al interior del sistema. Para ello, se establece una cadena deductiva de afirmaciones que lleva del antecedente del enunciado (de tipo condicional) al consecuente de éste (pág. 48).

Según la citada autora esta mirada de la demostración como producto "es de naturaleza sociocultural y está condicionada por el contexto en donde se lleva a cabo y por el dominio específico al interior del cual se está actuando" (pág. 48). El constructo de 'actividad demostrativa' dado por Camargo (2010) en un escenario de enseñanza de la geometría es

> […] el conjunto de actividades que apoyan e impulsan la producción de una demostración matemática. Generalmente éstas comienzan con la exploración de una situación para buscar regularidades, pasan por la formulación de conjeturas y la respectiva aceptación del hecho geométrico enunciado, posteriormente se concentran en la búsqueda de ideas o argumentos que conforman la demostración del enunciado y la organización de dichas ideas en un discurso comunicable según reglas establecidas por el grupo humano al que se dirige y terminan con la inclusión del enunciado al interior de un sistema teórico (pág. 49).

Coincido con Camargo (2010) en valorar la noción de proceso en esta aproximación a la demostración, puesto que los elementos que involucra, como explorar, conjeturar, definir, argumentar, demostrar y sistematizar permiten dar una dinámica participativa a la práctica social de demostrar. Estas dos últimas acepciones (demostración matemática y actividad demostrativa) y la revisión de las diferentes aproximaciones desarrolladas anteriormente sobre la demostración, me permiten perfilar mi acercamiento a un significado de la demostración. Por tanto, atendiendo al panorama presentado en esta sección, para esta investigación concibo la demostración como una práctica social caracterizada por procesos de exploración, argumentación y sistematización de enunciados matemáticos, cuya validación depende de los sistemas teóricos de referencia determinados por contextos históricos, sociales y epistemológicos.

La demostración según el grado de abstracción.

Los significados de la demostración pueden estar influenciados por el grado de abstracción con que se asuma la demostración y el programa de formación a donde esté dirigida.

Varios son los autores que proponen una clasificación de la demostración de acuerdo con el rigor o el grado de abstracción (Balacheff, 1988; Gutiérrez, 2001; Harel & Sowder, 1998; Van Asch, 1993). Es así como menciono algunas de las clasificaciones de la demostración según diversos criterios y selecciono una determinada clasificación como parte del enfoque teórico para esta investigación.

Varias clasificaciones de la demostración se han dado de acuerdo con criterios relacionados con el rigor del razonamiento deductivo, grado de abstracción, etc. Entre ellas se pueden mencionar las siguientes:

- Nivel 0, nivel 1 y nivel 2 (Van Dormolen, 1977).
- Prueba, demostración pre-formal, y demostración formal (Blum & Kirsch, 1991).
- Demostración con dibujos o ejemplos, demostración pre-formal, y demostración formal (Van Asch, 1993).
- Esquemas de demostración de: convicción externa, empíricos y analíticos (Harel & Sowder, 1998).
- Explicación, prueba, y demostración (Balacheff, 2000).
- Demostraciones empíricas y demostración deductivas (Gutiérrez, 2001).

Algunas de estas clasificaciones de la demostración dan cuenta en términos generales de ‘demostraciones formales’ y ‘demostraciones no formales’. Según Gutiérrez (2001), si bien el término demostración se refiere a demostraciones matemáticas formales en publicaciones internacionales, él plantea que:

> Deberíamos hablar de ‘demostraciones formales’, ‘demostraciones no formales’ y ‘demostraciones’ (para aludir a ambos tipos a la vez), pues es necesario transmitir al

mundo de la enseñanza la idea de que no hablamos de dos cosas diferentes sino de dos aspectos de una misma cosa, la demostración en matemáticas, y ayudar de esta forma a desmitificarla y a que estudiantes y profesores le pierdan el miedo. (pág. 87)

Atendiendo a este planteamiento y con la intención de adoptar un término asequible para un contexto no exclusivamente matemático, como son los programas de ingeniería, se considerará en este estudio el término 'demostración matemática' o simplemente 'demostración' para referirse tanto a 'demostraciones formales' como a 'demostraciones no formales'.

El término 'no formal' y 'formal' asociado con la demostración matemática guarda una estrecha relación con la oposición entre el aspecto visual y el aspecto deductivo en las matemáticas, la cual hace parte de la historia de su desarrollo. Por ejemplo, la 'matemática moderna' se relaciona con uno de los extremos dados en la historia de las matemáticas que considera una actitud 'antivisual' y que aún en nuestros días se encuentra presente. Como lo señala Torres (2004):

> Esta actitud antivisual sigue vigente en nuestros días. Autores como Bourbaki privilegian los aspectos estructurales de la matemática en detrimento de la comprensión intuitiva. Uno de los problemas derivados de este punto de vista es la identificación de la matemática con una de sus facetas. Se le caracteriza, por ejemplo, como una ciencia deductiva en la que el estándar de rigor es la demostración lógica y se le identifica con el método axiomático. (pp. 21, 22)

Lo planteado por Torres (2004) puede asociarse con una visión de las matemáticas como ciencia deductiva en que la demostración cumple un papel de verificación y de estándar de rigor. No se trata de reemplazar una demostración visual por una formal o de aceptar una dicotomía sobre la naturaleza de las matemáticas al ubicarla como intuitiva o formal (Torres, 2004). Por el contrario, se trata de concebir las matemáticas como una ciencia donde coexisten los dos aspectos: la intuición y lo formal, lo visual y lo deductivo. Cada uno de esos aspectos es necesario para el desarrollo y la comunicación de las matemáticas. Ahora, un determinado significado de la demostración reflejaría dos opciones: considerar por separado lo visual y lo deductivo o aceptarlos como una dualidad donde llegan a complementarse. Esa última opción consideraría una aproximación de la demostración matemática que comprende tanto demostraciones visuales como demostraciones formales, lo cual es parte de la postura que en este estudio he adoptado para la demostración matemática en cursos de cálculo diferencial para ingeniería; sin embargo, según el contexto de enseñanza se privilegiaría una de las dos formas de demostración matemática (demostración formal o demostración no formal), o ambos.

Para la presente investigación se tomó la clasificación de la demostración dada en el estudio de Van Asch (1993). Un primer interés por esta categorización radicó en que este autor tuvo como marco para su clasificación presentaciones de demostraciones para estudiantes de cursos de primer año de ingeniería. Si bien Van Asch considera que la demostración rigurosa y formal se puede presentar en cursos de primer año afirma también que “muchas veces los estudiantes no son capaces o no están motivados para seguir tales argumentos” (pág. 308). Por tanto, Van Asch plantea los siguientes tres niveles en la presentación de una demostración:

- Demostración con dibujos o ejemplos.
- Demostración pre-formal.
- Demostración formal.

Las diferencias entre los anteriores niveles se fundamentan principalmente en su grado de abstracción para justificar un teorema. El término *demostración pre-formal* se define como "una línea de razonamiento que puede ser formalizada a una demostración formal, pero en la que la idea esencial ya está presente" (Van Asch, 1993, pág. 310).

Entre las características de las demostraciones pre-formales se encuentran las siguientes: se ajustan mejor a la capacidad intelectual de los estudiantes; los argumentos involucrados son válidos; no son una verificación experimental de una proposición; no se basan exclusivamente en argumentos visuales; a menudo implican acciones concretas y no son una inducción incompleta después de la verificación de algunos casos especiales (Van Asch, 1993). Este autor afirma que en muchos casos los matemáticos deberían presentar una demostración que contribuya a la enseñanza y, por lo tanto, deberían estar dispuestos a demostrar teoremas de una manera menos abstracta.

La utilidad de la clasificación de la demostración dada por Van Asch (1993) fue relevante para esta investigación en varios sentidos. Primero porque el 'grado de abstracción' de la demostración de un teorema permite utilizar recursos como gráficas, ejemplos o situaciones particulares que pueden potenciar la discusión entre los profesores acerca de la demostración de teoremas del cálculo diferencial. Segundo el grado de abstracción es un aspecto que se puede vincular a la negociación de significados de la demostración. Luego, los niveles presentados por Van Asch sirvieron de discusión para la consideración de demostraciones en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. El significado de la demostración con dibujos o ejemplos y demostración pre-formal fue de utilidad para orientar la elaboración de actividades durante el trabajo de campo de esta investigación.

Roles de la demostración.

Otro de los aspectos de la demostración que fue considerado durante el programa de formación continua para profesores fue el rol que toma la demostración. Durante las últimas cuatro décadas, los investigadores han discutido los diversos roles de la demostración en las matemáticas y en la Educación Matemática y han llegado a algunos consensos en la enseñanza de las matemáticas, entre los que se destacan, por ejemplo, los roles de convicción y explicación (Bell, 1976; De Villiers, 1993, 2012; Hanna, 2000; Hemmi, 2006; Hemmi & Löfwall, 2009).

Varios son los roles o sentidos que se han dado para la demostración por algunos investigadores que las han considerado relevantes para la Educación Matemática. A continuación, se relacionan los roles de la demostración identificados para este estudio, de acuerdo con la revisión de literatura. Inicialmente, para Bell (1976) "El significado matemático de la demostración lleva tres sentidos" (pág. 24), los cuales plantea de la siguiente manera:

- *Verificación o justificación*: Concerniente a la verdad de una proposición.
- *Explicación:* Relacionada con explicar el por qué es verdad una proposición.
- *Sistematización*: Se refiere a la organización de resultados dentro de un sistema deductivo de axiomas, conceptos y teoremas fundamentales, y resultados menores derivados de la tesis.

De Villiers (1993) incluye los roles de:

- *Descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados).*
- *Comunicación (la transmisión de conocimiento matemático)*

Luego, Hanna y Jahnke (1996) considera otros tres roles:

- *Construcción de teoría empírica.*

- *Exploración del significado de una definición o de las consecuencias de una suposición.*
- *Incorporación de un hecho bien conocido en un nuevo marco y por lo tanto viéndolo desde una perspectiva fresca.*

Posteriormente, como resultado de un estudio realizado por Hemmi (2006), en el cual algunos matemáticos trataron el significado del aprendizaje de la demostración, se plantea la *transferencia* como un rol de la demostración. Esta autora concibe la trasferencia a partir de dos aspectos: “En primer lugar, trabajar con demostraciones puede ser útil en otros contextos diferentes a las matemáticas. En segundo lugar, algunas demostraciones pueden proporcionar métodos o técnicas útiles en otros contextos matemáticos” (pág. 223).

Por otra parte, el rol casi exclusivo de la demostración ha sido el de verificación (justificación o convicción) de la validez de una proposición matemática (De Villiers, 1993, 2012). La verificación representa un rol predominante en las concepciones sobre la demostración de parte de profesores, quienes la asumen como un medio para convencer a los estudiantes de la validez de una proposición (Bell, 1976; Knuth, 2002). De acuerdo con French y Stripp (2005, citado en De Villiers, 2012), esta perspectiva sobre el rol de la demostración como verificación “sigue dominando la mayoría de los diseños curriculares en los libros de texto, las clases, y materiales sobre la enseñanza de la demostración” (pág.1).

Sin embargo, no siempre la demostración es planteada como necesaria para lograr la convicción de una proposición. Según Bell (1976), la convicción es “alcanzada por muchos otros medios diferentes de los que resultan de una demostración lógica” (pág. 24). Polya (1954) no considera la convicción en una proposición como un resultado de la demostración, sino como una condición que lleva a la construcción de una demostración:

> [...] después de haber verificado el teorema en varios casos particulares, reunimos una fuerte evidencia inductiva. La fase inductiva superó nuestra sospecha inicial y nos dio una fuerte confianza en el teorema. Sin tal confianza, difícilmente podríamos encontrar el coraje para llevar a cabo la demostración, que no es en absoluto un trabajo de rutina. Cuando usted ha satisfecho a sí mismo que el teorema es verdadero, usted comienza a demostrarlo (Polya, 1954, pág. 83-84).

Otros roles de la demostración, como el de explicación, sugieren que la demostración se debe presentar como una actividad significativa para los alumnos (Bell, 1976; De Villiers, 1993). Según Hanna (2000) la mejor demostración es una que también ayude a comprender el significado del teorema demostrado; es decir, a ver no sólo qué es cierto, sino también por qué es así, lo cual podría conducir a otros beneficios como buscar una mejor definición o producir un algoritmo útil. Significados de la demostración asociados con roles como los de verificación y sistematización se refieren principalmente a la demostración como un 'producto' acabado de las matemáticas, mientras que para otros roles se refieren a la demostración como un 'proceso' (Furinghetti & Morselli, 2011).

Estos roles de la demostración son considerados en esta investigación como un aspecto que constituye el significado de la demostración como concepto matemático. Es decir, el rol o función que se le asigne a la demostración contribuirá con la configuración de su significado. Estos referentes teóricos sobre los roles de la demostración fueron útiles tanto para considerar la necesidad de otros tipos de roles como para la interpretación y análisis de algunos significados de la demostración que emergieron durante las interacciones del colectivo de profesores de cálculo diferencial que participaron en la presente investigación.

Formación del Profesor Universitario

Desde finales del siglo pasado la UNESCO (1998) preveía y anunciaba que el nuevo milenio demandaría una educación superior sin precedentes, acompañada de una gran diversificación de la misma y una mayor toma de conciencia de la importancia fundamental que este tipo de educación reviste para el desarrollo sociocultural y económico de las naciones. En su Conferencia Mundial sobre la Educación Superior la UNESCO (2009) reiteró este anuncio y llamó la atención sobre la necesidad de implementar enfoques que le permitieran a "la Educación Superior ampliar la formación de los profesores con planes y programas de estudios que den a los profesores la capacidad de dotar a sus alumnos de los conocimientos y las competencias que necesitan en el siglo XXI" (pág. 3). El término 'enfoques' (en plural), comporta el reconocimiento de que, ante la complejidad de los desafíos mundiales, los de hoy y los venideros, la Educación Superior tiene la tarea y la obligación social de hacer avanzar la comprensión de problemas polifacéticos con dimensiones sociales, económicas, científicas y culturales. No existe un único enfoque y cada modelo teórico de formación docente articula concepciones sobre educación, enseñanza, aprendizaje y formación docente, así como las recíprocas interacciones que las afectan o determinan (Arredondo, Uribe, & Wuest, 1979)

A pesar del carácter múltiple de los enfoques, modelos o tradiciones de la formación del profesor universitario, todos éstos, en opinión de Castillo y Cabrerizo (1996, citados en Castillo Ochoa & Montes Castillo, 2012), comparten algunas características:

- No se cumplen o se aplican de una manera exacta o integral.
- No pueden plantearse como mutuamente excluyentes.

- Sus límites suelen ser difusos, ya que aunque teóricamente sus características estén bien definidas no puede afirmarse lo mismo en su implementación (2012, pág. 49).

Es conveniente señalar que enfoques, modelos, tradiciones o paradigmas son términos con usos más o menos intercambiables en la literatura especializada sobre los modos como son formados los profesores y las maneras como éstos realizan su labor. Sin embargo, en opinión de Lozano (2006) (aunque su planteamiento no se refiere exclusivamente a la formación del profesor universitario la considero relevante dado el desarrollo de la discusión), cada uno de estos términos responde a perspectivas diferentes, por lo que será posible hallar autores que se refieren a modelos que asocian características generales de alguna perspectiva; otros se referirán a tradiciones que representan formas consensuadas de teoría y práctica y algunos más los llamarán paradigmas, en cuanto representan rupturas discretas dentro de una corriente de pensamiento. En este sentido, Diker y Terigi (1997) plantean que "resulta útil pensarlos como tradiciones, es decir como configuraciones de pensamiento y de acción que, construidas históricamente, se mantienen a lo largo del tiempo, en cuanto están institucionalizadas, incorporadas a las prácticas y a la conciencia de los sujetos" (pág. 110).

Sin desconocer las implicaciones que se derivan de la elección de un término sobre otros, en este escrito he optado por el uso preferente del término 'enfoque', por razones más cercanas a la economía semántica. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones respeto el término escogido por el autor. Así, cuando se utiliza la expresión *enfoques de formación del profesor universitario* es para hacer referencia a los modelos, tradiciones o paradigmas que orientan los distintos "soportes teóricos e instrumentales, que son susceptibles de ser aprendidos por los profesores de manera [previa o][5] simultánea con el desarrollo de su actividad educativa" (Parra, Ecima, Gómez, & Almenárez, 2010, pág. 423).

A continuación, presento inicialmente algunas aproximaciones al concepto y enfoques de la formación del profesor universitario. Por último, señalo algunas apreciaciones sobre la formación del profesor universitario en Colombia, sentando las bases teóricas utilizadas como enfoque para la implementación del programa de formación continua en el trabajo de campo de esta investigación.

Conceptos de formación del profesor universitario.

Zabalza (2004) al hacer una aproximación a la formación del profesor universitario, entendiéndola como un proceso de doble cualificación científica y pedagógica, expresa que ésta "es uno de los factores básicos de la calidad universitaria" (pág. 145). Este autor la concibe como "un proceso que no se circunscribe a los años universitarios, sino que dura toda la vida" (2004, pág. 29). En este punto coincide con Ferry (1991), quien ya desde los inicios de la última década del siglo XX, con respecto a la formación del profesor sostenía que "formarse no puede ser más que un trabajo sobre sí mismo, libremente imaginado, deseado, perseguido, realizado a través de medios que se ofrecen o que uno mismo se procura" (pág. 43). Sobre la idea de si la formación docente comprende un acto individual y personal, o, por el contrario, un acto social y colectivo se discutirá más adelante en esta misma sección.

[5] La expresión entre corchetes no aparece en el original y la introduzco para incluir, junto al concepto de *formación continua* que presentan los autores, la de formación inicial a la práctica profesional docente.

Chehaybar (2006) concibe la formación docente como una actividad polivalente, compleja, dinámica y socialmente construida que se encuentra vinculada a las concepciones educativas que son contextualizadas por la situación histórica, política, económica, cultural y social de los países. Pero, a pesar de la complejidad y la polisemia inherente al concepto de formación del docente, se hace pertinente resaltar que la formación en primer lugar debe estar vinculada al crecimiento y a la mejora de los individuos (Zabalza, 2004). De tal manera que la formación del profesor no debe limitarse a una mera adquisición de conocimientos o al desarrollo de ciertas habilidades, en función de un perfil profesional *standard,* para el ejercicio de un trabajo en particular. La formación del profesor debe integrar "nuevas posibilidades para el desarrollo personal, nuevos conocimientos, nuevas competencias, actitudes y valores, y enriquecimiento resultante de la experiencia" (Zabalza, 2004, pág. 42).

Formación inicial y formación continua.

Si bien el presente estudio está relacionado con la formación continua de profesores universitarios, considero pertinente referirme también a la formación inicial con el propósito de identificar algunas diferencias. Existe una diferenciación evidente en las dos formas básicas que puede tomar la formación del profesor universitario: la formación inicial y la formación continua. A continuación, se ofrece una formalización de ambas nociones. De acuerdo con Estrela (2002) la 'formación inicial' o previa es "el inicio, institucionalmente encuadrado y formal, de un proceso de preparación y desarrollo de la persona, con el fin de desempeño y realización profesional en una escuela al servicio de una sociedad históricamente situada" (pág. 18). En palabras de Gimeno (2005), la formación inicial es el primer paso en el proceso de aprendizaje y profesionalización docente, es la antesala de la etapa más larga de la formación de un profesor: la formación continua. Por 'formación continua' se entiende, desde una mirada de lo institucional, como "el conjunto de actividades institucionalmente encuadradas que, después de la formación inicial, visan el perfeccionamiento profesional y personal del profesor" (Estrela & Estrela, 2006). Perfeccionamiento que implica el reconocimiento de que los conocimientos profesionales son evolutivos y progresivos. De tal manera que exigen de parte de los profesores una formación permanente que les signifique autoformarse y reciclarse a través de diferentes medios después de sus estudios universitarios iniciales (Tardif, 2008). Es así como la formación continua se presenta como una necesidad de la labor del profesor, porque "ninguna competencia permanece adquirida por simple inercia" (Perrenoud, 2000, pág. 155)

En esta perspectiva, la formación inicial y la continua del profesor se presentan como dos fases dentro de un único proceso continuo de desarrollo personal y profesional. Sobre los soportes teóricos e instrumentales apropiados por el profesor en la primera fase de su trayecto formativo añade una reconstrucción y una deconstrucción cotidiana de su saber y de su actuar dentro del marco de su labor como profesor.

Enfoques de la formación del profesor universitario.

Como se señaló al inicio de esta sección, hace ya más de un lustro que la UNESCO (2009) abogó por nuevos enfoques que le permitieran a la educación superior ampliar la formación del profesor universitario. De tal manera que ésta le diera al profesor la posibilidad de orientar a sus alumnos en la construcción de conocimientos y competencias propias del nuevo siglo. Poco antes de esto, ya era posible leer que el enfoque ideal para la formación del profesor tendría necesariamente que pasar por "establecer un sistema global y sin discontinuidades que integrase la formación inicial del profesorado, la inducción y el perfeccionamiento profesional continuo a lo largo de la carrera, incluyendo las oportunidades para el aprendizaje formal, informal y no formal" (Comisión Europea, 2007, pág. 13).

No existe un acuerdo conceptual o clasificatorio de los enfoques de formación, toda vez que cada uno de ellos atiende a racionalidades y sensibilidades que le son propias y que lo diferencian. En una revisión (que no pretende ser exhaustiva) de las diversas clasificaciones de los enfoques de formación del profesor, se encuentra, por ejemplo, que Chehaybar y Ríos (1996), al vincular la formación con las concepciones y políticas educativas señalan que esencialmente existe un enfoque de *formación tradicional*, uno de *formación tecnológica* y otro de *formación crítica*. Cada uno de ellos concuerda con una de las tres grandes vertientes de los proyectos de universidad que Hirsch (1998) ha caracterizado como: a) Proyecto tradicional y conservador, que pretende conservar la estructura y la organización universitaria que se generó y tuvo vigencia en el pasado, b) Proyecto modernizador, que tiene su génesis en las apreciaciones de las ideas del Estado y de algunos sectores universitarios y c) Proyecto democrático, que busca redefinir y reorientar los propósitos y las políticas de la Educación Superior.

Imbernón (1998), en una clasificación congruente con la de Hirsch (1998), sugiere que los enfoques (si bien el autor los llama 'orientaciones') que han guiado la formación del profesor son: el *perennialista*, que se asocia al que se ha denominado como tradicional; el *racional-técnico*, que basándose en el conocimiento científico e instrumental, se vincula con el enfoque de formación tecnológica reseñada en el párrafo anterior; y, por último, el enfoque basado en la *investigación de la práctica*, consistente con la llamada formación crítica señalada anteriormente.

Otras tipologías que, a grandes rasgos, mantienen esta estructura básica de clasificación son, por ejemplo, la de Liston y Zeichner (1993). Estos autores consideran que las distintas tradiciones de la formación del profesor han dado como resultado al profesor como: *un académico-conservador*, que concibe al papel del profesor como el de transmisor y reproductor de conocimientos, valores y actitudes; o como un *desarrollista-progresista*, que considera al profesor desde una perspectiva racional-instrumental, donde se espera que conozca los presuntamente existentes principios científicos de la enseñanza con el objeto de controlar los procesos de aprendizaje de sus alumnos; o bien, como un *reconstruccionista social o radical*, que reviste una concepción del profesor como un agente investigador de su propia práctica educativa (Lozano, 2006).

Si bien diversos autores coinciden en fenómenos que tienen en cuenta a la hora de construir sus tipologías de enfoques de formación, también es cierto que algunos otros autores toman en consideración aspectos originales que hacen que su clasificación tenga elementos novedosos que enriquecen el debate sobre el trayecto formativo del profesor universitario. De esta forma se puede encontrar cómo Contreras (1997) al reflexionar sobre la formación del profesor, encuentra que los modelos de formación han sido tributarios de los modelos de práctica docente y que, al igual que éstos, han seguido tres tradiciones principalmente. Contreras apoya su reflexión sobre el acto de entender la docencia como una actividad que debe ser guiada por el conocimiento científico existente sobre la educación. Es así como caracteriza al proceso formativo como aquel que puede generar —dependiendo de cuál sea la racionalidad vinculada a la práctica docente que se esté considerando— un profesor que entienda su rol como el de un *racional-técnico* más parecido a un experto infalible; o bien, como aquel que se fundamenta en la idea de que el profesor debe investigar su práctica para comprenderla y mejorarla, dando origen así al profesional *reflexivo*; o bien, como aquel que se fundamenta en concepciones emancipadoras de la labor docente y pretende comprometerse en su labor con la liberación de los hombres, es decir, el profesor como *intelectual crítico*.

En esta proliferación de distintas clasificaciones conviene dar cuenta también de los intentos integrativos que se han realizado por una clasificación de modelos más amplios. En este sentido, es dable registrar que en la literatura especializada sobresalen diversos modelos, enfoques, concepciones o tradiciones en la formación docente, que en todo caso, englobad "configuraciones de pensamiento y de acción que, construidas históricamente, se mantienen a lo largo del tiempo, en cuanto están institucionalizadas, incorporadas a las prácticas y a la conciencia de los sujetos (Davini, 1995, pág. 20)". Aun, reconociendo que estas configuraciones sobreviven más allá del momento histórico en el que se formaron, resalta no obstante su persistencia actual "en la organización, en el currículum, en las prácticas y en los modos de percibir de los sujetos, orientando toda una gama de acciones" (pág. 20). En un esfuerzo clasificatorio, en el trabajo de Diker y Terigi (1997) se encuentra una descripción de los modelos más relevantes, según la opinión de las autoras. Estos son (págs. 110-111):

- El *modelo practico-artesanal*, que concibe a la enseñanza como una actividad artesanal, un oficio que se aprende en el taller. El conocimiento profesional se transmite de generación en generación y es el producto de un largo proceso de adaptación a la escuela y a su función de socialización […].

- El *modelo academicista,* que especifica que lo esencial de un profesor es su sólido conocimiento de la disciplina que enseña. La formación así llamada pedagógica pasa a un segundo plano y suele considerarse superficial y hasta innecesaria [...].
- El *modelo tecnicista-eficientista,* que apunta a tecnificar la enseñanza sobre la base de esta racionalidad, con economía de esfuerzos y eficiencia en el proceso y los productos [...].
- El *modelo hermenéutico-reflexivo,* que supone a la enseñanza como una actividad compleja, en un ecosistema inestable, sobredeterminada por el contexto, espacio-temporal y sociopolítico, y cargada de conflictos de valor que requieren opciones éticas y políticas [...].

Según este último modelo *hermenéutico-reflexivo*, el profesor parte de situaciones concretas, las cuales reflexiona y comprende, ayudándose en todo momento de herramientas conceptuales, para luego volver sobre la práctica y modificar la situación de inicio. Sobre este modelo De Lella (2003) afirma que:

> En esta perspectiva se estima que el profesor debe enfrentar, con sabiduría y creatividad, situaciones prácticas imprevisibles que exigen a menudo resoluciones inmediatas para las que no sirven reglas técnicas ni recetas de la cultura escolar. Se construye personal y colectivamente (pág. 23).

Este modelo hermenéutico-reflexivo se aparta de la labor y de la formación de aquellos profesores que notoriamente se guían por racionalidades técnicas o por racionalidades prácticas. Ambas racionalidades tienen en común el considerar al profesor como un sujeto aislado, individualista y que no forma parte de una comunidad. Tal perspectiva sólo puede dar pie a una formación desarticulada de lo que realmente sucede en la cotidianidad de la labor docente. El modelo hermenéutico-reflexivo cuestiona la racionalidad técnica su pretensión de normalizar el rol y la función del profesor, ignorando las miles de situaciones que ocurren en la cotidianidad de las aulas; y a la racionalidad práctica, por olvidar que la labor docente es sencillamente imposible sin el concurso de un colectivo humano que trabaja mancomunadamente en pro de unos objetivos y de unas metas (Llinares & Krainer, 2006).

Por su parte, este modelo apela a una racionalidad crítica de la que se hará mención más adelante en esta misma sección. Esta racionalidad crítica, al reconocer el papel de la comunidad y de los otros, puede asociarse en ese mismo sentido al concepto de *comunidad de práctica*. Esta investigación se reconoce cercana a este modelo hermenéutico-reflexivo y, por ende, a una racionalidad crítica.

La formación del profesor universitario en Colombia.

Parra, Ecima, Gómez y Almenárez (2010) en un estudio sobre la formación de los profesores universitarios en Colombia, anotan que "una caracterización global del profesor universitario colombiano, tanto de la universidad oficial como privada, nos muestra que no posee formación pedagógica o didáctica previa a su vinculación con la docencia universitaria" (pág. 423). Por su parte, en consonancia con esto, Patiño, Castaño y Fajardo (2002), ya habían observado que los profesores universitarios son profesionales de diferentes áreas que establecen un compromiso educativo con las instituciones universitarias sin recibir preparación docente previa.

Lo expuesto en el párrafo precedente, si bien es cierto, amerita una acotación: la veracidad de la afirmación se encuentra limitada por el área de estudio a la que se esté haciendo referencia; también es cierto que es evidente y natural pensar que un estudio que versa sobre la formación de profesores universitarios en el área de las licenciaturas, efectivamente debe haber recibido una formación inicial, por lo que su primer contacto con la docencia no debe haber sido su vinculación laboral con la institución de Educación Superior que lo hubiese contratado.

Sin embargo, lo cierto es que la mayoría de los programas ofrecidos por las instituciones y universidades no son programas de licenciatura y que existe variedad de profesionales, como los ingenieros, en la profesión docente. Por lo tanto, la afirmación de Parra, Ecima, Gómez y Almenárez (2010) adquiere una realidad preocupante. Además, el hecho de ser licenciado no lo exime de asumir una formación continua que le permita valorar su experiencia y conocimientos para mejorar la enseñanza. Ante este estado de situaciones, surge como pregunta natural ¿qué puede hacerse?

Para intentar contribuir con una solución a esta controversia es preciso desdoblar el problema en dos aspectos. El primero representado por las condiciones sociales, culturales e históricas que son responsables que en la docencia universitaria existan profesionales no formados como profesores, pero cuyo saber práctico e instrumental, presumiblemente los habilita para formar a los nuevos profesionales. El segundo asunto está representado por la tendencia de enfoques de formación concebidos como un proceso solitario, aislado, del fuero interno del profesor en formación, que en el decir de Bozu e Imbernón (2009), ha sido característica de los enfoques de formación durante el siglo XX.

A estos dos asuntos corresponderían dos dicotomías. Una de ellas es la existente entre teoría y práctica, presente en los debates sobre una docencia desarrollada a partir de una formación previa a la labor docente *versus* una docencia basada en el saber instrumental, que en virtud de sí mismo, habilita para la docencia universitaria. La otra es la dicotomía dada entre la formación individualista, aislada, balcanizada, frente a una formación inmersa en la interacción social.

Considero que lo que exige el nuevo milenio, en referencia a la formación de los nuevos profesores universitarios, es la superación de las mencionadas dicotomías y el remplazo por sus correspondientes dualidades que reconozcan que teoría y práctica no son nociones excluyentes, sino complementarias y que individualización e interacción social son sólo dos momentos de significado dentro de un mismo proceso formador. En la propuesta de Wenger (2001) sobre *comunidades de práctica* se encuentra que éstas tienen como finalidad hacer explícita la construcción del conocimiento, ofreciendo una estructura que permite adquirir conocimiento a través de las experiencias compartidas dentro de un grupo. Debe agregarse que la comunidad de práctica puede no ser una comunidad científica como tal, ya que su planteamiento no es la ciencia sino la experiencia de la práctica y la gestión compartida del conocimiento. Esta gestión del conocimiento se realiza siempre de una forma colaborativa y en un proceso continuo de establecimiento de estrategias de participación, liderazgo, identidad y aprovechamiento del conocimiento (Bozu & Imbernón, 2009).

Esta caracterización de la comunidad de práctica resalta la formación del profesor en medio de su labor cotidiana y siempre en interacción con otros, lo que la hace tributaria de una racionalidad crítica. Así pues, las ‘comunidades de práctica’ ofrecen la oportunidad de superar las dicotomías mencionadas anteriormente por dualidades mutuamente complementarias. Tradicionalmente la formación del profesor universitario se ha visto envuelta en prácticas institucionales deterministas y uniformes, es decir, en una racionalidad técnica que promueve un modelo de formación de aplicación normativa y de entrenamiento mediante cursos y seminarios estándar. En la actualidad, el constructo de 'comunidades de práctica' nacido en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) permite que se cuestionen una serie de aspectos o elementos de las formas tradicionales de hacer docencia. El enfoque de formación del profesor desde una perspectiva de 'comunidad de práctica' permite que se discuta la práctica actual del profesor, dado que las personas que participan encuentran modos creativos que les permiten desarrollar nuevas aproximaciones de solución a los problemas de su práctica diaria. De tal manera que los profesores puedan participar de manera crítica en nuevas experiencias sobre la práctica docente en pro de una transformación de su quehacer.

Formación de Ingenieros

En esta sección presento un estudio conceptual a la 'formación de ingenieros' partiendo de los aportes de las organizaciones encargadas de la formación de ingenieros en Iberoamérica y planteando la diferencia entre un ingeniero profesional y uno científico. Posteriormente, centro la atención en la formación matemática de futuros ingenieros, para lo cual hago referencia a modelos de formación y su evolución a través de contextos históricos y sociales. Luego, me refiero a los contenidos, utilidad y competencias matemáticas en la formación de ingenieros. Más adelante, considero la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mencionando algunos aspectos relacionados con el cálculo. Finalmente, hago referencia al 'aprendizaje situado' en la formación de ingenieros.

El ingeniero.

De acuerdo con la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería ASIBEI (2014) entre las tendencias iberoamericanas en la formación de los ingenieros se destacan los siguientes aspectos:

> La formación virtual y los nuevos ambientes de aprendizaje, la incorporación de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) en el aula de clase, la ética asociada a las decisiones de ingeniería, el crecimiento acelerado de los cursos y denominaciones de ingeniería, el aseguramiento de la calidad de los programas académicos y el aporte social de la ingeniería, entre otras. (ASIBEI, 2014, pág. 4)

Para ASIBEI (2014) el perfil profesional del ingeniero ha cambiado en algunos países latinoamericanos superando una formación centrada en la experticia en realización de cálculos o solucionadores de problemas a una formación que atiende una premisa elemental: el ingeniero es un ser social de acción global. De esta manera el objetivo fundamental de un ingeniero es entregar soluciones a problemas sociales. Algunos aspectos del ingeniero para el siglo XXI, resaltados por Rizo (2007) que coinciden con lo planteado anteriormente son el conocimiento de las realidades nacionales y mundiales y el compromiso con su entorno social a través de principios éticos.

El conocimiento de las ciencias básicas es también un fundamento importante para la formación de ingenieros. Para Melo (2003) una definición de ingeniero aceptada en Colombia por el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI) y la Sociedad Colombiana de Ingenieros (S.C.I.) es la siguiente:

> La profesión en la que los conocimientos de matemáticas y ciencias naturales, obtenidos a través del estudio, la experimentación y la práctica, se aplican con juicio, para desarrollar diversas formas de utilizar, de una manera económica, las fuerzas y materiales de la naturaleza en beneficio de la humanidad. (pág. 54)

En esta definición se resaltan los conocimientos en matemáticas y ciencias naturales en la formación del ingeniero para su aplicación en beneficio de la humanidad. Considero que tanto las aseveraciones de la ASIBEI (2014) y Rizo (2007) como la definición mencionada por Melo (2003) —aceptada por algunas organizaciones— soportan mi reconocimiento del ingeniero como un profesional que aplica los conocimientos en ciencias básicas para la solución de problemas, pero cuya motivación es responder al compromiso social, bajo condiciones locales y globales del mundo y en función del bienestar de la humanidad.

En condiciones globales, marcadas por el desarrollo y progreso científico, la atención en la formación de ingenieros en ocasiones se debate entre una formación para un ingeniero profesional o uno científico. Sobrevilla (2000) plantea que es conveniente reconocer la diferencia entre un ingeniero científico y un ingeniero profesional, de tal manera que se distinga la formación de unos y otros. Este autor presenta la siguiente situación para ejemplificar la diferencia entre ellos:

> Es muy distinto proponerse a investigar la acción de los campos eléctricos y magnéticos de una línea de transmisión de energía a extra alta tensión para publicar luego un paper, que dirigir la construcción de una línea de alta tensión a campo traviesa, abriendo una picada en la selva. Es completamente diferente estudiar en un laboratorio para desarrollar un nuevo producto industrial, que conducir la producción seriada del mismo, atender plazos de entrega, conseguir los créditos bancarios, firmar los remitos, hacer el control de calidad. (Sobrevilla, 2000, pág. 91)

Con esto el autor resalta que las tareas de un ingeniero profesional y uno científico son diferentes. Sobrevilla (2000) reconoce que no es sencillo elaborar una lista de tareas para un ingeniero, debido a lo cambiante del mundo, pero asocia al ingeniero profesional tareas como "operar y controlar, mantener y conservar, planificar y organizar, prevenir y predecir, dimensionar y proyectar, construir y fabricar, instalar y montar, gestionar y administrar, concretar y evaluar, asesorar y peritar, comercializar y contratar" (pág. 93). Por otro lado, relaciona a un ingeniero científico con tareas de desarrollo de investigaciones; es decir, con colaborar con los científicos en la investigación pura o aplicada, encontrar nuevos materiales, procedimientos y métodos de obra o producción, entre otras.

De lo planteado por Sobrevilla (2000) se encuentra alguna coincidencia con lo señalado por Reséndiz (2008), quien al plantear una diferencia entre ciencia e ingeniería complementa la distinción que hizo Sobrevilla sobre ingenieros profesionales y científicos. Reséndiz (2008) señala lo siguiente:

> En efecto, la ciencia se ocupa de descubrir cómo y por qué funcionan las cosas; lo hace mediante experimentos y observaciones repetibles y con pleno control de las variables que intervienen. En cambio, lo que compete a la ingeniería no es descubrir y describir el funcionamiento del mundo, sino cambiarlo mediante diseños que operen eficazmente para los fines deseados, y a veces puede lograrse que las cosas funcionen, aunque la ciencia no pueda explicar por qué. (pág. 164)

Intentar caracterizar el alcance del accionar de un ingeniero en sus dimensiones profesional y científica permite resaltar que la función principal de un egresado de las carreras de ingeniería no se centra en la explicación científica de los fenómenos, sino en la utilización del conocimiento para fines prácticos. Esta afirmación no deja de lado la profundización y fundamentación en las ciencias básicas en la formación de un ingeniero; por el contrario, resalta su importancia en su aspecto instrumental y formativo. Para lo relacionado con la ciencia y la ingeniería están las llamadas 'ciencias de la ingeniería', que, según Reséndiz (2008), son disciplinas ejercidas por especialistas, algunos de ellos ingenieros, que "no están interesados en la práctica de la profesión, sino en hacer avanzar el conocimiento que es relevante para la ingeniería" (pág. 166). A continuación, presento un recorrido por algunos modelos de formación matemática de futuros ingenieros, que incluye los desarrollados en la Escuela Politécnica de

Francia y algunos elementos que caracterizan la formación matemática durante el siglo XX hasta la fecha.

Formación matemática de futuros ingenieros.

Las matemáticas han tenido un lugar de relevancia en la formación de futuros ingenieros desde los inicios de las primeras escuelas de ingeniería. El lugar que ha ocupado las matemáticas en la formación de ingenieros y sus roles en la enseñanza han sido modificados por contextos sociales e históricos. A continuación, presento una mirada sobre los primeros modelos de formación matemática de ingenieros y algunos aspectos de su evolución.

Una mirada de los primeros modelos de formación matemática de futuros ingenieros.

Entre los primeros modelos de formación matemática de futuros ingenieros se pueden identificar los que se desarrollaron en una de las primeras escuelas de formación de ingenieros, la Escuela Politécnica. La elección de esta escuela se fundamenta no sólo por su antigüedad al haber sido fundada en 1794 en Francia, sino por las particularidades de su contexto asociado con la revolución industrial, el movimiento enciclopedista del siglo de las luces y el avance de las matemáticas y de las ciencias en general. De acuerdo con el análisis realizado por Romo-Vázquez (2009), acerca de la formación matemática para el caso de la Escuela Politécnica, se distinguen tres modelos de formación: el de ‘Monge’, el de ‘Laplace’ y el de ‘Le Verrier’. A continuación, describo los tres modelos siguiendo el estudio realizado por Romo-Vázquez (2009).

El primer modelo de formación fue propuesto por el geómetra Gaspar Monge en 1794. Este modelo se conoce como 'enciclopédico' porque se aproxima al ideal enciclopedista de articular las ciencias y las artes. En esos momentos las ciencias correspondían a la teoría pura y las artes a las aplicaciones, siendo éstas últimas privilegiadas en el modelo. La profesión del ingeniero es considerada como la aplicación de métodos generales. Por tanto, la geometría y los conocimientos matemáticos en general se legitiman por la generalidad de los métodos ofrecidos y su aplicabilidad en variados contextos.

El modelo enciclopédico duró alrededor de un año y fue reemplazado por el modelo 'analítico' propuesto por Laplace en 1795. El surgimiento del segundo modelo estuvo apoyado por algunos factores, como la creación de 'escuelas de aplicación' que solicitaron a la Escuela Politécnica cancelar sus cursos de aplicación, lo cual causó desequilibrio y cuestionamiento al papel que se les daba a las matemáticas en la Escuela.

Otro de los factores que motivó la creación del modelo 'analítico' fue el desarrollo del análisis matemático, el cual por su generalidad superior se impuso en relación con la geometría descriptiva. En ese sentido, la mayor ruptura con el modelo 'enciclopédico' la causó Laplace al establecer un curso 'completo' de análisis diferente del curso de mecánica y aludir que la formación matemática de las escuelas de práctica era débil. Según Romo-Vázquez (2009) "Laplace creía que un conocimiento profundo del análisis proporcionaba a los estudiantes una 'base' sólida que les permitiría dominar la geometría, la mecánica y las lecciones de aplicación en una fecha posterior" (pág. 8). El análisis asume un papel fundamental en la enseñanza de la Escuela Politécnica y los métodos analíticos hacen parte de las enseñanzas de la mecánica, la física, la teoría de las máquinas, la geodesia y las probabilidades.

Posteriormente, el modelo 'analítico' comienza a desequilibrase por un nuevo curso de análisis propuesto por Cauchy que impone un rigor matemático propio de la disciplina matemática. El tipo de análisis propuesto por Cauchy favorece enormemente el desarrollo de la ciencia en Francia, pero para la formación de ingenieros es muy abstracta y se presenta como una herramienta teórica de poca utilidad en las aplicaciones prácticas. Esto genera denuncias de las escuelas de práctica que señalan su inconformidad con esa situación. A esto se le suma un contexto histórico de la revolución industrial, donde en 1829 se crea la Escuela Central de Artes y Manufacturas como respuesta a la necesidad de contar con profesionales que respondan a las exigencias de las industrias. En esta nueva escuela se establece un nuevo modelo de formación, donde el análisis no se enseña y la geometría descriptiva, la mecánica y la física son enseñadas siguiendo una perspectiva basada en las aplicaciones. Aparece la enseñanza de "la ciencia industrial" como mediadora de las tensiones entre la abstracción pura y las aplicaciones sin referencia teórica. La Escuela Politécnica generó una reforma con un modelo similar al de la Escuela Central de Artes y Manufacturas. Aunque, fueron las reacciones de los ingenieros civiles en contra de la formación que se brindaba en la Escuela Politécnica y el apoyo del gobierno las que motivaron una reforma en la Escuela. Es así como aparece el tercer modelo de formación en la Escuela Politécnica liderada por Le Verrier en 1850. Este modelo de formación se caracteriza por desplazar la importancia de la teoría y privilegiar contenidos asociados con la utilidad de las aplicaciones. Según Romo-Vázquez (2009):

> Una de las consecuencias inmediatas de esta reforma es que la Escuela de 1850 ya no es una escuela de alta ciencias, pero no se constituye en una escuela de formación de

ingenieros para la industria, ella continúa formando a la gente que llegará a las grandes corporaciones del estado. (pág. 10)

La descripción de los modelos de formación de futuros ingenieros de la Escuela Politécnica muestra las tensiones entre teoría y práctica en el desarrollo de una formación matemática. Estos modelos se ubican en una concepción de formación asociada con teoría-aplicación. El rol de las matemáticas en los tres modelos es diferente. En el modelo de Monge (‘enciclopédico’) las matemáticas son centrales, se privilegia la geometría y es legitimada por su papel en las aplicaciones. En el modelo de Laplace (‘analítico’) las matemáticas siguen siendo importantes con predominio del análisis y es concebida como un corpus autónomo que suministra los conocimientos generales para posteriormente utilizarlos en aplicaciones. En el modelo de ‘Le Verrier’ a las matemáticas fundamentales no se le reconoce su utilidad, se llega a un modelo que se aleja del ‘analítico’, pero no es ’enciclopédico’, más bien, es ecléctico. Estos tres modelos de formación, aunque limitados a las condiciones del caso de la Escuela Politécnica, muestran la complejidad de conciliar las tensiones entre teoría y práctica y los diferentes roles de las matemáticas en un modelo de formación.

Evolución de la formación matemática de futuros ingenieros.

En la primera mitad del siglo XX, marcado por el auge de las matemáticas y la revolución industrial, se encuentra un espíritu reformista de la enseñanza de las ciencias y en particular de las matemáticas. Una de las razones de la necesidad de reforma es el desarrollo de la industria, la cual requiere la formación de más trabajadores en la ciencia y la tecnología de la época (Nabonnand, 2007). El creciente interés de las comunidades matemáticas por las reformas educativas lleva en 1908, entre otras acciones, a la creación de la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (CIEM) en la ciudad de Roma. En ese momento el propósito de la CIEM no sólo sería reunir las experiencias sobre los diferentes sistemas de educación matemática, sino generar un espacio de intercambio, reflexión, elaboración colectiva y difusión de nuevas ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas.

En 1914 la CIEM se reunió en París para discutir dos asuntos: los efectos de la introducción del cálculo diferencial e integral en la educación secundaria y el rol de las matemáticas en la educación técnica superior. En lo que corresponde al último asunto se encuentran dos contribuciones que pueden ayudar a recocer algunos aspectos de la formación matemática de ingenieros en esta primera parte del siglo XX. Esas contribuciones son un informe denominado 'La formación matemática de ingenieros en diferentes países' por Stæckel (1914) y una conferencia llamada 'El papel de las matemáticas en las ciencias de la ingeniería' por D'Ocagne (1914).

En su informe, Stæckel (1914), señala que las matemáticas son parte de la formación teórica de futuros ingenieros. El autor resalta que el rol de las matemáticas es proporcionar a los estudiantes de ingeniería los conocimientos matemáticos suficientes para que puedan estudiar la mecánica y la física. No obstante, "la formación matemática en las universidades técnicas también tiene como objetivo desarrollar y fortalecer el pensamiento abstracto" (Stæckel, 1914, pág. 128).

Stæckel (1914) indica que el contenido matemático en la formación de ingenieros se fundamenta en la enseñanza del cálculo diferencial e integral. Aunque, los avances de la época en temas como métodos gráficos y numéricos de integración de las ecuaciones diferenciales, entre otros, deben ser enseñados. Se reduce el número de horas asignadas a las matemáticas debido a la importancia que cobran las 'ciencias de la ingeniería', las cuales aparecieron en 1829 como 'ciencias industriales' en la Escuela Central de Artes y Manufacturas. Aunque la enseñanza de las matemáticas debe satisfacer las necesidades de ese tipo de ciencias, ella se presenta de manera autónoma y general. La responsabilidad de la adaptación de las matemáticas a los requerimientos de las ciencias de la ingeniería queda en manos de los profesores.

Al caracterizar de manera general la formación matemática de futuros ingenieros en los inicios del siglo XX, descrita por Stæckel (1914), se encuentra cierta proximidad al modelo de Laplace de la Escuela Politécnica. Esta proximidad se fundamenta, como lo señala Romo-Vázquez (2009), en que el rol de las matemáticas en la formación de ingenieros tiene "una función general, autónoma, con una base de conocimiento que permite el acceso a otras disciplinas, incluyendo física y mecánica" (pág. 14).

En lo que respecta a la conferencia 'El papel de las matemáticas en las ciencias de la ingeniería' ofrecida por D'Ocagne (1914), se encuentra que el autor defiende la necesidad de una formación matemática teórica avanzada para los ingenieros, sin desconocer que ese tipo de matemáticas no constituye su práctica cotidiana. D'Ocagne (1914) señala que el trabajo cotidiano del ingeniero admite las matemáticas básicas con la utilización de fórmulas, esquemas y métodos gráficos. No obstante, el autor resalta que el conocimiento de las matemáticas teóricas avanzadas para todo ingeniero es indispensable en su formación matemática. Algunas razones para ello, dadas por D'Ocagne, están fundamentadas en que las matemáticas teóricas ayudan al ingeniero a superar una relación puramente empírica con la experiencia, aporta soluciones a problemas de ingeniería y contribuye con el desarrollo e innovación de las ciencias de la ingeniería.

D'Ocagne (1914), ilustra su defensa por las matemáticas teóricas avanzadas en la formación de ingenieros a través de algunos ejemplos donde la matemática teórica puede conducir al descubrimiento de hechos experimentales o es útil para resolver problemas del contexto de la ingeniería. Uno de esos ejemplos es el caso de *las ondas hertzianas* cuyo origen estuvo asociado con someter las consecuencias de la teoría matemática de las ondas electromagnéticas al control de la experiencia; ubicando la teoría como una herramienta de predicción que produce un conocimiento técnico. Un ejemplo que muestra que la intervención del conocimiento matemático teórico avanzado permite la solución de problemas en diversos campos técnicos —que incluso había estado abierto durante mucho tiempo y que la experimentación no había resuelto— es el problema de la *propagación de ondas líquidas en tubos elásticos* resuelto por M. Boulanger y del cual D'Ocagne (1914) manifiesta:

> Durante mucho tiempo la solución de este problema ha quedado indeciso por falta de una base matemática suficiente. El problema es de gran interés para el ingeniero hidráulico, a quien aporta la clave del fenómeno conocido como el golpe de martillo; y la importancia de este fenómeno a partir del punto de vista de las grandes líneas de suministro de las centrales hidroeléctricas no es desconocida debido a las complicaciones que conlleva para la regulación de las turbinas. Ahora sabemos que este problema se reduce al estudio de una integral discontinua de una ecuación con derivadas parciales de segundo orden, del tipo hiperbólico. (pág. 51)

D'Ocagne (1914) resalta también la utilidad de las matemáticas teóricas en contextos más generales, como el caso del *cálculo de las cantidades imaginarias* que con una concepción puramente teórica sirvió para diversas aplicaciones en la ingeniería eléctrica. Además, el autor señala que gracias a los avances de las matemáticas teóricas se ha podido desarrollar las ciencias de la ingeniería, por ejemplo, áreas como la resistencia de los materiales y la hidráulica tuvieron que esperar teorías matemáticas asociadas con la elasticidad e hidrodinámica para su desarrollo.

Para D'Ocagne (1914) es continuo el potencial uso de las matemáticas teóricas en la formación de ingenieros. Él enfatiza el hecho de que es necesaria una sólida formación matemática del ingeniero para que pueda comprender y utilizar de manera no ciega el conocimiento producido por las ciencias de la ingeniería en su práctica. Además, D'Ocagne reconoce que la teoría por sí sola no es suficiente para el ingeniero y que la experiencia desempeña un papel esencial para llevar a cabo su práctica.

Por otra parte, la segunda mitad del siglo XX hasta hoy, tanto las prácticas profesionales como la formación de ingenieros se han modificado por algunas condiciones como: el vertiginoso avance de la ciencia y la tecnología; la ampliación de los campos científicos, entre ellos, las matemáticas; los cambios curriculares en la educación secundaria y universitaria; entre otras. A continuación, presento otros aspectos de la evolución de la formación matemática de futuros ingenieros, pero esta vez, señalando la necesidad de una formación teórica matemática, la modelización matemática como una opción de formación y la visión de las matemáticas como disciplina de servicio. Para ello, continuo con otros aportes, dados en la Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (CIEM o ICMI por sus siglas en inglés, International Commission on Mathematical Instruction), como los trabajos de Pollak (1988) y Howson, Kahane, Lauginie y Turckheim (1988); al igual que considero otros estudios como el de Kent y Noss (2001).

El tercer estudio de la International Commission on Mathematical Instruction [La Comisión Internacional de Instrucción Matemática] ICMI 3 de 1988 —realizado en cooperación con el Comité de Enseñanza de la Ciencia del Consejo Internacional de Uniones Científicas (ICSU- CTS)— presenta la forma de intervención de las matemáticas para estudiantes y profesores de programas diferentes a los de matemáticas, dando especial atención a programas de ingeniería. Inicialmente el estudio resalta la necesidad de una formación teórica matemática que atienda el contexto de los avances en las matemáticas relacionada con contenidos nuevos, como álgebra lineal, variables complejas, series de Fourier, transformadas de Laplace y de Fourier, teoría de probabilidades, entre otras, que no hacían parte en ese momento de los programas universitarios estándar para ingenieros. De acuerdo con Pollak (1988), sólo en la década de 1950 algunas universidades, como la Universidad de Nueva York, incorporaron la enseñanza de esos contenidos en sus cursos de ingeniería. Sin embargo, a pesar de considerar nuevos contenidos, el modelo de formación matemática de ingenieros conserva el esquema clásico asociado con el modelo de Laplace, donde las aplicaciones vienen después de la teoría sin considerar que sean suficientes para aplicarlos.

Al respecto, Pollak (1988) plantea una serie de pensamientos matemáticos relacionados con la modelización como elementos que deben conformar la formación matemática de ingenieros. Al considerar más la naturaleza de la ingeniería y proponer la modelización para conectar la práctica profesional con las matemáticas, se sugiere que la formación matemática de ingenieros llega a una evolución. Aparece entonces una transición del modelo de formación teoría-aplicación al de teoría-modelización matemática. No obstante, algunos estudios sobre modelización matemática revelan algún tipo de inconsistencias con la modelación que se presentan en la práctica profesional del ingeniero (Bissell & Dillon, 2000).

Una opción para la formación matemática de ingenieros se vislumbra en los estudios de Pollak (1988) con el planteamiento de la ‘modelización matemática’. Aunque, todavía no está agotada la discusión de este modelo de formación matemática de ingenieros a pesar del creciente número de investigaciones en este tema (Kaiser, Blomhøj, & Sriraman, 2006; Niss, Blum, & Galbraith, 2007; Possani, Trigueros, Preciado, & Lozano, 2010; Soto, 2013; Vázquez, Romo, Romo Vázquez, & Trigueros, 2016).

El estudio ICMI 3 de 1988 presenta también la idea de las matemáticas como disciplina de servicio. En ese estudio se planteó que las matemáticas, como una ciencia viva, han servido de utilidad para estimular aplicaciones en diversos ámbitos y, por lo tanto, se debe aceptar su enseñanza a otras disciplinas como una necesidad social (Howson, Kahane, Lauginie, & Turckheim, 1988). Es así como hoy día las matemáticas se pueden concebir como una disciplina de servicio. Hecho que no minimiza la imagen y el contenido de las matemáticas, al pensar que podría reducirla a un papel utilitarista, por el contario, elevan su importancia tanto para las matemáticas mismas como para su relación con otras disciplinas.

Existen algunos aspectos contextuales que hacen parte de la evolución de la formación matemática de ingenieros que ubican la perspectiva de las matemáticas como disciplina de servicio como un tema abierto de investigación. Entre esos aspectos están los relacionados con los cambios curriculares de la educación en general y los avances tecnológicos.

El estudio de Kent y Noss (2001) plantea que la estabilidad, mantenida por varias décadas, de las matemáticas como disciplina de servicio en el Reino Unido ha sido afectada por dos factores:

> En primer lugar, los cambios curriculares en las escuelas fue un medio para que muchos estudiantes no estén suficientemente preparados para abordar el currículo tradicional. En segundo lugar, la revolución en la ingeniería profesional y en la práctica científica provocada por la tecnología informática hace que el currículo tradicional, con su base sólida en las técnicas de cálculo de lápiz y papel, se vuelva de una relevancia cuestionable para la práctica profesional. (pág. 395)

Como adaptación a estos dos factores Kent y Noss (2001) señalan como tendencia el reducir en el plan de estudio de ingeniería el lugar dedicado a las matemáticas y aumentar la importancia a asuntos como el diseño, la comunicación, las finanzas, entre otras. Otra tendencia que señalan los autores es incorporar un componente tecnológico al currículo tradicional de las matemáticas. Kent y Noss (2001) plantean que estas dos tendencias repercutieron en una disminución de las ambiciones de la formación matemática de ingenieros con la intención de que existiera una mejor adaptación de los estudiantes a sus respectivos programas. En esa misma dirección, la tecnología se percibe como un economizador de necesidades matemáticas simplificando la comprensión matemática de los estudiantes. Para estos autores este papel pragmático de la tecnología es totalmente cuestionable. Ellos consideran que esto podría aumentar la brecha existente con la formación de ingenieros en otros países que mantienen una mayor exigencia en su formación matemática. Además, siempre habrá situaciones que requieran la comprensión matemática que se escapa del uso de software.

Estas tendencias señaladas por Kent y Noss (2001) están aún vigentes en discusiones que buscan una articulación de la formación matemática de ingenieros con aspectos contextuales como los sociales e históricos de la educación en general, con los avances científicos y tecnológicos y con la práctica ingenieril (Camarena, 2009; Kent & Noss, 2002; Romo-Vázquez, 2014; Romo-Vázquez, 2015). A continuación, presento otros aspectos de la formación matemática de ingenieros relacionados con contenidos, utilidad y competencias matemáticas.

Contenidos, utilidad y competencias matemáticas en la formación de ingenieros.

A pesar de que hay acuerdo de que los futuros ingenieros necesitan conocer y aprender matemáticas, no hay consenso sobre la cantidad y el contenido de las matemáticas para diferentes disciplinas de ingeniería (Broadbridge & Henderson, 2008; Kent & Noss, Mathematics in the University Education of Engineers, 2003; Uysal, 2012). Se reconoce la dificultad que hay para satisfacer las necesidades matemáticas de las diferentes disciplinas de la ingeniería y en tratar de llegar a entendimientos comunes entre los departamentos de matemáticas y de ingeniería sobre lo que debe incluirse en un plan de estudios (Broadbridge y Hendersen, 2008). En particular, Sobrevilla (2000) señala que hay falta de claridad sobre este asunto en el ámbito internacional y plantea que la orientación de las matemáticas para ingenieros debe ser en contextos de la ingeniería y sus contenidos delimitarlos según los niveles de formación (pregrado o posgrado), así:

> […] las ciencias puras necesarias para la formación del ingeniero se deben enseñar orientadas netamente hacia la ingeniería y repartidas a lo largo de la carrera en vez de todas «amontonadas» al principio de los estudios. Cierta cantidad de ciencia que hoy se

enseña en los cursos de grado debería transferirse inmediatamente a los posgrados, por ejemplo, a las especializaciones, a los másters o a los doctorados” (pág. 97).

Los contenidos o conceptos matemáticos para ingenieros pueden ser vistos en términos de la ‘utilidad’ (o no) de saberlos en la práctica de la ingeniería, en la interfaz entre la universidad y la industria. Para que el ingeniero resuelva problemas propios de su área de conocimiento en su desempeño profesional se deben proporcionar contenidos como herramientas prácticas y teóricas (Sunthonkanokpong, 2011).

Para Kent y Noss (2003) hay una complejidad en los diferentes usos de las matemáticas en la práctica de la ingeniería. Estos autores diferencian entre la utilidad ‘directa’ y la ‘indirecta’ de las matemáticas. La ‘directa’ la relaciona con el uso de técnicas y nociones matemáticas para la resolución de problemas en el campo ingenieril. La ‘indirecta’ está asociada con el rol formativo para un ingeniero; es decir, con las diferentes formas en que las matemáticas contribuyen de manera general con la formación de habilidades y el juicio en la práctica de la ingeniería. Para Kent y Noss (2003) es fácil ver que el uso directo de las matemáticas ha cambiado en la práctica del ingeniero, los avances en la tecnología pueden dar cuenta de ello, pero los cambios en los usos indirectos son menos evidentes. El siguiente planteamiento de éstos autores se refiere a un ingeniero ‘académico’ y hace alusión a lo que Sobrevilla (2000) llama un ingeniero científico. Estos autores señalan lo siguiente:

> Cuando los ingenieros académicos defienden el lugar de la matemática, como ésta se enseña actualmente, ellos están, por lo menos en parte, defendiendo su rol formativo —forma que permite a los estudiantes obtener una comprensión de la ingeniería— a pesar

de que puede posteriormente ‘desaparecer en el fondo’ del pensamiento del ingeniero graduado. (Kent y Noss, 2003, pág. 16)

Existen varios aspectos que pueden asociarse con el rol formativo de las matemáticas para futuros ingenieros desde una utilidad ‘indirecta’. Por ejemplo, la tradición de que al aprender muchas matemáticas se adquiere un conocimiento como una ‘forma lógica de pensamiento’, de tal manera que contribuye con la forma de pensar como parte de la pericia en la práctica de un ingeniero (Kent y Noss, 2003). Otros aspectos pueden asociarse con la necesidad de las matemáticas en ingeniería por su forma de rigor lógico y por ser el lenguaje de la comunicación científica; hasta el punto de que un ingeniero sin matemáticas estaría aislado de los cambios y el desarrollo científico (Blockley & Woodman, 2002). Otro aspecto de este tipo de utilidad de las matemáticas en ingeniería es que sirve como fundamento para la capacidad de análisis y resolución de problemas, a la vez que son un prerrequisito para una serie de temas de ingeniería (López, 2007). Este tipo de utilidad, en ocasiones subvalorado por el poder instrumental de las matemáticas, cobra sentido para el desarrollo de competencias matemáticas en la formación de ingenieros.

Las matemáticas, ya sea con una utilidad directa o indirecta, están presentes en competencias definidas por organizaciones encargadas de acreditar programas de ingeniería y por asociaciones de instituciones de enseñanza de la ingeniería. Por ejemplo, la Accreditation Board for Engineering and Technology (ABET) [Junta de Acreditación de Ingeniería y Tecnología] —una organización que acredita programas de ciencias aplicadas, computación, ingeniería y tecnología en los Estados Unidos— y para entidades como la Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería (ASIBEI) y la Asociación

Colombiana de Facultades de Ingeniería (ACOFI) tienen como criterio, ya sea para fines de acreditación o para caracterizar el perfil del ingeniero, la competencia de aplicar conocimientos de las ciencias naturales, matemáticas y ciencias de la ingeniería (ASIBEI, 2016; ABET, 2014).

En las orientaciones para el currículo de las matemáticas en la enseñanza de la ingeniería planteadas por la European Society for Engineering Education (SEFI) [Sociedad Europea de Educación en Ingeniería] (2013), se asume la 'competencia matemática' como "la capacidad de entender, juzgar, hacer y usar las matemáticas en una variedad de contextos intra y extra-matemáticos y en situaciones en las que las matemáticas juegan o podrían jugar un papel" (pág. 13). En esta definición se percibe un carácter de aplicación de las matemáticas en diversos contextos no necesariamente matemáticos. Las ocho (8) competencias matemáticas a las que hace alusión European Society for Engineering Education (SEFI) (2013) son: pensar matemáticamente, razonar matemáticamente, plantear y resolver problemas matemáticos, modelar matemáticamente, representar entidades matemáticas, manejar símbolos y formalismo matemáticos, usar ayudas y herramientas y comunicar en, con y acerca de las matemáticas.

De acuerdo con lo planteado por European Society for Engineering Education (SEFI) (2013) se describen a continuación algunas de esas competencias:

<u>Pensar matemáticamente</u>: Esta competencia comprende el conocimiento de la clase de preguntas que se abordan en las matemáticas y los tipos de respuestas matemáticas que pueden y no pueden proporcionase. Igualmente, involucra la capacidad para plantear tales preguntas. Incluye el reconocimiento de los conceptos matemáticos y una comprensión de su alcance y limitaciones, así como la ampliación del ámbito de la abstracción y

generalización de los resultados y también se incluye una comprensión de la certeza de las consideraciones matemáticas que pueden proporcionarse.

Razonar matemáticamente: Esta competencia incluye, por un lado, la capacidad de comprender y evaluar una argumentación matemática ya existente (cadena de argumentos lógicos), en particular para comprender la noción de la demostración y para reconocer las ideas centrales de demostraciones. También incluye el conocimiento y la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definición, si-entonces-declaración, si y sólo si-declaración, etc.), y, por otro lado, incluye la construcción de cadenas de argumentos lógicos y, por tanto, la transformación de razonamientos heurísticos en demostraciones propias (razonamiento lógico).

Plantear y resolver problemas matemáticos: Esta competencia comprende, por un lado, la capacidad de identificar y especificar los problemas matemáticos (ya sean puros o aplicados, de composición abierta o cerrada) y, por otro lado, la capacidad de resolver problemas matemáticos (incluido el conocimiento de los algoritmos adecuados). No está bien definido lo que realmente constituye un problema y depende de las capacidades personales decidir si una pregunta se considera como un problema. Esto ha de tenerse en cuenta, por ejemplo, cuando se identifican problemas para un cierto grupo de estudiantes.

Comunicar en, con y acerca de las matemáticas: Esta competencia incluye, por un lado, la capacidad de comprender los enunciados matemáticos (orales, escritos o de otro tipo) hechas por otros, y, por otro lado, la capacidad de expresarse matemáticamente de diferentes maneras. (European Society for Engineering Education [SEFI], 2013, págs. 13, 14)

Para la European Society for Engineering Education (SEFI) (2013) la enseñanza de las matemáticas debe contribuir con la adquisición de competencias matemáticas. Por ejemplo, para mejorar la competencia del pensamiento matemático los profesores en sus clases pueden enfatizar en lo que las matemáticas son capaces de contribuir al trabajo de ingeniería. El uso de argumentos lógicos o de modelos a través de ecuaciones diferenciales puede permitir la determinación de configuraciones razonables u óptimas que evitarían una experimentación costosa. Otra sugerencia de estos autores con relación al desarrollo de la competencia de razonar matemáticamente es el plantear cadenas de argumentos lógicos en las tareas menos complejas que los estudiantes tienen que emprender por sí solos. Por ejemplo, el "demostrar que cierta configuración geométrica está determinada únicamente por ciertos datos o incluso de manera más abierta: cuáles son los datos para que la configuración esté determinada de manera única" (pág. 50).

En lo referente a la demostración matemática se encuentra que existen algunos argumentos a favor y en contra de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración para cursos de matemáticas en programas de ingeniería. Entre los argumentos que abogan por las demostraciones matemáticas se encuentra el hecho de que una demostración puede ayudar a convencer a alguien de la veracidad de una proposición o a entender el significado correcto de un teorema; de igual manera, el método usado en la demostración puede producir un algoritmo útil para otras situaciones. Van Asch (1993) plantea que la demostración matemática contribuye con el logro de algunos objetivos generales para la formación de ingenieros, como, por ejemplo:

- Formular, encontrar y analizar argumentos.
- Detectar y criticar formulaciones incorrectas.

- Expresar enunciados correctamente, usando conceptos matemáticos.
- Entender por qué a menudo es necesario definir conceptos.
- Comprender el papel de las hipótesis, las deducciones y la refutación a través de contraejemplos.
- Distinguir entre una demostración rigurosa y los casos cuando se sugiere por otros medios (ejemplos, experimentos) que una afirmación es verdadera.
- Obtener nociones de generalización, especialización y analogía.

(pp. 303-307)

Van Asch (1993), también señala que entre las razones por las cuales los profesores omiten demostraciones en cursos de primer año de ingeniería se encuentran las siguientes:

- Dar una demostración puede tomar mucho tiempo.
- La demostración puede ser simplemente demasiado dura.
- El teorema / el resultado es obvio. […]
- Las ideas de la demostración no son nuevas. […]
- El teorema/resultado se hará obvio a través de sus aplicaciones. (pp. 307, 308)

Algunas de las anteriores razones las encontramos en Dreyfus (1999), quien plantea que una de las explicaciones por las cuales la demostración no se lleva al aula de clase es la que tiene que ver con los estudiantes tienen dificultad para comprenderlas, incluso las que aparecen en libros de texto. En este sentido, algunos profesores —que enseñan cálculo en primer año de ingeniería— reportan como problema el hecho de que una gran proporción de sus estudiantes son capaces de resolver correctamente exámenes utilizando procedimientos familiares, pero carecen de la comprensión conceptual de los teoremas fundamentales, teniendo en ocasiones conceptos erróneos (Gruenwald y Klymchuk, 2003). La meta reportada por varios estudios sobre modificaciones de la enseñanza de las matemáticas es precisamente fomentar la comprensión conceptual de los estudiantes de primer año de ingeniería (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, & Rasmussen, 2016; European Society for Engineering Education [SEFI], 2013).

Enseñanza y aprendizaje del cálculo en ingeniería.

En una perspectiva de la utilidad 'directa' de las matemáticas para la formación de ingenieros, es decir, resaltando su aspecto instrumental, se encuentran estudios sobre la enseñanza y aprendizaje del cálculo para estudiantes de primer año de ingeniería (Bingolbali & Monaghan, 2008; Cantoral, 2001; García, 2013; Morales & Peña, 2013; Priemer & Lazarte, 2009; Salinas & Alanís, 2009). En esos estudios se plantea que las matemáticas deben verse como un medio o herramienta, de tal manera que el conocimiento matemático permita al estudiante entender la realidad de otras áreas del conocimiento y, por lo tanto, que sea relevante en las aplicaciones de la ingeniería (Bingolbali, Monaghan, & Roper, 2007; García, 2013; Salinas & Alanís, 2009; Trejo, Camarena, & Trejo, 2013).

La enseñanza del cálculo se ha caracterizado por un paradigma tradicional con un contenido matemático que se presenta estructurado de manera formal y rigurosa y con aplicaciones a problemas como consecuencia natural del dominio de la teoría (Salinas y Alanís, 2009). La enseñanza del cálculo en el nivel universitario tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica donde se evalúan las habilidades adquiridas en este dominio (Artigue, 1995). De acuerdo con esto se resaltan dos aspectos problemáticos para el aprendizaje del cálculo en ingeniería que involucra tanto la utilidad directa como indirecta de las matemáticas. El primero se relaciona con la comprensión de conceptos matemáticos. Algunos estudiantes adquieren dominio de técnicas para derivar e integrar y desarrollan habilidad para resolver problemas, pero lamentablemente ese dominio de los procedimientos en ocasiones no va acompañado de una sólida comprensión conceptual (Flores, 2013). Por ejemplo, Park (2011; 2015) informa que los alumnos de cálculo tienen muchas concepciones erróneas acerca del concepto de derivada en un punto y la derivada como función. Fomentar la comprensión conceptual de los estudiantes, de primer año de ingeniería, sobre las matemáticas es la meta reportada en intervenciones didácticas (European Society for Engineering Education [SEFI], 2013; Albano & Pierri, 2014; Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, & Rasmussen, 2016; Loch & Lamborn, 2016).

Como segundo aspecto se tiene una separación del aprendizaje del cálculo del contexto de la ingeniería. Según Herrington y Oliver (2000), cuando tal separación se da:

> El conocimiento mismo es visto por los estudiantes como el producto final de la educación, en lugar de una herramienta que se utilizará de forma dinámica para resolver problemas. Ésta ha sido la característica común que se ha desarrollado por mucho tiempo en los modelos tradicionales de educación. (pág. 23).

Estos dos aspectos problemáticos de la enseñanza del cálculo promueven debilidades en la formación matemática de ingenieros, pues están en contradicción con “la resolución de problemas reales garantizando una sólida formación en matemáticas, contribuyendo en la comprensión y resolución de fenómenos relacionados con la ingeniería” (Trejo, Camarena y Trejo, 2013, pág. 399). Se espera que una forma de contribuir a la superación de esas debilidades sea a través de cambios en las formas de enseñanza (Craig, 2013; López, 2007), de tal manera que se puedan superar los problemas de comprensión de conceptos matemáticos y de su aplicación. Se requiere que los profesores desarrollen nuevas metodologías de enseñanza que promuevan habilidades, atributos y cualidades de un ingeniero mediante una sólida formación matemática (Albertí, Amat, Busquier, Romero, & Tejada, 2013).

Algunos profesores e instituciones de enseñanza de la ingeniería han comenzado a utilizar nuevos métodos en la enseñanza de las matemáticas, como: aprendizaje cooperativo, el aprendizaje basado en problemas o proyectos, programas de apoyo a los estudiantes, ayuda en línea, fuentes visuales, programas de software matemáticos, materiales de instrucción en línea, evaluación asistida por ordenador, evaluación flexible, entre otras (Broadbridge & Henderson, 2008; Johnson, Johnson, & Stanne, 2000; Uysal, 2012). Algunos de estos métodos se clasifican como 'aprendizaje activo' (Uysal, 2012), el cual significa 'aprender haciendo', de tal manera que el éxito de los estudiantes será mayor en la medida en que participen más en su proceso de aprendizaje (López, 2007; Nirmalakhandan, Ricketts, McShannon, & Barrett, 2007). Se advierte que a pesar de las ventajas que exponen algunos de esos métodos innovadores de enseñanza, no se sugiere que la clase tradicional haya perdido su utilidad incondicionalmente (López, 2007).

Entre los retos que señalan algunas asociaciones (ACOFI[6], ASIBEI[7], IFFES[8], NAE[9]) relacionadas con la formación de ingenieros está, precisamente, mejorar las formas de enseñanza de las matemáticas y considerar que el trabajo en equipo de profesores de matemáticas con los de ingeniería permitiría una articulación entre conceptos matemáticos y contextos asociados con el

[6]Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería. http://www.acofi.edu.co/
[7]Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de Ingeniería. http://www.asibei.net/
[8]International Federation of Engineering Education Societies. http://www.sefi.be/ifees/
[9]National Academy of Engineering. http://www.nae.edu/

quehacer ingenieril. Según López (2007), la colaboración entre los departamentos de ingeniería y matemáticas es un principio fundamental para el diseño de actividades que ayuden a los estudiantes a integrar sus conocimientos de matemáticas en contextos de la ingeniería.

Aprendizaje situado y formación de ingenieros.

Reconocer la importancia del contexto en la enseñanza de las matemáticas puede introducir la necesidad de considerar el 'aprendizaje situado' como una perspectiva para la formación de los ingenieros. Entre las necesidades en que se ha utilizado el aprendizaje situado está la de implementar otra forma de concebir el aprendizaje (Bingolbali & Monaghan, 2008; Gómez, Hernández, & Morales, 2015; Johri & Olds, 2011; Paz, 2007), configurar cursos de formación (Chong, 2006; Hennig, Merstsching, & Hilkenmeier, 2015) y vincular los aprendizajes con la práctica (Hudson, 2008; Paoloni & Rivarola, 2012). Desde la mirada de los profesores el aprendizaje situado "es una herramienta didáctica que les permite organizar los escenarios de aprendizaje con el objeto de facilitar la enseñanza a los estudiantes" (Gómez, Hernández, & Morales, 2015, pág. 98).

El aprendizaje situado se asocia con el método de 'aprender haciendo', de tal manera que es un proceso activo que vincula un contexto específico de acuerdo con el área de formación y donde los estudiantes pueden indagar problemas específicos, proponer y desarrollar acciones de intervención para la solución de problemas (Chong, 2006). En este sentido, Paz (2007), resalta que el aprendizaje situado facilita la formación de competencias de ingeniería y puede acoger algunos métodos de enseñanza. Este autor plantea que:

> El aprendizaje situado facilita la formación de competencias de ingeniería porque es un aprendizaje activo; se fundamenta, en que los sujetos tengan oportunidades de tomar decisiones por sí mismos, circunscriptas a acciones que faciliten aprender a aplicar; este marco conceptual garantiza el aprendizaje significativo porque está contextualizado a una situación determinada. Algunos métodos de enseñanza: el de trabajo cooperativo o colaborativo en grupos, por proyectos y el orientado a problemas, tienen características que se adaptan muy bien para las metas de transferencia, en razón que se aplican procesos de análisis, síntesis, aplicación, relaciones y vinculaciones. (pág. 11)

Asumir una perspectiva del aprendizaje situado para la formación de ingenieros se fundamenta en que la relación con el conocimiento debe ser contextual y definida por la actividad, los elementos del entorno y la cultura (Dos Santos & Mates, 2008). En términos de Brown, Collins y Duguid, (1989) y Niemeyer (2006), el aprendizaje situado promueve el diálogo entre los actuantes y permite la negociación de significados, de modo que la práctica sea contextualizada, reflexiva y participativa. Son las actividades y las interacciones, en contexto, características de este tipo de aprendizaje, de tal forma que el aprendizaje se define no sólo como una adquisición de mayor o menor conocimiento y capacidad, sino como la posibilidad de participar en las prácticas asociadas con una cultura profesional. Como lo señalan Johri y Olds (2011), el contexto adquiere sentido en la medida en que el estudiante se involucra en las interacciones y las actividades del contexto procurando un 'hacer' y 'ser'.

CAPÍTULO 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

Metodología de la Investigación

En este apartado presento la metodología utilizada para el desarrollo de la investigación cuyo objetivo fue analizar los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros. La metodología de una investigación no describe solamente etapas, procedimientos y herramientas para la producción de registros, sino también la visión epistemológica que asume el investigador. Así, como lo plantea Creswell (2010):

> […] al planificar un estudio los investigadores deben pensar a través de la visión filosófica suposiciones que traen al estudio, la estrategia de investigación que está relacionada con esa visión y los métodos o procedimientos específicos de investigación que la interpretan en la práctica (pág. 27)

Como lo sugiere Kaplan (1973), el objetivo de la metodología es ayudarnos en la comprensión del proceso de la investigación científica y no de sus productos. En ese sentido, en este apartado describo el paradigma y enfoque de la investigación y posteriormente centro mi atención en el diseño de la investigación refiriéndome a la pregunta de investigación, a los miembros del grupo de profesores, al trabajo de campo y al proceso de análisis de la información. Por último, explico algunos aspectos relacionados con la validación de la información y consideraciones éticas de la investigación.

Paradigma y Enfoque de la Investigación

La presente investigación tuvo como propósito indagar significados de la demostración matemática por parte de profesores de cálculo diferencial de programas de ingeniería. De acuerdo con el marco teórico acogido para este estudio el 'significado' lo entiendo, en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001), como la experiencia que se sitúa y se constituye en una negociación (de significados) que supone interacción entre personas durante su participación en prácticas definidas por comunidades.

De acuerdo con el planteamiento de Erickson (1984) es labor de la investigación cualitativa contribuir a que lo familiar se torne extraño e interesante de nuevo, que lo acostumbrado se problematice; que lo que ocurra pueda hacerse visible y pueda evidenciarse. Los profesores de cálculo diferencial poseían significados de la demostración matemática, los cuales en ocasiones pasaron inadvertidos en la práctica de la enseñanza de la demostración en cursos de cálculo diferencial de ingeniería. Sin embargo, esos significados dan cuenta de la misma práctica y, como son resultados de negociación, son susceptibles de cambio o modificaciones que transformarían la misma práctica.

Esta investigación se enmarcó en un paradigma cualitativo, puesto que su desarrollo demandó aspectos propios de este tipo, según lo caracterizado por Creswell (2010) y Denzin y Lincoln (2012). Por ejemplo, uno de esos aspectos está relacionado con el hecho de que indagar sobre significados (para este caso acerca de la demostración matemática) exige la presencia de un fuerte componente descriptivo al centrar la mirada en un proceso (negociación de significados), más que en un resultado. Para la investigación cualitativa el análisis de registros y datos es preferentemente descriptivo (Albert, 2007; Chárriez, 2012; Garnica, 2004).

Para esta investigación el análisis de la información requirió, coincidiendo con lo señalado por Bogdan y Biklen (1994) para una investigación cualitativa, analizar los datos en forma inductiva siguiendo más bien un proceso cíclico, pues no se trató de comprobar hipótesis planteadas antes del estudio. Las categorías fueron emergentes y construidas a partir de la información.

Por tratarse esta investigación sobre significados de la demostración matemática se encontró una gran afinidad con el paradigma cualitativo, puesto que, como lo señalan Creswell (2007) y Hernández (2012), el 'significado' es un foco de atención para investigaciones cualitativas. De acuerdo con la perspectiva de la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) tomada para la noción de significado, se pretendió tener una perspectiva holística para el tratamiento de la información, pues, como lo señala Mejía (2013), en una investigación cualitativa se trata de entender el conjunto de cualidades interrelacionadas que caracterizan a un determinado fenómeno social.

Al valorar la negociación de significados como un proceso colectivo que genera reflexiones y conocimientos a través de las interacciones de los participantes, compartí la mirada de Radford (2011) al ver los participantes de esta investigación como sujetos que piensan y sienten dentro de un trasfondo cultural. Para este estudio los profesores participantes se asumieron atendiendo varias dimensiones entre otras sus creencias, concepciones, conocimientos y experiencias. Entendiendo que es propio del paradigma cualitativo concebir que todas las personas son merecedoras de estudio (Hernández, 2012), los profesores de esta investigación fueron convocados a través de una invitación abierta, sin distinción de género, credo, condición sexual, raza, ni ninguna otra. Como investigador hice parte del grupo de profesores participantes del estudio en calidad de moderador de sus discusiones.

Por otra parte, el enfoque en el cual se gestó este estudio fue el fenomenológico-hermenéutico (Guba & Lincoln, 1994; Sánchez, 1998), puesto que centró la descripción y la interpretación como fundamentos para la comprensión de los significados de la demostración matemática por parte de profesores de cálculo diferencial. De acuerdo con este enfoque los actores principales de esta investigación los consideré como personas inmersas en procesos históricos determinados por contextos sociales y culturales. En esta investigación los indicios de significados de la demostración se rastrearon en lo manifestado por los profesores acerca de experiencias durante sus trayectorias de vida y en particular durante un escenario de formación continua, para dar cuenta de su construcción social.

Según Zichi y Omery (2003) la fenomenología de tradición hermenéutica es un enfoque interpretativo y su intención es “revelar prácticas compartidas y significados comunes que suelen darse por sentados” (pág. 176). Es así como para este estudio los participantes, que fueron profesores de cálculo diferencial, habían participado en la práctica de demostrar, pero en ocasiones se dieron por sentados los significados de la demostración que ellos tenían, desconociendo que su interpretación podía ser compartida por algunos de ellos o modificada por la participación en diferentes contextos.

Los profesores, a través de interacciones en un trabajo colaborativo, reflexionaron sobre la demostración de teoremas o proposiciones en el contexto del cálculo diferencial de ingeniería. Conforme con la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) fue mediante el diálogo, la confrontación de opiniones, la exposición de argumentaciones y contradicciones que se posibilitó la movilidad de ideas de los profesores hacia nuevos significados de la demostración. En un enfoque fenomenológico-hermenéutico esta investigación pretendió conocer los significados de la demostración que profesores de cálculo diferencial de ingeniería dieron a sus experiencias en sus trayectorias académicas y profesionales y como esos significados se interpretaron en su práctica de enseñanza de la demostración para estudiantes de ingeniería.

Diseño de la Investigación

Para Yin (2010) un diseño de investigación es un:

> […] *plan lógico para llegar desde un aquí hasta un allá*, donde el *aquí* puede ser definido como un conjunto inicial de preguntas a ser respondidas y el *allá* puede asumirse como el conjunto de conclusiones (respuestas) sobre tales preguntas. Entre el "aquí" y el "allá" pueden encontrarse un número de pasos importantes que incluyen la recolección y análisis de datos relevantes." (pág. 48)

Esta visión de diseño de investigación dada por Yin supera concepciones meramente instrumentalistas centradas en pasos referentes a la logística de un proceso de investigación. El diseño para esta investigación fue concebido más que como un plan de trabajo, como un plan lógico en el sentido de Yin y tuvo como finalidad orientar que la evidencia encontrada se aproxime a la pregunta de investigación; así, el diseño de este estudio estuvo constituido por todos los pasos y medios articulados de manera flexible con las fuentes de información y el objetivo de la investigación.

Explico a continuación los siguientes elementos que definí para el diseño de este estudio: la pregunta de investigación, los participantes, el trabajo de campo y el proceso de análisis de la información. La implementación de este diseño permitió construir un conjunto de registros y datos para dar cuenta de significados de la demostración por parte de profesores de cálculo diferencial de ingeniería.

Pregunta de investigación.

La pregunta de investigación fue: ¿Cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros? Esta pregunta centra su atención inicialmente en el estudio de los significados de la demostración por parte de profesores que enseñan cálculo diferencial y, posteriormente, pero no de manera aislada, sobre la relación de esos significados con la formación de futuros ingenieros.

El origen de esta pregunta parte de la intersección de varios hechos relacionados con mi formación académica, la práctica de enseñar la demostración como profesor de cálculo, las interacciones con mis colegas y la literatura revisada sobre demostración matemática. Como Licenciado en Matemáticas y Física, Especialista y Magíster en Matemáticas he estado inmerso en la práctica de demostrar, sin embargo, había algo diferente de esa práctica dada en mi formación académica con el escenario laboral de ser profesor en programas de ingeniería. Ese algo diferente se relacionaba con la presencia y rol de la demostración en el ejercicio de enseñanza del cálculo diferencial en ingeniería.

Como profesor, identifiqué con mis compañeros profesores algunas preocupaciones sobre el papel de la demostración en cursos de cálculo para programas de ingeniería. La demostración había sido una práctica permanente en mi formación matemática, al igual que en la de algunos compañeros que compartíamos una formación parecida, lo que generó inquietudes sobre sus concepciones y roles para programas académicos no matemáticos. Posteriormente, ya en el programa de doctorado y al confrontar esas inquietudes, por un lado, con el estado del arte elaborado en varios frentes que fueron emergiendo a medida que diferentes contextos aparecían, como la formación de profesores, el aprendizaje de la demostración, la Educación en Ingeniería, entre otros; y, por otro lado, la dinámica misma del desarrollo de la investigación con la participación de profesores que actuaron como sujetos de la investigación fue aumentando mi perspectiva desde donde ver las inquietudes que tenía inicialmente sobre la demostración matemática en ingeniería.

Es así como identifiqué como objeto de investigación los significados de la demostración matemática por parte de profesores de cálculo diferencial en programas de ingeniería. Estudiar los significados de la demostración permitiría conocer la construcción de las nociones de la demostración que tenían los profesores, la relación con la formación de ingenieros y cómo se podrían modificar algunos de esos significados de la demostración. La necesidad de aproximarme a la pregunta de investigación me condujo a buscar reflexiones sobre la demostración a través de interacciones entre profesores, considerando el constructo de *negociación de significados* que según la teoría de la práctica social se considera como un proceso por el que se experimenta el mundo y donde se sitúa el significado a través de la interacción de dos procesos complementarios llamados participación y cosificación (Wenger, 2001; Wenger, McDermott, & Snyder, 2002). Tomar de referencia la teoría de la práctica social de Wenger (2001) me sirvió como elemento metodológico y como marco analítico junto con aportes de la Educación Matemática y de la Educación en Ingeniería para dar cuenta de significados de la demostración.

Participantes.

Los participantes en este estudio formaron un grupo de nueve (9) profesores de cálculo diferencial en ingeniería. Ellos eran profesores de cálculo de una facultad de ingeniería de una universidad pública en la costa norte colombiana. Esta universidad tenía alrededor de 20.000 estudiantes y 1000 profesores aproximadamente durante el año 2014 (Ministerio de Educación Nacional, 2016).

La invitación que hice a los profesores fue para participar en un programa de formación continua que trataría sobre demostración matemática en cursos de cálculo diferencial. Inicialmente se inscribieron once (11) profesores, pero dos (2) de ellos por razones laborales no tuvieron el tiempo suficiente para participar y desistieron de su vinculación al programa. Los nueve (9) profesores restantes se mantuvieron durante todo el programa de formación continua de manera voluntaria y sin recibir ninguna compensación de tiempo en los planes de trabajo ni tampoco económica.

Cada uno de los profesores que participaron en este estudio hacía parte del grupo de profesores del Área de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería. Los participantes estuvieron relacionados con la universidad donde laboran, en sus roles de egresados o profesores. Ser miembro de esta comunidad de profesores los hizo partícipes de tareas académicas compartidas y compromisos comunes sobre la enseñanza del cálculo, asociadas con la práctica de enseñar matemáticas en la institución.

Los nueve (9) profesores tenían formación en licenciatura en matemáticas. Según la última formación de posgrados reportada por ellos, se encontró que seis (6) poseían o estaban estudiando Maestría en Matemáticas o Matemáticas Aplicadas, uno (1) tenía Maestría en

Educación y dos (2) tenían especializaciones. Por edades de los participantes, tres (3) tenían entre 30 y 40 años, dos (2) entre 41 y 50 años, tres (3) entre 51 y 60 años y un (1) profesor tenía más de 60 años. Sobre su experiencia docente en educación superior se encontró que tres (3) tenían entre 1 y 10 años, dos (2) entre 11 y 20 años, dos (2) entre 21 y 30 años y dos (2) entre 31 y 40 años.

A continuación, presento una breve descripción biográfica de cada participante identificándolos con seudónimos con el fin de preservar su identidad y registrando sus datos al momento de iniciar su participación en el programa de formación continua.

Carlos tenía 67 años de edad. Él realizó su formación de Licenciatura en Matemática y Física entre los años de 1967 a 1973. Posteriormente, realizó estudios de posgrado y obtuvo los títulos de Especialista en Matemática Avanzada y Magíster en Matemáticas. Había orientado, durante 38 años como profesor en el nivel de Educación superior cursos de cálculo diferencial e integral, ecuaciones diferenciales y matemáticas especiales, en programas de ingeniería. Su experiencia como profesor de la asignatura cálculo diferencial era de 17 años.

Luis tenía 60 años de edad. Estudió Licenciatura en Matemáticas y Física durante el período de 1972 a 1976. Realizó estudios de posgrado como Especialista en Matemática Avanzada y Magíster en Matemáticas. Había orientado, durante sus 37 años como profesor en el nivel de Educación superior cursos de cálculo diferencial e integral, matemáticas discretas, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales, en programas de ingeniería. Su experiencia como profesor de la asignatura cálculo diferencial fue de 18 años.

Aníbal tenía 60 años de edad y estudió su Licenciatura en Matemáticas y Física de 1973 a 1977. Realizó estudios de posgrado en Especialización en Docencia Universitaria. Se había desempeñado durante 30 años como profesor de matemáticas en la educación superior y orientó los cursos de álgebra lineal, matemática discreta, cálculo diferencial, análisis numérico y ecuaciones diferenciales en programas de ingeniería. Había orientado la asignatura de cálculo diferencial durante 12 años.

Juan tenía 58 años de edad y estudió Licenciatura en Matemáticas y Física durante los años de 1974 a 1978. Realizó estudios de posgrado y obtuvo los títulos de Especialista en Informática Educativa y Especialista en Docencia Universitaria. En sus 20 años como profesor en el nivel de Educación superior había orientado cursos de cálculo diferencial e integral, matemáticas discretas y álgebra lineal en programas de ingeniería. Su experiencia como profesor de la asignatura cálculo diferencial era de 20 años.

Nicolás tenía 48 años de edad y estudió Licenciatura en Matemática y Física durante los años de 1984 a 1990. Realizó estudios de posgrado y obtuvo los títulos como Especialista en Edumática, Especialista en Docencia Universitaria y Magíster en Educación. Había orientado por 23 años asignaturas en programas de ingeniería asignaturas como: álgebra superior, matemáticas discretas, álgebra lineal, cálculo diferencial e integral, análisis numérico y programación lineal. Había orientado la asignatura de cálculo diferencial durante 15 años.

Jacobo tenía 45 años de edad y estudió su Licenciatura en Matemáticas y Física durante los años de 1987 a 1993. Realizó estudios de posgrado como Especialización en Física General y cursó estudios de Maestría en Matemática Aplicada. Había orientado asignaturas en programas de ingeniería, como física mecánica, ecuaciones diferenciales y cálculo diferencial, integral y vectorial, durante 15 años. Él tenía 13 años de experiencia orientando cálculo diferencial.

Eliécer tenía 39 años de edad. Realizó su Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas con énfasis en Matemáticas y Computación durante los años de 1999 a 2003. Estaba cursando estudios de posgrado en Maestría en Matemáticas Aplicadas. Durante sus 5 años de experiencia en programas de ingeniería orientó asignaturas como cálculo diferencial, integral y vectorial. Había orientado la asignatura de cálculo diferencial durante 5 años.

Leonardo tenía 35 años de edad y estudió su secundaria y Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas con énfasis en Matemáticas y Computación durante los años de 1998 a 2002. Realizó estudios de posgrado como Especialista en Matemáticas y Magíster en Matemáticas. Durante sus 6 años de experiencia en programas de ingeniería había orientado asignaturas como cálculo diferencial, integral y vectorial. Había orientado la asignatura de cálculo diferencial durante 3 años.

María tenía 34 años de edad y estudió su Licenciatura en Ciencias Físico Matemáticas con énfasis en Matemáticas y Computación durante los años de 1999 a 2003. Realizó estudios de posgrado como Magíster en Matemáticas. Durante sus 10 años de experiencia en programas de ingeniería había orientado asignaturas como álgebra lineal, geometría vectorial, cálculo diferencial e integral. Había orientado la asignatura de cálculo diferencial durante 8 años.

Trabajo de campo.

En esta sección describo tres elementos importantes del trabajo de campo: el programa de formación continua, las actividades y las fuentes de información.

El programa de formación continua.

El escenario que escogí para indagar los significados que los profesores negocian en torno a la demostración matemática fue un programa de formación continua denominado *La demostración matemática en cursos de Cálculo Diferencial*. Este programa fue autorizado por la Facultad de Ingeniería de la universidad. El programa se realizó durante el primer semestre del año 2014, con encuentros de tres horas los días sábados. El día y la hora definidos para el programa fueron concertados con los profesores, los cuales por los múltiples compromisos laborales de los participantes fueron definidos como sábados a las 8:00 a.m. Así se acordó, el horario para encontrarse entre colegas y debatir sobre los temas del programa. Se realizaron 14 encuentros en un salón para eventos de la universidad el cual se encontraba debidamente dotado con recursos audiovisuales para facilitar el desarrollo de cada sesión.

Para el desarrollo del programa, en un primer encuentro presenté a los profesores la propuesta de trabajo para discutirla y explorar las expectativas o consideraciones de cada uno de ellos. Las expectativas de los profesores se centraron en la importancia de la demostración en los cursos de cálculo diferencial y en tener la oportunidad de formar un espacio de encuentro para compartir regularmente sus conocimientos y experiencias. Se buscó establecer acuerdos colectivos sobre las formas de trabajo y las normas sociales que se adoptarían. Entre ellas estuvieron las del cumplimiento del horario y el respeto por la intervención de los compañeros.

El propósito del programa fue generar un espacio académico entre profesores que permitiera reflexionar sobre la demostración en cursos de cálculo diferencial para programas de ingeniería. Algunas reflexiones de los profesores sobre la demostración se dieron en el contexto de sus experiencias sobre su práctica docente.

El programa de formación continua se basó en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001; 2009) utilizando las características de una comunidad de práctica como su fundamentación metodológica. Si bien no fue el propósito de esta investigación verificar que el grupo de profesores constituyeran una comunidad de práctica, sí utilizamos algunas de sus características para generar condiciones metodológicas que permitieran la negociación de significados de la demostración matemática. La comunidad de práctica, en términos de la teoría de la práctica social, se soporta en tres ejes: el dominio, la comunidad y la práctica (Wenger, McDermott, & Snyder, 2002 ; Wenger, 2001; 2009).

La configuración del programa de formación continua tuvo como punto de partida un 'dominio' el cual tuvo sentido en las interacciones de los profesores y le permitió a cada uno de ellos establecer su afiliación al grupo. Ese dominio fue el conocimiento acerca de la demostración matemática y del cálculo diferencial y sus experiencias de enseñanza, los cuales ayudaron a organizar el contenido de las actividades desarrolladas por el grupo de profesores. La 'comunidad' fue el grupo de profesores, quienes al buscar los intereses de su 'dominio' interactuaron entre sí generando relaciones de mutuo compromiso. Involucrar a los profesores a la idea de comunidad permitió que ellos se reconocieran como parte de un grupo distinto, en el que compartían historias, ideas, preocupaciones y reflexiones. Ellos se identificaron como el grupo que estaba estudiando colectivamente asuntos relacionados con la demostración matemática en la universidad. El 'ser parte de' una comunidad los distinguía, sobre la base de un compromiso y sentido de pertenencia, entre los compañeros del Área de Matemáticas de la facultad. Por último, la 'práctica' que fue común entre los participantes y que se hizo explícita en el programa de formación continua fue la enseñanza de la demostración. La participación de los profesores fue espontánea, sostenida e interactiva durante las actividades del programa de formación continua, de tal manera que se asumió un compromiso mutuo por la práctica de la enseñanza de la demostración.

Al configurar un programa de formación continua sobre los ejes de una comunidad de práctica se permitió que algunas experiencias personales se convirtieran en valores colectivos que transformarían la práctica de enseñanza de la demostración en cursos de cálculo en ingeniería. Asumir una mirada con base en la teoría de la práctica social para el programa de formación ayudó a superar una formación de profesores centrada en una práctica docente aislada e individual, para adoptar el quehacer docente a partir de la colaboración y participación en una comunidad.

El trabajo colaborativo permitió "un continuo dar y recibir, asumiendo una responsabilidad conjunta por la orientación del trabajo y siendo capaces de construir soluciones para los problemas basados en el respeto por las diferencias y las particularidades individuales" (Boavida & Ponte, 2011, pág. 129). Ese escenario de participación, con profesores miembros de un grupo, propició la negociación de significados de la demostración matemática como una reorganización de las interpretaciones personales frente a las ideas de los demás. La negociación no es sinónimo de acuerdo total respecto de alguna interpretación, sino de un cierto grado de afinidad que permite una mejor comunicación entre los miembros del grupo (Wenger, 2001).

En el programa de formación, el rol que desempeñé fue el de moderador. De acuerdo con la teoría de la práctica social es conveniente que el moderador de la comunidad sea un miembro de ésta, pues se asegura que los vínculos de pertenencia e identidad facilitan la confianza para la discusión entre los participantes (Wenger, 2001). Al asumir el rol de moderador del programa de formación desempeñé algunas funciones como: tramitar permisos institucionales para la realización del programa de formación continua; organizar los espacios, insumos y recursos requeridos para cada encuentro; comunicar (vía correo electrónico, personalmente o por teléfono) a los profesores asuntos relacionados con la invitación al programa y con las agendas a desarrollar en los encuentros; identificar asuntos de interés que ameritaran ser considerados por los profesores; definir la agenda de trabajo para cada encuentro de acuerdo con los asuntos y necesidades que emergieran de la dinámica de los encuentros anteriores; planear y organizar las actividades; acompañar los debates entre los profesores; permitir la discusión de temas; propiciar un ambiente de confianza y respeto entre los participantes; y, en ocasiones, coordinar el uso de la palabra.

Las actividades.

El diseño de las actividades para el programa buscó consolidar una configuración social que permitió la participación libre de los profesores. Las actividades propuestas promovieron la reflexión, discusión y proposición de ideas sobre la demostración en cursos de cálculo diferencial. Los asuntos que se propusieron en las actividades fueron orientados por algunas preguntas como las siguientes: ¿Cómo reconocen si una argumentación es o no una demostración? ¿Cuál es el papel de las demostraciones en matemáticas? ¿Para qué se trabajan demostraciones en un curso de cálculo diferencial para ingenieros? ¿Cuál es el grado de abstracción de la demostración que permiten en sus clases con estudiantes de ingeniería? ¿Cómo determinan los teoremas que se van a demostrar en el aula de clase de cálculo diferencial para ingenieros?

Algunos elementos que se consideraron para el diseño de las actividades fueron los siguientes:

- Presentaciones de diferentes demostraciones de un teorema o proposición. Se resaltaron interpretaciones visuales, verbales, deductivas e inductivas.
- Demostraciones realizadas en libros de textos universitarios y trabajos de investigación.

- Demostraciones espontáneas realizadas por algún profesor participante.
- Exposiciones y debates sobre artículos de investigación en Educación Matemática relacionados con la demostración.
- Anécdotas de episodios de estudiantes o profesores frente a la demostración, dadas por los profesores de acuerdo con su experiencia docente.

El programa de formación continua bajo las características de una comunidad de práctica generó las condiciones para indagar sobre significados de la demostración y su relación con la formación matemática de ingenieros. A continuación, presento algunos aspectos de la metodología usada en el programa de formación relacionando las actividades desarrolladas. Algunas actividades fueron debidamente planeadas, pero otras fueron diseñadas de acuerdo con la dinámica de los debates e iniciativas de los profesores. Para el diseño de las actividades se tuvieron en cuenta los aportes de los profesores, la revisión de la literatura y la pregunta de investigación. En la Tabla 1 presento un resumen de las actividades desarrolladas en el programa:

Tabla 1: Resumen de actividades del programa de formación continua.

No.	Contenido	Descripción
1	Autobiografía	Cada profesor elaboró un escrito describiendo sus vivencias y experiencias con la demostración cuando era estudiante y en su rol de profesor.
2	Debate de cinco respuestas de estudiantes acerca del Teorema: Sea f una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in R$. Demuestre que f no puede tener más de dos valores comunes con su derivada.	Se debatió acerca de cinco respuestas, de estudiantes de primer año universitario, a la tarea de demostrar un teorema. Las respuestas presentaron demostraciones: formales, verbales, con ejemplos, gráficas y con errores (Pfeiffer, 2011).
3	Debate de tres presentaciones sobre el Teorema. La derivada de la función seno es la función coseno.	Se debatió acerca de tres presentaciones de la demostración de un teorema. La primera fue una prueba utilizando los software Winplot y Geogebra; la segunda fue de carácter

		geométrico que se remonta a las matemáticas de la antigua India; y la tercera estaba planteada en un libro de texto.
4	Debate de las presentaciones de demostraciones del Teorema de Rolle en libros de texto.	Los profesores propusieron tomar varios libros de textos de cálculo y debatir acerca de las demostraciones, de un mismo teorema, planteadas en cada libro.
5	Análisis y exposiciones por parte de los profesores acerca de los Teoremas: Derivada de una potencia; unicidad del límite; del extremo interior; de Rolle; del Valor Medio.	Se analizaron pruebas no formales de varios teoremas de cálculo diferencial (González, 2012; Van Asch, 1993)
6	Revisión y debate de teoremas y demostraciones de un listado de teoremas de un curso de cálculo diferencial.	Los profesores propusieron seleccionar de un listado de teoremas relacionados con el cálculo diferencial los que se consideraban pertinentes demostrar en clase.

7	Exposición y debate por parte de los profesores acerca de los teoremas del Valor Medio; del criterio de la segunda derivada y de Weierstrass.	Los profesores participantes expusieron demostraciones con ejemplos usando el Geogebra y demostraciones pre-formales.
8	Diálogo con un invitado internacional.	Se desarrolló un conversatorio sobre las demostraciones en programas de ingeniería con un profesor invitado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada (España).
9	Clausura. Autoevaluación.	Los profesores realizaron un acto sencillo pero significativo de cierre del programa. Se entregaron certificaciones de asistencia y palabras de reconocimiento al trabajo colaborativo realizado. Algunos profesores expresaron su valoración del programa de formación.

Cada una de las actividades se realizó en uno o más encuentros durante el programa de formación. La Actividad No.1, relacionada con la autobiografía de los profesores se hizo en dos encuentros y por ser una fuente de información particular la detallaré más adelante. La Actividad No.2 se realizó en un segundo encuentro y tuvo como propósito motivar el interés de debatir acerca de la demostración matemática en asuntos relacionados con el cálculo diferencial. El contenido utilizado para esta actividad fue tomado de la tesis doctoral de Kirsten Pfeiffer (2011) que trató sobre un estudio exploratorio de los enfoques adoptados por los estudiantes de primer año universitario en la validación y evaluación de demostraciones matemáticas. El contenido escogido se consideró apropiado, pues pudo conectar a los profesores con situaciones familiares que algunos relacionaron con su práctica de enseñanza de la demostración en la facultad de ingeniería. La actividad consistió en presentarle a los profesores las respuestas de cinco estudiantes de primer año universitario a la tarea de demostrar la siguiente proposición: “Sea f una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in R$. Demuestre que f no puede tener más de dos valores comunes con su derivada” (Pfeiffer, 2011, pág. 84). Las respuestas de los cinco estudiantes fueron:

Respuesta de Gerard:

$f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

$f'(x) = 4x + 3$

$2x^2 + 3x - 7 = 4x + 3$

$2x^2 - x - 10 = 0$

$(2x - 5)(x + 2) = 0$

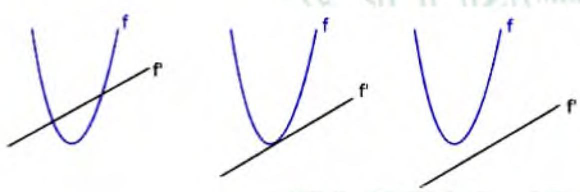
$x = \frac{5}{2}\ o\ x = -2 \longrightarrow$ 2 soluciones

Luego el enunciado es verdadero

Respuesta de Helena:

La derivada de una función cuadrática es una expresión lineal. Para encontrar los puntos comunes resuelvo la ecuación que obtengo de establecer la igualdad de las dos expresiones. Establecer una expresión cuadrática igual a una expresión lineal resulta una ecuación cuadrática la cual no puede tener mas de dos soluciones.

Respuesta de Ian:



Respuesta de Joan

Demostrar: $f(x) = ax^2 + b + c,\ entonces\ f'(x) = 2ax + b$. Queremos soluciones para probar que $f(x) = f'(x),\ i.e.$

$ax^2 + bx + c = 2ax + b$

Multiplicando por x da:

$ax^2 + bx + c = 2ax^2 + bx$

$ax^2 = c$

$x^2 = \frac{c}{a}$

Entonces las únicas dos posibles soluciones están dadas por $\boldsymbol{x} = \pm\sqrt{\frac{c}{a}}$

Respuesta de Kieran

$f'(x) = 2ax + b$

$f(x) = f'(x)$

$ax^2 + bx + c = 2ax + b$

$ax^2 + (b - 2a)x + c - b = 0$

Es una ecuación cuadrática la cual tiene como máximo dos soluciones (Pfeiffer, 2011, pág. 84)

La actividad mostró la utilización de un ejemplo (respuesta de Gerard) para demostrar una proposición recreando el uso de demostraciones genéricas. Esas pruebas genéricas, según Alibert y Thomas (1991), trabajan con ejemplos que se consideran genéricos, porque son típicos de una clase de ejemplos y por lo tanto la demostración puede ser generalizable. La actividad también presentó argumentos de forma verbal (respuesta de Helena), gráfica (respuesta de Ian), argumentos con errores (respuesta de Joan) y argumentos que responden a una demostración formal (respuesta de Kieran).

Algunas preguntas orientadoras de esta actividad fueron: ¿Cuáles de las presentaciones dadas corresponden a una demostración? ¿Por qué? ¿En qué casos aceptaría usted como válida una de estas presentaciones en sus clases con estudiantes de ingeniería? ¿Por qué? Aquí se empezaron a dar las primeras interacciones entre profesores y los primeros debates sobre el significado de la demostración con base en sus experiencias con estudiantes de ingeniería.

Las respuestas de los estudiantes de la actividad presentaron demostraciones: formales, verbales, con ejemplos, gráficas y con errores. Las situaciones que plantearon cada una de las respuestas de los cinco estudiantes fueron analizadas en grupos de tres profesores y luego debatidas entre todos. Se dio la oportunidad para que cada profesor interactuara con sus colegas exponiendo sus razones, escuchando los argumentos de los demás, participando en el debate y tomando alguna postura al respecto. La actividad generó agrado por la temática de parte de los profesores. Algunos se emocionaron al compartir sus ideas con los otros compañeros, pues no era común para ellos discutir sobre ese tipo de situaciones. La actividad propició un reencuentro entre colegas y amigos, casi por generación, pues algunos tenían algún tiempo de no compartir con los otros un aula de clase.

Para la Actividad No. 3 se utilizó un poco más de tiempo que en la anterior y se realizó en dos encuentros. En esta actividad se debatió acerca de tres presentaciones de la demostración del Teorema: La derivada de la función seno es la función coseno. Un primer momento de esta actividad se tomó para la instalación y manejo del software Winplot y Geogebra. A pesar de que cada profesor tenía individualmente una computadora portátil se propició la colaboración buscando una misma meta que era inicialmente reconocer la herramienta del software. El uso del software no era el fin de la actividad, sino simplemente el medio para realizar una parte de ella. Posteriormente, se dio la necesidad de compartir tanto estrategias del uso del software como conceptos básicos para representar gráficamente la interpretación geométrica del teorema. Al final cada profesor mostró ante sus compañeros la construcción realizada usando el software. Las interacciones se dieron en un ambiente de colaboración, respeto y, en ocasiones, de alegría por la satisfacción de realizar la actividad.

La segunda presentación fue de carácter geométrico y se remonta a las matemáticas de la antigua India. Esa demostración fue elaborada por un matemático hindú del siglo XII llamado Bhaskara II (Bag, 1979, págs. 217-224). La tercera presentación fue la demostración formal del teorema utilizando definiciones y teoremas relacionados con el concepto de límite. Esa demostración fue tomada del libro de texto de cálculo cuyos autores son Larson y Edwards (2010). En el Anexo 1 presento el contenido de la Actividad No. 3. En ese encuentro la actividad no se terminó. Los profesores se comprometieron a reunirse en un día intermedio de la semana con algún compañero para presentar sus apreciaciones sobre el resto de la actividad en el próximo encuentro. En éste los profesores debatieron apoyando u oponiéndose a las afirmaciones de algunos de ellos. La actividad permitió que de la interacción entre los profesores surgieran argumentos asociados con lo que entendían que era una demostración y las formas como podía ser utilizada cada presentación para la enseñanza en cursos de cálculo diferencial de ingeniería. Algunos profesores se remitieron a su práctica de enseñanza de la demostración para decidir qué presentación era mejor para estudiantes de ingeniería.

Posteriormente, los participantes comenzaron a sugerir ciertas ideas que querían que se discutieran en el programa de formación continua. Una de esas estuvo relacionada con los libros de texto de cálculo. Ellos consideraban que los libros eran un material importante que utilizaban tanto los profesores como los estudiantes. Algunos profesores mencionaron los libros de texto que más utilizaban en sus clases con los estudiantes de ingeniería o que representaban una referencia para la preparación de los contenidos de las clases. Se seleccionaron siete libros de texto de cálculo con base en sugerencias de los profesores y la referencia bibliográfica que tenía el curso de cálculo diferencial aprobado en la universidad. Los libros escogidos fueron:

1. Larson, R., y Edwards, B. H. (2010). Cálculo 1 de una variable (Novena ed.): McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

2. Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (Sexta ed.): Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
3. Gil, J., y Díaz, R. (2013). Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
4. Hernández, E. (2013). Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones (Primera ed.): Copyright© Revista digital Matemática Educación e Internet (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).
5. Thomas, J. G. (2006). Cálculo. Una variable (Undécima ed.). México: Pearson Educación.
6. Courant, R., y John, F. (1985). Introducción al cálculo y al análisis matemático (Quinta ed.). México: Editorial Limusa, S.A. de C.V.
7. Leithold, L. (1998). El Cálculo (Séptima ed.). México: Oxford University Press - Harla México, S.A. de C. V.

Cada profesor quedó con el compromiso de llevar al encuentro siguiente uno de los libros de texto de cálculo definidos conjuntamente. Posteriormente, se sometió a consulta cuál de los teoremas preferían que fuera analizado en los libros de texto. Después de plantear algunos argumentos a favor y en contra de algunos teoremas los profesores eligieron el Teorema de Rolle. Con base en esa información se organizó la Actividad No. 4. El propósito fue indagar sobre la representación de las demostraciones de un mismo teorema en diferentes libros de texto y debatir sobre las características de cada presentación.

En el encuentro para la Actividad No.4 los profesores consultaron los libros de texto que algunos de ellos habían traído y los que llevé prestados de la biblioteca. Como moderador hice una introducción de la actividad y luego los profesores se organizaron en grupos de dos y un grupo se organizó con tres participantes. Le asigné a cada grupo dos textos y un grupo quedó con un solo texto. En el salón se dispuso de libros de textos para la consulta de los profesores. La Actividad No.4 se desarrolló durante dos encuentros. Cada grupo de profesores utilizó diapositivas para expresar sus ideas sobre la demostración del libro de texto que le correspondió. Los comentarios se expresaron libremente sin ningún formato a seguir. Posteriormente, surgieron algunas preguntas que orientaron la discusión, como, por ejemplo, ¿será la presentación de tal libro de texto una demostración? ¿Por qué?, o inquietudes sobre la intervención de algún profesor.

Posteriormente y de acuerdo con los asuntos que se generaban en las discusiones de las anteriores actividades, advertí la necesidad de recurrir a elementos teóricos que dieran cuenta de alguna clasificación según el grado de abstracción de la demostración. Es así como recurrí a una información tratada durante mi pasantía en la Universidad de Granada (España) acerca de formas de representación de la demostración. Les propuse a los profesores la Actividad No. 5 que duró tres encuentros y consistió en el análisis de algunos artículos de investigación y de resultados de una tesis doctoral. Para esta actividad utilicé el artículo de Van Asch (1993) titulado To prove, why and how? [Demostrar, ¿por qué y cómo?], así como demostraciones pre-formales elaboradas por González (2012) en su tesis doctoral. En esta actividad cada profesor escogió una demostración de las referencias dadas e hizo su presentación ante los compañeros. Algunos se identificaron con algunas demostraciones al considerarlas apropiadas para estudiantes de ingeniería.

Entre los profesores se dio un liderazgo compartido, de tal manera que la revisión de artículos y las reflexiones en torno a un nuevo conocimiento junto con las experiencias de cada uno dieron lugar a comprensiones que se tradujeron en acciones colectivas. Algunas de las iniciativas de los profesores se convirtieron en acciones colectivas planteadas como actividades para todo el grupo. Tal es el caso de las Actividades No. 6 y No. 7. En la Actividad No. 6 los profesores propusieron seleccionar de un listado de teoremas relacionados con el cálculo diferencial que se consideraban pertinentes demostrar en clase. Se acordó escoger un libro de texto de cálculo e identificar todos los teoremas que se encontraran en los capítulos que se relacionaran con un curso de cálculo diferencial. Posteriormente, los profesores de acuerdo con su experiencia en cursos de cálculo diferencial de ingeniería debatieron sobre aquellas demostraciones de teoremas serían viables para estudiantes de esta carrera. Unos cuantos profesores llegaron a elaborar algunos criterios generales para la selección de las demostraciones. El libro que se escogió fue el de Larson y Edwards (2010). En el Anexo 2 presento el resumen de teoremas y demostraciones relacionados con el cálculo diferencial utilizado en la Actividad No. 6.

Para la Actividad No. 7 los profesores se organizaron para construir sus propias demostraciones no formales para un curso de cálculo diferencial de ingeniería. Algunos se inclinaron por usar nuevamente el software Geogebra, pero esta vez para realizar, ellos mismos, las simulaciones correspondientes a interpretaciones geométricas de algún teorema y así plantear demostraciones con ejemplos. Otros profesores compartieron sus ideas para construir demostraciones pre-formales. El trabajo en comunidad de los profesores permitió llegar a acuerdos sobre la presentación de demostraciones en su práctica de enseñar demostraciones a estudiantes de ingeniería. Algunos mostraron mayor compromiso con las actividades propuestas y sus intervenciones eran más frecuentes que las de otros. Las producciones de algunos profesores fueron materializadas en dos artículos publicados en la Revista Colombiana de Matemática Educativa, los cuales presento en el Anexo 3.

Durante el programa de formación no se dio una estructura jerárquica entre los participantes, más bien todos tenían igualdad de condiciones para su participación. Como lo señala Wenger, (2001), Wenger, Mc Dermott y Sneyder (2002) y Hernández y Flores (2013), la ubicación de los participantes es flexible y dinámica y está determinada por el involucramiento en las actividades de la comunidad. En la medida en que avanzaban los encuentros del programa de formación algunos profesores asumían compromisos con el grupo, por lo que se presentó un mayor dominio y liderazgo de los asuntos que se trataban en los encuentros.

Por último, se desarrollaron las actividades No. 8 y No. 9 relacionadas con el conversatorio con un invitado internacional y con la clausura del programa de formación respectivamente. El conversatorio sobre las demostraciones en programas de ingeniería fue con el profesor invitado Dr. Juan Francisco Ruiz Hidalgo, del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada (España). El profesor inició el diálogo presentando su experiencia personal y el tránsito de sus intereses de investigación al pasar del campo de las Matemáticas puras al de la Educación Matemática. Luego, se refirió a sus experiencias con respecto a las demostraciones en programas de ingeniería permitiendo un diálogo entre los participantes. Se utilizó como medio de comunicación la videoconferencia, vía Skype y como escenario un salón que contó con las condiciones adecuadas para tener un buen sonido que permitiera la interacción entre todos.

Para la clausura del programa, los profesores realizaron un acto de cierre sencillo pero significativo. Se entregaron certificaciones de asistencia y palabras de reconocimiento al trabajo realizado. En este espacio los profesores expresaron sus apreciaciones del programa y propusieron mantener la iniciativa de seguir compartiendo un espacio de encuentro entre colegas. Algunos se comprometieron en seguir reuniéndose con la intención de participar en eventos nacionales de Educación Matemática y discutir algunas ideas construidas colectivamente.

La implementación de estas actividades favoreció la negociación de significados de la demostración, pues permitió generar participaciones de los profesores conducentes a contrastar ideas, establecer acuerdos, generar confusiones, entre otras acciones. El desarrollo de las actividades propició que los profesores comenzaran a adoptar una responsabilidad colectiva que se tradujo en su compromiso por participar en cada encuentro del programa de formación.

El programa de formación continua fue el escenario donde se dieron las principales fuentes de información. A continuación, las describo.

Fuentes de información.

Encuentros en el programa de formación continua.

La principal fuente de información fueron los encuentros de los profesores en el programa de formación continua. Para la producción conjunta de registros, necesarios para analizar los significados de la demostración, se grabó por medio de una videograbadora todo lo que dijeron, hicieron o expresaron cada uno de los profesores en los encuentros. Además, se utilizó una grabadora de audio para garantizar un buen registro de las voces de los participantes. Las grabaciones en video y en audio se constituyeron, como lo señala Fernández (2006) en registros digitales y electrónicos para la investigación. Los videos, como los señalan Baer y Schnettler, (2009) permitieron capturar emociones y expresiones faciales y corporales que fueron recursos válidos para visualizar gestos, movimientos y actitudes que ayudaron a una mejor interpretación de las intervenciones de los profesores. Los registros de audio y video fueron transcritos para el análisis correspondiente.

Autobiografía.

Antes del inicio de las actividades del programa le solicité a cada profesor elaborar su autobiografía. Ésta es una reflexión retrospectiva en la que se espera encontrar detalles sobre las vivencias y emociones que hayan experimentado los participantes sobre algún asunto de interés para una investigación (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010) .Para este estudio, la autobiografía de cada profesor fue una descripción de eventos y acontecimientos con respecto a sí mismo y a sus relaciones con los otros en torno a sus vivencias con la demostración matemática desde su mirada como estudiante y como profesor. La autobiografía de algunos profesores aportó analizar rasgos o características de sus significados de la demostración.

Para que el instrumento de la autobiografía se articulara con el marco metodológico de la teoría de la práctica social fue fundamental plantear su discusión entre los profesores. La discusión de las autobiografías permitió, como lo establece Arnaus (1999), que los profesores "no contemplen sus creencias y valores sólo como expresiones de las opciones individuales o como el resultado de sus experiencias personales, sino como expresiones que están en relación con las comunidades o tradiciones de las que forman parte" (pág. 618). La autobiografía fue una fuente clave para información diferente a la generada en el programa de formación continua.

Además, permitió identificar experiencias con la demostración matemática en momentos importantes de los profesores durante sus trayectorias académica y profesional.

Documentos.

Se recolectaron otros artefactos documentales que sirvieron de información complementaria, como son: notas de campo de las observaciones de los encuentros; copias de las producciones escritas por los profesores; copias de las relatorías de los encuentros y registros de audio de algunas conversaciones entre profesores. Algunos de esos documentos, considerados como fuente de información para esta investigación, fueron obtenidos bajo dos condiciones: La primera de ellas corresponde a los productos del proceso de negociación de significados de la demostración por profesores durante el programa de formación continua. Un ejemplo de esos documentos fueron los relacionados con la elaboración de demostraciones con ejemplos, pre-formales y formales de teoremas por parte de los profesores. Esas elaboraciones de demostraciones formales y no formales fueron resultado de las interacciones entre los profesores durante el programa de formación. Los documentos de los profesores surgieron como propuestas colectivas de presentación de demostraciones de teoremas que potencialmente podrían ser utilizadas en su quehacer docente. La segunda condición relacionó documentos que fueron solicitados a los profesores como apuntes de clase y autobiografías. Cada uno de esos documentos fue valorado para analizar su condición como elemento de materialización en el proceso de negociación de significados (Wenger, 2001).

La información de los documentos se registró digitalizándolos e identificando la fecha y lugar de origen (Hernández, Fernández, & Baptista, 2010). Adicionalmente, estos textos proporcionaron otros detalles específicos sobre los significados de la demostración.

Entrevista.

Para ampliar mi comprensión sobre los significados de la demostración por parte de los profesores se llevaron a cabo entrevistas semi-estructuradas. En ellas hice preguntas para precisar conceptos u obtener mayor información sobre el tema deseado (Hernández, y otros, 2010). Estas se realizaron a cada profesor de manera individual. Los entrevistados expresaron de manera espontánea sus experiencias o apreciaciones y se procuró no influenciar a los entrevistados. Las entrevistas, como lo señalan Pulido, Ballén, y Zúñiga, (2007), fueron conversaciones sostenida entre dos personas no ajenas y quienes compartían un interés común acerca de un asunto específico, que para este caso fue la demostración matemática. Las expresiones particulares que no identifiqué durante el desarrollo del programa de formación continua o necesité confirmar con los registros dados a través de otras fuentes fueron objeto de indagación en las entrevistas, las cuales fueron transcritas para facilitar el análisis.

Como lo señala Kvale (2011), la entrevista tiene un poder único para capturar experiencias y significados vividos del mundo de los sujetos, de tal manera que ellos expresan sus vivencias con sus propias palabras. Las entrevistas a los profesores me permitieron una mayor comprensión de situaciones y expresiones de los profesores que involucraban la demostración matemática en sus experiencias. Además, aportaron elementos importantes para la interpretación de los significados de la demostración por parte de profesores de cálculo diferencial en ingeniería.

Cada uno de los registros generados por las fuentes de información descritas anteriormente fueron usados en esta investigación para rastrear indicios de significados de la demostración que fueron construidos en la negociación de significados en momentos tanto previos como durante el programa de formación continua. Por ejemplo, fuentes como la entrevista y la autobiografía jugaron un papel importante para contrastar información acerca de los significados de la demostración en momentos diferentes al programa de formación, como los dados en las trayectorias de educación secundaria y universitaria de los profesores.

Proceso de análisis de la información.

En concordancia con lo planteado por Creswell (2010), Hernández, Fernández, y Baptista (2010) y Patton (2002) los propósitos de analizar los datos asumiendo una perspectiva cualitativa se enfocan en: organizar la información para darle una estructura a los datos enmarcados en un contexto y sentido de acuerdo al planteamiento del problema; describir las experiencias de los participantes utilizando su propio lenguaje; e interpretar y explicar situaciones, hechos y fenómenos. Para esta investigación el análisis pretendió organizar e interpretar los registros y datos de las diferentes fuentes definidas anteriormente para dar cuenta de los significados de la demostración matemática en profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros.

El análisis de los datos no se ubica en un momento preciso y temporalmente definido durante la investigación, sino más bien opera por ciclos y se da a lo largo de todo el proceso de investigación (Buendía, Colás, & Hernández, 1998). En esta investigación el análisis inició cuando empezó el programa de formación continua y se dio durante todo el resto de la investigación, intensificándose una vez finalizado el trabajo de campo. Es así como coincido con Coffey y Atkinson (2003) al afirmar que:

> El proceso de análisis no debe considerarse una etapa diferente de la investigación sino una actividad reflexiva que influya en toda la recolección de los datos, la redacción, la recolección adicional, etc. El análisis entonces, no es la última fase del proceso de investigación sino debe verse como parte del diseño de la misma y de la recolección de datos. El proceso de investigación, del cual el análisis es un aspecto, es cíclico. (pág. 7)

Al ser el moderador del programa de formación continua, se me posibilitó conocer a los participantes y disponer de los videos y audios de los encuentros, transcribir las intervenciones de los profesores reflejando el sentido de las frases con la mayor fidelidad posible de los sucesos. Las transcripciones tuvieron no sólo los acentos y expresiones propias de los participantes, sino también los signos de puntuación y la entonación usada por ellos. En el mismo proceso de transcripción de cada uno de los encuentros y de lecturas de documentos como las autobiografías y entrevistas empecé a columbrar un análisis insipiente de la información, pero importante para la comprensión general de los acontecimientos de cada encuentro.

El análisis fue concurrente con el proceso de producción de registros y datos. Durante y después del desarrollo del programa de formación revisé de forma recurrente las transcripciones confrontándolas con los registros en videos y audios de los encuentros del programa de formación para una mayor comprensión de los significados de la demostración matemática por parte de los profesores. La información generada principalmente en los encuentros o entrevistas con los profesores moldeó el análisis, puesto que en la medida en que los profesores fueron participando en los encuentros fui organizando e interpretando el conjunto de datos.

En la investigación cualitativa los elementos que son una parte fundamental e irreductible del conjunto de datos y sobre los cuales recae la obtención de la información son considerados como las unidades de análisis. Para esta investigación consideré como unidad de análisis los enunciados de los profesores tanto verbales como escritos que expresaban aspectos relacionados con significados de la demostración matemática. Los enunciados revelaron elementos del 'discurso' que manejaron los profesores alrededor de la demostración matemática. De acuerdo con Lerman (2001) "[…] la conciencia se constituye a través del discurso. […] y el "discurso" debe ser tomado para incluir todas las formas de lenguaje, incluyendo el gesto, los signos, los artefactos, la imitación, etc." (pág. 88). Es decir, a través del 'discurso', expresado por medio de palabras o gestos, se da cuenta de los conocimientos acerca de la realidad. En este sentido y siguiendo a Planas (2004) hago referencia al discurso como práctica social, de tal manera que:

> […] el análisis del discurso devenga el análisis de las acciones de los participantes de un entorno y, por tanto, el análisis del habla y los textos en tanto que generadores de acciones e intenciones. Comprender el uso del habla significa comprender el proceso del discurso a través del cual las personas resuelven lo que dicen y cómo lo dicen en su interacción con otras personas. (pág. 61)

Para el análisis de la información utilicé como herramienta el análisis de categorías (Creswell, 2010). La escogencia de este tipo de análisis estuvo de acuerdo con la pregunta de investigación, la cual relaciona a un cómo y atiende a un proceso que es la negociación de significados de la demostración. Por la naturaleza de esta investigación no declaré categorías a priori, sino que consideré categorías emergentes. A continuación, presento aspectos de la constitución del cuerpo principal de datos y del sistema de códigos.

Al revisar las transcripciones tenía una idea de lo que estaba buscando, pues quería documentar los significados de la demostración por parte de los profesores participantes. Durante el desarrollo del programa de formación mi interés se centró en los significados de la demostración. El proceso interpretativo de la información que iba emergiendo en cada encuentro del programa de formación apuntaba a precisar en el discurso de los profesores aspectos intrínsecos a las nociones de la demostración.

Entre los momentos del proceso de constitución del cuerpo principal de datos se dio la realización de una codificación abierta. Posteriormente, de acuerdo con un diseño de categorías emergentes, ocurrió la reducción del conjunto de la información y constitución de episodios que dieron lugar a la definición de grandes categorías.

El propósito era producir un conjunto de códigos que facilitara identificar aspectos esenciales de los significados de la demostración por parte de los profesores. Algunas preguntas que orientaron el ejercicio inicial de codificación estuvieron relacionadas con buscar indicios de significados de la demostración según la teoría de la práctica social de Wenger (2001). Por ejemplo, algunas cuestiones orientadoras fueron: ¿Qué concepciones comparten los profesores sobre la demostración? ¿Cuáles opiniones de los profesores muestran reflexiones acerca de la demostración? ¿Qué situaciones provocan desacuerdos entre los profesores? ¿Cuáles opiniones reflejan dudas sobre alguna idea de la demostración? ¿Qué proponen los profesores para la enseñanza de la demostración en cursos de cálculo diferencial de ingeniería? ¿Cuál es el grado de abstracción que sugieren o acuerdan los profesores para la demostración en cursos de cálculo diferencial en ingeniería? ¿Cómo relacionan la demostración con la formación matemática de ingenieros?

El uso del software Atlas ti 7.0 facilitó sistematizar un primer conjunto de códigos y relacionar la información con el marco teórico y con mis interpretaciones. De acuerdo con Kvale

(2011) codificar implica “asignar una o más palabras claves a un segmento de texto para permitir la identificación posterior de una declaración” (pág. 138). A través del software Atlas ti 7.0 resalté algunos fragmentos de las transcripciones y otros documentos que dieran señales o pistas de algún aspecto relacionado con las preguntas definidas con anterioridad y con otros aspectos de la dinámica de las interacciones entre los profesores que dieran cuenta de significados; a estos fragmentos le asigné un código. En la construcción de los códigos tomé como referencia aportes de investigaciones que asociaron la teoría de la práctica social como referente teórico o metodológico (Camargo, 2010; Gómez, 2007). Algunos ejemplos de estos códigos y sus comentarios son:

- Qué es Demostrar (Code: QueEsDemost): agrupa todas las alusiones de los profesores que evidencian qué es una demostración para ellos.
- Retoma Ideas de Compañeros (Code: RetomaIdeasCompañeros): son intervenciones en donde algún profesor reconoce la idea de un compañero y la utiliza en su propia reflexión sobre la demostración de un teorema o su forma de enseñarla.
- Dudas acerca de la Demostración (Code: DudaDemost:) se refiere a las intervenciones de los profesores en donde manifiestan dudas si una justificación dada es una demostración.
- Matemática para Ingeniería (Code: MatemtIngenieria): recoge las intervenciones que relacionan a la demostración con la formación matemática de ingenieros.

La codificación fue emergente, pues cada código se obtuvo a partir de la identificación de registros de cada fuente de información. La de este estudio se caracterizó por ser abierta, puesto que en un momento los códigos no presentaron relaciones entre ellos a pesar de ser orientados por la pregunta de investigación y el marco teórico. Después de un primer proceso de asignación de códigos y al revisar nuevamente los documentos primarios, encontré citas de las transcripciones que poco se relacionaban con significados de la demostración. Esas citas correspondían a intervenciones de los profesores que trataban temas que escasamente respondían a las preguntas orientadoras de la codificación o se asemejaban a unos monólogos que no presentaban reacciones de otros compañeros. Otras intervenciones eran monosilábicas que aclaraban en forma muy limitada alguna idea como aporte a la discusión. Decidí descartar esas intervenciones del conjunto de la información para el análisis. A través del programa Atlas ti 7.0 generé automáticamente el estado de los códigos y sus citas. Esto ayudó a ubicar en los documentos primarios los fragmentos correspondientes a los códigos con pocas y mayores citas, sin perder la visión general del documento.

Posteriormente, de acuerdo con mi interés por analizar situaciones que dieran cuenta de los significados de la demostración, revisé los códigos con mayor número de citas. Localicé esos códigos con sus citas en los documentos primarios e identifiqué algunos diálogos. Los que mostraban interacción entre los profesores y conducían a darle sentido colectivamente a algún aspecto de la demostración se constituyeron en los episodios que escogí para presentar el análisis de la investigación.

La selección de episodios y la construcción del conjunto de códigos, bajo un proceso emergente y analítico fundamentado en la teoría, proporcionaron una herramienta para el análisis de la información. Después de un proceso de codificación abierta y de la reducción del conjunto de la información y la configuración de episodios, procedí a la constitución de temas o grandes categorías para la realización del análisis.

De acuerdo con Creswell (2012) “describir y desarrollar temas a partir de los datos consiste en responder a las principales preguntas de investigación y formar una profunda comprensión del fenómeno central a través de la descripción y el desarrollo temático” (pág. 247). Las categorías que elaboré intentaron responder la pregunta de investigación ¿cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros?; para ello volví a la revisión de la información codificada y a los episodios seleccionados y, de acuerdo con la pregunta, organicé tres grandes categorías. Las reflexiones analíticas de la perspectiva de ‘significado’ con base en la teoría de la práctica social (Wenger, 2001) y los demás referentes teóricos iluminaron la configuración de cada categoría.

La primera categoría la denominé *Demostración Matemática: Experiencias de Vida Académica y Profesional* y en ella mostré que los significados de la demostración matemática de profesores de cálculo diferencial para ingeniería son el resultado de un proceso de negociación dado en sus trayectorias de vida académica y profesional. Esta categoría reunió los datos relacionados con las experiencias de los profesores acerca de la demostración vividas en sus trayectorias académicas, como la educación secundaria y universitaria, al igual que experiencias de su práctica docente como profesionales. Los protagonistas en esta categoría fueron Carlos y Jacobo porque algunos de sus comentarios referían de manera más detallada acerca de sus experiencias con la demostración en sus trayectorias de vida.

Para la segunda categoría que llamé *Programa de Formación Continua: Un Escenario de Negociación de Significados de la Demostración Matemática* mostré que el programa de formación continua —desarrollado para esta investigación y enmarcado en las dimensiones de una comunidad de práctica— se configuró como un escenario para el aprendizaje sobre la demostración matemática entre profesores de cálculo diferencial para ingeniería. Los datos escogidos estuvieron relacionados con los significados de la demostración de los profesores como resultado del aprendizaje en el programa de formación continua. Los protagonistas de esta categoría fueron: Nicolás, Carlos, Jacobo, Juan, María, Eliécer y Aníbal.

La tercera y última categoría la denominé *Significados de la Demostración y Formación Matemática de Ingenieros*, en la cual mostré que los significados de la demostración que negocian los profesores de cálculo diferencial de ingeniería están relacionados con una utilidad indirecta de las matemáticas en la práctica de la ingeniería. En esta categoría se hizo énfasis en los datos relacionados con la experiencia docente de los profesores y su mirada de la demostración en la ingeniería. El uso de los referentes teóricos privilegió asuntos sobre la demostración en el campo de la Educación Matemática y aspectos de la formación matemática de ingenieros desde la Educación en Ingeniería. Los protagonistas fueron Carlos y Juan.

El orden de aparición de cada una de estas categorías no representó ninguna relación jerárquica. En todo el proceso de análisis la revisión exhaustiva y reflexiva de la información implicó regresar continuamente a los registros para revisar su forma, contenido e intencionalidad para estudiar su coherencia interna con los demás registros. El análisis no fue un proceso lineal que seguía una ruta preestablecida, más bien fue un 'ir y venir' entre el mundo de registros y datos, marco teórico y mis reflexiones.

Validación

Teniendo en cuenta el paradigma y enfoque escogido para esta investigación y como lo plantea Moral (2006):

> Si la investigación cualitativa es una actividad que sitúa al observador en el mundo para recoger una información sobre él, esta información es filtrada, a la vez que interpretada y representada, por el propio investigador. Este elemento «interpretativo» que caracteriza la investigación cualitativa le confiere una gran complejidad, especialmente cuando se considera que al realizar esta práctica interpretativa podemos transformar el mundo en una serie de representaciones personales y sesgadas. (págs. 148 -149)

Como parte de la solución del problema que pueda generar el elemento 'interpretativo', con representaciones personales y sesgadas, asumí en esta investigación considerar otras voces que contribuyeran a una validación de las actividades y los análisis que se dieran en el proceso de la investigación. Para ello, el ejercicio de confrontación con el marco teórico, el diálogo permanente con la asesora de tesis y con otros investigadores apoyaron el evitar sesgos asociados con creencias o prejuicios en la planeación y desarrollo del trabajo de campo o del análisis de la información.

Las exposiciones de los avances de esta investigación en escenarios académicos aportaron a la validez de este proceso investigativo. Esos escenarios fueron el Seminario Permanente del programa de Doctorado en Educación de la Universidad de Antioquia, donde profesores y compañeros de los programas de Maestría y Doctorado evaluaban las presentaciones de avances que realicé sobre esta investigación. De igual manera, participé en discusiones acerca de mi investigación con miembros de los grupos de investigación: Grupo en

Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas, GECEM, de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y del Grupo de Didáctica de la Matemática y Pensamiento Numérico, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (España).

Por otra parte, otro escenario de exposición de algunas ideas de la investigación fueron los eventos académicos donde participé como ponente. Esos fueron: 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME 13); 7th Internacional Technology, Education and Development Conference INTED 2013; XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa RELME 28; y 15° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME 15). La participación en eventos académicos y mi interés por esta investigación contribuyeron a obtener resultados sobre los significados de la demostración matemática por parte de profesores de cálculo diferencial y sus relaciones con la formación de ingenieros.

Consideraciones Éticas

La presente investigación involucró la participación de profesores universitarios que trataron asuntos relacionados con la demostración matemática para estudiantes de pregrado, por tanto, esta investigación consideró actividades con seres humanos lo que implica atender y explicitar las consideraciones éticas respectivas.

En el campo de la investigación educativa las consideraciones éticas están relacionadas con cinco principios morales que orientan el compromiso ético, los cuales son: respeto por las personas y su autonomía; beneficio y no daño; justicia; confianza y fidelidad e integridad científica (Sañudo, 2006). A continuación, describo algunas acciones que realicé para garantizar el cumplimiento de estos principios morales durante todo el proceso de investigación.

La vinculación de los profesores al programa de formación continua fue voluntaria y sin ningún tipo de discriminación por género, orientación sexual, raza, etc. Antes de su vinculación e inicio en el programa de formación se le dio a cada profesor una información precisa y oportuna sobre los compromisos y alcance de éste. Es decir, se llevó a cabo el proceso de 'consentimiento informado'. Finalicé con la firma de un documento en el cual se plasmaban por escrito los objetivos de la investigación, los beneficios, los posibles riesgos a los que se exponían los participantes, el principio de confiabilidad y la decisión libre de participar en la investigación (Anexo 4). En dicho formato ofrecí a los participantes mis datos de contacto y los de la universidad para que pudieran comunicarse conmigo en el momento en que fuese necesario o para que denunciaran cualquier tipo de abuso.

Cada profesor participó libremente en el programa de formación continua conociendo que su retiro, si así lo consideraba, no conllevaba ninguna penalidad. Como investigador solicité a los participantes que revisaran los resultados de la investigación antes de ser publicados, con el propósito de estar seguro de que ellos compartían el contenido expresado en el reporte de investigación y, de igual manera, garanticé la fidelidad de la información con los hallazgos encontrados.

Por lo general, toda propuesta de investigación tiene un beneficio en términos del desarrollo científico y existen algunos riesgos mínimos a los que los participantes podrían estar expuestos. Para el caso particular de esta propuesta presenté actividades donde los profesores se confrontaron con sus propias acciones frente a un colectivo de compañeros, lo cual podría generar riesgos emocionales, sin embargo, me aseguré de estar atento a que fueran mínimos. Durante los encuentros del programa de formación continua se mantuvo un ambiente de respeto.

En caso de que no haya explicitado en este documento algunas consideraciones éticas relacionadas con la investigación educativa, se asume lo planteado por Sañudo (2006) en relación con el investigador, los sujetos investigados y con el uso social de los resultados de investigación. Además, en caso de omisión en este documento de otros aspectos éticos, se asume también los principios éticos y las recomendaciones para la protección de personas considerados en el Reporte Belmont (National Institute of Health, 1979) y en los criterios de ética en la investigación clínica (Hawkins & Emanuel, 2008).

CAPÍTULO 4: ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Análisis de la Información

En este capítulo presento algunos significados de la demostración matemática de profesores universitarios que enseñan cálculo diferencial en programas de ingeniería. Esos significados fueron revelados por profesores a lo largo de sus participaciones en un programa de formación continua bajo la concepción de comunidad de práctica.

Este capítulo lo organicé en tres secciones que ayudan a responder la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros? Las tres secciones de este capítulo son:

- Demostración Matemática: Experiencias de Vida Académica y Profesional.

En esta sección centro mi interés en las experiencias de significado de la demostración vividos por los profesores cuando eran estudiantes de secundaria, de universidad y como profesores de una facultad de ingeniería. Los significados de la demostración son el resultado de un proceso de negociación dado por los profesores en esas trayectorias y que seguirán constituyéndose en la medida que ellos sigan teniendo experiencias en su trayectoria profesional.

- Programa de Formación Continua: Un Escenario de Negociación de Significados de la Demostración Matemática

Para esta sección muestro que algunos aspectos del programa de formación —desarrollado para esta investigación y enmarcado en las dimensiones de una comunidad de práctica— como, interacción, liderazgo compartido, reflexión, acuerdos, desacuerdos, confusiones, compromiso con la práctica y producción colectiva, contribuyeron con el aprendizaje de la demostración por parte de los profesores participantes.

- Significados de la Demostración y Formación Matemática de Ingenieros

En esta sección hago referencia a los significados de la demostración que negocian los profesores de cálculo diferencial de ingeniería y su relación con la formación matemática de futuros ingenieros. Los significados de la demostración se relacionan con una utilidad indirecta de las matemáticas para la práctica de la ingeniería o papel formativo de las matemáticas para la ingeniería.

Demostración Matemática: Experiencias de Vida Académica y Profesional

En esta sección muestro que los significados de la demostración matemática de profesores de cálculo diferencial para ingeniería son el resultado de un proceso de negociación dado en sus trayectorias de vida académica y profesional. Como lo plantea Wenger (2001), "el significado negociado es al mismo tiempo histórico y dinámico, contextual y único" (pág. 78). En este sentido, los significados de la demostración se ubicaron en momentos históricos de la vida académica y profesional de los profesores, de acuerdo con la dinámica de negociación de significados. Es así como los significados de la demostración se dieron en circunstancias diferentes, propias del contexto donde se desarrollaron, pero fueron únicas para cada profesor que las vivió.

Según Wenger (2001), el 'significado' es "una manera de hablar de nuestra capacidad (cambiante) ─en el plano individual y colectivo─ de experimentar nuestra vida y el mundo como algo significativo" (pág. 22). Para este estudio, los profesores participantes revelaron significados de la demostración matemática a través de experiencias en sus trayectorias académicas y profesionales influenciadas por interacciones con los sujetos donde se desarrollaron. El significado se sitúa en un proceso que Wenger (2001) denomina *negociación de significados*, el cual se da a lo largo de la vida y en el que las personas hablan de cómo experimentan el mundo a través de su participación en comunidades sociales.

Como lo señala Wenger (2001), "la negociación de significado es un proceso productivo, pero negociar un significado no quiere decir construirlo desde cero" (pág. 78). Por lo tanto, para referirme a los significados de la demostración matemática por parte de profesores de cálculo diferencial de ingeniería, no basta con rastrear una definición que ellos tengan actualmente sobre la demostración, sino, más bien, es necesario considerar la presencia de la demostración en sus trayectorias académicas y profesionales. Como muestra la Figura 2, los significados de la demostración los presento en tres escenarios a través de las experiencias de los participantes como: estudiantes de secundaria, de universidad y como profesores de una facultad de ingeniería.

Figura 2: Trayectoria académica y profesional en la negociación de significados de la demostración matemática.

Para esta sección, tomé como fuente principal el discurso de los participantes expresado en las entrevistas y las autobiografías, de tal manera que me permitiera relacionar las experiencias de significados de la demostración en sus trayectorias académicas y profesionales. Los significados de la demostración que se presentan en este apartado están relacionados con algunos aspectos, como las normas sociales de la clase (memorización y producción de demostraciones), las formas en que les fue enseñada la demostración y prácticas de enseñanza que llevan a cabo como profesores.

La importancia de estudiar las experiencias de los participantes con la demostración matemática en su trayectoria académica y profesional se fundamenta en que el 'significado' se considera como una experiencia de vida que se va constituyendo permanentemente a lo largo de nuestra existencia. La 'experiencia' la entiendo como esas circunstancias o acontecimientos vividos por los participantes y que forman parte del entramado de negociaciones de significados. La experiencia vincula la interacción con el otro en escenarios sociales donde la participación es el medio que convierte dicha experiencia en algo significativo.

Cada uno de los profesores participantes en esta investigación había estado afiliado a diferentes comunidades sociales en la medida en que fueron avanzando en su formación escolar, universitaria y continua, como también en su ejercicio como profesor universitario. Entre esas comunidades estuvieron las conformadas por estudiantes de secundaria, por estudiantes universitarios y por profesores de una facultad de ingeniería.

En esta sección me referiré a las intervenciones de dos de los participantes: Carlos y Jacobo. La escogencia de Carlos y Jacobo obedeció a que cada uno de ellos habló de sus experiencias en las trayectorias académicas y profesionales de manera más detallada, de tal manera que me permitió dar cuenta de que sus significados de la demostración se constituyeron a lo largo de sus trayectorias como estudiantes de educación secundaria, universitaria y como profesionales.

En relación con la educación secundaria, algunos participantes experimentaron la demostración matemática generando significados mediados por normas que orientaban las actividades de la clase. Para la trayectoria de la educación secundaria me referiré a Carlos, quien manifestó en su entrevista haber tratado con demostraciones de teoremas o proposiciones en su etapa escolar. Para Carlos en su formación escolar —aproximadamente a los 15 años de edad— a través de las asignaturas de Geometría Plana y Geometría del Espacio vivenció las demostraciones como parte de la propuesta de formación matemática que le ofrecían los profesores. Carlos expresó lo siguiente:

> Como estudiante, a mí me tocó ver en el bachillerato Geometría Plana y Geometría del Espacio. En ambas asignaturas el profesor planteaba demostraciones y había que comprenderlas porque en los exámenes nos exigían demostraciones. Yo utilizaba letras diferentes a las del libro cuando hacía las demostraciones a los profesores en los exámenes. Eso me hacía sentir mucha satisfacción porque yo les decía a ellos que era para que notaran que había comprendido bien en qué consiste la demostración. (Carlos, entrevista agosto 16 de 2014)

La afirmación de Carlos se puede enmarcar en el contexto de aula de clase de matemáticas, el cual según Planas y Gorgorió (2001) es una “microcultura que genera algunos elementos propios de toda cultura, entre ellos las normas de actuación” (pág. 136). Entre los tipos de normas están las ‘sociales’ que regulan la participación de profesor y estudiantes en las clases y donde el profesor es el encargado de apoyar el establecimiento de normas que aseguren la actividad de los estudiantes (Planas & Gorgorió, 2001; Yackel & Cobb, 1996). En este sentido, algunos estudiantes participan en las reglas dadas por el profesor definiendo formas de participación como respuesta a las exigencias de las normas. Plantear demostraciones y exigirlas en las clases puede considerarse como una norma de la clase de matemáticas dada por el profesor de Carlos y asumida por los estudiantes. El profesor por su autoridad y capacidad de legitimar el conocimiento matemático establece obligaciones en la clase que pueden considerarse como normas (Voigt, 1994).

Como respuesta de esa norma de la clase, Carlos hizo demostraciones utilizando letras diferentes a las que empleaban los libros de texto como una forma de mostrar su comprensión de la demostración. Como lo plantea Yacquel y Cobb (1996), “los individuos desarrollan sus ideas personales a medida que participan en la negociación de normas de la clase, incluyendo aquellas que son específicas de las matemáticas” (pág. 3). La interacción de Carlos con su profesor en el contexto del aula de clase, definida en un proceso de evaluación de conocimientos, generó estrategias o acciones propias de Carlos para mostrar su comprensión de la demostración. Es así como las maneras de hacer y decir en el aula de clase son las que van constituyendo significados.

Un aspecto de importancia de las normas sociales es que ellas hacen parte de la negociación de significados. Siguiendo a Wenger (2001), quien plantea que “negociar el significado supone al mismo tiempo interpretación y acción” (pág. 79), se puede considerar el cambio de letras en la demostración como una interpretación de Carlos a una norma social de la clase. Esa manera de Carlos de presentar demostraciones en los exámenes fue una acción para mostrar su comprensión de la demostración. Él en su negociación de significados de la demostración tuvo una forma de participación expresada en una acción personal como respuesta a una dinámica de la clase de matemáticas.

La forma de responder de Carlos a la propuesta de formación de su profesor planteó una negociación que condujo a un significado de la demostración. Aquí el término ‘negociación’ se entiende en un sentido ampliado por Wenger (2001), esto es, no sólo como un acuerdo entre dos o más personas, sino también como superación de una situación determinada. Una forma que escogen algunos estudiantes para intentar superar el reto de la evaluación del profesor y mostrar que han comprendido la demostración es presentarla utilizando letras diferentes a las del libro de texto.

La respuesta de Carlos a una norma de la clase de matemáticas da indicios de un significado de la demostración, el cual asocio con un 'formato' o un 'contenido' que permite hacer cambios en la notación usada y seguir siendo válido al mantener su estructura lógica. Este significado de la demostración, como un formato que debe ser memorizado, fue resultado de la negociación de significados mediada por la norma de plantear demostraciones en las clases y exigirlas en los exámenes.

Este significado de la demostración sugiere que en su educación secundaria Carlos estaba inmerso en un contexto donde las matemáticas debían ser aceptadas y reproducidas tal como eran recibidas. Es decir, una matemática que estaba centrada en la difusión del conocimiento que debe ser aceptado sumisamente tal como es presentado; donde los estudiantes están alienados, es decir, sin voz ni conciencia propia (Radford L. , 2013).

Como lo plantea Crespo y Ponteville (2004), "si la demostración es considerada como una estructura rígida y no modificable que aparece en los libros, [el profesor] la enseñará como algo acabado y que debe ser memorizado por los alumnos" (pág. 560). El ejercicio de memorización de una demostración permite hacer ciertos ajustes, como el cambio de letras, y en ese caso se está asumiendo la demostración como un formato o un contenido que se debe reproducir en clase. La esencia de la demostración que presentaba Carlos en sus exámenes escolares se mantuvo, pues ella no se alteró al usar letras diferentes a las planteadas en un libro de texto. En este sentido, se puede considerar que la demostración en la educación secundaria es para algunos estudiantes un formato. Como lo señala Ball, Hoyles, Jahnke, y Movshovitz-Hadar (2002), "para muchos alumnos, la demostración es sólo un ritual sin sentido. Esta opinión se ve reforzada si se le pide escribir demostraciones de acuerdo con un cierto patrón o únicamente con símbolos" (pág. 907). Es decir, significados de la demostración asociados con un formato que debe memorizarse representaría para los estudiantes un ritual, así busquen formas diferentes de presentarla como cambiar las letras usadas en los libros de texto.

Un determinado contexto de las matemáticas, las normas sociales de la clase de geometría, el uso de letras diferentes a las del libro de texto para presentar demostraciones y la satisfacción por comprenderlas le permitieron a Carlos contribuir con la configuración de un significado de la demostración en ese momento de su trayectoria académica. El significado de la demostración para Carlos era de un 'formato' o un 'contenido' que permite hacer cambios en la notación usada, respetando la estructura lógica.

Teniendo en cuenta las experiencias de Carlos acerca de la demostración en su educación secundaria, pienso que reducir la enseñanza de la demostración a un ejercicio de memorización es ignorarla como una herramienta clave para la comprensión de conceptos matemáticos. Como lo plantea Ball y otros (2002):

> La demostración es fundamental para las matemáticas y, como tal, debe ser un componente clave de la Educación Matemática. Este énfasis se justifica no sólo porque la demostración está en el corazón de la práctica matemática, sino también porque es una herramienta esencial para la promoción de la comprensión matemática. (pág. 907)

Estos autores están de acuerdo con que la demostración debe ser central en la enseñanza de las matemáticas en todos los grados de la educación secundaria. Una de las razones para tal propósito es que la demostración contribuye con la comprensión de conceptos en el aula de clase.

Con relación a la trayectoria académica de los profesores durante su educación terciaria, el discurso de algunos participantes reveló experiencias claves para la construcción de sus significados de la demostración matemática en ese momento de sus vidas. Esas experiencias estuvieron enmarcadas en normas sociomatemáticas o influenciadas por esquemas de enseñanza de la demostración usada por los formadores. Aquí el término 'formadores' se refiere a los profesores universitarios de los participantes de esta investigación. Para esta trayectoria, correspondiente a la educación terciaria, me referiré a Jacobo y Carlos, pues sus experiencias con la demostración son muy diferentes y permiten contrastarlas más adelante con sus experiencias profesionales.

Jacobo, no tuvo experiencia con demostraciones en su educación secundaria, pero al escuchar a sus colegas exponer sus experiencias en las discusiones de sus autobiografías —en encuentros del programa de formación continua organizado para este estudio— decidió compartir una experiencia de su educación terciaria que involucraba normas en el aula de clase. Como lo señala Yackel y Cobb (1996), la noción de normas sociomatemáticas "es importante porque da a conocer un modo de analizar y hablar sobre los aspectos matemáticos de la actividad de profesores y alumnos en la clase de Matemáticas" (pág. 21). Algunas normas sociomatemáticas en el contexto de clase pueden aportar elementos para conocer lo que ha ocurrido en la construcción de significados de la demostración. Jacobo intervino de la siguiente manera:

> Por lo menos para mí la demostración la vine a conocer en la universidad, pues en el bachillerato no hubo demostraciones, nunca la conocí en el sentido de que a mí nunca se me demostró nada. El teorema de Pitágoras, por ejemplo, simplemente los profesores lo mencionaban, pero no lo demostraban.
>
> […] en una de las asignaturas que cursé en la universidad, las demostraciones mías nunca estaban bien hechas según el profesor, pero yo sigo creyendo que las hacia bien, aunque el profesor me decía que no, que estaban mal. En ese momento crecí, digamos, académicamente, en ese semestre, convencido de que las demostraciones todas tenían una misma estructura. Es decir, yo demostraba un teorema y si mi compañero lo demostraba debía ser igual como yo lo hacía. No veía que el teorema yo lo podía demostrar de diferentes formas. ¿Por qué? porque el profesor me decía a mí: Este paso te lo saltaste. [La demostración] tenía una secuencia y entonces a veces yo no tenía esa secuencia y el profesor decía que estaba malo, porque la secuencia era la que él decía. Eso me fue a mí creando mi concepto de que la demostración, si la hacía [otra persona] yo la debía tener igual […], y es que, si uno veía a los demás compañeros y la mía no tenía todos esos pasos, entonces estaba malo. (Jacobo, autobiografía mayo 10 de 2014)

En lo que dijo Jacobo, la posición del formador —de exigir demostraciones como una secuencia de pasos lógicos bajo un orden preestablecido e igual para todos los estudiantes— instauró una norma que orientó una construcción de significados de la demostración. Lo expresado por Jacobo sugiere que él en un momento de su formación universitaria construyó una idea de la demostración siguiendo una ruta de ensayo y error en la que sus propuestas de demostraciones debían ser iguales no sólo a las del profesor, sino a las de sus compañeros.

La negociación de significados estuvo relacionada con una norma sociomatemática, asociada con el trabajo de los estudiantes en relación con el saber matemático, que implicaba que Jacobo llegara a estar de acuerdo con una secuencia de pasos para la demostración propuesta por su formador. De acuerdo con Planas y Gorgorió (2001) "la norma sociomatemática es el conjunto de explícitos o implícitos en el aula de matemáticas que influencian o regulan el desarrollo y la interpretación de la práctica matemática" (pág. 137). Aquí la práctica de demostrar estuvo regulada por la norma de que sólo había una forma de demostrar una proposición.

Aunque la idea de que una proposición no puede demostrarse de diferentes formas no es una afirmación válida, se tiene que, en la teoría de la práctica social, tal idea es un significado que es producto de una negociación. Esa idea de una demostración única para una proposición fue reforzada en los momentos en que el formador a través de sus valoraciones a las propuestas de la demostración de Jacobo le indicaba cuáles de esos pasos lógicos deductivos no había realizado. Al comparar Jacobo sus propuestas de la demostración con las de sus compañeros, entendía que necesariamente debían ser iguales. Aquí la validación del conocimiento matemático compartido por los compañeros de Jacobo fue dada por una norma sociomatemática asociada con el trabajo de los estudiantes en relación con el saber matemático.

La experiencia con una norma sociomatemática de la clase que estableció que todas las demostraciones de una proposición deberían tener una misma estructura, incidió en la construcción de un significado de la demostración relacionado con el hecho de que no existen formas diferentes para demostrar una proposición. Un aspecto importante de las normas sociomatemáticas para la negociación de significados consiste en que ellas hacen parte del repertorio compartido de grupos conformados por estudiantes y profesores en el aula de clase. El repertorio compartido es un componente del proceso de negociación, e incluye las maneras de hacer y decir en una comunidad (Wenger, 2001). El repertorio compartido puede establecer formas de materialización de un significado. En el caso de Jacobo durante un momento de su educación terciaria la materialización de su experiencia con la demostración matemática se presentó al realizar demostraciones como un formato preestablecido.

La negociación de significado de la demostración matemática durante las clases de Jacobo estuvo influenciada por una norma sociomatemática asociada con el trabajo del estudiante y el saber matemático. En la negociación de significados de la demostración que a continuación argumento se distinguió una relación poco armoniosa de Jacobo con su formador en la práctica de demostrar.

El discurso de Jacobo sugiere un contexto para la negociación de significados de la demostración que involucró varios aspectos en el aula de clase, como una práctica de demostrar rigurosa que seguía parámetros estandarizados y una relación de confrontación entre el estudiante y el formador. Con esas condiciones de negociación se construyó un significado de la demostración. En el marco de la teoría de la práctica social la negociación no responde a una imagen idealizada de cómo debería ser una negociación de significados; más bien responde a las relaciones que surgen del compromiso con una práctica determinada. El compromiso de Jacobo con la práctica de demostrar condujo a que las relaciones con su profesor fueran, en algunos momentos, de confrontación con las formas de demostrar una proposición. El discurso de Jacobo sugiere que en la negociación de significados hubo una relación con su formador un poco conflictiva en los momentos de verificación de sus propuestas de la demostración. Según Wenger

(2001), en la negociación de significados la participación "puede suponer todo tipo de relaciones: conflictivas o armoniosas, íntimas o políticas, competitivas o colaboradoras" (pág. 82).

De acuerdo con la intervención de Jacobo, su participación en una asignatura que cursó en la universidad deja entrever el desacuerdo entre él y su formador, hasta el punto que él todavía creía que sus demostraciones eran correctas, a pesar de que su formador siempre le dijo que no. La participación de Jacobo incluyó la interacción con sus compañeros y el formador al comparar sus producciones de demostraciones. Al final de la intervención de Jacobo, se puede inferir que hubo una alineación de él con la tendencia que presentaba el profesor para hacer demostraciones. La alineación para Wenger (2001):

> Puede ser un proceso de coordinación basado en una interpretación literal de unas instrucciones y, en consecuencia, puede que no abra ningún panorama en las perspectivas que conecta. […] Puede ser una confrontación de intereses contrapuestos que deja a algunas personas con todo el poder y a otras sin poder alguno. (pág. 223)

Jacobo terminó incluyendo las instrucciones de su formador para realizar demostraciones. En ese momento de su trayectoria académica, Jacobo se alineó con las orientaciones de su profesor e hizo parte del grupo de estudiantes que compartieron el mismo derrotero para hacer demostraciones coordinadas entre todos.

El significado de la demostración que fue negociado por Jacobo en ese momento de su formación universitaria estuvo en correspondencia con un significado formalista de las matemáticas, en el que se resaltó la demostración como una sucesión finita de proposiciones bajo una secuencia de pasos lógicos. Ese significado formal de la demostración puede relacionarse con un 'producto acabado', donde el rol que toma la demostración es de verificación del enunciado de un teorema, y se asocia con "un polo formal en el cual la demostración matemática se caracteriza por su forma, como un texto que respeta algunas reglas precisas" (Arsac, 2007, pág. 27).

Por otra parte, para Carlos, su significado de la demostración matemática siguió enriqueciéndose con otros matices de acuerdo con su experiencia en la trayectoria académica de la educación terciaria. Un aspecto que marcó su experiencia en la educación terciaria fue la influencia de los formadores, a través del uso de un esquema de enseñanza para la demostración. Carlos expresó lo siguiente:

> Quizás el profesor que más influyó, porque todos tratábamos de imitarlo, era el profesor Francisco, quien era un profesor que detallaba mucho, muy exigente en las demostraciones y escribía todo en el tablero. Casi todos imitamos ese modelo de empezar la clase con: definición, teorema, demostración del teorema, y mirar el tablero era como ver un libro. El tipo [profesor] detallaba todas las cosas y también era muy exigente cuando preguntaba, nos mandaba siempre al tablero, incluso a repetir demostraciones, pero preguntándonos cosas claves para ver si la demostración se había comprendido. (Carlos, entrevista agosto 16 de 2014)

El discurso de Carlos puede ser considerado en un contexto de aula de clase bajo la presencia de una forma de enseñanza de la demostración y una interacción con su formador marcada por repetir demostraciones y cuestionar asuntos de ella. La forma de enseñanza de la demostración estuvo dada por el esquema *definición – teorema – demostración.* Este esquema reconocido coloquialmente como formato DTP (por sus siglas en inglés de *definition – theorem – proof*) es una forma 'tradicional' de enseñanza en los cursos de matemáticas universitarias

(Davis & Hersh, 1981; Selden, 2012; Weber, 2004). El esquema 'tradicional' *definición – teorema – demostración* es descrito por Weber (2004), con el siguiente conjunto de características:

> La instrucción se compone en gran parte del profesor dando conferencias y los estudiantes tomando notas pasivamente; el material es presentado en una secuencia estrictamente lógica, se le da prioridad a la naturaleza lógica del material dado sobre su naturaleza intuitiva (por ejemplo, las definiciones formales, demostraciones rigurosas) y el objetivo principal del curso es que los estudiantes sean capaces de producir demostraciones rigurosas sobre los conceptos matemáticos dados. (pág. 116)

En el discurso de Carlos se encuentra una correspondencia con la descripción del esquema *definición – teorema – demostración* dada por Weber (2004). La propuesta del formador de usar dicho esquema fue tomada por Carlos como un referente para imitar en la enseñanza de la demostración.

La intervención de Carlos permite identificar la importancia del esquema de enseñanza *definición – teorema – demostración* en la construcción de su significado de la demostración. El hecho de que el formador escribiera detalladamente las demostraciones en el tablero, hasta el punto de que parecían un libro, sugiere que tal detalle guardaba la estructura lógica de las demostraciones presentes en los libros de texto. De acuerdo con la descripción de Weber (2004) del esquema *definición – teorema – demostración* y por la manera como Carlos manifestó que el formador presentó la demostración en el aula de clase, se sugiere que la demostración estuvo relacionada con un significado desde la perspectiva formalista de las matemáticas. Esta perspectiva formalista está caracterizada por elementos como "la deducción, el rigor, la abstracción y la axiomática" (García G. , 1996, pág. 197). Estos elementos harían parte del significado de la demostración construido por Carlos.

El discurso de Carlos además de permitir identificar el uso del esquema *definición – teorema – demostración* en la construcción del significado de demostración sugiere una interacción entre él y su formador como aspectos de la negociación de significados. En esa interacción el profesor brindaba la exposición de demostraciones y preguntaba sobre ella, mientras que Carlos tomaba notas de lo escrito en el tablero y respondía repitiendo las demostraciones que el profesor le proponía. La negociación de significados estuvo acompañada por un proceso gradual de construcción de un significado de la demostración que incluyó acciones como las de 'copiar', 'repetir', 'retener' y 'devolver' las demostraciones del mismo modo que las 'recibe' por parte del formador.

La construcción del significado de la demostración para Carlos inició en su educación secundaria y continuó en su educación terciaria. Los significados de la demostración construidos durante la trayectoria académica fueron resultado de negociaciones en un contexto de aula de clase que incluyeron experiencias con normas sociales y con formas de enseñanza de la demostración.

Un significado de la demostración tanto para Carlos como para Jacobo negociado en su trayectoria de educación terciaria estuvo exclusivamente asociado con la perspectiva formalista que señala a la demostración como "una sucesión finita de proposiciones que empieza con un conjunto de axiomas y que a través de pasos lógicamente válidos, llamados reglas de inferencia, arriban a una conclusión" (Griffiths, 2000, pág. 2).

Hasta el momento he discutido la construcción de significados de la demostración en la trayectoria académica de algunos participantes. Se ha visto que los significados de la demostración se han negociado en contextos de aula de clases a través de la experiencia de los participantes cuando fueron estudiantes de educación secundaria o terciaria. A continuación, vinculo a esta discusión experiencias de los participantes en la trayectoria profesional que hacen parte de la negociación de sus significados de la demostración matemática.

La negociación de significados de la demostración en la trayectoria profesional de los participantes estuvo asociada con experiencias en la práctica de enseñar la demostración. Ya como profesores de cálculo diferencial en una facultad de ingeniería, Carlos y Jacobo, asociaron la enseñanza de la demostración matemática con experiencias vivenciadas en sus trayectorias académicas. Algunas experiencias de los participantes indican que la negociación de significados de la demostración en la formación escolar y universitaria continuó en la trayectoria profesional como experiencias en la práctica de la enseñanza de la demostración. Los significados de la demostración construidos en la trayectoria académica fueron recuperados o ampliados en experiencias de enseñanza durante la trayectoria profesional.

En una entrevista Carlos manifestó algunos aspectos de su quehacer como profesor que se pueden relacionar con experiencias de su trayectoria académica. Él se refirió a la forma como presentaba las demostraciones en cursos de cálculo diferencial para programas de ingeniería de la siguiente manera:

> Generalmente utilizo el esquema: la definición, que se comprenda bien; luego, el enunciado de algún teorema y, si es posible y hay tiempo, hacerle uno o dos casos

particulares para que los estudiantes tengan una idea de cuál es el resultado que se quiere tener; y luego, hacer una demostración formal. (Carlos, entrevista noviembre 16 de 2014)

En lo expresado por Carlos se encuentra que en su experiencia profesional el esquema que planteó para presentar las demostraciones en sus clases de cálculo diferencial obedece al significado de la demostración que negoció en su trayectoria como estudiante en su formación universitaria. Es decir, él utilizó en su quehacer docente el esquema *definición – teorema – demostración* al que fue expuesto en su formación inicial.

Son varios los estudios donde se afirma que la forma como los profesores enseñan las matemáticas está influenciada por la manera como fueron enseñados (Flores & Peñas, 2003; Moreno & Azcárate, 2003; Zabalza, Ser profesor universitario hoy, 2009). Autores como Moreno y Azcárate (2003), resaltan el hecho de que los profesores universitarios del área de matemáticas repiten esquemas de aquellos profesores que les enseñaron en su época de estudiantes:

> En el caso de los profesores de matemáticas de universidad, el conocimiento que tienen sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje es fruto de la experiencia docente y del efecto de la socialización que les hace repetir los esquemas de aquellos profesores que les enseñaron en su época de estudiantes. (pág. 267)

Carlos, además de repetir un esquema para la enseñanza de la demostración, planteó la presentación de ejemplos que ilustren el enunciado del teorema, los cuales serían opcionales dependiendo del tiempo para el desarrollo de la clase. La inclusión que hace Carlos de presentar ejemplos en el esquema *definición – teorema – demostración* puede considerarse como resultado de su experiencia docente, lo cual representaría una 'alineación' del esquema en su práctica docente, de acuerdo con su experiencia como profesor de cálculo diferencial en programas de ingeniería.

La forma de enseñanza para la demostración en la trayectoria profesional de los profesores está relacionada con un significado de la demostración que ha sido construido desde su formación escolar y universitaria. Carlos describió lo que consideraba como demostración expresando que: "Normalmente la demostración de un teorema casi siempre consiste en tomar la definición y utilizarla, y mediante algunos pasos matemáticos llegar a otro resultado" (Carlos, entrevista noviembre 16 de 2014). La opinión de Carlos sugiere un significado de la demostración desde una perspectiva formalista de las matemáticas, esta vez presentado como profesor de cálculo diferencial para ingeniería. Esto pone en evidencia que uno de los significados de la demostración construido en la negociación de significados en la trayectoria académica de Carlos, en este caso la demostración desde un sentido formal, permaneció en su trayectoria profesional. Como lo plantea Wenger (2001), la negociación de significados "es un proceso de recuperación, con el potencial constante de continuar, redescubrir o reproducir lo antiguo en lo nuevo" (pág. 126). Es así como esos significados de la demostración, construidos en la trayectoria académica de Carlos, se 'recuperaron' en la trayectoria profesional 'reproduciéndose' o 'continuando' en la práctica de enseñanza.

En contraste con la experiencia de Carlos se encuentra la de Jacobo, quien intentó superar un significado de la demostración construido en su formación universitaria a través de su experiencia con la demostración como profesor de cálculo diferencial. Jacobo en la discusión de su autobiografía durante el programa de formación continua expresó lo siguiente:

Ya como profesor de la universidad, las demostraciones que les presento a los muchachos son pocas. Procuro que mis estudiantes no pasen por lo que yo viví en mi carrera. [A los estudiantes] les dejo usar varios libros de cálculo para que comparen demostraciones. ¿Para qué? para que vean que se pueden presentar de diferentes formas y que eso depende del autor del libro, aunque las diferencias sean pocas. A veces yo hago mis demostraciones en el tablero de manera diferente a la de algunos autores de los libros de cálculo, detallando más conceptos o utilizando gráficas. Ellos [los estudiantes] ven que uno puede escribir una demostración y usar cosas diferentes a las de otras personas. Eso sí, siempre respetando el rigor que nos da la lógica. (Jacobo, autobiografía mayo 10 de 2014).

La opinión de Jacobo sugiere que la experiencia de significado de la demostración vivenciada en un momento de su trayectoria académica —y relacionada con la idea de que una proposición no puede demostrarse de diferentes formas— tuvo un nuevo planteamiento debido a otras circunstancias de negociación de significados en el escenario profesional. Como lo plantea Wenger (2001), la negociación de significados "siempre genera nuevas circunstancias para posteriores negociaciones y significados" (pág. 79). La circunstancia de enseñar la demostración en el contexto de la práctica profesional, hizo que Jacobo planteara acciones para él y para sus estudiantes, como elaborar demostraciones propias diferentes a otras presentaciones y permitir a sus estudiantes revisar varias demostraciones de un mismo teorema en diferentes libros de texto de cálculo. Con estas acciones, Jacobo, buscaba superar su significado de la demostración construido en su trayectoria académica. A diferencia de Carlos en su trayectoria profesional, el significado de la demostración construido por Jacobo no fue reproducido, pero sí transformado, pues le sirvió para plantear sus propias estrategias en clase de tal manera que no quedara duda de que la demostración de un teorema o proposición puede escribirse no necesariamente igual a una secuencia dada por algún referente (libros de texto o profesores).

Siguiendo a Wenger (2001), “vivir es un proceso constante de negociación de significado” (pág. 77). En este sentido, lo que hacemos puede hacer referencia a lo que hayamos hecho, pero siempre generamos experiencias que vuelven a negociar la historia del significado anterior. Es decir, algunos profesores de cálculo diferencial para ingeniería retomaron la historia de un significado de la demostración construido en una trayectoria académica y en un nuevo contexto lo reinterpretaron y modificaron para usarlo en su trayectoria profesional como profesor universitario.

De acuerdo con las experiencias de significado de la demostración durante las trayectorias académicas y profesionales de los profesores reportadas en esta sección, coincido con Lerman (2001) su planteamiento de que las implicaciones de las experiencias entre los sujetos al interior de una comunidad son traducidas en las transformaciones que los sujetos viven durante su permanencia en ellas y que se mantienen una vez estén fuera de esas comunidades. Es así como las experiencias de algunos profesores vividas con estudiantes y profesores en cada grupo social a los cuales pertenecieron durante su trayectoria académica influyeron en sus significados de la demostración, de tal manera que dicha influencia está presente en su trayectoria profesional.

A manera de conclusión, se puede afirmar que los significados de la demostración matemática que exhiben hoy algunos profesores de cálculo diferencial para ingeniería son consecuencia de la negociación de significados de la demostración en sus trayectorias académicas y profesionales. Sin embargo, para los profesores sus significados de la demostración seguirán constituyéndose en la medida en que ellos sigan teniendo experiencias en su trayectoria profesional, pues la negociación de significados "es una interacción continua, de logro gradual y de un proceso de toma y daca" (Wenger, 2001, pág. 78).

Para Carlos y Jacobo fue tan fuerte la influencia de la educación secundaria y terciaria en la negociación de significados de la demostración que cuando llegaron a ser profesores en su práctica de enseñanza se mantuvieron esquemas y significados de la demostración o sirvió para modificar algunos de esos significados. En ocasiones las adaptaciones o cambios que se revelaron sobre significados de la demostración en la trayectoria profesional no son tan distantes de la forma como los participantes fueron enseñados en su época de estudiantes. Cuando se llega a ser profesores de cálculo diferencial en una facultad de ingeniería los recursos que se colocan en juego para la enseñanza de la demostración son las experiencias en la educación secundaria y terciaria, junto con experiencias ganadas en la práctica docente.

La demostración matemática en el escenario del ejercicio docente de Carlos y Jacobo me genera una preocupación sobre los significados de la demostración de los profesores en cursos de cálculo diferencial para programas de ingeniería. Con base en la historia de Carlos y Jacobo en lo referente a sus procesos de negociación de significados de la demostración se podría pensar que es natural para ellos la forma como están llevando al aula de clase la demostración matemática y no representa ningún tipo de cuestionamiento al respecto.

La negociación de significados de la demostración en la trayectoria académica y profesional de Carlos y Jacobo puede coincidir con la de otros profesores del área de las matemáticas que trabajen en facultades de ingeniería. Por lo tanto, es importante seguir indagando con los profesores sobre significados de la demostración matemática relacionados con aspectos como el rol que debería tener la demostración en clases de cálculo diferencial, o el grado de abstracción con la cual se podría presentar la demostración en esos cursos y su relación con la formación de ingenieros. En la siguiente sección se analizarán significados de la demostración matemática relacionados con la formación de ingenieros.

Programa de Formación Continua: Un Escenario de Negociación de Significados de la Demostración Matemática

Para esta sección muestro que el programa de formación continua —desarrollado para esta investigación y enmarcado en las dimensiones de una comunidad de práctica— se configuró como un escenario para el aprendizaje sobre la demostración matemática entre profesores de cálculo diferencial para ingeniería. De acuerdo con Wenger (2001), las dimensiones que dan coherencia a una comunidad de práctica son: el *compromiso mutuo*, la *empresa conjunta* y el *repertorio compartido*. Entiendo el *compromiso mutuo* como una relación de conexión entre los miembros de la comunidad de práctica, las cuales mediante una participación mutua negocian significados de su interés; de tal manera que cada miembro comparte su conocimiento con los otros y recibe el de los demás construyendo conocimientos. La *empresa conjunta* se refiere a la respuesta negociada a los diferentes intereses de los miembros de la comunidad. El *repertorio compartido* son los recursos (rutinas, conceptos, palabras, documentos, herramientas, estilos para resolver situaciones, …) que se crean o adoptan conjuntamente en el transcurso del logro de la empresa.

Para Hernández y Flores (2013), las comunidades de práctica son una oportunidad de desarrollo para los docentes universitarios y están constituidas por "profesores que aprenden en su actividad, negocian significados sobre la acción docente, generan oportunidades de desarrollo profesional y mejoran la enseñanza en contextos particulares" (pág. 106). En este sentido, el programa de formación se configura como un escenario de aprendizaje, es decir, para la negociación de significados de la demostración para profesores de cálculo diferencial en ingeniería.

La negociación de significados de la demostración llevada a cabo por los profesores no termina en la formación universitaria, sino que sigue generando significados que se confirman o evolucionan a partir de nuevas participaciones en escenarios profesionales. El programa de formación, como un escenario profesional, permitió generar entre los profesores cambios en sus significados de la demostración matemática relacionados con su práctica docente en un curso de cálculo diferencial para ingenieros.

En la actualidad, la formación de profesores ha estado cuestionada por algunos aspectos que la caracterizan con una racionalidad técnica o práctica, de tal manera que otros tipos de pensamiento formativo se están imponiendo (Eléxpuru, Martínez, Villardón, & Yániz, 2009; Imbernón, 2007; Kane, Sandretto, & Heath, 2004; Rodrigues, 2013). Aspectos de una formación de profesores, como el protagonismo de un agente externo —quien con la figura de 'experto' orienta unilateralmente el proceso de formación— o programas de formación que promueven una reflexión de la práctica, pero en solitario, son materia de cuestionamiento. Para Bozu e Imbernón (2009):

> Si tradicionalmente la formación del profesorado se ha visto envuelta en prácticas institucionales deterministas y uniformes, es decir, en una racionalidad técnica que promueve un modelo de formación aplicacionista normativo y de entrenamiento mediante cursos y seminarios estándar, en la actualidad, permite que se cuestionen una serie de aspectos o elementos nuevos que dan lugar a un nuevo pensamiento formativo. (pág. 4)

Estos autores cuestionan el tipo de formación del profesorado universitario orientado con una racionalidad técnica. Ellos, más bien señalan la importancia y necesidad de la identificación de comunidades de práctica en la universidad como “una fuente distinta de tener acceso al conocimiento, construirlo y difundirlo y como alternativa posible en el desarrollo de los programas de formación y desarrollo profesional del profesorado” (Bozu e Imbernón, 2009, pág. 2)

El programa de formación considerado para este estudio lo concibo dentro de una racionalidad hermenéutica-reflexiva, es decir, asumo al profesor como sujeto crítico y protagonista de su propia formación, de tal manera que se tuvieron en cuenta sus experiencias en la práctica docente en procura de generar reflexiones y transformaciones de su práctica de enseñanza de la demostración matemática. Durante el programa de formación bajo este tipo de racionalidad el profesor no está sólo, sino que hace parte de una comunidad y la construcción de significados es resultado de su participación en las actividades definidas en ella.

El programa de formación desarrolló varias actividades propuestas por los profesores o acordadas entre ellos. En esta sección presento algunas de las intervenciones de los profesores como respuesta a su participación en diálogos y debates en el desarrollo de algunas actividades. A través de las intervenciones de los profesores rastreé indicios de significados de la demostración matemática para mostrar que el programa de formación se constituyó en un escenario de aprendizaje. Esos significados son interpretados atendiendo al marco teórico especialmente en lo referente a la demostración y a la teoría de la práctica social. De igual manera, intenté indagar aspectos del programa de formación —relacionados con la teoría de la práctica social— que muestren al programa como un escenario de aprendizaje, en particular como un espacio para la negociación de significados de la demostración matemática. Entre esos aspectos estuvieron: la interacción entre profesores, el liderazgo compartido, la reflexión acerca de la práctica, acuerdos, desacuerdos, confusiones, compromiso con la práctica, producción colectiva y transformación de significados.

Menciono cuatro (4) actividades con presentaciones de demostraciones en varios contextos que incluían referentes históricos, uso de software, libros de texto de cálculo y clasificaciones de demostraciones según su grado de abstracción. El cálculo diferencial tomó un papel importante en la contextualización de experiencias, actividades, debates y producciones de los profesores. Para cada actividad indico brevemente en qué consistía y me centro en las intervenciones de los profesores.

En este estudio asumo el aprendizaje como un proceso de participación en la realización y contribución a una práctica llevada a cabo en una comunidad. Es así como aprender acerca de la demostración matemática en el programa de formación es visto como un proceso de participación en la construcción de significados de la demostración. En este caso el aprendizaje incluye las reflexiones acerca de la práctica de la demostración y de su enseñanza y se constituye, además de la participación, con la materialización de experiencias de los profesores durante el programa de formación. Para la teoría de la práctica social de Wenger (2001) el aprendizaje integra varios componentes, como: significado, práctica, comunidad e identidad. Para este estudio centro mi atención en lo referente al significado y eventualmente a algunos de los otros componentes.

La participación en una comunidad de práctica puede ser periférica o plena a través de un proceso denominado por Lave y Wenger (1991) ‘participación periférica legítima’, el cual entiendo como la evolución de la participación de los profesores a medida en que avanzan colectivamente en el desarrollo de las actividades. Hubo algunos profesores que se mantuvieron al margen de varios debates, mientras otros avanzaron al centro de discusiones participando activa y protagónicamente. Esto no quiere decir que los profesores que se mantuvieron en la zona de contorno no hayan aprendido durante el programa de formación, sino que estuvieron menos visibles que los demás. Entre los profesores cuyas intervenciones mostraron elementos importantes en su discurso para apoyar la descripción de un aprendizaje acerca de la demostración matemática se encontraron: Nicolás, Carlos, Jacobo, Juan, María, Eliécer y Aníbal. En consecuencia, en esta sección relaciono varios comentarios con esos profesores, sin descuidar que sus intervenciones eran en el marco de interacciones con sus compañeros.

Entre las finalidades de participación de los profesores identificadas en el programa de formación estuvieron: identificar qué presentaciones eran o no una demostración, relacionar su experiencia de la práctica de la demostración y su enseñanza con las actividades del programa, reflexionar sobre su práctica docente o acerca de significados de la demostración propios o de sus compañeros y producir colectivamente demostraciones no formales para un curso de cálculo diferencial en ingeniería. El programa de formación continua trató asuntos relacionados con la demostración matemática como parte del contexto de negociación de sus significados. Entre esos asuntos estuvieron: las demostraciones visuales, el uso de software y el grado de abstracción de las demostraciones.

Inicios de interacción, liderazgo compartido y reflexión.

A continuación, presento la descripción de algunas intervenciones de profesores durante una de las actividades del programa de formación que muestran inicios de interacción, liderazgo compartido y reflexión acerca de la práctica. En los intercambios comunicativos entre profesores se evidenció que los significados de la demostración matemática estuvieron asociados con la práctica de los participantes acerca de la demostración y su enseñanza, al igual que se encontraron indicios de posiciones radicales de profesores sobre significados formales de la demostración y reflexiones sobre el paradigma de formación matemática recibida en sus formaciones académicas. Durante el desarrollo de esta actividad se resalta que el programa de formación empezaba a propiciar la interacción entre los profesores, el liderazgo compartido y la reflexión entre los profesores acerca de su práctica docente, como aspectos claves de la formación del profesorado que conducen a un aprendizaje.

La actividad del programa de formación a la que me refiero (Actividad No. 3) consistió en debatir sobre tres presentaciones diferentes de la demostración del teorema: La derivada de la función seno es la función coseno. La participación de los profesores se centró inicialmente en decidir cuál de esas tres presentaciones respondía a lo que ellos consideraban una demostración. Mediante la participación de los profesores empecé a indagar qué tipo de relaciones o interacciones se daban entre ellos. Tuve en cuenta que se podían explorar significados iniciales de la demostración que poseían los profesores y qué aspectos de esos significados empezaban a entrar en negociación.

La primera presentación de la demostración del teorema, como se muestra en la Figura 3, se enmarcó en un contexto de uso de software (GeoGebra) para mostrar que la gráfica de la función derivada del seno es la función coseno. En esa presentación se utilizó la interpretación geométrica del teorema. Se mostró que el barrido de un punto B dibujaba la gráfica de la función coseno; la abscisa del punto B correspondía a la abscisa de un punto A sobre la curva de la función seno y la ordenada de B coincidía con la pendiente de la recta tangente en el punto A.

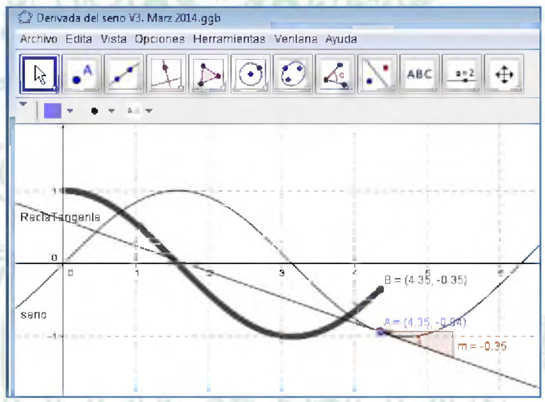


Figura 3: Representación en GeoGebra para la demostración del teorema: la derivada de la función seno es la función coseno.

La segunda presentación fue tomada de un contexto de demostraciones con métodos visuales registrados en la historia de las matemáticas de la India del siglo XII (Bag, 1979). La tercera presentación fue una demostración formal en el contexto de demostraciones dadas en libros de texto de cálculo que utilizaba definiciones y teoremas relacionados con el concepto de límite (Larson & Edwards, 2010). En el Anexo 1 presento los detalles del contenido de la Actividad No. 3.

Para la segunda y tercera presentación los profesores no tuvieron inconveniente en afirmar que eran demostraciones. Sin embargo, la primera presentación generó una serie de opiniones entre ellos sobre si era o no una demostración matemática. La segunda y la tercera presentación tuvieron una estructura formal apoyada en definiciones o teoremas siguiendo cierta estructura lógica. Pero, la primera presentación carecía de una estructura formal y usaba herramientas geométricas simuladas en un software.

En relación con la primera y tercera presentación se dieron algunos debates entre los profesores. En el siguiente diálogo entre Carlos y Nicolás se evidencia la intención de los profesores en relacionar sus interpretaciones de las presentaciones de la actividad con la práctica de la demostración y su enseñanza. El diálogo entre Carlos y Nicolás fue el siguiente:

Carlos: La primera presentación es casi que inductiva y eso se puede hacer ahora porque tenemos software. Yo diría que lo máximo sería en un salón de clase poner a los estudiantes a trabajar un poco de manera inductiva con un software y preguntarles qué conclusión sacas. Es posible que alguno diga que la derivada del seno me está coincidiendo con el coseno. Bueno, ahora vamos a demostrar eso y hacemos la tercera presentación. Eso sería lo máximo, desafortunadamente nosotros vivimos contra el tiempo y a veces incluso omitimos algunas cosas.

Nicolás: Usted habló que “vamos a demostrar eso”, o sea que cuando se utiliza el software en la primera presentación no se hace demostración formal.

Carlos: Desde mi punto de vista no, pero es un punto de vista mío. Hay unas personas que dicen que sí, hay gente que está demostrando con software. […] Como decía anteriormente el software de matemáticas han vuelto las matemáticas ya no una ciencia formal deductiva sino que la han hecho una ciencia experimental o dinámica.

Nicolás: Recogiendo el comentario del profesor Carlos lo ideal sería tomar un software y a partir de ahí hacer la demostración. Esa sería la parte ideal.

(Carlos, Nicolás, encuentro febrero 22 de 2014)

En el intercambio comunicativo entre Carlos y Nicolás se percibe que la posición de Carlos —en este momento del programa de formación— es no aceptar el uso de software para realizar demostraciones. Además, tanto Carlos como Nicolás relacionaron la primera y tercera presentación con escenarios de enseñanza, proponiendo formas de utilizarla en el aula de clase. En el programa de formación ya se empezaban a dar conversaciones que reconocían la opinión del otro, dando importancia a los conocimientos y experiencias de los colegas.

Al seguir el debate de los profesores sobre las presentaciones de demostraciones dadas en la actividad, Jacobo retomó lo planteado por Carlos y Nicolás al manifestar su preferencia por el uso de dos de las presentaciones en el aula de clase, pero varió el orden de usarlas cuando expresó: "Yo preferiría, por lo menos, aplicar la tercera presentación [formal] y la complemento con la primera" (Jacobo, encuentro febrero 22 de 2014). Sin embargo, más adelante él mismo cuestionó el hecho de cómo sería mejor demostrarles a los estudiantes de ingeniería el teorema sobre la derivada del seno es coseno y con ello cambió de opinión al considerar la posibilidad de escoger sólo una de las tres presentaciones y no necesariamente usar la demostración formal. El diálogo que él propició con algunos compañeros, tomando el liderazgo de la discusión, fue el siguiente:

Jacobo: Entre más abstracta, una demostración es más complicada. De esas tres presentaciones para nuestros estudiantes de ingeniería, ¿cómo sería mejor demostrarle de que la derivada del seno es coseno? Pienso que ésta [señala la tercera presentación].

Aníbal: La tercera, claro.

Jacobo: Si tú le explicas las tres presentaciones, ¿cuál es la que menos el estudiante te va entender?

María: ¡La segunda! [Al unísono]

Aníbal: ¡La segunda! [Al unísono]

Luis: ¡La segunda! [Al unísono]

Nicolás: ¡La segunda! [Al unísono]

Jacobo: Es la que menos entienden, por eso es que yo digo que la segunda es la más abstracta.

Juan: Jacobo es porque hay una cantidad de elementos que ellos desconocen.

Aníbal: Porque el estudiante no maneja conceptos de geometría.

Jacobo: ¡Por eso! Yo opino que refiriéndonos a los alumnos que tenemos, la más complicada para entender es la segunda. Compañeros, si yo lo que quiero es que el muchacho me entienda cierto concepto, puede haber varias demostraciones, pero uno escoge una demostración que sirva para eso. Es decir, lo importante es que a él le quede claro el concepto. De estas tres presentaciones cuál es la demostración más rigurosa o la menos rigurosa, a mí eso no me interesaría en este momento, sino cuál de estas tres presentaciones es la que a él le permite mejor entender el

> concepto, y esa sería la que yo tomaría, aunque de pronto matemáticamente no sea una demostración rigurosa, pero el muchacho la entendería.
>
> (Jacobo, Aníbal, Carlos, María, Luis, Nicolás, Juan, encuentro febrero 22 de 2014)

La interacción de Jacobo con otros compañeros motivó su intención de señalar el hecho de que si bien hay varias formas de demostraciones de un teorema no hay necesidad de tomar la más rigurosa de ellas. Jacobo resaltó la comprensión de conceptos matemáticos en la enseñanza de la demostración, para lo cual consideró que era posible escoger alguna de las tres presentaciones de la actividad sin importar su grado de rigurosidad. Él dejo entrever que para demostrarles a estudiantes de ingeniería el Teorema la derivada de la función seno es la función coseno, se podrían escoger argumentaciones visuales, como la que corresponde a la primera presentación. Jacobo tomó distancia de la demostración formal como única idea posible para presentar demostraciones en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Esta intervención de Jacobo sugiere que en el programa de formación se empezaba a ver la demostración de una manera flexible. Al tomar el liderazgo de la conversación en la interacción con sus compañeros, Jacobo, no se limitó a resaltar la demostración formal, sino consideró la posibilidad de otras opciones diferentes a la formal.

Un aspecto que se resalta en la interacción entre los profesores es el liderazgo compartido. La conducción de las conversaciones fue llevada por cualquiera de los profesores, como en este diálogo en el cual Jacobo lideró la conversación. De acuerdo con Hernández y Flores (2013):

> La comunidad funciona con un liderazgo compartido. La revisión y reflexión de los saberes y la experiencia de cualquier miembro dan lugar a comprensiones más complejas que se traducen en acción y en desarrollo del grupo. Todos aportan conocimiento a la comunidad [...]. (pág. 103)

Para lograr la empresa conjunta de reflexionar acerca de la demostración matemática y su enseñanza el programa de formación propició relaciones igualitarias entre sus participantes. El aprendizaje en una comunidad de práctica se da a través de la participación y el liderazgo compartido (Bozu e Imbernón, 2009). En una comunidad de práctica cada individuo se ubica de manera flexible y dinámica de acuerdo con su participación en las actividades, de tal manera que se evitan las jerarquías entre los miembros (Wenger, 2001; Wenger, McDermott, & Snyder, 2002).

Al enfrentar las diferentes presentaciones del teorema: La derivada de la función seno es la función coseno, propuestas en la actividad, se evidenciaron intervenciones que muestran reflexiones de los profesores acerca de su formación matemática. Tales son los casos de Carlos y Nicolás que manifestaron lo siguiente:

Carlos: Es que nosotros vivimos nuestro momento en las matemáticas y estamos metidos dentro del formalismo, pero es posible que ya tengamos que dar un saltico, no a perder el formalismo; la demostración es analítica y hay que hacerla. El estudiante debe ver la tercera presentación, pero si logramos que vea la tercera presentación, después de apoyarnos en la primera presentación, los resultados son mucho mejores.

Nicolás: De pronto estamos parqueados dentro de nuestras creencias para hacer demostraciones y de pronto cierto paradigma donde se encuentra una computadora, que grafica, que puede animar, que puede hacer cosas, no la aceptamos, pues tocaría hacer ese proceso.

(Carlos, Nicolás, encuentro marzo 8 de 2014)

Carlos se refiere a la formación matemática enmarcada en el formalismo —que él y otros docentes vivieron en algún momento de su formación académica— y que, en su intervención, de alguna forma está invitando a superar. Para Carlos la demostración formal siguió siendo central en su discurso, pero ahora con aproximaciones a la demostración, que incluye considerar asuntos gráficos con el uso de la computadora, como en la primera presentación del teorema en cuestión. La aceptación de Carlos de otras representaciones, como las gráficas, en la demostración para cursos de cálculo diferencial para ingeniería estuvo acompañada del hecho de no abandonar la demostración formal, de tal manera que planteó una forma complementaria para su presentación en el aula de clase. Mientras que Nicolás reconoció de manera crítica que de pronto estaba 'parqueado' en un paradigma que no lo dejaba aceptar otra perspectiva para ver la demostración. Esta postura de Nicolás se corresponde con lo que plantea Grillo (2000):

> El profesor, como sujeto reflexivo que es, se inclina sobre el contenido de su propia experiencia, la examina, la relaciona con otras y la analiza a la luz de las experiencias propias de los otros. La experiencia actual aprovecha algo de las anteriores y contribuye

para el perfeccionamiento de acciones posteriores, lo que defiende la idea de que el profesor debe construir su conocimiento por la reflexión sobre la práctica (pág. 76).

Durante el programa de formación los profesores discutieron significados de la demostración asociados con una formación formal de las matemáticas y que hasta ese momento no presentaban ninguna preocupación para ellos. La interacción entre los profesores generó reflexiones acerca de nuevas ideas de la demostración relacionadas con lo no formal. En términos de Radford (2006), la interacción en lugar de desempeñar una función meramente de adaptación o facilitadora se considera consustancial del aprendizaje. El programa de formación permitió que los profesores interactuaran entre ellos con la posibilidad de expresar sus ideas con espontaneidad y libertad, retomado las ideas de los compañeros y dando sus opiniones de acuerdo con la dinámica de la participación. El tiempo de intervención de cada profesor no fue limitado. La interacción como parte de la negociación de significados no sólo es visto como un ambiente de adaptación a nuevos artefactos (la demostración no formal), sino también, como algo que hace parte del aprendizaje que permite reflexionar sobre ellos.

En este momento del programa de formación ya se ventilaba en el discurso de algunos profesores la presencia de demostraciones no solamente desde un significado formal. Algunos profesores mantuvieron la postura casi radical de conservar la demostración formal, mientras que otros se iban aproximando a aceptar demostraciones diferentes a las formales. El programa de formación promovió que sus participantes compartieran con sus compañeros, en un ambiente grupal, algunas reflexiones de una manera crítica acerca de significados de la demostración, como es el caso de Carlos y Nicolás cuando se refirieron a su formación matemática. Esto coincide con lo planteado por Castillo y Montes (2012) al señalar que en un enfoque hermenéutico-reflexivo para la formación de los profesores universitarios se pretende por un docente abierto capaz de: “Compartir la reflexión personal crítica en ámbitos grupales contenedores, con coordinación operativa, para posibilitar cambios actitudinales” (pág. 51).

De acuerdo con Imbernón (2011) “facilitar esos espacios de reflexión, participación y formación es la función imprescindible de la formación en docencia universitaria” (pág. 393). Es así como en el programa de formación las reflexiones como las de Carlos o Aníbal —acerca de sus significados de la demostración y su vinculación con una formación matemática enmarcada en un formalismo— emergieron con la actividad conjunta y se dieron gracias a que se pudo superar las características de otros enfoques de formación (de naturaleza técnica o práctica) que consideran al profesor como un sujeto aislado, individualista y sin vínculos con una comunidad. El programa de formación evitó la figura de un participante pasivo y reproductor de saberes dado por un ‘formador’ que dirige autoritariamente un programa de formación, lo cual responde a un tipo de formación con racionalidad técnica.

Acuerdos, desacuerdos, confusiones y experiencias de enseñanza como parte de la negociación de significados.

Al inicio del programa de formación algunos profesores propusieron revisar libros de texto de cálculo. Estos son una fuente de consulta recurrente para profesores, pues contienen explícitamente listado de temas, explicaciones, demostraciones, ejemplos, etc. (Bravo & Cantoral, 2012). Los participantes del programa de formación mostraron un interés por consultar libros de texto al considerarlos como parte del contexto de la enseñanza del cálculo y, en ocasiones, porque éstos direccionan la importancia de temas o procesos en un curso. Fue así como se configuró una actividad (Actividad No. 4) con el propósito de debatir sobre presentaciones de demostraciones de algún teorema. Los profesores escogieron el Teorema de Rolle (Figura 4) para analizar las presentaciones de demostraciones a partir de varios autores de libros de texto. Los libros fueron sugeridos por ellos o escogidos de la bibliografía que aparece en la programación que la universidad definió para el curso de cálculo diferencial de ingeniería.

En esta actividad fueron emergiendo algunos aspectos relacionados con el programa de formación de acuerdo con la dinámica de las interacciones entre los profesores y entre ellos con diferentes libros de texto de cálculo. Entre esos aspectos presentaré a continuación situaciones de acuerdos, desacuerdos y confusiones de algunos profesores acerca de sus significados de la demostración; situaciones que hicieron parte de su participación y constituyeron elementos de aprendizaje. Inicialmente describiré y presentaré un respectivo análisis de los significados de la demostración matemática que dejan entrever los profesores en la negociación de significados durante el desarrollo de esta actividad. Simultáneamente comentaré aspectos del programa de formación relacionados con la negociación de significados que indican su configuración como escenario de aprendizaje.

Los profesores organizados en parejas revisaron y expusieron ante los compañeros del programa de formación sus apreciaciones sobre las presentaciones de demostración del Teorema de Rolle planteadas por los autores: Courant y John (1996), Gil y Díaz (2013), Hernández (2009), Larson y Edwards (2010), Leithold (1998), Stewart (2008) y Thomas (2006). Estas presentaciones las detallo en el Anexo 5.

Cada una de las presentaciones de la demostración del Teorema de Rolle planteada en los libros de texto generó una participación activa de los profesores al interpretar y sustentar colectivamente cada una de las presentaciones de los libros de texto. Me referiré a las intervenciones de los profesores en el marco de sus participaciones en el desarrollo de la actividad, en especial sobre las reacciones que se dieron por la exposición de Carlos acerca de la presentación del Teorema de Rolle por los autores Gil y Díaz (2013). Algunas reacciones de los profesores, como resultado de un intercambio comunicativo, revelaron sus significados acerca de la demostración matemática. En la presentación de demostración del Teorema de Rolle por Gil y Díaz (2013) se encuentran gráficas, como se muestra en la Figura 4, y comentarios sobre las situaciones que representa la gráfica.

Teorema de Rolle

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto c en (a, b) en el que

$$f'(c) = 0$$

por lo que la recta que toca el punto c será horizontal.

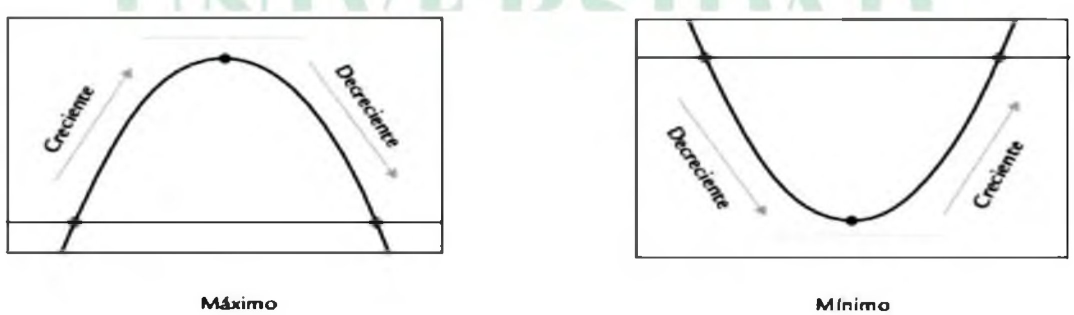


Figura 4: Parte de la presentación del Teorema de Rolle por Gil y Díaz (2013, pág. 251).

Las respuestas de algunos profesores sobre la presentación del Teorema de Rolle, por Gil y Díaz (2013), estuvieron relacionadas con determinar si era o no una demostración o con asociar su experiencia docente de la asignatura de cálculo diferencial. Algunas intervenciones de los profesores se apoyaron en otros comentarios de sus compañeros o fueron resultado de la dinámica de participación en el desarrollo de la actividad. Se resaltan los avances en la negociación de significados relacionados con la ampliación del significado de la demostración al considerar otro tipo de demostraciones diferentes a las formales y debatir sobre el aspecto visual y el aspecto formal en una demostración.

En la exposición de Carlos sobre la presentación por Gil y Díaz (2013), él manifestó que tal presentación era una demostración lógica, aunque consideró que no había mucho formalismo en ella. Carlos expresó lo siguiente:

> A mí me parece que esto es una demostración [la presentación del libro de texto de Gil y Díaz (2013)], pero una demostración eminentemente lógica. Ahí el autor dice que la curva [señalando las gráficas en la diapositiva], cualquiera que sea la curva, si tiene el mismo valor en *f(a)* y *f(b)*, en algún momento debe tener alguna de esas dos gráficas. Bien, si la derivada pasa de negativa a positiva en alguna parte debe ser cero porque la función es continua. No ha escrito absolutamente nada, pero el razonamiento es puramente lógico y válido. Yo pienso que es una demostración […] evidentemente lógica, y no hay mucho formalismo en el sentido que se hayan escrito cuestiones. (Carlos, encuentro marzo 15 de 2014)

Carlos se apoyó en la descripción gráfica que hacen los autores Gil y Díaz (2013) para mostrar las condiciones y la conclusión del Teorema de Rolle. Aunque los autores hacen comentarios sobre el contenido del teorema y sobre las gráficas que muestran visualmente la confirmación del mismo, él afirma que no hay nada escrito. Tal vez, Carlos se refiere a que no aparece nada, de manera formal, con uso de definiciones o de teoremas —como el del Valor Extremo o el de Fermat— para justificar las afirmaciones que conducen a la demostración formal del Teorema de Rolle. Para Carlos, esa presentación era una demostración con argumentos lógicos, pero sin ser una cadena de proposiciones deducidas bajo reglas lógicas.

Ante la afirmación anterior, María expresó lo siguiente: "Bueno lo que dice el profesor Carlos es que es una demostración, no sólo está la gráfica, sino que está toda una explicación, por eso pienso que sí es una demostración" (María, encuentro marzo 15 de 2014). Lo expresado por María sugiere que estuvo de acuerdo con la afirmación de Carlos, sin embargo, ella afirma que la presentación es una demostración no tanto por la existencia de gráficas sino por la explicación escrita. Esto puede indicar que para María lo planteado en el libro de texto no es otro tipo de demostración del Teorema de Rolle que se apoya en gráficas, sino una demostración que por la explicación dada puede coincidir con lo formal.

Profesores como Eliécer y Juan reaccionaron ante las afirmaciones de Carlos y María relacionando sus afirmaciones con su práctica de enseñanza de la demostración. Para Eliécer el hecho de que Carlos y María asociaran la presentación por Gil y Díaz (2013) con una demostración le hizo evocar su experiencia docente y compartir con los demás profesores su experiencia del por qué y cuándo él usa ese tipo de demostraciones en sus clases de cálculo diferencial para ingeniería:

> Yo en cálculo diferencial, a veces por cuestiones de tiempo o porque ellos [los estudiantes] no tienen la fundamentación para interpretar de manera rápida el teorema, las

demostraciones que son de este tipo y que son fáciles de interpretar yo las hago gráficamente. Se las muestro gráficamente y les digo a ellos: Aunque ésta no es la demostración formal del teorema, pero aquí se puede interpretar por qué se da y cómo se da y me parece una forma de que por lo menos la vean gráficamente. (Eliécer, encuentro marzo 15 de 2014)

Eliécer compartió su experiencia de su práctica docente para expresar que usa gráficas para presentar demostraciones visuales en sus clases de cálculo diferencial para ingeniería. Él señaló que la falta de tiempo y de conocimientos previos de sus estudiantes eran los motivos para preferir hacer demostraciones con apoyo de gráficas y explicar el por qué es cierta una proposición.

Algunos de los profesores, al escuchar la experiencia docente de Eliécer, se identificaron con ella y complementaron su aporte relacionando la preferencia de los estudiantes en lo que respecta a demostraciones. Por ejemplo, Juan aprovechó la participación de Eliécer y manifestó lo siguiente: “Para un estudiante de ingeniería esa demostración es la que a él más le llama la atención, ésa, la de la gráfica” (Juan, encuentro marzo 15 de 2014). Juan aludiendo a su experiencia y conocimiento de sus estudiantes indicó que los estudiantes preferirían demostraciones no formales, las cuales se puede asociar con demostraciones ‘visuales’ o ‘sin palabras’. Definir cuáles son las demostraciones ‘visuales’ o ‘sin palabras’ no tiene una respuesta simple y concisa (Alsina & Nelsen, 2010), sin embargo estos autores señalan que:

Las demostraciones sin palabras son imágenes o diagramas que ayudan al lector a ver por qué una afirmación matemática particular puede ser verdadera, y también ver cómo se podría comenzar a probar que es cierto. En algunos casos, una prueba sin palabras puede incluir una ecuación o dos para guiar al lector, pero el énfasis está claramente en proporcionar pistas visuales para estimular el pensamiento matemático. (pág. 118)

Hasta ahora se ha encontrado en el programa de formación que las demostraciones visuales son bien aceptadas por algunos profesores o ya eran realizadas por algunos de ellos en sus cursos de cálculo diferencial, pero sin identificarlas como demostraciones en el sentido amplio del término demostración matemática. Para esta investigación concibo la demostración como una práctica social caracterizada por procesos de exploración, argumentación y sistematización de enunciados matemáticos, cuya validación depende de los sistemas teóricos de referencia determinados por contextos históricos, sociales y epistemológicos.

Teniendo en cuenta la participación de Carlos, María, Juan y Eliécer se encontró que ya no sólo se consideran demostraciones formales sino también demostraciones con otras características en los discursos de los profesores. El compartir entre los profesores sus apreciaciones de la demostración —o formas para realizarlas en el aula de clase— sirvió de apoyo para construir un entramado de ideas que fueron ampliando el significado de la demostración.

Como lo señala Córdoba (2013), la decisión de tomar comunidades de práctica como estrategia de formación de profesores universitarios es: “Porque se consideró que en ellas los docentes serían capaces de interactuar y aprender gracias a la utilización del aprendizaje colaborativo, donde cada quien se nutriría escuchando las experiencias docentes de los colegas y compartiendo las propias.” (pág. 13). Un programa de formación bajo la concepción de una comunidad de práctica vincula experiencias docentes de sus participantes. La acción de compartir la experiencia propia y divulgarla ante otros hace parte de un aprendizaje que se da en colaboración con los colegas. Las experiencias de colaboración docente pueden constituirse en elementos de formación para los otros profesores (Campos, Dias, & Silva, 2016).

Por otra parte, no para todos los profesores fue clara la exposición de Carlos sobre el Teorema de Rolle planteado por Gil y Díaz (2013). Para Nicolás era una presentación rara. Él manifestó lo siguiente:

> Compañeros, como esa presentación [refiriéndose a la presentación de Gil y Díaz (2013)] se sale del parámetro de nuestras formas de hacer o como aprendimos a hacer las demostraciones, entonces yo la veo extraña. La veo un poco extraña realmente porque no tiene ese formalismo que nosotros manejamos, ese formalismo que a nosotros nuestros profesores nos enseñaron. Las definiciones y los axiomas que tenemos que aplicar ahí no se ven, por eso es que esa demostración al principio la miramos un poco raro. Bueno, vamos a mirarla nuevamente. (Nicolás, encuentro marzo 15 de 2014)

Al encontrar una presentación de la demostración sobre el Teorema de Rolle que no respondía a su forma familiar de concebirla, Nicolás reaccionó manifestando que le pareció extraña. Él confirmó que su forma de hacer demostraciones era bajo una perspectiva formalista de las matemáticas, la cual fue adquirida durante su formación académica por influencia de sus profesores. Esto coincide con la primera sección de este capítulo donde se mostró la influencia de los formadores en la construcción de significados de la demostración matemática. Una postura sobre la demostración asociada con un significado formal era tan fuerte para algunos profesores que era difícil para ellos considerar otras presentaciones como formas de demostrar un teorema. Para Nicolás las expresiones “la veo un poco extraña” y “vamos a mirarla nuevamente”, refiriéndose a la presentación en cuestión, muestra indicios de *perturbabilidad* y a su vez de apertura a las afirmaciones de Carlos y María e incluso a las experiencias desde la enseñanza manifestadas por Juan y Eliécer. Para Wenger (2001) "La combinación de perturbabilidad y elasticidad es una característica de la capacidad de adaptación. El aprendizaje supone una estrecha interacción entre el orden y el caos" (pág. 127, 128). La intervención de Nicolás sugiere un evento de inestabilidad de sus significados acerca de la demostración en su proceso de aprendizaje.

Una parte de la intervención de Nicolás encontró eco en otros profesores. La demostración formal como único medio para ver la demostración fue compartida por Aníbal y Jacobo, quienes también afirmaron que la presentación por Gil y Díaz (2013) sobre el Teorema de Rolle no obedecía a una demostración. Nicolás, Aníbal y Jacobo estuvieron en desacuerdo con lo afirmado por Carlos. Sin embargo, al estar en desacuerdo y negar dicha presentación del Teorema de Rolle como una demostración formal emergió de la dinámica de las interacciones entre los profesores la idea de 'demostraciones no formales', pues al no ser una demostración formal se consideró no formal:

Aníbal: Yo le llamo como la comprobación gráfica de la demostración o interpretación geométrica de la demostración.

Jacobo: Para mí es una demostración, pero no formal.

Juan: Informales.

Jacobo: Pero, representa una demostración, o sea, está demostrando algo, pero no es formal.

(Aníbal, Jacobo, Juan, encuentro marzo 15 de 2014)

A la opinión de Aníbal sobre la presentación del Teorema de Rolle dada por Gil y Díaz (2013) —de que era más bien una interpretación geométrica de la demostración— Jacobo respondió acuñando en la discusión el término 'no formal'. Jacobo, quien había dejado ver una postura flexible sobre la demostración, planteó considerar esa presentación por Gil y Díaz (2013) como una demostración, pero no formal. Dentro de esas demostraciones no formales se encontrarían las demostraciones visuales o sin palabras. La afirmación de Jacobo apunta a considerar el término 'no formal' de demostraciones en el discurso de los profesores para cursos de cálculo diferencial para ingeniería, avanzando en la vía de actualizar la mirada de la demostración matemática a demostraciones formales y no formales.

Los acuerdos y desacuerdos de los profesores, en el marco de sus debates acerca de la demostración matemática, constituyen parte de su aprendizaje en la medida que son formas de participación en una negociación de significados. Al participar en una comunidad de práctica surgen relaciones interpersonales. En ocasiones la armonía sobre el acuerdo no es una característica necesaria de una comunidad y las relaciones interpersonales generan sus propias tensiones y conflictos, incluyendo acuerdos y desacuerdos como formas de participación (Wenger, 2001). Al compartir sus opiniones acerca de si la presentación de una demostración era o no una demostración los participantes se conectaron de varias maneras al debate reflejando la complejidad de hacer algo conjuntamente. Los desacuerdos entre los profesores generaron una forma de objetar la demostración formal y actualizar el saber acerca de la demostración.

Durante el programa de formación, las interacciones entre los profesores no sólo revelaron acuerdos y desacuerdos, sino también confusiones acerca de significados de la demostración matemática construidos hasta ese momento. Las confusiones de los profesores son parte de la negociación de significados y en ocasiones motivan la búsqueda personal de respuestas a dudas que se generan en la interacción con los demás. Uno de los momentos de confusión lo vivió Nicolás. Él expresó lo siguiente:

> Antes yo tenía claro qué era demostrar un teorema, ahora no sé si demuestro, si muestro, si compruebo […] Sí, porque es que aquí hay una cantidad de situaciones especiales donde los compañeros hablan de demostraciones, de prueba, de comprobación y […] ya a mí me entró la duda. (Nicolás, encuentro marzo 15 de 2014)

Al parecer la confusión de Nicolás fue por el uso de los términos: prueba, comprobación, demostración, entre otros. Aunque, como lo plantea Gutiérrez (2001), en la literatura:

> […] hay un pequeño caos en el uso de la terminología al referirse a las maneras no formales de convicción: Términos como 'explicación', 'verificación', 'justificación' o 'demostración' se usan unas veces para referirse al mismo concepto y otras veces para referirse a conceptos diferentes. En la literatura en español la cosa se complica más porque aparece también 'prueba'. (pág. 87)

La confusión de Nicolás no parece ser sólo cuestión del uso de términos como probar, mostrar o demostrar, que ya generan confusiones por la diversidad de acepciones empleadas en la literatura. Más bien, parte de la confusión de Nicolás radica en el hecho de que en el programa de formación se estaban dando participaciones asociadas con aproximaciones a la demostración que incluían, además de la formal, las no formales. Es decir, se estaba discutiendo al interior del grupo de profesores que la demostración podría ser presentada de otras maneras, como las no formales. Mientras que para Nicolás la demostración se enmarcaba en los muros del formalismo, lo cual le generaba dudas sobre otras formas de presentación de demostraciones, como era el caso de las demostraciones visuales.

Al igual que Nicolás, Juan entró en confusión y expresó:

> Ahora ya me confundió el compañero [refiriéndose a Nicolás]. […] Él me acaba de preguntar que si en una facultad de ingeniería ésa [la presentación por Gil y Díaz (2013) sobre el Teorema de Rolle] que yo considero como la más adecuada, porque con la parte gráfica yo sí estoy de acuerdo, se puede considerar una demostración. Ya no sé ni qué contestar. (Juan, encuentro marzo 15 de 2014)

Lo expresado por Juan se suma al episodio de confusión de Nicolás. Esta vez Juan, quien reconoció su afinidad por demostraciones no formales a través de gráficas, también llegó a una confusión al contrastar su posición con significados anteriores de la demostración. Un programa de formación como escenario de aprendizaje permite la confrontación con asuntos que no necesariamente son familiares para los participantes y para la cual no tienen una respuesta inmediata. Como lo plantea Wenger (2001):

> Existen momentos en nuestra vida en los que aprender se intensifica: cuando las situaciones hacen tambalear nuestro sentido de la familiaridad, cuando nos vemos desafiados más allá de nuestra capacidad de respuesta, cuando deseamos comprometernos con nuevas prácticas e intentamos unirnos a nuevas comunidades. (pág. 25)

Es así, como las manifestaciones de dudas o confusiones de los profesores ante el colectivo docente, motivadas por situaciones no familiares o extrañas y por el desafío de responder ante ellas, se constituyen como parte del aprendizaje. Las expresiones espontáneas de dudas y confusiones de Nicolás y Juan sugieren una confianza mutua, una voluntad de ser parte del programa de formación y un reconocimiento del otro como parte activa de la negociación de significados.

En un programa de formación continua, enmarcado en las dimensiones de una comunidad de práctica, es necesaria la confianza mutua para que los participantes no sientan temor al momento de exponerse ante el otro a través de sus opiniones, preguntas o dudas. El ambiente de trabajo en la comunidad debe permitir que las cuestiones o ideas sean bien recibidas (Lupu, 2010). A través del colectivo docente se pueden compartir ideas con la confianza de que los colegas pueden ayudar a superarlas. En el programa de formación Nicolás y Juan se sintieron miembros del grupo y expresaron sus confusiones como parte del fortalecimiento de las relaciones con sus compañeros. Lo anterior corresponde con el planteamiento de Córdoba (2013) al referirse a temores de los profesores universitarios en programas de formación:

> Es lógico pensar que el cúmulo de información que hoy en día está disponible sobre cada disciplina, resulta imposible de ser dominado completamente por una persona; sin embargo, los docentes continúan con el temor a verse descubiertos en lo que desconocen, porque continúan pensando con la estructura de la concepción tradicional. Sin embargo, estos temores son posibles de superar en colectivos docentes donde se comparten ideas, emociones, conocimientos, en otras palabras, donde cada docente aprende de la experiencia de los otros, donde todos comparten un objetivo común, se apoyan y aprenden a la vez. (pág. 8)

Un programa de formación bajo la concepción de una comunidad de práctica atiende los intereses y dilemas de los profesores, posicionándolos como protagonistas de su propia formación. El hecho de que cada profesor sea protagonista de su formación no desconoce el rol de los otros, pues la negociación de significados se genera en el trabajo colaborativo al interior del colectivo de profesores. La presencia de acuerdos, desacuerdos y confusiones hacen parte de la dinámica de negociación de significados y su manifestación en el grupo de profesores son formas de participación.

Las confusiones de Nicolás y Juan emergieron en el trabajo conjunto realizado en la actividad propuesta por el colectivo en el programa de formación. En ocasiones las confusiones son parte de la negociación de significados que motivan el interés por aclarar dudas sobre los artefactos que son objeto de aprendizaje. En este sentido, Nicolás pudo identificar parte del origen de su resistencia para ver otros tipos de demostraciones diferentes a la formal. Así lo expresó Nicolás:

> Yo creo que el origen de nuestro problema es la formación que tuvimos. […] en el sentido de que nosotros fuimos educados bajo la época de las matemáticas modernas, en el cual el sentido geométrico fue prácticamente apartado.
> […] Tal vez, ese sea nuestro problema, que en esa presentación [la de Gil y Díaz (2013) sobre el Teorema de Rolle], donde están obviamente esas ilustraciones en que la geometría juega un papel importante, nos resistimos a aceptarla como una demostración. (Nicolás, encuentro marzo 15 de 2014)

Como parte de la negociación de significados de la demostración, Nicolás, en un intento de dar respuesta a sus dudas y confusiones expresadas por Juan, reconoció que su mirada de la demostración estuvo marcada por asuntos epistemológicos de la ‘matemática moderna’ dados en su formación académica. La ‘matemática moderna’ desarrollada en los años 60 y 70 del siglo pasado e impulsada por matemáticos del grupo Bourbaki, tenía como propósito implementar el método axiomático, el lenguaje lógico-simbólico y las estructuras algebraicas desde un plano universitario hasta la educación secundaria (Torres, 2004). Para algunos profesores el tener una mirada sobre la demostración influenciada por la 'matemática moderna' le impide aceptar otras propuestas de demostración que no encajan en esa perspectiva.

La intervención de Nicolás durante la actividad la entiendo como su encuentro reflexivo —acerca de su resistencia a otras formas de demostración— con formas históricas que enmarcaron la demostración en un contexto de su formación académica. Para Radford (2013), "el aprendizaje es tematizado como el encuentro consciente y deliberado con las formas históricas y culturalmente codificadas de pensar y hacer" (pág. 39). Es así como la intervención de Nicolás sugiere que en medio de sus dudas y reflexiones tomó conciencia acerca de su significado de la demostración. Aquí la 'conciencia' se entiende en términos de Radford (2013), como una forma de "reflexión subjetiva de la realidad concreta en el transcurso de la cual llegamos a formar sensibilidades culturales para ponderar, reflexionar, entender, disentir, objetar y sentir acerca de los demás, de nosotros mismos y de nuestro mundo" (pág. 27); pero, que sólo puede ser entendida como el producto de las relaciones y mediaciones eventuales histórico-culturales.

Nicolás encontró parte del origen de sus ideas sobre la demostración, mediante su participación y el reconocimiento de las intervenciones de sus compañeros en las relaciones emergentes durante el programa de formación. Como lo plantea Wenger (2001), cuando se participa en conversaciones o espacios de interacción "de alguna manera reconocemos en los otros algo de nosotros mismos a lo cual nos dirigimos. Lo que reconocemos tiene que ver con nuestra mutua capacidad de negociar significado” (pág. 81). Reconocer acuerdos, desacuerdos y confusiones permitió a Nicolás identificar sus propias ideas acerca de la demostración.

Un compromiso con la práctica.

Atendiendo a la dinámica del desarrollo del programa de formación y a los aspectos considerados a lo largo de las actividades anteriores —asociados con el grado de abstracción de una demostración, es decir, con demostraciones formales y no formales— propuse a los profesores analizar una clasificación de demostraciones según el tipo de abstracción. Es así como se planteó una actividad (la No. 5) en el programa de formación, la cual consistió en debatir sobre la conceptualización y ejemplos de la clasificación de demostraciones propuesta por Van Asch (1993). Escogí la clasificación de este autor porque considera demostraciones de teoremas relacionados con el primer año de ingeniería. Además, esta clasificación se ha utilizado en recientes investigaciones, como las de Conejo, Arce y Ortega (2015) y la de González (2012), esta última corresponde a una tesis doctoral en la que se ofrece un aporte de demostraciones para el cálculo diferencial en un programa de ingeniería.

La clasificación de Van Asch (1993) considera tres tipos de demostración: *Demostración por medio de un dibujo o un ejemplo, pre-formal y formal*. Según ese autor la diferencia entre esos tipos de demostraciones es principalmente el grado de abstracción. La demostración pre-formal, se entiende como “una cadena de conclusiones correctas, pero no representadas formalmente, las cuales se refieren a premisas válidas no formales” (Blum & Kirsch, 1991, pág. 187). En tales premisas se incluyen hechos geométricos-intuitivos e ideas básicas orientadas a la realidad o intuitivamente evidentes.

En lo que respecta al debate durante el desarrollo de la actividad (No. 5) se resalta el compromiso mutuo entre los profesores que incluye “el hecho de que cada miembro comparta su conocimiento y acepte el de los otros y es lo que otorga valor a la misma comunidad” (Córdoba, 2013, pág. 11). Por ejemplo, las siguientes interpretaciones de Carlos, Nicolás y Jacobo, acerca de la clasificación de demostraciones dada por Van Asch (1993), fueron compartidas entre los miembros del programa de formación. Carlos manifestó su postura al respecto de la siguiente manera:

> Yo digo que dependiendo del teorema uno podría empezar por una demostración pre-formal para llegar a una demostración formal; o empezar con una demostración formal como hizo María [en una exposición de demostraciones ante el grupo]; y después decir: hágame esto con tal función, utilizando funciones específicas. Entonces, la relación entre demostración pre-formal y formal no siempre es en un sentido [mueve las manos de un lado a otro]. (Carlos, encuentro abril 12 de 2014)

Carlos reiteró ante sus compañeros su interés de mantener la demostración formal presente en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Él planteó el uso de la demostración pre-formal como un complemento de la demostración formal. Al seguir el rastro de sus intervenciones, durante el desarrollo del programa de formación, se notó que su compromiso con la práctica de demostrar involucró en las diferentes discusiones su decisión de considerar la demostración formal como parte de la enseñanza de las matemáticas en la formación del ingeniero. Sin embargo, cada vez más se vio matizada su posición sobre la demostración formal con otras formas de representación.

Nicolás, a diferencia de Carlos, tomó distancia de la demostración formal para cursos de cálculo diferencial en programas de ingeniería, lo cual señala que “el compromiso mutuo no supone homogeneidad” (Wenger, 2001, pág. 104). Él planteó lo siguiente:

> La demostración pre-formal recoge las partes esenciales de la demostración formal y de alguna manera facilita la comprensión de la demostración del teorema. La demostración por medio de un dibujo yo podría decir que es la recreación pictórica de esa demostración formal o demostración pre-formal y la haría por lo menos al final para que ellos visualicen la demostración. Yo no haría demostraciones formales, yo haría demostraciones pre-formales porque es suficiente. (Nicolás, encuentro abril 12 de 2014)

Nicolás compartió su apreciación sobre demostración pre-formal y sugirió a sus compañeros una forma de implementarla descartando la demostración formal; mostrando con ello heterogeneidad de ideas entre el grupo de profesores. Él ya había manifestado anteriormente en una entrevista lo siguiente: “Por razones de tiempo no demuestro los teoremas, lo que hago es aplicar los teoremas; y no todos, sólo los que realmente necesitamos” (Nicolás, entrevista marzo 13 de 2014). Sin embargo, “la mayoría de las situaciones que supone un compromiso interpersonal sostenido generan sus propias tensiones y conflictos” (Wenger, 2001, pág. 104), es así como se vio en el apartado anterior que durante el desarrollo de las actividades se generaron tensiones asociadas con dudas y confusiones que fueron modificando en Nicolás su significado de la demostración. Para este momento del programa de formación asociado con la actividad No.5, Nicolás respondió a otras situaciones que involucraban demostraciones por medio de un dibujo o un ejemplo y demostraciones pre-formales. Como lo plantea Wenger (2001), la negociación de significados “cambia constantemente las situaciones a las que otorga significado e influye en todos los participantes” (pág. 79). Nicolás cambió su significado de la demostración matemática ampliando su posición de utilizar demostraciones, ahora por medio de un dibujo o un ejemplo y por demostraciones pre-formales en cursos de cálculo diferencial para ingeniería.

En el programa de formación se dio la participación de los profesores en busca de una empresa conjunta definida por reflexionar acerca de la demostración y su enseñanza. Tales participaciones incluyeron diferentes posturas de los profesores para el uso de demostraciones según el grado de abstracción en la práctica de la demostración y su enseñanza en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Por ejemplo, además de las interpretaciones expuestas anteriormente de Carlos y Nicolás, acerca de la clasificación de demostraciones dadas por Van Asch (1993), se registra la participación de Jacobo al expresar que:

> Me parece una buena clasificación [dada por Van Asch (1993)]. ¿Cuál es, digamos, la mejor? Yo diría que eso depende de lo que vayamos a demostrar. De pronto para un teorema en particular es mejor mostrárselo o demostrárselo por medio de un dibujo, y si el muchacho entiende lo que dice el teorema, pues ahí está demostrado, no tengo por qué recurrir a las otras. Ahora, si usted quiere darle más peso a la demostración, entonces, si quieres haces la formal. Pero, dependiendo del teorema que uno vaya a demostrar, entonces uno elegiría si con un dibujo o si con una prueba pre-formal es suficiente, porque todas son demostraciones. (Jacobo, encuentro abril 12 de 2014)

Jacobo amplió su discurso sobre demostración matemática incorporando, además de demostraciones formales, las demostraciones por medio de un dibujo o un ejemplo y las pre-formales. Él consideró que la demostración formal sería pertinente en caso de que el profesor quisiera acentuarla en las clases. Para Jacobo basta con uno de los tres tipos de demostración planteados por Van Asch (1993), pues lo importante es que el estudiante entienda el teorema. La escogencia de uno de esos tres tipos de demostración estaría sujeta al tipo de teorema que se quiera presentar en clase y al interés del profesor en resaltar o no una demostración formal.

El uso de algunos tipos de demostración según su grado de abstracción (por medio de un dibujo o un ejemplo, pre-formal y formal) no fue unificado por los profesores. Como lo señala Wenger (2001): “lo que hace que el compromiso con la práctica sea posible y productivo es tanto una cuestión de diversidad como de homogeneidad” (pág. 102). La posición de Jacobo sobre el uso de la clasificación de la demostración por Van Asch (1993) era diferente a las de Carlos y Nicolás, pues para Carlos la idea era mantener la demostración formal apoyada en otros tipos de demostración y para Nicolás era suficiente la demostración pre-formal. Para Jacobo, cualquiera de los tres tipos de demostración era válida y dependía del teorema que se quiera demostrar.

Como lo señala Mas (2011) es importante en los programas de formación de profesores universitarios que se:

> […] evite caer en la tentación de intentar unificar las prácticas docentes, […] porque no todos los profesores tienen (ni hay necesidad de que así sea) el mismo nivel de competencia en el desarrollo y gestión de determinadas estrategias metodológicas, ni se sienten igual de cómodos desarrollando unas determinadas prácticas docentes. (pág. 205)

Un programa de formación debe permitir la existencia de varias posturas acerca de un asunto relacionado con la práctica docente y no debe propender por unificarlas. Las experiencias y conocimientos de cada profesor son diferentes y en la diversidad de posiciones teóricas o metodológicas se enriquece la discusión.

El compromiso de los profesores con la práctica de la demostración matemática y su enseñanza, durante la negociación de significados, se manifiesta en los cambios de significado que experimenta el profesor y las decisiones que toma al respecto como resultado de sus relaciones con los otros. Un programa de formación que evidencie este tipo de resultados se considera que promueve el compromiso con la práctica y está relacionando la formación con el aprendizaje de sus miembros. De acuerdo con Wenger (2001): “La práctica no existe en abstracto. Existe porque hay personas que participan en acciones cuyo significado negocian mutuamente” (pág. 100). En la teoría de la práctica social el aprendizaje está intrínsecamente asociado con la negociación de significados, de tal manera que las relaciones de participación mutua contribuyen con la constitución de significados.

Las relaciones de participación mutua de los profesores durante las actividades del programa de formación estuvieron asociadas con acciones que indicaban compromiso con sus compañeros y con una exploración permanente de cómo participar en las actividades. Mediante el compromiso con la práctica “exploramos nuestra capacidad de comprometernos con los demás, cómo podemos participar en actividades, qué podemos y no podemos hacer.” (Wenger, 2001, pág. 236). Al revisar el desarrollo de las actividades durante el programa de formación se encuentra que los profesores tuvieron acciones como: intervenir en los debates de las actividades, retomar las ideas de sus compañeros, expresar interpretaciones de algunos conceptos, compartir reflexiones de algunas situaciones, proponer actividades, presentar dudas y confusiones e intentar dar explicaciones a sus compañeros, además de tomar decisiones de acuerdo con las intervenciones de sus colegas y de sus propias ideas. La participación de los profesores en ese conjunto de acciones sugiere la existencia de un compromiso mutuo que los vincula en favor de la práctica de la demostración y su enseñanza y de unas maneras compartidas de hacer en busca de la reflexión de esa práctica como empresa conjunta del programa de formación.

Como parte del compromiso con la práctica de la demostración y su enseñanza, durante el desarrollo de la actividad (No.5), algunos profesores manifestaron cierta preocupación con respecto al uso de demostraciones pre-formales, pues al ubicarla como una forma de ejemplificar un teorema no se mostraron tan seguros de su aplicación. Por ejemplo, Eliécer expresó: “Lo que veo es que la demostración pre-formal es una ejemplificación del teorema. […] y otra cosa es la demostración del teorema como tal donde lo que estamos viendo es la veracidad de la proposición” (Eliécer, encuentro abril 12 de 2014). Esta intervención de Eliécer incitó a Jacobo a reaccionar planteando una postura crítica hacia la preferencia de la demostración formal:

> Lo que pasa es que nosotros por la formación que tenemos siempre pensamos que lo correcto es hacer la demostración formal y que allí es cuando el muchacho es capaz de hacer o entender la prueba formal y es cuando él realmente entendió las cosas. Siempre nos vamos para allá, pero yo digo que, si lo que buscamos, como lo hemos dicho aquí a la hora de demostrar un teorema es evidenciar que lo que está planteado allí es cierto, uno puede utilizar cualquiera de ellas [refiriéndose a demostración por medio de un dibujo o un ejemplo, demostración pre-formal o demostración formal]. (Jacobo, encuentro abril 12 de 2014)

Al igual que para otros profesores como Carlos y Nicolás, Jacobo reconoció de su formación académica el formalismo matemático como un factor de influencia en su quehacer docente relacionado con la demostración. Él relacionó intervenciones de sus colegas con una parte de su propia experiencia con la demostración formal y llamó la atención al manifestar que en la formación académica recibida sólo se considera la demostración formal como la única manera correcta de presentar demostraciones en clase.

Lo dicho por Jacobo sugiere que en el programa de formación se dio la posibilidad de un reconocimiento mutuo de experiencias, entendiéndose que "son mutuas en el sentido de que los participantes conforman mutuamente sus experiencias de significado. Con ello pueden reconocer algo de sí mismo en los demás" (Wenger, 2001, pág. 81). El reconocimiento mutuo de una formación formalista de las matemáticas contribuyó a que Jacobo junto con otros compañeros considerarán otras aproximaciones a la demostración matemática como parte de su experiencia de significado de la demostración. Él insistió en la posibilidad de hablar sobre demostraciones en cursos de cálculo diferencial sin la prevalencia de una demostración formal. El compromiso con la práctica —que se caracteriza por la mutualidad y que está asociada con las interacciones y vínculos que se establecen con los otros— permite reconocer las experiencias de los demás para llevar a cabo una empresa conjunta. El compromiso con la práctica de la demostración y su enseñanza permitió que los profesores dieran sus aportes a través de la reflexión de la práctica y, a su vez, encontraran un lugar único respaldado por situaciones comunes vividas también por los otros.

El programa de formación, bajo la concepción de una comunidad de práctica, permitió la vinculación de la experiencia de los profesores y la posibilidad de relacionarla con las de los otros colegas, generando reflexiones acerca de la práctica. En un programa de formación algunos participantes contribuyen con la reflexión sobre la práctica de acuerdo con su experiencia, conocimientos, confianza e intereses y a la vez aprenden de los otros. Esto corresponde con el planteamiento de Imbernón (2012), quien señala que aprender con otros y de otros contribuye con la reflexión y transformación de la práctica tanto individual como colectiva. El aprender con otros genera colaboración, apoyo mutuo y motivación para reflexionar acerca de la práctica.

El compromiso con la práctica de la demostración y su enseñanza permitió a algunos profesores reconocer parte del origen de sus significados sobre la demostración y ampliar esos significados para un escenario de cálculo diferencial de ingeniería. Por ejemplo, Nicolás y Eliécer expresaron lo siguiente:

Nicolás Antes estábamos centrados de que la demostración era así [mueve las manos en dirección vertical]. Ya abrimos caminos y hay otras posibilidades de que al estudiante se le pueda hacer otro tipo de demostraciones, otras estrategias.

Eliécer: Yo creo que Nicolás dijo algo clave y es que ya tenemos una claridad con respecto a lo que iniciamos. Ya, por ejemplo, nosotros podemos enmarcar lo que uno hace dentro de las clasificaciones que el autor plantea [demostración por medio de un dibujo o un ejemplo, pre-formal y formal]. Yo no estoy muy alejado de lo que el autor hace, lo que yo hago en clase lo puedo ubicar aquí [en los tipos de demostración de Van Asch (1993)] y ya no es tan rígido el hecho de que la demostración se hace así [de manera formal], sino que hay otra forma de probar algo y le podemos dar un nombre según esa clasificación.

(Nicolás, Eliécer, encuentro abril 12 de 2014)

Para Nicolás y Eliécer el programa de formación contribuyó a que emergieran otras perspectivas para ver la demostración matemática. El abrir caminos a otras miradas de la demostración o vincular el quehacer docente con lo compartido con los compañeros reitera el compromiso mutuo generado en el programa de formación. El compromiso entre los profesores durante el desarrollo de las actividades incluyó aspectos que sabían y hacían y asuntos que no sabían y hacían de la práctica de la demostración y de su enseñanza. De acuerdo con Wenger (2001), el compromiso mutuo:

> Se basa en lo que hacemos y en lo que sabemos, además de en nuestra capacidad de relacionarnos significativamente con lo que no hacemos y lo que no sabemos, es decir, con las contribuciones y el conocimiento de los demás" (pág. 103).

Profesores, como Eliécer, reconocieron asuntos que sabían y hacían en sus clases con tipos de demostraciones planteados por Van Asch (1993), distinguiendo algunos de ellos en las formas de como presentaban demostraciones de teoremas en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Para Nicolás, a través de su compromiso con la práctica amplió su mirada de una demostración exclusivamente formalista a una demostración que incluyó la no formal. Esto le permitió pasar de una posición de no realizar demostraciones formales —en cursos de cálculo diferencial para ingeniería— a considerar la presentación de demostraciones a sus estudiantes, pero de otra forma.

Durante el programa de formación se dieron reflexiones acerca de la práctica gracias a las interacciones y vínculos entre los profesores que promovieron la reflexión crítica sobre sus conocimientos y experiencias docentes. Como lo plantea Wenger (2001): "El hecho de que los miembros interaccionen, hagan cosas conjuntamente, negocien nuevos significados y aprendan unos de otros ya es inherente a la práctica: así es como evolucionan las prácticas" (pág. 132). La práctica de la demostración y su enseñanza fue puesta en reflexión por los profesores y algunas de sus posiciones acerca de ella se enriquecieron mediante el compromiso mutuo de los participantes.

Como lo señala Wenger (2001), en una comunidad de práctica, "cada uno actúa como si fuera un recurso para los otros, intercambiando información, tratando de comprender las situaciones, compartiendo nuevos trucos e ideas" (pág. 71). En estos espacios de formación para el profesorado universitario, fundamentados en las comunidades de práctica, se favorecen las acciones de los profesores caracterizadas por intercambiar posturas diversas sobre conceptos o situaciones, comprender situaciones, explorar formas de participación, reflexionar acerca de la práctica y reconocer mutuamente experiencias. En la teoría de la práctica social las articulaciones de esas acciones configuran el compromiso con la práctica, el cual es posible gracias al apoyo espontáneo y la heterogeneidad de planteamientos de los profesores. Es así como el compromiso con la práctica potenció al programa de formación como un escenario de aprendizaje.

La producción colectiva: materialización en la transformación de significados.

Una vez desarrollada la actividad No. 5 acerca de una clasificación para demostraciones (por medio de un dibujo o un ejemplo, pre-formal y formal) los profesores tuvieron la iniciativa de reunirse en grupos y preparar colectivamente la presentación de algunas demostraciones de teoremas a partir de una mirada pre-formal o utilizando el software GeoGebra para demostraciones visuales (Actividad No. 7). En el programa de formación los profesores proponían actividades de acuerdo con su intereses o iniciativas. El interés de los profesores y su compromiso por participar de una manera activa era notorio en actividades que representaban un mayor esfuerzo o eran organizadas por algunos de ellos. Como lo plantea Wenger (2001), la negociación de significados "es aún más manifiesta cuando participamos en actividades que nos interesan o que nos plantean un reto" (pág. 77). El desafío que se plantearon los profesores fue la producción colectiva de demostraciones no formales para un curso de cálculo diferencial en ingeniería. En el programa de formación la producción colectiva fue esencial para seguir debatiendo sobre el alcance de lo formal y lo no formal en las demostraciones.

Eliécer y María decidieron trabajar juntos una demostración visual del Teorema del Valor Medio[10]. Ellos construyeron un ejemplo y un gráfico para demostrar el mencionado teorema usando GeoGebra y expusieron los resultados ante sus colegas del programa de formación. El uso del software GeoGebra se convirtió para ellos en un elemento más del reto asumido, pues no lo habían manejado anteriormente. En la Figura 5 se muestra una imagen del trabajo realizado por ellos:

[10]Teorema del Valor Medio: "Sea f continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$" (Larson y Edwards, 2010, pág. 174).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

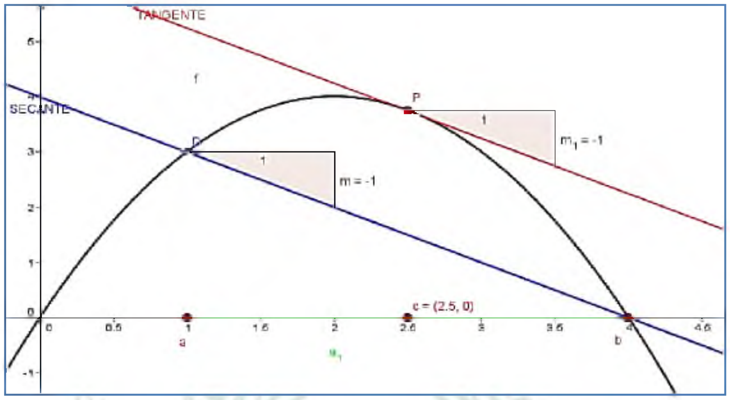


Figura 5: Representación en GeoGebra de la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio.

La demostración visual del Teorema del Valor Medio expuesta por Eliécer y María relacionó la importancia del uso de un software para facilitar la comprensión de conceptos. En el uso de la tecnología para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas el GeoGebra se ha utilizado para promover y facilitar la comprensión conceptual de estudiantes en cursos de matemáticas de primer año de ingeniería (Abdulwahed, Jaworski, & Crawford, 2012; Jaworski & Matthews, 2011). Con el uso de software en este tipo de presentaciones puede superarse un poco el problema de la carencia de tiempo para tratar teoremas y demostraciones en cursos de cálculo diferencial para ingeniería, lo cual fue preocupación de algunos de los profesores durante el desarrollo del programa de formación.

El componente geométrico del teorema permitió mostrar a través del GeoGebra las condiciones de la hipótesis y la verificación de la tesis. Eliécer expresó “este teorema yo siempre lo explico con la gráfica, pero ya hice la construcción acá [con el software] y me queda más fácil ahora presentarlo a mis estudiantes” (Eliécer, encuentro mayo 3 de 2014). Lo dicho por Eliécer sugiere que en su práctica docente él presentaba este teorema con una gráfica en el tablero, pero con la construcción que ellos hicieron con GeoGebra se le facilitaría la explicación en clase. En un programa de formación, que propicie la producción colectiva, se pueden realizar actividades que son consideradas como potencialmente útiles en la práctica docente de los profesores. El programa de formación permitió asociar situaciones que los profesores experimentaban en la práctica de la demostración y su enseñanza con su trabajo realizado en las actividades.

Los profesores valoraron positivamente el aporte de Eliécer y María y vieron pertinente para estudiantes de ingeniería esa forma de presentar la demostración del Teorema del Valor Medio. Por ejemplo, Aníbal expresó lo siguiente:

> Eso es lo que se debe hacer en la facultad [refiriéndose a la presentación de Eliécer y María]. […] es más fácil entender el teorema a través de esa presentación y uno no tiene que dar una demostración formal al estudiante. (Aníbal, encuentro mayo 3 de 2014)

Aníbal al observar y manipular la presentación elaborada por Eliécer y María (utilizando GeoGebra) resaltó la facilidad que permite una demostración visual para la comprensión de teoremas. La intervención de Aníbal sugiere que él identificó el trabajo expuesto por Eliécer y María como una contribución a la práctica de la demostración y su enseñanza que podía integrar a su propio quehacer docente.

Lo anterior da cuenta de que el trabajo de María y Eliécer, asumido como una materialización de su experiencia, permite proyectar “nuestros significados en el mundo y luego los percibimos como si existieran en él, como si tuvieran una realidad propia” (Wenger, 2001, pág. 84). Es decir, la presentación con el uso de GeoGebra del Teorema del Valor Medio es una proyección de lo que María y Eliécer quisieron decir, era una abstracción que no cumple su función por sí misma; pero cuando ellos, como Eliécer, u otros, como Aníbal, la emplearon para relacionarla con su práctica docente, tomó sentido como si tuviera vida.

A diferencia de lo trabajado por Eliécer y María, otros profesores experimentaron la elaboración conjunta de demostraciones pre-formales. Juan y Nicolás se unieron para construir una demostración pre-formal del Teorema del Criterio de la Segunda Derivada. La principal consideración para la escogencia del teorema fue, como lo planteó Juan, “que sea entendible por los estudiantes de primer semestre” (Juan, encuentro mayo 3 de 2014). La demostración pre-formal que ellos expusieron en el programa de formación fue la siguiente:

Teorema del Criterio de la Segunda Derivada:

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

a. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.

b. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

c. Si $f''(c) = 0$ el criterio no decide.

Prueba Pre-Formal:

Sea $f(x) = x^2 - 2$ una función definida en [-1, 1]. Si $f'(x) = 2x$ y $x = c = 0$, entonces $f'(c) = f'(0) = 0$. Además, $f''(x) = 2 > 0$.

Como $f''(c) = 2 > 0$, es positiva, entonces:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Luego existe un intervalo I = (-1. 1) tal que:

$$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \frac{f'(x)}{x-c} = \frac{2x}{x-c} = \frac{2x}{x} = 2 > 0 \ \forall x \neq c \in I$$

Ahora:

a) $Si\ x < c \Rightarrow x < 0,\ entonces\ f'(x) = 2x < 0$ (negativa)

b) $Si\ x > c \Rightarrow x > 0,\ entonces\ f'(x) = 2x > 0$ (positiva)

Como $f'(x) = 2x$ cambia de signo en c = 0 y el Criterio de la Primera Derivada implica que $f(c) = f(0) = -2$, se tiene que el punto $(0, -2)$ es un mínimo relativo para la función.

(Juan, Nicolás, encuentro mayo 3 de 2014)

Juan y Nicolás tomaron una función particular para la demostración pre-formal del Teorema del Criterio de la Segunda Derivada y siguieron los pasos que se utilizan en la demostración formal del teorema aplicándolos a la función escogida. De acuerdo con Wenger (2001): “En efecto, ninguna abstracción y ningún instrumento o símbolo capta realmente en su forma las prácticas en cuyo contexto contribuye a una experiencia de significado” (pág. 84). Esta presentación de una demostración pre-formal materializa en su forma asuntos complejos que no son captados en el texto de la demostración, como, por ejemplo, acuerdos, desacuerdos, compromisos, expectativas y obligaciones de sus protagonistas dados en su experiencia de significado de la demostración. En este sentido, la materialización “abarca una amplia gama de procesos que incluyen hacer, diseñar, representar, nombrar, codificar y describir, además de percibir, interpretar, utilizar, reutilizar, descifrar y reestructurar” (Wenger, 2001, pág. 85).

La demostración pre-formal del Teorema del Criterio de la Segunda Derivada de Juan y Nicolás sirvió de foco para tratar algunos asuntos acerca de cómo presentarla ante sus estudiantes. Por ejemplo, Nicolás consideró que la demostración formal del Teorema del Criterio de la Segunda Derivada era ‘sencilla’ y, por tanto, la demostración pre-formal podría ser un trabajo que realizaran los estudiantes. Al respecto Nicolás expresó lo siguiente:

En este caso la demostración es sencilla y ahí quedaría de maravilla que el estudiante a través de un ejemplo, dado por el profesor incluso, plantee la demostración pre-formal. (Nicolás, encuentro mayo 3 de 2014)

La presentación e intervenciones de Juan y Nicolás sirvieron de enfoque para la discusión acerca de la decisión de la manera de presentar demostraciones formales y no formales en cursos de cálculo diferencial para ingeniería. El trabajo de Juan y Nicolás sugiere que la comprensión dada de la demostración adquirió forma y luego esa forma se convirtió en un foco de la negociación de significados al considerarla entre las maneras de presentar la demostración a los estudiantes.

En este momento del programa de formación los profesores tenían algunas herramientas —como el uso de software, de ejemplos, de demostraciones pre-formales— para presentar la demostración matemática en cursos de cálculo diferencial, pero no hubo una regla general de la forma de presentarlas en el aula de clase, ni tampoco se esperaba que se diera. Como parte de los significados de la demostración, los profesores estuvieron de acuerdo con la implementación de algún tipo de demostraciones en clase de cálculo diferencial dependiendo del teorema y de los estudiantes, quedando en manos del profesor la decisión de privilegiar alguno de esos tipos de demostración. Como lo manifestaron algunos de los profesores, en intervenciones anteriores, lo importante es tener en cuenta que la demostración matemática debe propender por la comprensión de conceptos. Es así como un significado de la demostración asociado con la verificación de la validez de un teorema o proposición estuvo en función de explicar conceptos, definiciones o ideas involucradas tanto en el enunciado del teorema como en su demostración.

La producción colectiva de demostraciones elaboradas por los profesores durante el programa de formación se puede interpretar como una materialización de sus experiencias en el desarrollo del programa de formación, es decir, como una parte de la negociación de significados de la demostración. En términos de Wenger (2001), la materialización es el "proceso de dar forma a nuestra experiencia produciendo objetos que plasman esta experiencia en una 'cosa'. Con ello creamos puntos de enfoque en torno a los cuales se organiza la negociación de significados" (pág. 84). Cada producción colectiva relacionada con la elaboración de demostraciones pre-formales, o mediante gráficos o ejemplos, constituyó una parte de la materialización de la experiencia de los profesores, las cuales fueron motivos de discusión por los profesores e insumos para nuevas negociaciones. La producción colectiva en el programa de formación visto como objetos concretos y materiales tienen como ventaja su concisión y persistencia física potencial, sin embargo, son también algo incompleto, continuo y potencialmente enriquecedor. La materialización "no es solo convertir algo en un objeto; no acaba en un objeto" (Wenger, 2001, pág. 86). Las demostraciones escritas por los profesores no son simples objetos concretos y materiales, más bien son reflejos de las reflexiones de esas prácticas de la demostración y su enseñanza generadas en el programa de formación y en las trayectorias de los profesores.

Retomando a Wenger (2001): "Una ventaja de contemplar la negociación de significado como si estuviera formada por un proceso dual es que podemos considerar las diversas concesiones implicadas en la complementariedad entre participación y cosificación" (pág. 90). Es así como parte de la materialización en el proceso de negociación de significados de la demostración matemática quedó expresada en los escritos acerca de las construcciones de demostración pre-formal como una producción de los profesores. Las demostraciones con ejemplos a través de GeoGebra elaborados por los participantes fueron expuestas y publicadas en memorias de eventos nacionales de Educación Matemática (Espinosa, Lara, & Hernández Sastoque, 2015; Hernández Sastoque, Tinoco, Rada, & Lara, 2015). Para Wenger (2001), la participación y la materialización en su interacción son al mismo tiempo distintas y complementarias. La producción colectiva hizo parte de la negociación de significados y era necesaria en la actuación de los profesores donde convergieron interpretaciones e intereses que conformaron la participación. En este sentido la producción colectiva, asociada con la materialización de experiencias de los profesores, contribuyó para que el programa de formación se tradujera en un escenario de aprendizaje.

La combinación de participación y materialización, entrelazadas a lo largo del tiempo, conforman el aprendizaje y cuyos resultados son los significados (Wenger, 2001). La participación de los profesores y la materialización de sus experiencias en el programa de formación tuvieron como resultado ver la demostración matemática conformada por demostraciones formales y no formales y como un proceso donde se busca la comprensión de conceptos matemáticos. En este sentido, y como lo hemos evidenciado anteriormente, el programa de formación permitió que varios profesores como Nicolás, Jacobo y Carlos, expresaran cambios en sus significados de demostración como parte de su aprendizaje acerca de la demostración matemática.

El discurso de los profesores dejó entrever que el programa de formación fue un escenario que contribuyó con la transformación de sus significados de la demostración. Por ejemplo, Carlos, Nicolás y Jacobo expresaron lo siguiente:

Carlos: La verdad es que nunca había analizado la demostración hasta el punto que la hemos analizado y había unos aspectos que yo no tenía ni idea de que las cosas fueran así. Tenía una visión muy rígida de la demostración formal y nada más. De hecho, estas charlas y las cosas que hemos visto aquí me van a hacer replantear algunas demostraciones que hago en las clases. Tal vez vaya a recurrir en algunos momentos a las demostraciones pre-formales antes que formales, a ver cómo les va a los estudiantes.

Nicolás: Gracias por darnos la oportunidad de estar en estos espacios donde se habla de matemáticas y, sobre todo, de nuestro quehacer como profesores de matemáticas. […] Creo que en este programa se lograron muchas cosas. Yo en particular me siento muy complacido de participar, puesto que pude aprender muchas cosas y, ojalá, creo que la mayoría acá piensa así, se siga abriendo estos espacios donde compartamos todas esas experiencias que tenemos unos y otros, aquí y allá, para fortalecer cada día más la carrera docente.

Jacobo: Me parece importante que haya surgido la idea de abrir este espacio para reflexionar sobre nuestra práctica docente, porque partimos de ahí, de la práctica, para ver cómo le llegamos a los estudiantes con las demostraciones matemáticas. Yo creo que pocas veces se abre un espacio para reflexionar acerca de nuestro ejercicio docente, esa es la

> parte más importante que yo puedo rescatar de este programa. Ahora, fíjate que duramos todo el semestre y a mí me parece poquito, pues uno se acostumbra a esto; se acostumbra a abrir el espacio aquí los sábados para venir a participar de esta actividad que me pareció interesante.
>
> (Carlos, Nicolás, Jacobo, encuentro mayo 24 de 2014)

Carlos manifestó cómo era de rígida su visión sobre la demostración y resaltó la posibilidad de replantear su ejercicio docente con la utilización de demostraciones pre-formales. Nicolás resaltó el haber aprendido muchas cosas y espera que se sigan ofreciendo espacios de encuentros entre los profesores. Para Jacobo lo más importante fue reflexionar sobre la práctica. Lo expresado por Carlos, Nicolás y Jacobo, junto con las diferentes intervenciones de algunos profesores vistas anteriormente, sugiere que cuando los profesores se vincularon al programa de formación y se comprometieron con el propósito de reflexionar sobre la demostración para cursos de cálculo diferencial de ingeniería, tuvieron lugar nuevas situaciones y se produjeron otros significados de la demostración. Esto lo podemos entender desde la teoría de la práctica social con los planteamientos de Wenger (2001), como el siguiente:

> Todo lo que hagamos y digamos podrá hacer referencia a lo que hayamos hecho o dicho en el pasado y aun así volvemos a producir una nueva situación, una nueva impresión, una nueva experiencia: producimos significados que amplían, desvían, ignoran, reinterpretan, modifican o confirman —en una palabra, vuelven a negociar— la historia del significado anterior del que forman parte. (pág. 77)

La práctica de la demostración y su enseñanza era conocida por los profesores a partir de sus experiencias en sus trayectorias académicas y profesionales. El programa de formación fue una propuesta donde los profesores volvieron a producir nuevas situaciones a través de sus intervenciones e interacciones entre ellos, negociando significados de la demostración que produjeron nuevos significados para los profesores. Como lo señalan Bozu e Imbernón (2009):

> […] crear comunidades de práctica que potencien la colaboración y la cooperación entre el profesorado y el intercambio de conocimiento práctico profesional se perfila como una de las mejores alternativas para un modelo de formación del profesorado orientado hacia la creación de espacios de reflexión, formación e innovación pedagógica. (pág. 5)

Para Wenger (2001), "una práctica puede tener unas pautas, pero es producir estas pautas de nuevo lo que da origen a una experiencia de significado" (pág. 77). Para los profesores, la práctica de la demostración y de su enseñanza gozaba de unas pautas enmarcadas en enfoques formales y tradicionales, pero por medio del programa de formación los profesores generaron otras pautas de hacer demostraciones. El programa de formación incluyó nuevos significados de la demostración a través de la participación de los profesores y la materialización de sus experiencias en el programa de formación elaborando demostraciones de teoremas del cálculo diferencial. Los profesores vincularon demostraciones no formales a sus significados de la demostración y expresaron considerarlas en cursos de cálculo diferencial de ingeniería.

El discurso de los profesores mostró que el programa de formación contribuyó en los cambios de sus significados de la demostración. Algunos profesores cuestionaron el enfoque formal de la demostración como única forma de presentarla a los estudiantes; otros la formación recibida bajo una perspectiva formalista de las matemáticas; y otros plantearon que la enseñanza de la demostración debía privilegiar la comprensión de conceptos.

Al finalizar el programa de formación los profesores reconocieron que la reflexión fue esencial en el programa y los conocimientos de la demostración matemática se abordaron en relación con experiencias de la práctica docente de los participantes. Las transformaciones en los significados de la demostración que se dieron en los profesores estuvieron asociadas con sus historias personales, representadas en las trayectorias de formación académica y profesional. Estas transformaciones no fueron iguales ni sincrónicas para los profesores, más bien respondieron al compromiso con la práctica que cada uno de ellos tuvo.

El programa de formación continua —expuesto en esta sección y enmarcado en las dimensiones de una comunidad de práctica— se configuró como un escenario para la negociación de significados acerca de la demostración matemática entre profesores de cálculo diferencial para ingeniería. Aspectos en el programa de formación, como: interacción, liderazgo compartido, reflexión, acuerdos, desacuerdos, confusiones, compromiso con la práctica y producción colectiva, contribuyeron con el aprendizaje de la demostración por parte de los profesores participantes. Los significados de la demostración matemática emergieron en la dinámica de la participación y materialización como parte constitutiva de la negociación de significados, en la que el cálculo diferencial tomó un papel importante en la contextualización de experiencias, actividades, debates y producciones.

Significados de la Demostración y Formación Matemática de Ingenieros

En esta sección muestro que los significados de la demostración que negocian los profesores de cálculo diferencial de ingeniería están relacionados con una utilidad indirecta de las matemáticas en la práctica de la ingeniería. El marco referencial que tomaré para esta sección incluye asuntos de la literatura de la Educación en Ingeniería relacionados con la formación matemática para ingenieros. Es así como inicialmente para estudiar la relación de los significados de la demostración con la formación matemática de ingenieros, me referiré a la utilidad de las matemáticas en la práctica de la ingeniería planteada por Kent y Noss (2003). Estos autores plantean que:

> Existe una complejidad en los diferentes usos de las matemáticas en la práctica de la ingeniería: no sólo la utilidad *directa* de las técnicas e ideas matemáticas a la práctica (por ejemplo, para hacer un análisis de caso de carga de un cierto tipo de estructura), sino también la utilidad *indirecta* de las matemáticas para la práctica, es decir, su *rol formativo en el desarrollo de un ingeniero* - las formas en que las matemáticas contribuyen al desarrollo de la pericia y juicio en la ingeniería. (pág. 16, cursiva en el texto original).

Con base en el planteamiento de Kent y Noss (2003), sobre un uso *directo* e *indirecto* de las matemáticas, los profesores participantes de esta investigación asociaron la demostración no con técnicas o nociones matemáticas para la práctica de la ingeniería (utilidad directa), sino más bien con un rol formativo de las matemáticas para la constitución de un ingeniero (utilidad indirecta). Este rol formativo lo entiendo, para el caso de la demostración, como una forma de contribuir al razonamiento y apropiación de conocimientos del estudiante para un desempeño general del ingeniero.

El planteamiento de Kent y Noss (2003) junto con otros referentes teóricos relacionados con la formación matemática de ingenieros son utilizados en la primera parte de esta sección donde discuto los roles de la demostración en la formación matemática de ingenieros. En esta primera parte presento algunos significados de la demostración matemática revelados por los profesores participantes en el marco del programa de formación continua diseñado para esta investigación. Tales significados estuvieron asociados con roles de la demostración distintos a la verificación de proposiciones matemáticas. El discurso de los profesores señaló roles de la demostración asociados con aspectos de la formación matemática de ingenieros, como: el pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación de conocimientos y la fundamentación teórica de nociones matemáticas.

En la segunda parte de esta sección, me referiré a algunas reflexiones desde la teoría de la práctica social acerca del aprendizaje de la demostración a propósito de los significados encontrados y analizados en la primera parte. Esas reflexiones se enmarcan en la concepción de un aprendizaje situado e intenta destacar algunos inconvenientes y oportunidades para la demostración en programas de ingeniería. En la tercera y última parte discuto una propuesta originada de la reflexión de los profesores que consistió en la necesidad de una mayor comunicación entre profesores de matemáticas e ingenieros para entender el campo de formación ingenieril e intentar hacer aportes pertinentes a la enseñanza de las matemáticas. Para ello planteo la constitución de lo que llamo ‘comunidades interdisciplinarias de práctica’. Esta propuesta la relaciono como parte de una formación de profesores fundamentada en la teoría de la práctica social y en respuesta a la necesidad de ampliar la comprensión de la demostración matemática para la formación de futuros ingenieros.

Roles de la demostración en la formación matemática de ingenieros.

En esta sección me refiero a las intervenciones de dos participantes del colectivo de profesores del programa de formación: Carlos y Juan; cada uno de ellos Licenciado en Matemáticas y Física, con posgrados en Matemáticas y Docencia Universitaria, respectivamente, y con amplia experiencia en la enseñanza del cálculo en programas de ingeniería. Seleccionar a Carlos y a Juan como protagonistas para ilustrar el análisis de esta sección obedeció a la claridad de sus afirmaciones en los diálogos registrados en el programa de formación sobre algunos roles que juega la demostración para la formación de ingenieros. Entre esos roles, que emergieron en la negociación de significados como respuesta a una articulación de la demostración con la formación de futuros ingenieros, se encuentran: la demostración para el desarrollo del pensamiento lógico, para la apropiación del conocimiento y como fundamentación teórica de nociones matemáticas.

La demostración para el desarrollo del pensamiento lógico.

En uno de los encuentros del programa de formación Carlos respondió al cuestionamiento que el colectivo de profesores hacía sobre el para qué se hacen demostraciones en un curso de cálculo diferencial en programas de ingeniería. Carlos manifestó que una de las funciones de la demostración era “el uso del pensamiento lógico” y enfatizó en que “las demostraciones tienen una lógica que vale la pena que los estudiantes la manejen” (Carlos, encuentro abril 5 de 2014).

De acuerdo con las secciones anteriores de este capítulo, para Carlos la demostración estaba en un contexto formalista de las matemáticas y, por lo tanto, la lógica fue relevante en todo su discurso durante el programa de formación. Con la intención de indagar con mayor claridad sobre el rol de la demostración en la formación de ingenieros entrevisté a Carlos de una manera individual al final del programa de formación con respecto al por qué vale la pena que los estudiantes aprendan la demostración. Carlos expresó lo siguiente:

> Hacer demostraciones en ingeniería me parece que, primero, les forma un pensamiento lógico a los ingenieros y, segundo, les ayuda a manejar con mucha más confianza las fórmulas que ya les han sido demostradas, porque saben que eso tiene tras de sí un razonamiento matemático correcto. (Carlos, Entrevista, agosto 26 de 2014)

Carlos reiteró que un primer rol para la demostración es la formación de un pensamiento lógico en los estudiantes Para este rol de la demostración no era claro qué significaba ‘pensamiento lógico’, para lo cual Carlos afirmó lo siguiente:

> Cuando hablo de ‘pensamiento lógico’ hago referencia a los siguientes aspectos: Primero, que haya coherencia en una argumentación, es decir, que no haya proposiciones inconexas. Segundo, que las conclusiones realmente se obtengan lógicamente de las premisas, o sea, que no haya falacias ni contradicciones. Cuando un ingeniero presenta una propuesta o realiza un diseño cuenta con unos insumos, materiales o intelectuales, y a partir de ellos debe alcanzar un objetivo. Su pensamiento lógico debe permitirle: a) Determinar si con esos recursos su objetivo es alcanzable de manera eficiente; b) Comunicar claramente su propuesta; c) Tomar decisiones acertadas, en función del

objetivo predeterminado; y d) Detectar y corregir a tiempo errores o imprevistos que surjan en el desarrollo de la actividad. (Carlos, entrevista noviembre 16 de 2014)

Carlos hace referencia a un pensamiento lógico relacionado con argumentar coherentemente y obtener conclusiones como resultado de un razonamiento lógico, es decir, un pensamiento lógico en el marco de los procesos de argumentar e inferir mediante reglas de la lógica. Para este estudio la argumentación es una práctica social contextualizada. Por lo tanto, hablar de argumentación en general puede dar lugar a ambigüedades. En lo subsiguiente uso el término argumentar relacionado con la demostración para acotar su alcance. Para ello, coincido con Douek (2007) al señalar que demostrar una proposición requiere una intensa actividad argumentativa fundamentada en 'transformaciones' de la situación planteada por la conjetura. Para este autor 'argumentar' se refiere a utilizar razones o puntos de vista, identificar enunciados, exponer referentes teóricos, con la intención de armar un conjunto de ideas para conformar una demostración.

Aunque el desarrollo del pensamiento lógico en ingenieros no sólo se puede dar a través de las matemáticas (Kent y Noss, 2003), la demostración sería un medio de las matemáticas para la formación del pensamiento lógico de estudiantes de ingeniería. La relevancia de procesos de la lógica como la abducción y la deducción para la formación de ingenieros se fundamenta en la práctica de las funciones de diagnóstico y diseño para el desarrollo de proyectos ingenieriles (Vázquez R. I., 2012).

Carlos señala que el pensamiento lógico debe permitir a los ingenieros tomar decisiones sobre el uso de recursos y el alcance de objetivos en la realización de propuestas o diseños, al igual que realizar acciones asociadas con la comunicación de ideas coherentes de un proyecto.

En ese sentido, Reséndiz (2008) plantea que los ingenieros en su práctica profesional validan hipótesis, ensayan teorías y buscan determinar mediante la deducción, cuál de esas teorías permite establecer con mayor fidelidad cuantitativa las relaciones causa-efecto. La afirmación de Carlos puede enmarcarse en lo planteado por Vázquez (2012) al referirse a que "la lógica potencia la capacidad de análisis del ingeniero y esto le permite obtener una mejor conclusión de la realidad" (pág. 128).

Se resalta entonces un significado de la demostración asociado con la formación del pensamiento lógico para estudiantes de ingeniería. Este significado de la demostración lo entiendo al reconocer la importancia del razonamiento lógico para la formación de ingenieros. Aspectos como lo abstracto y exacto de un razonamiento entrarían a complementar la formación de un ingeniero, pues la ingeniería posee también un carácter concreto y aproximado en sus procesos de actuación. En esa clase de razonamiento la demostración es la práctica por excelencia de las matemáticas en la que se recurre a tipos de argumentación, como los inductivos o deductivos para establecer la validez de alguna afirmación. Un significado de la demostración asociado con la formación del pensamiento lógico puede adquirir sentido para la formación de ingenieros a través de la competencia matemática denominada 'razonar matemáticamente'.

Algunas orientaciones para el currículo de las matemáticas en la enseñanza de la ingeniería planteadas por la European Society for Engineering Education (SEFI) [Sociedad Europea de Educación en Ingeniería] (2013), señalan que el 'razonar matemáticamente' es una de las competencias definidas globalmente para la formación de ingenieros, la cual incluye:

> […] por un lado, la capacidad de comprender y evaluar una argumentación matemática ya existente (cadena de argumentos lógicos), en particular para comprender el significado de

la demostración y para reconocer las ideas centrales de demostraciones. También incluye el conocimiento y la capacidad de distinguir entre diferentes tipos de enunciados matemáticos (definición, si-entonces-declaración, si y sólo si-declaración, etc.). Por otro lado, incluye la construcción de cadenas de argumentos lógicos y, por tanto, la transformación de razonamientos heurísticos en demostraciones propias (razonamiento lógico). (pág. 13)

Para el desarrollo de la competencia 'razonar matemáticamente' —y de acuerdo con el marco teórico de este estudio— la demostración debe ser considerada como un proceso que permita algunas acciones propias del razonamiento. De esta manera, para el desarrollo del pensamiento lógico se percibe la demostración no como un producto acabado de las matemáticas, sino como un proceso en el cual se encuentran acciones como: conjeturar, argumentar, observar condiciones hipotéticas, entre otras. Estas acciones pueden ayudar a la formación del pensamiento cuando se trate de usar el razonamiento para resolver problemas de ingeniería.

Hay que advertir que es complejo identificar usos de la demostración matemática en la práctica de la ingeniería, más cuando la demostración es una actividad propia de los matemáticos profesionales y no de la ingeniería en general. No obstante, para las matemáticas se distingue por un lado la utilidad directa como herramienta para la solución de problemas y, por otro lado, una utilidad indirecta, relacionada con el papel formativo de un ingeniero (Kent & Noss, Mathematics in the University Education of Engineers, 2003).

En esa utilidad indirecta de las matemáticas para la ingeniería se encuentra el desarrollo del pensamiento lógico y con ella se puede considerar la utilidad de la demostración para el razonamiento matemático de los estudiantes. Sin embargo, es importante no ubicar la demostración sólo como un ejercicio de reglas de inferencia, de tal manera que se presente la demostración como un simple ejercicio procedimental, que de manera extrema se asocie con la analogía de que las matemáticas son una medicina para el cerebro o músculo del intelecto. Un significado de la demostración como medio para ayudar a formar el pensamiento lógico es viable por el potencial del razonamiento matemático involucrado en la práctica de la demostración. En particular, un aspecto como la argumentación es relevante en la formación de ingenieros.

La demostración como un producto acabado de las matemáticas no es suficiente para responder a las necesidades de formación de pensamiento lógico en ingenieros. Es necesario que la enseñanza de la demostración en cursos de cálculo diferencial para ingeniería considere la exploración de contextos donde las matemáticas adquieran sentido para estudiantes de ingeniería. Como lo plantea Blockley y Woodman (2002):

> […] Ya no tenemos que ‘arar a través de’ largas páginas de demostraciones deductivas —el equipo lo hará por nosotros. Ya no tenemos que agobiarnos a través de largos cálculos— el equipo lo hará por nosotros. El reto ha cambiado desde la capacidad de hacer esto a la capacidad de interpretar el significado de las matemáticas para la ingeniería y en esto radica el desafío y el cambio de énfasis. (pág. 1)

En el desafío de plantear matemáticas que tengan sentido para la ingeniería, y articulada con avances de la tecnología en la práctica ingenieril, la demostración en cursos de cálculo diferencial debe repensarse en procura de superar la mirada de la demostración como una simple ‘cadena de cálculos’. Para ello, el significado de la demostración asociado con la formación del pensamiento lógico del estudiante de ingeniería debe atender acciones que hagan relevante los procesos como argumentar, explorar, conjeturar, entre otros. El uso de un software matemático, como un medio para recrear demostraciones debería ser un componente que puede ayudar a tal propósito.

La demostración para la apropiación del conocimiento matemático.

Además de la formación del pensamiento lógico, Carlos en su discurso resaltó un segundo rol para la demostración relacionado con la apropiación del conocimiento, entendida como una mejor comprensión de conceptos matemáticos. Esta vez, durante su participación en una de las sesiones del programa de formación, Carlos partió del hecho de que en la enseñanza del cálculo diferencial existe una serie de proposiciones que indican la derivada de funciones trigonométricas, las cuales en ocasiones se presentan como un recetario que genera dudas a los estudiantes. Él expresó lo siguiente:

> Si nosotros llegáramos a un salón y les dijéramos [a los estudiantes] copien esto y apréndanselo: derivada del seno es coseno, derivada del coseno es menos seno, derivada de la tangente tal cosa, …, el estudiante dudaría de eso, no lo manejaría con confianza. Pero, si nosotros hacemos una demostración, […] que necesita un grado de abstracción y de conocimientos anteriores, pero él ve que el profesor llega lógicamente a que la derivada del seno es coseno, él se apropia del conocimiento con más autoridad. Ese es mi punto de vista, él se apropia del conocimiento si ha visto una demostración, aunque haya pasos que no le sean fáciles de asimilar; pero, asimila más que si nosotros le damos un recetario, derivada de eso, derivada de esto. (Carlos, encuentro febrero 22 de 2014)

En lo expresado por Carlos se plantea el hecho de que, a través de la demostración formal de teoremas sobre derivadas de funciones, el estudiante puede 'apropiarse' de algunos conocimientos del cálculo diferencial con más autoridad que si se presentara un recetario de derivadas. El comentario de Carlos sugiere que está en desacuerdo con un contexto para la enseñanza del cálculo diferencial en programas de ingeniería, en el cual se presentan listas de derivadas de algunas funciones, tipo 'recetario'. En algunas ocasiones la intención de presentar esas listas es que los estudiantes las memoricen sin tener la seguridad de su validez. Al respecto, algunos matemáticos han expresado su inconformidad con cursos de cálculo etiquetados como 'cursos de libros de cocina', pues conducen a la memorización de enunciados, en forma de recetas, para luego aplicarlos a ejercicios (Ganter, 2000). Esos tipos de cursos promueven un cálculo con énfasis en repetir fórmulas para derivar funciones. No obstante, lo planteado por Carlos indica que si se presentan algunas demostraciones sobre derivadas de funciones es posible que los estudiantes puedan ver cómo y por qué deben ser utilizadas esas fórmulas de derivación. Ese planteamiento de Carlos a pesar de insinuar una crítica a la presentación de fórmulas de derivadas de funciones, se alinea con una matemática vista como causa efecto. Es decir, si se enseñan a los estudiantes las demostraciones, éstos sabrán cómo utilizarlas. Esa visión de las matemáticas está bastante cuestionada.

De la opinión de Carlos se entiende que la demostración formal permitiría al estudiante una mejor 'apropiación' del conocimiento matemático proporcionándole mayor comprensión de los conceptos para el uso de teoremas y proposiciones. Considero que la opinión de Carlos propone la demostración matemática para una mejor apropiación del conocimiento matemático mediante la acción del profesor de demostrar lógicamente la veracidad de una proposición. De esta manera, el significado de la demostración se relaciona con el rol de incrementar la comprensión de conceptos por el estudiante para el uso de proposiciones matemáticas.

Con este significado de la demostración considero que de alguna forma Carlos menciona un asunto que puede asociarse con uno de los problemas que se presentan en la formación matemática de ingenieros. Como lo plantean Kent y Noss (2003), "el 'problema de las matemáticas' es generalmente descrito como un problema de habilidades, pero esto tiene dos aspectos: el conocimiento de técnicas / hechos matemáticos y la confianza necesaria para hacer uso de ellos en un contexto de ingeniería" (pág. 27). El primer aspecto, mencionado por estos autores acerca del conocimiento matemático, se puede relacionar con la demostración de un teorema o proposición, en el sentido de que una demostración contiene varios conceptos y técnicas —estudiados en cursos universitarios o en la educación secundaria— que pueden ser comprendidos en el desarrollo de la demostración. Para el segundo aspecto, relacionado con la confianza para usar esos conocimientos, la demostración podría brindar la seguridad a los estudiantes de la veracidad de teoremas y proposiciones que se pueden utilizar en la solución de problemas. Esto podría ubicar a la demostración de proposiciones para cursos de cálculo diferencial como un medio para contribuir con la comprensión de conocimientos matemáticos y atender de alguna manera los dos aspectos del problema de las matemáticas en ingeniería planteado por Kent y Noss (2003).

Hay que señalar que el problema de la comprensión de conceptos es un asunto relevante en la enseñanza del cálculo para ingenieros. En varios estudios acerca de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en programas de ingeniería se resalta la falta de comprensión conceptual de teoremas fundamentales del cálculo por parte de estudiantes y la prevalencia del manejo de procedimientos algorítmicos (Biza, Giraldo, Hochmuth, Khakbaz, & Rasmussen, 2016; European Society for Engineering Education [SEFI], 2013; Gruenwald & Klymchuk, 2003; Klymchuk, 2008).

Considero que el significado de la demostración asociado con la apropiación de conocimientos no ubica a la demostración dentro de una utilidad directa de las matemáticas, sino como un aspecto formativo para el desarrollo del ingeniero. Este significado de la demostración trata de la comprensión de conceptos matemáticos que puede obtener un estudiante a través de la demostración, lo cual no refiere al uso de herramientas matemáticas para solucionar problemas, sino más bien señala una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación ingenieros. El significado de la demostración asociado con el desarrollo del pensamiento lógico y con una mejor apropiación de conocimientos matemáticos son ubicados en una formación general de las matemáticas para los ingenieros.

La demostración como fundamentación teórica de nociones matemáticas.

Además de los roles identificados anteriormente para la demostración —como medio para el desarrollo del pensamiento lógico y para una mejor apropiación de conocimientos matemáticos— los profesores revelaron otro tipo de rol. Esta vez, algunos profesores enmarcaron el papel de la demostración en la importancia de la fundamentación teórica del cálculo diferencial para aplicaciones en ingeniería.

Al rastrear indicios de la relación entre la demostración y la formación de ingenieros, encontré que Juan, otro de los profesores participantes de este estudio, se refirió en los siguientes términos: “Una demostración en una facultad de ingeniería, cuando uno la realiza, la hace para darle soporte a las aplicaciones que posteriormente se pueden dar en esa facultad" (Juan, encuentro marzo 15 de 2014). Juan sugiere un significado de la demostración asociado con dar soporte o fundamentación a nociones matemáticas que posteriormente se verían reflejadas en aplicaciones que se pueden discutir en una facultad de ingeniería.

La afirmación de Juan partió de su posición como profesor de cálculo diferencial, para lo cual era necesario indagar sobre el contexto del cual se generaba su afirmación. Parte de ese contexto estaba dado de su forma de concebir el cálculo diferencial. Para Juan, su perspectiva del cálculo diferencial fue la siguiente: "El cálculo diferencial en primer semestre de ingeniería es una materia de fundamentación. El estudiante se está fundamentando, llenando de herramientas que posteriormente debe utilizar en asignaturas específicas propias de la carrera" (Juan, encuentro abril 26 de 2014). Lo dicho por Juan se puede asociar con una visión general del cálculo como "herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales, a posteriori, se les busca alguna aplicación" (Cordero, 2005, pág. 269). Con esa visión del cálculo, los diferentes contenidos del cálculo diferencial se presentarían como herramientas con un procedimiento algorítmico cuyo uso se esperaría posteriormente en aplicaciones de las matemáticas a la ingeniería. Se encuentra una coherencia entre lo manifestado por Juan sobre el rol de la demostración en programas de ingeniería con lo manifestado sobre su visión del cálculo diferencial. Según las afirmaciones de Juan se esperaría que algunas demostraciones de proposiciones se enseñaran en clase para que posteriormente ayuden a soportar matemáticamente aplicaciones durante una carrera de ingeniería.

Acerca de la afirmación de Juan sobre la demostración entiendo que la utilidad de la demostración se traslada a un momento futuro, que, de hecho, no hay ninguna seguridad de que ocurra. Igualmente, la demostración se presentaría en cursos de cálculo diferencial 'por si acaso' es necesaria en aplicaciones futuras de la formación que brinda una facultad de ingeniería.

Las afirmaciones de Juan revelan algunos significados de la demostración y a su vez sugieren una concepción de la formación matemática de futuros ingenieros. Para Juan las matemáticas, en el caso del cálculo diferencial, son vistas como un conocimiento base (fundamentación) que sirve para el desarrollo de otras asignaturas en la formación del ingeniero. En ese sentido, las demostraciones ayudan a soportar matemáticamente las aplicaciones que se estudien durante una carrera de ingeniería. Esto se puede relacionar con un modelo de formación teoría-aplicación, semejante al modelo de la Laplace (analítico) de la Escuela Politécnica. En ese modelo se conciben las matemáticas como un corpus autónomo que suministra los conocimientos generales para posteriormente utilizarlos en aplicaciones. De acuerdo con lo planteado por Juan, el rol de las matemáticas, puede relacionarse con lo señalado por Stæckel (1914), al resaltar que las matemáticas proporcionan a los estudiantes de ingeniería los conocimientos matemáticos suficientes para que puedan estudiar otras asignaturas.

El significado de la demostración sugerido por la afirmación de Juan, asociado con dar fundamentación a nociones matemáticas que posteriormente se utilicen en aplicaciones durante la carrera de ingeniería, está presente en el discurso de otros profesores participantes de este estudio. Uno de esos profesores fue Carlos quién manifestó necesaria la demostración formal en la formación matemática de estudiantes de ingeniería para enfrentar posibles retos en su quehacer profesional. Carlos expresó lo siguiente:

> Yo pienso que nuestro objetivo es llegar a que nuestros estudiantes comprendan la demostración formal, que lo demás va encaminado hacia allá. Quiero recalcar algo, la

> matemática como nosotros la conocemos en alguna medida ha sido hecha por ingenieros y por biólogos haciendo aplicaciones, luego los matemáticos toman y formalizan. Entonces, no podemos descuidar el hecho de que tenemos unos estudiantes ahí de ingeniería y que ellos van a tomar las matemáticas y van a darle aplicación en la práctica. Pero, es posible que en algún momento necesiten matemática para hacer cosas más allá de lo que está hecho, entonces esa posibilidad la tienen si conocen las matemáticas muy bien estructuradas desde el punto de vista formal, o sea, no vamos a bajar la guardia, el objetivo es que las demostraciones ellos [los estudiantes] las deben comprender formalmente. (Carlos, encuentro abril 12 de 2014)

En lo dicho por Carlos distingo dos elementos importantes para el caso de la demostración en la formación de ingenieros. Un primer elemento hace referencia a la generación de conocimiento matemático a través de aplicaciones de la ingeniería. Esta primera afirmación de Carlos motiva a considerar que algunos procedimientos o técnicas matemáticas se desarrollaron en el marco de la solución de problemas de ingeniería. Considerando la perspectiva del aprendizaje situado descrito en el marco teórico sería conveniente que profesores de matemáticas retomaran problemas de ingeniería para considerarlos como contextos en la enseñanza de las matemáticas. Autores como Harris y otros (2014) y Paz (2007) rechazan la práctica de la enseñanza de las matemáticas no contextualizada para la ingeniería. En particular, considero que, para el caso de la demostración matemática, se podrían examinar aquellos teoremas y demostraciones que respondan a situaciones propias de la ingeniería. En caso de que se pudieran identificar algunas situaciones de esa naturaleza, su importancia para la enseñanza de la demostración radicaría en que pueden aportar contextos históricos, sociales o culturales pertinentes para plantearlas como experiencias de aprendizaje.

El segundo elemento identificado en el discurso de Carlos fue que los estudiantes de ingeniería deberían comprender la demostración formal porque ella hace parte de una matemática bien estructurada formalmente, la cual en algún momento ellos podrían necesitar para realizar innovaciones en ingeniería. Lo dicho por Carlos está relacionado con lo manifestado anteriormente por Juan y sugiere un significado de la demostración como fundamento teórico que los estudiantes podrían utilizar, ya no sólo al interior de la carrera sino para aplicaciones innovadoras en futuros escenarios de su quehacer profesional. La afirmación de Carlos permitió ampliar un significado de la demostración, reconocido en el discurso de Juan, incluyendo dar fundamentación a nociones matemáticas que posteriormente se utilicen en aplicaciones durante la carrera de ingeniería y en la vida profesional.

El discurso de Carlos permite también explorar una relación entre las matemáticas y la tradición en la formación de ingenieros. La insistencia de Carlos por la importancia del conocimiento, por parte de los estudiantes, de unas matemáticas bien 'estructuradas' —desde el punto de vista formal para el desarrollo de futuras aplicaciones— sugiere el reconocimiento de la necesidad de unas matemáticas teóricas en la formación de ingenieros. Lo anterior se puede relacionar con algunos aspectos de la formación matemática de ingenieros en la primera mitad del siglo XX. Especialmente, cuando D'Ocagne (1914) enfatiza el hecho de que es necesaria una sólida formación matemática del ingeniero para que pueda comprender y utilizar de manera no ciega el conocimiento producido por las ciencias de la ingeniería en su práctica. Es así como el significado de la demostración, exhibido por Carlos, se puede ubicar en un contexto de formación de ingenieros como fundamento teórico.

El significado de la demostración como fundamento teórico, manifestado por Carlos, puedo considerarlo desde dos ópticas. Un primer punto de vista parte de que es arriesgado suponer que la demostración de teoremas y proposiciones como conocimiento matemático servirá de por vida a un estudiante de ingeniería. Si se toma la perspectiva de aprendizaje situado se puede considerar que los conocimientos matemáticos para ingenieros deberían ser enseñados en el momento en que sean requeridos por la necesidad de aplicación para la solución de problemas. Éstos gozarían de vigencia y pertinencia, ya sea en la misma u otras asignaturas de la carrera, o en problemas de la vida profesional o académica del ingeniero. Pienso que la demostración en un curso de cálculo diferencial para ingenieros puede ser considerada como una experiencia de aprendizaje que aporte a la comprensión de conceptos y planteamiento o solución de problemas propios del mismo curso y no a la esperanza de futuras aplicaciones. De tal manera que la demostración para la formación matemática de ingenieros no se convierta en un fin, sino en un medio que contribuya a la comprensión de conceptos matemáticos.

Un segundo punto de vista sobre el discurso de Carlos perfila la demostración con una importancia teórica como parte de unas matemáticas formales necesarias para la innovación y el tratamiento científico de problemas. Para entender esa postura de Carlos sobre la demostración puedo considerar la visión planteada por Parra (2010) sobre las matemáticas y las ciencias básicas en general que aportan a programas de ingeniería, en particular a la ingeniería de sistemas en Colombia. Este autor al referirse a los fundamentos de las ciencias básicas para la ingeniería de sistemas, plantea lo siguiente:

No basta únicamente con la aplicación de herramientas concretas, sino que, además, el conocimiento de los fundamentos abre las posibilidades para entender el tratamiento científico de los problemas, lo que a su vez conduce a una mayor comprensión de las tecnologías que deban adaptarse. Pero, es más: si no se conocen los fundamentos, entonces no es posible desarrollar nuevas tecnologías, ni intentar proyectos de verdadera innovación (Podría decirse que un país como Colombia no desarrolla tecnología informática, sino que la importa y la aplica y a veces la adapta y así el tema de la fundamentación podría pasar a un segundo plano. Pero este es un asunto coyuntural y no epistemológico y por eso no ameritaría quitarle a la ingeniería de sistemas su compromiso con el desarrollo científico disciplinar). (Parra, 2010, pág. 80)

La propuesta de Parra (2010) lo entiendo en el sentido de no reducir el rol de la ingeniería a una simple aplicación de conocimiento de matemáticas u otras ciencias básicas. Más bien, además de ese papel instrumental de las ciencias básicas en la formación de ingenieros se consideraría tener la posibilidad de que estas ciencias contribuyan a una formación que promueva la formación de un ingeniero no sólo ‘profesional’ sino lo ‘científico’. Según Sobrevilla (2000), existe el dilema de mantener la presencia de contenidos y competencias para un ámbito ‘profesional’ o para un ámbito ‘científico’ en la formación de ingenieros. Para un ámbito ‘profesional’ se sugiere un énfasis en las competencias laborales que respondan al sector productivo. Mientras que para el ámbito ‘científico’ se espera un fortalecimiento en competencias investigativas con una presencia importante en ciencias básicas. Tal vez, el problema no estaría en escoger uno de los dos énfasis para la formación de ingenieros, sino en establecer puntos de encuentro o equilibrio donde convivan los aspectos profesionales y científicos. La discusión está abierta sobre este asunto. Hay quienes defienden la presencia de una robusta participación de las ciencias básicas, de tal manera que pueda impulsar la investigación y desarrollo de la tecnología en programas de ingeniería (Parra, 2010).

Esta breve reflexión sobre lo profesional y lo científico en programas de ingeniería puede ayudar a interpretar la afirmación de Carlos. Él se refirió a que, si bien los estudiantes de ingeniería van a darle aplicación a las matemáticas en la práctica profesional, también es necesario conocer unas matemáticas bien estructuradas y formales para 'hacer cosas más allá de lo que está hecho' (innovación) y, por tanto, los estudiantes deben comprender demostraciones formales. En este sentido, el discurso de Carlos sugiere un significado de la demostración relacionado con la fundamentación matemática de un ingeniero en su formación científica, puesto que el trabajo académico en ciertas áreas científicas de la ingeniería requiere el conocimiento de teoremas y demostraciones matemáticas como parte de su fundamentación. Es así como la demostración de teoremas y proposiciones entraría en ese componente de formación matemática para estudios que promuevan la innovación científica, y con ello se ubicaría a la demostración en una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación de futuros ingenieros.

Finalmente, se tiene que los roles de la demostración evidenciados en la formación matemática de ingenieros en esta sección estuvieron asociados con: la formación del pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación del conocimiento y la fundamentación teórica para aplicaciones dentro de la carrera o en innovaciones futuras del quehacer profesional. Estos significados de la demostración muestran poca diferencia entre la demostración para estudiantes de un programa de matemáticas y para estudiantes de programas no matemáticos como las ingenierías.

De acuerdo con los hallazgos descritos en esta sección los significados de la demostración se relacionan con una utilidad indirecta o papel formativo de las matemáticas para la ingeniería. Es decir, la demostración vista como un medio para contribuir con aspectos formativos generales en la constitución de un ingeniero, como los que involucran desarrollar la competencia de razonar matemáticamente, apropiar conocimientos matemáticos para la comprensión conceptual de teoremas y, por último, fundamentar matemáticamente algunas nociones que podrían ser útiles para un ingeniero. El discurso de Carlos y el de Juan acerca de la demostración, las matemáticas y la ingeniería sugiere que los profesores exhiben una concepción de formación matemática de futuros ingenieros atendiendo a una perspectiva convencional de las matemáticas como fundamento teórico asociada con teoría-aplicación. Estas conclusiones tienen sentido en el marco teórico que he tomado para explicar los significados. Sin embargo, estos hallazgos en la teoría de la práctica social generan algunas inquietudes que trataré a continuación.

Reflexiones a partir de la teoría de la práctica social.

Los significados de la demostración identificados en los discursos de Carlos y Juan se refieren al aspecto causal en un contexto de las mismas matemáticas, dejando a un lado la relación con situaciones concretas en contextos de la ingeniería. Como lo plantea la European Society for Engineering Education [SEFI] (2013):

> Si la teoría se presenta como una pieza terminada de la matemática, los estudiantes no ven el proceso de creación y pensamiento detrás de ella (como es a menudo también en el caso de los artículos matemáticos). Por lo tanto, el profesor debe explicar el razonamiento detrás de la creación de definiciones y teoremas y no sólo debe presentar las definiciones formales y argumentos, sino que debe proporcionar una cantidad considerable de material explicativo. (pág. 48)

Vista así, la demostración como un producto, es posible que los estudiantes la perciban como un conocimiento innecesario y poco trascendental para su formación. Los significados considerados en este estudio sobre la demostración y su relación con la ingeniería motivan una discusión sobre la forma de aprender una práctica matemática como es la demostración en programas no matemáticos. Dada la importancia en la enseñanza de la ingeniería del paradigma del aprendizaje situado (Bingolbali & Monaghan, 2008; Gómez, Hernández, & Morales, 2015; Johri & Olds, 2011; Paz, 2007), a continuación, presento algunas reflexiones acerca del aprendizaje de la demostración. Es de resaltar en la enseñanza de la ingeniería que la importancia del aprendizaje situado se fundamenta en el papel del contexto en las interacciones entre estudiantes y actividades de aprendizaje (Gómez, Hernández, & Morales, 2015).

Asumir la demostración en la perspectiva del aprendizaje situado implica considerar algunos aspectos, como la demostración como práctica social, el contexto y actividades de aprendizaje, entre otras. Inicialmente, en esta perspectiva la demostración no podría considerarse como un producto acabado de las matemáticas, sino como una práctica social.

Si bien la demostración es una práctica social propia de las comunidades de matemáticos de profesión, alejándola de una perspectiva de aprendizaje situado para estudiantes de ingeniería, existen aspectos claves de la demostración que pueden ser rescatados para la formación de futuros ingenieros. Según Hanna y De Villiers (2012), la demostración para los matemáticos "es mucho más que una secuencia de pasos correctos; es también y, quizás más importante, una secuencia de ideas y puntos de vista con el objetivo de la comprensión matemática" (pág. 444). Es precisamente la comprensión de teoremas, proposiciones y conceptos matemáticos un aspecto a resaltar para el aprendizaje de la demostración en cursos de cálculo diferencial para programas no matemáticos. No obstante, es también clave para la enseñanza de la demostración considerar cómo se busca tal comprensión del conocimiento matemático.

La demostración se considera como una práctica social propia del campo de las matemáticas, siendo la comunidad de matemáticos de profesión la comunidad de referencia. Esto puede generar algunas inconvenientes para la enseñanza de la demostración en programas de ingeniería, pues la demostración no es propia de la práctica profesional de ingenieros. Según Hendricks (2001), en la mirada del aprendizaje situado, los estudiantes deberían aprender involucrándose en actividades similares a las que realizan expertos de una comunidad. Por lo tanto, para el aprendizaje de la demostración los estudiantes deberían involucrarse en actividades similares o del mismo tipo que enfrentan matemáticos de profesión. Sin embargo, considero que para el caso de estudiantes de ingeniería las actividades de aprendizaje de la demostración deberían compartir actividades en contextos tanto de las matemáticas como de la ingeniería.

Para esas actividades de aprendizaje de la demostración, el aula de clase se asume como una comunidad de aprendices, donde el ambiente de aprendizaje debe permitir que los estudiantes puedan participar de manera productiva en experiencias compartidas. Sin embargo, el aprendizaje situado no deja de ser un desafío para la enseñanza en la educación universitaria, pues sugiere la generación de un escenario social de conocimiento en donde los estudiantes participen en situaciones 'auténticas'. Como lo plantean Brown, Collins, y Duguid (1989), cuando se habla de actividad auténtica se debe considerar que al trasferir actividades al aula su contexto resulta inevitablemente trasmutado por tareas del aula y condiciones de la cultura escolar. El aprendizaje de la demostración no es ajeno a las condiciones de la organización curricular de los programas de ingeniería, pues se deben respetar tiempos, contenidos, competencias, objetivos predeterminados, aspectos que pueden dificultar la implementación de un aprendizaje situado. Las actividades de aprendizaje de demostraciones de teoremas y proposiciones para un curso de cálculo diferencial en ocasiones se ven afectadas por los afanes de tiempo para el cumplimiento de una programación del curso. Tal vez las actividades pueden obedecer a criterios relacionados con la riqueza de los argumentos de la demostración para la comprensión de conceptos y elementos matemáticos para el planteamiento o solución de problemas. Por supuesto, esas actividades de aprendizaje de la demostración enmarcadas en la perspectiva del aprendizaje situado deben propiciar estrategias para apoyar la actividad colaborativa de los estudiantes en contextos pertinentes a la ingeniería, mediante la interacción social entre ellos y con el conocimiento aprendido y por aprender.

Por último, en relación con el aprendizaje de la demostración se debe considerar que para el caso del aprendizaje situado en la enseñanza de la ingeniería "en el entorno de clase tradicional, no es posible en todo momento contar con eventos que permitan el desarrollo de actividades reales y contextualizadas" (Paz, 2007, pág. 11). Por lo tanto, pienso que el contexto para actividades de aprendizaje de la demostración puede considerar experiencias de los estudiantes y de los profesores, problemas de la física relacionados con situaciones de la ingeniería, situaciones geométricas, uso de entornos informáticos mediante software para simulaciones de situaciones de las matemáticas o de la física, entre otras, como oportunidades de aprendizaje. El uso de entornos de simulación, por ejemplo, mediante un software matemático para una actividad de aprendizaje de la demostración permitiría la exploración de condiciones hipotéticas para la aplicación de un teorema y el ensayo y error en los planteamientos de conjeturas y contraejemplos. Sin embargo, el uso de software en la práctica de la demostración puede variar aspectos intrínsecos de la demostración asociados con los dilemas entre procesos inductivos y deductivos, empíricos y teóricos, entre otros.

En esta sección del análisis de la información se encontró que los significados de la demostración manifestados por los profesores están principalmente asociados con una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación de ingenieros. Es decir, la demostración aporta a la formación del pensamiento lógico de los estudiantes, contribuye con la 'apropiación' del conocimiento matemático mediante la comprensión de conceptos y con la fundamentación teórica de los conocimientos matemáticos que pueden ser necesarios en actividades futuras del estudiante.

Considero que una de las implicaciones de esos significados atribuidos a la demostración es propiciar una enseñanza de la demostración 'por si acaso' es necesaria en el quehacer del futuro ingeniero. Los significados evidenciados en esta sección perpetúan una mirada formal de la demostración, un proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración como un fenómeno enmarcado en una estructura causa-efecto y poco relacionada con contextos de la ingeniería.

Comunidades interdisciplinarias de práctica: un espacio de formación entre profesores de matemáticas e ingenieros.

Los significados de la demostración construidos por los profesores durante sus trayectorias académicas y profesionales tuvieron poco en cuenta problemas del contexto de la ingeniería. Considero que esto responde a lo tratado en las dos primeras secciones de este capítulo y en lo adelantado en esta tercera sección. Por un lado, en la primera sección se evidenció que los profesores fueron formados como licenciados en matemáticas sin ninguna relación con la ingeniería. Por otro lado, como se mostró en la segunda sección, durante el desarrollo del programa de formación entre profesores del área de matemáticas, los aspectos asociados con la ingeniería estuvieron poco presentes, a pesar de que las intervenciones de algunos profesores consideraron siempre que las demostraciones iban dirigidas a estudiantes de ingeniería. En ese momento, los significados de la demostración estuvieron mediados por la condición de que el contexto de enseñanza era para estudiantes de ingeniería. Por tanto, los profesores llegaron a negociar un aspecto relevante como fue el grado de abstracción de las demostraciones, marcando una diferencia con demostraciones dirigidas a estudiantes de programas de matemáticas, las cuales son fundamentalmente formales. En lo referente a esta sección, la relación de la demostración que los profesores asocian con la ingeniería se dio bajo una utilidad que no considera la solución de problemas propios del contexto de esa área del saber. Aquí se advirtió que el contexto natural de la demostración son las mismas matemáticas.

Para atender una relación de la demostración matemática con un contexto de la ingeniería, considero que un programa de formación para profesores puede ser un espacio adecuado para estrechar las relaciones entre demostración y formación matemática de ingenieros.

Es necesario que dicho programa de formación vincule la participación de otros actores diferentes a profesores de matemáticas. Algunos profesores participantes de esta investigación, como Carlos, expresaron su punto de vista dejando entrever la necesidad de interactuar con profesores del área de ingeniería. Carlos manifestó su preocupación al respecto de la siguiente manera:

> La demostración es necesaria en ingeniería, creo que no dudamos de eso, la cuestión es cómo le llegamos a los estudiantes, cómo le llegamos para que algunos teoremas que son claves para su quehacer se los apropien y estén seguros de que realmente eso tiene una validez. A nosotros como profesores de matemática en la facultad de ingeniería nos falta tener más contacto con los ingenieros en el sentido de qué parte de las matemáticas son las que ellos necesitan más. (Carlos, encuentro mayo 24 de 2014)

Carlos expresó la importancia de la demostración en la formación del futuro ingeniero y señaló la poca relación académica que tenían los profesores de matemáticas con los ingenieros. Él planteó la necesidad de una comunicación de los profesores de matemáticas con los ingenieros para entender su campo de formación e intentar hacer aportes pertinentes a la enseñanza de las matemáticas.

Lo expresado por Carlos sugiere la necesidad de una formación que propicie encuentros de profesores de matemáticas e ingenieros en los que se puedan tratar colectivamente asuntos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. En estudios recientes se destacó la importancia de tener contactos estrechos entre los profesores de matemáticas y los departamentos de ingeniería para trabajar asuntos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Barker, y otros, 2004; Broadbridge & Henderson, 2008; Cardella, 2008;

European Society for Engineering Education [SEFI], 2013; Ganter & Barker, 2004). Es posible que los encuentros entre profesores de matemáticas e ingenieros generen otras aproximaciones a la demostración y permita explorar vínculos con la ingeniería.

Considero que la idea de generar encuentros de profesores de una facultad de ingeniería para tomar parte en discusiones sobre temas como la enseñanza de la demostración matemática en esa área es un asunto complejo. A continuación, me referiré a este asunto de manera detallada.

Reséndiz (2008) plantea que los profesores de los tres componentes del cuerpo de conocimientos del ingeniero (las ciencias básicas, las ciencias de la ingeniería y los métodos de diagnóstico y diseño) son de perfiles diversos y "todos demasiados activos en su propia especialidad y sin tiempo para buscar los modos […] de armonizar continuamente su enseñanza con la de sus colegas de otros cursos" (pág. 135). Sin embargo, las tendencias de individualismo o de aislamiento de los profesores universitarios a la hora de trabajar y de aprender de los otros y con los otros "se están superando poco a poco y se observa un cambio y una transformación hacia una nueva cultura profesional, en la cual el individualismo se transforma en colaboración" (Bozu e Imbernón, 2009, pág. 2).

Teniendo en cuenta la iniciativa de Carlos, sobre la necesidad de comunicación con los ingenieros, propongo, como un aporte de esta investigación, la constitución de 'comunidades de práctica' entre profesores de una facultad de ingeniería, las cuales llamaré 'comunidades interdisciplinarias de práctica' como parte de formación de profesores universitarios. Esta iniciativa puede ser tomada en cuenta para futuros temas de investigación o planes de formación para profesores de una facultad de ingeniería. A continuación, presento algunos aspectos para la constitución de una ‘comunidad interdisciplinaria de práctica’ y consideraciones para su desarrollo.

Las comunidades de práctica son “grupos de personas que comparten una preocupación, un conjunto de problemas o una pasión sobre un tema y que profundizan su conocimiento y pericia en esta área mediante la interacción en forma permanente” (Wenger, McDermontt y Snyder, 2002, pág. 4). Por lo tanto, la propuesta de una ‘comunidad interdisciplinaria de práctica’ la entiendo como una oportunidad de generar una configuración social conformada por profesionales de diferentes disciplinas que se agrupan para llevar a cabo una empresa de su interés. Esto está en concordancia con lo planteado por Bozu e Imbernón (2009), en lo que respecta a las comunidades de práctica en la educación superior, al señalar que:

> […] la comunidad de práctica en el contexto de la educación superior sería un grupo de personas (docentes e investigadores) unidas por intereses comunes para compartir y construir de forma colaborativa conocimientos especializados, intercambiar información y experiencias sobre la propia práctica profesional, interactuar para seguir aprendiendo y relacionarse entre sí, de tal manera que se desarrolla un repertorio común de pensamiento y acción y se constituyen así espacios para la mejora de la formación docente y el desarrollo profesional. (pág. 5)

Una comunidad interdisciplinaria de práctica propuesta para el asunto de la articulación de las matemáticas con la formación de ingenieros —de tal manera que pueda tratarse el asunto de la demostración en cursos de cálculo diferencial para programas de ingeniería— estaría conformada por lo menos por profesores de matemáticas, física e ingeniería. El propósito inicial de esta comunidad sería explorar una articulación de las matemáticas con la formación de un futuro ingeniero y de manera particular tratar el asunto de la demostración matemática.

En la universidad donde se realizó el presente estudio existen varios profesores de la facultad de ingeniería cuya vinculación laboral corresponde a contratación por horas, lo cual puede representar un inconveniente al momento de cultivar una comunidad interdisciplinaria de práctica. Es posible que otras universidades compartan esta situación de vinculación de profesores y genere un inconveniente para la participación de los profesores en la comunidad interdisciplinaria de práctica. Sin embargo, en la medida en que existan escenarios institucionales, como programas de formación o programas de investigación en el marco de la Educación Matemática o de la Educación en Ingeniería, es posible que se puedan crear algunas condiciones para constituir una comunidad interdisciplinaria de práctica.

Entre las condiciones para la constitución de una comunidad interdisciplinaria de práctica se encuentran los tres elementos constitutivos señalados Wenger (2001), como son ‘dominio’, ‘comunidad’ y ‘práctica’. Par este caso, el dominio estaría conformado por las matemáticas y las ciencias de la ingeniería. La comunidad estaría conformada no sólo por profesores de matemáticas, física e ingeniería, sino también por estudiantes de ingeniería o de educación matemática a nivel de posgrados interesados en la formación matemática de ingenieros. La práctica se asociaría con las matemáticas como disciplina de servicio, utilizando problemas de la práctica profesional ingenieril como asuntos de estudio para la articulación de las matemáticas con la formación de ingenieros. Esos tres elementos, ‘dominio’, ‘comunidad’ y ‘práctica’, además de caracterizar la comunidad interdisciplinaria de práctica como una estructura social diferente de otros tipos de comunidades, brinda “un lenguaje común que facilita la discusión, acciones colectivas y esfuerzo para ganar legitimad, patrocinios y fuentes de financiamiento en una organización” (Wenger, McDermott y Snyder, 2002, p. 40).

Las comunidades de práctica interdisciplinaria tienen un carácter voluntario. Por lo tanto, cobra importancia generar el entusiasmo suficiente para atraer y comprometer a los miembros de la comunidad. Algunos principios para cultivar una comunidad de práctica planteados por Wenger, McDermott y Snyder (2002) pueden ser adaptados a lo que definimos como ‘comunidades de práctica interdisciplinaria’. En este caso, entre esos principios se pueden señalar los siguientes:

- Diversificar la participación de los miembros de la comunidad. La participación de las personas en la comunidad es motivada por varias razones. Es así como se debe generar varias actividades donde los miembros se sientan identificados, por ejemplo, algunas acciones centrarán su atención en la docencia, pero otras pueden ser de otros tipos, como de investigación o de extensión social.
- Explorar perspectivas internas y externas. Sugiero propiciar diálogos con otras comunidades interesadas en la formación matemática de ingenieros; de tal manera que se puedan explorar intercambios de ideas o logros. Esto permitiría potenciar las actividades propias de la comunidad de acuerdo con otras comunidades de mayor experiencia en los temas de estudio.
- Generar espacios públicos de debate. Por lo general las comunidades tienen sus espacios de encuentros, ya sea físicos o virtuales, que sólo les pertenece a los miembros de la comunidad. Sin embargo, es necesario generar espacios públicos de debate, que pueden ser mediante eventos académicos, para fortalecer las dinámicas de

comunicación entre los miembros de la comunidad y con personas externas a ella.

Estos espacios servirían también para divulgar los avances que realice la comunidad.

La constitución de una comunidad interdisciplinaria de práctica como parte de un escenario de formación para profesores que laboran en facultades de ingeniería puede generar resultados que faciliten procesos de negociación de significados sobre la enseñanza de la demostración matemática para la formación de un futuro ingeniero. Para ello la teoría de la práctica social (Wenger, 2001), junto con aportes de la Educación Matemática y de la Educación en Ingeniería, se tomarían como referentes teóricos para adelantar una aproximación de la demostración matemática para programas de ingeniería, no sólo para cursos de cálculo diferencial, sino para los diferentes cursos de matemáticas del currículo en ingeniería. De acuerdo con Abdulwahed, Jaworski, y Crawford, (2012) "se podría esperar que la investigación colaborativa entre matemáticos y personal de ciencias e ingeniería enriquezca el campo de estudio" (pág. 59) de la Educación Matemática.

Una vez establecida una comunidad interdisciplinaria de práctica existen varios asuntos a emprender sobre la enseñanza de la demostración en la ingeniería, los cuales deben considerar argumentos generales de la enseñanza de las matemáticas para la ingeniería. Como lo plantea Camarena (2009):

> Las investigaciones que se han efectuado verificaron que gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento, y que con el tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a los ambientes de aprendizaje lo cual carece de sentido para aquellos estudiantes que no desean ser matemáticos. (pág. 17)

En lo que respecta a la demostración matemática, a través de los significados iniciales obtenidos en este estudio, identifiqué una aproximación a la demostración matemática como una demostración formal y como un producto acabado propio de una matemática 'pura'. La demostración matemática enseñada exclusivamente en un contexto de matemáticas 'puras' —con una presentación exclusivamente formal— puede carecer de sentido para estudiantes de ingeniería. Al tratar la demostración matemática en el contexto de otras ciencias se puede articular con algunas utilidades para programas de ingeniería. Se puede considerar para ello adelantar estudios sobre la demostración matemática con argumentos de la física. Autores como Hanna y Jahnke (2002) manifiestan que "la enseñanza de las demostraciones matemáticas utilizando los conceptos y principios de la física es un enfoque pedagógico prometedor, digno de mayor exploración" (pág. 8).

Desde la Educación Matemática la demostración puede ser vista como un recurso para la enseñanza, de tal manera que se privilegie la comprensión de conceptos. Al ampliar los significados de la demostración que incluyan no sólo la demostración formal, sino también la no formal, se puede asumir una comprensión de la demostración como un proceso. La idea de aprendizaje de la demostración que se emplearía sería la de un aprendizaje situado, pero teniendo como referentes las comunidades de matemáticos de profesión y comunidades de ingenieros; con lo cual, se fomentaría, a través de la enseñanza de la demostración, acciones de prácticas matemáticas como explorar, argumentar, conjeturar que son pertinentes en el contexto de resolución de problemas para ingeniería.

De acuerdo con Radford (1994) "la enseñanza de la demostración no es simplemente un problema que involucra solo las ideas de demostración, sino que concierne a la actividad matemática misma" (pág. 23). Por eso, como se ha planteado anteriormente, la demostración se considera una práctica social propia de las matemáticas y no de la ingeniería, por lo cual es posible que no se vea una relación directa de la demostración con problemas del contexto de la ingeniería. En tal caso, la demostración puede aportar elementos importantes en la formación de un futuro ingeniero si se concibe no como un contenido de un curso determinado, sino como un recurso de enseñanza que propicie la comprensión de conceptos matemáticos y, por supuesto, la comprensión de teoremas que son utilizados en problemas de la ingeniería.

La enseñanza de la demostración bajo un enfoque de aprendizaje situado puede considerar constructos como los que Lave y Wenger (1991) denominan *participación periférica legítima* y que luego fue ampliado por Wenger (2001) con la discusión sobre *comunidades de práctica*. El aprendizaje como resultado de la participación en prácticas de comunidades sociales sería un enfoque que permitiría a estudiantes de ingeniería construir significados de la demostración matemática desde una perspectiva de práctica social. Para ello, el aula se tomaría como una comunidad de práctica de aula (Calvo, 2001; Camargo, 2010), pero con la característica de que para cursos de cálculo diferencial la demostración matemática consideraría demostraciones formales y no formales, como se planteó en este estudio. Esto puede sugerir asumir argumentos empíricos y deductivos, con el reto de establecer articulaciones de procesos propios de comunidades de matemáticos de profesión en la práctica demostrativa, con acciones como la exploración, formulación de conjeturas y argumentos propios de la ingeniería.

Lo expuesto anteriormente es sólo una manera de visualizar un estudio de la demostración matemática en un contexto de formación de profesores y sin la pretensión de ser la mejor propuesta, pero sí con la intención de ser considerada por profesores de matemáticas e ingenieros de facultades de ingeniería. Tal como lo plantea Wenger (2001), la negociación de significados siempre "genera nuevas circunstancias para posteriores negociaciones y significados. Constantemente produce nuevas relaciones con el mundo y en el mundo. El significado de nuestro compromiso con el mundo no es una situación fija, sino un proceso continuo de negociación renovada" (pág. 79).

CAPÍTULO 5:
CONCLUSIONES

Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue analizar los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y su relación con la formación matemática de ingenieros. El significado bajo la perspectiva de la teoría de la práctica social involucra una manera de hablar de la forma como se experimenta la vida y el mundo, tanto desde un plano individual como colectivo (Wenger, 2001). Por tanto, cuando hablo de significado me refiero no a definiciones ni a relaciones tipo signo-referente, sino más bien a experiencias que se constituyen en escenarios de negociación a través de la participación en prácticas definidas por una comunidad. Es así como la principal fuente de información en esta investigación fueron los encuentros de los profesores en un programa de formación continua, bajo la concepción de una comunidad de práctica; aunque otras fuentes que sirvieron de información complementaria fueron: autobiografías, entrevistas y artefactos documentales.

Las categorías que tomé para analizar los significados de la demostración matemática de profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería dieron respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados de la demostración matemática manifestados por profesores de cálculo diferencial y cómo se relacionan con la formación matemática de ingenieros? Para ello, en la primera categoría de análisis, denominada *Demostración Matemática: Experiencias de Vida Académica y Profesional*, reporté como hallazgo de esta investigación que el significado de la demostración matemática no queda constituido por un sólo momento al enfrentar su estudio por primera vez, sino que es histórico y potencialmente cambiante. Encontré que el significado de la demostración matemática por parte de los profesores no correspondía a la reproducción de una definición de un libro de texto, sino al resultado de un proceso de negociación en sus trayectorias de vida académica y profesional. Esto coincide en forma general con el aspecto social e histórico de algunas aproximaciones a la demostración matemática que la resaltan como una práctica social que está sujeta a la dinámica de acontecimientos sociales e históricos de las comunidades donde se desarrolla (Arsac, 2007; Camargo, 2010; Crespo, Farfán, & Lezama, 2010; Godino & Recio, 2001; Grabiner, 2012; Hemmi, 2006; Moreno, 1996). Asumir los significados de la demostración por parte de los profesores de esta manera implica comprender que cualquier transformación de esos significados debe ser resultado de negociaciones al interior de alguna comunidad.

La negociación de significados de la demostración matemática en la trayectoria académica (educación secundaria y terciaria) de algunos profesores estuvo influenciada por normas sociales y sociomatemáticas asociadas con formas de enseñanza de la demostración e interacciones con sus formadores. Se encontró que normas como repetir demostraciones bajo un formato igual para todos los estudiantes y esquemas tradicionales de enseñanza de la demostración como definición – teorema – demostración, permiten la construcción de un significado asociado con la perspectiva formalista de las matemáticas; es decir, la demostración como "una sucesión finita de proposiciones que empieza con un conjunto de axiomas y a través de pasos lógicamente válidos, llamados reglas de inferencia, arriban a una conclusión" (Griffiths, 2000, pág. 2). Los significados de la demostración manifestados por los profesores sugirieron que estaban inmersos en un contexto de matemáticas, que en términos de Radford (2013), podemos describir como centradas en la difusión del conocimiento que debe ser aceptado sumisamente tal como es presentado.

Otro de los hallazgos de esta investigación es que algunos profesores manifestaron que utilizan en sus clases de cálculo diferencial para ingeniería el mismo significado de la demostración matemática que negociaron en su trayectoria académica como estudiante. Es decir, un significado desde la perspectiva formalista y con leves modificaciones al esquema de enseñanza definición – teorema – demostración, agregando tal vez un ejemplo. Esto coincide con el hecho de que algunas experiencias entre los sujetos vividos en una comunidad (llámese estudiantes de un programa de pregrado) se mantienen una vez estén fuera de esas comunidades (Lerman, 2001). Esto implica que los recursos que los profesores ponen en juego para la enseñanza de la demostración matemática en cursos de cálculo diferencial para ingeniería son sus experiencias en la educación secundaria y terciaria, junto con experiencias ganadas en su práctica docente.

Una implicación de estos hallazgos, debido a que los profesores participantes de este estudio eran licenciados en matemáticas, consiste en extender un llamado de alerta a los educadores matemáticos responsables de los procesos de formación inicial de profesores del área de las matemáticas, de tal manera que se atienda el aspecto formal y no formal de la demostración matemática. Aunque varios programas de licenciatura y de formación continua han realizado acciones que atienden la enseñanza de la demostración matemática desde sus grupos de investigación, queda la inquietud de que, si aún se presenta una visión de la demostración bajo una perspectiva exclusivamente formal y un esquema rígido de enseñanza en la formación inicial para profesores de matemáticas, entonces se estará promoviendo esta visión de la demostración de manera perdurable entre las generaciones venideras.

Este estudio se identifica con la postura de considerar relevante los aspectos sociales en el aprendizaje de la demostración. Entre los aspectos sociales en el aprendizaje de la demostración está desarrollar un ambiente de interacción social en el que se defiendan ideas con argumentos teóricos entre compañeros, de tal manera que asuman posturas críticas alrededor del trabajo con la demostración. Algunos estudios como Sackur, Drouhard, & Maurel (2000) y Camargo (2010), muestran avances hacia la demostración matemática mediante ambientes de interacción social.

En una segunda categoría para el análisis de la información, que llamé *Programa de Formación Continua: Un Escenario de Negociación de Significados de la Demostración Matemática*, relacioné los significados de la demostración matemática asociados con la negociación del grado de abstracción de la demostración en el marco de un programa de formación. Se encontró que, durante el desarrollo de un programa de formación, bajo la concepción de comunidades de práctica, algunos profesores transformaron sus significados de una demostración exclusivamente formalista en significados que incluyeron demostraciones no formales; a partir de sus experiencias tanto en la interacción con sus colegas como en la construcción colectiva de demostraciones en un trabajo en comunidad.

Se encontró que para los profesores de cálculo diferencial los significados de la demostración gozaban de pautas enmarcadas en enfoques formales y tradicionales y por medio del programa de formación los profesores generaron otras pautas de hacer demostraciones. La materialización de la experiencia de los profesores en el programa de formación, representada en demostraciones de algunos teoremas del cálculo diferencial, presenta una alternativa para utilizarla en la enseñanza de la demostración para programas de ingeniería. Al ampliar los significados de la demostración matemática que incluyen el aspecto formal y el aspecto no formal, en cursos de cálculo diferencial para ingenieros, se avanza también a una mirada de la demostración no sólo como un producto acabado de las matemáticas, sino como un proceso que incluye acciones de argumentar, conjeturar, entre otras. De tal manera que se privilegie el razonamiento matemático en los estudiantes y la comprensión de conceptos matemáticos.

Durante el programa de formación los profesores replantearon sus decisiones relacionadas con la demostración en sus cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Algunos de ellos manifestaron cambios en su decisión de no presentar demostraciones formales en sus clases de cálculo diferencial por la decisión de plantear demostraciones no formales a sus estudiantes de ingeniería. Esto implica que en ocasiones un significado exclusivamente formal de la demostración sin la posibilidad de considerar otras posturas puede influir en las decisiones que se tomen acerca de la demostración en los cursos de cálculo diferencial para ingeniería. Decisiones que pueden conducir a extinguir la demostración en esos cursos o a mantener una práctica de la demostración como un producto acabado de las matemáticas.

La experiencia de configurar un programa de formación, bajo la concepción de comunidad de práctica, como un escenario de aprendizaje permite que algunos de sus aspectos, desde una mirada metodológica, puedan ser considerados en futuras implementaciones de programas de formación para profesores universitarios. Aspectos como: la interacción entre los profesores, el liderazgo compartido, la reflexión acerca de la práctica, los acuerdos, desacuerdos, confusiones y experiencias de enseñanza como parte de la negociación de significados, el compromiso con la práctica, y la producción colectiva, pueden ser referentes en la constitución de significados como resultado del aprendizaje. El programa de formación desarrollado para este estudio permitió la reflexión de los profesores sobre la práctica de la demostración y su enseñanza, donde cada profesor no estaba sólo sino hacía parte de un grupo de colegas, a los que influyó y a su vez fue influido por ellos para la constitución de significados de la demostración. Varios son los estudios que confirman hoy día que la conformación de comunidades de práctica son escenarios universitarios adecuados para la reflexión sobre la práctica docente y para superar la tradición universitaria del individualismo y aislamiento que el profesor vive en su labor docente (Bozu e Imbernón, 2009; Córdoba, 2013; Hernández y Flores, 2013).

Otros fueron los hallazgos de esta investigación con respecto a los significados de la demostración y su relación con la formación matemática de ingenieros. Esos hallazgos estuvieron registrados en una tercera y última categoría que tomé para el análisis de los significados de la demostración de los profesores participantes en este estudio y que denominé *Significados de la Demostración y Formación Matemática de Ingenieros*. En esta categoría encontré que los significados negociados por los profesores estuvieron asociados con roles de la demostración matemática en la formación de ingenieros, los cuales relacioné con: el pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación del conocimiento matemático y la fundamentación teórica de nociones matemáticas.

El significado de la demostración matemática asociado con el pensamiento lógico de los estudiantes de ingeniería se refiere al rol de la demostración en contribuir con los procesos de argumentar e inferir mediante reglas de la lógica. La actividad argumentativa requerida para demostrar una proposición incluye utilizar razones o puntos de vista, identificar enunciados, exponer referentes teóricos, con la intención de armar un conjunto de ideas para conformar una demostración (Douek, 2007). Este significado de la demostración está relacionado con el desarrollo de la competencia para la formación de ingenieros denominada 'razonar matemáticamente' (European Society for Engineering Education [SEFI], 2013).

En cuanto al significado de la demostración matemática asociado con la apropiación del conocimiento matemático, se tiene que la demostración permite detallar o centrar la atención en ciertos conceptos necesarios para la comprensión de las condiciones del teorema o proposición a demostrar. De tal manera que este significado de la demostración se relaciona con el rol de mejorar la comprensión, por parte del estudiante, de conceptos matemáticos involucrados tanto en las condiciones del teorema como de la propia demostración. Autores como Balacheff (2008) resaltan la comprensión matemática como una contribución importante de la demostración a la educación matemática desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración.

El significado de la demostración matemática relacionado con la fundamentación teórica de nociones matemáticas hace referencia al rol de respaldar o establecer las razones de los contenidos matemáticos que posteriormente se utilicen en aplicaciones durante la carrera de ingeniería. Este significado de la demostración sugirió un cuestionamiento en el sentido de que parece que la demostración se enseñara en clase 'por si acaso' es necesaria en algún momento de la carrera o se requiere en alguna aplicación en la ingeniería.

Al considerar los profesores la demostración como parte de las matemáticas estructuradas y formales, que sirve de fundamento para futuras aplicaciones ingenieriles, se develó una concepción de formación matemática de ingenieros caracterizada por el reconocimiento de la necesidad de las matemáticas teóricas en la formación de ingenieros. La concepción de los profesores acerca de la formación matemática de ingenieros se asocia con algunos aspectos sobre formación de ingenieros de la primera mitad del siglo XX. Por ejemplo, aspectos como defender la necesidad de una formación matemática teórica avanzada para los ingenieros (D'Ocagne, 1914); o al considerar las matemáticas como un corpus autónomo de otras disciplinas y con conocimientos generales suficientes para el estudio de otras asignaturas y para utilizarlas en aplicaciones (Stæckel, 1914). Esta visión de la formación matemática de ingenieros ha evolucionado en las matemáticas como disciplina de servicio, utilizando la modelización para conectar la formación matemática del futuro ingeniero con la práctica profesional ingenieril.

Los resultados que estoy presentando muestran significados de la demostración matemática que exhiben profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería asociados con una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación de ingenieros; es decir, vista como un medio para contribuir con aspectos generales en la formación de un ingeniero (Kent y Noss, 2003). Tales aspectos formativos son, por ejemplo, el desarrollo de la competencia de razonar matemáticamente, la 'apropiación' de conceptos matemáticos y la fundamentación matemática de algunas nociones que podrían ser útiles para un ingeniero.

Uno de los hallazgos encontrados en este estudio es la poca relación de los significados de la demostración con problemas en contextos de la ingeniería. Sin embargo, en la negociación de significados de la demostración matemática los profesores consideraron que las demostraciones estaban dirigidas a estudiantes de ingeniería. En este sentido, los profesores llegaron a negociar un aspecto relevante como es el grado de abstracción de las demostraciones, marcando una diferencia con demostraciones dirigidas a estudiantes de programas matemáticos.

En relación con la demostración y la formación matemática de ingenieros algunos profesores advirtieron la necesidad de trabajar con ingenieros los asuntos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, particularmente de la demostración. Una implicación de esa intención de los profesores quedó planteada en la propuesta de una comunidad de práctica la cual llamé ‘comunidades de práctica interdisciplinaria’. Dichas comunidades estarían conformadas por profesores de matemáticas, físicos e ingenieros y su interés general sería la articulación de las matemáticas con la formación de futuros ingenieros. Si bien existen características de los profesores de matemáticas e ingenieros que harían compleja la iniciativa de trabajo en comunidad (Reséndiz, 2008), también se destaca la importancia de la relación académica entre profesores de matemáticas e ingenieros para abordar asuntos de la formación matemática de futuros ingenieros (Barker et al 2004; Broadbridge y Hendersen (2008); Cardella 2008; European Society for Engineering Education [SEFI], 2013 Ganter y Barker 2004).

En síntesis, los significados que los profesores usan para sus clases de cursos de cálculo diferencial para ingeniería son los negociados en sus trayectorias académicas (secundaria y terciaria) y profesionales. Esos significados responden a una concepción formalista de la demostración donde se acentúan los aspectos sintácticos y el uso de reglas de inferencias evitando el recurso de la intuición.

A través de un programa de formación para profesores de cálculo diferencial para ingeniería los profesores transformaron sus significados de demostración incluyendo demostraciones no formales. Ese programa de formación estuvo bajo la concepción de una comunidad de práctica y se configuró como un escenario de aprendizaje. Aspectos del programa de formación, como la interacción entre los profesores, la reflexión de la práctica docente, relaciones igualitarias, el compromiso con la práctica, entre otros, permitieron un trabajo en comunidad superando posiciones individualistas de los profesores y el aislamiento de ellos para tratar asuntos relacionados con la demostración matemática.

La relación de la demostración matemática con la formación de ingenieros quedó planteada en los roles asociados con: el pensamiento lógico de los estudiantes, la apropiación del conocimiento matemático y la fundamentación teórica de nociones matemáticas. Esos significados responden a una utilidad indirecta de las matemáticas para la formación de ingenieros que contribuye con el desarrollo de la competencia de razonar matemáticamente, la comprensión de conceptos matemáticos y la fundamentación matemática de algunas nociones que podrían ser útiles para un ingeniero.

Buscar una relación de la demostración matemática con la formación de ingenieros que atienda los contextos de la ingeniería implica un trabajo conjunto entre los miembros de las unidades académicas que concentran a los profesores del área de matemáticas y a los de ingeniería. Se propone para tal intención la conformación de 'comunidades de práctica interdisciplinarias' en las universidades que tengan como empresa la articulación de las matemáticas con la formación de ingenieros y en particular se atienda la enseñanza de la demostración matemática.

Aspectos a tener presentes para Referencia Futura

Los resultados de esta investigación informan que los significados de la demostración matemática exhibidos por algunos profesores, que enseñan cálculo diferencial en programas de ingeniería, se ubican en una perspectiva formalista de las matemáticas. Este significado fue resultado de la negociación en su trayectoria académica y profesional. Los profesores participantes de la investigación eran todos licenciados en el área de matemáticas. Ellos trasladaron significados de la demostración relacionados con esquemas de enseñanza de su educación terciaria a su práctica docente en cursos de cálculo diferencial para ingeniería, desconociendo en algunos casos que sus clases estaban dirigidas a estudiantes de ingeniería y no de matemáticas.

Los profesores manifestaron que antes del programa de formación continua no habían tenido la oportunidad de reflexionar sobre su práctica de la demostración y su enseñanza y valoraron positivamente el escenario de formación. Se resalta como una fortaleza de este estudio el considerar a los sujetos de investigación en el marco de un colectivo mediante un programa de formación continua. Las decisiones que los profesores tomaban en relación con la demostración en sus cursos de cálculo diferencial para ingeniería fueron de carácter individual. Esto coincide, por lo menos para el caso de la demostración matemática, con lo planteado en el marco teórico de este estudio al referirse sobre el trabajo en solitario de los profesores universitarios.

La necesidad de proponer encuentros entre profesores de matemáticas es una realidad imperiosa. En la medida que se comparta las experiencias docentes, al interior de un colectivo dispuesto a reflexionar conjuntamente acerca de asuntos comunes de su docencia, se posibilitará la reflexión de la práctica de la enseñanza y su mejora.

De acuerdo con mi experiencia en este trabajo de investigación, para el caso de profesores que enseñan en programas de ingeniería, no basta que se reúnan en un programa de formación continua entre ellos mismos. Una debilidad de este estudio fue considerar sólo profesores del área de matemáticas. Aunque, en la universidad donde se realizó la investigación —y al tomar de referencia el curso de cálculo diferencial— encontré que los profesores que orientaban este curso eran en su gran mayoría licenciados en matemáticas y no ingenieros. En ocasiones, por compartir una misma tradición en la formación de educación secundaria o universitaria se comparte también algunos patrones de enseñanza y significados que pueden en algún momento coincidir en algunos aspectos. Esto no es determinista, es decir, no es una condición inicial que determina el desarrollo de un programa de formación. Pero, sí es un asunto que merece atención, pues puede colectivamente limitar la visión sobre alternativas de solución para algún problema. Por ejemplo, algunos profesores podrían pensar que es natural para ellos la forma como están llevando al aula de clase la demostración matemática y no representar ningún tipo de cuestionamiento al respecto.

Lo anterior no desestima el trabajo entre colegas, por el contrario, son un gran avance los encuentros de profesores de una misma área, pues comparten situaciones de interés que son comunes y conjuntamente pueden avanzar en su reflexión; además, en ocasiones potencia elementos como la confianza o el compromiso que se pueda alcanzar cuando se trabaja con colegas cercanos. Sin embargo, para futuras investigaciones cuyo interés relacione profesores de matemática en una facultad de ingeniería y se desee estudiar alguna relación entre la enseñanza de las matemáticas con la ingeniería, la sugerencia es considerar profesores tanto del área de matemática como del área de la ingeniería. Este hecho no es tan obvio como en ocasiones parece; pues, como lo señalan Broadbridge y Hendersen (2008), en ocasiones los ingenieros perciben la amenaza de perder el control de algunos temas de su dominio al compartirlos con profesores de otras unidades académicas. De igual manera, estos autores plantean que en "algunas instituciones, hay una cierta tensión entre los departamentos de enseñanza sobre quién debe enseñar qué. El predominio de las disciplinas de enseñanza-servicio como las matemáticas es sensible sobre el control de su negocio principal" (Broadbridge y Hendersen, 2008, pág. 22).

Precisamente, de acuerdo con Broadbridge y Hendersen (2008) y Uysal (2012), entre los problemas relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que enfrentan las instituciones que ofertan programas de ingeniería se encuentra la dificultad para satisfacer y acordar necesidades matemáticas para todas las disciplinas de ingeniería en una materia. De igual manera se encuentra la dificultad de llegar a un entendimiento común entre los departamentos de matemáticas e ingeniería sobre lo que debe ser incluido en un plan de estudios.

La propuesta que se desprende de mi investigación alrededor de estos asuntos es la constitución de 'comunidades de práctica interdisciplinarias' conformadas por profesores de matemáticas, profesores de otras ciencias básicas e ingenieros. Tal como lo sugiere la literatura y de acuerdo con los resultados obtenidos en esta investigación se pueden plantear algunas recomendaciones para futuros asuntos de investigación que se podrían trabajar en esas comunidades de práctica. Uno de esos asuntos estaría relacionado con identificar contextos de la ingeniería que puedan ser utilizados en la enseñanza de la demostración desde una perspectiva del aprendizaje situado. Al profesor de matemáticas le sería más fácil plantear problemas del contexto de la ingeniería para la demostración matemática con otros colegas que se relacionen con esta área, porque él no es ingeniero y no se ha desempeñado en esa área. Sin embargo, sí tiene claro el dominio de su ciencia y por tanto podría crear condiciones de aprendizaje para la comprensión de conceptos y resolución de problemas controlados que se aproximen a situaciones reales del ingeniero. Sin embargo, esto no lo puede hacer en solitario.

Otro asunto que debería ser objeto de interés en futuros estudios es indagar sobre los significados de la demostración matemática por parte de los miembros de una comunidad de práctica interdisciplinaria en el marco de programas de formación continua. El uso de los referentes teóricos de este estudio podría ayudar para esa investigación.

Cabe mencionar que, en posteriores estudios, convendría indagar sobre el aprendizaje de la demostración matemática por parte de estudiantes de ingeniería mediante estrategias de enseñanza implementados por miembros de esas comunidades interdisciplinarias. Finalmente, resulta interesante indagar sobre el rol de la demostración matemática asociada con la comprensión de conceptos en la interfaz entre la escuela y la universidad en programas de ingeniería. Para ese tipo de investigaciones se puede involucrar no solamente cursos de matemáticas del primer año de ingeniería, sino también aquellos cursos que son de preparación para aspirantes a ingresar a la universidad en programas de ingeniería.

Bibliografía

Abdulwahed, M., Jaworski, B., & Crawford, A. R. (2012). Innovative approaches to teaching mathematics in higher education: a review and critique. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(2), 49–68.

Accreditation Board for Engineering and Technology [ABET]. (01 de Noviembre de 2014). *2015-2016 Criteria for Accrediting Engineering Programs.* Obtenido de ABET Engineering Accreditation Commission: http://www.abet.org/wp-content/uploads/2015/05/E001-15-16-EAC-Criteria-03-10-15.pdf

Albano, G., & Pierri, A. (2014). Mathematical competencies in a role-play activity. *Proceedings of the 38th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 36th Conference of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education. Vol. 2*, pág. 17−23. Vancouver, Canada: PME.

Albert, M. J. (2007). *La Investigación Educativa: Claves Teóricas.* Madrid: McGraw-Hill.

Albertí, M., Amat, S., Busquier, S., Romero, P., & Tejada, J. (2013). Mathematics for Engineering and Engineering for Mathematics. En A. Damlamian, J. F. Rodrigues, & R. Sträßer (Edits.), *Educational Interfaces between Mathematics and Industry* (pág. 185−198). Springer International Publishing.

Alcock, L. (2010). Mathematicians' Perspectives on the Teaching and Learning of Proof. En F. Hitt, D. Holton, & P. Thompson (Edits.), *Research in Collegiate Mathematics Education: VII* (pág. 73−100). Montréal, Canada: American Mathematical Society.

Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (págs. 215–230). Kluwer: Dordrecht.

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3*(1), 118–127.

Arcila, P. A., Mendoza, Y. L., Jaramillo, J. M., & Cañón, Ó. E. (2010). Comprensión del significado desde Vygotsky, Bruner y Gergen. *Diversitas: Perspectivas en Psicología, 6*(1), 37−49.

Arnaus, R. (1999). La formación del profesorado: Un encuentro comprometido con la complejidad educativa. En A. Pérez, J. Barquín, & J. F. Angulo (Edits.), *Desarrollo profesional del docente: política, investigación y práctica* (pág. 599−634). Madrid: Akal.

Arredondo, V., Uribe, M., & Wuest, T. (1979). Notas para un modelo de docencia. *Perfiles Educativos*(3), 3–27.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and Epistemology. En P. Boero (Edit.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (págs. 27-42). Rotterdam: Sense Publishers.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. L Moreno, & P Gómez, *Ingeniería didáctica en educación matemática* (págs. 97–140). Bogotá: Una Empresa Docente.

Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería [ASIBEI]. (2014). *Tendencias en la formación de ingenieros en Iberoamérica.* Puebla: ASIBEI.

Asociación Iberoamericana de Instituciones de Enseñanza de la Ingeniería [ASIBEI]. (2016). *Competencias y perfil del ingeniero iberoamericano, formación de profesores y desarrollo tecnológico e innovación (Documentos Plan Estratégico ASIBEI).* Bogotá: ASIBEI.

Baer, A., & Schnettler, B. (2009). Hacia una metodología cualitativa audiovisual: El vídeo como instrumento de investigación social. En A. Merlino (Edit.), *Investigación cualitativa en ciencias sociales: Temas, problemas aplicaciones* (pág. 149−173). Buenos Aires: America Lee.

Bag, A. K. (1979). *Mathematics in ancient and medieval India.* Delhi: Chaukhambha Orientalia.

Balacheff, N. (1988). Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. *Tesis doctoral.* Grenoble, Francia: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente - Universidad de los Andes.

Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *ZDM the International Journal on Mathematics Education, 40*, 501–512.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The Teaching of Proof. *International Mathematical Union, 3*, 907–920.

Barker, W., Bressoud, D., Epp, S., Ganter, S., Haver, B., & Pollatsek, H. (2004). *Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004.* Washington: The Mathematical Association of America.

Bell, A. W. (1976). A Study of Pupils' Proof-Explanations in Mathematical Situations. *Educational Studies in Mathematics, 4*(1), 23−40.

Benveniste, É. (1971). *Problemas de lingüística general, Volumen 1.* México: Siglo XXI.

Bingolbali, E., & Monaghan, J. (2008). Cognition And Institutional Setting: Undergraduates' understandings of the derivative. En A. Watson, & P. Winbourne (Edits.), *New*

Directions for Situated Cognition in Mathematics Education (pág. 233−259). New York: Springer.

Bingolbali, E., Monaghan, J., & Roper, T. (2007). Engineering students' conceptions of the derivative and some implications for their mathematical education. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology, 38*(6), 763−777.

Bissell, C., & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the learning of Mathematics, 20*(3), 3–11.

Biza, I., Giraldo, V., Hochmuth, R., Khakbaz, A. S., & Rasmussen, C. (2016). *Research on Teaching and Learning Mathematics at the Tertiary Level: State-of-the-art and Looking Ahead.* New York: Springer.

Blockley, D. I., & Woodman, N. (2002). The Changing Relationship: Civil/Structural Engineers and Maths. En *Maths for engineering and science* (pág. 4−6). Lancastar: LTSN MathsTEAM Project.

Blum, W., & Kirsch, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics, 22*(2), 183–203.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2011). Investigación colaborativa: potencialidades y problemas. *Revista Educación y Pedagogía, 23*(59), 125−136.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introduçao à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Bozu, Z., & Imbernon, F. (2009). Creando comunidades de práctica y conocimiento en la Universidad: una experiencia de trabajo entre las universidades de lengua catalana. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 6*(1).

Bozu, Z., & Imbernón, F. (2009). Creando comunidades de práctica y conocimiento en la Universidad: una experiencia de trabajo entre las universidades de lengua catalana. *RUSC: Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento, 6*(1). Obtenido de Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento.

Bravo, A. S., & Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de cálculo y el fenómeno de la transposición didáctica. *Educación Matemática, 24*(2), 91–122.

Broadbridge, P., & Henderson, S. (2008). *Mathematics Education for 21st Century Engineering Students. Final Report.* Melbourne: Australian Mathematical Sciences Institute.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated Cognition and the Culture of Learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32−42.

Bruner, J. (1998). *Actos de significado: más allá de la revolución cognitiva.* Madrid: Alianza.

Buendía, L., Colás, P., & Hernández, F. (1998). *Métodos de investigación en psicopedagogía.* Madrid: McGraw-Hill.

Calvo, C. (Mayo de 2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. *Tesis doctoral*. Barcelona, Cataluña, España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Calvo, C. (2001). Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral. *Tesis doctoral*. Barcelona, Cataluña, España: Universidad Autónoma de Barcelona.

Camarena, P. (2009). La matemática en el contexto de las ciencias. *Innovación Educativa, 9*(46), 15–25.

Camargo, L. (2010). Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. *Tesis doctoral*. Valencia, España: Universidad de Valencia.

Campos, V., Dias, M., & Silva, A. (2016). Constitução da identidade profissional docente e as ações formativas na universidade federal de Uberlândia-MG. *XIII Seminário Nacional O Uno e o Diverso na Educação Escolar e XVI Semana da Pedagogia* (págs. 2588–2604). Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia.

Cantoral, R. (2001). Enseñanza de la matemática en la educación superior. *Revista Electrónica Sinéctica*, 3−27.

Cardella, M. (2008). Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and its Applications, 27*(3), 150–159.

Castillo Ochoa, E., & Montes Castillo, M. M. (2012). Enfoques y modelos de la formación de profesorado universitario en la Sociedad del Conocimiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa Sonorense*, 48-61.

Castillo, E., & Montes, M. M. (2012). Enfoques y modelos de la formación de profesorado universitario en la Sociedad del Conocimiento. *Revista Electrónica de Investigación Educativa Sonorense, Año IV*(11), 48–61.

Chárriez, M. (2012). Historias de vida: Una metodología de investigación cualitativa. *Revista Griot, 5*(1), 50−67.

Chehaybar, E. (2006). La percepción que tienen los profesores de educación media superior y superior sobre su formación y su práctica docente. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos, XXXVI*(3-4), 219–259.

Chehaybar, E., & Rios, M. (1996). *La formación docente: perspectivas teóricas y metodológicas.* México, D F: UNAM - Centro de Investigaciones y Servicios Educativos (CISE).

Chong, A. (2006). *Using the limitations of Situated Learning Pedagogy to our advantage in an engineering design context* . Obtenido de Proceedings of the Canadian Engineering Education Association: http://ojs.library.queensu.ca/index.php/PCEEA/article/view/3818/3883

Clark, P. (2005). The emergence of a classroom community of practice in a mathematical structures course. *Tesis doctoral*. Tempe, Arizona, Estados Unidos de América: Universidad del Estado de Arizona.

Cobb, P., & Yackel, E. (1998). A constructivist perspective on the culture of the mathematics classroom. En F. Seeger, J. Voigt, & U. Waschescio (Edits.), *The Culture of the Mathematics Classroom* (pág. 158−190). Cambridge: Cambridge University Press.

Cobb, P., McClain, K., Silva, T. d., & Dean, C. (2003). Situating Teachers' Instructional Practices in the Institutional Setting of the School and District. *Educational Researcher, 32*(6), 13−24.

Coffey, A., & Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos: estrategias complementarias de investigación.* Medellín: Editorial Universidad de Antioquia.

Comisión Europea. (2007). *Mejorar la calidad de la formación académica y profesional de los docentes.* Bruselas: Parlamento Europeo.

Conejo, L., Arce, M., & Ortega, T. (2015). A case study: How textbooks of a Spanish publisher justify results related to limits from the 70's until today. En K. Krainer, & N. Vondrová (Ed.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (págs. 107–113). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Contreras, J. (1997). *La autonomía del profesorado.* Madrid: Morata.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Relime, 8*(3), 265–286.

Córdoba, M. (2013). Comunidades de Práctica como estrategia de formación docente para el fortalecimiento de los estudios generales: el caso del INTEC. *V Simposio Internacional de Estudios Generales. 6, 7 y 8 de noviembre de 2013, en la Universidad de Puerto Rico Recinto de Río Piedras. Red Internacional de Estudios Generales (RIDEG)* (págs. 1–18). Río Piedras: Universidad de Puerto Rico - RIDEG.

Courant, R., & John, F. (1996). *Introducción al cálculo y al análisis matemático, Vol. 1.* México, D F: Limusa.

Craig, T. (2013). Conceptions of mathematics and student identity: implications for engineering education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(7), 1020−1029.

Crespo Crespo, C., & Ponteville, C. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 560–564.

Crespo, C., & Ponteville, C. (2004). Las concepciones de los docentes acerca de las demostraciones. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 17*, 560–564.

Crespo, C., Farfán, R. M., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 13*(3), 283–306.

Creswell, J. W. (2007). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among !ve approaches* (2da ed.). Thousand Oaks, California: Sage.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto.* Porto Alegre: Penso Editora.

Creswell, J. W. (2012). *Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4ta ed.). Boston: Pearson.

D'Andrea, R. E., Curia, L., & Lavalle, A. (2013). Procesos deductivos en estudiantes universitarios. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 26*, 347−355.

Davini, M. C. (1995). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía.* Barcelona: Paidós.

Davis, P. J., & Hersh, R. (1981). *The Mathematical Experience.* Boston: Birkhäuser.

De Lella, C. (2003). Formación docente: El modelo hermenéutico-reflexivo y la práctica profesional. *Revista Decisio. Saberes para la Acción, I*(20), 20–24.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(26), 15−30.

De Villiers, M. (2012). An illustration of the explanatory and discovery functions of proof. *Pythagoras, 33*(3), 1−8.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. (2012). La investigación cualitativa como disciplina y como práctica. En N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Edits.), *Manual de investigación cualitativa, vol. 1: El campo de la investigación cualitativa* (pág. 43−102). Barcelona: Gedisa.

Diker, G., & Terigi, F. (1997). *La formación de maestros y profesores: hoja de ruta.* Madrid: Paidós Ibérica.

Diker, G., & Terigi, F. (1997). *La formación de maestros y profesores: hoja de ruta.* Paidós: Buenos Aires.

D'Ocagne, M. (1914). Le rôle des mathématiques dans les sciences de l'ingénieur. *Conférence Internationale de l'Enseignement Mathématique* (págs. 47–58). Paris: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

Dos Santos, C., & Ortega, T. (2013). Perfiles del profesorado sobre la enseñanza y uso de la demostración. *Avances de Investigación en Educación Matemática*(4), 27−45.

Dos Santos, M. P., & Mates, J. F. (2008). The Role Of Artefacts In Mathematical Thinking: A Situated Learning Perspective. En A. Watson, & P. Winbourne (Edits.), *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education (Vol. 45)* (pág. 179−204). Springer: Oxford.

Douek, N. (2007). Some remarks about argumentation and proof. En P. Boero (Edit.), *Theorems in School: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pág. 163−181). Rotterdam: Sense Publishers.

Dreyfus, T. (1999). Why Johnny Can't Prove. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1/3), 85−109.

Dummett, M. (1999). La teoría del significado en la filosofía analítica. *Cuaderno gris*, 91-102.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D F: Grupo Editorial Iberoamérica.

Eléxpuru, I., Martínez, A., Villardón, L., & Yániz, C. (2009). Descripción y Evaluación del Plan de Formación y Desarrollo del Profesorado de la Universidad de Deusto. *Revista de Docencia Universitaria*(3), 1–20.

Erickson, F. (1984). Rhetoric, anecdote, and rhapsody: Coherence strategies in a conversation among Black American adolescents. En D. Tannen (Ed.), *Coherence in spoken and and written discourse* (págs. 81–154). Norwood, NJ: Ablex.

Espinosa, Á., Lara, E., & Hernández Sastoque, E. (2015). Pruebas Pre-Formales de teoremas del Cálculo Diferencial para estudiantes de primer semestre de ingeniería. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 487–491.

Estrela, M. (2002). Modelos de formação de professores e seus pressupostos conceptuais. *Revista de Educação*, 17–29.

Estrela, M., & Estrela, A. (2006). A formação contínua de professores numa encruzilhada. En R. Bizarro, & F. Braga, *Formação de Professores de Línguas Estrangeiras: Reflexões, Estudos e Experiências* (págs. 73–79). Porto: Porto Editora.

European Society for Engineering Education [SEFI]. (2013). *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education: A Report of the Mathematics Working Group.* Bruselas: SEFI.

Fernández, L. (2006). *¿Cómo analizar datos cualitativos?* Obtenido de Butlletí LaRecerca: http://www.ub.edu/ice/recerca/pdf/ficha7-cast.pdf

Ferry, G. (1991). *El trayecto de la formación. Los enseñantes entre la teoría y la práctica.* México: Paidós.

Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiérrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Integración: temas de matemáticas, 31*(2), 181–205.

Flores, A. (2013). Enfoque conceptual del cálculo en la formación de docentes: Ejemplos con uso de tecnología interactiva. *El Cálculo y su Enseñanza, 5*(5), 1−26.

Flores, P., & Peñas, M. (2003). Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos. *Educación y Pedagogía*(35), 93-116.

Frank, M. (2011). *¿Qué es el neoestructuralismo?* . México: Fondo de Cultura Económica.

Frege, G. (1972). *Los fundamentos de la aritmética: Investigación Lógico-matemática sobre el concepto de número.* Barcelona: Laia.

Ganter, S. L. (2000). Preface. En S. Ganter (Ed.), *Calculus renewal: Issues for undergraduate mathematics education in the next decade* (págs. vii-ix). New York, NY: Plenum Press.

Ganter, S. L., & Barker, W. (2004). *The Curriculum Foundations Project: Voices of the Partner Disciplines.* Washington: The Mathematical Association of America.

García, G. (1996). Reformas en la enseñanza de las matemáticas escolares: perspectivas para su desarrollo. *Revista EMA, 1*(3), 195–206.

García, J. (2013). La problemática de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Revista Educación, 37*(1), 29−42.

Garnica, A. V. (2004). História oral e educação matemática. En J. d. Araújo, & M. d. Borba, *Pesquisa qualitativa em educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Gergen, K. (1996). *Realidades y relaciones: aproximación a la construcción social.* Barcelona: Paidós.

Gergen, K. (2006). *El yo saturado. Dilemas de identidad en el mundo contemporáneo.* Barcelona: Paidós.

Gil, J. L., & Díaz, R. (2013). *Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias.* México, D F: Pearson.

Gimeno, J. (2005). *Las bases para la formación inicial del profesorado de educación secundaria.* Obtenido de Jornadas El protagonismo del profesorado: experiencias de aula y propuestas para su formación: http://www.mepsyd.es/cesces/seminario-2005/eso-mesaespecialistas.pdf

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J., & Recio, Á. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405−414.

Gómez, J. E., Hernández, V. L., & Morales, M. A. (2015). Arquitectura interactiva como soporte al aprendizaje situado en la enseñanza de la ingeniería. *Educación en ingeniería, 10*(20), 88−97.

Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Tesis doctoral*. Granada, España: Universidad de Granada.

González, J. C. (marzo de 2012). Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales. *Tesis doctoral*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

González, J. C. (2012). Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales. *Tesis doctoral*. Valladolid, España: Universidad de Valladolid.

Grabiner, J. V. (2012). Why Proof? A Historian's Perspective. En G. Hanna, & M. De Villiers (Edits.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pág. 147−167). Gewerbestrasse: Springer International Publishing.

Griffiths, P. (2000). Mathematics at the Turn of the Millennium. *The American Mathematical Monthly, 107*(1), 1–14.

Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using counter-examples in the teaching calculus: student's attitudes. *The New Zeland Mathematics Magazine, 40*(2), 33−41.

Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing Paradigms in Qualitative Research. En N. K. Denzin, & Y. Lincoln (Edits.), *Handbook of qualitative research* (pág. 105−117). Thousand Oaks, California: Sage.

Gutiérrez, Á. (2001). Estrategias de investigación cuando los marcos teóricos existentes no son útiles. *5° Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pág. 85−94). Almería: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. En G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. A. (Eds.), *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (págs. 45–51). Paris: IGPME.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*(1/2), 5−23.

Hanna, G. (2007). The ongoing value of proof. En P. Boero (Edit.), *Theorems in schools: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pág. 3−18). Rotterdam: Sense Publishers.

Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. En G. Hanna, & M. De Villiers (Edits.), *Proof and proving in mathematics education* (pág. 1−10). Nueva York: Springer.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. En A. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Edits.), *International Handbook of Mathematics Education* (pág. 877−907). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G., & Jahnke, H. N. (2002). Another approach to proof: Arguments from physics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 34*(1), 1–8.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Edits.), *Research in collegiate mathematics education* (págs. 234–283). Providence: American Mathematical Society.

Hargreaves, A. (1996). *Profesorado, cultura y postmodernidad: Cambian los tiempos, cambia el profesorado* (5ta ed.). Madrid: Ediciones Morata.

Harris, D., Black, L., Hernández, P., Pepin, B., Williams, J., & Team, T. T. (2014). Mathematics and its value for engineering students: What are the implications for teaching? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(3), 321–336.

Hawkins, J. S., & Emanuel, E. J. (2008). *Exploitation and Developing Countries: The Ethics of Clinical Research.* Princeton, Nueva Jersey: Princeton University Press.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a community of mathematical practice. *Tesis doctoral*. Estocolmo, Suecia: Stockholm University.

Hemmi, K., & Löfwall, C. (2009). Why do we need proof? *Proceedings of CERME 6* (págs. 201–210). Lyon, France: European Society for Research in Mathematics Education.

Hendricks, C. (2001). Teaching causal reasoning through cognitive apprenticeship: What are results from situated learning? *The Journal of Educational Reseach, 94*(5), 302–311.

Hennig, M., Merstsching, B., & Hilkenmeier, F. (2015). Situated mathematics teaching within electrical engineering courses. *European Journal of Engineering Education, 40*(6), 683–701.

Hernández Sastoque, E., Tinoco, J., Rada, A., & Lara, J. (2015). Pruebas de teoremas del cálculo diferencial para programas de ingeniería. *Revista Colombiana de Matemática Educativa, 1*(1), 166–171.

Hernández, A., & Flores, R. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. *Innovación Educativa, 13*(62), 101–119.

Hernández, A., & Flores, R. d. (2013). Caracterización de una comunidad de práctica orientada al uso de la matemática en la enseñanza de la ingeniería. *Innovación Educativa, 13*(62), 101–119.

Hernández, E. (2009). *Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones.* Obtenido de Revista Digital Matemática, Educación e Internet:

https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/Calculo_Diferencial_Integral/CALCULO_D_I_ELSIE.pdf

Hernández, F. (2003). El constructivismo como referente de las reformas educativas neoliberales. *Educere*, 433–440.

Hernández, I. (2012). Investigación cualitativa: una metodología en marcha sobre el hecho social. *Revista Rastros Rostros, 14*(27), 57–68.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la Investigación* (5ta ed.). (J. M. Chacón, Ed.) México, D. F., México: McGraw-Hill.

Herrington, J., & Oliver, R. (2000). An instructional design framework for authentic learning environments. *Educational Technology Research and Development, 48*(3), 23–48.

Hirsch, A. (1998). *Problemática de la formación de profesores en Educación Superior.* México: Trillas.

Howson, A. G., Kahane, J. P., Lauginie, P., & Turckheim, E. (1988). On the teaching of Mathematics as a service subject. En A. G. Howson, J. P. Kahane, P. Lauginie, & E. Turckheim, *Mathematics as a Service Subject* (págs. 1–19). Cambridge: Cambridge University Press.

Hudson, B. (2008). Learning Mathematically As Social Practice In A Workplace Setting. *New Directions for Situated Cognition in Mathematics Education*, 287–301.

Imbernón, F. (1994). *La formación y el desarrollo profesional del profesorado: hacia una nueva cultura profesional.* Barcelona: Graó.

Imbernón, F. (1998). *La formación y el desarrollo profesional del profesorado. Hacia una nueva cultura profesional.* Barcelona: Ed. Graó.

Imbernón, F. (2007). *10 Ideas Clave. La formación permanente del profesorado: Nuevas ideas para formar en la innovación y el cambio.* Barcelona: Graó.

Imbernón, F. (2011). La formación pedagógica del docente universitario. *Educação. Revista do Centro de Educação, 36*(3), 387–395.

Imbernón, F. (2012). La formación del profesorado universitario: Orientaciones y desorientaciones. Las prácticas de formación del profesorado universitario. En J. B. Martínez (Coord.), *Innovación en la universidad: prácticas, políticas y retóricas* (págs. 85–104). Barcelona: Graó.

Jaworski, B., & Matthews, J. (2011). Developing teaching of mathematics to first year engineering students. *Teaching Mathematics and its Applications, 30*(4), 178–185.

Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Stanne, M. B. (2000). *Cooperative Learning Methods: A Meta-Analysis.* Obtenido de Cooperative Learning Center: https://www.researchgate.net/profile/David_Johnson50/publication/220040324_Cooperative_learning_methods_A_meta-analysis/links/00b4952b39d258145c000000.pdf

Johri, A., & Olds, B. M. (2011). Situated Engineering Learning: Bridging Engineering Education Research and the Learning Sciences. *Journal of Engineering Education, 100*(1), 151–185.

Kaiser, G., Blomhøj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*(2), 82–85.

Kane, R., Sandretto, S., & Heath, C. (2004). An investigation into excellent tertiary teaching: Emphasising reflective practice. *Higher Education*(47), 283–310.

Kaplan, A. (1973). *The Conduct of Inquiry.* Aylesbury: Intertext Books.

Kent, P., & Noss, R. (2001). Finding a role for technology in service mathematics for engineers and scientists. En D. Holton, *The teaching and learning of mathematics at university level. ICMI Study Series* (Vol. 7, págs. 395–404). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios. 2*, págs. 1–7. Londres: Institution of Electrical Engineers.

Kent, P., & Noss, R. (2003). *Mathematics in the University Education of Engineers.* Londres: The Ove Arup Foundation.

Klisinska, A. (2009). The Fundamental Theorem of Calculus: A case study into the didactic. *Tesis doctoral*. Luleå , Suecia : Luleå University of Technology.

Klymchuk, S. (2008). *Using Counter-Examples to Enhance Learners' Understanding of Undergraduate Mathematics.* Obtenido de National Centre for Tertiary Teaching Excellence: https://akoaotearoa.ac.nz/download/ng/file/group-3300/using-counter-examples-to-enhance-learners-understanding-of-undergraduate-mathematics.pdf

Klymchuk, S. (2012). *Using Counter-Examples in Teaching & Learning of Calculus: Students' Attitudes and Performance*. Obtenido de Mathematics Teaching-Research Journal On-Line: http://www.hostos.cuny.edu/MTRJ/archives/volume5/volume5issue4full.pdf

Knuth, E. J. (2002). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379–405.

Kvale, S. (2011). *Las entrevistas en investigación cualitativa.* Madrid: Ediciones Morata.

Lacasa, P., Vélez, R., & Sánchez, S. (2005). Objetos de aprendizaje y significado. *Revista de Educación a Distancia*(5, número monográfico), 1–13.

Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9na ed.). Nueva York: McGraw-Hill.

Lave, J., & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge : Cambridge University Press.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo* (7ma ed.). México, D F: Oxford University Press - Harla México.

Lerman, S. (2001). Cultural, Discursive Psychology: A Sociocultural Approach to Studying the Teaching and Learning of Mathematics. *Learning Discourse: Discursive approaches to research in mathematics education, 46*(1), 87–113.

Liston, D. P., & Zeichner, K. M. (1993). *Formación del profesorado y condiciones sociales de la escolarización.* Madrid: Morata.

Llinares, s., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Guti{errez, & P. Boero, *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (págs. 429–459). Rotterdam: Sense Publishers.

Loch, B., & Lamborn, J. (2016). How to make mathematics relevant to first-year engineering students: perceptions of students on student-produced resources. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(1), 29–44.

López, A. (2007). *Mathematics Education for 21st Century Engineering Students: Literature Review*. Melbourne: Australian Mathematical Sciences Institute (AMSI).

Lozano, J. I. (2006). *Normalistas vs. universitarios o técnicos vs. rudos: las prácticas y formación del docente de escuelas secundarias desde su representaciones sociales.* México: Plaza y Valdes.

Lupu, M. M. (2010). Learning to be a teacher between participating to a community of educational practice and belonging to a learning community. *Journal of Educational Sciences, 12*(2), 63–69.

Mas, Ò. (2011). El profesor universitario: sus competencias y formación. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado,, 15*(3), 195–211.

Mejía, J. (2013). Problemas del conocimiento en Ciencias Humanas: La cuestión del método y el proyecto de investigación cualitativa. *Investigación Educativa, 17*(2), 27–47.

Melo, M. (2003). Las matemáticas en la ingeniería a través de la historia. *Ciencia e Ingeniería Neogranadina*(13), 53–60.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Sistema Nacional de Información de la Educación Superior*. Obtenido de Consultas: http://snies.mineducacion.gov.co/consultasnies/institucion#

Moral, C. (2006). Criterios de validez en la investigación cualitativa actual. *Revista de Investigación Educativa, 24*(1), 147–164.

Morales, J. F., & Peña, L. M. (2013). Una propuesta metodológica para la enseñanza del cálculo diferencial e integral basada en la modelación matemática. *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (págs. 577–587). Montevideo, Uruguay: Sociedad de Educación Matemática Uruguaya.

Moreno, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1*(1), 123–136.

Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de la Ciencia, 21*(2), 265-–280.

Nabonnand, P. (2007). Les réformes de l'enseignement des mathématiques au début du XXe siècle. Une dynamique à l'échelle international. En N. H.-c. Hélène Gispert, *Science et enseignement. L'Exemple de la grande reforme des programmes du lycée au début du XXe siècle* (págs. 293–314). Paris: Vuibert - INRP.

National Institute of Health. (1979). *El Informe Belmont.* Obtenido de Observatori de Bioètica i Dret de la Universitat de Barcelona: http://www.unizar.es/deproyecto/programastp/BioDocumenta/InformeBelmont.pdf

Niemeyer, B. (2006). El aprendizaje situado: una oportunidad para escapar del enfoque del déficit. *Revista de Educación*(341), 99–121.

Nirmalakhandan, N., Ricketts, C., McShannon, J., & Barrett, S. (2007). Teaching Tools to Promote Active Learning: Case Study. *Journal of Professional Issues in Engineering Education and Practice, 133*(1), 31–37.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. N. (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study Series* (págs. 3–32). Nueva York: Springer Science+Business Media LLC.

Paoloni, P. V., & Rivarola, M. V. (2012). Una perspectiva integral y situada de las prácticas profesionales en carreras de Ingeniería. *Revista Argentina de Enseñanza de la Ingeniería, Año 1*(2), 7–26.

Park, J. (2011). Calculus Instructors' and Students' Discourses on the Derivative [Abstract]. *Tesis doctoral*. Michigan, USA: Michigan State University.

Park, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it? *Educational Studies in Mathematics, 89*(2), 233–250.

Parra, C., Ecima, I., Gómez, M. P., & Almenárez, F. (2010). La formación de los profesores universitarios: una asignatura pendiente de la universidad colombiana. *Educación y Educadores, 13*(3), 421–452.

Parra, E. (2010). Las ciencias básicas en ingeniería de sistemas: justificaciones gnoseológicas desde los objetos de estudio y de conocimiento. *Revista Educación en Ingeniería*(10), 74–84.

Patiño, L., Castaño, L., & Fajardo, M. (2002). *El profesor universitario: entre la tradición y la transformación de la universidad colombiana.* Bogotá: ICFES.

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research & Evaluation Methods.* Thousand Oaks, California: SAGE.

Paz, H. (2007). El aprendizaje situado como una alternativa en la formación de competencias en ingeniería. *Revista Educación en Ingeniería, 2*(4), 1–13.

Perrenoud, P. (2000). *Dez novas competências para ensinar.* Porto Alegre: Artmed.

Pfeiffer, K. (2011). Features and purposes of mathematical proofs in the view of novice students: observations from proof validation and evaluation performances. *Tesis doctoral*. Galway, Irlanda: National University of Ireland.

Pietropaolo, R. C. (2005). (Re)Significar a Demonstração nos Currículos de Educação Básica e de Formação de Professores de Matemática. *Tesis doctoral*. São Paolo, Brasil: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Planas, N. (2004). Análisis discursivo de interacciones sociales en un aula de matemáticas multiétnica. *Revista de educación*(334), 59-74.

Planas, N., & Gorgorió, M. N. (2001). Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas, 19*(1), 135–150.

Pollak, H. (1988). Mathematics as a service subject – Why? En A. Howson, J. Kahane, P. Lauginie, & E. Turckheim, *Mathematics as a Service Subject (ICMI Studies Series)* (págs. 28–34). Cambridge: Cambridge University Press.

Polya, G. (1954). *Induction And Analogy In Mathematics; Volume I of Mathematics and Plausible Reasoning*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 432*(8), 2125–2140.

Priemer, N., & Lazarte, G. d. (2009). Propuesta metodológica para la enseñanza del Cálculo. *V Jornadas de Ciencia y Tecnología de las Facultades de Ingeniería del NOA(CODINOA)* (págs. 101–106). Salta: Universidad Nacional de Salta.

Pulido, R., Ballén, M., & Zúñiga, F. S. (2007). *Abordaje hermenéutico de la investigación cualitativa: Teorías, procesos, técnicas.* Bogotá: Universidad Cooperativa de Colombia.

Putnam, H. (1988). *Representation and reality.* Cambridge: The MIT Press.

Radford, L. (1994). La enseñanza de la demostración: aspectos teóricos y prácticos. *Educación Matemática, 6*(3), 21–36.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103–129.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 39–65. doi:10.1007/s10649-006-7136-7

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación. El caso de la didáctica de las matemáticas. En J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Edits.), *L'activitat docent intervenció, innovació, investigació* (págs. 33–49). Girona: Documenta Universitaria.

Radford, L. (2013). Sumisión, alienación y (un poco de) esperanza: hacia una visión cultural, histórica, ética y política de la enseñanza de las matemáticas. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (págs. 1–16). Santo Domingo, República Dominicana: CEMACYC.

Radford, L. (2013). Three key Concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(1), 7–44.

Recio, Á. M. (2001). La demostración en matemática: una aproximación epistemológica y didáctica. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas, & J. D. Godino (Edits.), *Investigación en* *educación matemática: Quinto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (págs. 27–44). Almería: Servicio de Publicaciones.

Reséndiz, D. (2008). *El rompecabezas de la Ingeniería ¿Por qué y cómo se transforma el mundo?* México, D F: Fondo de Cultura Económica.

Reséndiz, D. (2008). *El rompecabezas de la Ingeniería ¿Por qué y cómo se transforma el mundo?* México, D F: Fondo de Cultura Económica.

Rizo, N. (2007). Interacción y comunicación en entornos educativos: Reflexiones teóricas, conceptuales y metodológicas. *Revista da Associação Nacional dos Programas de Pós-Graduação em Comunicação, 8*, 1–16.

Rodrigues, R. (2013). El desarrollo de la práctica reflexiva sobre el quehacer docente, apoyada en el uso de un portafolio digital, en el marco de un programa de formación para académicos de la Universidad Centroamericana de Nicaragua. *Tesis doctoral*. Barcelona, España: Universitat de Barcelona.

Romo-Vázquez, A. (2009). La formation mathématique des futurs ingénieurs. *Tesis doctoral*. Paris, Francia: Université Paris-Diderot - Paris VII.

Romo-Vázquez, A. (2014). La modelización matemática en la formación de ingenieros. *Educación Matemática, Esp.*, 314–338.

Romo-Vázquez, A. (2015). Una reflexión sobre el rol de las matemáticas en la formación de ingenieros. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 18*(1), 163–182.

Sackur, C., Drouhard, J., & Maurel, M. (2000). Experiencing the necessity of a mathematical statement. *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education* (págs. 1–9). Hiroshima: IGPME.

Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355–382.

Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Sañudo, L. E. (2006). La ética en la investigación educativa. *Hallazgos, 3*(6), 83–98.

Saussure, F. (2008). *Curso de Lingüística General* (24ta ed.). Buenos Aires: Losada.

Selden, A. (2012). Transitions and Proof and Proving at Tertiary Level. *Proof and Proving in Mathematics Education, 15*, 391–420.

Serrano, W. (2005). El significado de objetos en el aula de matemáticas. *Revista de Pedagogía, XXVI*(75), 131–164.

Sierpinska, A., & Lerman, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. *International Handbook of Mathematics Education, 4*, 827–876.

Sobrevilla, M. A. (2000). *La formación del ingeniero profesional para el tiempo actual.* Buenos Aires: Academia Nacional de Educación.

Soto, J. S. (2013). Una secuencia didáctica basada en modelación matemática. *Tesis de maestría.* México, D F, México: Instituto Politécnico Nacional.

Stæckel, P. (1914). La preparation mathématique des ingénieurs dans les différents pays. *Conférence Internationale de l'Enseignement Mathématique* (págs. 123–172). Paris: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique.

Stewart, J. (2008). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas* (6ta ed.). México, D F: Cengage Learning.

Sunthonkanokpong, W. (2011). Future global visions of engineering education. *Procedia Engineering, 8*, 160–164.

Tardif, M. (2008). *Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis: Vozes.

Thomas, G. B. (2006). *Cálculo. Una variable.* México, D F: Pearson.

Torregrosa-Gironés, G., Haro, M. J., Penalva, M. d., & Llinares, S. (2010). Concepciones del profesor sobre la prueba y software dinámico. Desarrollo en un entorno virtual de aprendizaje. *Revista de Educación*(352), 379–404.

Torres, C. (2004). Lo visual y lo deductivo en las matemáticas. *Miscelánea Matemática*(40), 1–27.

Trejo, E., Camarena, P., & Trejo, N. (2013). Las matemáticas en la formación de un ingeniero: una propuesta metodológica. *Revista de Docencia Universitaria, 11*(Número especial monográfico:Engineering Education), 397–424.

UNESCO. (1998). *La educación superior en el siglo XXI: visión y acción*. Obtenido de http://www.unesco.org/education/educprog/wche/declaration_spa.htm

UNESCO. (2009). *La nueva dinámica de la Educación Superior y la investigación para el cambio social y el desarrollo.* Obtenido de Conferencia Mundial sobre la Educación Superior: http://unesdoc.unesco.org/images/0018/001832/183277s.pdf

Uysal, F. (2012). *The mathematics education for the engineering students of 21st century.* Obtenido de The Online Journal of New Horizons in Education: https://www.tojned.net/journals/tojned/articles/v02i02/v02i02-04.pdf

Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313.

Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means. *Educational Studies in Mathematics, 8*, 27–34.

Vázquez, R. I. (2012). ¿Qué ingenieros necesita México? *Innovación Educativa, 12*(60), 125–135.

Vázquez, R., Romo, A., Romo Vázquez, R., & Trigueros, M. (2016). La separación ciega de fuentes: un puente entre el álgebra lineal y el análisis de señales. *Educación Matemática, 28*(2), 31–57.

Voigt, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2/3), 275–298.

Vygotsky, L. (1987). *Pensamiento y Lenguaje: Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas.* Buenos Aires: La Pléyade.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101–119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 115–133.

Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 275–293.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Ediciones Paidós Ibérica.

Wenger, E. (2009). A social theory of learning. En K. Illeris (Redactor), *Contemporary Theories of Learning* (págs. 209–218). New York, NY: Routledge.

Wenger, E., McDermott, R. A., & Snyder, W. (2002). *Cultivating Communities of Practice: A Guide to Managing Knowledge*. Cambridge, Massachusetts: Harvard Business Press.

Whiting, D. (2006). Meaning-Theories and the Principle of Humanity. *The Southern Journal of Philosophy*, 698–720.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: planejamento de métodos* (4ta ed.). Porto Alegre: Bookman.

Zabalza, M. (2004). *La enseñanza universitaria: El escenario y sus protagonistas.* Madrid: Narcea Ediciones.

Zabalza, M. (2009). Ser profesor universitario hoy. *La Cuestión Universitaria*(5), 69–81.

Zichi, M., & Omery, A. (2003). Escuelas de fenomenología: implicaciones para la investigación. En J. M. Morse (Edit.), *Asuntos críticos en los métodos de investigación cualitativa* (págs. 160–184). Medellín: Universidad de Antioquia.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Anexos

Anexo 1: Actividad No. 3

VICERRECTORÍA ACADÉMICA DIRECCIÓN CURRICULAR Y DE DOCENCIA	
Seminario: La demostración matemática en cursos de Cálculo Diferencial	
Facultad de Ingeniería	Área de Matemáticas

Actividad No. 3

Estimados colegas:

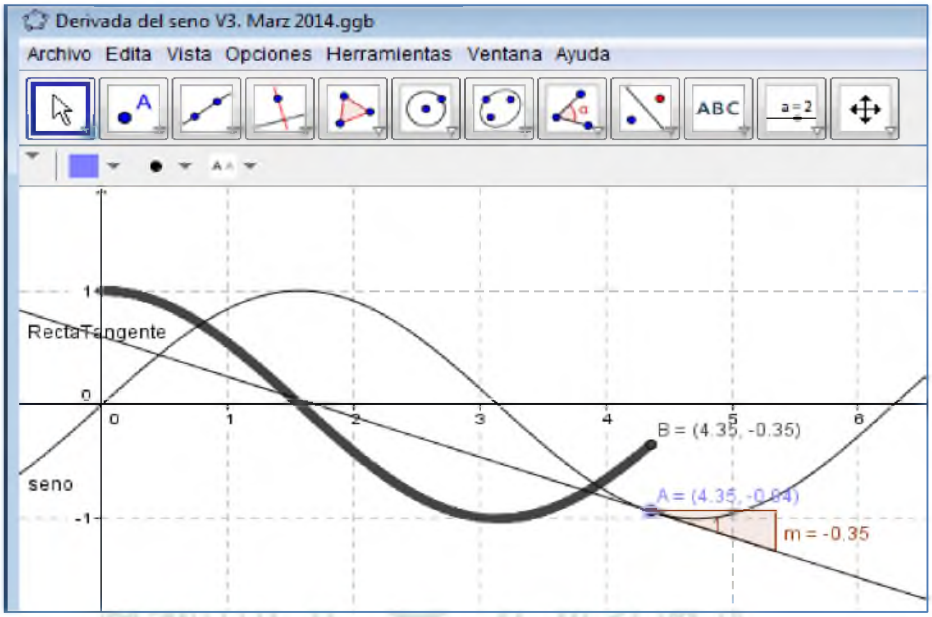
A continuación, se presentan tres argumentaciones para probar un teorema relacionado con la derivada de la función seno. De acuerdo con su experiencia y conocimientos en el área de Cálculo favor analizar y expresar sus comentarios, en el contexto de la enseñanza del Cálculo Diferencial, sobre las siguientes argumentaciones.

Teorema.

La derivada de la función seno es la función coseno.

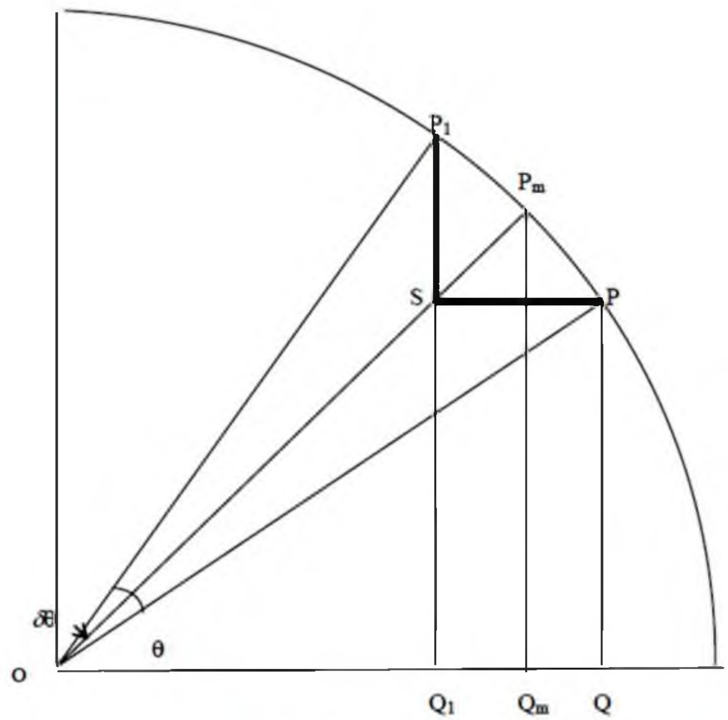
PRESENTACIÓN No. 1

Mediante el uso de software (GeoGebra) muestre que la gráfica de la función derivada del seno es la función coseno. Utilice la interpretación geométrica del teorema para compartir con sus compañeros sus comentarios al respecto. Simule con la opción de barrido de un punto en GeoGebra que el rastro de un punto B dibuja la gráfica de la función coseno; la abscisa del punto B corresponde a la abscisa de un punto A sobre la curva de la función seno y la ordenada de B coincide con la pendiente de la recta tangente en el punto A.



PRESENTACIÓN No. 2

En el diagrama de abajo, el arco PX de un circulo de radio 1 subtiende un ángulo θ de centro O. Sea x la longitud del arco PX y sea $PP_1 = \delta x$ un pequeño incremento de la longitud del arco con un incremento correspondiente en el ángulo $\delta\theta$. P_m es el punto medio del arco PP_1. Q_1, Q_m y Q son las perpendiculares desde P_1, P_m y P al radio OX.



Ahora, el triángulo PP_1S y OP_mQ_m son semejantes.

Entonces,

$$\frac{P_1S}{P_1P}=\frac{OQ_m}{OP_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\frac{PS}{P_1P}=\frac{P_mQ_m}{OP_m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

Pero de la figura:

P_1S = pequeño <u>incremento</u> en $\sin\theta = \delta \sin\theta$; PS = pequeña <u>disminución</u> en

$\cos\theta = -\delta\cos\theta$

P_1P ≈ pequeño incremento en la longitud de arco = radio × ángulo = $1\times\,\delta\theta$

OP_1 = radio del círculo = 1; $OQ_m \approx OQ = \cos\theta$; $P_mQ_m \approx PQ = \sin\theta$

Entonces, en la terminología matemática moderna, nosotros podemos escribir las expresiones (1) y (2) como

$$\frac{\delta(\sin\theta)}{\delta\theta} \approx \cos\theta \qquad (1a)$$

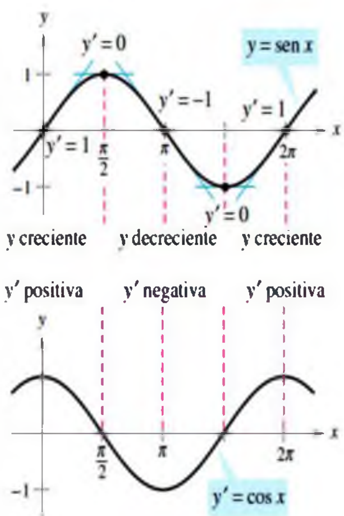
$$\frac{\delta(\cos\theta)}{\delta\theta} \approx -\sin\theta \qquad (2a)$$

Esta demostración es de Bhaskara II [Ver A. J. Bag, Mathematics in Ancient and Medieval India, Chaukhambha Orientalia, 1979].

PRESENTACIÓN No. 3

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$



La derivada de la función seno es la función coseno
Figura 2.18

DEMOSTRACIÓN

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x} \qquad \text{Definición de derivada.}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos \Delta x + \cos x \operatorname{sen} \Delta x - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen} \Delta x - (\operatorname{sen} x)(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[(\cos x)\left(\frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x}\right) - (\operatorname{sen} x)\left(\frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x}\right) \right]$$

$$= \cos x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} \right) - \operatorname{sen} x \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos \Delta x}{\Delta x} \right)$$

$$= (\cos x)(1) - (\operatorname{sen} x)(0)$$

$$= \cos x$$

Esta regla de derivación se ilustra en la figura 2.18. Observar que para cada x, la *pendiente* de la curva seno es igual al valor del coseno. La demostración de la segunda regla se deja como ejercicio (ver el ejercicio 120).

Tomado de Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Calculo 1 de una variable* (Vol. 9): McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Anexo 2: Actividad No. 6

VICERRECTORÍA ACADÉMICA DIRECCIÓN CURRICULAR Y DE DOCENCIA	
Seminario: La demostración matemática en cursos de Cálculo Diferencial	
Facultad de Ingeniería	Área de Matemáticas

Actividad No. 6

Estimados colegas:

Teniendo en cuenta su experiencia y conocimiento en el área de cálculo y de acuerdo con el siguiente listado de teoremas tomados del texto de Larson y Edwards (2010), responder los siguientes interrogantes. (Se tendrá a disposición otros textos de Cálculo en medio físico o digital para una posible consulta).

1. ¿Cuáles demostraciones cree usted que se deberían plantear en el aula de clase para programas de ingeniería? ¿Por qué?
2. ¿Cuáles son sus criterios para escoger un teorema en un curso de Cálculo Diferencial para ingeniería?
3. ¿Cuáles son sus criterios para escoger una demostración para un curso de Cálculo Diferencial para ingeniería?
4. ¿Qué teorema o proposición le gustaría incluir en el siguiente listado?
5. ¿Qué estrategias utilizaría para plantear una demostración de algún teorema o proposición matemática en el aula de clases de ingeniería?

Facultad de Educación

Escoja un Teorema y proponga una demostración para sus estudiantes de ingeniería

CAPÍTULO 1 LÍMITES Y SUS PROPIEDADES

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO SALVO EN UN PUNTO

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DE UN LÍMITE

TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES

TEOREMA 1.15 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

CAPÍTULO 2 DERIVACIÓN

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

CAPÍTULO 3 APLICACIONES DE LA DERIVADA

TEOREMA 3.1 EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

TEOREMA 3.2 LOS EXTREMOS RELATIVOS OCURREN SÓLO EN NÚMEROS O PUNTOS CRÍTICOS

TEOREMA 3.3 TEOREMA DE ROLLE

TEOREMA 3.4 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

TEOREMA 3.5 CRITERIO PARA LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

TEOREMA 3.6 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

TEOREMA 3.7 CRITERIO DE CONCAVIDAD

TEOREMA 3.8 PUNTO DE INFLEXIÓN

TEOREMA 3.9 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

TEOREMA 3.10 LÍMITES AL INFINITO

CAPÍTULO 1 Límites y sus propiedades

TEOREMA 1.1 ALGUNOS LÍMITES BÁSICOS

Si b y c son números reales y n un entero positivo:

1. $\lim_{x\to c} b = b$ **2.** $\lim_{x\to c} x = c$ **3.** $\lim_{x\to c} x^n = c^n$

TEOREMA 1.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Si b y c son números reales y n un entero positivo, f y g son funciones con los límites siguientes:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \text{y} \quad \lim_{x\to c} g(x) = K$$

1. Múltiplo escalar: $\lim_{x\to c} [b f(x)] = bL$

2. Suma o diferencia: $\lim_{x\to c} [f(x) \pm g(x)] = L \pm K$

3. Producto: $\lim_{x\to c} [f(x)g(x)] = LK$

4. Cociente: $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{K}$, siempre que $K \neq 0$

5. Potencias: $\lim_{x\to c} [f(x)]^n = L^n$

TEOREMA 1.3 LÍMITES DE LAS FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Si p es una función polinomial y c un número real, entonces:

$$\lim_{x \to c} p(x) = p(c).$$

Si r es una función racional dada por $r(x) = p(x)/q(x)$ y c un número real tal que $q(c) \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \to c} r(x) = r(c) = \frac{p(c)}{q(c)}.$$

TEOREMA 1.4 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN RADICAL

Si n es un entero positivo. El siguiente límite es válido para toda c si n es impar, y para toda $c > 0$ si n es par:

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$$

TEOREMA 1.5 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si f y g son funciones tales que $\lim_{x \to c} g(x) = L$ y $\lim_{x \to L} f(x) = f(L)$, entonces:

$$\lim_{x \to c} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L).$$

TEOREMA 1.6 LÍMITES DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea c un número real en el dominio de una función trigonométrica dada.

1. $\lim_{x \to c} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} c$
2. $\lim_{x \to c} \cos x = \cos c$
3. $\lim_{x \to c} \tan x = \tan c$
4. $\lim_{x \to c} \cot x = \cot c$
5. $\lim_{x \to c} \sec x = \sec c$
6. $\lim_{x \to c} \csc x = \csc c$

TEOREMA 1.7 FUNCIONES QUE COINCIDEN EN TODO SALVO EN UN PUNTO

Sea c un número real y $f(x) = g(x)$ para todo $x \neq c$ en un intervalo abierto que contiene a c. Si existe el límite de $g(x)$ cuando x se aproxima a c, entonces también existe el límite de $f(x)$ y

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x).$$

TEOREMA 1.8 TEOREMA DEL ENCAJE

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ para todos los x en un intervalo abierto que contiene a c, por la posible excepción de la propia c, y si

$$\lim_{x \to c} h(x) = L = \lim_{x \to c} g(x)$$

entonces el $\lim_{x \to c} f(x)$ existe y es igual a L.

TEOREMA 1.9 DOS LÍMITES TRIGONOMÉTRICOS ESPECIALES

1. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$
2. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x} = 0$

TEOREMA 1.10 EXISTENCIA DE UN LÍMITE

Si f es una función y c y L son números reales, el límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a c es L si y sólo si

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to c^+} f(x) = L.$$

TEOREMA 1.11 PROPIEDADES DE LA CONTINUIDAD

Si b es un número real y f y g son continuas en $x = c$, entonces las siguientes funciones también son continuas en c.

1. Múltiplo escalar: bf
2. Suma y diferencia: $f \pm g$
3. Producto: fg
4. Cociente: $\dfrac{f}{g}$, si $g(c) \neq 0$

TEOREMA 1.12 CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN COMPUESTA

Si g es continua en c y f es continua en $g(c)$, entonces la función compuesta dada por $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en c.

TEOREMA 1.13 TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ y k es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe al menos un número c en $[a, b]$ tal que

$$f(c) = k.$$

TEOREMA 1.14 ASÍNTOTAS VERTICALES

Sean f y g funciones continuas en un intervalo abierto que contiene a c. Si $f(c) \neq 0$, $g(c) = 0$, y existe un intervalo abierto que contiene a c tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \neq c$ en el intervalo, entonces la gráfica de la función está dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene una asíntota vertical en $x = c$.

TEOREMA 1.15 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES INFINITOS

Sean c y L números reales, y f y g funciones tales que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = L.$$

1. Suma o diferencia: $\lim_{x \to c} [f(x) \pm g(x)] = \infty$
2. Producto: $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = \infty, \quad L > 0$
   $\lim_{x \to c} [f(x)g(x)] = -\infty, \quad L < 0$
3. Cociente: $\lim_{x \to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$

Propiedades análogas son válidas para límites laterales y para funciones cuyo límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es $-\infty$.

TEOREMA 2.1 DERIVABLE IMPLICA CONTINUA

Si f es derivable en $x = c$, entonces f es continua en $x = c$.

TEOREMA 2.2 LA REGLA DE LA CONSTANTE

La derivada de una función constante es 0. Es decir, si c es un número real, entonces

$$\frac{d}{dx}[c] = 0.$$

(Ver la figura 2.14)

TEOREMA 2.3 LA REGLA DE LA POTENCIA

Si n es un número racional, entonces la función $f(x) = x^n$ es derivable y

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

Para que f sea derivable en $x = 0$, n debe ser un número tal que x^{n-1} se encuentre definido en un intervalo que contenga al 0.

TEOREMA 2.4 LA REGLA DEL MÚLTIPLO CONSTANTE

Si f es una función derivable y c un número real, entonces cf también es derivable y $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$.

TEOREMA 2.5 LAS REGLAS DE SUMA Y DIFERENCIA

La derivada de la suma (o de la diferencia) de dos funciones derivables f y g es derivable en sí. Además, la derivada de $f + g$ (o $f - g$) es igual a la suma (o diferencia) de las derivadas de f y g.

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$ Regla de la suma.

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = f'(x) - g'(x)$$ Regla de la diferencia.

TEOREMA 2.6 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

$$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x \qquad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$$

TEOREMA 2.7 LA REGLA DEL PRODUCTO

El producto de dos funciones derivables f y g también es derivable. Además, su derivada es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la derivada de la primera por la segunda.

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

TEOREMA 2.8 LA REGLA DEL COCIENTE

El cociente f/g de dos funciones derivables f y g también es derivable para todos los valores de x para los que $g(x) \neq 0$. Además, la derivada de f/g se obtiene mediante el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \qquad g(x) \neq 0$$

TEOREMA 2.9 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

$$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x \qquad \frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$$

TEOREMA 2.10 LA REGLA DE LA CADENA

Si $y = f(u)$ es una función derivable de u y además $u = g(x)$ es una función derivable de x, entonces $y = f(g(x))$ es una función derivable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

TEOREMA 2.11 LA REGLA GENERAL DE LA POTENCIA

Si $y = [u(x)]^n$, donde u es una función derivable de x y n es un número racional, entonces

$$\frac{dy}{dx} = n[u(x)]^{n-1}\frac{du}{dx}$$

o su equivalente

$$\frac{d}{dx}[u^n] = nu^{n-1}u'.$$

CAPÍTULO 3 Aplicaciones de la derivada

TEOREMA 3.1 EL TEOREMA DEL VALOR EXTREMO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f tiene tanto un mínimo como un máximo en el intervalo.

TEOREMA 3.4 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b), entonces existe un número c en (a, b) tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

TEOREMA 3.5 CRITERIO PARA LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

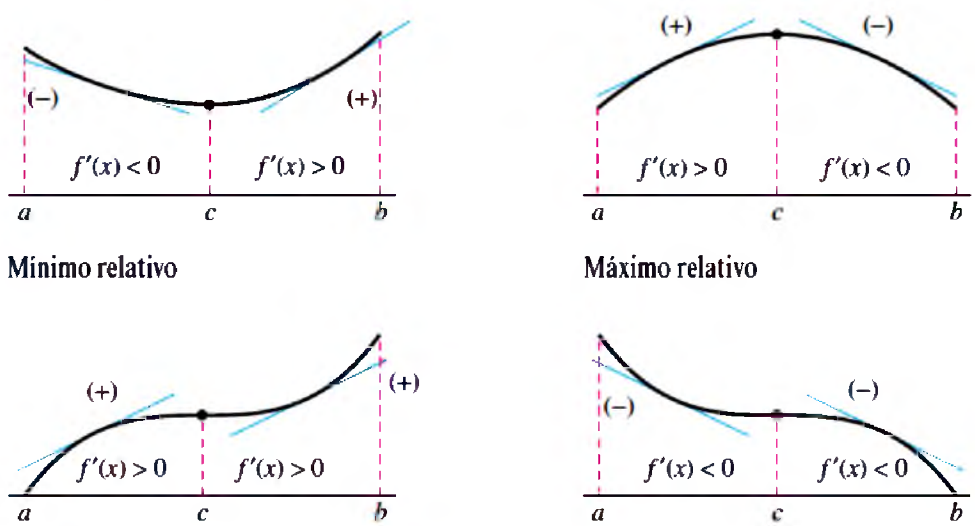
Sea f una función que es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b).

1. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, b), entonces f es creciente en $[a, b]$.
2. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, b) entonces f es decreciente en $[a, b]$.
3. Si $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b) entonces f es constante en $[a, b]$.

TEOREMA 3.6 CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA

Sea c un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en c, entonces $f(c)$ puede clasificarse como sigue.

1. Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un *mínimo relativo* en $(c, f(c))$.
2. Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un *máximo relativo* en $(c, f(c))$.
3. Si $f'(x)$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $f(c)$ no es ni un mínimo relativo ni un máximo relativo.



Mínimo relativo

Máximo relativo

Ni mínimo relativo ni máximo relativo

TEOREMA 3.7 CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto I.

1. Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en I.
2. Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en I.

TEOREMA 3.8 PUNTO DE INFLEXIÓN

Si $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de la gráfica de f, entonces $f''(c) = 0$ o f'' no existe en $x = c$.

TEOREMA 3.9 CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA

Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c.

1. Si $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.
2. Si $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en $(c, f(c))$.

Si $f''(c) = 0$, entonces el criterio falla. Esto es, f quizá tenga un máximo relativo, un mínimo relativo o ninguno de los dos. En tales casos, se puede utilizar el criterio de la primera derivada.

TEOREMA 3.10 LÍMITES AL INFINITO

Si r es un número racional positivo y c es cualquier número real, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

Además, si x^r se define cuando $x < 0$, entonces

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^r} = 0.$$

REFERENCIA: Larson, R., & Edwards, B. (2010). *Calculo 1 de una variable* (Vol. 9): McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.

Anexo 3: Producción de demostraciones usando GeoGebra y demostraciones pre-formales. Artículos publicados.

RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa **COMUNICACIONES BREVES**

Pruebas Pre-Formales de teoremas del Cálculo Diferencial para estudiantes de primer semestre de ingeniería

ÁLVARO ESPINOSA PÉREZ
alespinosape1@gmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ELIAS LARA TINOCO
eliaslaratinoco@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ERIC HERNÁNDEZ SASTOQUE
ehernandezs@unimagdalena.edu.co
Universidad del Magdalena (Profesor)/Universidad de Antioquia (Estudiante)

RESUMEN. En esta comunicación breve se presentan algunos avances de los resultados de una investigación sobre la Negociación de Significados de la Demostración por profesores de Cálculo de una universidad colombiana. Estos avances se refieren a las presentaciones de demostraciones dadas por los profesores participantes de la investigación. Una de esas presentaciones de demostraciones es una prueba pre-formal de un teorema en el Cálculo Diferencial. La metodología de este estudio es cualitativa, bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico.

PALABRAS CLAVE: Demostración, pruebas pre-formales, cálculo diferencial, negociación de significados.

1. Presentación del problema

Uno de los aspectos relevantes de la Educación Matemática consiste en que los estudiantes aprendan a demostrar o al menos ver la necesidad de ello (Alsina, 2003). La demostración es sin duda, un proceso valioso para la validación de saberes matemáticos. Sin embargo, no se debe reducir el papel de la demostración en el aula de clase al proceso de verificación de veracidad de una proposición.

Para Balacheff (2000), la demostración no solo sirve como un método de validación, sino también para comunicar ideas. Este autor plantea la demostración como una herramienta esencial de prueba, que conduce a un ejercicio práctico, que hace posible la comunicación y la evaluación a la vez.

Sin embargo, Dreyfus (1999), considera que una las razones por las cuales la demostración no se lleva al aula de clase es que los estudiantes tienen dificultad para comprenderlas, e incluso las que aparecen en libros de texto. Para programas de ingeniería, en ocasiones no se presentan demostraciones en el aula de clases porque puede tardar mucho tiempo para ser explicada (Van Asch, 1993). En este sentido, es posible que algunos docentes de Cálculo Diferencial en programas de ingeniería, dejen a un lado la demostración de teoremas, o bien, las promuevan bajo ciertas condiciones especiales. Estas decisiones sobre la demostración en el aula, dependen de la experiencia y concepciones que tengan los profesores sobre la importancia de la demostración para el aprendizaje y aplicación de las matemáticas en la ingeniería.

Por lo tanto, para esta investigación es importante conocer las negociaciones de los significados de la demostración por profesores de Cálculo Diferencial para programas de ingeniería.

2. Marco de referencia conceptual

Varios son los autores que proponen una clasificación de la demostración, de acuerdo al rigor o a su grado de abstracción (Balacheff, 1988; Gutiérrez, 2001; Harel & Sowder, 1998; Van Asch, 1993). La presentación de categorías o niveles de la demostración juegan un papel importante en la negoción de significados de la demostración para programas de ingeniería.

Balacheff (1988), plantea las demostraciones *pragmáticas*, asociadas a manipulaciones o a ejemplos concretos, y demostraciones *conceptuales,* fundamentadas en propiedades abstractas y de relaciones deductivas entre ellas. Van Asch (1993), da especial relevancia a las pruebas pre-formales, que las concibe como unas pruebas que contienen la idea esencial de la demostración y pueden fácilmente llegar a ser formalizadas a una demostración.

Con relación a la enseñanza de la demostración, para Dos Santos y Ortega (2013), algunos profesores asumen la demostración como una competencia esencial para enseñar y saber matemáticas, hay otros que opinan de manera contraria y algunos que no saben qué decir sobre eso. D´Andrea (2010), propone un modelo didáctico para la presentación de un teorema a demostrar en el ámbito áulico. Este modelo consiste de una serie de estrategias didácticas mostradas como una secuencia de tareas. Leron (1983), por ejemplo, propone el *método estructural* para las clases, que consiste en presentar pruebas como alternativa al método tradicional, aconsejando que cualquier demostración debe estar bien preparada y precedida de un esclarecimiento general.

3. Metodología

Para la realización de este estudio, se cuenta con un paradigma cualitativo (Creswell, 2010; Denzin & Lincoln, 2012) y bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico (Guba & Lincoln, 1994; Sánchez, 1998). A través de un programa de formación continua, concebido bajo el enfoque de la teoría de la práctica social de Wenger (2001), se estudia la negociación de significados de la demostración por profesores de cálculo diferencial.

Las interacciones dialógicas de los profesores, los modos de participación, las dinámicas de negociación de significados entre otras, son grabadas y los registros de audio y video son acompañados con sus respectivas transcripciones, y de un proceso de codificación abierta bajo un diseño emergente de categorías. Para el análisis de la información, se tuvieron en cuenta algunos indicadores de negociación como son la confusión, el conflicto, la participación, y la materialización.

4. Resultados preliminares

Una de las discusiones del proceso de negociación, se centró en la dificultad que tiene los estudiantes en la realización de las demostraciones de teoremas en el Cálculo Diferencial. De igual forma se planteó la necesidad que tienen los profesores de buscar formas adecuadas que le faciliten al estudiante la comprensión y el aprendizaje dichas demostraciones. Algunos profesores manifestaron su interés en las pruebas pre-formales (Van Asch, 1993). Para ellos, la prueba pre-formal, aunque guarda estrecha relación con la prueba formal se ajusta al nivel de los saberes de los estudiantes, y facilita su comprensión. Un ejemplo de pruebas pre-formales realizadas por los profesores es la siguiente:

TEOREMA: Sea f una función tal que $f'(c) = 0$ y tal que la segunda derivada de f existe en un intervalo abierto que contiene a c

a. Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo

b. Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo

c. Si $f''(c) = 0$ el criterio no decide.

Prueba Pre-Formal:

Sea $f(x) = x^2 - 2$ una función definida en [-1, 1]. Si $f'(x) = 2x$ y $x = c = 0$, entonces

$f'(c) = f'(0) = 0$. Además, $f''(x) = 2 > 0$.

Como $f''(c) = 2 > 0$, es positiva, entonces:

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} > 0$$

Luego existe un intervalo I = (-1. 1) tal que:

$\frac{f'(x)-f'(c)}{x-c} = \frac{f'(x)}{x-c} = \frac{2x}{x-c} = \frac{2x}{x} = 2 > 0$ $\forall x \neq c \in I$

Ahora:

a) *Si* $x < c \Rightarrow x < 0$, *entonces* $f'(x) = 2x < 0$ (negativa)

b) *Si* $x > c \Rightarrow x > 0$, *entonces* $f'(x) = 2x > 0$ (positiva)

Como $f'(x) = 2x$ cambia de signo en c = 0 y el Criterio de la Primera Derivada implica que $f(c) = f(0) = -2$, se tiene que el punto $(0, -2)$ es un mínimo relativo para la función.

Conclusiones

Se reconoce la importancia de encontrar nuevas formas para la enseñanza y comprensión de la demostración de teoremas en cursos de Cálculo Diferencial. La implementación de las pruebas pre-formales en la demostración de teoremas para estudiantes de ingeniería facilitaría la comprensión, no demandando mucho tiempo en su realización.

Sigue siendo tema de discusión la demostración de teoremas en las clases de cálculo diferencial y su conveniencia para la formación matemática de los estudiantes de ingeniería.

Referencias bibliográficas

- Alsina C., (2003) C. D. Q. Como quisiera demostrar, Epsilon 57. España, 345-356
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En D. Pimm (ed.) Mathematics, Teachers and Children, (pág. 316-230), London: Hodder and Stoughton
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (PÁG. Gómez, Trans.). Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (M.
- D´Andrea, R.E. (2010). Análisis del razonamiento deductivo de estudiantes de Carreras de Ciencias Naturales e Ingenierías en el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Tesis de Maestría. Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Comahue. Neuquén. Argentina.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa.* (Vol. I): gedisa editorial.
- Dos Santos y Ortega (2013). Perfiles del profesorado sobre la enseñanza y uso de la demostración. AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, Nº 4, 27 – 45.
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional. Barcelona. Graó, S.R.L. pág.125– 133)
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pág. 105–117). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Sánchez, S. (1998). Fundamentos para la Investigación Educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador. Santa Fe de Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313. doi: 10.1080/0020739930240214
- Wenger, E. (2001). Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad (G. Sánchez, Trans.). Barcelona: Paidós.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa **COMUNICACIONES BREVES**

Pruebas de teoremas del cálculo diferencial para programas de ingeniería

ERIC HERNÁNDEZ SASTOQUE
ehernandezs@unimagdalena.edu.co
Universidad del Magdalena (Profesor) - Universidad de Antioquia (Estudiante)

JESÚS TINOCO DEL VALLE
jestinoco@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

ADA RADA GUETE
adaragu@hotmail.com
Universidad del Magdalena (Profesor)

JORGE LARA OROZCO
matematicalara@yahoo.es
Universidad del Magdalena (Profesor)

RESUMEN. En este artículo presentamos algunos avances de los resultados de una investigación en curso sobre la Negociación de Significados de la Demostración por profesores de Cálculo. El objetivo de la investigación es analizar la negociación de significados de la demostración de profesores de cálculo diferencial en un trabajo colaborativo. La metodología es cualitativa bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico. El escenario de investigación es un Programa de Formación Continua dirigida a profesores de cálculo para programas de ingeniería. Presentamos algunos ejemplos de pruebas pre-formales y de la utilización del software GeoGebra para explicaciones de teoremas, elaborados por los profesores participantes de la investigación.

PALABRAS CLAVE: Demostración, pruebas pre-formales, GeoGebra, cálculo diferencial.

2. Presentación del problema

La mayoría de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración se han llevado a cabo en el área de la geometría (Fiallo, Camargo, & Gutiérrez, 2013). Para el caso del Cálculo se han tratado aspectos importantes de la demostración, sin embargo, poco explican los posibles significados de la demostración que puedan tener los profesores en esta área de las matemáticas (Calvo, 2001; González, 2012; Klisinska, 2009).

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa **COMUNICACIONES BREVES**

Es posible que algunos profesores de cálculo diferencial para programas de ingeniería prefieran omitir la demostración de teoremas o decidan promoverla bajo determinadas condiciones. Entre las razones para omitir la demostración en el primer año de universidad para programas de ingeniería, está el hecho de que la demostración de un teorema puede tardar mucho tiempo, o que la demostración es demasiado 'dura' (Van Asch, 1993).

Por lo general, cada profesor de forma individual y de acuerdo con su experiencia y concepciones sobre la demostración y otros aspectos como las matemáticas, la enseñanza, la formación matemática de un ingeniero, etc., toma decisiones aisladas sobre la demostración en las clases. Por lo tanto, esta investigación analiza cómo profesores universitarios negocian asuntos concernientes a la demostración en el área del cálculo diferencial para programas de ingeniería.

3. Marco de referencia conceptual

Con respecto a las aproximaciones conceptuales de la demostración nos interesa algunas perspectivas que la consideran no sólo como un producto sino como un proceso (Arsac, 2007; Camargo, 2010), o como una práctica social validada por una comunidad (Crespo, Farfán, & Lezama, 2010; Godino & Recio, 2001; Moreno, 1996). Entre las representaciones de la demostración tenemos las diferentes expresiones que ésta toma de acuerdo al criterio de rigor, o grado de abstracción. Algunas de estas representaciones son: *explicación, prueba*, y *demostración* (Balacheff, 2000); y *prueba con dibujos o ejemplos, pruebas pre-formales,* y *prueba formal* (Van Asch, 1993).

Las funciones de la demostración tomadas de referencia son: verificación, explicación, sistematización, descubrimiento, comunicación, desafío intelectual, y transferencia (Bell, 1976; De Villiers, 1993; Hanna, 2000; Hemmi, 2006). Para este estudio, la teoría que orienta la comprensión del proceso de negociación de significados es la teoría de la práctica social (Wenger, 2001).

4. Metodología

El estudio coincide con un paradigma cualitativo (Creswell, 2010; Denzin & Lincoln, 2012), y se gesta bajo el enfoque fenomenológico-hermenéutico (Guba & Lincoln, 1994; Sánchez, 1998). El escenario de investigación es un Programa de Formación Continua sobre la demostración en el cálculo diferencial. Este programa está diseñado como un espacio para la interacción entre profesores bajo elementos de la teoría de la práctica social de Wenger (2001). Los participantes son profesores de una facultad de ingeniería de una universidad colombiana.

La principal fuente de información son los encuentros de los profesores en el Programa de Formación Continua, los cuales son grabados por medio de una videograbadora. Estos registros muestran la interacción dialógica de los profesores, los modos de participación, las dinámicas de negociación de significados, etc. Para el análisis de la información los registros de audio y video son acompañados de sus respectivas transcripciones, y de un proceso de codificación abierta bajo un diseño emergente de categorías.

5. Algunos resultados

El grado de abstracción de una demostración fue uno de los elementos de negociación entre los profesores participantes. Algunos profesores expresaron la conveniencia de utilizar pruebas pre-formales (Van Asch, 1993) asociándola a las condiciones académicas de los estudiantes, y a la búsqueda de una mejor comprensión de la demostración. El siguiente comentario de un profesor responde ante la inquietud del uso de pruebas pre-formales:

En muestros cursos de cálculo hacemos uso de muchos teoremas y al realizar sus demostraciones de forma rigurosa a muestros estudiantes de ingeniería quizás no se logre la comprensión de estos. Es por esto, que la prueba pre-formal es una herramienta que aunque guarda estrecha relación con la prueba formal se ajusta al nivel de los saberes de los estudiantes, facilitando así su comprensión.

Una de las pruebas pre-formales realizada por los profesores es la siguiente:

TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sea $f:[a,b]\to R$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c\in(a,b)$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

PRUEBA PRE-FORMAL

Sea $f(x)=4x-x^2$, esta función es continua en el intervalo $[1,4]$ y es derivable en $(1,4)$.

Definimos una función auxiliar $g(x) = f(x) - h(x)$ dondedonde $h(x)$ es la función que representa la recta secante que une los puntos

$$h(x) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}(x - 1) + f(1) = \frac{0 - 3}{3}(x - 1) + 3 = -x + 1 + 3 = -x + 4$$

La cual es continua en $[1,4]$ y derivable en $(1,4)$.Luego, $g(x) = 4x - x^2 + x - 4 = -x^2 + 5x - 4$ también lo es, además, es fácil verificar que $g(1) = g(4) = 0$. Por tanto, resulta posible aplicar el teorema de Rolle a la función $g(x)$, es decir, existe un numero c en $(1,4)$ tal que $g'(c) = 0$ es decir $f'(c) - h'(c) = 0 \rightarrow 4 - 2c = -1 \rightarrow c = \frac{5}{2}$, calculando $f'\left(\frac{5}{2}\right) \wedge \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}$ tenemos que $f'\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - 2\left(\frac{5}{2}\right) = 4 - 5 = -1$ y $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{0 - 3}{3} = -1$, por tanto se cumple que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Otro de los aspectos relacionados con la negociación del grado de abstracción de una demostración fue el uso de algún software para probar un teorema. La importancia del uso de un software fue relacionada con la facilidad para la comprensión de los conceptos, al igual que permite superar un poco el problema de la carencia de tiempo para tratar teoremas y demostraciones en clase. Uno de los comentarios de los profesores fue:

Un aporte importante a las demostraciones es que mediante un software [Geogebra] *podemos lograr que los estudiantes interpreten de manera más rápido algunos teoremas de cálculo diferencial, que haciendo la demostración de manera formal. Eso permite mayor avance en el desarrollo de los temas en menor tiempo.*

El componente geométrico de algunos teoremas del cálculo diferencial permitió mostrar a través del GeoGebra, las condiciones de la hipótesis y la verificación de la tesis. En la Figura 1. Se muestra una imagen del trabajo realizado por los profesores usando GeoGebra para probar con un ejemplo y un gráfico (Van Asch, 1993), el teorema del Valor Medio.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

RECME: Revista Colombiana de Matemática Educativa **COMUNICACIONES BREVES**

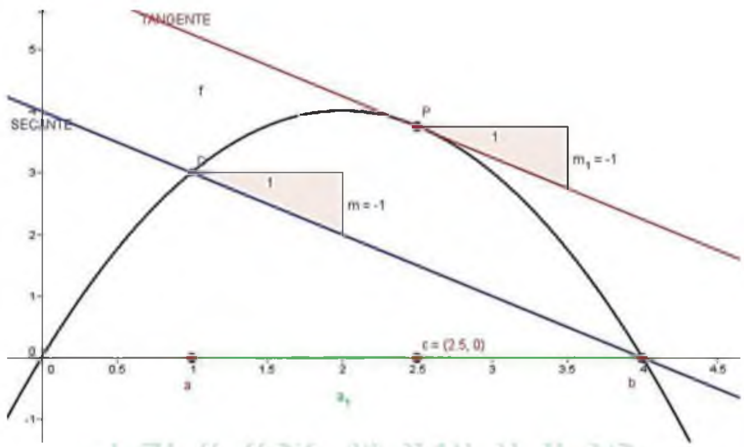


Figura 1. *Uso de GeoGebra en la interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio*

c. Conclusiones

El grado de abstracción que puede tener una demostración es considerado como un elemento de negociación por parte de los profesores de cálculo diferencial. Se reconoce la importancia de las pruebas pre-formales, o de pruebas con ejemplos y gráficas apoyadas con el uso de un software como el GeoGebra. Algunos profesores consideran que este tipo de pruebas son apropiadas para estudiantes de ingeniería, pues facilita la comprensión de conceptos y no demandan demasiado tiempo. Las pruebas pre-formales son vistas, en ocasiones, como un medio para alcanzar el desarrollo de pruebas formales (demostración). Sigue siendo algo discutible la presencia de demostraciones en cursos de cálculo para la formación matemática de ingenieros. De acuerdo con el desarrollo de la investigación seguiremos comunicando los demás resultados que se presenten.

Referencias bibliográficas

α) Arsac, G. (2007). Origin of Mathematical Proof. History and Epistemology. In PÁG. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pág. 27–42). Rotterdam: Sense Publishers.

β) Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas* (PÁG. Gómez, Trans.). Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes.

χ) Bell, A. W. (1976). Study of pupil´s proof - explanation in mathematical situation. *Educational Studies in Mathematics, 7(1)*, 23–40.

δ) Calvo, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de cálculo diferencial e Integral.* Disertación doctoral, Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona.

- Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* Tesis Doctoral, Universitat de Valẽncia, Valencia (España).
- Crespo Crespo, C., Farfán, R., & Lezama, J. (2010). Argumentaciones y demostraciones: una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educactiva, 13*, 283–306.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto* (M. Lopes, Trans. 3 ed.). São Paulo: Artmed Editora S.A.
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. [The rol and function of proof in matehematics]. *Epsilon 26*, 15–30.
- Denzin, N., & Lincoln, Y. (2012). *El campo de la investigación cualitativa. Manual de investigación cualitativa.* (Vol. I): gedisa editorial.
- Fiallo, J., Camargo, L., & Gutiẽrrez, Á. (2013). Acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en matemáticas. *Revista Integración. Escuela de Matemáticas. Universidad Industrial de Santander, 31, No. 2*, 181–205.
- Godino, J. D., & Recio, A. M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19 (3)*, 405–414.
- González, J. C. (2012). *Estudio de contraste sobre la preferencia y significación de pruebas formales y preformales* Tesis Doctoral, Universidad de Valladolid Valladolid.
- Guba, E., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pág. 105–117). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation, and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.
- Hemmi, K. (2006). *Approaching proof in a community of mathematical practice.* Unpublished Doctoral Thesis, Stockholm University, Stockholm.
- Klisinska, A. (2009). *The fundamental theorem of calculus. A case study into the didactic transposition of proof.* Doctoral Thesis, Lulea University of Tecnology.
- Moreno, L. (1996). Una perspectiva sobre la demostración. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 1 (1)*, 123–136.
- Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la Investigación Educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador.* Santa Fe de Bogotá D.C.: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Van Asch, A. G. (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 24*(2), 301–313. doi: 10.1080/0020739930240214
- Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica: Aprendizaje, significado e identidad* (G. Sánchez, Trans.). Barcelona: Paidós.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

Anexo 4: Formato de consentimiento informado

Consentimiento Informado de Participación

Yo ____ estoy de acuerdo en participar en el ***Proyecto de investigación: SIGNIFICADOS DE LA DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA MANIFESTADOS POR PROFESORES DE CÁLCULO DIFERENCIAL PARA INGENIERÍA*** desarrollado en el marco de la formación doctoral en Educación del estudiante Eric Hernández Sastoque de la Universidad de Antioquia. Entiendo que mi participación es voluntaria, gratuita y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mí o sea destruida.

Propósito de la investigación: Analizar la negociación de significados de la demostración de profesores de cálculo en un trabajo colaborativo.

Beneficios: El ser participante en este proyecto de investigación le puede generar oportunidades para reflexionar con un colectivo de profesores sobre su labor docente y contribuir con la mejora de la enseñanza de las matemáticas en la educación superior.

Procedimiento: Los participantes en este estudio podrán aportar elementos de su experiencia docente y compartir información de su práctica. En algunas ocasiones se tomarán registros de video y audio. De ser necesario los participantes podrían ser entrevistados.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio excepto la confrontación con su propia práctica que podría generar molestias emocionales.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y sólo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y únicamente para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, sólo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

Preguntas posteriores: El responsable de este proyecto de investigación responderá cualquier pregunta relacionada, ahora o en el transcurso del desarrollo del proyecto, a través de los correos electrónicos ehdezs@yahoo.com ehernandezs@unimagdalena.edu.co

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Educación

Consentimiento: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de este proyecto de investigación.

______________________	______________________	______________________
Nombre del investigador	Firma	Fecha
______________________	______________________	______________________
Nombre del participante	Firma	Fecha

Cualquier comentario o situación en la que se sospeche de falta de ética investigativa puede ser discutida con la directora de tesis Lucía Zapata Cardona PhD., email: luzapata@ayura.udea.edu.co Tel.: 2195727, Universidad de Antioquia, Cel.: 3017181059, o con la Dirección Curricular y de Docencia de la Vicerrectoría Académica de la Universidad del Magdalena, Dr. Hermes Henríquez Algarín, email: dcdocencia@unimadalena.edu.co Tel.: PBX: (57 - 5) 4217940-4301292 Extensión 1074, Ubicación: Edificio Docente "Ricardo Villalobos Rico" Primer Piso – Oficina 4.

Anexo 5: Actividad No. 4

VICERRECTORÍA ACADÉMICA DIRECCIÓN CURRICULAR Y DE DOCENCIA	
Seminario: La demostración matemática en cursos de Cálculo Diferencial	
Facultad de Ingeniería	Área de Matemáticas

Actividad No. 4

Estimados colegas:

El teorema del Valor Extremo establece que una función continua en un intervalo cerrado [*a*, *b*] debe tener tanto un mínimo como un máximo en dicho intervalo. Sin embargo, ambos valores pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, denominado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), suministra las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el *interior* de un intervalo cerrado. Este teorema es fundamental para la demostración de otros teoremas presentes en el Cálculo.

A continuación, se presentan algunas demostraciones del Teorema de Rolle dado en textos comerciales de uso en las bibliografías de cursos de Cálculo a nivel universitario. De acuerdo a su experiencia y conocimientos favor analizar y expresar sus comentarios sobre estas demostraciones en el contexto de la enseñanza del Cálculo para estudiantes de primer año de ingeniería.

1. **Tomado de: Larson, R., & Edwards, B. H. (2010). Cálculo 1 de una variable (Novena ed.): McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A. de C.V.**

3.2 El teorema de Rolle y el teorema del valor medio

- Comprender el uso del teorema de Rolle.
- Comprender el uso del teorema del valor medio.

Teorema de Rolle

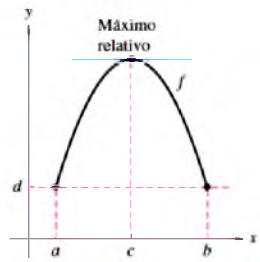
El teorema del valor extremo (sección 3.1) establece que una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ debe tener tanto un mínimo como un máximo en el intervalo. Ambos valores, sin embargo, pueden ocurrir en los puntos extremos. El **teorema de Rolle**, nombrado así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), proporciona las condiciones que garantizan la existencia de un valor extremo en el *interior* de un intervalo cerrado.

TEOREMA DE ROLLE
Michel Rolle, matemático francés, fue el primero en publicar en 1691 el teorema que lleva su nombre. Sin embargo, antes de ese tiempo Rolle fue uno de los más severos críticos del cálculo, señalando que éste proporcionaba resultados erróneos y se basaba en razonamientos infundados. Posteriormente Rolle se dio cuenta de la utilidad del cálculo.

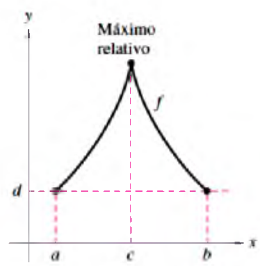
EXPLORACIÓN

Valores extremos en un intervalo cerrado Dibujar un plano de coordenadas rectangular en un pedazo de papel. Marcar los puntos (1, 3) y (5, 3). Utilizando un lápiz o una pluma, dibujar la gráfica de una función derivable f que empieza en (1, 3) y termina en (5, 3). ¿Existe al menos un punto sobre la gráfica para el cual la derivada sea cero? ¿Sería posible dibujar la gráfica de manera que no hubiera un punto para el cual la derivada es cero? Explicar el razonamiento.

TEOREMA 3.3 TEOREMA DE ROLLE
Sea f continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b). Si $f(a) = f(b)$ entonces existe al menos un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.



a) f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)



b) f es continua en $[a, b]$
Figura 3.8

DEMOSTRACIÓN Sea $f(a) = d = f(b)$.

Caso 1: Si $f(x) = d$ para todo x en $[a, b]$, f es constante en el intervalo y, por el teorema 2.2, $f'(x) = 0$ para todo x en (a, b).

Caso 2: Suponer que $f(x) > d$ para algún x en (a, b). Por el teorema del valor extremo, se sabe que f tiene un máximo en algún punto c en el intervalo. Además, como $f(c) > d$, este máximo no puede estar en los puntos terminales. De tal modo, f tiene un máximo en el intervalo *abierto* (a, b). Esto implica que $f(c)$ es un máximo *relativo* y por el teorema 3.2, c es un número crítico de f. Por último, como f es derivable en c, es posible concluir que $f'(c) = 0$.

Caso 3: Si $f(x) < d$ para algún x en (a, b), se puede utilizar un argumento similar al del caso 2, pero implicando el mínimo en vez del máximo.

De acuerdo con el teorema de Rolle, puede verse que si una función f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y si $f(a) = f(b)$, debe existir al menos un valor x entre a y b en el cual la gráfica de f tiene una tangente horizontal, como se muestra en la figura 3.8*a*. Si se elimina el requerimiento de derivabilidad del teorema de Rolle, f seguirá teniendo un número crítico en (a, b), pero quizá no produzca una tangente horizontal. Un caso de este tipo se presenta en la figura 3.8*b*.

2. **Tomado de: Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (Sexta ed.): Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.**

4.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Verá que muchos de los resultados de este capítulo dependen de un hecho principal, que es el llamado teorema del valor medio. Pero para llegar a este teorema es necesario primero el siguiente resultado.

■ El matemático francés Michel Rolle (1652-1719) publicó por primera vez el teorema de Rolle en un libro titulado *Methode pour résoudre les égalitez* en 1691. Sin embargo, tiempo después, se volvió un fuerte crítico de los métodos de su época y atacó al cálculo calificándolo de "una colección de ingeniosas falacias".

TEOREMA DE ROLLE Sea f una función que satisface las siguientes tres hipótesis:
1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$
Entonces hay un número c en (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Antes de la demostración, dé una mirada a las gráficas de algunas funciones representativas que cumplen las tres hipótesis. En la figura 1 se muestran las gráficas de cuatro de dichas funciones. En cada caso aparece que hay por lo menos un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la tangente es horizontal y, por lo tanto, $f'(c) = 0$. Por lo tanto, el teorema de Rolle es posible.

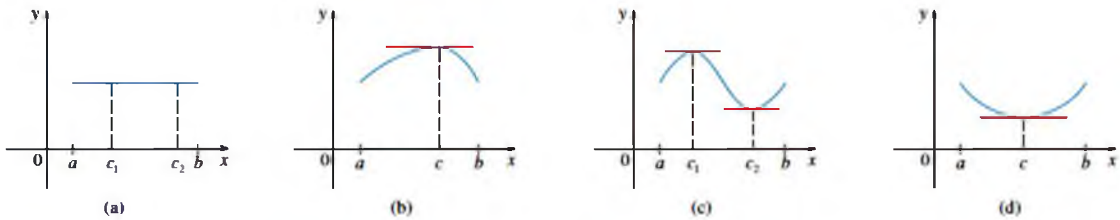


FIGURA 1

■ Presentación de casos

DEMOSTRACIÓN Hay tres casos:

CASO I ■ $f(x) = k$, **una constante**
Entonces $f'(x) = 0$, de modo que el número c se puede tomar de *cualquier* número en (a, b).

CASO II ■ $f(x) > f(a)$ **para cualquier** x **en** (a, b) [como en la figura 1(b) o (c)]
Según el teorema del valor extremo, (el cual aplica por la hipótesis 1), f tiene un valor máximo en cualquier lugar de $[a, b]$. Puesto que $f(a) = f(b)$, debe alcanzar su valor máximo en un número c en el intervalo abierto (a, b). Entonces f tiene un máximo *local* en c, y, según la hipótesis 2, f es derivable en c. Por lo tanto, $f'(c) = 0$, de acuerdo con el teorema de Fermat.

CASO III ■ $f(x) < f(a)$ **para alguna** x **en** (a, b) [como en la figura 1(c) o (d)]
De acuerdo con el teorema del valor extremo, f tiene un valor mínimo en $[a, b]$, y como $f(a) = f(b)$, alcanza su valor mínimo en un número c en (a, b). Una vez más, $f'(c) = 0$, según el teorema de Fermat. □

EJEMPLO 1 Aplique el teorema de Rolle a la función de posición $s = f(t)$ de un objeto que se desplaza. Si el objeto está en el mismo lugar en dos instantes diferentes $t = a$ y $t = b$, entonces $f(a) = f(b)$. El teorema de Rolle establece que hay algún instante del tiempo $t = c$ entre a y b cuando $f'(c) = 0$; es decir, la velocidad es 0. (En particular, usted puede ver que esto se cumple cuando una pelota es lanzada directamente hacia arriba.) □

3. Tomado de: Gil, J., & Díaz, R. (2013). Cálculo diferencial para cursos con enfoque por competencias. México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

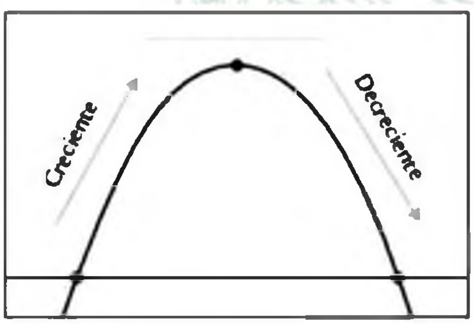
5.3 Teorema de Rolle

A Jorge, quien actualmente está viendo el estudio de curvas, le llamó mucho la atención el teorema de Rolle porque le parece un tema muy importante y con mucho significado en la vida real. Este teorema asegura que si una curva cruza o toca dos veces el eje x, en algún punto de la curva ubicada en el intervalo que delimitan esas intersecciones se podrá trazar una línea tangente horizontal, lo que asegura un máximo o un mínimo. Por ejemplo, en el caso de curvas que describen el volumen de una caja, el costo de producción o los ingresos, y cuya gráfica cruce al menos un par de veces el eje x, el teorema de Rolle nos asegura que la función se maximiza o se minimiza.

El teorema de Rolle supone la existencia de una línea tangente horizontal que se ubica en el punto c de un máximo o un mínimo formado por la unión de intervalos crecientes y decrecientes (gráficas 5.10 y 5.11). La importancia de este teorema radica en que afirma la existencia de al menos una línea horizontal entre cada dos intersecciones con el eje x, siempre y cuando la función sea continua en dichas intersecciones.

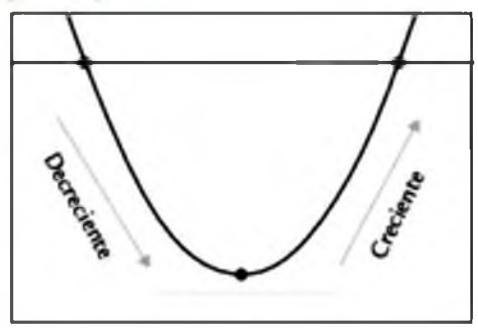
Esto se debe a que la continuidad de la función entre las intersecciones obliga a la curva a cambiar de dirección en el punto en el que la derivada es cero, con lo cual se genera un máximo o un mínimo y se forma, por lo tanto, el punto de tangencia para la recta horizontal.

En otras palabras, para que una curva pueda intersectarse dos veces con el eje x tiene que existir un intervalo donde la curva es creciente, un punto donde la derivada es cero y un intervalo donde la curva es decreciente para volver a intersectarse con el eje x. Podemos hacer el mismo análisis para el caso de un mínimo.



Máximo

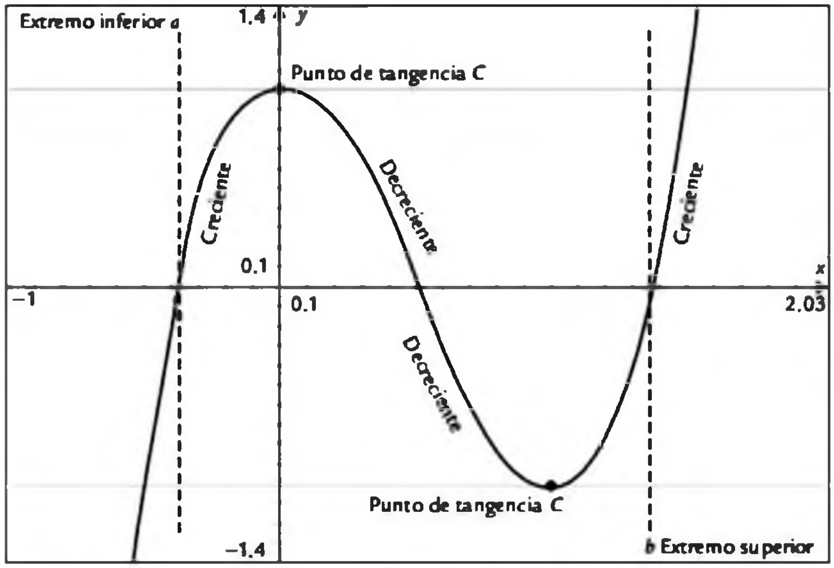
Gráfica 5.10



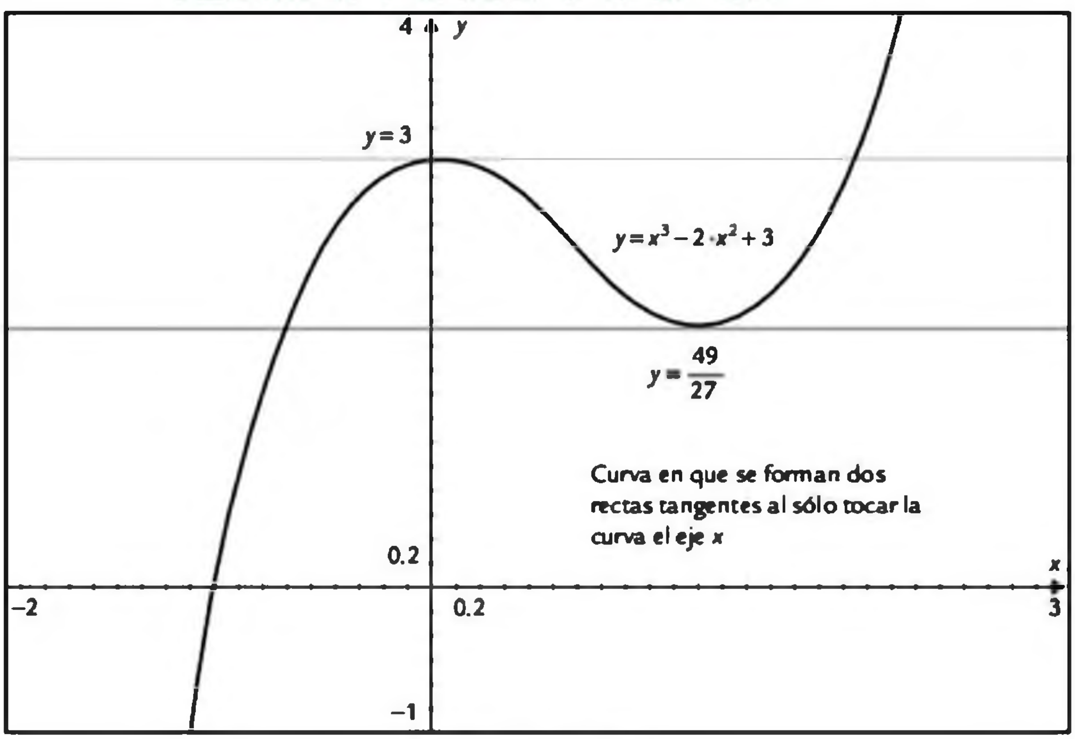
Mínimo

Gráfica 5.11

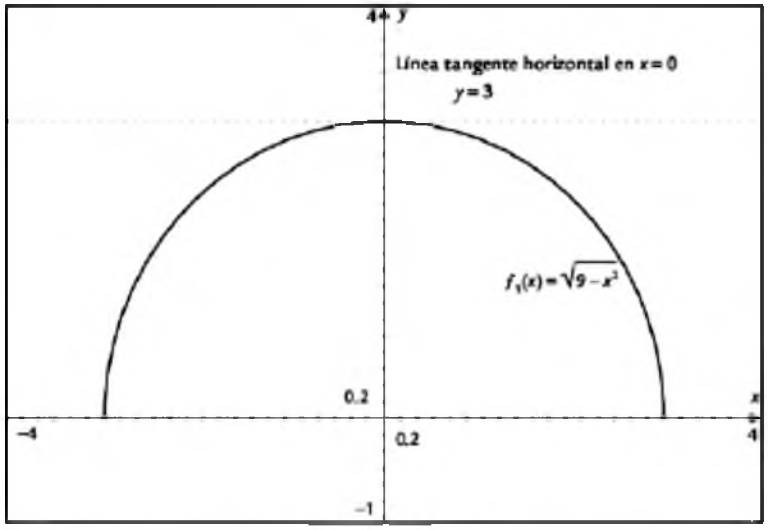
La formación de las rectas tangentes en el teorema de Rolle se puede visualizar en las curvas de las gráficas 5.12 a 5.14.



Gráfica 5.12



Gráfica 5.13



Gráfica 5.14

Teorema de Rolle

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b] y derivable en (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto c en (a, b) en el que

$$f'(c) = 0$$

por lo que la recta que toca el punto c será horizontal.

Para encontrar la línea horizontal sólo necesitamos tres pasos:

1. Comprobar que al evaluar en la función el extremo superior y el extremo inferior del intervalo, el resultado es el mismo.
2. Encontrar los ceros de la derivada.
3. Sustituir las soluciones de la derivada en la función original para encontrar la recta horizontal.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Facultad de Educación

4. **Tomado de: Hernández, E. (2013). Cálculo diferencial e integral, con aplicaciones (Primera ed.): Copyright© Revista digital Matemática Educación e Internet (www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/).**

2.16 Teorema de Rolle

Teorema 2.16

Sea f una función que cumple las condiciones siguientes:

1. f es continua sobre un intervalo cerrado $[a,b]$.
2. f es derivable sobre un intervalo abierto $]a,b[$.
3. $f(a) = f(b) = 0$.

Entonces existe por lo menos un número real c tal que $a < c < b$ y $f'(c) = 0$. O sea $f'(x) = 0$ para cierto c entre a y b.

Interpretación geométrica. El teorema 2.16 puede interpretarse geométricamente de la manera siguiente:

> Si una curva continua interseca al eje X en $(a,0)$ y $(b,0)$ y tiene una recta tangente en cada uno de los puntos del intervalo $]a,b[$, entonces existe por lo menos un punto de la curva en el que la recta tangente es paralela al eje X.

Gráficamente se tiene:

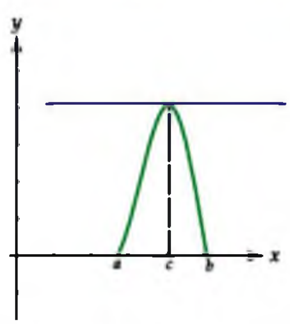


Figura 2.18 Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

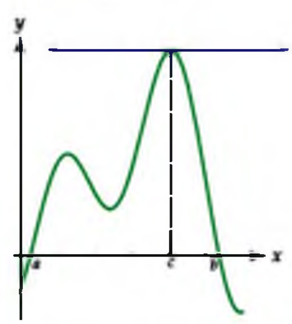
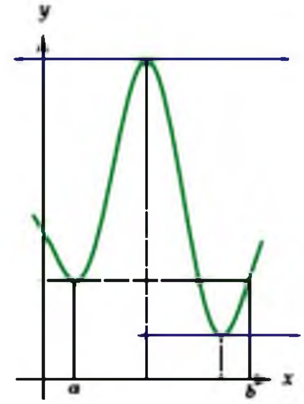


Figura 2.19 Interpretación geométrica del Teorema de Rolle

El teorema 2.16 también es válido para una función derivable que aunque en los extremos del intervalo $[a,b]$ no interseque al eje X, sí tome valores iguales para a y b, es decir, $f(a)=f(b)$.

Es necesario que la función posea derivada en todos los puntos del intervalo, ya que aunque la función sea continua en el intervalo, si no es derivable en algún punto, puede suceder que no exista ningún valor c para el que $f'(c)$ sea igual a cero.



5. **Tomado de: Thomas, J. G. (2006). Cálculo. Una variable (Undécima ed.). México: Pearson Educación**.

4.2 El teorema del valor medio

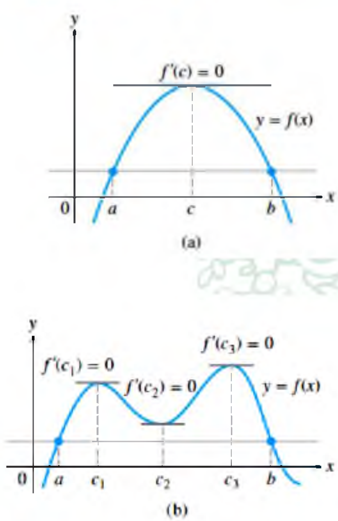


FIGURA 4.10 El teorema de Rolle dice que una curva diferenciable tiene al menos una tangente horizontal entre cualesquiera dos puntos donde la cruce una recta horizontal. Puede tener solo uno (a), o más (b).

Sabemos que las funciones constantes tienen derivada cero, ¿pero puede haber una función complicada, con muchos términos, cuyas derivadas se eliminen por completo para dar cero? ¿Cuál es la relación entre dos funciones que tienen derivadas idénticas sobre un intervalo? Lo que estamos preguntando aqui es: ¿qué funciones pueden tener un *tipo* especial de derivada? Éstas y muchas otras preguntas que analizaremos en este capítulo se responden aplicando el teorema del valor medio. Para llegar a este teorema necesitamos conocer primero el teorema de Rolle.

Teorema de Rolle

Graficar una función nos permite encontrar fuertes evidencias geométricas de que, entre cualesquiera dos puntos donde una función diferenciable corta una recta horizontal, hay por lo menos un punto en la curva en donde la tangente es horizontal (figura 4.10). Para mayor precisión tenemos el teorema siguiente.

TEOREMA 3 Teorema de Rolle
Supongamos que $y = f(x)$ es continua en todo punto del intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en todo punto de su interior (a,b). Si

$$f(a) = f(b),$$

entonces existe al menos un número c en (a,b) en el que

$$f'(c) = 0.$$

Demostración Siendo f continua, alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$. Éstos se pueden alcanzar sólo

BIOGRAFÍA HISTÓRICA

Michel Rolle
(1652–1719)

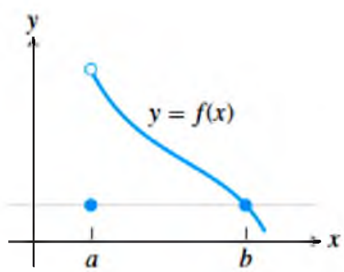
1. en puntos interiores donde f' es cero,
2. en puntos interiores donde f' no existe,
3. en los puntos extremos del dominio de la función. En este caso a y b.

Por hipótesis, f tiene derivada en todo punto interior. Esto elimina nuestra posibilidad (2), dejándonos con los puntos interiores donde $f' = 0$ y con los puntos extremos a y b.

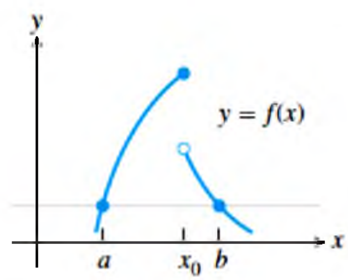
Si el máximo o el mínimo se alcanzan en un punto c entre a y b, entonces $f'(c) = 0$ de acuerdo con el teorema 2 de la sección 4.1, y hemos encontrado un punto para el teorema de Rolle.

Si tanto el máximo absoluto como el mínimo absoluto se alcanzan en los puntos extremos del intervalo, entonces como $f(a) = f(b)$, f debe ser una función constante con $f(x) = f(a) = f(b)$ para toda $x \in [a, b]$. Por lo tanto, $f'(x) = 0$ y el punto c puede ser cualquier punto del intervalo (a, b). ■

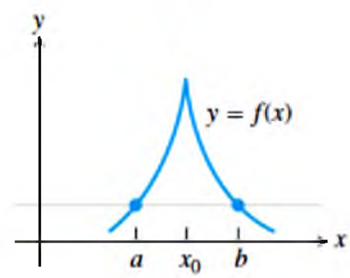
Las hipótesis del teorema 3 son esenciales. Si fallan aunque sea en un solo punto, la gráfica podría no tener una tangente horizontal (figura 4.11).



(a) Discontinua en un punto extremo de $[a, b]$



(b) Discontinua en un punto interior de $[a, b]$



(c) Continua en $[a, b]$ pero no es diferenciable en un punto interior.

FIGURA 4.11 Puede no haber tangente horizontal si las hipótesis del teorema de Rolle no se cumplen.

6. **Tomado de: Courant, R., & John, F. (1985). Introducción al cálculo y al análisis matemático (Quinta ed.). México: Editorial Limusa, S.A. de C.V.**

i. Demostración del teorema

El teorema del valor medio se deduce usualmente mediante la reducción a un caso especial que será establecido primero.

TEOREMA DE ROLLE. *Si una función $\phi(x)$ es continua en el intervalo cerrado $x_1 \leq x \leq x_2$ y derivable en el intervalo abierto $x_1 < x < x_2$, y si, además, $\phi(x_1) = 0$ y $\phi(x_2) = 0$, entonces existe al menos un punto ξ en el interior del intervalo en el cual $\phi'(\xi) = 0$.*

Interpretado geométricamente, esto significa que si una curva alcanza el eje x en dos puntos, entonces debe poseer una tangente horizontal en algún punto intermedio (Fig. 2.30).

Sin duda, puesto que $\phi(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[x_1, x_2]$, existe un valor máximo M de $\phi(x)$ y un valor mínimo m en este intervalo (véase p. 124). Puesto que ϕ se hace cero en los puntos extremos, se debe tener $m \leq 0 \leq M$. Si estos valores máximo y mínimo deben ser iguales, entonces necesariamente $m = M = 0$ y así $\phi(x) = 0$ en todos los puntos del intervalo; entonces también $\phi'(x) = 0$ en el intervalo, y, por lo tanto, $\phi'(\xi) = 0$ para todo ξ en el intervalo. Entonces, debe considerarse solamente el caso donde m y M no son cero ambos. Si, en particular M no es cero, entonces M debe ser positivo. Existe un punto en el intervalo $[x_1, x_2]$ donde $\phi(\xi) = M$. Puesto que ϕ se hace cero en los puntos extremos del intervalo, el punto ξ debe ser un punto interior. Además, $\phi(x) \leq \phi(\xi) = M$

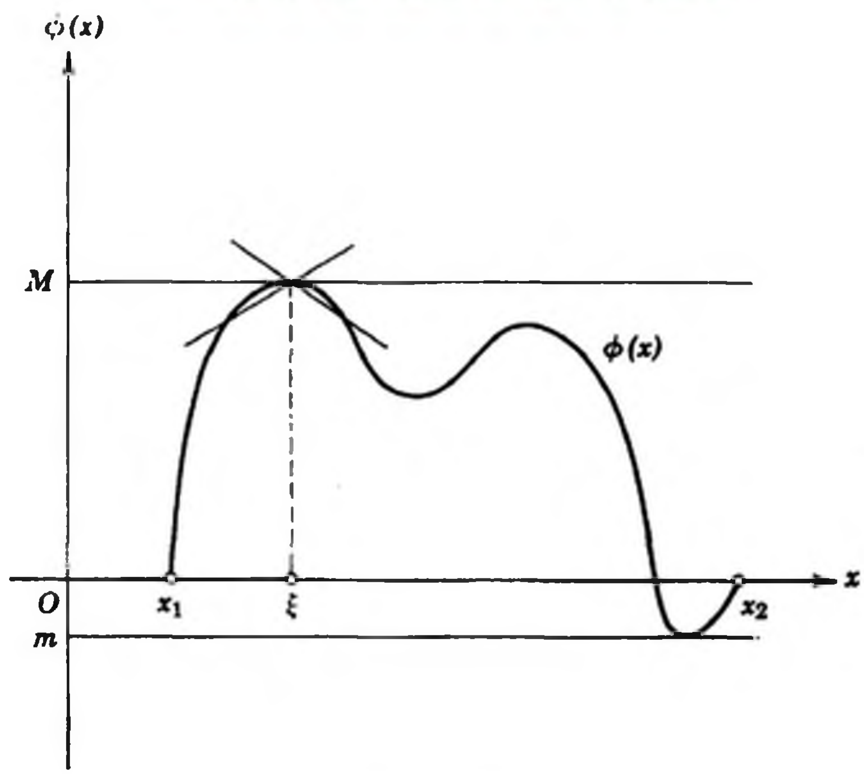


Figura 2.30.

para todo x en $[x_1, x_2]$. Consecuentemente, para todo número h cuyo valor absoluto $|h|$ es suficientemente pequeño, la desigualdad $\phi(\xi + h) - \phi(\xi) \leq 0$ se cumple. Esto implica que el cociente

$$\frac{\phi(\xi + h) - \phi(\xi)}{h}$$

es negativo o bien cero para $h > 0$ y positivo o bien cero para $h < 0$. Si se hace h tender a cero a través de valores positivos se encuentra que $\phi'(\xi) \leq 0$, mientras que para h tendiendo a cero a través de valores negativos se sigue que $\phi'(\xi) \geq 0$. Por lo tanto, $\phi'(\xi) = 0$; y así el teorema de Rolle ha sido probado en el caso $M \neq 0$. El mismo argumento se cumple para $m \neq 0$.

7. **Tomado de: Leithold, L. (1998). El Cálculo (Séptima ed.). México: Oxford University Press - Harla México, S.A. de C. V.**

3.3 TEOREMA DE ROLLE Y TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Como se indicó en la introducción de este capítulo, uno de los teoremas más importantes del Cálculo es el *teorema del valor medio*, el cual se emplea en la demostración de muchos teoremas tanto de Cálculo Diferencial como de Cálculo Integral así como de otras materias como el Análisis Numérico. La demostración del *teorema del valor medio* está basada sobre un caso especial conocido como *teorema de Rolle*, el cual se discutirá primero.

El matemático francés **Michel Rolle** (1652–1719) demostró que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b), y si $f(a)$ y $f(b)$ son iguales a cero, entonces existe al menos un número c entre a y b para el cual $f'(c) = 0$.

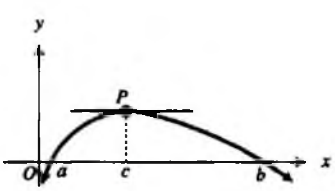


FIGURA 1

A continuación se verá lo que significa geométricamente este teorema. La figura 1 muestra la gráfica de una función f que satisface las condiciones del párrafo anterior. Se aprecia intuitivamente que existe al menos un punto de la curva entre $(a, 0)$ y $(b, 0)$ en el que la recta tangente es paralela al eje x; esto es, la pendiente de la recta tangente es cero. Esta situación se ilustra en la figura 1 en el punto P. De modo que la abscisa de P es c, para la cual $f'(c) = 0$.

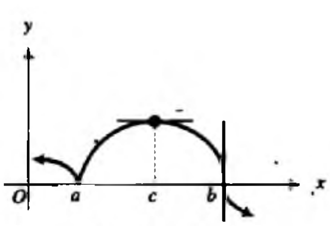
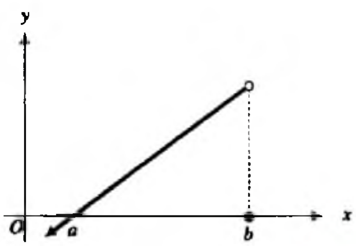


FIGURA 2

La función, cuya gráfica se muestra en la figura 1, no sólo es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) sino que también lo es en los extremos del intervalo. Sin embargo, la condición de que f sea diferenciable en los extremos del intervalo no es necesaria para que la gráfica tenga una recta tangente horizontal en algún punto del intervalo; la figura 2 ilustra esto. En la figura 2 se aprecia que la función no es diferenciable en a ni en b; sin embargo, existe la recta tangente horizontal en el punto donde $x = c$, y c está entre a y b.



No obstante, es necesario que la función sea continua en los extremos del intervalo para garantizar una recta tangente horizontal en un punto interior del intervalo. La figura 3 muestra la gráfica de una función continua en el intervalo $[a, b)$ pero discontinua en b; la función es diferenciable en el intervalo abierto (a, b) y los valores de la función en los dos extremos son cero. Sin embargo, no existe un punto en el que la gráfica tenga una recta tangente horizontal.

A continuación se establecerá y demostrará el teorema de Rolle.

3.3.1 Teorema de Rolle

Sea f una función tal que

(i) **es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;**
(ii) **es diferenciabe en el intervalo abierto (a, b);**
(iii) **$f(a) = 0$ y $f(b) = 0$.**

Entonces existe un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que

$$f'(c) = 0$$

Demostración Se considerarán dos casos.

Caso 1: $f(x) = 0$ para toda x en $[a, b]$.

Entonces $f'(x) = 0$ para toda x en (a, b); por tanto, cualquier número entre a y b puede considerarse como c.

Caso 2: $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b).

Como f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, por el teorema del valor extremo, f tiene un valor máximo absoluto en $[a, b]$ y un valor mínimo absoluto en $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ y $f(b) = 0$. Además, $f(x)$ es diferente de cero para algún valor de x en el intervalo (a, b). En consecuencia, f tendrá un valor máximo absoluto positivo en c_1 del intervalo (a, b), o un valor mínimo absoluto negativo en c_2 del intervalo (a, b), o ambos. Así, para $c = c_1$ o $c = c_2$, según sea el caso, existe un extremo absoluto en un punto interior del intervalo $[a, b]$. Por tanto, el extremo absoluto $f(c)$ es también un extremo relativo, y como $f'(c)$ existe por hipótesis, se deduce, por el teorema 3.1.3, que $f'(c) = 0$. Esto demuestra el teorema. ■

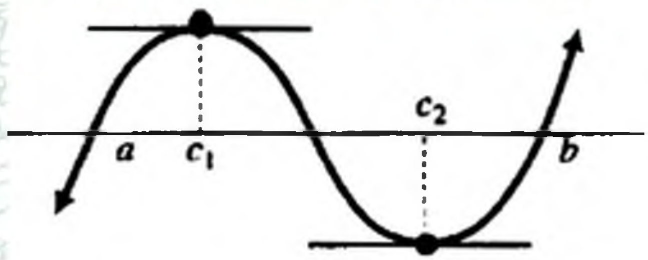


FIGURA 4

Puede haber más de un número en el intervalo abierto (a, b) para los cuales la derivada de f es cero. Esto se ilustra geométricamente en la figura 4, en la que se muestra una recta tangente horizontal en el punto donde $x = c_1$ y también en el punto donde $x = c_2$, por lo que $f'(c_1) = 0$ y $f'(c_2) = 0$.