PROPUESTA PEDAGOGICA, CON EL USO DE MEDIADORES,

QUE DINAMIZAN LA CONCEPTUALIZACION, LA APLICACION Y LA

FORMALIZACION DEL MODELO DE LA PROPORCIONALIDAD

EN LA EDUCACION BASICA

Ramón Emilio Sepúlveda Quiroz

Tesis para optar al título de Magister en Psicopedagogía.

Pensamiento Lógico-Matemático

PRESIDENTE: Orlando Mesa Betancur

ASESOR: Luis Carlos Yepes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MEDELLÍN

1997

UNIVERSIDAD
DE
ANTIOQUIA

DEPARTAMENTO DE EDUCACION AVANZADA

ACTA DE APROBACION DE TESIS

Entre presidente y jurados de la tesis PROPUESTA PEDAGOGICA CON E USO DE MEDIADORES QUE DINAMIZAN LA CONCEPTUALIZACION, LA APLICACIO Y LA FORMALIZACION DEL MODELO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA EDUCACIO BASICA, presentada por el estudiante Ramón Emilio Sepúlveda Quiroz como requisito para optar al título de magister en Educación Psicopedagogía, nos permitimos conceptuar que ésta cumple con lo criterios teóricos y metodológicos exigidos por la Facultad y por l tanto se aprueba.

Medellín, junio 25 de 1997

ORLANDO MESA BETANCUR
Presidente

ENRIQUE GODOY BONILLA
Jurado

ABELARDO ESPINAL A.
Jurado

Jurado

TABLA DE CONTENIDO

1. INTRODUCCIÓN

Se pretende con este trabajo movilizar en los estudiantes del grado séptimo, (edades entre 11 y 13 años aproximadamente) el aprendizaje significativo del modelo de la proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$; se busca que los estudiantes manifiesten, mediante la comparación de magnitudes y la solución de problemas, tener sentido propio de este modelo.

El presente trabajo consta, en esencia, de dos partes; Una selección de conceptos matemáticos relacionados con la proporcionalidad, y una propuesta de intervención pedagógica para el tema.

Ambas partes: Conceptos matemáticos y propuesta de intervención pedagógica, van dirigidas en forma muy especial a aquellos docentes inconformes con la enseñanza tradicional memorística, y que por lo tanto quieren comprometerse con nuevas formas de conducir el aprendizaje.

1.1. La selección cuidadosa de conceptos matemáticos relacionados con la proporcionalidad fue extraída de una bibliografía clásica, que goza de reconocimiento en el campo, y con el objeto de ofrecer a docentes y alumnos unos contenidos que ayudan a cualificar los conocimientos en la materia. Los temas centrales tratados están adecuadamente referenciados, lo que los reviste de seriedad, al tiempo que da al lector opción de profundizar en ellos. Se acompañan además de ejemplos sencillos y se complementan con la respectiva construcción lógica, muchas de ellas al alcance de los estudiantes.

Dicha compilación, por el estilo de texto que tiene, se sustrajo del marco teórico y se presenta al lector como anexo 1.

1.2. La propuesta de intervención pedagógica, se subdivide en dos: Usando la balanza de brazos como mediador y mediante la construcción de triángulos equiláteros con regla y compás. Cada una busca por su lado movilizar el esquema de la proporcionalidad.

1.2.1. Interactuando con la balanza de brazos y sobre la base de una sistematización de actividades, se diseñó una propuesta pedagógica que luego fue experimentada con un grupo de estudiantes, obteniéndose resultados satisfactorios en la comparación cuantitativa de magnitudes como lo muestra el análisis de resultados de la prueba final respecto a la inicial. Además, la intervención permitió cualificar la propuesta misma.

1.2.2. La propuesta de tipo geométrico pretende movilizar el teorema de Thales enunciado por Pastor Rey y Adam Puig[1] en los siguientes términos. “Si varias paralelas son cortadas por dos transversales, la razón de dos segmentos cualesquiera de una de las transversales es igual a la razón de los correspondientes segmentos de la otra transversal”.

Usando como mediador dos triángulos equiláteros construidos con regla y compás, y ordenando los componentes del modelo de la proporcionalidad que van surgiendo, se fue dando significado al teorema de Thales y sus aplicaciones, como culminación del proceso de conceptualización y ejercitación algorítmica del esquema de la proporcionalidad.

Convencido de la importancia que tiene, en el desarrollo de la cultura matemática y de las ciencias aplicadas, el tema de la proporcionalidad, y también de la dificultad que en los estudiantes presenta la comprensión y aplicación de este concepto, me he propuesto indagar por su enseñanza y por la eficacia de ella. Consultadas algunas fuentes (profesores de educación básica y textos guías), se ha llegado a la conclusión de que hay que mejorar la presentación que del tema se hace y además acompañarla de una propuesta de intervención activa, que ayude al estudiante a crear su propio conocimiento.

PASTOR R. y PUIG A., Elementos de geometría racional, nuevas gráficas, Madrid, 1963, p. 215.

La formalización según LEIBNIZ, citado por Not Luis[2], es un instrumento indispensable para la lógica de lo ya conocido pero por el contrario no revela el principio del descubrimiento matemático.

---

[2] NOT Luis, Las pedagogías del conocimiento, fondo de cultura económico, México, p. 280.

2. IDENTIFICACION DEL PROBLEMA

El tema de la proporcionalidad en el momento presente es una unidad didáctica sugerida por el Ministerio de Educación Nacional (M.E.N.) en los marcos generales del currículo[3], para ser estudiada en los grados quinto y séptimo. Los textos que ofrecen las editoriales retoman la proporcionalidad en el grado noveno y la integran al currículo al presentar el teorema de Thales y sus aplicaciones.

Es de interés en este trabajo la presentación que se hace en el grado séptimo, donde se espera dar significado a los algoritmos que al respecto posee el estudiante poniendo a prueba en él los procesos de que habla Piaget asimilación y acomodación en procura de conocimientos cada vez más estables y duraderos.

Como se deja ver de una entrevista realizada a un pequeño número de profesores, algunos de los cuales orientan matemáticas en los grados señalados, el tratamiento que se hace a la proporcionalidad se limita, en la mayoría de los casos, a definir los siguientes conceptos:

[3] COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional, Marcos generales de los programas curriculares, imprenta Dptal. de Antioquia, Medellín, 1985, p. 147.

- La razón como cociente indicado.
- La proporción como dos razones iguales.
- Algunas propiedades de las proporciones y
- La explicación de algunos problemas de aplicación.

Con esta red conceptual, la solución de problemas se convierte en un verdadero problema para el estudiante, a raíz del desequilibrio cognitivo que se produce en los esquemas de la mayoría, sin alcanzar la reequilibración correspondiente. La consecuencia inmediata es el tedio por este importante tema. A este respecto Carretero Mario'* plantea:

> El profesor puede comenzar a plantear diferentes situaciones didácticas encaminadas a introducir nuevos conceptos y a contradecir la ideas espontáneas del alumno, favoreciendo de esta manera el necesario conflicto cognitivo entre la información nueva y la que ya poseía el sujeto y mostrando, por lo tanto, las insuficiencias de la primera ... De hecho en algunos de nuestros trabajos hemos encontrado que, al situar a un grupo de alumnos de diez y quince años ante situaciones explícitamente contradictorias con sus ideas previas, algunos han cambiado de posición, pero ¡adoptando una representación más simple e incorrecta desde el punto de vista científico!.

[4] CARRETERO Mario, Constructivismo y educación, Edelvives, p. 93.

> Otros no han mejorado siquiera la contradicción ... y unos pocos han mejorado su representación, pero después de haber pasado por algunos retrocesos.

Otro aspecto del problema es la falta de correlación con otros contenidos del currículo de matemáticas (correlación vertical), y también con otras disciplinas (correlación horizontal o transversal), términos éstos, utilizados en el seminario sobre integración curricular. Bogotá, 1986[4]

En el grado noveno la proporcionalidad se articula a la geometría al estudiar el teorema de Thales y sus aplicaciones, pero con igual rigidez, es decir, sin una estrategia que movilice el pensamiento y permita dar sentido al modelo, tanto en forma directa como inversa, esto es;

En las ciencias naturales y económicas, el modelo de la proporcionalidad es fundamental en la comprensión de muchos temas, como se discutirá posteriormente.

UNESCO, Seminario sobre integración curricular, Bogotá, 1980, p. 3.

Se considera en consecuencia, que una estrategia que movilice el pensamiento permitiendo un aprendizaje significativo de este tema, despeja el camino para que el estudiante aborde con algún éxito conceptos de la biología, física, economía y otras áreas del conocimiento donde se requiera la comparación analógica y operalización de magnitudes.

3. TITULO

PROPUESTA PEDAGÓGICA, CON EL USO DE MEDIADORES, QUE DINAMIZAN LA CONCEPTUALIZACIÓN, LA APLICACIÓN Y LA FORMALIZACIÓN DEL MODELO DE LA PROPORCIONALIDAD EN LA

EDUCACION BASICA.

Y yo estimo las analogías más que nada, son mis

guías más dignas de confianza.

Ellas conocen todos los secretos de la naturaleza y

deberían ser menos descuidadas en geometría.

KEPLER.

4. FORMULACION DEL PROBLEMA

¿ Qué influencia tiene el uso de un mediador adecuado, en la dinamización del modelo de la proporcionalidad, su aplicación y su formalización en la educación básica ?.

La búsqueda de una respuesta satisfactoria a este interrogante se convierte en motor y

a la vez en hilo conductor del presente trabajo. La expresión $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ como

formulación matemática que es y cuya operalización sirve de modelo (ver sección 11.1), para resolver muchos problemas, se pretende dinamizar a través de dos propuestas de intervención pedagógica.

Dinamizar el modelo de la proporcionalidad ha de interpretarse como darle vida y fuerza, relacionándolo con acciones de la cotidianidad de tal manera que se reduzca la distancia entre el concepto y la aplicación, lo que garantiza en la práctica que el proceso cognitivo esté relacionado con la capacidad del estudiante.

5. OBJETIVOS

5.1 OBJETIVO GENERAL.

Diseñar una propuesta de intervención pedagógica que permita al profesor orientar a los estudiantes para que, en forma constructiva, accedan al esquema de la proporcionalidad $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ diferenciando gráfica y analíticamente la relación proporcional directa de la inversa y algunas de sus múltiples aplicaciones.

5.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS.

- Integrar a la luz de las teorías constructivistas los contenidos temáticos de la proporcionalidad en procura de que el estudiante logre un aprendizaje con significado propio.

- Presentar al lector actividades, con buena fundamentación teórica, que faciliten alcanzar motivaciones intrínsecas en el estudiante, y así inducirlo a la matematización y ejercitación algorítmica de la proporcionalidad y sus aplicaciones.

- Validar a través de los resultados de una intervención, la eficacia de la propuesta pedagógica, basada en la sistematización de los registros que proporcionan el juego con una balanza de brazos, como medio para alcanzar, significativamente, el esquema de la proporcionalidad.

6. JUSTIFICACION DEL PROBLEMA

La formulación, que en este apartado se hace, tiene que ver con la respuesta a la pregunta: ¿ Por qué se considera que la proporcionalidad es un tema problemático en la educación básica ?.

Se considera la comparación proporcional y su operalización un problema en la educación básica, por los pocos progresos cognitivos que muestran los estudiantes del grado séptimo una vez evaluada la unidad didáctica. Esta afirmación fijé hecha por docentes de la educación básica durante una entrevista, y fundamentan los pocos progresos en la escasa habilidad del estudiante para resolver problemas que se acomoden a dicho esquema. También en el grado once se ha percibido tal carencia, al analizar la dirección proporcional de algunas funciones (fórmulas elementales) y la completación del cuadro correspondiente a la prueba final tres, (ver anexo de pruebas) que se realizó en un pre-icfes a cuatro grupos de 40 estudiantes cada uno, población de colegios oficiales y privados de Medellín. Un 20% en promedio resuelve un Ítem y un 5% resuelve el cuadro en su totalidad.

Desde el punto de vista psicopedagógico, Piaget e Hinelder citados por Corral A*’, afirman que se requiere el desarrollo de una competencia logico-matemática para poder acceder al modelo de la proporcionalidad como problema complejo que es, al provenir del grupo INRC o grupo de las cuatro formaciones, (ver sección 9) que integra dos sistemas -clases y relaciones- y que también formaliza la capacidad de hacer un análisis combinatorio en primer lugar, y de utilizar un sistema de reversibilidad doble. La reversibilidad doble subyace a todo razonamiento proporcional.

Por su parte Emma Castelnuovo en el libro, “El material para la enseñanza de las matemáticas^”, plantea que es necesario recurrir al objeto y a la acción si se quiere que la conducción del aprendizaje tenga corte constructivo, y en consecuencia sea significativo para el estudiante. Afirma, “Si se quiere seguir un método constructivo es necesario recurrir a bases concretas”.

Esta nueva pedagogía permite al docente reflexionar sobre su quehacer pedagógico, y en particular en el momento de dirigir los temas de clase; siendo receptivo a las exigencias que se presenten en ella, ya que esta actitud impide esquematizar al alumno, someterlo a memorizar un discurso elaborado con antelación sin la participación suya y coartar en él, el derecho a construir su propio conocimiento.

---

[6] CORRAL A., El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones, Rev. Infancia y aprendizaje, España, Nº 37, p. 33.

[7] C. GATTEGNO y otros, El material para la enseñanza de las matemáticas, Aguilar pág. 32, 52.

A este respecto Emma Castelnuovo en el mismo artículo señala: "Tal vez esta libertad de imaginación y de interpretación -tanto para el alumno como para el maestro- constituya una de las características del método constructivo".

Lo anterior supone una estrategia de intervención adecuada, donde el descubrimiento se acompañe de actividades que el profesor pueda monitorear y sistematizar formando una red conceptual coherente, a la cual el estudiante pueda acceder sin sobresaltos, esto es, sobre la base de los **conocimientos previos** y una cuidadosa intervención del profesor que genere **organizadores previos** como verdaderos puentes cognitivos. Ausubel citado por Corral Antonio y por Carretero Mario aporta al constructivismo la idea de los conocimientos previos como bases del aprendizaje significativo.

[8] CORRAL A., Dificultad de enseñar el razonamiento proporcional, Rev. Infancia y aprendizaje, España, Nº 37, p. 48.
[9] CARRETERO Mario, op., cit., p. 26-30.

7. DISEÑO METODOLOGICO

Con el objeto de darle validez externa a la propuesta pedagógica, se puso a prueba, y se siguieron las orientaciones de Campbell T. Donald y Stanley C. Julián, extraídas del libro: Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social'®. De los seis diseños expresados por los autores se adoptó como guía el cuarto, conocido como: Diseño de grupo de control pretest-postest, cuyo esquema es el siguiente:

O_1 X O_2
O_3 O_4

Consiste en:

- Dos grupos de estudiantes O1 y O**3** escogidos al azar, uno de los cuales será experimental (gE) y el otro será de control (gC) y a quienes se hace una observación inicial (prueba inicial). En el presente estudio a ambos grupos se les aplicaron las pruebas iniciales de observación previa, para lo cual se procuró igualdad de condiciones, esto es, sin presiones de tiempo, en espacios similares, el mismo día y en forma individual.

[10] CAMPBELL T. D. y STANLEY C. J., Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social, Amarrourtu, Buenos Aires, 1970, p. 32.

La intervención pedagógica que aquí se propone es una guía dirigida a profesores del grado séptimo de educación básica con estudiantes en edades comprendidas entre 11 y 13 años aproximadamente.

- Los autores definen a X como el **tratamiento;** en este caso será la intervención pedagógica (aplicación de la propuesta). La intervención se aplica a uno de los dos grupos elegidos al azar y que ha de ser el (gE) en el esquema corresponde a O1.

- O_2 y O_4 son los mismos grupos O1 y O3, respectivamente, a quienes se aplicó la prueba final en igualdad de condiciones excepto el aplicador, de la misma.

En suma, se trata de hacer una prueba inicial a dos grupos aleatorios llamados (gE) y (gC), poner a prueba la propuesta de intervención pedagógica con el (gE) y hacer luego una prueba final a ambos grupos, interpretar los resultados siguiendo algún procedimiento estadístico y presentar un informe resaltando relaciones y diferencias entre los grupos (gE) y (gC).

7.1 POBLACIÓN.

El estudio se realizó en el liceo A.S.LA. Ignaciana, establecimiento oficial, femenino, y de los pocos que en el sector se ajusta a las exigencias de la ley 115 o ley general de educación, dado que tiene educación básica y media completas, es decir, desde el grado cero al grado once.

La modalidad es média técnica, para lo cual se tiene un convenio de asesoría con el Servicio Nacional de Aprendizaje SENA en el área de la salud. Está ubicado en el barrio El Playón de los Comuneros de la ciudad de Medellín. La población es de estracción social baja, donde abundan el desempleo y subempleo.

Se examinaron 40 estudiantes que conforman el grado 7C (7.3), de los cuales 20 podían asistir a la intervención, quedando así clasificados los grupos (gE) y (gC), cada uno de 20 estudiantes. La estrategia fue aplicada en un horario que comprendía cuarenta minutos antes de la entrada general a clases y la primera clase, los días martes, jueves y viernes durante seis semanas, para un total aproximado de treinta y seis clases, ya que cada clase en la educación básica es de cuarenta y cinco minutos.

7.2. PROCEDIMIENTO.

Una vez conformados los (gC) y (gE), (el único criterio de selección fue escoger aquel grado séptimo que tuviera horario de matemáticas martes, jueves y viernes a la primera hora para poder empatar un bloque iniciando cuarenta minutos antes) se procedió a realizar la prueba inicial y posteriormente, días después, se inició la intervención con el (gE).

Hecha la presentación del plan, se motivó la construcción de balanzas de brazos, lográndose construir seis, lo que permitió organizar seis grupos de trabajo de 3 ó 4 estudiantes cada uno. Cada grupo interactuó con la balanza desplazando el punto de apoyo, quitando y/o poniendo masas en los extremos hasta alcanzar el equilibrio. Esta actividad proporciona al estudiante habilidad para apreciar el comportamiento de las variables P, R, B, b (siendo P y R las masas, B y b los brazos respectivos), a medida que en forma sistemática va cambiando una de ellas. Han de diferenciarse las variables que aumentan de las que disminuyen con su respectiva explicación. La interiorización de este esquema es fundamental para el propósito de dar significado propio a las proporciones.

En un principio la comparación se hace en forma cualitativa, esto es, se pretende que el estudiante anticipe posibles variaciones en masas o brazos, al variar sistemáticamente uno de los cuatro elementos que intervienen en el sistema; y posteriormente en forma cuantitativa, lo que permite hacer registros en tablas de datos, compararlos y construir gráficas en el plano cartesiano. Finalmente se procede a establecer relaciones y diferencias entre las gráficas y las tablas, actividad ésta que nos deja en la antesala de la simbolización de la proporcionalidad.

8. INSTRUMENTOS

Con el fin de diseñar una estrategia de intervención sobre la base de los conocimientos que el estudiante posee, se ejecutó una prueba inicial única, y al no proporcionar en sus resultados una información suficiente que permitiera clasificar y categorizar los contenidos de la propuesta, (ya que en la mayoría de los items se respondía con un no sé), surgió la necesidad de reestructurar dicha prueba, convirtiéndose ésta primera en pre-prueba, ver anexo 2. En procura de más información se clasificó y amplió la pre- prueba enriqueciéndola con otros elementos como fracciones y curvas cartesianas, para lo cual se diseñó una prueba dividida en tres partes, que se aplicaron en días distintos con el fin de evitar la fatiga en los estudiantes. Hay que anotar que el cambio en las pruebas, fue de hecho, más eficaz para el logro de los objetivos propuestos.

La pre-prueba mostró, sin embargo, una dificultad latente en los estudiantes que amerita comentarse, y que tiene que ver con la magnitud **velocidad:**

En la pre-prueba se pedía completar dos cuadros con dirección proporcional inversa, ver problemas 2 y 3 del anexo 2:

- Número de obreros vs número de días que se tardan en construir una obra y,

- Velocidad vs tiempo que tarda un móvil en recorrer una distancia determinada.

A pesar de obedecer ambos problemas al mismo modelo matemático, y estar diseñados para resolverse en el conjunto de los números naturales, el primer problema, obreros vs días, fue resuelto en su totalidad por el 80% del grupo de estudiantes y el 20% restante acertó al menos en la respuesta de un ítem. Por su parte el segundo problema velocidad vs tiempo, fue resuelto a entera satisfacción por el 10% y sólo el 15% del resto acertó a lo sumo un item.

8.1. OBJETIVOS DE LA PRUEBA INICIAL.

- Diagnosticar el estado de los estudiantes en materia del razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo.

- Recoger información sobre dificultades de los estudiantes y tenerlas presentes al momento de diseñar la intervención pedagógica en procura de lograr un aprendizaje significativo de la proporcionalidad.

Obiservación: Pueden verse las pruebas iniciales y finales en el anexo 2.

8.2 ANALISIS DE LOS RESULTADOS DE LA PRUEBA 1NICIAL.

- **Parte *1*.**

Como se sabe, la comparación y análisis de resultados se hacen sobre dos grupos; grupo control (ge) y grupo experimental (ge), se hicieron tablas de frecuencia absoluta. Se establecieron porcentajes y se compararon las proporciones de las pruebas iniciales y finales con sus respectivas anotaciones.

En la presentación de estos resultados se escribe primero el porcentaje del grupo control (ge) y seguidamente el correspondiente al grupo experimental (ge). Cuando la circunstancia lo requiera, se alterará el orden de los numerales en las pruebas.

Se observa que hay más aciertos en la solución del problema (1.2) donde el razonamiento proporcional es más de tipo cualitativo que los que hay en los demás Ítems de razonamiento cuantitativo.

En el problema (1.2) el porcentaje promedio de aciertos es de 89% y 84% para los (ge) y (ge) respectivamente. En el problema (1.1.) que es de tipo cuantitativo, los promedios fueron del 75% y 65% (ge) y (ge).

En "(l l) la dirección proporcional es directa, en tanto en (1.2) la dirección proporcional es inversa.

Estos resultados señalados corroboran las observaciones hechas por Antonio Corral" en el sentido de que "El esquema de las proporciones exige en primer lugar, una estrategia cualitativa y, luego, cuantitativa"; por lo tanto es un factor tenido en cuenta durante la intervención pedagógica.

Otra dificultad que muestra el estudiante es la generalización. Como puede verse, el item (1.1.4), bajó a porcentajes del 0% y 5% de acierto en los (ge) y (ge). El item en mención es: Si por una hora de trabajo se reciben $3000 de salario, por n horas de trabajo qué salario se recibirá?. Algunas respuestas fueron: $15000, $X, $3000, $0.

Al indagar por la conceptualización de los números fraccionarios mediante los items (1.3), (1.4), (1.5); se concluyó que sólo un 10% y un 11.3% en promedio de los grupos conceptualizan acertadamente sobre fracciones discretas, su notación y su relación con el todo.

En los items antes anotados se dieron respuestas como las siguientes:

- El número de elementos de la parte es el numerador y el número de partes es el denominador así:

$A = \frac{4}{4}U$ $\qquad$ $B = \frac{3}{4}U$

[11] CORRAL Antonio, Asincronías en el desarrollo del pensamiento formal, Rev. Estudio de psicología, Nº 37, 1989, p. 23.

$$C = \frac{6}{4}U \qquad D = \frac{5}{4}U$$

- Con el número de elementos de la parte forman factores así:

4A 3B 6C 5D

- Otros escriben como denominador los elementos del subconjunto así:

$$A = \frac{4}{4} deU \qquad B = \frac{4}{3} deU$$

$$C = \frac{4}{6} deU \qquad D = \frac{4}{5} deU$$

Se dieron otros esquemas con menor frecuencia.

Los numerales (L6) y (1,7) tuvieron un promedio de acierto de un 35% y ***25%*** en (ge) y (ge). Los porcentajes anteriores comparados con los aciertos del numeral (1.1) que fueron del 75% y 65%, presentan gran diferencia pese a que estos últimos tienen cuatro items, mientras que los numerales (1.6) y (1.7) tienen item único respecto al razonamiento proporcional directo en ambos casos. Esta diferencia puede significar que los estudiantes fueron desequilibrados por los números 3% en (1.6) y 3/8 en (1.7) (ver anexo de pruebas). Por lo tanto, el bajo nivel de significación mostrado por los estudiantes en el tema de las fracciones, se convierte en una barrera para lograr eficacia en el razonamiento proporcional.

Las fracciones por lo tanto requieren de un tratamiento adecuado por parte del profesor como requerimiento para la proporcionalidad.

En el numeral (1,6) el 20% de los desaciertos se debe a que los estudiantes no clarifican magnitudes. Es lo que se infiere cuando dan la siguiente respuesta; El peso del cuerpo es 20 + 20 +20 + ^2 = 60 y media. Al leer el problema se tiene que no es peso sino vuelta.

- Parte 2.

Con la (P.I.2) se pretende indagar por la habilidad y fallas del estudiante en la solución de problemas con esquema proporcional inverso y las curvas cartesianas correspondientes.

El item (2.1) consta de cuatro numerales que se corresponden con los grifos A, B, C, D. En promedio los aciertos tienen una proporción del 28.7% y 31.2% en los (ge) y experimental respectivamente. Puede observarse que la proporcionalidad inversa tiene un nivel de dificultad superior a los expuestos en la prueba inicial 1, exceptuando la generalización.

Respecto a las curvas cartesianas (2.2) se tiene que la prueba arroja promedios del 25% y 23.7% de aciertos en los (ge) y (ge). No relacionan correctamente parejas de valores. Menos éxito se obtuvo al ubicar en el plano cartesiano, (item (2.3)) puntos correspondientes a las parejas del numeral (2.2), donde los porcentajes de acierto bajaron al 11.2% y 13.7% en los (ge) y (ge).

Dado que la propuesta está orientada en el sentido de utilizar las curvas para abstraer conceptos y no en sentido inverso, esto es, ejemplificar los conceptos y llevarlos al plano, justifica que se preste mucha atención a las respuestas relativas a estos items. Se observó que un sólo estudiante del (ge) acertó en un 100% la tabla de valores y la curva cartesiana correspondiente. Esta dificultad hace pensar que el concepto de fiinción es otro pre-requisito que el profesor debe abordar para tener éxito en la solución de problemas de proporcionalidad.

El item (2.4) tiene por objeto diagnosticar la habilidad que el estudiante posee para combinar magnitudes homogéneas y comparar luego ese efecto sobre la otra magnitud correspondiente. Acertaron en un 5% y 10% los (ge) y (ge). Se resaltan esquemas como los siguientes:

- Restar los tiempos que tardan A y C.

  90 min. - 60 min. == 30 min.

- Promediar los tiempos que tardan A y C.

(90 min. + 60 min.)/2 = 75 min.

- Quienes aciertan lo hacen por reducción a la unidad. Afirman que las llaves en un minuto arrojan 20 litros y que en 36 minutos arrojan los 720 litros que hace el estanque.

- **Parte 3.**

Tiene por objeto diagnosticar habilidades en la comparación de más de dos magnitudes como muestra el cuadro, en el anexo 2.

Al completar el cuadro, el acierto en promedio fue del 12.5% y 10% respectivamente para (ge) y (ge). Se hace la anotación de que nadie resolvió la tabla a satisfacción, y los porcentajes mencionados corresponden al acierto en uno o más items. Se considera que este es el nivel de más dificultad en la comprensión de la proporcionalidad.

Aunque no se hizo prueba inicial de repartos proporcionales, en la intervención se observó que el estudiante asimila sin mucha dificultad esta aplicación, y se despejó aún más cuando se explicó el método de reducción a la unidad. Ver anexo 1 (1,14.1),

9. MARCO TEORICO

9.1. EL MODELO DE LA PROPORCIONALIDAD.

Para Pedro Puig Adam’^: “Modelo matemático es toda imagen que traduce concretamente una idea abstracta”. Las nociones y operaciones matemáticas, son el resultado de un proceso de abstracción y esquematización del mundo físico. Se entiende por abstracción, la actividad mental que extrae de los cuerpos -representaciones o nociones- una propiedad común y se olvida de las restantes. Así por ejemplo, la magnitud peso es una idea abstracta elaborada al clasificar cuerpos de igual peso y que eventualmente pueden haber tenido diferente forma, color, tamaño, sustancia, etc. De igual manera el prisma es un concepto abstracto que surge posiblemente de considerar cajas de diferente tamaño, sustancia, color, peso, etc, y que al desechar todas estas cualidades, el sujeto deja solo la forma sobre la que es posible establecer relaciones y operaciones que pueden aplicarse a cualquier ente, en forma de prisma, independientemente de su naturaleza.

[12] C. GATEGNO y otros, op., cit., p. 192.

Según W Servais, en su artículo: concreto-abstracto, del libro "El material para la enseñanza de las matemáticas", las abstracciones se pueden cosificar por medio del lenguaje de los símbolos, sobre éstos se trabaja como sobre objetos concretos, y de esta actividad pueden surgir nuevas abstracciones y nuevas notaciones, convirtiéndose la abstracción en un proceso del que no se sabe cual es el principio.

Henri Poincaré citado por Luigui Campedelli, afirma sobre los modelos matemáticos:

> La matemática es el arte de dar el mismo nombre a cosas distintas. Es conveniente que estas cosas independientes en cuanto a la materia, sean semejantes en su forma; que puedan por así decirlo, colocarse en el mismo molde. Si se ha elegido perfectamente el lenguaje surge el asombro al ver que todas las demostraciones hechas para un objeto conocido se aplican de forma inmediata a muchos otros nuevos objetos; nada se ha de variar, ni las palabras, pues hasta éstas son ya las mismas.

De cierto modo la matemática se comporta como un fabricante de máquinas y herramientas a quien sólo le preocupan diversos tipos (modelos) adaptables a cada trabajo, lo que conlleva a una estratificación de modelos que obedecen a ciertas estructuras matemáticas.

---

[13] C. GATEGNO y otros, Ibid, p. 13-31.
[14] C. GATEGNO y otros, Ibid, p. 118.

Existen modelos aritméticos, geométricos, económicos, etc. Dentro de los aritméticos nombremos por ejemplo los modelos lineales. Son utilizados en economía y otras ciencias aplicadas. Veamos el siguiente caso:

Para producir calzados hay dos tipos de costos, unos fijos (arrendamientos, interés sobre préstamos, impuestos, etc.), y otros variables (costo de insumos, de mano de obra, etc.), que tienen que ver con el número de artículos producidos. Por lo tanto la ecuación de costo total es un modelo lineal que se puede escribir:

$$C = mx + b$$

Donde:

C, es el costo total de la producción, m, costo variable de un par de zapatos, x, número de pares de zapatos que se producen b, valor de los costos fijos.

También en física se tienen fenómenos que se ajustan a modelos matemáticos lineales. Al calcular la velocidad final que alcanza un cuerpo en determinado tiempo, se suma la velocidad inicial del cuerpo con el cambio de velocidad (aceleración) por el tiempo transcurrido. Esto es:

$$V = Vo + a.t$$

Donde:

V, es la velocidad final.

Vo, velocidad inicial.

a, cambio de velocidad por unidad de tiempo (aceleración)

t, tiempo.

Para Feynman, citado por Dino Segura "La matemática es la búsqueda de configuraciones", es así como puede reducirse la solución de varios problemas a una misma configuración. Por ejemplo: el número de partidos todos contra todos en un torneo, y el número de apretones de mano entre compañeros de un grupo, obedecen a la forma:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

La comparación de ciertas magnitudes físicas nos lleva al concepto abstracto de

proporción: $\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2}$ ***o*** $\frac{a1}{a2} = \frac{b2}{b1}$ **según la dirección proporcional sea directa o inversa.** Configurados los esquemas anteriores, no cuentan para nada las cualidades físicas de las magnitudes que permitieron la abstracción, y sobre ellos pueden establecerse ciertas relaciones y operaciones. Estas formas matemáticas se convierten

[15] SEGURA R. Dino. Las matemáticas en el aula: Posibilidades de construcción significativa, rev. Planteamientos en educación, escuela pedagógica experimental, Bogotá, 1992, p. 19.

en herramientas que ayudan a solucionar múltiples problemas de las ciencias; trascienden casos particulares y son ya reglas generales.

Atenta contra todo aprendizaje significativo, transmitir al estudiante modelos matemáticos rígidos, como es usual en la escuela memorística. Por el contrario, es bastante eficaz movilizar por medio de situaciones problema adecuadas, cada situación de aprendizaje. La elaboración intuitiva de los conceptos hará que el aprendizaje sea significativo. Un nivel posterior a la asimilación de conceptos y modelos es propender por la demostración formal según el nivel de desarrollo del alumno. Esto es, atendiendo a sus conocimientos previos.

9.2. EL PENSAMIENTO FORMAL Y LA PROPORCIONALIDAD.

Se pretende hacer una presentación del modelo de la proporcionalidad siguiendo directrices constructivistas. Para Novac 1987; "La epistemología constructivista está en gran consonancia con la forma como los seres humanos construyen sus significados psicológicos de las cosas. En efecto, la producción de nuevos conocimientos se ve como un caso especial de los esfuerzos de algunos por darle sentido y explicación a alguna parte del universo ... el aprendizaje significativo es siempre en algún grado un proceso creativo, y un genio es solamente una persona especialmente buena para aprender con significado ... por lo tanto estimular el aprendizaje significativo en la escuela, es incrementar la creatividad".

[16] NOVAC, Rev. Colombiana de educación, Bogotá, Nº 24, 1992, p.79.

El constructivismo, según Mario Carretero’’, se entiende como aquella corriente psicopedagógica que propende porque “el conocimiento no es una copia de la realidad, sino una construcción del ser humano”. Afirma también que dicho constructo se hace a través de los **esquemas.** Los esquemas son a la vez el resultado abstracto de la interacción de cada individuo con el medio; se asemejan a herramientas cuya función se adapta a trabajos específicos. Dada su naturaleza abstracta se ajustan a la realidad, y siendo individuales, permiten que todo ser humano tenga una representación particular del mundo. Son cambiantes y cada vez se hacen más complejos y especializados según el nivel de desarrollo que en su evolución, va alcanzando el hombre.

Respecto al nivel de desarrollo Piaget, citado por Castorina y Palau, lo define como **“Estructura de conjunto”;** esto es:

> Las acciones de los niños (y también las de los adultos) no se presentan en forma caótica inconexa y desordenada, sino que evidencian formas de organización distintas para cada período de desarrollo. Estas formas de organización de las acciones son pensadas por Piaget como estructuras de conjunto.

---

[17] CARRETERO Mario, op., cit., p. 20.
[18] CASTORINA Antonio y PALAU Gladys, Introducción a la lógica operatoria de Piaget, Paidos, Barcelona, 1982, p. 11.

Definida una estructura de conjunto como un nivel de desarrollo, producto de la interacción entre las partes y no sumatoria de ellas, es posible comprender por qué la concepción del mundo real es cambiante en cada individuo.

Considerando la interacción entre las partes, Luis Not en su teoría sobre la interestructuración, afirma que se da entre puntos de vista opuestos (sujeto-objeto) cuyo resultado es la mutua modificación. La interestructuración es de carácter mental, tiene como soporte a conocimientos válidos y está mediatizada por la cultura de grupo.

Cada nuevo aprendizaje significativo (construcción de un significado propio) se hace a partir de los significados ya poseídos. Según Angela Barrón.

> El sujeto realiza una actividad autoestructurante que le permite construir el conocimiento ... y que puede implicar cambios estructurales de muy diversa naturaleza, y hasta traumáticos, cuando se trata de modificar esquemas estructurantes del sistema cognitivo del sujeto.

El esquema de la proporcionalidad según Piaget e Inhelder 1951 y Flavell 1963 citados por Antonio Corral^' proviene directamente del grupo LNRC o grupo de las transformaciones proposicionales, dado su carácter hipotético-deductivo.

---

[19] NOT Luis, op., cit. p. 262-264.
[20] BARRON R. Angela, Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos, rev. educación, España, Nº 294, 1991, p. 317.

El lector encontrará precisiones y ampliaciones respecto al grupo INRC, característico de las operaciones formales en las que el conocimiento sobrepasa lo real insertándolo en lo posible, en Castorína y Palau.

Los estudios realizados por Karplus, Noelting y Antonio Corral, citados los primeros por éste último^^, coinciden en afirmar que la proporcionalidad es el esquema de mayor dificultad de los vinculados al grupo INRC cuando afirma:

> Las tareas relacionadas con el grupo IRNC que formaliza la integración de dos sistemas de reversibilidad simple en el sistema complejo de reversibilidad doble son de una dificultad superior a aquellas relacionadas con el **retículo** que formaliza la capacidad de realizar todas las posibles combinaciones de n elementos.

Castorina y Palau, define **retículo:** "Un conjunto parcialmente ordenado tal que para cada par de elementos cualesquiera, hay un ínfimo y supremo". El supremo es el menor de los límites superiores, y el ínfimo es el mayor de los límites inferiores. En otras palabras, dadas dos clases cualesquiera A y B, la unión de ellas (AUB) forma el supremo, y la intersección (AnB) determina el ínfimo.

---

[21] CORRAL A. Asincronías en el desarrollo del pensamiento formal, rev. estudios de psicología Nº 37, España, 1989.
[22] CASTORINA Antonio y PALAU Gladys, op., cit.
[23] CORRAL A. Asincronías en el desarrollo del pensamiento formal, op., cit., p. 8.
[24] CASTORINA A. y PALAU Gladys, op., cit., p. 28-31.

El sistema complejo del razonamiento proporcional puede ser categorizado y los estudios hechos por Corral muestran que el éxito en un nivel determinado, garantiza el éxito en los niveles inferiores.

9.3. LA PROPORCIONALIDAD COMO RAZONAMIENTO ANALOGICO.

En términos de G. Polya: “Dos objetos son análogos si entre sus respectivos elementos hay concordancia de ciertas relaciones”. Así por ejemplo el paralelogramo recto y el paralelepípedo recto son análogos, aunque el primero esté limitado por lados y el segundo por caras.

El razonamiento analógico conduce a la conjetura (distinta por cierto a la certidumbre), es de carácter hipotético y básico en la inducción matemática.

Supongamos que la analogía entre dos sistemas G y G' registre una dependencia tal que ciertas relaciones entre los elementos de G estén regidas por las mismas leyes que las relaciones correspondientes entre G'. En este caso a la correspondencia biunívoca G y G' se llama Isomorfismo. Sin embargo no deben confundirse objetos análogos y objetos semejantes.

---

[25] CORRAL A. Asincronías en el desarrollo del pensamiento formal, op., cit., p. 28.
[26] POLYA George, Como plantear y resolver problemas, Trillas, México, 1979, p. 57.

Al completar el cuadro siguiente: Longitud en metros de un lazo y su peso correspondiente, lo que se requiere para llenarlo es hacer un razonamiento analógico.

Longitud en mts.	10	15	
Peso en Kg.	2		4

En el caso del paralelepípedo y el paralelogramo puedo establecer la siguiente analogía.

- Los lados son al paralelogramo como las caras son al paralelepípedo.

Para completar el cuadro se razona análogamente.

= 10 metros son a 2 Kilogramos como 15 metros son a x Kilogramos, como 4 Kilogramos son a v metros y así sucesivamente.

Entre las dos analogías puede decirse que la primera es más cualitativa, en tanto la segunda es de precisión matemática, es una analogía funcional, (se convierte en función). Además puede cambiarse la analogía a los componentes homogéneos, esto es:

- 10 metros es a 15 metros como 2 Kilogramos es x Kilogramos.

Sobre estas dos formas de completar el cuadro se pide al lector ver la sección (1.12.1) del anexo 1.

Observación.

Son muchos los conceptos matemáticos que sirvieron de apoyo a la propuesta de intervención, y que por lo tanto hacen parte del marco teórico; sin embargo, la presentación de ellos se trasladó al anexo (1), con el fin de hacerlos más explícitos. En procura de una mayor eficacia para docentes y estudiantes, la presentación que se hace en dicho apartado, está conformada por definiciones, propiedades y aplicaciones. Las propiedades se reconstruyen lógicamente y se aplican en la solución de problemas.

10. ESTRATEGIA DE INTERVENCION 1

- **Introducción.**

En pocas palabras, la estrategia pretende mostrar el comportamiento **cuantitativo** de los cuatro elementos (dos brazos y dos masas) que intervienen en el juego de la balanza, registrar en tablas de valores dichos comportamientos, elaborar curvas cartesianas e interpretarlas. Este último paso, unido al análisis de las tablas, y provisto de un acompañamiento sistemático, inducen al estudiante a diferenciar características propias de la proporcionalidad directa e inversa y sus aplicaciones.

El cálculo cuantitativo expuesto será un éxito, si previamente se ha logrado interiorizar el comportamiento **cualitativo** de los elementos de la balanza, esto es, si el estudiante anticipa cambios en las masas al variar un brazo, y en forma similar, variaciones en los brazos al cambiar una de las masas. A éste criterio se ajusta el orden de presentación de la estrategia.

La propuesta se diseñó básicamente a través de tres componentes: Situaciones problema, actividades y logros esperados, todos a partir del mediador. **La situación problema,** planteada por Mesa Orlando^’, tiene en este trabajo la connotación de dar al estudiante oportunidad de interrogarse frente a la adquisición de un nuevo conocimiento, en procura de cualificar sus conocimientos espontáneos. **Los logros esperados** son cambios cognitivos que se espera alcance el alumno a través de las actividades ó situaciones problema, y que bien pueden ser refinadas por el grupo o por el profesor. De hecho, los logros fueron alcanzados durante la experimentación, y algunos de ellos requirieron de acciones colectivas (modalidad plenaria).

Mesa Orlando^*, establece una diferencia entre los objetos físicos rígidos y los **mediadores** que "permiten organizaciones lógicas y conceptuales de las matemáticas tratadas, de manera que se reduzca el desfase entre la competencia de los niños y las exigencias culturales". En este sentido la balanza es un mediador, ya que además de objeto físico faculta al estudiante para dar cuenta en forma sistemática de las variaciones de las magnitudes que intervienen, su significado y simbolización.

Los apartados con título de **Aplicaciones,** son espacios de ejercitación algorítmica donde el estudiante asesorado por el profesor cuantifica el comportamiento de las magnitudes. En otras palabras, es el espacio para resolver problemas.

[27] MESA B. Orlando. Criterios y estratégias para la enseñanza de las matemáticas, Centro de pedagogía participativa, 1994, p. 10.
[28] MESA B. Orlando. Ibid, p. 83.

Por último, **las observaciones** tienen la finalidad de hacer aclaraciones al tema que se esté tratando.

En el proceso de intervención se presentaron como dificultades iniciales las operaciones con fiacciones, solución de ecuaciones y la representación de curvas en el plano cartesiano, lo que hizo necesaria una intervención con problemas como el siguiente.

Si í2 cartulina cuesta $350, completar el cuadro siguiente:

Cartulina	½	1	1 ¼	1 ¾	2	3 1/5
$	350					

Se realizaron las correspondientes gráficas cartesianas en papel milimetrado y se dio comienzo al trabajo con la balanza arriba descrito.

La discusión realizada con la presencia de tablas y las respectivas curvas, secciones 10.8 y 10.13 se convirtió en el núcleo de la intervención. Fue allí donde se marcaron las diferencias entre los conceptos correlaciones y proporciones, en una forma tan contundente para los estudiantes, que se hizo divertido resolver problemas de proporciones. Se lanzaban expresiones como: éste se resuelve por producto, aquel por cociente, ante situaciones como las siguientes:

- Hay alimento para 36 bueyes durante 12 días, se sacan 16 bueyes. Cuantos días podrán ser alimentados los bueyes que quedan?.

- En una receta, a V_2 libra de mantequilla corresponde 1 í2 tazas de harina. Para 3 V2tazas de harina, ¿Cuánta mantequilla se necesita?.

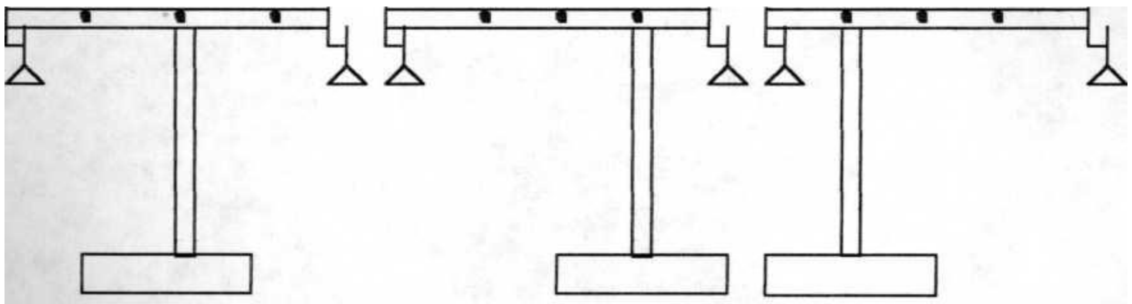
El método de proporciones utilizado se generalizó en el grupo y en la práctica fue difícil hacerles comprender las bondades del método de reducción a la unidad. Sin embargo, se logró la aceptación de este método en los problemas de repartos proporcionales, sección (1.14) del anexo 1.

- **La balanza de brazos.**

Se parte del concepto de palanca y en particular la palanca de primer género en la que el punto de apoyo está entre las dos fuerzas. La balanza de brazos es el sistema a explorar y la intervención con él nos permite construir significativamente el modelo de la proporcionalidad tanto directa como inversa, después de haber elaborado el concepto de correlación.

10.1 DESCRIPCION DEL SISTEMA.

Se utilizará como instrumento de apoyo una barra metálica dentada, dos ganchos, uno en cada extremo de la barra y entre ellos, en cualquier parte de la barra, un soporte, formando con estos elementos el sistema que muestran las gráficas (1), (2), (3), que es una balanza de brazos.



Gráfica (1) Gráfica (2) Gráfica (3)

Se conviene en llamar la masa del lado izquierdo (P) y la masa del lado derecho (R).

Se describe el sistema en los siguientes términos; El lugar donde está ubicado el soporte que sostiene la barra y las masas, lo llamaremos punto de apoyo; y a la distancia entre el punto de apoyo y el peso (P) la llamaremos brazo y lo designaremos con (B) al igual que la distancia (parte de la barra) entre el punto de apoyo y el peso (R) será el brazo (b).

Se sugiere que por lo menos cada pareja de estudiantes construya una balanza, así sea rústica.

10.2 SITUACION PROBLEMA 1.

- Comportamiento de brazos.

Si las masas (P) y (R) son iguales, se pide a los alumnos que observen con atención los sistemas representados en las gráficas (1), (2), (3), y que interactúen con la balanza de brazos desplazando el soporte y en consecuencia el punto de apoyo a lo largo de la barra dentada. Se pide a los estudiantes que escriban sus opiniones con las que se espera respuesta a las siguientes preguntas.

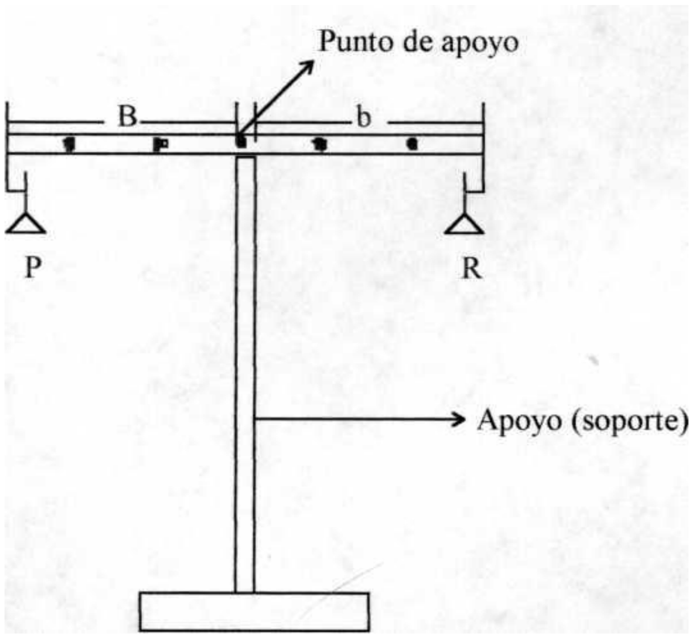
- Cuál de los sistemas estará nivelado horizontalmente y por qué?
- Cuál de los sistemas gira en sentido de las manecillas del reloj y por qué ?
- Cuál de los sistemas gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y por qué?.

El profesor motivará una puesta en común de las observaciones hechas por los estudiantes y la orientará con la ayuda de los planteamientos que se esbozan a continuación.

Observación: En las mediciones que se harán posteriormente, se despreciará la masa de la barra dentada.

- Logros esperados.

La situación del problema 1 lleva al concepto Arquimediano de equilibrio, citado por Valero^^. “Dos pesos iguales y a igual distancia del centro de apoyo están en equilibrio. Pero si los pesos son desiguales, sus distancias al punto de apoyo son inversamente proporcionales a sus pesos”.



Gráfica (4)

Asumiendo el sistema de la gráfica (4) en equilibrio, tenemos las igualdades:

[29] VALERO Michel- Física 1, Nomia, Bogotá, 1980, p. 91.

$$P = R \qquad (1)$$

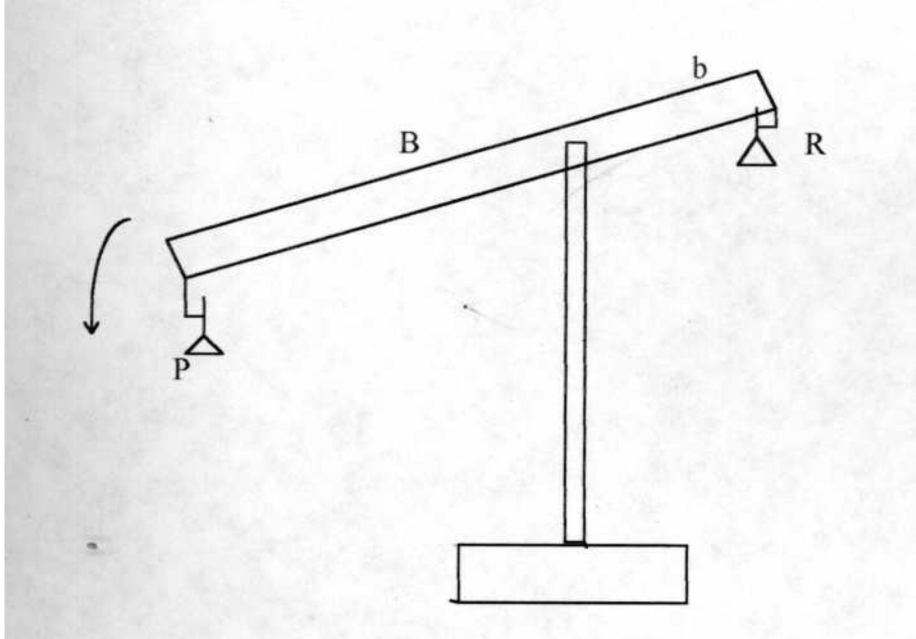
$$B = b \qquad (2)$$

y al multiplicar miembro a miembro (1) y (2) nos queda:

$$P \times B = R \times b \qquad (3)$$

La igualdad tres justifica el equilibrio que guarda el sistema representado en las gráficas (1) y (4).

La balanza de brazos representada en la gráfica (2) dará un giro en sentido contrario a las manecillas del reloj como lo muestra la gráfica 5.



Gráfica (5)

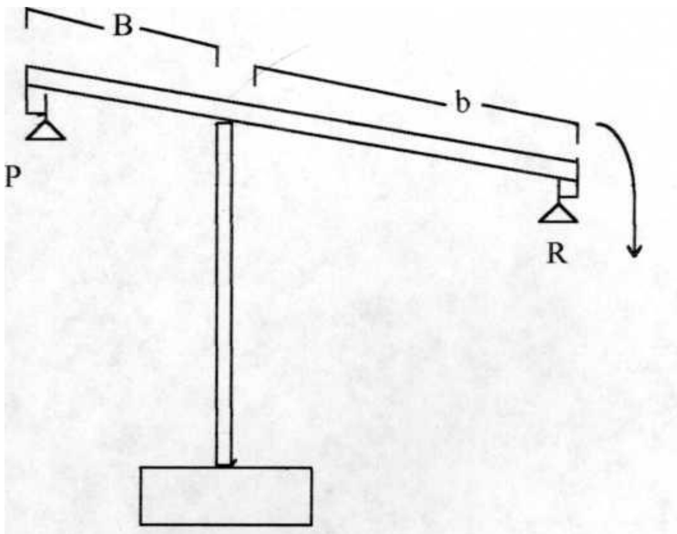
Dado que el brazo (B) es de mayor longitud que el brazo (b), se puede escribir la desigualdad:

$$P \times B > R \times b \qquad (4)$$

Se dará oportunidad al estudiante para que encuentre formas de equilibrar la balanza representada en la gráfica (5):

- Desplazando la barra hasta que su centro quede en el punto de apoyo.
- Agregando masa a (R).
- Desplazando un poco la barra hacia su centro y agregando un poco de masa a (R).
- Otras.

La balanza de brazos representada en la gráfica (3) dará un giro (girará) en el mismo sentido de las manecillas del reloj. Ver gráfica (6), dicho desequilibrio se debe a que B < b y en consecuencia P.B < R.b.



Gráfica (6)

10.3. SITUACIÓN PROBLEMA 2.

- **Comportamiento de Masas.**

El propósito es interactuar con la balanza, variando las masas (P) y (R), y procurando en cada caso encontrar equilibrio.

Se pide al grupo que establezca en su instrumento unas comparaciones entre (P) y (B) válidas también para (R) y (b). El estudiante tendrá oportunidad de hacer sus propias conjeturas e inducir una tabla de datos.

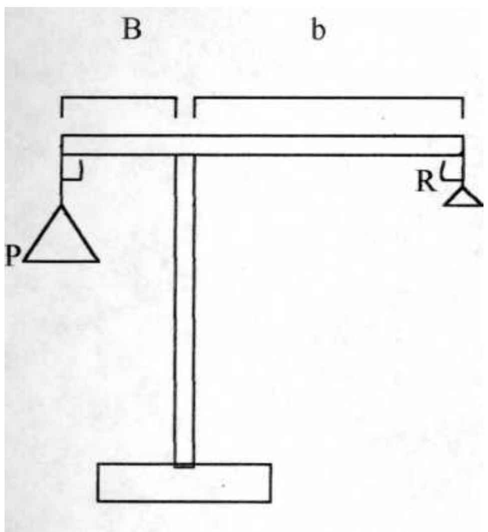
¿Al aumentar la masa (P), permaneciendo (R) igual, cómo recobrar el equilibrio de la balanza?, gráfica (7a). Similar pregunta se puede hacer sabiendo que es la masa (R) quien aumenta y (P) quien permanece igual. Gráfica (7b).

- **Logros esperados.**

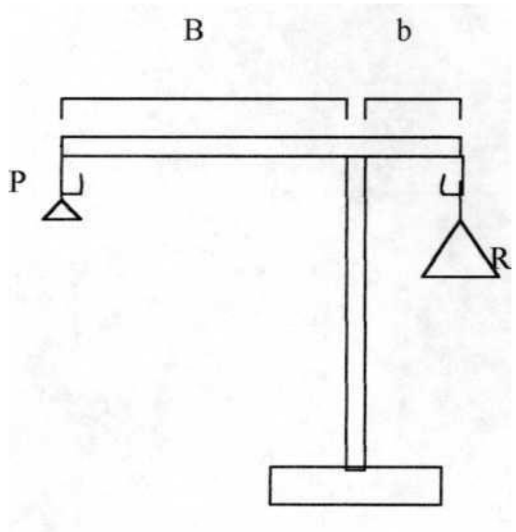
Como la condición es que (R) permanezca igual, entonces habrá que correr la barra de tal forma que el punto de apoyo quede más cerca de (P) y en consecuencia (b) quedará mayor que (B).

$$b > B$$

Esta interacción con la balanza permaneciendo (R) constante ha de ser aprovechada por el profesor para movilizar el concepto de función, dada la correspondencia biunívoca que se observa entre la variación (P,b). Ver sección (1.5) del anexo 1.



Gráfica (7a)



Gráfica (7b)

10.4. PROPUESTA DE EVALUACION.

10.4.1. De cada enunciado de la izquierda traza una línea a uno de los enunciados de la derecha de tal manera que se mantenga el equilibrio en una balanza de brazos.

Si (?) aumenta y (R) no varía	
Si (R) disminuye y (?) no varía	"B" aumenta
Si (?) disminuye y (R) no varía	"b" aumenta
Si (R) aumenta y (?) no varía.	

Si (R) aumenta y (P) no varía

Si (P) disminuye y (R) no varía   “B” disminuye

Si (R) disminuye y (P) no varía   “b” disminuye

Si (P) aumenta y (R) novaría.

10.4.1. Para recobrar el equilibrio inicial de una balanza:

- Qué ocurre con (B) y (b) si (P) aumenta y (R) permanece igual?
- Igual pregunta si (R) aumenta y (P) igual?
- Qué podemos decir de (B) y (b) si (P) disminuye y (R) permanece igual?
- Qué ocurre con (B) y (b) si (R) disminuye y (P) permanece constante?.

Los resultados de la evaluación serán puestos en común, los estudiantes discutirán sus observaciones, y el profesor inducirá el concepto de correlación directa e inversa. Ver sección (1.8) anexo 1.

- **Logros esperados.**

Confrontadas las respuestas a los ejercicios anteriores, con sus resultados podemos formar las siguientes parejas:

- **Solución de problemas.**

((P) aumenta, (b) aumenta)

((R) aumenta, (B) aumenta)

(**(P)** disminuye, (b) disminuye)

((R) disminuye, (B) disminuye)

((P) aumenta, (B) disminuye)

((R) aumenta, (b) disminuye)

((P) disminuye, (B) aumenta)

((R) disminuye, (b) aumenta).

Como puedes observar en las parejas anteriores, es posible que:

- Ambas magnitudes aumenten
- Ambas magnitudes disminuyan
- Aumente una de las dos magnitudes y disminuya la otra magnitud.

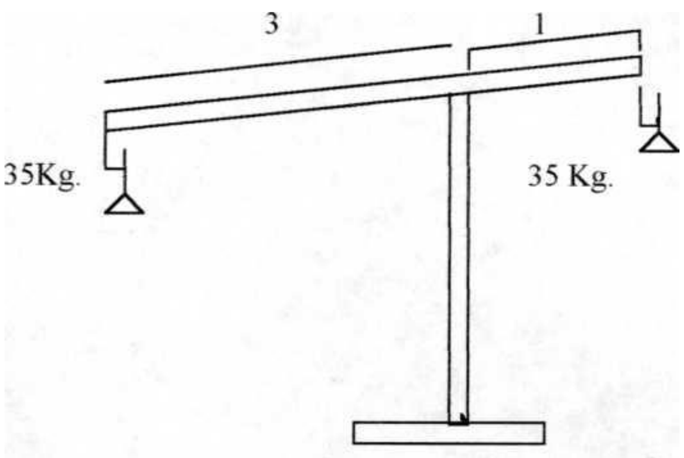
En los dos primeros casos decimos que las magnitudes están **directamente correlacionadas,** y en el tercer caso se dice que la **correlación es inversa.**

10.5 APLICACIÓN.

Se asume que el estudiante muestra, a través de la evaluación, tener un adecuado conocimiento **cualitativo** sobre la doble reversibilidad (de brazos y de pesos) que implica poner en equilibrio una balanza de brazos.

El propósito siguiente es registrar tablas de valores y representarlas en el plano cartesiano, como complemento **cuantitativo,** y al que se ha hecho referencia en apartados anteriores como de segundo nivel.

10.5 .1. Consideremos la balanza de brazos representada en la Gráfica (8).



Gráfica (8)

Cómo encontrar su equilibrio sin mover el punto de apoyo, y manteniendo P constante?

Solución.

Datos: b=

1 B = 3 P

= 35 kg. R

= 35 Kg.

La ley de las palancas enunciada por Arquimedes y citada en la sección (10.2) se basa en las igualdades P=R y B=b, y que permiten llegar a la expresión:

$$P \times B = R \times b$$

Como en este caso, B > b, tendrá que ocurrir que (R) aumente su masa, por tanto (R) es la incógnita.

Al reemplazar en la ecuación:

$$P \times B = R \times b$$

$$35 \times 3 = R \times 1$$

$$105 = R$$

Esta respuesta significa que (R) tiene que aumentar en 70 Kg para equilibrar la balanza de la gráfica (8).

10.5.2. Encuentra en cada uno de los problemas siguientes el valor de R.

Datos:

- $b = 2$

  $B = 2$

  $P = 35$

  $R = ?$

- $b = 3$

  $B = 1$

  $P = 35$

  $R = ?$

- $b = 3.5$

  $B = 0.5$

  $P = 35$

  $R = ?$

- $b = 1.5$

  $B = 2.5$

  $P = 35$

  $R = ?$

10.6. REPRESENTACIÓN EN EL PLANO CARTESIANO.

10.6.1 Correlación directa.

Con los resultados de los problemas de la aplicación (10.5.1) y (10.5.2) se forma la siguiente tabla.

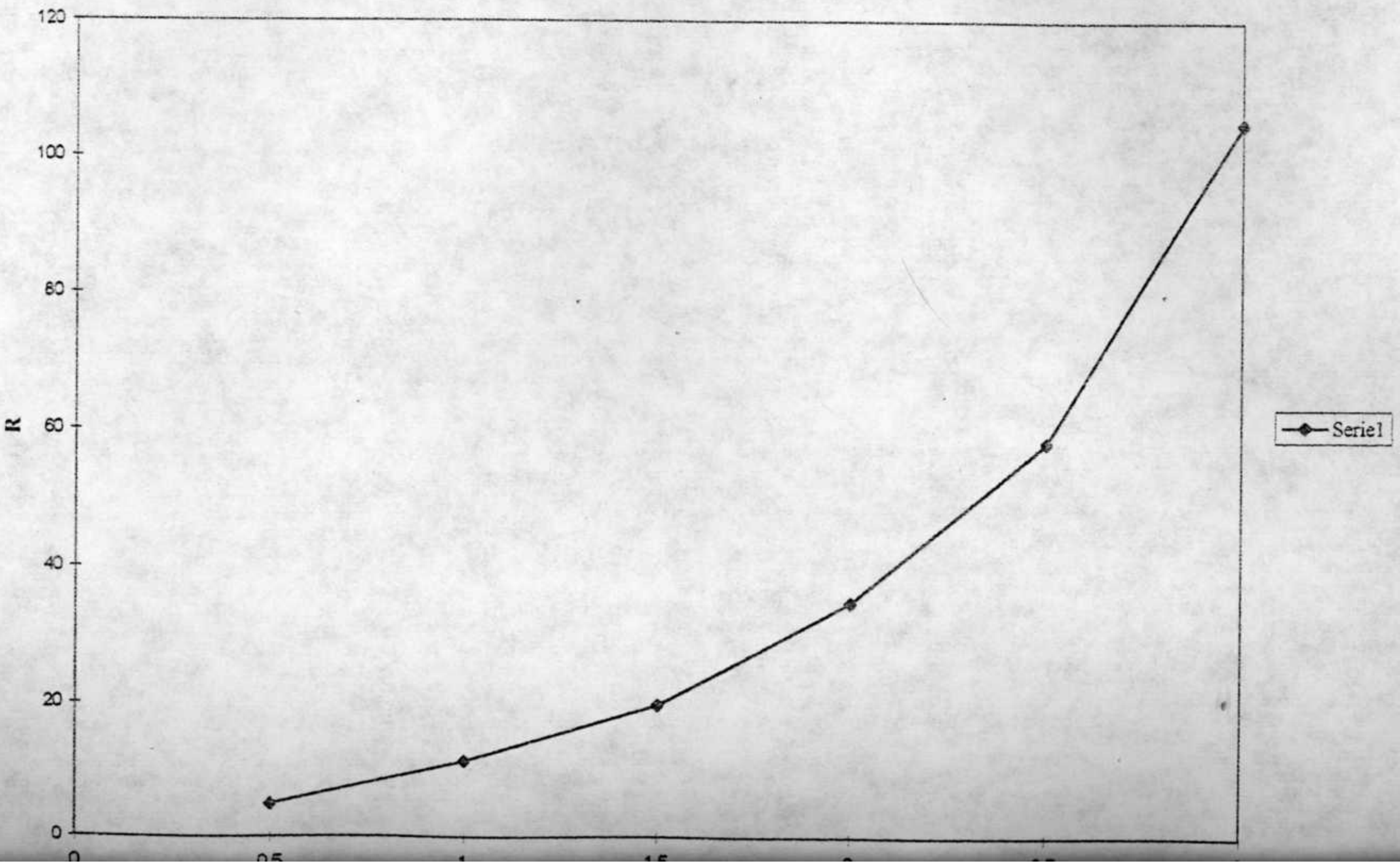
B	1	2	3	0.5	2.5
R	11.6	35	105	5	58.3

Tabla 1

Los datos de la tabla (1) al ser ubicados en el plano cartesiano son puntos de la curva que se muestra en la gráfica (9),

Como ejercicio se pide al profesor orientar la verificación de las curvas que muestran las gráficas (9) y (10) en papel milimetrado.

Gráfica (9)



En la gráfica (9), al aumentar el brazo (B) aumenta también la masa (R) lo que permite afirmar que la **curva es creciente,** y además **directamente correlacionada.**

Ver los numerales (1.5.3), (1.8) del anexo 1.

10.6.2. Correlación Inversa.

Los problemas tratados en la aplicación (10.5.1) y (10.5.2) permiten además hacer la siguiente tabla; asumiendo a (R) constante; $R = 35$ y $B + b = 4$.

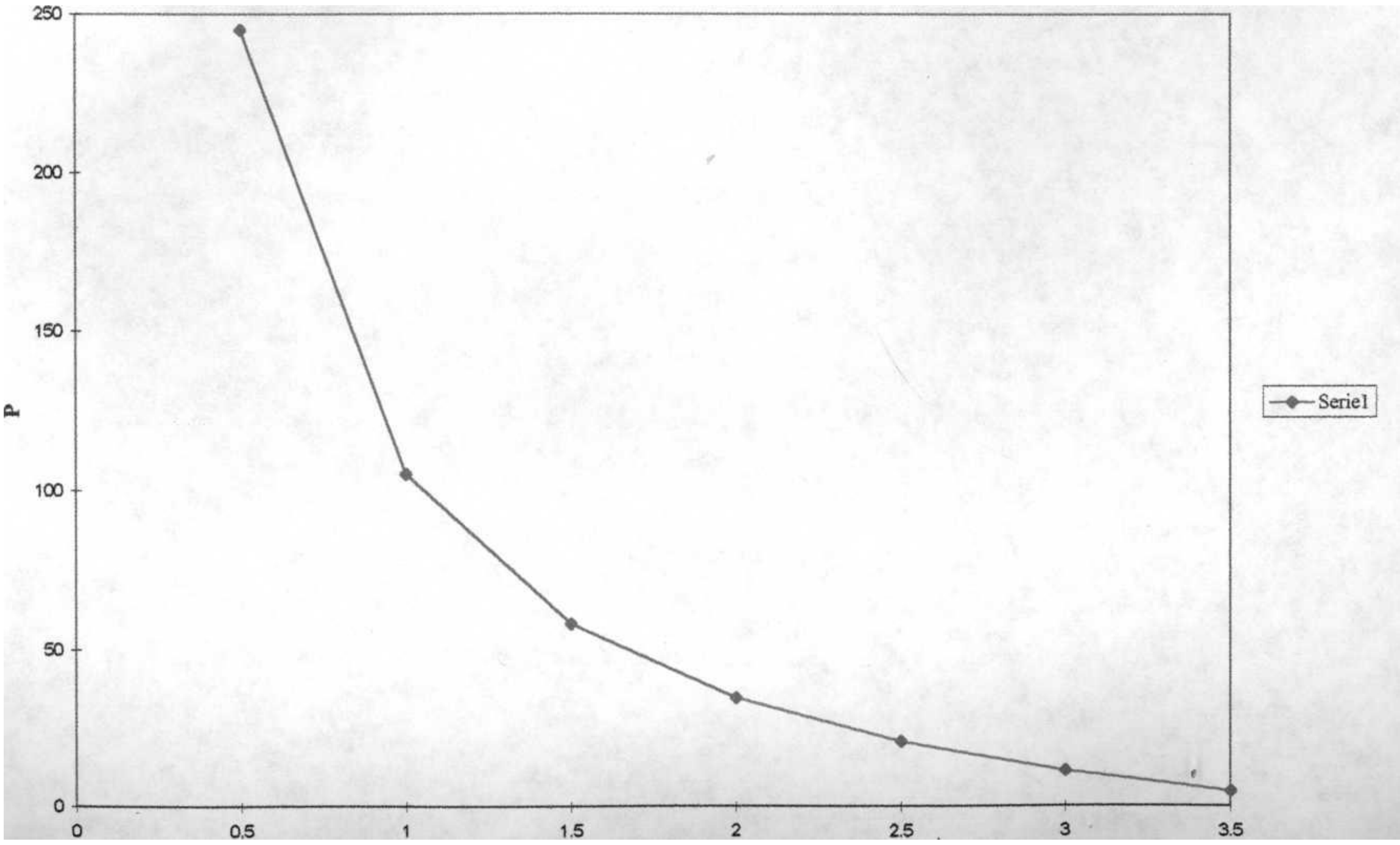
B	1	2	3	0.5	2.5
P					

Tabla 2

El profesor orientará el cálculo de los valores de P en la tabla 2 y con ella, la verificación de la curva (gráfica 10) en papel milimetrado.

00
IT\

Gráfica (10)



10.6.3. Actividad 1.

Comparar las curvas (9) y (10) hechas en papel milimetrado y escribir las observaciones.

Se había afirmado que la curva representada en la gráfica (9), (B contra R) era creciente, porque al aumentar el brazo (B) aumenta también la masa (R).

¿Qué se puede decir del brazo (B) y de la masa (P) representados en la curva (10)?. El estudiante anotará sus observaciones.

- Logros esperados.

Se espera de la actividad (1) que el alumno diferencie cuándo una curva es creciente o decreciente.

A medida que el brazo (B) aumenta, la masa (P) disminuye, tabla (2), gráfica (10). Cuando dos magnitudes tienen éste comportamiento se dice que están **inversamente correlacionadas.** Ver sección (1.8) del anexo 1.

Escribir las observaciones de la gráfica (10). El profesor enfatizará los conceptos de **función, correlación, función creciente** y **decreciente** mediante las orientaciones que proporciona el anexo 1 en las secciones (1.5), (1.5.3), (1.8) y algunas aplicaciones.

10.7. SITUACIÓN PROBLEMA 3.

- **Proporcionalidad Directa.**

Las características B = b y P = R, justifican el equilibrio en una balanza. Este sistema será llamado **balanza de brazos iguales.** Hay balanzas de muchas clases y de alta sensibilidad. La sensibilidad de una balanza y la precisión en la medida son conceptos correlacionados directamente, ya que a mayor sensibilidad en la balanza mayor precisión en la medida.

Con los siguientes materiales: probeta graduada, vaso pequeño, balanza de brazos iguales, masas respectivas y una sustancia determinada; procedemos de la siguiente forma:

- Una vez determinada la masa de la probeta y determinado el volumen del vaso como unidad, se vierten en la probeta varios volúmenes de líquido, registrando en cada caso la masa de la probeta y las unidades de volumen así:

V (cm^3)	1	2	3	4	5	6
m (gr)	3	6	9	12	15	18

Tabla 3

El estudiante tendrá libertad para construir su propia tabla o verificar la anterior.

- Se pide ubicar en el plano cartesiano las parejas de números que forman la tabla anterior o la construida por el estudiante, en papel milimetrado. Los datos del experimento anterior son puntos de la curva de la gráfica (11).

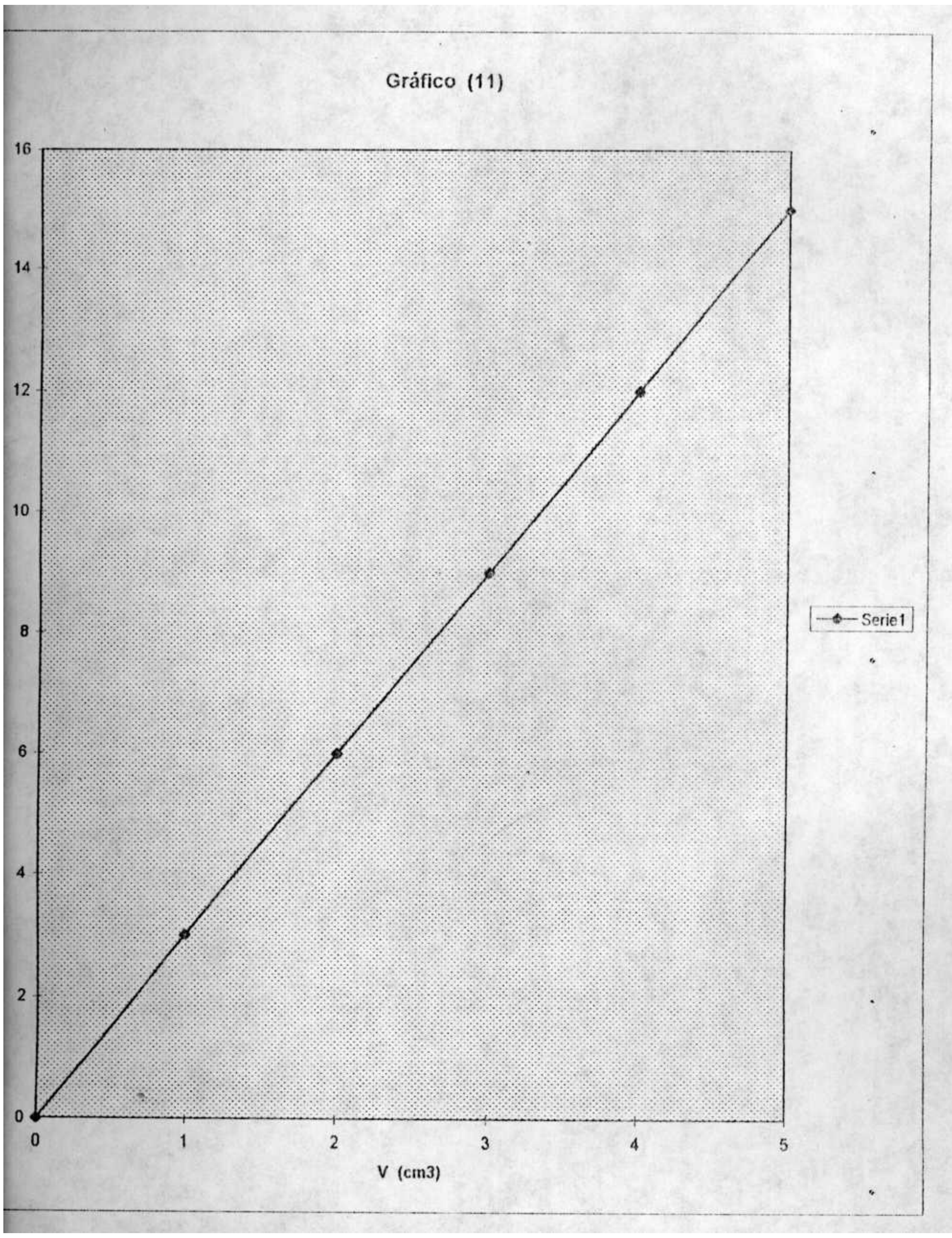


Gráfico (11)
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
1
2
3
4
5
V (cm3)
Serie1

- El estudiante escribirá sus opiniones respecto de la nueva curva.

Se pide al alumno comprobar la linealidad de la función establecida entre masa y volumen que se puede escribir **m = f** (v), verificando las propiedades de la función lineal:

- $f(v_1 + v_2) = f(v1) + f(v_2)$
- $f(V_1 . V_2) = v1.f(V_2) = f(v1).v_2$. Ver (1.12.1) marco teórico.

10.8 ANÁLISIS DE GRÁFICAS Y TABLAS.

Comparar las gráficas 9, 10, y 11 y también sus respectivas tablas (1), (2), (3). Con el objeto de diferenciar correlaciones y proporciones a partir de saberes previos como: Función, función creciente y decreciente, función lineal y correlación directa e inversa entre otros.

Para lograr esta diferenciación se propone establecer las relaciones que muestran las tablas siguientes, donde el estudiante tendrá libertad de escribir las observaciones que considere pertinentes tanto de estas últimas como de las respectivas curvas que ha elaborado en papel milimetrado.

- Efectuar el cociente entre los valores R y B de la tabla (1).

B	R	B/R
0.5	5	
1	11.6	
2	35	
2.5	58.3	
3	10.5	

Tabla 4

- Efectuar el cociente entre los valores de P y B de la tabla (2).

B	P	B/P
0.5	245	
1	105	
1.5	58.3	
2	35	
3.5	5	

Tabla 5

- Efectuar ei cociente entre los valores V y m de la tabla (3).

v	m	m/v
1	3	
2	6	
3	9	
4	12	
5	1.5	

Tabla 6

- **Logros esperados.**

Con las observaciones de los estudiantes se motivará una puesta en común orientada a extraer características de la proporcionalidad directa.

Las conclusiones siguientes son logros esperados de los estudiantes mediante la actividad, y que el profesor complementará con elementos de la cultura matemática entre los que deben estar:

- Cuando dos magnitudes como el volumen (v) y la masa (m) de una misma sustancia, están directamente correlacionadas y además tienen cocientes iguales, se dice que Las magnitudes son directamente proporcionales.

Otras características de las magnitudes directamente proporcionales son:

- Su gráfica cartesiana es una línea recta que pasa por el origen del plano.
- Son funciones lineales y por lo tanto cumplen las propiedades:

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
- $f(v_1.v_2) = v_1.f(v_2) = f(v_1).v_2.$

Ver sección (1.5.2) del anexo 1.

10.9. COEFICIENTE O RAZÓN DE PROPORCIONALIDAD.

Retomando las tablas (4) y (6) correspondientes a las curvas (9) y (11), respectivamente ó las sustitutivas que el estudiante haya realizado, se tiene:

De la Tabla (4): $5/0.5 = 10$

$35/2 = 17.5$

$105/3 = 35$

$11.6/1 = 11.6$

$58.3/2.5 = 23.2$

De la tabla (6): 3/1 = 3

9/3 = 3

15/5 = 3

6/2 = 3

12/4 = 3

18/6 = 3

- Cada uno de estos cocientes indicados se llama **razón por cociente;** ver sección (1.9) anexo 1. Como se puede observar, las razones obtenidas en la tabla (4) correspondiente a la gráfica (9) son distintas; mientras que las obtenidas en la tabla (6) correspondientes a la gráfica (11) son iguales y por tanto el número (3) tres, en éste caso, es el **coeficiente de proporcionalidad.** Las divisiones indicadas que tienen la misma razón como:

- $\frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \frac{12}{4} = \frac{15}{3} = \frac{18}{6} \ldots$
- $\frac{2}{3} = \frac{6}{9} = \frac{10}{5} \ldots$ y muchas otras, forman una serie de razones iguales. Ver sección

(1.10) del anexo 1. En cada razón (cociente indicado) al numerador se llama antecedente y al denominador se llama consecuente.

El cociente indicado 6/2, se lee “La razón de 6 a 2” y se puede escribir también 6:2

10.10 RAZONES INVERSAS O RECÍPROCAS.

Consideremos la razón **a/b;** al ser multiplicada por otra razón, tal que el producto sea la unidad, decimos que dicho factor es la razón inversa o reciproca de **a/b,** ver sección (1.9.1) del anexo 1.

- **Observaciones.**

- La razón inversa de **a/b** es **b/a** que es una razón en el otro sentido, tal que al multiplicarlas dan como resultado la unidad así:

$$\mathbf{a/b \times b/a = ab/ab = 1} \qquad (6)$$

- Así por ejemplo. La razón de 6 a 2 es triple, o lo que es lo mismo tres veces. El otro sentido de la razón 6 a 2 es la razón de 2 a 6 que es un tercio o la tercera parte. Observamos además que 6/2 x 2/6 = 1.

10.11 TALLER 1.

10.11.1. De izquierda a derecha une con una línea los enunciados que se correspondan:

curva creciente

curva decreciente

una magnitud aumenta y otra disminuye

ambas magnitudes disminuyen

ambas magnitudes aumentan

una magnitud disminuye y otra aumenta.

correlación directa

correlación inversa

10.11,2. Compare por cociente o de otra forma los datos que proporcionan los siguientes enunciados. Explicar la respuesta:

- Un balón cuesta $30.000, mientras que una bicicleta cuesta $220.000.

- El libro de historia tiene 300 páginas y el de español 250 páginas.

- En un Kinder hay 60 niñas y 15 niños.

- El ancho de una puerta es 2 mts. y el alto 210 cm.

- La longitud de dos circunferencias A y B si el radio de la circunferencia A es del de la B.

10.11.3. Algunos de los gastos fijos de una familia son:

Transporte	$100.000
Salud	$120.000
Vivienda	$200.000
Educación	$ 80.000
	Total $500.000

- Cual es la razón del gasto entre:

Salud - Vivienda, explique.

Vivienda - Salud, explique.

Vivienda - educación, explique.

Salud - educación, explique, educación - transporte, explique.

Escriba otras razones y explique.

- Cuál es el porcentaje de cada uno de los gastos fijos enunciados en (10.11.3).?.

- Si los gastos fijos constituyen el 60% de los gastos totales, a cuánto ascienden los gastos totales de la familia ?.

10.11.3. Una fotografía tiene 4% cm, de alto y 3 1/3 cm. de ancho.

¿ Cuál es la razón de su anchura a su altura ?.

10.11.4. Una caja tiene de profundidad 2 **2/3** cm., de ancho 3 **3/7** cm. y de espesor 1 1/3 cm.

Escribe y explica las razones que se piden:

- Profundidad a la anchura.
- Profundidad al espesor.
- Anchura al espesor.
- Escriba todas las posibles razones,

10.11.5. Hace dos años, dos ciudades A y B tenían respectivamente 50.000 y 60.000 habitantes. Si el crecimiento de la población en cada año es del 2%. Calcular:

- Razón de la población de las ciudades A y B hace dos años.
- Aumento de la población de cada ciudad en los dos años.
- Razón de la población de las ciudades B y A en la actualidad.
- Escriba otras razones y explique.

10.11,7, La base **b** de un rectángulo es 20 cm, y su altura **h** es 10 cm. Cuál es la razón entre la base y la altura ó entre la altura y la base?.

- Que ocurre con el área de dicho rectángulo, si aumenta la base **b** y permanece la altura **h** constante ?.

- Complete el siguiente cuadro de áreas, sabiendo que la altura h = 10 cm. no cambia.

b	20	22	24	26	28
A					

- Haga la gráfica cartesiana con los datos de la tabla anterior.

10.11.8. Complete el siguiente cuadro con las alturas h y los perímetros p, sabiendo que el área A = 200 cm.^ no varía.

b	20	22	24	26	28
h					
p					

- Con los datos del cuadro hacer las siguientes gráficas cartesianas:

b contra **h,**

b contra p.

h contra p.

- Señale y justifique las parejas de magnitudes que están correlacionadas y las que son proporcionales, de las dadas en el numeral anterior.

10.11.9. El ejercicio (10.11.8) puede hacerse extensivo a otras figuras. Intente por ejemplo, con un triángulo.

***10.12. SITUACIÓN PROBLEMA 4. - Proporción*.**

La figura (4) nos permitió asociar el concepto Arquimediano de equilibrio con la expresión

$$B \times P = b \times R$$

Al dividir los brazos entre sí y las masas entre sí. ¿Qué nueva relación surge?.

Con la orientación del profesor, el alumno deducirá la expresión (7).

Conocido que	$B \times P = b \times R$		(a)
Cual es el cociente	$B \times P / b \times R = ?$.	¿Por qué?	(b)
Por tanto	$B/b \times P/R = 1$.	¿Por qué?	(c)
De donde	$\boxed{B/b = R/P}$	¿Por qué?	(7)

¿ Puedes justificar aritméticamente y físicamente la igualdad de razones {1)1.

El estudiante explorará esta justificación. El profesor aportará la teoría pertinente. Ver secciones (1.11) y (1.12.1) del anexo 1.

- Logros esperados.

La nueva igualdad (7), consta de dos razones iguales, expresión ésta que llamaremos **PROPORCIÓN.** En toda proporción, y en particular en B/b = R/P, a los numeradores B y R los llamaremos **antecedentes** y a los denominadores b y P **consecuentes.** La proporción B/b = R/P puede también escribirse en forma
horizontal:

$$\overbrace{B : \underbrace{b = R}_{\text{Medios}} : P}^{\text{extremos}} \qquad (8)$$

Donde **B** y **P son los extremos** y **b** y **R son los medios.** Las expresiones (7) y (8) se leen de igual forma: " **B es a b como R es a P".**

Una proporción escrita en forma de fracción u horizontalmente constituye un razonamiento analógico de alta precisión matemática, cuyo significado es: el efecto que hace "b" sobre "B" es el mismo que hace "P" sobre "R", matemáticamente hablando, ya que son razones iguales.

En general, si se tienen las parejas (a, b) y (m, n) tales que, exista una constante "k" en la que se cumpla:

$$\mathbf{b = k \times a} \qquad (9)$$

$$\mathbf{n = k \times m} \qquad (10)$$

Entonces entre las parejas existe una relación de **proporcionalidad directa** donde **“k”** es el **coeficiente de proporcionalidad** o **razón de proporcionalidad.** La proporción que resulta de (9) y (10) se escribe: **b/a = n/m = k** (11).

10.13 SITUACIÓN PROBLEMA. 5.

- **Proporcionalidad inversa.**

- El profesor dará a cada grupo una vasija de diferente tamaño y pedirá que mida con ella la capacidad de un mismo estanque. Con los datos se formará una tabla y se graficará la curva.

- Planteará a los estudiantes problemas como el siguiente para explorar las ideas previas que tienen sobre la proporcionalidad inversa.

Un estudiante tiene (4) cuatro vasijas (unidades de medida); e, f, g, h. Tales que: ***e*=V_2 f, f = 1/5 g, *g* = *Vi* h,** sabiendo que la unidad de medida **g** está contenida 40 veces en un estanque de capacidad 100 litros. ¿Cuántas veces contiene el estanque las vasijas e, f, h?.

La solución será intentada por los estudiantes, bien sea en forma individual o en grupos. En caso extremo el profesor inducirá la solución, la verificación de los resultados y el gráfico de la curva cartesiana correspondiente.

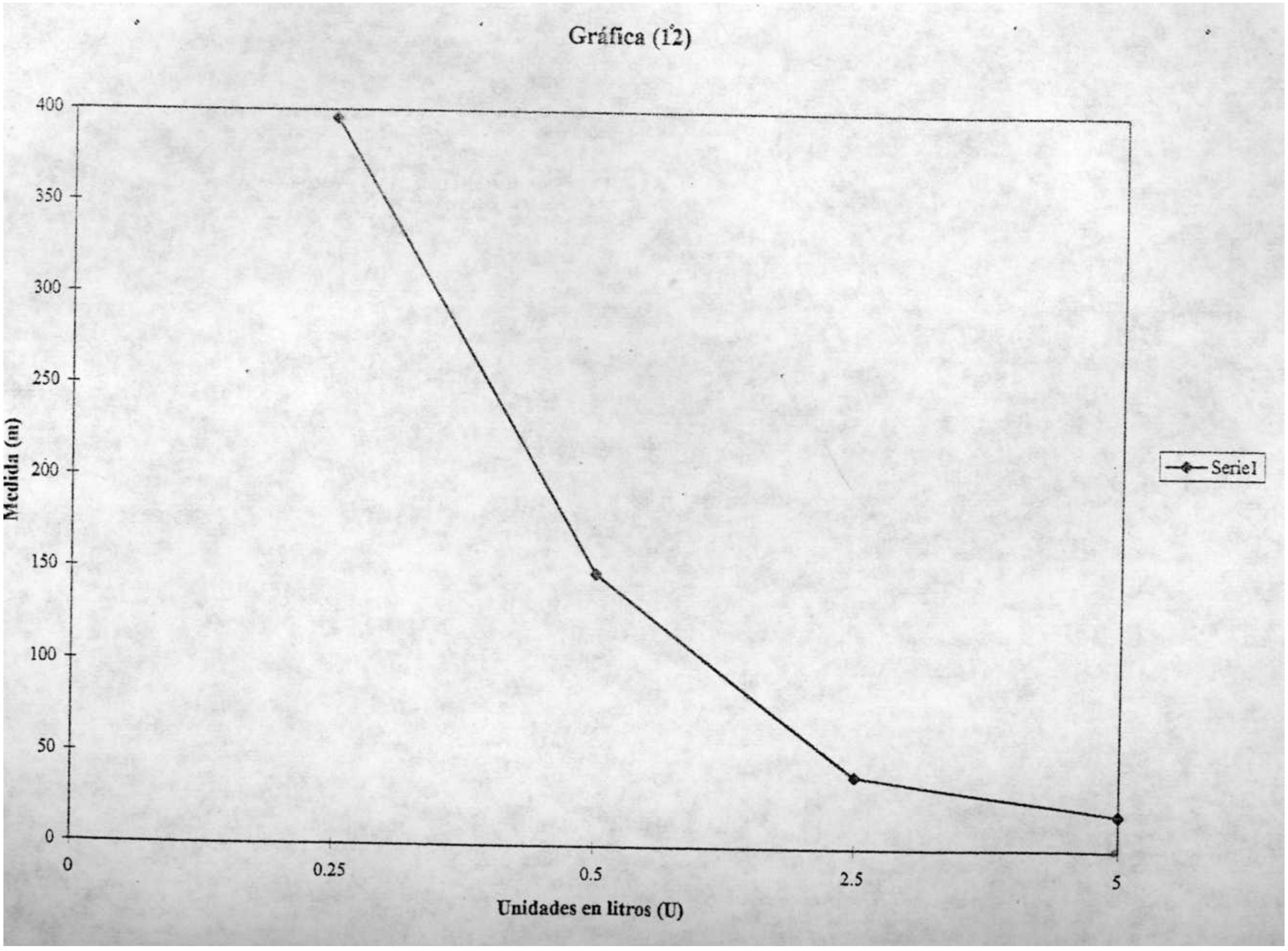
Ver sección (1.12.2) del anexo 1. Se sugiere resolver el problema por diferentes métodos, entre ellos;

- Reducción a la unidad g.
- Reducción a litros.
- Una vez resuelto el problema por reducción a litros se puede completar la siguiente tabla (7).

Unidad en litros (U)	0.25	0.5	2.5	5
Veces que está contenida en el estanque (m)				

TABLA 7

Verificar en papel milimetrado que los datos de la tabla (7) correspondan a puntos de la curva de la gráfica (12).



Gráfica (12)
400
350
300
250
200
150
100
50
0
Medida (m)
0
0.25
0.5
2.5
5
Unidades en litros (U)
Serie1

- Efectuar cocientes y productos con los datos de la tabla (7), y completar;

Unidad (U)	Medida (m)	U/m	U x m
0.25	400	_______	100
0.5	200	_______	_______
2.5	40	16	_______
5	20	_______	_______

Tabla 8

Anotar las conclusiones que merezcan la gráfica (12) y la tabla (8).

- Comparar las tablas (6) y (8), y también las gráficas correspondientes (11) y (12), Escribe en tu cuaderno las relaciones que encuentres.

- **Logros esperados.**

Esta plenaria tiene por objeto discutir las relaciones anotadas por los estudiantes previamente, en lo que tiene que ver con; las formas de las curvas, si son crecientes o decrecientes, si el producto o el cociente entre las parejas es o no constante y la clase de correlación.

Enfatizar en las relaciones que guardan la correlación directa e inversa, y la proporción directa e inversa, mediante la solución de problemas y su ilustración en el plano cartesiano.

Se espera que en esta plenaria el estudiante adquiera habilidad, como se logró en la intervención, para diferenciar problemas de regla de tres directa, inversa, compuesta y además repartos proporcionales. Ver secciones (1.12), (1.13), (1.14) del anexo 1.

Ahora bien, si entre las parejas que forman una correlación inversa el producto es constante, entonces dichas parejas cumplen la relación de **PROPORCIONALIDAD INVERSA,** en cuyo caso dadas las **parejas (a,b), (m,n), (u,v),** se cumple:

$$\mathbf{a \times b = m \times n = u \times v = k} \qquad (12)$$

"k" es la constante de proporcionalidad y se tiene.

$$\mathbf{a \times b = k} \qquad (13)$$

$$\mathbf{m \times n = k} \qquad (14)$$

Portanto axb = m x n a/m = n/b. ¿Porqué? (15)

10.14. TALLER 2.

10.14.1. La razón de dos números es 1/3. Si el menor es 4, ¿ Cuál es el mayor ?.

10.14.2. La razón de la edad de un hijo y su padre es de 1 a 3. Si la edad del hijo es 14 años, ¿ Qué edad tiene el padre ?.

10.14.3. La edad entre dos hermanos cumple la razón 5 a 2, Si la suma de las edades es 49 años, ¿ Qué edad tienen los hermanos ?.

10.14.4. Tres poblaciones de Antioquia A, B, C, guardan la siguiente relación aproximada: $\frac{A}{B} = \frac{3}{5}, \ \frac{B}{C} = \frac{5}{8}.$ Si la población de A == 45.000 habitantes, hallar las poblaciones de B y C.

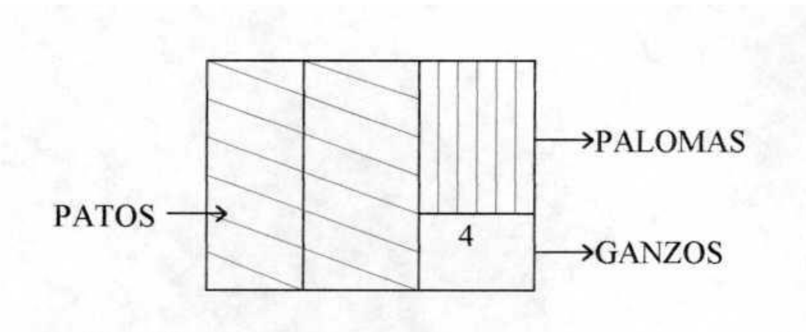
10.14.5. Una rueda dá 4.590 vueltas en 27 minutos. ¿ Cuántas dará en 2 horas y 24 minutos ?.

10.14.6. En 28 días, 12 obreros han hecho la mitad de cierta obra; si se despiden cuatro obreros, ¿ En cuánto tiempo estará terminada ?.

10.14.7. Dos números son entre sí como 2 es a 3. Si se añade 9 a cada uno de ellos, los números obtenidos son entre sí, como 3 es a 4. ¿ Cuáles son los números ?.

10.14.8. Un poste de 2 mts., en posición vertical, proyecta una sombra de 3 mts. ¿Cuál será la altura de un campanario que en el mismo instante proyecta una sombra de 25 mts.?.

10.14.9. Un corral en forma de cuadrado se distribuye uniformemente como en la gráfica. Calcular el número de patos y de palomas que hay.



10.14.10. La velocidad de un camión es de 36 Km. por hora y debe recorrer cierta distancia en 8 horas. Después de recorrer 108 Km. se ve obligado a detenerse ***VA*** de hora. Con qué velocidad deberá continuar para llegar a la hora fijada ?.

10.14.11. Las velocidades de dos trenes son 18 Kms. y 24 Kms. por hora y se dirigen en sentido contrario. Un viajero del primer tren observa que el segundo ha tardado 13 segundos en pasar delante de él. ¿Cuál es la longitud del segundo tren?.

10.14.12. La diferencia entre dos números es 55 y su razón es 3 a 8. ¿ Cuáles son los números ?.

10.14.13. Por una carretera paralela a un ferrocarril, un automóvil que lleva una velocidad de 40 Km. por hora, encuentra un tren en dirección contraria con velocidad de 24 Km. por hora; el tren tiene 180 mts. de largo. ¿ Cuántos segundos tardan los dos vehículos en pasar el uno frente al otro ?.

10.14.14. 7.600 Kgr. de trigo duran seis meses a una guarnición de 1.500 hombres. Si se aumenta la guarnición en 500, y el trigo en 4.600 Kgr. ¿ Cuánto tiempo durará la provisión ?.

10.14.15. 40 Kgr. de agua salada contienen 3 ½ Kg. de sal; ¿ Qué cantidad de agua dulce habrá que agregarle para que la nueva mezcla tenga 1 Kgr. de sal por 30 de agua salada ?.

10.14.16. Un obrero tarda 22 días en levantar un muro de 24 mts. ¿ Cuántos días tardarán siete obreros en levantar otro muro de 56 mts. ?.

10.14.17. Resolver el problema anterior, sabiendo que la dificultad en las obras tiene la razón 6 a 5.

10.14.18. Si 12 bueyes consumen 3 1/3 de acres de pasto en 4 semanas, y 21 bueyes consumen 10 acres del mismo pasto en 9 semanas. Averiguar cuántos bueyes se comen 24 acres en 18 semanas (Newton).

Observación: El profesor completará el presente taller con otros problemas de tasa de interés y repartos proporcionales directos e inversos.

11. ESTRATEGIA DE INTERVENCION 2.

-Introducción.

Mediante el experimento con la balanza, el estudiante tuvo la oportunidad de hacer tablas de datos, representar los datos en el plano cartesiano, comparar productos y cocientes entre los datos, comparar las diferentes curvas realizadas en papel milimetrado, acompañarse de la teoría y ejemplos que proporciona el anexo 1, y con la asesoría del profesor resolver problemas y ponerlos en común, enriqueciendo en el colectivo su trabajo. Por lo tanto se espera que tenga conceptos claros y con significado propio de: **Razón, razón inversa, proporción, proporción directa, proporción inversa, proporción compuesta** y **repartos proporcionales,** entre otros.

Con el fin de hacer más duraderos dichos conceptos, (refinar los conceptos de la proporcionalidad) haremos otro ordenamiento de ellos, pero esta vez utilizando como mediadores dos triángulos equiláteros y la traslación de segmentos congruentes.

Las actividades que se desarrollan a continuación requieren de un adecuado uso de regla, compás y transportador; pueden ser utilizados otros instrumentos, sin embargo, el propósito es, además, recuperar la utilización de estos instrumentos. Se espera que para tal propósito el profesor no escatimará esfuerzos.

En lo que respecta a la intervención con los triángulos semejantes, se debe señalar que la culminación del período escolar no permitió terminar la intervención y en consecuencia no se hizo la evaluación correspondiente, no obstante se relatarán algunos logros percibidos en clase.

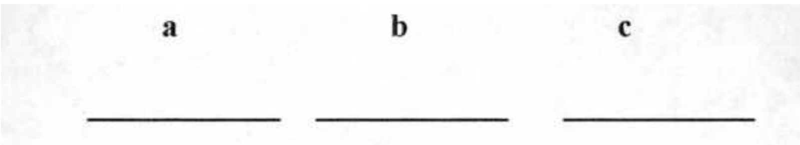
Los estudiantes accedieron sin dificultad a realizar algunas construcciones elementales: Trazado de perpendiculares, paralelas, triángulos y algunos problemas del taller 3. Causó dificultad la sección (11.2) en lo referente a la deducción lógica de que

CC'= BB' y también ***CB' = a + n.*** Esta parte de la intervención hace pensar que se corre riesgo (puede producir retrocesos cognitivos) con la geometría racional en este período de desarrollo. Sin embargo, el proceso de inducción utilizado al prolongar cada uno de los lados del A ABC una longitud x sección (11.1) permitió a los alumnos concluir, intuitivamente, que el nuevo triángulo también es equilátero, al igual que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, y que un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes. La comprensión de la sección (11.4) se hizo básica para dar sentido al modelo de la proporcionalidad.

11.1. ACTIVIDAD2.

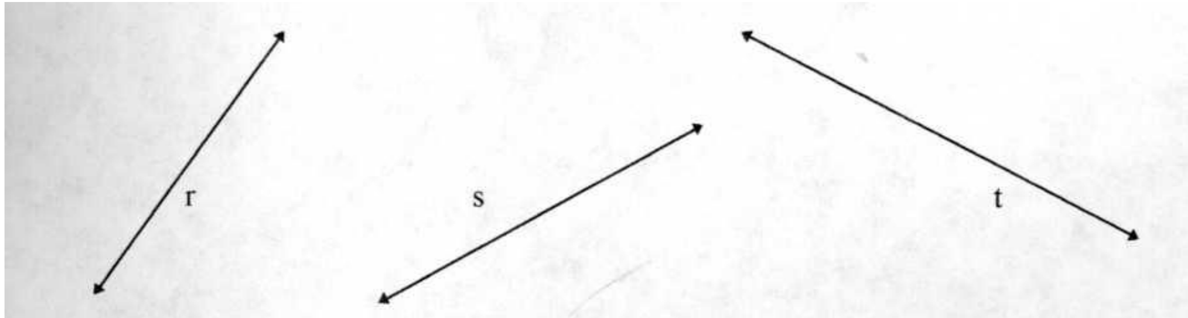
- **Construcción del triángulo con regla y compás.**

Consideremos los segmentos **a, b, c** de igual medida.



Gráfica (13)

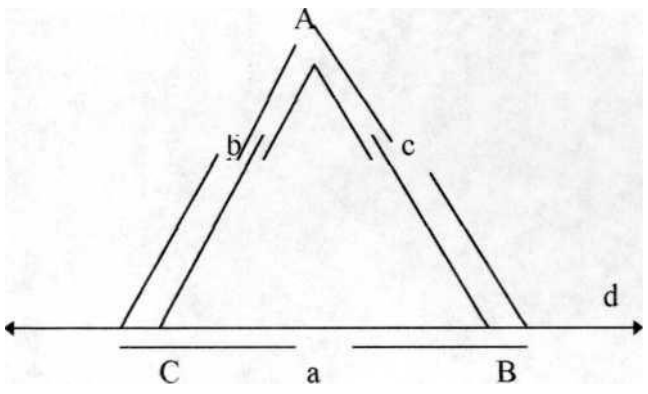
- ¿Cómo se puede trasladar los segmentos **a, b, c** sobre las rectas **r, s, t ?.**



Gráfica (14)

Ver sección (16.1) del anexo 1.

- Sobre una recta **d** trasladar el segmento **a** y en los extremos de éste los segmentos **b y c** de tal manera que se forme un triángulo. AABC equilátero. Ver sección (16.3.1) del anexo 1.



Gráfica (15)

- Con un transportador medir los ángulo ^ A, B, 4^ C y escribir las observaciones. Se recomienda repetir esta medición con otros triángulos equiláteros y sacar conclusiones.

- Determinar la suma de los ángulos interiores del triángulo AABC.

- Cuanto mide la suma de los ángulos exteriores del triángulo equilátero AABC?,

Observación.

Para determinar la suma de los ángulos interiores de un triángulo, puede pedírsele al estudiante que construya un mínimo de 5 triángulos no equiláteros, que mida con el transportador sus ángulos, que haga una tabla con las sumas en cada uno, que observe los resultados y que encuentre el promedio de las sumas.

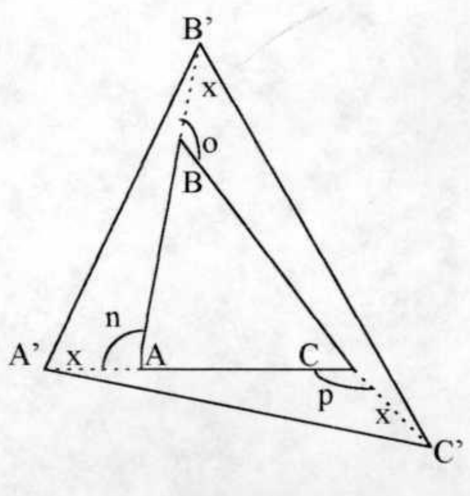
Debe concluir que “La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°”, y también que “Los ángulos de un triángulo equilátero son iguales y miden 60 grados (60°)”. En los mismos triángulos, pedir que se repita la actividad pero ésta vez para los ángulos exteriores. Debe concluir que “la suma de los ángulos exteriores es 360°”.

Es posible aprovechar los mismos triángulos y con actividades similares concluir que “Un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes”.

Estas conclusiones son intuitivas. Las demostraciones son objeto de estudio en otro curso.

Ver las demostraciones en el anexo 1.

- Prolongar los lados del triángulo AABC un segmento x de tal manera que al unir las prolongaciones del AABC quede el triángulo AA'B'C'. Gráfica (16).



Gráfica (16)

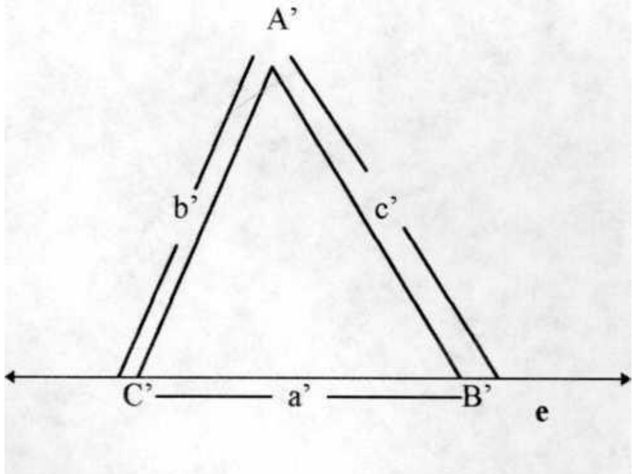
El profesor inducirá al estudiante a que repita esta construcción utilizando un AABC equilátero de distinta medida y así tener una visión intuitiva de la relación entre los nuevos lados y los nuevos ángulos.

- ¿ Como son los lados y ángulos de los nuevos triángulos ?.

Demuestre que el triángulo AA'B'C' también es equilátero. El profesor y estudiantes intentarán una demostración que esté al alcance del grupo. En su defecto ver la demostración esbozada en la sección (1.17.1.) del anexo 1.

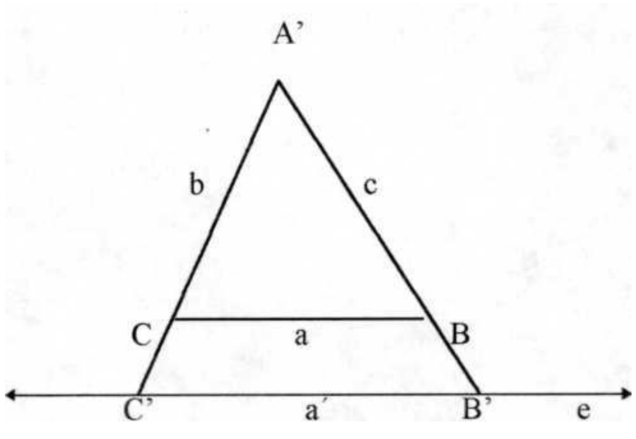
- Escriba la relación que encuentre entre los lados de los triángulos AABC y AA'B'C' y también la relación entre los ángulos. Explique.

- Trasladar el triángulo AA'B'C' sobre una recta dada e como lo muestra la gráfica (17).



Gráfica (17)

Sobre el triángulo AA'B'C' traslada el triángulo AABC de tal forma que coincidan los ángulos Z A y L k\ como en la gráfica (18).



Gráfica (18)

- Logros esperados.

Con la respuesta a los interrogantes de la actividad (2) el profesor generará una puesta en común con el objeto de cualificar los conceptos que el cuestionario sugiere. Tales conceptos son:

- Construcción de un triángulo dados sus tres lados, medición de ángulos, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, ángulo exterior, la suma de los ángulos exteriores es 360°, todo ángulo exterior es la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

Para lograr significación en estos conceptos el profesor debe repetir con otros triángulos la actividad. No se debe descartar totalmente la construcción lógica, y aunque el objeto de esta propuesta no es la demostración, hay algunas en el anexo que están perfectamente al alcance del estudiante del grado séptimo con unos aportes mínimos de la cultura geométrica.

11.2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS.

Asumiendo que el AABC es equilátero por construcción y que también es equilátero el AA'B'C'por ejercicio de la actividad (2). Ver anexo 1:

i) El estudiante, asesorado por el profesor demostrará que CC’ =BB’.

- Demostración por diferencia.

$\overline{CC'} = \overline{A'C'} - \overline{A'C}$ ó $\overline{CC'} = \mathbf{b' - b}$. Por qué?

$\overline{BB'} = \overline{A'B'} - \overline{A'B}$ ó $\overline{BB'} = \mathbf{c' - c}$. Por qué?

Como **b = c y b’ = c’** por construcción de gráfica (15) y ejercicio de la actividad (2), se tiene que $\overline{CC'} = \overline{BB'}$.

Si se hace $\overline{CC'} = n$ se puede escribir que $\overline{A'B'} = c + n$ y que $\overline{A'C'} = b + n$.

ii) Demostrar que $\overline{C'B'} = a + n$. Una forma de demostrar que $\overline{C'B'} = a + n$, es tomar:

$$\overline{C'B'} = a + k \qquad (1)$$

y probar que $k = n$.

Se sabe que $\overline{A'C'} = b + n$ (2) probado en (i) y que $\overline{A'C'} = \overline{C'B'}$ por ejercicio de la actividad (2).

Al restar miembro a miembro (2) de (1), se tiene:

$0 = (a + k) - (b + n)$, por lo tanto

$b + n = a + k$ (*), como $a = b$

se concluye que $n = k$

por lo tanto $\overline{C'B'} = a + n$.

Observación. La expresión (*) $b + n = a + k$ es equivalente a:

$$b - k = a - n. \text{ Justificar} \qquad (16)$$

La igualdad (16) $b - k = a - n$, se llama **proporción aritmética** o por diferencia o equidiferencia. El profesor orientará a los alumnos sobre la proporción aritmética.

- Logros esperados.

Si se divide miembro a miembro las expresiones (1) y (2) de (ii) se podrá probar que C'B' = a + n. Recordemos que en (ii) se demostró dicha igualdad por diferencia.

Se sugiere al profesor asesorar el trabajo de los alumnos. Se propone el siguiente esbozo.

Al dividir miembro a miembro (1) entre (2) de (ii).

$$(\overline{C'B'} / \overline{A'C'}) = (a + k)/(b + n) \qquad (17)$$

$b + n = a + k$. Por qué ?

Y al ser $a = b$ se tiene que $n = k$

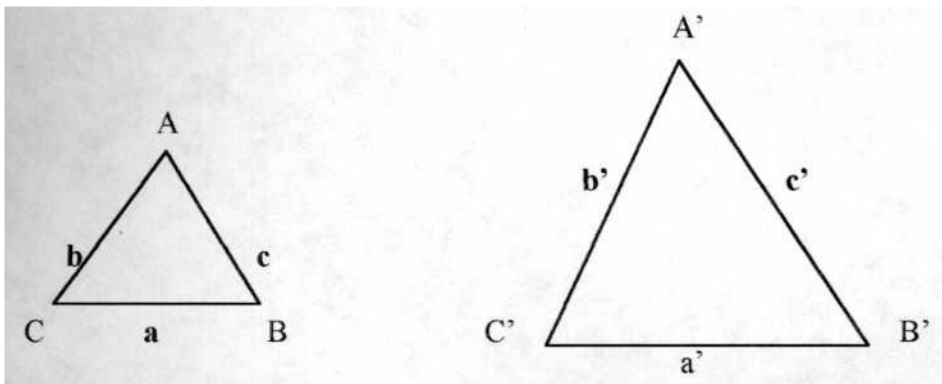
$$\therefore \ \overline{C'B'} = a + n$$

La igualdad (17) $\overline{C'B'} / \overline{A'C'} = (a + k) / (b + n)$ se llama **proporción geométrica** ó por cociente ó equicociente. Ver sección (1.11) anexo 1.

11.3. ACTIVIDAD 3. - Semejanza.

Considere los triángulos antes construidos AABC y AA’B’C’, equiláteros.

1. Relacione sus ángulos y establezca una correspondencia entre ellos



Gráfica (18a) Gráfica (18b)

2. Establezca con la asesoría de su profesor razones iguales por diferencia y por cociente entre los lados de los triángulos.

Por diferencia $\overline{A'C'}$ - **b = n** ó **b’ - b = n**

$\overline{A'B'}$ - **c = n** ó **c’ - c = n**

$\overline{B'C'}$ - **a = n** ó **a’ - a = n**

Por cociente **a / a’ = k, b / b’ = k, c / c’ = k**

Lo que significa que al comparar los lados de los triángulos AABC y AA’B’C’ por diferencia o por cociente se tiene una misma razón y por tanto **los lados son proporcionales** (segunda condición de semejanza entre triángulos). La primera condición tiene que ver con la igualdad en ángulos correspondientes.

- Logros esperados para triángulos equiláteros.

Se concluye que siempre que dos triángulos equiláteros tengan ángulos correspondientes iguales $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ y lados ordenadamente proporcionales; dichos triángulos **son semejantes**[30]. Los lados de los triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ también se pueden comparar por cociente y queda:

$$\mathbf{a'/a = b'/b = c'/c = k}$$

Se recuerda que **k** es el coeficiente o razón de proporcionalidad. **n.4.**

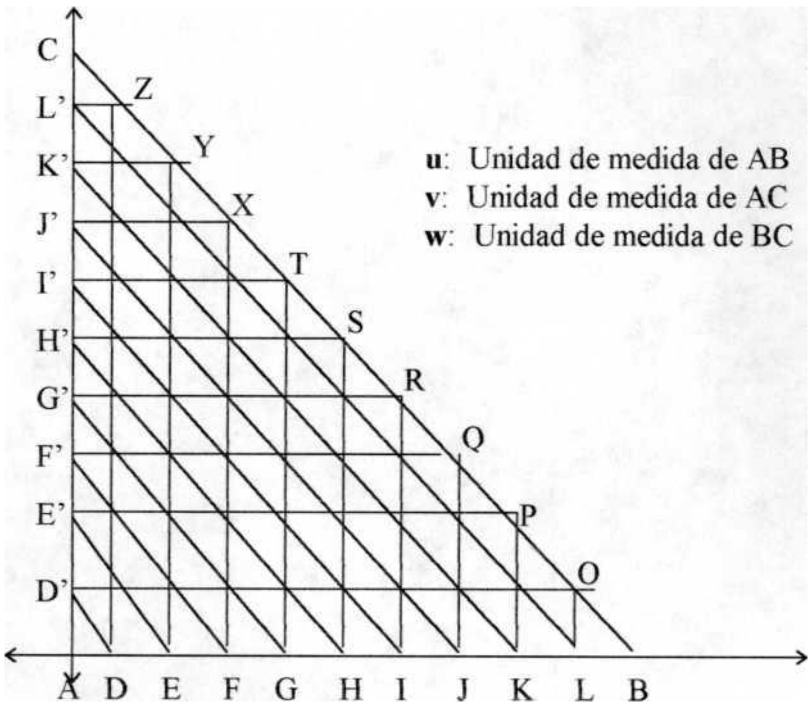
11.4 ACTIVIDAD 4.- Razón por cociente.

El alumno en una hoja de papel cuadriculado traza una recta "P", en ella determina un segmento AB de 10 unidades de longitud (cada unidad es un lado de un cuadro de la hoja). Por uno de los extremos del segmento, trazar una perpendicular s. Ver sección (1.15.4) del anexo 1, y en ella determinar un segmento AC de longitud 20 unidades, cerrar luego el ángulo recto y quedará el triángulo AABC (ver Gráfica (19)).

[30] DAWINS Moise, Geometría moderna, Addison, Wesley, Estados Unidos, 1966.

Con la unidad de medida “u” y haciendo uso del compás divide a AB en diez partes iguales, y designarlos con una letra mayúscula. Por cada división trazar segmentos de

rectas desde AB hasta AC, cada uno de ellos paralelos a CB, Ver sección (1.15.5) del anexo 1.



Gráfica (19)

Similarmente, desde cada uno de los puntos en que quedó dividida AC, trazar

segmentos de recta que corten BC, todos ellos paralelos a AB , designando los puntos de corte con letras mayúsculas.

Se pide al estudiante que escriba las observaciones que le merezca el gráfico (19).

Que escriba las relaciones que observe entre las partes de AB, AC, BC. Que conjeture sobre las unidades de medida, que las designe con una letra distinta, que las compare etc.

Que nombre un mínimo de 20 triángulos semejantes entre sí de los tantos que se forman al trazar por los puntos de ***AB*,** paralelas ***di AC y*** que cortan a ***CB*** y que intente verificar algunas semejanzas.

Después de dar al estudiante posibilidad de hacer conjeturas, se hará una plenaria donde se extraerán conclusiones.

- Logros esperados.

De la actividad 4 se puede esperar que el estudiante por sus propios medios haya dado respuesta a muchos de los siguientes interrogantes:

- En cuántas partes quedaron divididas $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$?

- Al comparar entre sí las partes de $\overline{AB}$, las de $\overline{AC}$, y las de $\overline{BC}$, usando como instrumento de medida el compás, qué se concluye ?.

- Si llamamos **u** la unidad de medida de $\overline{AB}$, **v** la unidad de medida de $\overline{AC}$, **w** la unidad de medida de $\overline{BC}$, y m ($\overline{AB}$) = AB, a la medida del segmento $\overline{AB}$ (similar notación de medida para todo segmento), se tiene:

m ($\overline{AB}$) = 10 u, o lo que es lo mismo AB = 10 u

m{AC) = 10 v, o lo que es lo mismo AC= IO v

m ***{BC)*** = 10 w, o lo que es lo mismo BC = 10 w.

- Son iguales **u, v**, **w ?**
- Si **u** mide un lado de un cuadro de tu hoja cuadriculada, puedes comparar a v y **w** respecto a los cuadros de tu hoja?

El estudiante debe observar que w > v **>u,** además que, v = 2.u ó **u** = ½ .v.

- **Observación:** La unidad de medida **u** además de dividir a ***AB*** en 10 partes iguales. produce con la relación **ser paralela a,** el efecto de dividir a ***Al:*** en otras 10 partes iguales, de dimensión **v,** y a la vez el efecto de dividir a ***CB*** en otras 10 partes iguales de dimensión **w,** (unidades de medida **w).**

Esta observación nos permite afirmar que hay una relación biunívoca, que a cada **u** de ***AB*** corresponde un **v** de ***AC*** y viceversa, también se observa que a cada **u** de ***AB*** corresponde un **w** de ***l:B*** y viceversa. Similar comparación puede hacerse entre la unidad de medida **v, w** y sus correspondientes efectos en ***AC*** y en ***CB*** respectivamente. En otras palabras estamos afirmando que el efecto que produce n

sobre ***AB*** es el mismo que produce **v** sobre ***AC y es*** el mismo que produce **w** sobre ***BC*** , a pesar de ser ***u*** ^ ***v*** ^ ***w.***

11.5. ACTIVIDAD 5 – Proporción

Se pide al estudiante que efectúe cocientes o razones entre las medidas, respecto de una misma unidad, de los lados de los triángulos semejantes que pueda formar en la gráfica 19. Por ejemplo:

$$\frac{AC}{AE'} = \frac{10v}{2v} = 5 \qquad \frac{AB}{AE} = \frac{10u}{2u} = 5$$

$$\frac{AH'}{AG'} = \frac{5v}{4v} = \frac{5}{4} \qquad \frac{AH}{AG} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{AD'}{D'E'} = \frac{1v}{1v} = 1 \qquad \frac{AD}{AF} = \frac{1u}{3u} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{AF'}{AD'} = \frac{3v}{1v} = 3 \qquad \frac{AE}{AE} = \frac{2u}{2u} = 1$$

$$\frac{AG'}{AE'} = \frac{4v}{2v} = 2 \qquad \frac{AF}{AD} = \frac{3u}{1u} = 3$$

$$\frac{AC}{AD'} = \frac{10v}{1v} = 10 \qquad \frac{AB}{AD} = \frac{10u}{1u} = 10$$

$$\frac{AC}{AG'} = \frac{10v}{4v} = \frac{5}{2} \qquad \frac{AB}{AH} = \frac{10u}{5u} = 2$$

Cada uno de estos cocientes se llama razón, por cociente o simplemente razón; así por ejemplo:

$\frac{AC}{AE'} = 5$, se lee la razón entre m ($\overline{AC}$) y la m ($\overline{AE'}$) es cinco. Recordar que al numerador AC se le llama **antecedente** y al denominador AE' **consecuente.**

- Comparando las razones de la columna izquierda y derecha, el estudiante puede hacer una clasificación por igualdad como la siguiente AC/AE' = AB/AE o 10v/2v = 10u/2u y como **v = 2u,** entonces 20u/4u = 10u/2u (18).

Se recuerda que cada pareja de razones iguales se llama **proporción** y puede también ser escrita en forma horizontal:

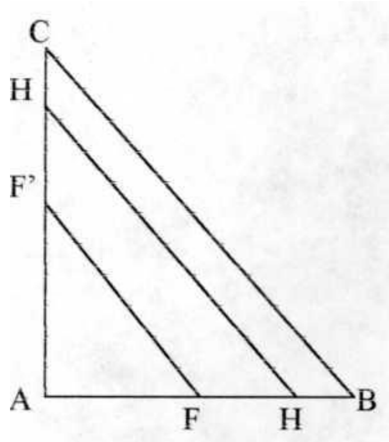
$$AC{:}AE' = AB{:}AE \text{ ó } 20 : 4 = 10 : 2 \qquad (19)$$

- Se puede pedir al estudiante que haga otra columna de cocientes o razones con la m($\boldsymbol{BC}$), y forme proporciones con la m ($\boldsymbol{AB}$) y m ($\boldsymbol{AC}$).

11.6. TEOREMA DE THALES Y ALGUNAS APLICACIONES.

De la actividad 4, y la actividad 5, el profesor motivará al grupo en la redacción y posiblemente la demostración del teorema de Thales. La orientación que ofrece el siguiente bosquejo, puede ser de gran ayuda.

Consideremos tres de los tantos triángulos de la figura (19) por ejemplo: AAFT; AAH'H; AACB. Con ellos se construye una figura. Ver gráfica 20.



Gráfica (20)

Por construcción se tiene que FF / / HH' / / BC. Procediendo luego como en la actividad 5, sección (11.5) se puede concluir, al establecer razones homogéneas entre los lados del triángulo que:

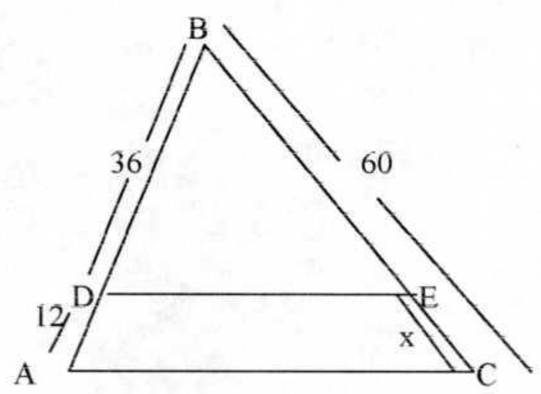
$\frac{m(\overline{AC})}{m(\overline{AF'})} = \frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AF})}$, o lo que es lo mismo AC : AF' = AB : AF esto es, los segmentos

FF, HH' determinan en AB y AC segmentos proporcionales.

El esbozo anterior constituye el teorema de Thales: "Varias paralelas que cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales". Ver la demostración en la sección (1.16) anexo 1.

El profesor puede seguir explorando algunas aplicaciones de éste importante teorema cuyos enunciados y demostraciones están en el marco teórico, secciones (1.16.1), (1.16.2), (1.16.3) del anexo 1.

- APLICACIÓN.



Gráfica (21)

Hallar el valor de **x** en ΔABC si $\overline{DE} // \overline{AC}$.

Solución.

$$\frac{m(\overline{AB})}{m(\overline{AD})} = \frac{m(\overline{BC})}{m(\overline{EC})}, \text{ esto es:}$$

$$\frac{48}{12} = \frac{60}{x}, \quad luego \quad x = \frac{12x60}{48} \quad \therefore \quad x = 15$$

El profesor propondrá otros problemas.

11.7 ACTÍVÍDAD6 – Relaciones entre las unidades de medida u y v

En la observación de la sección (13.4), se estableció una analogía entre las unidades de medida u, v y w; afirmando que el efecto que produce u en ***AB*** es el mismo que producen v y w en ***BC y AC*** respectivamente. Nos proponemos ahora construir su gráfica cartesiana sabiendo que:

u = un lado de un cuadro de tu hoja v = 2 lados
w = ? ¿puedes calcularlo?.

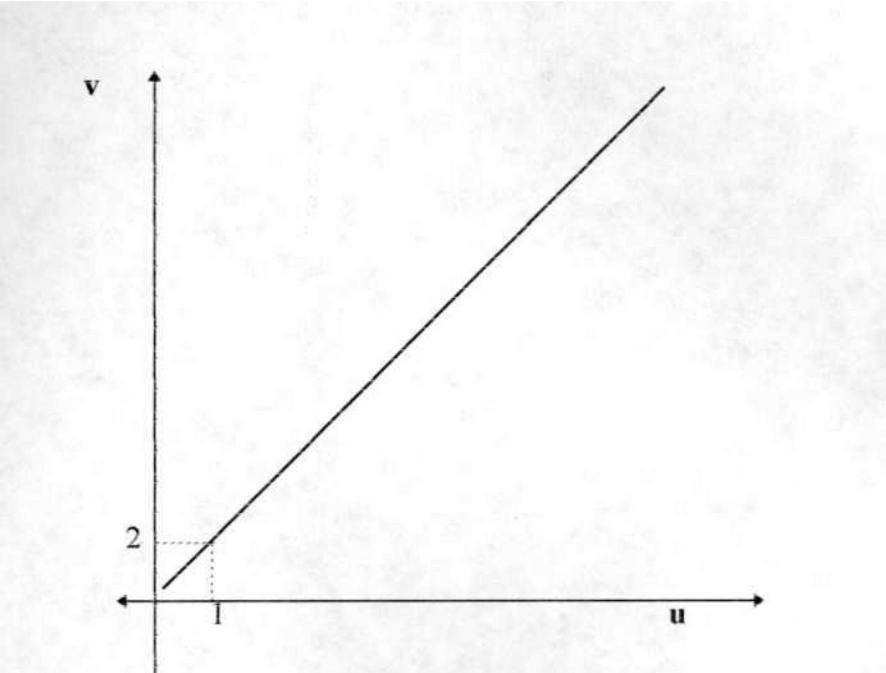
- Completar la tabla

u	1	2	3	-	4 1/2
v	2	4	-	7	-

Tabla 9

- Representar la tabla 9 en el plano cartesiano.

Al ubicar en el plano cartesiano los puntos que corresponden a las parejas de la tabla 9. Se observa que son puntos de una recta similar a la de la gráfica (22).



Gráfica (22)

- Si en ¡a tabla (9) se divide u entre v, se observa que a = ***Vi*** v, luego el cociente entre u y v es constante. Verificar ésta información.

Se concluye de la actividad que mu / mv = k, k = Constante

Sabemos desde las expresiones (7), (11), (15), (18) y (19) que dos razones iguales forman una proporción; por lo tanto algunas proporciones que se derivan de la tabla 9 son:

Completa las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{3\,\frac{1}{2}}{7}$$

$$\frac{4\,\frac{1}{2}}{?} = \frac{2}{?}$$

$$\frac{4}{2} = \frac{11}{?}$$

$$\frac{7}{?} = \frac{9}{?}$$

Escriba otras.

A partir de estos ejemplos el estudiante puede abordar con éxito las propiedades de las proporciones, ya que se espera ha interiorizado la comparación cualitativa y cuantitativa de magnitudes homogéneas y heterogéneas, lo que le permite establecer analogías de alto nivel (precisión matemática). Ver la proporcionalidad como razonamiento analógico en la sección (9.3) del marco teórico. También podrá resolver problemas de magnitudes directa e inversamente proporcionales, proporcionalidad compuesta, repartos proporcionales, directos e inversos y otras aplicaciones como regías de interés y de mezclas (ver bibliografía).

El profesor motivará a los estudiantes en la interpretación de expresiones conocidas por ellos, por ejemplo:

- Dado un rectángulo de base b y altura h se sabe que su área está dada por la expresión A = b x h.

¿Cómo varía el área al variar b o h permaneciendo la otra constante?.

¿Cómo varía h al aumentar b, permaneciendo A constante?.

Ver problemas del taller 1.

- Plantear estos y otros interrogantes para las expresiones:

$$l = 2.\pi.r$$
$$A = \pi.r^2$$
$$A = \frac{bxh}{2}$$
$$A = \frac{pxa}{2}$$
$$V = \pi.r^2.h$$

y resolver problemas con ellas.

12. PRUEBA FINAL (P.F.)

Ver la prueba final en el anexo 2.

12.1. OBJETIVOS DE LA PRUEBA FINAL.

- Determinar cuantitativamente los progresos en el cálculo algorítmico logrados por el grupo experimental (ge) en relación con el grupo control (ge).

- Determinar los progresos del (ge) en lo que atañe a la interpretación y solución de problemas de aplicación a la proporcionalidad.

- Considerar las causas de los no logros o logros de una frecuencia baja, y en lo posible sugerir y hacer correcciones a la propuesta pedagógica.

12.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS DE LA PRUEBA FINAL (P.F.).

Se varió la prueba final en relación a la prueba inicial por lo siguiente: La prueba inicial, entre otras cosas, buscaba determinar temas de apoyo, esto es, conocimientos que ha de poseer el estudiante y que le permiten un aprendizaje significativo de la proporcionalidad, y en su defecto, abrir espacios adecuados en la intervención para llenar estos vacíos. Por su parte la prueba final pretende determinar progresos en la conceptualización y aplicación de la proporcionalidad. Es por esto que se excluyen algunos items, y se conservan en ella los fundamentos de la proporcionalidad.

Al observar la (P.l.) se concluye que el objetivo es en esencia resolver problemas de proporcionalidad directa, inversa y compuesta en el conjunto de los números racionales. Como puede verse, la prueba final en nada contradice el objetivo central de la (P.L), y que además, se complementa con una aplicación de sumo interés, como es el tema de los repartos proporcionales directos e inversos que no fueron explorados en la (P.L) pero que al juzgar por los resultados del (ge) hubiesen sido muy bajos. En cuanto a los resultados se pueden hacer las siguientes comparaciones.

El problema (1) mejoró en su solución substancialmente respecto a la prueba inicial como lo muestra el resumen del cuadro 1,

	P.I.	P.F.
gc	35%	30%
ge	25%	100%

CUADRO 1

Los resultados muestran superado el problema del número mixto 3^4 en el (ge).

El 80% del (ge) evaluado resuelve el problema por el método de las proporciones, esto es:

- Dispone los datos homogéneamente en columnas.
- Busca la dirección proporcional.
- Establece una proporción.
- Encuentra el valor de la incógnita.

El restante 20% apela al método de reducción a la unidad.

El problema (2) es una proporción inversa como lo fue el problema (2.1) de la (P.L2.1). Los resultados pueden verse en el cuadro.

	P.I.	P.F.
gc	28.7%	25%
ge	31.2%	70%

CUADRO 2

En cuanto al (ge) el 85% del (ge) evaluado lo resuelve por proporciones y el 15% por el método de reducción a la unidad.

El problema (3) permite registrar la evolución que el (ge) muestra en materia de solución de problemas de proporcionalidad compuesta. Veamos el cuadro que sigue, con una aclaración: Estos porcentajes corresponden al número de estudiantes que respondieron al menos uno de los niveles del cuadro.

	P.I.	P.F.
gc	12.5%	10%
ge	10%	60%

CUADRO 3

Retomando el problema (3) el 60% de los aciertos del (ge) amerita una comparación adicional. Como se dijo en la (P.I.3), ningún estudiante logró completar el cuadro en su integridad, en tanto en la prueba final un 40% lo lograron.

	P.I.	P.F.
gc	0%	0%
ge	0%	40%

CUADRO 4

A continuación se presenta el problema (2.3) que es un reparto proporcional directo donde los aciertos son: 0% y 90%. El 60% del (ge) evaluado lo resuelve por reducción a la unidad y el restante 40% por proporciones.

Finalmente se presenta el problema (2.4) cuyos datos son ios del problema (2.3), pero para resolverlo en forma inversamente proporcional a las edades. Los aciertos son del 0% y 70% para los (ge) y (ge). El 60% ío resuelve por reducción a la unidad y el 40% por proporciones.

- CONCLUSIONES.

- Las pruebas iniciales dieron herramientas para cualificar la propuesta, ayudando a estructurar la red conceptual y enfatizar conceptos indispensables para conducir un aprendizaje significativo.

- Con los resultados de las (P.I.) se afianzó el criterio de abordar el razonamiento proporcional desde un nivel cualitativo en un principio, esto es, el estudiante ha de anticipar el comportamiento proporcional de las magnitudes, aspecto que permite pasar luego al nivel cuantitativo con más probabilidad de éxito.

- Se observa que las operaciones con fracciones y las representaciones gráficas de problemas, siguen siendo barreras que impiden un mejor acceso del estudiante al razonamiento proporcional cuantitativo.

- La prueba final permite comparar cualitativa y cuantitativamente los progresos del (ge). Los resultados sugieren bondades en la propuesta de intervención, al juzgar los resultados que dieron lugar a los porcentajes consignados en los cuadros de ésta sección.

- Respecto a la solución de problemas, se observa;

- Los estudiantes eligen mayoritariamente el método de las proporciones para los problemas de dirección proporcional directa e inversa y la minoría por el método de reducción a la unidad. Para la proporción compuesta el 100% eligen el método de las proporciones.
- Para problemas de reparto proporcional directo e inverso, la mayoría de los estudiantes eligen el método de reducción a la unidad y la minoría restante, el método de las proporciones.

13. DISCUSIÓN

Como se sabe, el núcleo de este trabajo es la propuesta de acompañamiento, los demás elementos son accesorios sin los cuales la propuesta carece de cientificidad y de validez.

El lector ha podido observar cómo se va **ordenando** la información que el juego con la balanza suministra, lo que ayuda, a nuestro modo de ver, a jerarquizar una red de conceptos que, en gran medida obedece a los requerimientos de la cultura en materia de proporciones, y sin embargo ausculta algunos cambios que son de interés en el proceso cognitivo de la proporcionalidad. Se resaltarán algunos.

No es necesario abrumar al estudiante con términos propios del tema, para que él pueda resolver problemas elementales. La habilidad casi innata de comparar magnitudes y una clara regla de correspondencia ayuda a tal propósito; esto se observó en la prueba inicial parte **uno,** donde el numeral (1.1) tuvo aciertos de un 70% en promedio de los grupos experimental y control, sin ningún tratamiento previo de las proporciones. Por lo tanto se sugiere al docente canalizar esta competencia casi congénita del estudiante, (como saber previo al esquema de la proporcionalidad) en la solución de problemas elementales.

Otro aspecto importante es el cambio cognitivo que la interpretación de gráficas y de tablas de valores produce en el adolescente. El estudiante da cuenta de la eficacia, de la comparación de gráficas y tablas, cuando clasifica magnitudes correlativas y proporcionales, directas e inversas en ambos casos, y logra luego definir con precisión dichos conceptos. Ello produce economía en tiempo y esfuerzo como se observó cuando el grupo ante la solución de un problema, no adoptaba una actitud vacilante, y por el contrario, determinaba la dirección proporcional de las magnitudes y a continuación tomaba la decisión de multiplicar o dividir las cantidades que están en correspondencia según el comportamiento proporcional anotado.

Durante el acompañamiento se utilizaron para resolver problemas los métodos de reducción a la unidad y de proporciones, buscando que el estudiante adquiriera dominio de ambos métodos. Tal como se muestra en el análisis de resultados de la prueba final, los estudiantes muestran preferencia por el método de proporciones, cuando se trata de magnitudes directas o inversas, pero al resolver problemas de repartos proporcionales la predilección por el método de reducción a la unidad marca la diferencia. Véase el siguiente cuadro (5).

	PROPORCIONES	REDUCCION A LA UNIDAD
Regla de tres directa	60%	40%
Regla de tres inversa	65%	35%
Repartos proporcionales	30%	70%

CUADRO 5

Finalmente quiero invitar a los docentes a estructurar los temas de clase mediante la utilización de mediadores: esto hará que los aportes de la psicología cognitiva y el constructivismo, tan de moda hoy, no se queden en mera teoría.

14. CONCLUSIONES

La conceptualización del modelo de la proporcionalidad en adolescentes de 11 a 13 años aproximadamente se hace más eficaz si se utiliza un mediador, dado que estos jóvenes aún no han consolidado el paso del pensamiento concreto al formal. El mediador permite llegar a los saberes espontáneos de éstos, (situación que ha de aprovechar el orientador) para irlos contrastando hasta acomodar un nuevo conocimiento. De hecho cualquier instrumento físico no sirve de mediador, la selección de uno, requiere una cuidadosa planeación del tema.

Cualificada la competencia que faculta al alumno para resolver problemas sencillos, argumento expuesto en la discusión, se avanzó en la solución de problemas más complejos, no solo por pasar del conjunto $\boldsymbol{N}$ de los números naturales al conjunto $\boldsymbol{Q}$ de los números racionales, sino, por incluir reversibilidad doble directa e inversa (mixta), con resultados satisfactorios. (Ver análisis de resultados de la prueba final). Ha de estar el acompañante atento a no causar retrocesos cognitivos, una buena conducción del aprendizaje motivará a la superación de dificultades y así se logran avances significativos en los procesos algorítmicos. Con estos progresos cognitivos se podrá intentar formalizar algunas propiedades básicas o por lo menos su aplicación.

En síntesis, puede afirmarse que la propuesta de intervención pedagógica cualificó los saberes previos del grupo experimental respecto al tema de la proporcionalidad, en varios niveles, a saber:

Se verbaliza con significado propio la expresión $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ o $\frac{a_1}{b_2} = \frac{a_2}{b_1}$, se diferencian sus elementos y se realizan cálculos. Se resuelven problemas de proporción directa, inversa, compuesta y repartos proporcionales. Finalmente algunos estudiantes alcanzan a deducir lógicamente el álgebra de las proporciones (propiedades).

El tema de la proporcionalidad, como se ha podido observar en el trabajo, tiene una red conceptual que engloba muchos otros contenidos matemáticos, y de ahí su importancia. Entre los temas de apoyo sobresalientes podemos citar: Los números naturales y racionales con sus respectivas operaciones, ecuaciones lineales y cuadráticas, la medición directa e indirecta, las relaciones (correspondencia), funciones y las respectivas gráficas, entre muchos otros.

En el campo de la geometría, permitió hacer construcciones elementales con regla y compás, el concepto de razón, permite en una forma natural, dar sentido a las relaciones trigonométricas y se propende por que el teorema de Thales sea asimilado y aplicado en la solución de problemas. Se enfatiza al lector, que la propuesta de intervención (2) de carácter geométrico no fue evaluada.

Una vez elaborado significativamente el concepto de proporción, otras disciplinas como la Biología, la Física, la Economía, etc. tienen en este concepto un excelente punto de apoyo. Así por ejemplo:

Si V = a.t: La velocidad es función de la aceleración y el tiempo, entonces

$$\frac{V}{a} = t \quad y$$
$$\frac{V}{t} = a$$

Lo que se interpreta diciendo que:

(a, t) son magnitudes inversamente proporcionales, en tanto (v, a), (v, t) son magnitudes directamente proporcionales.

Interpretaciones como la anterior, permiten que el estudiante comprenda y asimile muchas formulaciones de las ciencias aplicadas y de las mismas matemáticas.

15. BIBLIOGRAFÍA GENERAL

15. BIBLIOGRAFÍA GENERAL

BARRON R. Angela, Constructivismo y desarrollo de aprendizajes significativos, Rev. Española de Educación, Nº 294, 1991.

BELDA E., TROCONIZ de Fd. A, Análisis Algebráico, Viscaina Bilbao, 1961, p. 143.

BRUÑO G.M., Aritmética, Bedout, Medellín, 1954.

C. GATTEGNO y otros, El material para la enseñanza de las matemáticas, Aguilar.

CAMPBELL T. Donald y STANLEY C. Julián, Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social, Amarrortu, Buenos Aires, 1970.

CARDONA V. Arturo, Geometría, Bedout, Medellín.

CARRETERO Luz, La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas, Rev. Anuario de psicología, Barcelona, N° 42, 1983.

CARRETERO Mario, Constructivismo y educación, Edelvives.

CASTORINA A. y PALAU Gladys, Introducción a la lógica operatoria de Piaget, Paidos, Barcelona, 1982.

COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional (MEN), Marcos generales de los programas curriculares, imprenta Departamental. de Antioquia, Medellín, 1984.

---------- Propuesta de programa curricular séptimo grado, educación básica, Bogotá, 1989.

---------- Propuesta de programa curricular noveno grado, educación básica, Bogotá, 1991.

CORRAL A. Asincronías en el desarrollo del pensamiento formal, Rev. Estudios de psicología N° 37, Madrid, 1989.

----------- El aprendizaje de la estratégia de comparación de proporciones, Rev. Infancia y aprendizaje, N° 37, Madrid, 1987.

----------- La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional, Rev. Infancia y aprendizaje, N° 35, Madrid, 1986.

DAWINS Moise, Geometría moderna, Wesley, Estados Unidos, 1966.

GOMEZ Raúl y otros, Matemática moderna estructurada 4, Norma, Bogotá, 1978.

----------- Matemática moderna estructurada 3, Norma, Bogotá, 1976.

GUARIN Hugo, YU Takeuchi, WILLS Darío. Hacia la Matemática, Un enfoque estructurado, Temis, Bogotá, 1985.

HS HALL MA y SR KNIGHT, Algebra superior, Hispano América, México, 1948.

JUNQUERA M. José, Didáctica del cálculo, Labor, Madrid, 1969.

MESA B. Orlando. Criterios y estratégias para la enseñanza de las matemáticas, Centro de pedagogía participativa, Vol. 1, Medellín, 1994.

NEGRO Adolfo, ZORIO Valeriano, Cerca de la matemática, Alhambra, Madrid, 1975.

NOT Luis, Las pedagogías del conocimiento, fondo de cultura económico, México.

PASTOR Rey, ADAM P. Elementos de aritmética racional, nuevas gráficas, Madrid, 1951.

----------- Elementos de geometría racional, Nuevas gráficas, Madrid, 1963.

POLYA George, Como plantear y resolver problemas, Trillas, México, 1979.

----------- Matemáticas y razonamiento plausible, Tecnos, Madrid, 1966.

PUIG H. Jaime, HERNANDEZ S. RUIZ, Elementos de matemática, librería Hebreo, México, 1956.

SEGURA R. Dino y otros, Planteamientos en educación, Escuela pedagógica experimental, Bogotá, 1992.

S. K. Stein, Cálculo y geometría analítica, Mc Graw Hill, México, 1984.

UNESCO, Seminario sobre integración curricular, Bogotá, 1980.

VALERO Michel, Física 1, Norma, Bogotá, 1980.

VIEDMA Juan A, Lecciones de Aritmética, Bedout, Medellín, 1957.

----------- Aplicaciones de la psicología de la forma a la enseñanza de las matemáticas, Rev. Educación Nº 52, Madrid, 1956, p. 37-43.

----------- Geometría Intuitiva, Norma, Cali.

W. de ZIPEROVICH Rosa, Enseñanza moderna de las matemáticas, Biblioteca, Rosario, Argentina, 1969.

ANEXOS

1. ANEXO 1 TEORÍA DE LA PROPORCIONALIDAD

1.1. MAGNITUD.

En los objetos hay cualidades que se pueden comparar con precisión, al disponer para ello, de un criterio de comparación y otro de suma. Contrariamente existen otras cualidades que no podemos comparar. Así por ejemplo; se pueden comparar; Longitudes, masas, pesos, volúmenes, y otras cualidades de los objetos.

Contrariamente existen otras cualidades en los cuerpos que no podemos comparar con los criterios de igualdad y suma. Por ejemplo, del dolor no podemos afirmar;

- Que un dolor de muela sea igual a un dolor de oído, ni tampoco que un dolor de muela sea igual a la suma de un dolor de estómago y de cabeza.

Juán Viedma define la magnitud'; "Se llaman magnitudes a las propiedades de los cuerpos para las que se ha definido con precisión la relación de igualdad, y la suma".

[1] VIEDMA Juan, Lecciones de Aritmética, Bedout, Medellín, 1957, p. 134.

El mismo autor define la **cantidad** como “el estado concreto de una magnitud”. Con respecto a la **unidad de una magnitud** afirma: “Es una cantidad de la misma que se elige convencionalmente para tomarla como tipo de comparación con las demás cantidades.

1.2. CANTIDADES HOMOGÉNEAS.

Interpretando a Rey Pastor[2]. Son cantidades homogéneas las que forman un sistema, (colección de objetos con sus relaciones y operaciones[3]) entre las cuales se puede establecer: relación de igualdad, desigualdad, la operación suma, los postulados de Arquímedes y de la división. Estas relaciones y operaciones se definen así:

1.2.1. POSTULADOS DE COMPARACIÓN.

Dadas **a, b, c** cantidades homogéneas debe verificarse una y sólo una de las posibilidades:

- **a** es mayor que **b**: **(a > b)**; en cuyo caso **b** es menor que **a**; **(b < a)**.
- **b** es mayor que **a**: **(b > a)**; en cuyo caso **a** es menor que **b**; **(a < b)**
- **a** es igual a **b**: **(a = b)**.

---

[2] PASTOR Rey y ADAM Puig P., Elementos de Aritmética racional, Nuevas gráficas, Madrid, 1951.
[3] COLOMBIA, Ministerio de educación nacional, Marcos generales de los programas curriculares, Imprenta Dptal. de Antioquia, 1985, p. 147.

Si **a, b, c** son iguales se cumplen las propiedades **idéntica, recíproca** y **transitiva.** Si **a, b, c,** no son iguales sólo se cumple la propiedad **transitiva.**

1.2.2. POSTULADO DE LA SUMA.

Dadas **a, b, c, d,** cantidades homogéneas, existe otra llamada suma, que se escribe **a + b** y que tienen las mismas propiedades que los números naturales. Estas son:

- Uniformidad: Si **a = b** y **c = d** se cumple que **a + c = b + d**
- Conmutativa: **a + b = b + a**
- Asociativa: **a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c**
- Monotonía: Si **a > b** se cumple que **a + c > b + c.**

1.2.3. POSTULADO DE ARQUIMEDES.

Sean **a, b** cantidades homogéneas no nulas. Entonces existe un **n** £ N tal que **n a > b ó n b > a,** es decir, un múltiplo de una de ellas es mayor que la otra.

1.2.4. POSTULADO DE LA DIVISIÓN.

Dada una cantidad **a,** existe otra cantidad **b** que es su n-sima parte, es decir **n X b = a,** esto es:

$$\underbrace{\mathbf{b} + \mathbf{b} + \quad \dots \quad + \mathbf{b}}_{\text{n - veces}} = \mathbf{a},$$

$$\text{También } \mathbf{b} = \frac{a}{n}$$

1.3. MEDIDA DE UNA CANTIDAD.

Viedma", define la medida de una cantidad como “el número que expresa las veces que la unidad de medida está contenida en una cantidad, acompañado de la designación de la unidad usada”. Se presentan tres casos:

1.3.1. Si la unidad está contenida un número exacto de veces en la cantidad a medir; decimos que la medida es un número natural, y en consecuencia los números naturales son suficientes para resolver el problema.

Ejemplo: Sean: n un número natural

u la unidad de medida

b la cantidad a medir

si $n \mathbf{x} \mathbf{u} = \mathbf{b}$, es por que: $\underbrace{\mathbf{u} + \mathbf{u} + \quad \dots \quad + \mathbf{u}}_{\text{n-veces}} = \mathbf{b}$

[4] VIEDMA, op., cit. p. 134.

1.3.2. Si la unidad no está contenida un número exacto de veces en la cantidad, pero existe una unidad fraccionaria (parte alícuota) que está contenida exactamente, decimos que la medida es un número exacto de unidades fraccionarias, y en consecuencia se requiere de números fraccionarios para resolver el problema.

Ejemplo: sea $\frac{u}{n}$ la parte alícuota de **u**

b la cantidad a medir.

Si m es el número de veces que — está en **b,**
11

m x $\frac{u}{n}$ = **b**, por que: $\frac{u}{n} + \frac{u}{n} + \ \ldots \ + \frac{u}{n} =$ **b**,

y la medida de **b** es $\frac{m}{n}$ con unidad **u**, y se escribe **b =** $\frac{m}{n}$**. u.**

Observaciones. Se entiende por unidad fraccionaria la que resulta de dividir la unidad entera **u** en ciertos números de partes iguales. Estas unidades fraccionarias se llaman también partes alícuotas de la unidad. Son partes alícuotas de **u:**

$$\frac{u}{2}, \frac{u}{3}, \ldots, \frac{u}{n}, \ldots$$

1.3 .3. Ocurre con frecuencia que por mucho que se subdivida la unidad de medida en partes alícuotas o unidades fraccionarias, no es posible encontrar una de ellas que esté contenida un número exacto de veces en la cantidad. En este caso los números fraccionarios son insuficientes para expresar la medida y en consecuencia se requiere de los números irracionales para aproximarse a ella, tal como se enuncia en el postulado de la continuidad. Rey Pastor^

- Postulado de continuidad.

Dadas dos sucesiones de números, unos crecientes, otros decrecientes, los primeros menores que las segundas, y tales que las diferencias entre los primeros y los segundos llegan a ser tan pequeñas como se quiera, existe un número **a,** y sólo uno, que es mayor que el primero y menor que el segundo. Así por ejemplo una cantidad cuya medida $\sqrt{2}u=$ 1.4142.U aproximadamente, estará comprendida entre las sucesiones.

l.u; 1.4.u; 1.41.u; 1.414.u; l,4142.u; ... y

2.u; 1.5.u; 1.42.u; 1.415.u; 1.4143.U,...

Tal como afirma el postulado de continuidad, la cantidad cuya medida es V2 **u** es mayor que todas las cantidades de la primera sucesión y menor que todas la de la otra.

[5] PASTOR Rey y ADAM P.; Elementos de geometría racional, Nuevas gráficas, Madrid, 1963, p. 208.

1.4. EQUIVALENCIA.

- Es posible que un niño intercambie sus caramelos así: cinco repetidos, por uno difícil de encontrar, en este caso los número cinco y uno son distintos pero para el niño vale tanto un caramelo difícil de encontrar como cinco caramelos que se encuentren fácilmente.

- Un medicamento cuya posología de acuerdo a la edad indica: 2 cm^, 4 cm^ y 8 cm^, establece la siguiente equivalencia.

2 cm^ una cucharada cafetera 4

cm^ una cuchara para postre

6 cm^ una cuchara sopera.

Los elementos de cada pareja de números (2,1), (4,1), (8,1) no son iguales pero eventualmente pueden determinar un mismo valor.

- La tripleta de números (1, 10, 15) no son iguales; pero pueden ser equivalentes cuando el costo de un libro sea el mismo que el de 10 blocks de hojas milimetradas y sea el mismo que el de 15 blocks de hojas de carta.

- Las fracciones nos permiten mayor claridad al respecto. Se puede verificar que:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{7}{14}, \ldots etc.$$

Representan el mismo número, aunque correspondan a formas distintas.

En los enunciados antes descritos se establecieron relaciones. Las relaciones se pueden matematizar. Si A y B son conjuntos, una relación de A en B es un subconjunto de AxB y se puede no tarar.

$$R = \{(a,b)/aRb\}$$

Se dice que R es una relación de equivalencia si verifica las propiedades; reflexiva, simétrica y transitiva.

1.5. FUNCIÓN.

Frecuentemente se establecen correspondencias entre cantidades; veamos algunas;

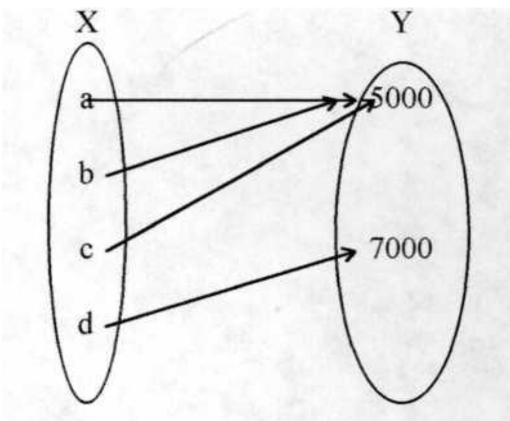
- El costo de un refresco y el número de refrescos.
- El salario recibido por un obrero y los días trabajados.
- El área de un cuadrado y la longitud de los lados.

- El área de una circunferencia y la longitud del radio.

En cada uno de estos enunciados se puede establecer una correspondencia (relación) **uno a uno** ejemplo:

Refrescos	Costo
1	300
2	600
n	300 x n

Puede ocurrir también que la correspondencia se establezca de **varios a uno.** Así por ejemplo: Un pagador liquida obreros y capataces a $ 5000 y a $ 7000 respectivamente. Si **a, b, c** son obreros y **d** capataz, el esquema es:



Otro ejemplo de correspondencia varios a uno es la relación hijos a madre.

Llamemos función a toda relación unívoca, de uno a uno o de varios a uno. Se simboliza con las letras f, g, h, ..., es una operación matemática que se aplica a x para obtener y. Esto es, y es una combinación cualquiera de x y constantes. Por lo tanto y depende de x y se escribe y = f(x).

La notación y = f (x) significa que y es una función de x.

1.5.1. DOMINIO Y RANGO.

Stein* señala. "Si X y Y son conjuntos y f una función de X en Y. El conjunto X se llama **dominio** de la función. Si f(x) = y, se dice que y es el valor de la función en x. El conjunto Y se llama **recorrido** o **rango** de la función".

1.5.2. FUNCIÓN LINEAL.

Llamamos función lineal a toda expresión algebraica de la forma f(x) = m.x + b, m, b son constantes. Su nombre se debe al hecho de que su representación gráfica es una línea recta.

Un caso particular de la función lineal se presenta cuando b = O, esto es f(x) = m.x. En este caso la función cumple dos propiedades:

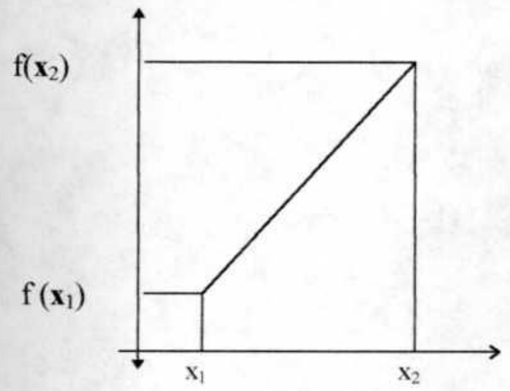
[6] STEIN S. K., Cálculo y geometría analítica, Mc Graw Hill, México, 1984, p. 34.

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$; $a, b \in N$
- $f(a.b) = f(a).b = a.\ f(b)$; $a, b \in N$.

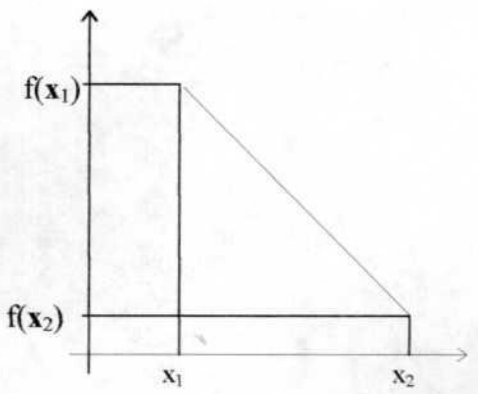
1.5.3. FUNCIÓN CRECIENTE Y DECRECIENTE.

Sea $\mathbf{x}_2 > \mathbf{x}_1$. Si $f(\mathbf{x}_2) > f(\mathbf{x}_1)$, diremos que f es una función **creciente**. Gráfica 1.

Sea $\mathbf{x}_2 > \mathbf{x}_1$. Si $f(\mathbf{x}_2) < f(\mathbf{x}_1)$, diremos que f es una función **decreciente**. Gráfica 2.



Gráfica 1



Gráfica 2

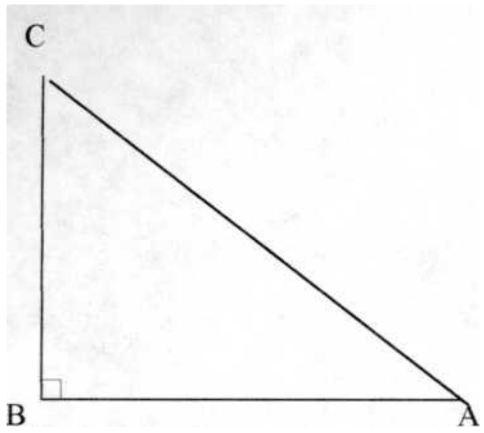
1.6. MEDICIÓN INDIRECTA.

Se sabe que la suma de 7 m. + 2 m. es 9 m., (suma de cantidades homogéneas) pero se ignora qué resulta de 7 cm. y 8 grados en un triángulo, o de 50 grados y 3cm. en una balanza. En general se desconocen relaciones entre estas y otras cantidades heterogéneas. Viedma’, dice al respecto. Esta dificultad se resuelve mediante mediciones indirectas.

En una balanza de aguja la masa de un cuerpo se mide mediante una longitud: la desviación de la aguja. Se observa que hay una dependencia entre la desviación de la aguja y la masa. La desviación es una **función** de la masa y al conocer la ley de dependencia entre las masas y las desviaciones de la aguja, es decir, la ley que rige los cambios de las desviaciones al cambiar la masa, se podrán medir estas mediante aquellas. Por lo tanto, se puede medir la masa de un cuerpo **indirectamente,** contando el número de unidades de longitud barridas por la aguja sobre una escala convencionalmente graduada.

Existen muchos instrumentos de medición indirecta: el voltímetro, amperímetro y otros. Las funciones trigonométricas: Seno, Coseno, Tangente, Cotangente, Secante y Cosecante; toman significado analizándolas como mediciones indirectas examinando todas las relaciones posibles entre los lados de un triángulo rectángulo. Así por ejemplo:

[7] VIEDMA Juan, Aplicaciones de la psicología de la forma a la enseñanza de las matemáticas.



BC BA BC AC CA AB AC'CA' AB' BC' BA' BC

Se advierte que el valor de las seis razones depende de las aberturas de los ángulos A y B. Jaime H. Puig* afirma. "A medida que el ángulo A crezca, aumentaran las razones que tengan por numerador BC y disminuyen las que tengan por numerador el cateto contiguo AB".

1.7. SISTEMAS DE COORDENADAS Y GRÁFICAS.

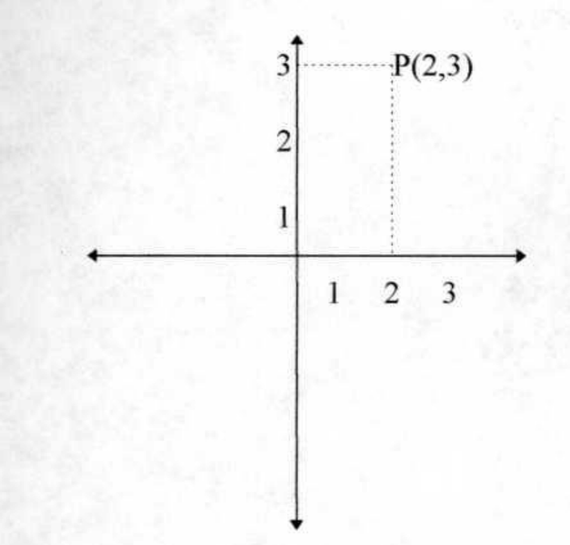
Los sistemas de coordenadas se emplean para representar gráficamente una función. Las coordenadas cartesianas están constituidas por dos ejes rectos perpendiculares: el horizontal se designa como X y el vertical se designa como Y. El eje X se denomina **abscisa** y en él fijamos los **datos** que en conjunto determinan el **dominio** de la función.

[8] PUIG Jaime y HERNANDEZ R. S., Hebreo, México, 1956, p. 23.

El eje Y se denomina **ordenada** y en él fijamos las **imágenes** o **resultados** que en conjunto determinan el **rango** de la función.

Las coordenadas van metrizadas convenientemente por medio de un segmento arbitrario que se toma como unidad de medida. No es necesario, usar el mismo segmento unidad para la abscisa y la ordenada. Cada punto del plano está caracterizado por dos valores: el primero corresponde a la abscisa y el segundo a la ordenada; lo que significa que a cada valor de X corresponde un valor de Y, esto es, hay una relación funcional (función) que mantiene ligada a la pareja de valores. Recíprocamente, dados los valores x, y que se escribe P (x,y) y que se lee el punto P de coordenadas x e y , con ellas se localiza sólo un punto en el plano.

Ejemplo: Para situar el punto P(2,3), se trazan perpendiculares en el punto 2 del eje X y en el punto 3 del eje Y; el punto P(2,3) será el punto de intersección de las perpendiculares trazadas.



Gráfica 3

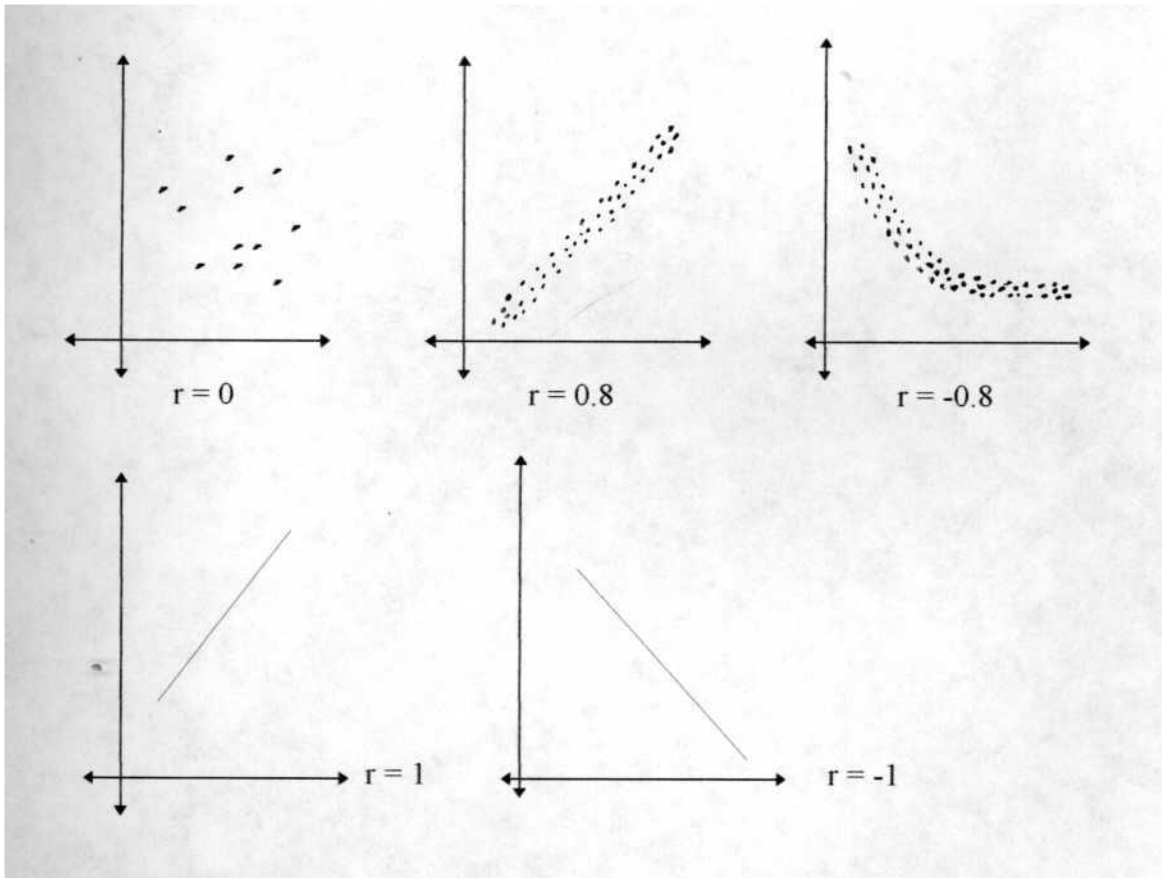
1.8. CORRELACIONES.

Dos cantidades heterogéneas cuya relación es asociada y no causalistica, (puede variar en forma similar pero debido al azar y no por que una sea función de la otra) se dice que están **correlacionadas.** Es posible que dos cantidades estén correlacionadas por que existe una tercera que influye en igual forma en cada una de ellas. Así, por ejemplo, puede ocurrir que se dé una correlación alta entre la demanda de medicamentos y la de automóviles. No por ello podemos concluir que el consumo de medicamentos haga que las personas compren automóvil. En este caso la correlación se debe a que las variables crecen o decrecen con la población.

La correlación estudia la medida cuantitativa del grado de asociación entre dos cantidades, por medio del coeficiente de correlación, que son números que varían entre 1 y -1. Si el coeficiente de correlación es positivo, se dice que la correlación es positiva y en este caso las cantidades aumentan ambas o disminuyen ambas.

Si el coeficiente de correlación es negativo, la correlación también lo es, lo cual significa que una cantidad aumenta y la otra disminuye o viceversa. Cuando el coeficiente de correlación sea cero, la correlación entre las cantidades es nula. Ocurre muchas veces que el coeficiente de correlación es exactamente igual a 1 ó -1, en este caso la correlación es perfecta y se transforma en una **proporción directa** en el primer caso, y en una **proporción inversa** en el segundo.

Los siguientes esquemas con nubes de puntos, ilustran la idea del coeficiente de correlación (r).



1.9. RAZÓN POR COCIENTE O RAZÓN GEOMÉTRICA.

Sean **x, y** dos números racionales. Llamaremos razón geométrica al cociente k entre ellos. Esto es. $\frac{x}{y} = k, y \neq 0$.

x es antecedente, **y** consecuente. Puede escribirse la relación anterior así:

x : y = k.

En la relación $\frac{x}{y} = k, y \neq 0$, se sabe que **y** es divisor, **x** es dividendo k es cociente, y por lo tanto: **x** = k x **y.**

Veamos algunas leyes.

1.9.1. Razón inversa o recíproca.

Dos razones son inversas o reciprocas cuando su producto es la unidad. Así por ejemplo: $\frac{3}{5} y \frac{5}{3}$ son razones inversas porque $\frac{3}{5} x \frac{5}{3} = 1$

En general el recíproco de $\frac{a}{b}$ *es* $\frac{b}{a}$, porque $\frac{a}{b} x \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = 1$.

- Consecuencias.

Dadas dos razones inversas o recíprocas, una cualquiera de ellas es igual al cociente que resulta de dividir la unidad por la otra. Así en el ejemplo anterior;

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{\frac{5}{3}}$$

Esta consecuencia se puede generalizar Así:

Sean $\frac{a}{b}$ *y* $\frac{m}{n}$ razones inversas. Por lo tanto.

$$\frac{a}{b} x \frac{m}{n} = 1 \quad \textit{esto es:} \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m},$$

$$\text{pero } \frac{n}{m} = \frac{1}{\frac{m}{n}}, \text{ luego } \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{m}{n}}$$

1.9.2. Si el antecedente y el consecuente de una razón se multiplican por un mismo número, el valor de la razón no se altera. Ejemplo; La razón entre 12 y 3 es igual a la razón entre 24 y 6 esto es; si

$$\frac{24}{6} = 4 \rightarrow \frac{12x2}{3x2} = 4 .$$

1.9.3 El producto de dos razones cualesquiera es igual al producto de los antecedentes sobre el producto de los consecuentes.

Ejemplo: Sean las razones $\frac{20}{4} = 5$ y $\frac{30}{15} = 2$

Se tiene que 20 = 4 x 5 y 30 = 15 x 2

$$20 \times 30 = (4 \times 15)(5 \times 2) \rightarrow \frac{20x30}{4x15} = 5x2$$

1.9.4 Para dividir una razón por otra se multiplica la razón dividiendo por el **recíproco** de la razón divisor.

Ejemplo: Sean las razones $\frac{6}{3} = 2$ y $\frac{15}{5} = 3$

se tiene al dividir miembro a miembro $\dfrac{\frac{6}{3}}{\frac{15}{5}} = \frac{2}{3}$

por división de fracciones $\frac{6x5}{3x15} = \frac{2}{3}$

1.10. SERIE DE RAZONES IGUALES.

Consideremos las siguientes razones;

x = K x **y**

a = K x **b**

m = K x **n**

estas razones se pueden escribir;

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n} = K$, que es una serie de razones iguales.

1.10.1. En una serie de razones iguales, la suma de antecedentes, dividida por la suma de consecuentes es igual a una de las razones dadas.

Ejemplo: Consideremos las razones: 6 = 3 x 2

10 = 5 x 2

8 = 4 x 2

Al sumar miembro a miembro.

6 + 10 + 8 = 2 (3 + 5 + 4) Dividamos la igualdad por (3 + 5 + 4)

$\frac{6+10+8}{3+5+4} = 2$, *luego* $\frac{6+10+8}{3+5+4} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4}$

Generalización.

Sean las razones

$$x = k.y$$

$$a = k.b$$

$$m = k.n$$

Al sumar miembro a miembro x + a + m = k(y + b + n), por lo tanto:

$$\frac{x+a+m}{y+b+n} = k$$

$$\therefore \frac{x+a+m}{y+b+n} = \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$$

1.10.2. Dada una serie de razones iguales, si se amplifica cada una de ellas por un número, la suma de los nuevos antecedentes y la suma de los nuevos consecuentes es igual a una de las razones dadas Ejemplo:

Sean $6 = 3 \times 2$

$10 = 5 \times 2$

$8 = 4 \times 2$

Al amplificarlas por 5, 6, 7 respectivamente.

$6 \times 5 = 3 \times 2 \times 5$

$$10 \times 6 = 5 \times 2 \times 6$$

$$8 \times 7 = 4 \times 2 \times 7$$

Al sumar miembro a miembro.

$$(6 \times 5) + (10 \times 6) + (8 \times 7) = 2\,[\,(3 \times 2) + (5 \times 6) + (4 \times 7)]$$

$$\frac{(6x5)+(10x6)+(8x7)}{(3x2)+(5x6)+(4x7)} = 2$$

Luego,

$$\frac{(6x5)+(10x6)+(8x7)}{(3x2)+(5x6)+(4x7)} = \frac{6}{3} = \frac{10}{5} = \frac{8}{4}$$

Generalización.

Sean las razones

$$x = k.y$$

$$a = k.b$$

$$m = k.n$$

Se tiene que:

$$r.x = r.k.y$$

$$s.a = s.k.b$$

$$t.m = t.k.n$$

Por lo tanto $r.x + s.a + t.m = k\,(r.y + s.b + t.n)$. Luego:

$$\frac{r.x+s.a+t.m}{r.y+s.b+t.n}=k$$

$$\therefore \frac{r.x+s.a+t.m}{r.y+s.b+t.n}=\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

1.10.3 Dadas unas razones iguales, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los antecedentes divididos por la raíz cuadrada de la suma de los consecuentes es igual a una de las razones.

Ejemplo:

Sean las razones

$6 = 2 \times 3$

$9 = 3 \times 3$

$12 = 4 \times 3$

Se tiene que:

$6^2 = (2 \times 3)^2$

$9^2 = (3 \times 3)^2$

$12^2 = (4 \times 3)^2$

$6^2 + 9^2 + 12^2 = 3^2 (2^2 + 3^2 + 4^2)$

$$\frac{(6^2+9^2+12^2)}{(2^2+3^2+4^2)}=3^2$$

$$\sqrt{\frac{\left(6^2+9^2+12^2\right)}{\left(2^2+3^2+4^2\right)}}=3$$

$$\sqrt{\frac{\left(6^2+9^2+12^2\right)}{\left(2^2+3^2+4^2\right)}}=3=\frac{6}{2}=\frac{9}{3}=\frac{12}{4}$$

Generalización.

Sean las razones

$$x = k.y$$

$$a = k.b$$

$$m = k.n$$

Al elevar al cuadrado;

$$x^2 = (k.y)^2$$

$$a^2 = (k.b)^2$$

$$m^2 = (k.n)^2$$

Al sumar $x^2 + a^2 + m^2 = k^2 (y^2 + b^2 + n^2)$.

Por lo tanto: $\dfrac{x^2+a^2+m^2}{y^2+b^2+n^2}=k^2$. Luego:

$$\frac{\sqrt{x^2+a^2+m^2}}{\sqrt{y^2+b^2+n^2}}=k$$

$$\therefore \frac{\sqrt{x^2+a^2+m^2}}{\sqrt{y^2+b^2+n^2}}=\frac{x}{y}=\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$$

1.11. PROPORCIÓN Y SUS PROPIEDADES.

Dos razones iguales forman una proporción. Ejemplo: sean **x = K.y, a = K.b.** Con estas dos razones puedo formar la igualdad:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Ya que tienen la misma razón **K** la expresión $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ se llama **proporción** y puede

escribirse en forma horizontal, así:

$$\mathbf{x} : \mathbf{y} = \mathbf{a} : \mathbf{b}$$

Donde **x** y **b** son los extremos de la proporción en tanto que **y** y **a** son los medios. Ambas notaciones se leen **x** es a **y** como **a** es a **b.**

En la proporción **continua** $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, al número **b** que se repite se llama media proporcional entre **a** y **c.** También se dice que **a** es la tercera proporcional entre **b** y **c.** Similar afirmación se hace de **c** entre **b** y **a.**

En el caso de la proporción inicial. $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, Dada uno de los cuatro términos es cuarta proporcional entre los otros tres. Ejemplo:

- Dada la razón 2/4, puedo formar una proporción con la razón 5/10 ya que ambos tienen cociente común 1/2 y se escribe $\frac{2}{4} = \frac{5}{10}$ o también 2:4 = 5:10

La media proporcional entre 3 y 12 es 6, ya que $\frac{3}{6} = \frac{6}{12}$, a continuación se enunciarán algunas leyes de las proporciones.

1.11.1. En toda proporción geométrica el producto de los medios es igual al producto de los extremos. Esta se conoce como la **propiedad fundamental** de las proporciones.

Ejemplo: Consideremos la proporción: 3 : 5 = 6 : 10

se cumple que $\underbrace{5 \times 6}_{\text{Medios}} = \underbrace{3 \times 10}_{\text{Extremos}}$

Generalización.

Sean las razones $x = k.y$

$a = k.b$

Por lo tanto $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$, *tambien* $\frac{x.b}{y.b}=\frac{a.y}{b.y} \therefore x.b=a.y$

1.11.2. En forma recíproca se ilustra que: Si el producto de dos números es igual al de otros dos, estos cuatro números forman una proporción, dos factores son medios y los otros dos son extremos.

Ejemplo: Sean los productos 5 x 6 = 3 x 10. Al dividir ambos miembros por el producto 5 x 10 se tiene $\frac{5x6}{5x10}=\frac{3x10}{5x10} \rightarrow \frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, siendo 5 y 6 extremos y 3, 10 médios.

Sean x.b = a.y

Se tiene que $\frac{x.b}{a.y}=1$, por lo tanto $\frac{x}{y}.\frac{b}{a}=1 \;\; \therefore \;\; \frac{x}{y}=\frac{a}{b}$.

1.11.3. Un extremo es igual al producto de los medios, dividido por el otro extremo. Similarmente, un medio es igual al producto de los extremos dividido por el otro medio. Esta nos permite encontrar una **cuarta proporcional.**

Ejemplos.

Hallar el valor de x en las proporciones:

1. $\frac{x}{5} = \frac{4}{20}$

Solución: $x = \frac{5x4}{20} \therefore x = 1$

2. $\frac{1}{x} = \frac{4}{20}$,

Solución: $x = \frac{1x20}{4} \therefore x = 5$

Generalización.

Sea: $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$; como y es divisor de x se tiene que a/b es cociente y por lo tanto

$$x = \frac{a}{b}.y \quad \therefore \quad x = \frac{a.y}{b}$$

1.11.4. En toda proporción continua, la média proporcional es la raíz cuadrada del producto de los extremos

i) Ejemplo: $\frac{8}{x} = \frac{x}{20}$

Solución: $\mathbf{x}^2 = 8 \times 20 \therefore \mathbf{x} = \sqrt{160}$.

ii) Ejemplo. Hallar la media proporcional de 2 y 8.

Solución; Si designamos a **x** como la cantidad que hace continua la proporción, esta queda:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{8} \rightarrow x^2 = \sqrt{16} \quad \therefore \quad x = 4$$

Generalización.

Sea $\frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

Se tiene que $y^2 = x.b \quad \therefore \quad y = \sqrt{x.b}$.

1.11.5. En toda proporción continua, la tercera proporcional es el cociente entre el cuadrado de la media y la otra tercera proporcional.

Ejemplo: La media proporcional entre 9 y **x** es 12. Hallar el valor de **x.**

Solución: La proporción se escribe $\frac{9}{12} = \frac{12}{x}$ y por la propiedad fundamental de las proporciones $\mathbf{x} = \frac{12^2}{9} \therefore x = 16$.

1.11.6. Dada una proporción pueden hacerse siete transformaciones sobre ella, cada una de las cuales es proporción, pues cumple la propiedad fundamental (12.1) así:

1.11.6.1. Permutar los medios.

Ejemplo: Sea la proporción $\frac{3}{6} = \frac{2}{4}$, por la propiedad fundamental se tiene:

3 x 4 = 6 x 2, al dividir miembro a miembro por el producto (2 x 4) se tiene,

$\frac{3x4}{2x4} = \frac{6x2}{4x2} \therefore \frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ es la proporción buscada.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

Se tiene que x.b = y.a, y al dividir por (a.b), se tiene $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$.

1.11.6.2. Permutar los extremos.

Ejemplo: Sea la proporción $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$. Se tiene 3x4 = 6x2

$$\frac{3x4}{3x6}=\frac{6x2}{6x3}$$

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, es la proporción buscada.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$

Por lo tanto $x.b=a.y \quad \therefore \quad \frac{b}{y}=\frac{a}{x}$

1.11.6.3. Permutar medios y extremos.

Ejemplo: Dada la proporción $\frac{3}{6}=\frac{2}{4}$, se tiene 3x4 = 6x2

$$\frac{3x4}{3x2}=\frac{6x2}{3x2}$$

$\therefore \quad \frac{4}{2}=\frac{6}{3}$, es la proporción buscada.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

Entonces $x.b = a.y \quad \therefore \quad \frac{b}{a} = \frac{y}{x}$

1.11.6.4. Inversión de proporciones.

Dada una proporción se puede invertir el orden de las razones que la forman y la proporción continúa. En efecto, vamos a permutar la razón original y las encontradas a partir de ellas así:

1. Invertir la proporción $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \quad \therefore \quad \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ por ser iguales.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$

Se tiene que: $y.a = x.b \quad \therefore \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$.

Consultar las tres restantes.

1.11,7. Proporción por adición y sustracción.

- La suma o diferencia del primer antecedente con su consecuente es a su consecuente como Ia suma o diferencia del segundo antecedente y su consecuente es a su consecuente.

Ejemplo; Consideremos la proporción.

$$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Al sumar a cada miembro la unidad se tiene que

$$1 + \frac{6}{4} = \frac{3}{2} + 1$$

Esto es: $\frac{4+6}{4} = \frac{2+3}{2}$, proporción buscada.

- La diferencia del primer antecedente con su consecuente es a su consecuente, como la diferencia del segundo antecedente y su consecuente es a su consecuente.

Ejemplo; consideremos la proporción

$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$. Restando la unidad en cada miembro se tiene

$$\frac{6}{3}-1=\frac{4}{2}-1$$, lo que conduce a

$$\frac{6-3}{3}=\frac{4-2}{2}$$, proporción buscada.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$

Al sumar o restar la unidad a cada miembro se tiene que: $\frac{y\pm x}{y}=\frac{b\pm a}{b}$.

1.11.8 Si dos proporciones tienen una razón común, las otras razones forman una proporción.

Ejemplo: Sean las proporciones $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Dado que dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí se tiene que

$\frac{4}{8}=\frac{3}{6}$, proporción buscada.

1.11.9 Al dividir término a término dos proporciones, los cocientes que resultan están en proporción.

Ejemplo: Sean las proporciones $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$

Se sabe que 4 x 2 = 8 x 1 y 3 x 6 = 2 x 9, por lo tanto

$\frac{4x2}{3x6}=\frac{8x1}{2x9}$, *luego,*

$\frac{8}{18}=\frac{8}{18}$, que es una proporción.

Generalización.

Sea $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}=\frac{o}{p}$

Se tiene que: $x=\frac{a.y}{b}$ y $c=\frac{o.d}{p}$ $\therefore$ $\frac{x}{c}=\frac{a.y.p}{o.b.d}$

1.12. PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA.

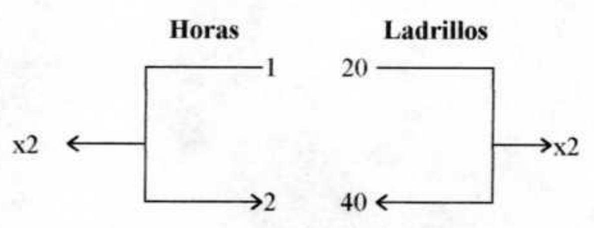
1.12.1. Magnitudes directamente proporcionales.

En términos de HS Hall®, una primera definición es la siguiente: Se dice que una magnitud A es directamente proporcional a otra magnitud B, cuando la razón de dos valores de A es igual a la razón de los dos valores correspondientes en B.

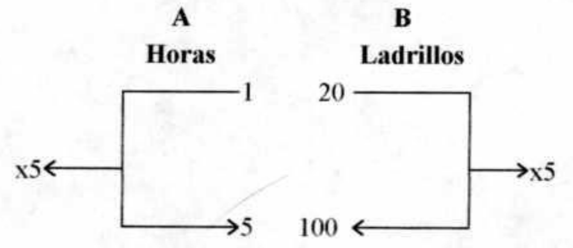
[9] HS. HALL MS. y SR. KNIGHT BA., Algebra superior, Hispano Americana, México, 1948, p. 23.

Ejemplo: Si en una hora un albañil pega 20 ladrillos, en 2 horas pegará 40 ladrillos, en 5 horas 100 ladrillos y así sucesivamente.

Al hacer el correspondiente esquema se observa que la razón entre las horas (1, 2) y (1, 5) es igual a la razón entre los ladrillos pegados (20, 40) y (20, 100) respectivamente, como muestran los esquemas 1 y 2.



Esquema 1

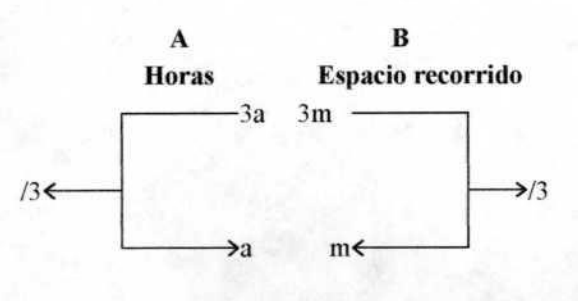


Esquema 2

Esta definición se interpreta como el traslado de carácter **vertical** de un operador **(xn)** en caso de la multiplicación, o un operador **(/n)** en caso de la división, de 1a primera magnitud A a la segunda magnitud B.

Otro ejemplo; En 3a horas un automóvil recorre 3m Kms. Si el tiempo se reduce a la tercera parte, qué ocurre con el espacio recorrido?.

Si la magnitud tiempo se divide por tres, este mismo escalar divide a la magnitud espacio. Veamos:

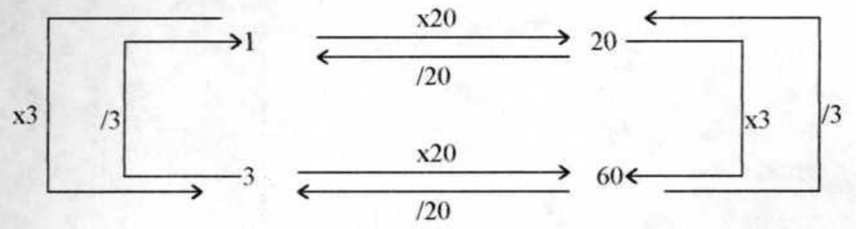


Esquema 3

Una definición alterna señalada por Viedma’*’plantea: dos magnitudes A y B son proporcionales cuando a cada cantidad de A corresponde una de B y además, al multiplicar o dividir una de ellas por un número, su correspondiente queda multiplicada o dividida por el mismo número. La definición anterior, además de trasladar los operadores (xn) y (/n) verticalmente, realiza dicho traslado en forma horizontal,de un nivel a otro, dado que la correspondencia es una relación funcional.

En el ejemplo del albañil se tiene:

[10] VIEDMA Juan, Lecciones de Aritmética, op., cit., p. 274.



Esquema 4

En términos de Luz Carretero” se observa un doble esquema: Un traslado vertical de operadores y otro funcional también de operadores.

El doble esquema anterior verifica la teoría Piagetiana, de que la proporcionalidad es un doble esquema de reversibilidad.

- Propiedad Fundamental.

Se definió que dos magnitudes directamente proporcionales A y B tienen cocientes constantes entre sus cantidades correspondientes. Esto es A = k x B. Por lo tanto el problema del albañil y los ladrillos pegados se tiene:

Horas	Ladrillos		
1	20		$\frac{1}{20}$
2	40	$\frac{2}{40}$	$\frac{1}{20}$
5	100	$\frac{5}{100}$	$\frac{1}{20}$
n	20 n	$\frac{n}{20\ n}$	$\frac{1}{20}$

[11] CARRETERO Luz, La adquisición de la noción de proporcionalidad según diferentes tipos de estructuras multiplicativas, Rev. Anuario de psicología, Nº 42, Madrid, 1983, p. 85-101.

Dividida una cantidad entre su correspondiente en la otra magnitud se obtiene el mismo resultado.

El esquema anterior se puede escribir, en general, así:

A	B	
a_1	b_1	$\frac{a_1}{b_1} = k$
a_2	b_2	$\frac{a_2}{b_2} = k$
.	.	
.	.	.
a_n	b_n	$\frac{a_n}{b_n} = k$

Por lo tanto, al dividir dos razones iguales cualesquiera:

$$\frac{a_1}{b_1} \div \frac{a_2}{b_2} = 1 \quad \therefore \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots\ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Las magnitudes directamente proporcionales definen una función lineal. En el plano cartesiano los valores de dichas magnitudes, determinan puntos en línea recta.

Esta función lineal es creciente y pasa por el origen del plano cartesiano. Además cumplen las propiedades siguientes:

i) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

ii) $f(a \times b) = f(a) \times b = f(b) \times a$.

La constante k, se llama constante de proporcionalidad o razón de proporcionalidad.

En el plano cartesiano son puntos de una línea recta que pasa por el origen como se verifica en la propuesta (situación problema 3, sección 10.7)

Ejemplo:

Se desea saber qué área se cubre con 50 ladrillos, si 3 ladrillos cubren un área de 2400 **cm^.**

Solución.

Presentaremos dos métodos de solución. Por proporciones y por reducción a la unidad.

- Por proporciones.

Disponemos los datos homogéneamente.

No de ladrillos		Área
3	....	2400
50	....	X

Como la dirección proporcional entre Área y ladrillos es directa, se tiene por la

propiedad fundamental que: $\frac{3}{50} = \frac{2400}{X}$.

$\therefore$ X = 40000 cm².

- Por reducción a Ia unidad.

Si 3 ladrillos cubren 2400 cm², entonces 1 ladrillo cubrirá 2400/3, pero como son 50,

estos cubrirán $\frac{2400}{3} * 50 = 40000$.

Por lo tanto el área cubierta es de 40000 cm² = 4 m².

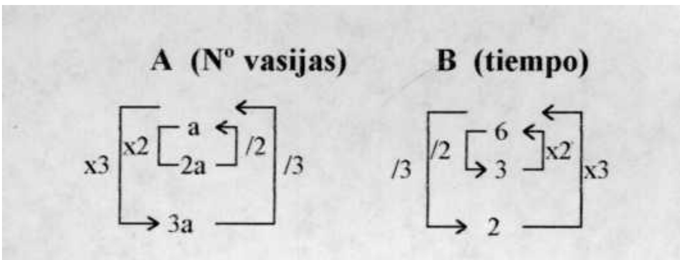
1.12.2. Magnitudes inversamente proporcionales.

Muchas magnitudes dependen unas de otras de tal manera que al crecer una, decrece la otra, y más específicamente; al duplicarse una magnitud, la otra se reduce a la mitad. Similarmente al reducirse una de ellas a la quinta parte, la otra queda multiplicada por cinco y así sucesivamente. Las magnitudes que tienen dicho comportamiento se dice que son **inversamente proporcionales.**

Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales cuando a cada cantidad de A corresponde una de B y además, al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la cantidad correspondiente queda dividida o multiplicada por el mismo número.

Veamos el siguiente ejemplo: Con una vasija **a** se tardan 6 horas en llenar un tanque. Si se utiliza una vasija **b** dos veces mayor o una vasija **c** tres veces mayor, el tiempo se reducirá a 3 ó 2 horas según el caso.

Al igual que en la proporcionalidad directa, en la inversa también se trasladan los operadores **(xn)** y **(/n)** en forma **vertical,** y de un nivel a otro en forma **horizontal.** En el caso vertical, si entre dos cantidades de una magnitud se aplica el operador **(xn),** en las cantidades correspondientes en la otra magnitud se aplicará el operador **(/n),** y viceversa. Como muestra el esquema:



- Propiedad Fundamental.

Entre dos magnitudes inversamente proporcionales A y B, el producto de las cantidades correspondientes es constante: Esto es $a_i . b_i = k$ y se puede esbozar así:

Sean A y B dos magnitudes inversamente proporcionales y sean ai, a2 ... a,, y bi, b2 ... bn, las cantidades correspondientes así;

A	B	
a_1	b_1	$a_1 . b_1 = k$ (1)
a_2	b_2	$a_2 . b_2 = k$ (2)
.	.	.
.	.	.
a_n	b_n	$a_n . b_n = k$ (3)

De (1) y (2) se tiene que; ai . bi = ai. b2. Al dividir por (a2. b1), tenemos;

$$\frac{a_1 b_1}{a_2 b_1} = \frac{a_2 b_2}{a_2 b_1} \quad \therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}.$$

Similar proceso permite la proporción $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_n}{b_1}$.

- Consecuencia.

La expresión anterior $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$. Permite la siguiente definición alterna. Bruño[12]:

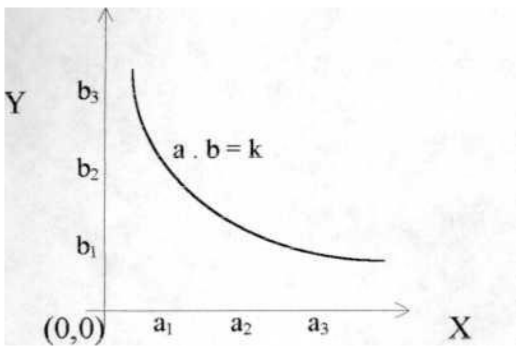
Cuando dos magnitudes son inversamente proporcionales, la **razón** de dos valores

---

12 G. M. BRUÑO, Aritmética, Bedout, Medellín, 1954, p. 162.

cualesquiera de una es **inversa a la razón** de los valores correspondientes de la otra magnitud.

La gráfica correspondiente tiene la siguiente forma:



La curva que resulta de comparar magnitudes inversamente proporcionales, no es lineal, es decreciente, y el producto de cada pareja (a1, b4) = (a2, bs) = (a2, b3) = (a3, b2) = (a4,b1) = k.

Ejemplo 1.

Un grifo A arroja 3 litros de agua por minuto y tarda media hora en llenar un estanque. Cuanto tardará un grifo B, que arroja el triplo de agua que A, en llenar otro estanque de igual capacidad ?.

- Por proporciones.

Solución: Se disponen los datos homogéneamente.

A (Litros)	**B (Tiempo)**
3 Litros	30 minutos
3x3 = 9 Litros	X minutos

Al aumentar el número de litros arrojados en un minuto, se espera que el tiempo que tarda en llenarse el estanque disminuya, por lo tanto, las magnitudes son inversas y en consecuencia los productos entre las cantidades correspondientes son constantes (propiedad fundamental), y se tiene que:

$$3\text{x}30 = 9.X$$

$$\frac{3x30}{9} = X \rightarrow X = 10$$

Se observa que al multiplicarse por tres los litros que llegan, el tiempo requerido para llenar el estanque se divide también por tres (se reduce a la tercera parte).

Al resolver el problema aplicando la definición alterna de la propiedad fundamental de la proporcionalidad inversa, se llega a la proporción:

$$\frac{3}{9} = \frac{X}{30}$$

y por propiedad fundamental de las proporciones; 3x30 = 9X X = 10.

- **Por reducción a la unidad.**

Si arrojando 3 litros por minuto se tardan 30 minutos para llenar un estanque, entonces arrojando 1 litro por minuto tardará 30x3 veces, por lo tanto como el grifo arroja 9 litros por minuto, tardará (30x3)/9 = 10.

Esto es: Un grifo arrojando 9 litros por minuto, tardará 10 minutos en llenar el estanque dado.

Ejemplo 2.

Con cierto dinero puedo pagar 18 tiquetes en metro a $250 cada uno. Si el costo de cada tiquete sube a $300. Cuantos tiquetes podré comprar con el mismo dinero?.

- **Por reducción a la unidad.**

El dinero para comprar los tiquetes es de 18x250 = 4500, por lo tanto, si con $300 compro 1 tiquete, entonces con $1 compraré 1/300 y con $4500 compraré (l/300)x4500= 15.

Esto es; A \$300 cada tiquete, con \$4500 compraré 15 tiquetes.

- Por proporciones.

Disponemos de los datos y la incógnita homogéneamente.

Costo	**Nº de tiquetes**
250	18
300	X

Se espera que pueda comprar menos de 18 tiquetes puesto que el costo aumento y el dinero es el mismo.

Aplicando la propiedad fundamental de las proporciones inversas, 250x18 = 300.X por lo tanto $X = \frac{250x18}{300} \therefore X = 15$.

1.13. PROPORCIONALIDAD COMPUESTA.

Es común encontrar una magnitud que dependa de otras. Así por ejemplo; al construir un muro, los días empleados en hacerlo dependen de otras cantidades entre las que podemos citar;

- Largo del muro.
- Alto del muro.
- Número de obreros trabajando.
- Horas diarias trabajadas por cada obrero

Al comparar las cantidades días y largo del muro se concluye que al duplicarse el largo del muro, permaneciendo las demás cantidades constantes, se duplica también el número de días trabajados. Similar comparación puede hacerse entre los días y el alto del muro: si, por ejemplo, el muro se levanta sólo hasta la mitad permaneciendo las otras cantidades constantes, los días empleados también se reducen a la mitad. Variación inversa se observa al comparar los días requeridos para hacer la obra y el número de obreros empleados, ya que, al **duplicarse** el número de obreros permaneciendo las otras cantidades constantes, los días requeridos se **reducen a la mitad.** Igual comportamiento inverso se da al comparar las magnitudes días y horas diarias trabajadas. Este problema ilustra la siguiente definición.

1.13.1. Definición.

Rey Pastor señala' Se dice que una magnitud es proporcional a varias otras cuando lo es a cada una de ellas dejando fijas las restantes. Esta proporcionalidad puede ser directa o inversa.

[13] PASTOR R. y ADAM P., Elementos de aritmética racional, op., cit., p. 274.

A continuación se enuncian dos propiedades cuya demostración está en el anexo.

1.13.2. Propiedad fundamental.

Si una magnitud es directamente proporcional a otras, entonces es directamente proporcional a su producto.

Ejemplo: El costo mensual de la energía consumida por 30 lámparas encendidas cinco horas diarias es de $15.000. Cuanto se pagará al mes por 20 lámparas encendidas seis horas diarias?.

- Por proporciones.

Solución.

Se procede a disponer los datos y la incógnita homogéneamente.

Nº de Lámparas	Nº de horas*día	Costo Mensual
30	5	15.000
20	6	X

El costo mensual determina la razón de comparación. Al comparar las razones entre el costo, las horas diarias y el número de lámparas, se infiere que la dirección proporcional es directa, por lo tanto el costo mensual es directamente proporcional al producto entre el número de lámparas y el número de horas en que están encendidas, así:

$$\frac{X}{15.000} = \frac{6}{5} x \frac{20}{30}$$

$$por \quad tanto \quad X = \frac{15.000x6x20}{5x30}$$

$$\therefore X = 12.000$$

Esto es: 20 lámparas encendidas 6 horas diarias causarán un gasto mensual de $12.000, guardando la proporción inicial.

- Método de reducción a la unidad:

Para resolver este problema de proporcionalidad compuesta, se procede por partes. Parte 1. Se compara el costo mensual (razón de comparación) y el número de lámparas.

Si 30 lámparas consumen energía por un costo de $15.000, entonces una lámpara consumirá 15.000/30. Por lo tanto 20 lámparas consumirán:

$$\frac{15.000}{30}x20$$

Parte 2. Se compara el costo mensual y el número de horas diarias que permanecen encendidas.

Si estando encendidas cinco horas diarias el consumo mensual cuesta $15.000, entonces el consumo de una hora cuesta 15.000/5. Por lo tanto en seis horas diarias el consumo costará:

$$\frac{15.000}{5}x6$$

De los análisis hechos en las partes 1 y 2 se tiene que 15.000 es un factor de 20/30 y 6/5 respectivamente, lo que se puede escribir como:

$$15.000x\frac{20}{30}x\frac{6}{5} = 12.000 \therefore X = 12.000$$

Esto es: 20 lámparas encendidas 6 horas diarias causan un gasto mensual de $12.000, guardando la proporción inicial.

- Consecuencia.

Si una magnitud A es proporcional a otras, la razón de dos cantidades cualesquiera de A es igual al producto de las otras razones escritas directa o inversamente, según sean las magnitudes correspondientes.

Ejemplo; Con 384 Kgr. de pasto se alimentan seis caballos durante ocho días. Cuantos días se alimentarán 10 caballos sí se tienen 480 Kgr. de pasto?.

- Por proporciones.

Solución.

Se disponen de los datos homogéneamente.

Kgr. de pasto	Nº de Caballos	Nº de días
384	6	8
480	10	X

El número de días determina la razón de comparación.

La variación entre las razones N” **de días** y N” **de caballos** es inversa, lo que hace que

se escriba la proporción $\frac{X}{8} = \frac{6}{10}$.

La variación entre las razones **Nº de días** y **Kgr. de pasto** es directa, y se escribe, $\frac{X}{8} = \frac{480}{384}$. Por el teorema fundamental (14.2) se tiene que $\frac{X}{8} = \frac{6}{10} x \frac{480}{384}$, esto es:

$$X = \frac{6x8x480}{10x384} \quad \therefore \quad X = 6$$

Esta respuesta significa que con 480 Kgr. de pasto, 10 caballos comen durante seis dias, guardando la proporción inicial.

- Por reducción a la unidad.

Parte 1. Se comparan el número de días y el número de caballos.

Si seis caballos consumen cierto pasto en ocho días, entonces un caballo se alimentará 8x6 días con dicho pasto, y por lo tanto 10 caballos se alimentarán días.

Parte 2. Se comparan el número de días y los Kgr. de pasto. Si 384 Kgr. de pasto duran ocho días, entonces un Kgr. durará días y por lo tanto 480 Kgr. durará

$\frac{8}{384} x480$ dias. De los análisis hechos en las partes 1 y 2 se tiene que 8 es factor de 6/10 y de 480/384 respectivamente, lo que se escribe:

$$8x\frac{6}{10}x\frac{480}{384}=6 \quad \therefore \quad X=6$$

Esto significa que con 480 Kgr. de pasto, 10 caballos comen durante seis días, guardando la proporción inicial.

1.14. REPARTOS PROPORCIONALES.

Se presenta con frecuencia tener que repartir una cantidad en partes que guardan alguna relación. Entre herederos se reparten bienes y entre socios se reparten pérdidas o ganancias. Los repartos proporcionales pueden ser directos o inversos.

1.14.1. Reparto proporcional directo.

Repartir una cantidad A en partes directamente proporcionales a los números **a, b, c** es dividir a A en partes **x, y , z** tales que las parejas **(x,a), (y.b), (z.c)** formen razones iguales. No se requiere para un reparto que sean sólo tres partes.

Ejemplo Tres estudiantes aportan $300, $350 y $400 para comprar un chance, que es premiado con $525.000. Se sabe que el estudiante que aporta $350, gana más que el que aporta $300, pero menos que el compañero que aporta $400.

Solución.

- Por proporciones.

Sean x, y, z las partes correspondientes a los aportes; $300, $350, $400 respectivamente. Se establece la siguiente correspondencia.

Partes del premio	Aportes
x	300
y	350
z	400
x+y+z = 525.000	300+350+400 = 1050

que no es cosa distinta a la ley de razones iguales (11.1), por tanto es posible establecer las siguientes proporciones que permiten calcular los valores de x, y, z así;

$$\frac{x}{300} = \frac{525.000}{1.050}, luego \rightarrow x = 150.000$$

$$\frac{y}{350} = \frac{525.000}{1.050}, luego \rightarrow y = 175.000$$

$$\frac{z}{400} = \frac{525.000}{1.050}, luego \rightarrow z = 200.000$$

Se observa que se cumple: $\frac{150.000}{300} = \frac{175.000}{350} = \frac{200.000}{400}$, y además 150.000+175.000+200.000 = 525.000.

-«Por reducción a Ia unidad.

Si bien es cierto que los problemas de proporcionalidad compuesta, se hacen un poco complejos por el método de reducción a la unidad, también lo es que los problemas de reparto proporcional tanto directos como inversos, se hacen más simples y comprensibles.

La solución del problema anterior por este método es:

Si \$1.050 ganan \$525.000, entonces \$1 ganará $\frac{525.000}{1.050} = \$500$.

Sabiendo que \$1 gana \$500, el reparto es:

Para quien aportó \$300, es 300x500 = 150.000, Para quien aportó \$350, es 350x500 = 175.000. Para quien aportó \$400, es 400x500 = 200.000,

Quedan así las razones: $\frac{150.000}{300} = \frac{175.000}{350} = \frac{200.000}{400}$.

1.14.2. Reparto proporcional inverso.

Repartir una cantidad A en partes inversamente proporcionales a los números a, b, c es dividir a A en partes x, y, z tales que las parejas (x, 1/a), (y, 1/b), (z, 1/c) formen razones iguales.

Ejemplo: Se desea repartir $2'000.000 entre los tres primeros atletas que crucen la meta, de tal forma que el reparto sea inversamente proporcional a los tiempos empleados. Sabiendo que los tiempos fueron; 10, 12 y 15 segundos, ¿qué premio corresponde a cada uno?.

- Por proporciones.

Por ser reparto proporcional inverso, al deportista que tardó 12 segundos corresponderá menos parte del premio que al primero, pero mayor premio que al tercero. Sean los premios **x, y, z,** para el primero, segundo y tercero respectivamente.

Se hace la siguiente correspondencia inversa;

Partes del premio	**Inversos del tiempo**
x	1/10
y	1/12
z	1/15
x+y+z = 2´000.000	$\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{1}{4}$

La propiedad (11.1) nos permite establecer las siguientes proporciones;

$$\frac{x}{1/10}=\frac{2000.000}{1/4}\text{, por lo tanto } \mathbf{x} = 800.000$$

$$\frac{y}{1/12}=\frac{2000.000}{1/4}\text{, por lo tanto } \mathbf{y} = 666.666{,}6$$

$$\frac{z}{1/15}=\frac{2000.000}{1/4},\ \text{por lo tanto } \mathbf{z}=533.333{,}3$$

Observación: Las razones que se forman en la repartición no son exactamente iguales, sin embargo para el propósito que se tiene, se pueden tomar iguales, esto es:

$$\frac{800.000}{1/10}=\frac{666.666{,}6}{1/12}=\frac{533.333{,}3}{1/15},$$

y además 800.000+666.666,6+533.**333,3=r999.999,9,** es decir, aproximadamente 2000.000.

- Por reducción a la unidad.

Los inversos de los tiempos son 1/10, 1/12, 1/15 que son equivalentes a las fracciones homogéneas 6/60, 5/60, 4/60, cuya suma es 15/60, ahora bien; si a 15/60 corresponde 2'000.000, a 1/60 corresponderá (2'000.000/15) = 133.333,3, por lo tanto:

A 6/60 corresponderá 133.333,3x6 = 799.999,8 A

5/60 corresponderá 133.333,3x5 = 666.666,5 A 4/60

corresponderá 133.333,3x4 = 533.333,2.

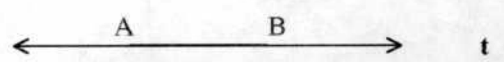
Esto es, al atleta que cruza en primer lugar corresponde un premio de $799.999,8, al segundo $666.666,5 y al tercero $533.333,2.

1.15. USO DE REGLA Y COMPAS.

Mediante la regla y el compás el profesor orientará la realización de cambios en algunas figuras. Dienes citado por MEN* afirma; Por cambio se entiende absolutamente cualquier tipo de transformación y por figura geométrica se entienden los conjuntos de puntos (líneas, superficies, o cuerpos geométricos) para quienes se considera únicamente su forma y tamaño.

1.15.1. Construir un segmento congruente con otro sobre una recta.

Dados los puntos A y B en una recta **t** se llama segmento ***AB*** ó ***BA***., al conjunto de los infinitos puntos comprendidos entre A y B. Esto es, A y B son los extremos.



Gráfica (1)

El segmento ***AB*** puede ser construido sobre una recta cualquiera **r** de muchas formas y con muchos instrumentos; regla, cartulina, papel transparente, compás etc. Con el compás basta abrirlo hasta que sus puntas coincidan con los extremos del segmento

AB (radio AB) y transportar, dicha abertura a la recta dada **r** a partir de P.

---

[14] COLOMBIA, Ministerio de Educación Nacional, Marcos generales: mat., 7º grado, Bogotá, 1989, p. 117.

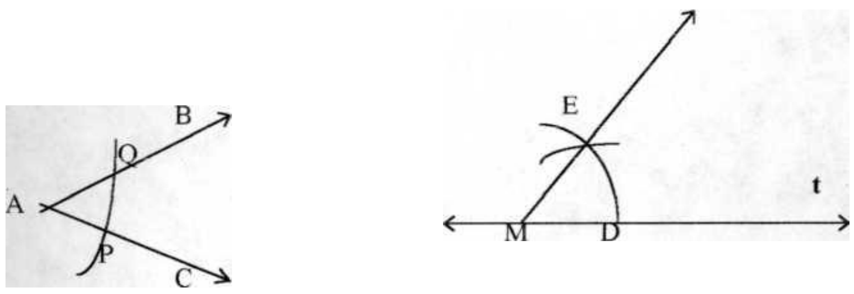
Luego PQ es el segmento pedido, congruente con el segmento AB. Decimos que dos segmentos son congruentes cuando yuxtapuestos coinciden los extremos Pastor Este concepto puede extenderse a toda figura geométrica diciendo que dos figuras son congruentes (=) cuando superpuestas coinciden en todos sus puntos.

Gráfica (2)

1.15.2. Construir un ángulo sobre una recta.

Sean el ángulo ABC y la recta **t.** Con centro en A y cualquier radio se traza un arco que corta los lados AC y BC del ángulo en los puntos P y Q respectivamente.

[15] PASTOR R. y ADAM P., Elementos de geometría racional, Madrid, 1959, p. 12.



Gráfica (3)

Se elige un punto M sobre la recta **t** y con radio AP y centro M, se traza un arco que corta la recta en D, haciendo centro en D y con radio PQ, se traza otro arco que corta al anterior en E. Al unir los puntos M, D, E se obtiene el ángulo pedido ***J.*** DME congruente con BAC, gráfica (3).

1.15.3. Construcción de un triángulo.

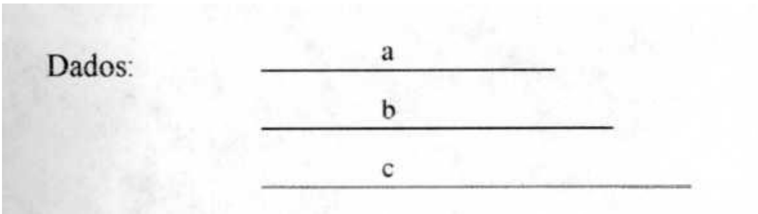
- **Dados sus tres lados.**

Para construir un triángulo dados sus tres lados se requiere que estos cumplan **la desigualdad triangular.** Esto es: Cada lado es estrictamente menor que la suma de los otros dos lados y mayor que el valor positivo de la diferencia entre los mismos. Siendo **a, b, c** lados del triángulo ABC, se tiene:

$$|b-c| < a < b + c$$

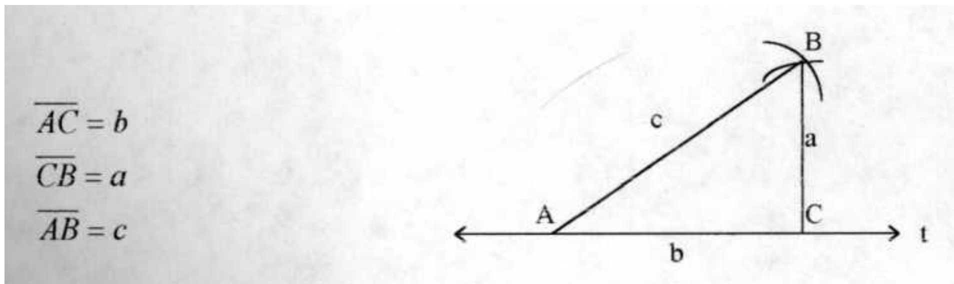
$$|a-c| < b < a + c$$

$$|b-a| < c < b + a$$



Se procede a construir el triángulo así;

Sobre una recta cualquiera **t,** se fija un punto A. Con centro en A y radio **b** se ubica el punto C sobre la recta. Con centro en C y radio igual al segmento **a** se traza el arco Con centro nuevamente en A y radio **c,** se traza otro arco que corta al anterior en el punto B. Se unen los puntos A, B, C y obtenemos el triángulo AABC pedido donde;

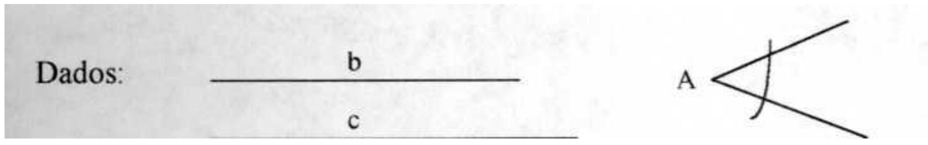


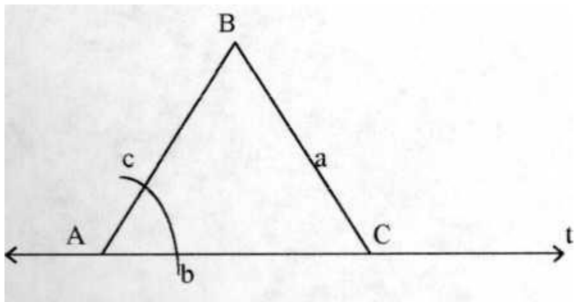
Gráfica (4)

- Dados dos lados y **el ángulo que forman.**

Sean **b** y **c** lados de un triángulo y sea 4 A el ángulo que forman; procedemos así;

Sobre una recta **t** se ubica un punto A. Sobre el punto A se construye el ángulo Z A como se vio en la sección (16.2); con el centro en A y radio **b** se marca el punto C sobre **t.** Con centro en A y radio **c,** se traza un arco que corta al otro lado del ángulo en B. Al unir los puntos A, B, C, queda el triángulo ABC pedido.

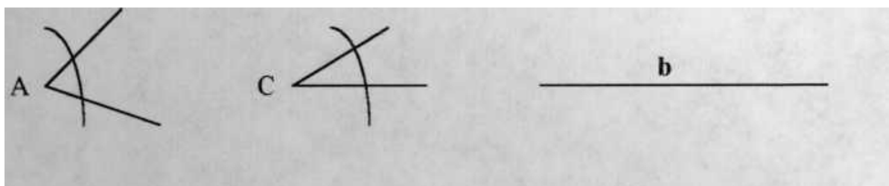




Gráfica (5)

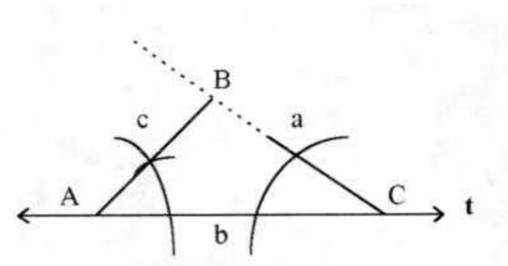
- Dados un lado y los ángulos contiguos a él.

Sean Z A, ^ C los ángulos y **b** el lado.



Gráfica (6)

Sobre una recta **t** fijamos un punto, a partir del cual construimos el ángulo A. Con centro en A y radio **b** se fija el punto C. Sobre el punto C se construye el ángulo A. Se prolongan los lados hasta que se cortan en un punto B, quedando el triángulo ABC pedido.



Gráfica (7)

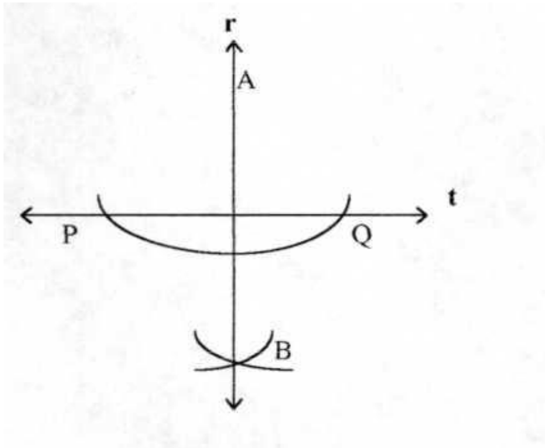
1.15.4. Construcción de perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares entre sí, si se cortan formando un ángulo recto, en cuyo caso los otros tres ángulos son también rectos.

- Perpendicular a una recta por un punto exterior.

Sean **t** la recta y A el punto exterior. Haciendo centro en A y con radio mayor que la distancia del punto a la recta, se traza un arco que corta a **t** en P y Q. Se hace centro en P, y con radio AP se traza un arco en el semiplano opuesto al que contiene el punto

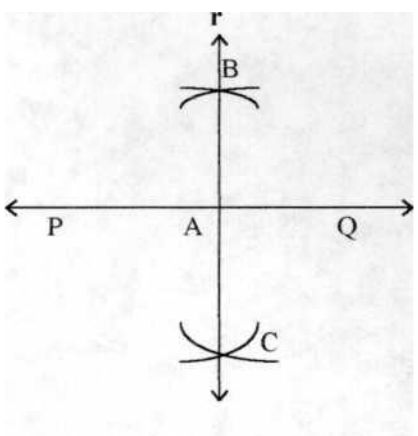
A. Con centro en Q se procede similarmente y los arcos se cortan en B; al unir los puntos A y B se obtiene la recta **r** pedida.



Gráfica (8)

Perpendicular a una recta por un punto de ella.

Sean **t** una recta y A un punto de ella. Con centro en A y radio cualquiera se trazan arcos que cortan a **t** en P y Q. Con centro en P y Q respectivamente y radio mayor que AP se trazan arcos en ambos semiplanos que se cortan en B y C. Se une luego B y C que es la recta **r** pedida.



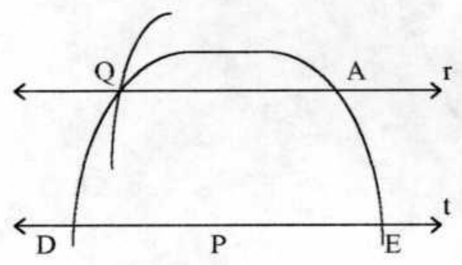
Gráfica (9)

1.15.5. Construcción de paralelas.

Dos rectas de un mismo plano son paralelas cuando no tienen punto común.

- Paralela a una recta por un punto exterior.

Sea **t** una recta, A un punto exterior de ella. Se determina un punto P en **t;** con centro en P y radio AP se traza una semicircunferencia que corta a **t** en D y **E.** Con centro en **E** y radio DA se traza un arco que corta a la semicircunferencia en Q. Se unen los puntos A y Q obteniéndose la recta r pedida.



Gráfica (10)

1.16. TEOREMA DE THALES Y ALGUNAS APLICACIONES.

Varias paralelas que cortan a dos transversales, determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.

Sean las paralelas **a, b, c, d** y las transversales **t** y **r.** Se designa **A, B, C, D, E, F,** G, H; puntos de corte. Gráfica (11).

Si **u** es la unidad de medida de **t** y **v** es la unidad de medida de **r** se afirma que:

$$m\left(\overline{AB}\right) = xu \qquad m\left(\overline{BC}\right) = yu$$

$$\text{Luego, } \frac{m\left(\overline{AB}\right)}{m\left(\overline{BC}\right)} = \frac{x}{y} \quad (1)$$

Porque la razón de dos cantidades homogéneas es igual a la de sus medidas tomadas con una misma unidad. Pastor Rey*®

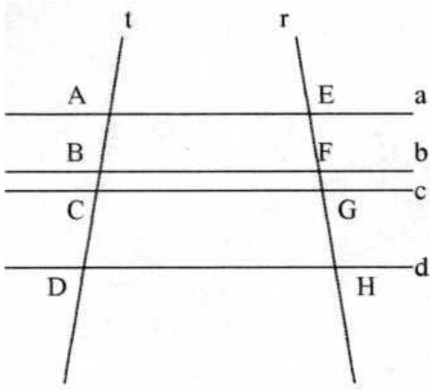
$$\text{Ahora: } m\left(\overline{EF}\right) = xv \qquad m\left(\overline{FG}\right) = yv$$

$$\text{Luego, } \frac{m\left(\overline{EF}\right)}{m\left(\overline{FG}\right)} = \frac{x}{y} \quad (2)$$

$$\therefore \frac{m\left(\overline{AB}\right)}{m\left(\overline{BC}\right)} = \frac{m\left(\overline{EF}\right)}{m\left(\overline{FG}\right)}$$

[16] PASTOR R. y ADAM P., Elementos de aritmética racional, op., cit., p. 202.

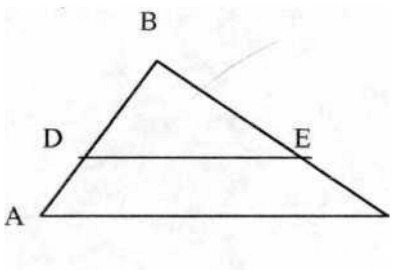
En adelante nombraremos como AB.



Gráfica (11)

Se enunciarán algunas aplicaciones del teorema de Thales, y se sugiere al profesor consultar a Gómez Raúl".

1.16.1. Toda paralela a un lado de un triángulo determina en las rectas de los otros dos lados segmentos proporcionales.



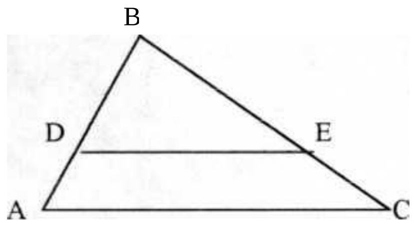
Gráfica (12)

En el ΔABC, si $\overline{DE} \,//\, \overline{AC}$, entonces, $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{BE}{EC}$.

---

[17] GOMEZ Raúl y otros, Matemáticas Moderna estructurada 4, Norma, Bogotá, 1976, p. 213.

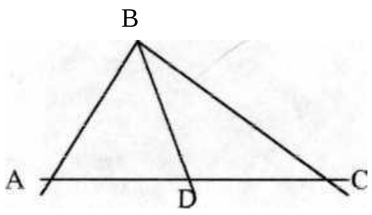
1.16.2. El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y tiene como medida la mitad de este, (paralela media).



Gráfica (13)

En el AABC, sean D, E puntos medios de AB y BC. Entonces: DE ¡! AC y DE-^.

1.16.3. Toda bisectriz de un ángulo interior de un triángulo divide al lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.



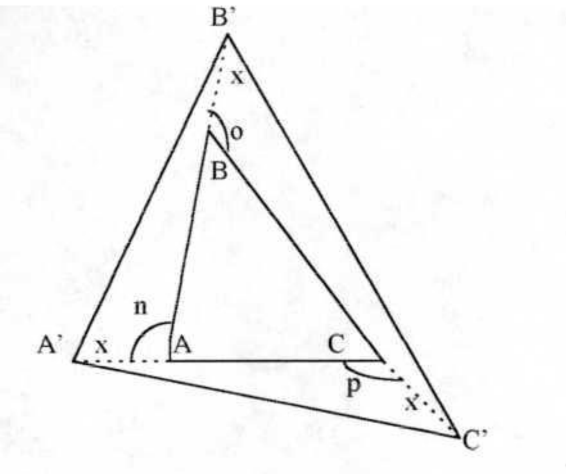
Gráfica (14)

En el ΔABC, sea $\overline{BD}$ bisectriz. Entonces, $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$.

1.17. ALGUNOS TEOREMAS BÁSICOS.

1.17.1. Si se prolonga un extremo en cada uno de los lados de un triángulo equilátero un segmento x, al unir los extremos se genera otro triángulo también equilátero.

Demostración.



Gráfica (15)

Hipótesis: Sea ΔABC equilátero

Sea x la prolongación.

Tesis: $\Delta A'B'C'$ equilátero

Por ser los ángulos $\measuredangle$ n, $\measuredangle$ o, $\measuredangle$ p exteriores.

entonces $\measuredangle n = \measuredangle C + \measuredangle B$

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle n = \measuredangle C + \measuredangle B \\ \measuredangle o = \measuredangle A + \measuredangle C \\ \measuredangle p = \measuredangle A + \measuredangle B\end{array}\right\} (1)$$

Luego $\measuredangle n = \measuredangle o = \measuredangle p$. (2)

Los segmentos $\overline{AB'} = \overline{BC'} = \overline{CA'}$, por suma de segmentos iguales así:

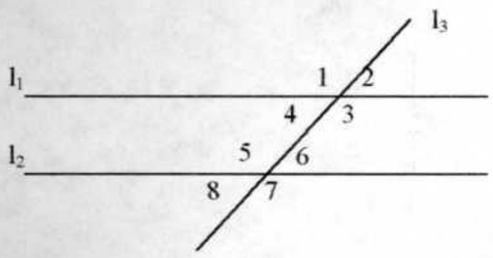
De (1) y (2) se tiene que $\Delta A'B'A \cong \Delta B'BC' \cong \Delta A'CC'$ por tener tres elementos respectivamente iguales (LAL).

Observaciones.

- El profesor orientará a los estudiantes en el tema, congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA).

- Discutirá con los estudiantes los siguientes teoremas:

1.17.2. Dos paralelas cortadas por una transversal forman cuatro ángulos agudos congruentes entre sí, y otros cuatro ángulos obtusos también congruentes entre sí.



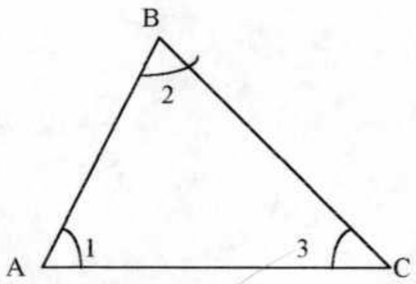
Esto es: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 3 \cong \measuredangle 5 \cong \measuredangle 7$

$\measuredangle 2 \cong \measuredangle 4 \cong \measuredangle 6 \cong \measuredangle 8$

Gráfica (16)

El lector podrá ver las deducciones en Gómez Raúl y otros.

1.17.3. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.



Gráfica (17)

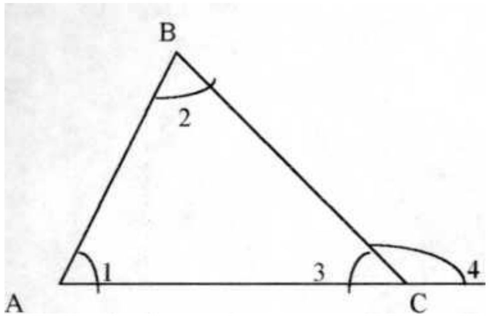
Esto es: $\measuredangle 1 + \measuredangle 2 + \measuredangle 3 = 2R = 180^\circ$

Ver la demostración en Pastor Rey, Puig Adam[19].

1.17.4. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

---

[18] GOMEZ Raúl y otros, Matemática moderna estructurada 3, Norma, Bogotá, 1976, p. 81.

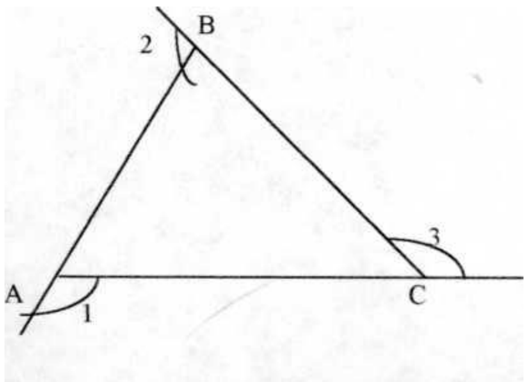


Gráfica (18)

Esto es: JL 4 = z'.\ + ^2

Ver la demostración en Pastor Rey, Puig Adam.

1.17.5. La suma de los ángulos exteriores de un triángulo es igual a cuatro rectos.



Gráfica (19)

Esto es: ^ 1 + ^ 2 + ^3 = 4R = 360° Ver Cardona V. Arturo^'.

[19] PASTOR R. y ADAM P., Elementos de geometría racional, op., cit., p. 57.
[20] PASTOR R. y ADAM P., Ibid, p. 58.
[21] CARDONA V. Arturo, Geometría, Bedout, Medellín, p. 48.

2. ANEXO 2 (PRUEBAS)

2.1. PRE-PRUEBA.

1. La siguiente tabla describe el número de horas diarias trabajadas por un obrero y el correspondiente salario recibido. Escribe en el espacio en blanco el número que hace falta.

Horas diarias	**Salario**
1	3000
2	-
-	12.000
15	-
n	-

CUADRO 1

2. El siguiente cuadro relaciona el número de obreros y el número de días que tardan en construir un muro.

Obreros	Días
30	10
15	-
-	5
-	-
6	-

CUADRO 2

3. El siguiente cuadro relaciona la velocidad de un móvil y el tiempo que tarda en ir de un lugar a otro. Escribe en el espacio el número que hace falta.

Velocidad	Horas
10 Km. por hora	30
5 Km. por hora	-
2 Km. por hora	-
1 Km. por hora	-
-	25
-	50

CUADRO 3

4. El siguiente cuadro relaciona el número de obreros, el número de horas trabajadas cada día y el número de días que se demoran en construir una cancha. Completa los espacios.

Obreros	Horas diarias	días
10	8	30
5	4	-
-	6	50
2	-	60
20	8	-

CUADRO 4

5. En un mapa 1 centímetro representa 1 Kilómetro de la distancia real entre dos lugares. Si entre una ciudad A y una ciudad B hay una distancia de 3/8 de centímetro. Cuál es la distancia real entre ambas ciudades?.

6. A una velocidad de 60 Kilómetros por hora, un automóvil tarda para ir de un lugar a otro 6 horas. Al aumentar su velocidad a 90 Km. por hora. Cuánto tiempo tardará en hacer el recorrido?,

7. Tres hermanos cuyas edades son 2,5 y 10 años reparten 120 caramelos de tal forma que al mayor corresponda 1/5, al del medio 3/10 y al menor 1/2 del total de caramelos. Cuántos caramelos corresponden a cada uno de los hermanos?.

2.2. PRUEBA INICIAL.

- Primera parte.

1. La siguiente tabla describe el número de horas diarias trabajadas por un obrero y el correspondiente salario recibido. Escribe en el espacio en blanco, el número que hace falta. Explique su respuesta.

HORAS DIARIAS	SALARIO
1	3.000
2	-
-	12.000
15	-
N	-

2. De cada enunciado de la izquierda traza una línea a sólo uno de los de la derecha. "Si 20 obreros tardan 100 días en construir un puente, entonces;

10 obreros tardarán

40 obreros tardarán

5 obreros tardarán

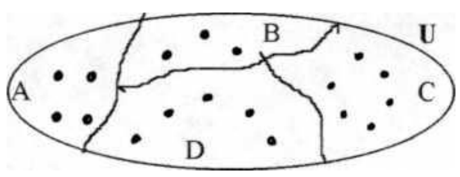
60 obreros tardarán

100 obreros tardarán

más de 100 días

menos de 100 días

El siguiente diagrama corresponde a un conjunto U, conformado por elementos de igual naturaleza y fraccionado en partes iguales A, B, C, D, permite resolver los numerales 3, 4 y 5 de esta prueba.



1. Que relación observan entre las partes A, B, C, D con U ?. Explique.

2. Al sumar las partes A, B, C, D, de U, que se obtiene ?.

3. Que parte es:

A de U. Explica.

B de U. Explica.

C de U. Explica.

D de U. Explica.

4. Una balanza de reloj y aguja, está graduada en forma tal que por cada vuelta de la aguja se miden 20 Kilogramos de peso. Cuánto pesa un cuerpo que hace girar la aguja tres vueltas y media (3 ½)?.

7. En un mapa un centímetro representa un Kilómetro de distancia real entre dos lugares. Si entre una ciudad A y una ciudad B hay una distancia de 3/8 de centímetros. Cuál es la distancia real entre ambas ciudades ?.

- Segunda parte.

Se desea llenar de agua un estanque cuya capacidad es de 720 litros, disponemos para ello de 4 grifos (llaves) que arrojan agua así:

Grifo A, 8 litros por minuto. Grifo B, 9 litros por minuto.

Grifo C, 12 litros por minuto. Grifo D, 15 litros por minuto.

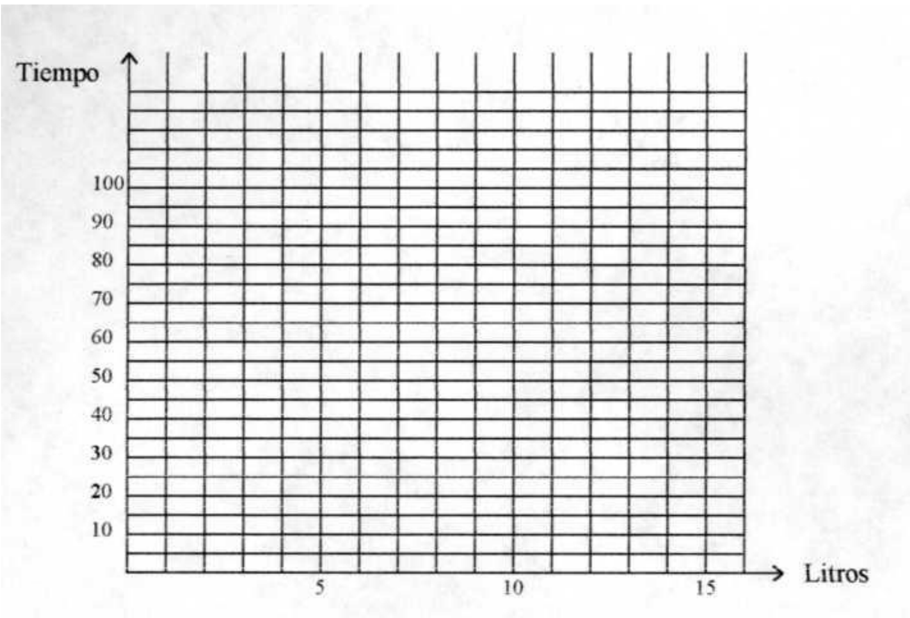
Resolver los siguientes interrogantes:

1. Cuánto tardará cada uno de los grifos, por separado, en llenar el estanque ?.

2. Completa la tabla con los resultados de! problema 1.

Litros	8	9	12	15
Tiempo				

3. Ubica en el siguiente plano los datos anteriores y une los puntos:



4. Los grifos A y C juntos, cuánto tardarán en llenar el estanque ?.

- Tercera parte.

El siguiente cuadro relaciona el número de obreros, el número de horas diarias que trabaja cada obrero, y el número de días que se demoran en construir una cancha. Completa los espacios en blanco, y explica tu respuesta.

OBREROS	HORAS DIARIAS	DIAS
10	8	30
5	4	-
-	6	50
2	-	60
20	8	-

CUADRO 5

2.3. PRUEBA FINAL.

1. Una balanza de reloj y aguja está graduada en forma tal que por cada vuelta de la aguja se miden 20 kilogramos de masa. Cuántos kilogramos de masa tiene un cuerpo que hace girar la aguja tres vueltas y un cuarto (3 Vi) ?.

2. A una velocidad de 60 Km. por hora, un automóvil tarda para ir de un lugar a otro 6 horas. Al aumentar la velocidad a 90 Km. por hora. Cuánto tiempo tardará en hacer el recorrido ?.

3. El siguiente cuadro relaciona; número de obreros, número de horas diarias trabajadas y número de días empleados en construir una obra, completa los espacios y explica tu respuesta.

OBREROS	HORAS DIARIAS	DIAS
10	8	30
5	4	-
-	6	50
2	-	60
20	8	-

CUADRO 6

4. Repartir 40 manzanas entre dos hermanos cuyas edades son 3 y 5 años, en forma directamente proporcional a las edades.

5. En el problema anterior hacer el reparto en forma inversamente proporcional a las edades.