

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS

TRABAJO DE GRADO

**MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MIXTOS APLICADO A
LA ECUACIÓN DE POISSON**

JACOB ANDRES HENAO BUELVAS

Asesora:

PhD. Catalina Domínguez García

Profesora Instituto de Matemáticas

Universidad de Antioquia

2 0 2 0

Resumen

El objetivo que tiene este trabajo es el de construir y definir los métodos de elementos mixtos aplicados a la ecuación de Poisson. En el inicio se muestra especial interés sobre los espacios de Sobolev y en definitiva en los espacios de Hilbert debido a sus ricas propiedades al momento de formular problemas variacionales. Estudiamos estos espacios, enunciando teoremas importantes como el Teorema de representación de Riesz, Teorema de Lax-Milgram y Teorema de Céa; según las características de la forma bilineal asociada al problema variacional estos son clasificados como *problema variacional simétricos* o *problema variacional no simétricos*, en esta teoría también establecemos criterios que garantizan la existencia y unicidad de su respectiva solución. El desarrollo del trabajo nos lleva a analizar un problema de mínimos con una restricción que tras estructurar una función de Lagrange evoluciona a un problema de punto de silla del que nos encargamos garantizar su solución definiendo condiciones, propiedades para las formas bilineales y operadores que aparecen en este; de esta motivación surge el Teorema de descomposición de Brezzi. Después de trasladar estos resultados a subespacios discretos procedemos a aplicar esta teoría a la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet, así se construyen dos problemas variacionales mixtos : *Problema mixto primal* y *problema mixto dual*.

Se estudia los elementos de Raviar-Thomas con $k = 0$ en el caso bidimensional, para resolver numéricamente un problema mixto dual asociado a la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet: La implementación numérica se apoya en el artículo [4] y se realiza en MATLAB. Luego de obtener los resultados, calculamos el error $\|u - u_h\|_{L_2}$ y su tasa de convergencia, incluimos tablas y gráficas para visualizar los resultados.

Índice general

1. Preliminares	6
1.1. <i>Espacios de Sobolev</i>	9
1.2. <i>Espacios de Hilbert</i>	12
1.3. <i>Teorema de Representación de Riesz</i>	14
1.4. <i>Problemas variacionales simétricos</i>	16
1.5. <i>Método de elementos finitos</i>	23
2. Problemas de punto de silla	26
3. Métodos mixtos aplicados a la ecuación de Poisson	42
3.1. <i>Elementos de Raviart-Thomas</i>	47
3.2. <i>Resultados numéricos</i>	51

Introducción

El presente trabajo consta de tres capítulos en los que se hace un recorrido teórico enfocado en el método de elementos finitos hasta consolidar la formulación de un problema variacional de punto de silla que posteriormente será aplicado a la ecuación de Poisson.

El Capítulo 1 “Preliminares” tiene como punto de partida el espacio de funciones medibles-Lebesgue que se utilizarán en formulaciones de problemas variacionales resultantes de una ecuación diferencial (ecuación de Poisson con condiciones de frontera), según las características de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ que determina al problema variacional, dicho problema se clasifica como *problema variacional simétricos* o *problema variacional no simétricos*. Se definen los espacios de Sobolev, espacios de Hilbert, y dos teoremas importantes: Teorema de representación de Riesz y Teorema de Lax-Milgram. Con estos teoremas se garantizará la existencia y unicidad de la solución para los problemas variacionales definidos ya sea en el espacio de Hilbert V o bien, en el subespacio discreto $V_h \subset V$; estas soluciones se pondrán a comparar y recurriremos al Teorema de Céa que hace un estimativo de error $\|u - u_h\|_V$.

El método de elementos finitos soluciona numéricamente una ecuación diferencial parcial, allí se definen los elementos como parte de una discretización del dominio Ω en el que está definida la ecuación diferencial, veremos que si bien podemos definir elementos con geometrías bastante variadas solo nos interesaremos en aquellos que poseen una estructura triangular (caso bidimensional). Se hace mención de algunas de sus propiedades como también del espacio de funciones que se definen en él.

En el Capítulo 2 “Problemas de punto de silla” pasaremos a hacer un estudio sobre problemas variacionales de punto de silla sobre espacios de Hilbert, analizando y garantizando bajo algunas condiciones existencia y unicidad de la solución. El punto de partida en este capítulo es resolver un problema de mínimos con una restricción que eventualmente así como en el cálculo vectorial, tras construir la función de Lagrange asociada al problema surge una nueva incógnita λ multiplicador de Lagrange que será tarea encontrar; el nuevo problema es analizado usando operadores y formas bilineales y la estabilidad de su solución recae sobre el Teorema de descomposición de Brezzi el cual necesita que las formas bilineales involucradas $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ satisfagan la V -elipticidad y condición Inf-Sup respectivamente. Esta teoría se analiza y verifica sobre subespacios discretos dando lugar a una formulación variacional discreta.

El problema variacional de punto de silla aplicado a la ecuación de Poisson es tema del Capítulo 3, allí hablaremos sobre los métodos de elementos mixtos, llamados así debido a que combinan dos tipos de elementos. En este mismo capítulo se hace una implementación numérica aplicando el

método de elementos finitos a un Problema variacional mixto dual asociado a la ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Dirichlet sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Se define previamente los elementos de Raviart-Thomas (RT_k) para el caso $k = 0$ (caso bidimensional) y se describen algunas propiedades.

Para obtener los resultados numéricos nos apoyamos en el artículo [4]. Utilizaremos el software (MATLAB) para ejecutar los códigos de algoritmo; realizando calculos de error $\|u - u_h\|_{L_2}$ con su tasa de convergencia, presentaremos tablas de datos y gráficas de solución u_h, σ_h derivados del Problema mixto dual.

Capítulo 1

Preliminares

Es necesario hacer un repaso de algunos conceptos para el buen desarrollo de este trabajo y por ello, nos apoyaremos sobre todo en el libro de Brenner & Scott [1]. Este capítulo pretende exhibir el espacio de funcionales que se utilizan en la formulación variacional de ecuaciones diferenciales.

Nos referiremos a “dominio” como un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n medible-Lebesgue con interior no vacío. Nos enfocaremos en aquellas funciones reales f , en un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con medida-Lebesgue

$$\int_{\Omega} f(x)dx \text{ (medida Lebesgue).}$$

Para $1 \leq p < \infty$ definimos la norma:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

y para $p = \infty$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup } \{|f(x)|^p : x \in \Omega\}.$$

De manera general definimos los espacios Lebesgue así:

$$L^p(\Omega) = \{f : \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}.$$

Definición 1.0.1. Sea V un espacio vectorial, una norma $\|\cdot\|$ es una función en V de reales positivos que cumple las siguientes propiedades.

- (I) $\|v\| \geq 0$ para todo $v \in V$
 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- (II) $\|c \cdot v\| = |c| \cdot \|v\|$ para todo $c \in \mathbb{R}, v \in V$
- (III) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ para todo $v, w \in V$

Recordemos que una norma induce una métrica o distancia, y a partir de una métrica se puede inducir una topología.

Un espacio métrico V es llamado completo si cualquier sucesión de Cauchy converge en V .

Definición 1.0.2. Un espacio vectorial normado $(V, \|\cdot\|)$ es de Banach si V es completo.

Formulación débil de problemas de valores de frontera

Consideremos el siguiente problema de valor de frontera

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= f \text{ en } (0, 1) \\ u &= 0, \quad u'(1) = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Asumiendo el hecho de que u sea la solución y tomando v cualquier función (suave) tal que $v(0) = 0$, aplicando integración por partes definimos:

$$(f, v) := \int_0^1 f v dx = - \int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} v dx = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx - \left. \frac{du}{dx} v \right|_0^1 = \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx =: a(u, v).$$

Definiremos el espacio V :

$$V := \{v \in L^2(0, 1) : a(v, v) < \infty \text{ y } v(0) = 0\}.$$

Así pues la solución débil del problema (1.1) viene dada por $u \in V$ tal que $a(u, v) = (f, v)$ para todo $v \in V$; Una cuestión que resolveremos es sobre el tipo de derivadas que ha de realizarse en el proceso de construcción del problema variacional.

Una razón clave por la que se prefiere la integral de Lebesgue sobre la integral de Riemann es el aspecto de “integridad” que disfruta, es decir, que los límites apropiados de las funciones integrables son integrables, una propiedad que la integral de Riemann no tiene.

Para las formulaciones variacionales a desarrollar no necesitamos los valores de las derivadas puntuales. Es necesario desarrollar una noción global de derivadas más adecuada para los espacios Lebesgue.

Introduciremos una notación abreviada para derivadas parciales (Clásica): la notación de multi-índices.

Un multi-índice α , es una n -tupla de enteros no negativos α_i donde la longitud de α viene dada por $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$. Para $\phi \in C^\infty$ denotamos por

$D^\alpha \phi$, $D_x^\alpha \phi$, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \phi$, $\phi^{(\alpha)}$ y $\partial_x^\alpha \phi$ la derivada parcial usual (puntual)

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \phi.$$

Si consideramos el vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ definimos $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Notemos que si x es reemplazado por el símbolo $\frac{\partial}{\partial x} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, entonces la definición de x^α es consistente con la definición previa de $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha$.

Los espacios de Sobolev se caracterizan por ser espacios vectoriales normados, que al hacer parte de los espacios Lebesgue $L^p(\Omega)$ se aprovechan un montón de virtudes que se conocerán más adelante.

Definición 1.0.3. Para una función continua u , el soporte de u se define como la clausura del conjunto $\{x : u(x) \neq 0\}$; si este conjunto es compacto (acotado) y es un subconjunto del interior de Ω , entonces se dice que u tiene “soporte compacto” respecto a Ω (fuera del soporte de una función, esta se define cero, extendiéndola para que se defina en todo el dominio \mathbb{R}^n).

Definición 1.0.4. Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n . Denotamos con $\mathcal{D}(\Omega)$ o $C_0^\infty(\Omega)$ el conjunto de funciones $C^\infty(\Omega)$ con soporte compacto en Ω .

Dado un dominio Ω , el conjunto de funciones localmente integrables se denota por

$$L_{loc}^1(\Omega) := \{f : f \in L^1(K) \text{ para todo compacto } K \subset \Omega\},$$

una conveniencia de notación es que $C^0(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Introduciremos un nuevo concepto de derivadas.

Definición 1.0.5. Dada $f \in L_{loc}^1(\Omega)$ se dice que f tiene derivada débil, $D_w^\alpha f$ si existe $g \in L_{loc}^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} g(x)\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x)\phi^\alpha(x)dx \text{ para todo } \phi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si existe tal g , definimos $D_w^\alpha f := g$.

Los siguientes ejemplos fueron inspirados por el libro de Brenner & Scott [1], con ellos se comprenderá mejor la teoría previa.

Ejemplo 1.0.6. Consideremos $n = 1$, $\Omega = [-1, 1]$, y sea $f = 1 - |x|$, para $|\alpha| = 1$ determinemos que es $D_w^\alpha f$.

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x)\phi'(x)dx &= \int_{-1}^0 f(x)\phi'(x)dx + \int_0^1 f(x)\phi'(x)dx \\
 &= - \int_{-1}^0 f'(x)\phi(x)dx + f(x)\phi(x)|_{-1}^0 - \int_0^1 f'(x)\phi(x)dx + f(x)\phi(x)|_0^1 \\
 &= - \int_{-1}^0 (1)\phi(x)dx + f\phi(0^-) - \int_0^1 (-1)\phi(x)dx - f\phi(0^+) \\
 &= - \int_{-1}^0 (1)\phi(x)dx - \int_0^1 (-1)\phi(x)dx.
 \end{aligned}$$

Luego

$$D_w^\alpha f = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ -1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Ejemplo 1.0.7. Sea ρ una función suave definida para $0 < r \leq 1$ que satisface

$$\int_0^1 |\rho'(r)|r^{n-1}dr < \infty,$$

sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ y la función definida mediante $f(x) = \rho(|x|)$ para todo $x \in \Omega$, verifiquemos que $g(x) = \rho'(|x|)\frac{x^\alpha}{|x|} = D_w^\alpha f$ para $|\alpha| = 1$.

Teniendo en cuenta que $\phi^1(x) = \frac{\partial^1}{\partial x_j}\phi$ (derivada parcial de grado uno sobre la j -ésima componente), procedemos aplicando el Teorema de Green:

$$\int_{\Omega} f(x)\phi^1(x)dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial^1}{\partial x_j} f(x)\phi(x)dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\phi(x)nds,$$

dado que $\phi \in C_0^\infty$ y $\frac{\partial|x|}{\partial x_j} = \frac{x^\alpha}{|x|}$,

$$\int_{\Omega} f(x)\phi^1(x)dx = - \int_{\Omega} \rho'(|x|)\frac{\partial|x|}{\partial x_j}\phi(x)dx = - \int_{\Omega} \rho'(|x|)\frac{x^\alpha}{|x|}\phi(x)dx.$$

Teorema 1.0.8. Sea α arbitrario y $\psi \in C^{|\alpha|}(\Omega)$. Entonces D_w^α existe y $D_w^\alpha\psi = D^\alpha\psi$.

1.1. Espacios de Sobolev

Pretendemos generalizar las normas y espacios de Lebesgue usando la noción de derivada débil D_w^α .

Definición 1.1.1. Sea k un entero no negativo y $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Suponiendo que D_w^α existe para $|\alpha| \leq k$, se define la norma Sobolev como

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para el caso $p = \infty$

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|D_w^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

En cualquier caso, se definen los espacios de Sobolev como

$$W_p^k(\Omega) := \left\{ f \in L^1_{loc}(\Omega) : \|f\|_{W_p^k(\Omega)} < \infty \right\}. \quad (1.2)$$

Nota. En el caso en el que $p = 2$, el espacio (1.2) a menudo se denota por $H^k(\Omega)$, así $H^k(\Omega) = W_2^k(\Omega)$.

Teorema 1.1.2. *Los espacios $W_p^k(\Omega)$ son espacios de Banach.*

Teorema 1.1.3. *Sea Ω cualquier conjunto abierto. Entonces $C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$ es denso en $W_p^k(\Omega)$ para $p < \infty$.*

Definición 1.1.4. Para k un entero no negativo y $f \in W_p^k(\Omega)$. Se define la seminorma como

$$|f|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D_w^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{para } 1 \leq p < \infty.$$

Para el caso $p = \infty$

$$|f|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha|=k} \|D_w^\alpha f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Definición 1.1.5. Denotamos la completación de $\mathcal{D}(\Omega)$ respecto a la norma Sobolev $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ por $H_0^m(\Omega)$, es decir

$$H_0^m(\Omega) := \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}}.$$

Proposición 1.1.6. *Para k y m enteros no negativos tal que $k \leq m$, para p cualquier real tal que $1 \leq p \leq \infty$. Entonces $W_p^m(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.*

Proposición 1.1.7. *Para k entero no negativo, p y q reales tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Entonces $W_q^k(\Omega) \subset W_p^k(\Omega)$.*

A continuación, del libro de Braess [2] extraemos un resultado que relaciona la norma $\|\cdot\|_{W_2^0(\Omega)}$ y $|\cdot|_{W_2^1(\Omega)}$ en el espacio $H_0^1(\Omega)$, posteriormente requeriremos este resultado para garantizar la estabilidad de algunos problemas variacionales. Para efectos de la demostración recuerde que $\mathcal{D}(\Omega)$ y C_0^∞ denotan el mismo espacio.

Desigualdad de Poincaré-Friedrichs

Supongamos que Ω está contenido en un cubo n-dimensional con longitud lateral s . Entonces

$$\|v\|_{W_2^0(\Omega)} \leq s \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Demostración. Ya que C_0^∞ es denso en $H_0^1(\Omega)$ es suficiente establecer la desigualdad para $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Supongamos que para $W := \{(x_1, x_2, \dots, x_n); 0 < x_i < s\}$, nuestro dominio es tal que $\Omega \subset W$ y además hacemos $v = 0$ para $x \in W \setminus \Omega$. Entonces

$$v(x_1, x_2, \dots, x_n) = v(0, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Claramente, debido a que $v \in C_0^\infty(\Omega)$ entonces $v(0, x_2, \dots, x_n) = 0$ luego

$$\begin{aligned} v(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \int_0^{x_1} \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) dt \\ |v(x_1, x_2, \dots, x_n)| &= \left| \int_0^{x_1} \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) dt \right| \\ |v(x_1, x_2, \dots, x_n)| &\leq \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) \right| dt, \end{aligned}$$

haciendo uso de la desigualdad Cauchy-Schwarz tenemos

$$\begin{aligned} |v(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 &\leq \int_0^{x_1} 1^2 dt \int_0^{x_1} \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^s 1^2 dt \int_0^s \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt \\ &= s \int_0^s \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt, \end{aligned}$$

ahora, integrando con respecto a la variable x_1 tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^s |v(x)|^2 dx_1 &\leq \int_0^s s \int_0^s \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(t, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dt dx_1 \\ &\leq s \int_0^s dt \int_0^s \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1 \\ &= s^2 \int_0^s \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(x_1, x_2, \dots, x_n) \right|^2 dx_1. \end{aligned}$$

Para completar la prueba, integramos sobre las demás coordenadas y obtenemos

$$\int_W |v(x)|^2 dx \leq s^2 \int_W \left| \frac{\partial^1}{\partial x_1} v(x) \right|^2 dx \leq s^2 \sum_{|\alpha|=1} \|D_w^\alpha v(x)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

de lo cual se sigue que $\|v\|_{W_2^0(\Omega)} \leq s \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$ para $v \in C_0^\infty$.

□

Definición 1.1.8. Una forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ sobre un espacio vectorial $(V, +; K)$ es una aplicación $b : V \times V \rightarrow R$ tal que: $v \mapsto b(v, w)$ y $w \mapsto b(v, w)$ para todo $v, w \in V$ son lineales. La forma bilineal es simétrica si $b(v, u) = b(u, v)$ para todo $u, v \in V$. Un producto interno (real), denotado por (\cdot, \cdot) , es una forma bilineal simétrica en un espacio lineal V que satisface:

(a) $(v, v) \geq 0$ para todo $v \in V$

(b) $(v, v) = 0 \iff v = 0$

Definición 1.1.9. Un espacio lineal V asociado a un producto interno definido en él se llama espacio de producto interno y se denota por $(V, (\cdot, \cdot))$.

Ejemplo 1.1.10. Espacios con producto interno.

(I) $V = \mathbb{R}^n$, $(x, y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$

(II) $V = L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega u(x)v(x)dx$

(III) $V = W_2^k(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $(u, v)_k := \sum_{|\alpha| \leq k} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}$

Teorema 1.1.11 (Desigualdad Schwarz). Si $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio con producto interno, entonces

$$|(u, v)| \leq (u, u)^{1/2} (v, v)^{1/2}.$$

Proposición 1.1.12. $\|v\| := \sqrt{(v, v)}$ define una norma en el espacio con producto interno $(V, (\cdot, \cdot))$.

1.2. Espacios de Hilbert

Definición 1.2.1. Sea $(V, (\cdot, \cdot))$ un espacio con producto interno. Si el espacio lineal normalizado $(V, (\cdot, \cdot))$ es completo, entonces $(V, \|\cdot\|)$ es llamado un Espacio de Hilbert.

Definición 1.2.2. Sea H un espacio de Hilbert y $S \subset H$ un subconjunto cerrado en H . (Recordemos que S se denomina lineal si $u, v \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $u + \alpha v \in S$). Entonces S es subespacio de H .

Proposición 1.2.3. Si S es subespacio de H , entonces $(S, (\cdot, \cdot))$ es también un espacio Hilbert.

Ejemplo 1.2.4 (Subespacios de Hilbert). (I) Sea $T : H \rightarrow K$ un funcional lineal continuo de H en otro espacio lineal K , entonces $\ker(T)$ es subespacio de H .

Nota. $\ker(T) := \{v \in H : T(v) = 0_K\}$, es la linealidad y continuidad de T los que garantizan cerradura de $\ker(T)$.

(II) Sea $x \in H$ y definimos $x^\perp := \{v \in H : (v, x) = 0\}$. Entonces x^\perp es un subespacio de H . Para ver esto tenga en cuenta que $x^\perp = \ker L_x$, donde L_x es el funcional lineal.

$$L_x : v \mapsto (v, x)$$

$$|L_x(v)| = |(v, x)| \leq \|v\| \|x\|.$$

Implicando que L_x es acotado y por tanto continuo. Esto prueba que x^\perp es subespacio de H en vista del ítem anterior.

(III) Sea $M \subset H$, definimos

$$M^\perp := \{v \in H : (x, v) = 0 \text{ para todo } x \in M\}.$$

Tenga en cuenta que:

$$M^\perp = \bigcap_{x \in M} x^\perp,$$

cada x^\perp es un subespacio (cerrado) de H . Por lo tanto, M^\perp es un subespacio de H .

Teorema 1.2.5 (Ley del paralelogramo). Sea $\|\cdot\|$ la norma asociada con el producto interno (\cdot, \cdot) en H , entonces

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2).$$

Teorema 1.2.6. Sea M un subespacio del espacio de Hilbert H . Sea $v \in H \setminus M$ y $\delta := \inf\{\|v - w\| : w \in M\}$. Entonces existe $w_0 \in M$ tal que

$$(I) \quad \|v - w_0\| = \delta$$

$$(II) \quad v - w_0 \in M^\perp$$

Como consecuencia de este teorema tenemos: Ya que M es subespacio de H y $v \in H$, podemos escribir $v = w_0 + w_1$, donde $w_0 \in M$ y $w_1 = (v - w_0) \in M^\perp$. Esta descomposición es única.

Nota. Algo que necesitaremos recordar es que $M \cap M^\perp = \{0\}$.

Consideraremos los siguientes operadores.

$$P_M : H \rightarrow M, \quad P_M^\perp : H \rightarrow M^\perp,$$

definidas por,

$$P_M(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in M \\ w_0 & \text{si } v \in H \setminus M \end{cases},$$

$$P_M^\perp(v) := \begin{cases} 0 & \text{si } v \in M \\ v - w_0 & \text{si } v \in H \setminus M \end{cases}.$$

La descomposición única implica que $P_M^\perp = P_{M^\perp}$.

Proposición 1.2.7. *Dado un subespacio M de H y $v \in H$, hay una descomposición única*

$$v = P_M(v) + P_{M^\perp}(v),$$

donde $P_M : H \rightarrow M$ y $P_{M^\perp} : H \rightarrow M^\perp$. En resumidas cuentas:

$$H = M \oplus M^\perp.$$

1.3. Teorema de Representación de Riesz

Considerado uno de los teoremas mas importantes para el análisis funcional, enunciaremos y demostraremos dicho teorema tomando como libro guía [1], prestemos atención al espacio donde aplica este teorema.

Dado un espacio de Hilbert H y $u \in H$, un funcional lineal continuo L puede definirse en H por

$$L_u(v) = (u, v).$$

El siguiente teorema prueba que lo opuesto también es válido.

Teorema 1.3.1 (Representación de Riesz). *Cualquier funcional lineal continuo $L : H \rightarrow \mathbb{R}$ puede representarse univocamente como*

$$L(v) = (u, v) \text{ para todo } v \in H$$

para algún $u \in H$. Además, tenemos

$$\|L\|_{H'} = \|u\|_H.$$

Demostración. Unicidad: Si u_1 y u_2 satisfacen

$$L(v) = (u_1, v) = (u_2, v) = L(v) \text{ para todo } v \in H,$$

$$(u_1, v) - (u_2, v) = 0 \text{ para todo } v \in H,$$

$$(u_1 - u_2, v) = 0 \text{ para todo } v \in H.$$

En particular para $v = u_1 - u_2$,

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Concluimos pues $u_1 = u_2$.

Existencia: Sea $M = \{v \in H : L(v) = 0\}$. M es subespacio de H y $H = M \oplus M^\perp$.

Caso 1 Si $M^\perp = \{0\}$ entonces $M = H$, lo que implicaría $L \equiv 0$. Deducimos $u = 0$.

Caso 2 Si $M^\perp \neq \{0\}$ Si $z \in M^\perp, z \neq 0$. Entonces $L(z) \neq 0$. (Si $z \in M$ entonces $z \in M \cap M^\perp = \{0\}$, por tanto $z \neq 0$).

Para $v \in H$ y $\beta = \frac{L(v)}{L(z)}$

$$L(v - \beta z) = L(v) - \beta L(z) = 0.$$

Note que:

$$v - \beta z \in M,$$

$$P_M(v) = v - \beta z.$$

Tenemos $v = v - \beta z + \beta z$, además si $v \in M$ entonces $\beta = 0$, así mismo: $P_{M^\perp}(v) = \beta z \in M^\perp$. M^\perp tiene dimensión uno, pues $M^\perp = \{w : w = \beta z\} = \langle z \rangle$.

Escogiendo

$$u := \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z \in M^\perp,$$

$$(u, v) = \left(\frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z, v \right) = \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} (z, v).$$

Observe que $u \in M^\perp$

$$\begin{aligned} (u, v) &= (u, v - \beta z + \beta z) = (u, v - \beta z) + (u, \beta z) = (u, \beta z) \\ &= \left(\frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z, \beta z \right) = \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} \beta (z, z) = \beta L(z) = L(v). \end{aligned}$$

Queremos probar que $\|L\|_{H'} = \|u\|_H$.

Note que

$$\|u\|_H = \left\| \frac{L(z)}{\|z\|_H^2} z \right\| = \frac{|L(z)|}{\|z\|_H^2} \|z\|_H = \frac{|L(z)|}{\|z\|_H},$$

por otra parte puesto que

$$\begin{aligned} \|L\|_{H'} &= \sup_{v \neq 0 \in H} \frac{|L(v)|}{\|v\|_H} = \sup_{v \neq 0 \in H} \frac{|(u, v)|}{\|v\|_H} \\ &\leq \sup_{v \neq 0 \in H} \frac{\|u\| \|v\|}{\|v\|_H} = \|u\| = \frac{|L(z)|}{\|z\|} \leq \|L\|_{H'}. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|u\|_H = \|L\|_{H'}$. □

1.4. Problemas variacionales simétricos

Queremos garantizar resultados de existencia y unicidad para formulaciones variacionales de problemas de punto de frontera: Esto, haciendo uso de la teoría sobre espacios de Hilbert anteriormente referida.

Definición 1.4.1. Una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ sobre un espacio normado H se dice que es acotado si existe $M > 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_H \|v\|_H \quad \text{para todo } u, v \in H.$$

Se dice que $a(\cdot, \cdot)$ es coerciva en $V \subset H$, si existe $\alpha > 0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

El siguiente teorema es extraído del libro de Brenner & Scott [1]. La importancia de este teorema se reflejará al momento de trasladar problemas variacionales a subespacios de dimension finita (Discreto) donde se es más fácil hacer ciertas manipulaciones en pro de asegurar soluciones.

Teorema 1.4.2. Sea H un espacio de Hilbert y supongamos $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal, simétrica, acotada y coerciva en un subespacio $V \subset H$ entonces $(V, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.

Demostración. Como consecuencia inmediata de la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ es que bajo el supuesto de que $u \in V$ y $a(u, u) = 0$ entonces u se define idénticamente cero, de lo cual se sigue que $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en V .

Mostremos que V es completo:

Se define la norma de la energía como $\|u\|_E = \sqrt{a(u, u)}$, sea $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $(V, \|\cdot\|_E)$. Por la propiedad de coercividad entonces $\{u_n\}$ también es sucesión de Cauchy en $(H, \|\cdot\|_H)$. Para todo $\epsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que para todo $m, n > N$,

$$\sqrt{\alpha} \|u_m - u_n\| = \sqrt{\alpha} (\|u_m - u_n\|_H^2)^{1/2} \leq (a(u_m - u_n, u_m - u_n))^{1/2} = \|u_m - u_n\|_E \leq \epsilon.$$

Dado que H es completo, existe $v \in H$ tal que $u_n \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_H$. Ya que V es cerrado en H , $v \in V$. Puesto que $a(\cdot, \cdot)$ es acotado entonces $\|v - v_n\|_E \leq \sqrt{c_1} \|v - v_n\|_H$. Por tanto, $\{v_n\} \rightarrow v$ en la norma $\|\cdot\|_E$, entonces $(V, \|\cdot\|_E)$ es completo.

□

Planteamiento de un problema variacional simétrico : Un problema variacional cumple las siguientes tres condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I) } H \text{ es un espacio Hilbert} \\ \text{(II) } V \text{ es un subespacio cerrado de } H \\ \text{(III) } a(\cdot, \cdot) \text{ es una forma bilineal, acotada, simétrica y coerciva sobre } V \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$

Su formulación queda determinada por:

$$\text{Dado } F \in V' \text{ encontrar } u \in V \text{ tal que: } a(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V. \quad (1.4)$$

Teorema 1.4.3. *Asumiendo (I)-(III) de (1.3) entonces existe un único $u \in V$ que resuelve (1.4).*

Demostración. Puesto que $a(\cdot, \cdot)$ es un producto interno en V y $(V, \|\cdot\|_E)$ es de Hilbert, aplicando el Teorema de Representación de Riesz, para $F \in V'$ existe un único $u \in V$:

$$(u, v)_E = a(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V.$$

□

Problema variacional discreto.

Dado un subespacio de dimension finita $V_h \subset V$ y $F \in V'$ encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V_h. \quad (1.5)$$

Teorema 1.4.4. *Asumiendo (1.3), existe un único $u_h \in V_h$ que resuelve (1.5).*

Demostración. Se cumple que $(V_h, a(\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert . Por el teorema de representación de Riesz, existe $u_h \in V_h$ que resuelve (1.5). □

Estimadores de error

Propiedad de ortogonalidad: Sea u y u_h soluciones de (1.4) y (1.5) respectivamente. Entonces;

$$a(u - u_h, v) = 0 \text{ para todo } v \in V_h.$$

Demostración. Se tiene que

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{para todo } v \in V,$$

$$a(u_h, v) = F(v) \quad \text{para todo } v \in V_h,$$

entonces

$$a(u - u_h, v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V_h.$$

El vector $u - u_h$ es ortogonal a V_h (usando $(\cdot, \cdot) = a(\cdot, \cdot)$). □

El siguiente teorema es casi una consecuencia inmediata del anterior teorema, Brenner & Scott [1] lo enuncian así:

Teorema 1.4.5. $\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E$.

Demostración.

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_E^2 &= a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \quad \text{para todo } v \in V_h \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq C \|u - u_h\|_H \|u - v\|_H \\ &\leq C \frac{1}{\alpha} (a(u - u_h, u - u_h))^{1/2} (a(u - v, u - v))^{1/2} \\ &\leq C \frac{1}{\alpha} \|u - u_h\|_E \|u - v\|_E. \end{aligned}$$

Si $\|u - u_h\| \neq 0 \Rightarrow \|u - u_h\|_E \leq C \frac{1}{\alpha} \|u - v\|_E$ para todo $v \in V_h$. En particular

$$\|u - u_h\|_E \leq \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

Por otra parte

$$\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_E \leq \|u - u_h\|_E \quad \text{pues } u_h \in V_h,$$

entonces

$$\|u - u_h\|_E = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_E.$$

□

Formulación variacional de problemas no simétricos

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{(I) } H \text{ es un espacio Hilbert} \\
 \text{(II) } V \text{ es un subespacio cerrado de } H \\
 \text{(III) } a(\cdot, \cdot) \text{ es una forma bilineal, acotada, no necesariamente simétrica} \\
 \text{(IV) } a(\cdot, \cdot) \text{ es acotado sobre } V \\
 \text{(V) } a(\cdot, \cdot) \text{ es coerciva sobre } V
 \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

Entonces el problema variacional no simétrico viene dado por:

$$\text{Para algún } F \in V', \text{ debemos encontrar } u \in V \text{ tal que } a(u, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V. \quad (1.7)$$

Problema variacional discreto.

Dado un subespacio de dimension finita $V_h \subset V$ y $F \in V'$ encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = F(v) \text{ para todo } v \in V_h. \quad (1.8)$$

El siguiente teorema, es pieza crucial en la demostración del (Teorema de Lax-Milgram), por la calidad de detalle nos basamos en Brenner & Scott [1].

Teorema 1.4.6 (Punto Fijo). *Dado un espacio de Banach $(V, \|\cdot\|)$ y una aplicación $T : V \rightarrow V$ que satisface $\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq M\|v_1 - v_2\|$ para todo $v_1, v_2 \in V$ donde $0 \leq M < 1$. Entonces existe un único $v \in V$ tal que $T(v) = v$.*

Demostración. Unicidad: Sean $u_1, u_2 \in V$ tales que $u_1 \neq u_2$ con $T(u_1) = u_1, T(u_2) = u_2$,

entonces

$$\|T(u_1) - T(u_2)\| = \|u_1 - u_2\| \leq M\|u_1 - u_2\|,$$

entonces $1 \leq M$, lo cual es una contradicción, por tanto $u_1 = u_2$.

Existencia: Dado $v_0 \in V$, definamos la sucesión

$$v_{n+1} := T(v_n).$$

Note que

$$\|v_{k+1} - v_k\| = \|T(v_k) - T(v_{k-1})\| \leq M\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^2\|v_{k-1} - v_{k-2}\| \leq M^k\|v_1 - v_0\|,$$

entonces

$$\|v_k - v_{k-1}\| \leq M^{k-1}\|v_1 - v_0\|.$$

Para cualquier $N > n$

$$\begin{aligned} \|v_N - v_n\| &= \|v_N - v_{N-1} + v_{N-1} - v_{N-2} + v_{N-2} + \cdots + v_n\| \\ &\leq \sum_{k=n}^N \|v_k - v_{k-1}\| \leq \sum_{k=n}^N M^{k-1} \|v_1 - v_0\| = \|v_1 - v_0\| \sum_{k=n}^N M^{k-1} \\ &\leq \|v_1 - v_0\| \frac{M^n}{1-M} = \|T(v_0) - v_0\| \frac{M^n}{1-M}, \end{aligned}$$

$\{v_n\}$ es una sucesión de Cauchy, por tanto $\{v_n\} \rightarrow v$ para $v \in V$

$$v = \lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = T(v).$$

□

A continuación enunciaremos un teorema importante (Teorema de Lax-Milgram). Brenner & Scott [1] lo enuncian así, y con ayuda del teorema anterior construyen una bonita demostración de este.

Teorema 1.4.7 (Lax-Milgram). *Dado un espacio de Hilbert $(V, (\cdot, \cdot))$, una forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ continua, coerciva y un funcional $F : V \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = F(v) \quad \text{para todo } v \in V.$$

Demostración. Para cualquier $u \in V$ se define el funcional $A_u(v) = a(u, v)$ para todo $v \in V$. A_u es lineal pues para cualquier $v_1, v_2 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$A_u(\alpha v_1 + \beta v_2) = a(u, \alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha a(u, v_1) + \beta a(u, v_2) = \alpha A_u(v_1) + \beta A_u(v_2).$$

A_u es continua, dado que $a(\cdot, \cdot)$ es continua, para cualquier $v \in V$ tenemos que

$$|A_u(v)| = |a(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \leq C \|v\|.$$

$A_u \in V'$

$$\begin{aligned} \|A_u\| &:= \sup_{v \neq 0} \frac{|A_u(v)|}{\|v\|} \\ &\leq \sup_{v \neq 0} \frac{\|u\| \|v\|}{\|v\|} = \|u\| < \infty. \end{aligned}$$

Note que $u \xrightarrow{A} A_u$, donde $A(u) = A_u$. A es una aplicación de V en V' que es lineal y continua. Para cualquier $\phi \in V'$ existe un único $\tau\phi \in V$ tal que

$$\phi(v) = (\tau\phi, v) \text{ para todo } v \in V.$$

Debemos mostrar que existe un único $u \in V$ tal que $a(u, v) = A_u(v) = F(v)$, lo que es lo mismo, encontrar u :

$$A_u = F \text{ (en } V')$$

ó

$$\tau(A_u) = \tau F \text{ (en } V).$$

Se desea encontrar $\rho \neq 0$ tal que la aplicación $T : V \rightarrow V$ definida por $Tv := v - \rho(\tau Av - \tau F)$ satisfaga $\|T(v_1) - T(v_2)\| \leq M\|v_1 - v_2\|$ para todo $v_1, v_2 \in V$.

En tal caso, en alusión al Teorema de Punto Fijo (Teorema 1.4.6) existe un único $u \in V$ tal que

$$Tu = u = u - \rho(\tau Au - \tau F),$$

entonces

$$\tau(Au) = \tau F \text{ (en } V).$$

Mostremos que $\rho \neq 0$ existe. Sean $v_1, v_2 \in V$ y $v = v_1 - v_2$

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|^2 &= \|v_1 - \rho(\tau Av_1 - \tau F) - v_2 + \rho(\tau Av_2 - \tau F)\|^2 \\ &= \|v - \rho\tau Av\|^2 \\ &= (v - \rho\tau Av, v - \rho\tau Av) \\ &= \|v\|^2 - 2\rho(\tau Av, v) + \rho^2(\tau Av, \tau Av) \\ &= \|v\|^2 - 2\rho Av(v) + \rho^2 Av(\tau Av) \\ &= \|v\|^2 - 2\rho a(v, v) + \rho^2 a(v, \tau Av) \\ &\leq \|v\|^2 - 2\rho\alpha\|v\|^2 + \rho^2 C\|v\|\|\tau Av\| \text{ (Por coercividad y continuidad)} \\ &\leq \|v\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \\ &= \|v_1 - v_2\|^2(1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2) \\ &\leq \|v_1 - v_2\|^2 M^2. \end{aligned}$$

Debemos recordar que α es la constante otorgada por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$. Por tanto necesitamos que

$$1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1 \text{ para algún } \rho.$$

Desarrollando tenemos

$$\rho(\rho C^2 - 2\alpha) < 0.$$

Para lo cual $\rho > 0$ y $-2\alpha + \rho C^2 < 0$, que es equivalente a $\rho \in (0, 2\alpha/C^2)$ y así entonces $M < 1$ concluyendo la prueba. □

Teorema 1.4.8. *Bajo las condiciones (1.6) el problema variacional (1.7) tiene solución única.*

Demostración. Las condiciones (I)-(II) de (1.6) garantizan que $(V, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert. Si aplicamos el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 1.4.7) concluimos la demostración. □

Teorema 1.4.9. *Bajo las condiciones (1.6) el problema variacional (1.8) tiene solución única.*

Demostración. Como V_h es un subespacio de dimensión finita de V , este resulta ser un espacio de Hilbert que al heredar las propiedades de V cumple con las hipótesis del teorema anterior. Así pues queda demostrado este teorema. □

Compararemos las soluciones analíticas y aproximadas de estos problemas variacionales. Sea u la solución al problema variacional (1.7) y u_h la solución al problema de aproximación (1.8). Para estimar el error $\|u - u_h\|_V$ introduciremos el siguiente teorema:

Teorema 1.4.10 (Teorema de Céa). *Supongamos que las condiciones (1.6) se mantienen y resuelven (1.7). Para $u_h \in V_h$ la solución del problema variacional discreto (1.8) tenemos*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V,$$

donde C es la constante de continuidad y α es la constante de coercividad de $a(\cdot, \cdot)$ en V .

Demostración. Ya que $a(u_h, v) = F(v)$ para todo $v \in V$ y $a(u_h, v) = F(v)$ para todo $v \in V_h$ tenemos:

$$a(u_h, v) - a(u_h, v) = a(u - u_h, v) = 0 \text{ para todo } v \in V_h. \quad (1.9)$$

Por la coercividad de $a(\cdot, \cdot)$, para todo $v \in V_h$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) + a(u - u_h, v - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - v) \text{ (porque } v - u_h \in V_h \text{ y por (1.9))} \\ &\leq C \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V. \text{ (por la continuidad de } a(\cdot, \cdot) \text{)} \end{aligned}$$

Se obtiene:

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|u - v\|_V \text{ para todo } v \in V_h.$$

Por lo tanto, dado que V_h es cerrado,

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V = \frac{C}{\alpha} \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

□

A continuación haremos un acercamiento hacia el significado de una discretización de dominios, con propósitos de trasladar y resolver nuestros problemas variacionales. Nos guiaremos del libro de Braess [2] para exponer y definir algunos conceptos que luego requeriremos.

1.5. Método de elementos finitos

Los espacios en los que se hallan soluciones numéricas de problemas variacionales asociados a problemas de valores de frontera se denominan espacios de elementos finitos. La estrategia a seguir es la de dividir el dominio en subdominios (elementos) en los que se consideran funciones que se reducen a polinomios en cada subdominio. Para problemas bidimensionales se suelen escoger triángulos o cuadriláteros. Para problemas tridimensionales, se pueden escoger tetraedros, cubos, paralelepípedos rectangulares, etc.

Algunas de las propiedades referidas a los espacios de elementos finitos son:

- (1) Decimos que una partición de un dominio es regular, si todos los elementos, triángulos o cuadriláteros son congruentes.
- (2) En espacios de dos variables definimos el conjunto de polinomios de grado menor o igual que t

$$\mathcal{P}_t := \{u(x, y) = \sum_{i+k \leq t} c_{ik} x^i y^k\}$$

teniendo claro que $i, k \geq 0$. Si se utilizan todos los polinomios de grado menor o igual que t , llamaremos a estos elementos “elementos finitos con polinomios completos”.

- (3) Las restricciones a los bordes de los elementos son polinomios en una sola variable y ocasionalmente se exige que su grado sea menor que t .
- (4) En el contexto de las funciones se dice que un elemento finito es un elemento C^k , siempre que esté contenido en $C^k(\Omega)$.

Tendremos en consideración trabajar en dominios poligonales en los que la tarea de dividir en elementos triángulos o cuadriláteros es mas sencillo.

Definición 1.5.1. El parámetro h es definido como: $h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T$, donde h_T es la mitad del diámetro de T .

Definición 1.5.2. (1) Una partición de $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots, T_M\}$ de Ω en elementos triangulares o cuadrilaterales se llama admisible siempre que se satisfagan las propiedades:

$$(I) \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i.$$

(II) Si $T_i \cap T_j$ resulta en un solo punto, entonces dicho punto es un vértice común de T_i y T_j .

(III) Si para $i \neq j$, $T_i \cap T_j$ resulta en mas de un punto, entonces $T_i \cap T_j$ es un borde común de T_i y T_j .

(2) Escribiremos \mathcal{T}_h en lugar de \mathcal{T} cuando el diámetro de cada elemento sea como máximo de $2h$.

(3) Una familia de particiones $\{\mathcal{T}_h\}$ se llama forma regular siempre que exista un número $k > 0$ tal que cada $T \in \{\mathcal{T}_h\}$ contiene un círculo de radio $\rho_T \geq h_T/k$.

(4) Una familia de particiones $\{\mathcal{T}_h\}$ se llama uniforme si existe $k > 0$ de tal manera que cada $T \in \{\mathcal{T}_h\}$ contiene un círculo de radio $\rho_T \geq h/k$.

En Braess [2] se hace las siguientes observaciones:

Observación 1.1. Los elementos triangulares más fáciles de construir son los elementos de C^0 , formado por polinomios completos. El conjunto de polinomios \mathcal{P}_t es invariante bajo transformaciones lineales afines es decir, si para un polinomio u de grado t aplicamos una transformación lineal afín y expresamos u en las nuevas coordenadas, obtendremos nuevamente un polinomio de grado t .

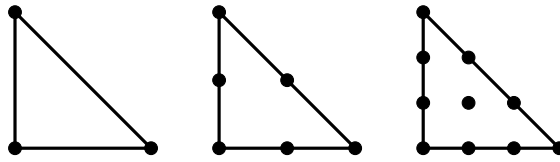
Observación 1.2. Sea $t \geq 0$. Para un triangulo T , supongamos z_1, z_2, \dots, z_S son los $S = 1 + 2 + \dots + (t + 1)$ puntos de T , que se tienen $t + 1$ nodos por linea en cada elemento, como se aprecia en la Figura 1.1. Entonces, para cualquier $f \in C(T)$, hay un polinomio p único de grado menor o igual a t satisfaciendo la condición de interpolación $p(z_i) = f(z_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, S\}$.

Definición 1.5.3. Supongamos que para un espacio de elementos finitos, existe un conjunto de puntos que determinan de manera única cualquier función debido a los valores que asume en dichos puntos. El conjunto de funciones que asumen valores distintos de cero en uno de los puntos forman una base para el espacio, llamaremos base nodal.

La construcción de elementos C^0 garantizan la continuidad mediante el uso de suficientes puntos en los bordes del triángulo; construiremos su base nodal respectiva. Sea $t \geq 1$, supongamos que disponemos de una triangulación de Ω . En cada triángulo colocamos $s := (t + 1)(t + 2)/2$ puntos como se indica en la siguiente Figura 1.1, para que hayan $t + 1$ puntos en cada borde.

Por la Observación 1.2 en cada triángulo se determina un polinomio de grado menor o igual a t eligiendo valores en estos punto. La restricción de cualquiera de estos polinomios a un borde es un polinomio de grado menor o igual a t en una variable. Ahora, dado un borde los dos polinomios en cada lado interpolan los mismos valores en los puntos $t+1$ en ese borde, y por lo tanto deben reducirse al mismo polinomio unidimensional. Es lo que garantiza la continuidad global de los elementos.

Figura 1.1: Estos son los nodos de la base nodal para elementos triangulares lineales, cuadráticos y cúbicos respectivamente



Para trabajar en elementos con polinomios completos se introduce la siguiente notación.

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^k &:= \mathcal{M}_k(\mathcal{T}) := \{v \in L_2(\Omega); v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ para todo } T \in \mathcal{T}\}, \\ \mathcal{M}_0^k &:= \mathcal{M}^k \cap C^0(\Omega) = \mathcal{M}^k \cap H^1(\Omega), \\ \mathcal{M}_{0,0}^k &:= \mathcal{M}^k \cap H_0^1.\end{aligned}$$

La formulación de muchos fenómenos físicos se ve estrictamente ligada a una ecuación diferencial en derivadas parciales. Tal es el caso de la transmisión del calor, del electromagnetismo, de la mecánica de fluidos o del análisis estructural y el método de elementos finitos es un método numérico para la solución de ecuaciones diferenciales. El método consiste en dividir el dominio sobre el que están definidas estas específicas ecuaciones diferenciales que caracterizan el problema físico, en pequeños subdominios también llamados elementos (finitos) de modo que se logre una partición (discretización) de este.

Se definen preferiblemente funciones polinómicas en cada elemento de tal manera que construyan una base para el espacio de funciones al que pertenece la solución del problema físico. La solución será expresada a través de una combinación lineal de elementos de esta base y el objetivo consistirá en encontrar estos coeficientes: El sistema de ecuaciones lineales resultante, definirá una matriz (matriz del sistema) que eventualmente podrá resolverse por simple cálculo numérico. En definitiva, con esta metodología en lugar de obtener la solución exacta a la ecuación diferencial, se obtiene un valor aproximado de la solución. Cabe destacar que entre más denso sea la partición del dominio más precisa será la solución aproximada del problema.

Capítulo 2

Problemas de punto de silla

Esta sección se apoyará en el libro de Braess [2]; a continuación requeriremos los conceptos, temas que se abordaron en “Preliminares”. Nuestro objetivo en este capítulo es el de trabajar en problemas variacionales de punto de silla sobre espacios de Hilbert y así mismo estudiar la existencia y unicidad de su solución.

El siguiente teorema se encuentra en el libro de Braess [2, pag.35] y para el proceso de formulación de problemas variacionales se requerirá mucho.

Teorema 2.0.1 (Teorema de Caracterización). *Sea V un espacio vectorial lineal, y $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica positiva, es decir, $a(v, v) > 0$ para todo $v \in V$, $v \neq 0$. Sea $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal. Entonces la funcional*

$$j(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \ell, v \rangle \quad (2.1)$$

tiene un mínimo en $u \in V$ si y solo si $a(u, v) = \langle \ell, v \rangle$ para todo $v \in V$.

Nota. El espacio de funciones lineales es un espacio vectorial lineal. Optaremos por escribir $\langle \ell, v \rangle$ en lugar de $\ell(v)$, esto debido a la estricta relación de simetría que tiene con $a(\cdot, \cdot)$.

Demostración. Supongamos $u \in V$ tal que $a(u, v) = \langle \ell, v \rangle$ para todo $v \in V$, veamos que u es un mínimo de j definido en (2.1). Sean $u, v \in V$ y $t \in \mathbb{R}$, observe que $u + tv \in V$ pues V es espacio vectorial lineal. Tenemos

$$\begin{aligned} j(u + tv) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle \ell, u + tv \rangle \\ &= \frac{1}{2}(a(u, u) + a(u, tv) + a(tv, u) + a(tv, tv)) - \langle \ell, u \rangle - \langle \ell, tv \rangle \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{t}{2}a(u, v) + \frac{t}{2}a(v, u) + \frac{t^2}{2}a(v, v) - \langle \ell, u \rangle - t\langle \ell, v \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \ell, u \rangle + t[a(u, v) - \langle \ell, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v) \\
 &= j(u) + t[a(u, v) - \langle \ell, v \rangle] + \frac{1}{2}t^2a(v, v),
 \end{aligned}$$

con $t = 1$ y puesto que $a(\cdot, \cdot)$ es positiva se obtiene

$$j(u + v) = j(u) + \frac{1}{2}a(v, v) > j(u) \quad \text{para todo } v \in V \text{ con } v \neq 0.$$

Por lo tanto u es punto mínimo y es único.

Ahora, asumiendo que u es un mínimo de j , veamos que $a(u, v) = \langle \ell, v \rangle$ para todo $v \in V$; Como u es mínimo de j entonces la función $t \mapsto j(u + tv)$ tiene un mínimo cuando $t = 0$. Por lo tanto derivando con respecto a t tenemos que $\frac{\partial j}{\partial t} = a(u, v) - \langle \ell, v \rangle + ta(v, v)$ el cual se anula en $t = 0$, luego

$$a(u, v) - \langle \ell, v \rangle = 0 \quad \text{para todo } v \in V.$$

□

Ahora introduciremos problemas variacionales con restricciones.

Sean X y M espacios de Hilbert, y supongamos las formas bilineales continuas a, b tales que:

$$a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sea $f \in X'$ y $g \in M'$. Denotamos tanto el par dual de X con X' como el de M con M' por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Consideremos el siguiente problema de mínimos.

Problema (M) Encontrar el mínimo sobre X del funcional

$$j(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle \tag{2.2}$$

sujeto a la restricción

$$b(u, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \text{para todo } \mu \in M. \tag{2.3}$$

Ahora, nos esforzaremos para ver el **Problema (M)** como un problema variacional de punto de silla y para ello nos ayudaremos de la función de Lagrange. Para $\lambda \in M$, la función de Lagrange asociada al **Problema (M)** está determinada por:

$$\mathcal{L}(u, \lambda) := j(u) + [b(u, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle]. \tag{2.4}$$

Note que $\mathcal{L}(u, \lambda) = j(u)$ siempre que (u, λ) satisfagan la restricción (2.3) del **Problema (M)**, así pues, encontrar una solución del **Problema (M)** equivale a encontrar un mínimo de $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$ para λ fijo, sin embargo, no hay garantías de que el mínimo obtenido en la función de Lagrange satisfaga la restricción del **Problema (M)** así deberíamos seleccionar λ de tal manera que el mínimo obtenido en \mathcal{L} satisfaga la restricción (2.3); Es este detalle el que inspirará la formulación de un posterior problema.

Hallar $u \in X$ que minimiza a $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$ resultará en un nuevo problemas variacional. A continuación demostraremos que encontrar u que minimiza a $\mathcal{L}(\cdot, \lambda)$ es equivalente a encontrar $u \in X$ tal que $a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle$ para todo $v \in X$.

Observe que nuestra función de Lagrange solo contiene expresiones bilineales y cuadráticas en u y λ . Supongamos que u es el mínimo de \mathcal{L} , aplicando la misma técnica de la demostración del Teorema de Caracterización (Teorema 2.0.1). Para la función de Lagrange

$$\mathcal{L}(u, \lambda) := j(u) + [b(u, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle],$$

dados $u, v \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ $u + tv \in V$ tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u + tv, \lambda) &= \frac{1}{2}a(u + tv, u + tv) - \langle f, u + tv \rangle + [b(u + tv, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle] \\ &= j(u) + t[a(u, v) - \langle f, v \rangle + b(v, \lambda)] + b(u, \lambda) - \langle g, \lambda \rangle + \frac{t^2}{2}a(v, v), \end{aligned}$$

Como u es mínimo de \mathcal{L} entonces la función $t \mapsto \mathcal{L}(u + tv, \lambda)$ tiene un mínimo cuando $t = 0$. Derivando $\mathcal{L}(u + tv, \lambda)$ con respecto a t obtenemos que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = a(u, v) - \langle f, v \rangle + b(v, \lambda) + ta(v, v)$, la cual se anula en $t = 0$ resultando en

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in X.$$

Del **Problema (M)** junto con la función de Lagrange \mathcal{L} y siguiendo el anterior análisis, podemos formular el siguiente problema variacional de punto de silla.

Problema (S) Encontrar $(u, \lambda) \in X \times M$ con

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in X, \\ b(u, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \quad \text{para todo } \mu \in M. \end{aligned} \tag{2.5}$$

La solución $(u, \lambda) \in X \times M$ del **Problema (S)** es un punto de silla de \mathcal{L} debido a que cumple

$$\mathcal{L}(u, \mu) \leq \mathcal{L}(u, \lambda) \leq \mathcal{L}(v, \lambda) \quad \text{para todo } (v, \mu) \in X \times M.$$

De la desigualdad anterior se tiene que u minimiza a (2.4) cuando λ está fijo y λ maximiza a \mathcal{L} cuando u está fijo. La primera componente de un punto de silla (u, λ) proporciona una solución del **Problema (M)**.

Observación: Solo podemos garantizar multiplicadores de Lagrange (λ) bajo hipótesis adicionales: este comentario se hace por el papel que tiene la restricción (2.3) del **Problema (M)** en la búsqueda de $\lambda \in M$ (multiplicador de Lagrange). El siguiente ejemplo, expuesto en el libro de Braess [2, pag.130] ilustra el problema que puede generarse al buscar puntos mínimos en determinada ecuación cuando se añaden restricciones (en este caso, inclusive linealmente dependientes a fin de mantener el mismo mínimo). Veremos que exhibir específicamente los multiplicadores de Lagrange no nos será posible.

Ejemplo 2.0.2. Consideremos el siguiente problema de mínimos en \mathbb{R}^2 : Minimizar la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ sujeta a la restricción $x + y = 2$.

La función de Lagrange asociada a este problema es $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2)$ y para ella tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial x} &= 2x + \lambda, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda)}{\partial y} &= 2y + \lambda.\end{aligned}$$

Igualando estas derivadas parciales a cero obtenemos $2x + \lambda = 2y + \lambda$ lo que es equivalente a $x = y$ y dado que $x + y = 2$ podemos concluir que: $x = 1$, $y = 1$ y $\lambda = -2$.

Ahora minimicemos $x^2 + y^2 = 0$ sujeta a las restricciones $x + y = 2$ y $3x + 3y = 6$, observe que estas restricciones son linealmente dependientes, claramente conservaremos el mínimo del anterior problema. Analicemos que ocurre con los multiplicadores de Lagrange: Para la función de Lagrange $\mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 2) + \mu(3x + 3y - 6)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu)}{\partial x} &= 2x + \lambda + 3\mu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}(x, y, \lambda, \mu)}{\partial y} &= 2y + \lambda + 3\mu.\end{aligned}$$

Dado que $x + y = 2$ entonces $\lambda + 3\mu = -2$ lo cual significa que, los multiplicadores de Lagrange no están definidos de manera única. Cualquier combinación de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda + 3\mu = -2$ conducirá a un mínimo de la función de Lagrange.

Ahora, nuestro propósito consistirá en construir la teoría necesaria para garantizar ciertos isomorfismos que permitan transformar el **Problema (S)** a otro problema para garantizar su respectiva solución.

Sean X e Y espacios de Banach con sus respectivos espacios duales X' e Y' . El par dual se escribirá como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sin hacer referencia a los espacios. Sea $L : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado. Para $y^* \in Y'$, $x \mapsto \ell_{y^*}(x) := \langle y^*, Lx \rangle$ define una función continua en X . El adjunto de L es el mapeo lineal

$$\begin{aligned} L' : Y' &\rightarrow X' \\ y^* &\mapsto \ell_{y^*}, \text{ es decir } \langle L' y^*, x \rangle := \langle y^*, Lx \rangle. \end{aligned}$$

Observación: El operador adjunto se puede utilizar para determinar la imagen de L . Considere $V \subset X$ conjunto cerrado. Definimos el conjunto polar de V como

$$V^0 := \{\ell \in X'; \langle \ell, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}.$$

Así mismo definimos el complemento ortogonal de V como

$$V^\perp := \{x \in X; \langle x, v \rangle = 0 \text{ para todo } v \in V\}.$$

El siguiente teorema servirá como herramienta para demostraciones en teoremas posteriores.

Teorema 2.0.3 (Rango Cerrado). *Sea X y Y espacios de Banach, y sea $L : X \rightarrow Y$ un mapeo lineal acotado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (I) *La imagen $L(X)$ es cerrada en Y ,*
- (II) $L(X) = (\ker L')^0$.

El siguiente teorema se extrae del libro de John B. Conway [3]

Teorema 2.0.4 (Aplicación Inversa). *Sean U y V dos espacios de Banach y sea $T : U \rightarrow V$ una transformación lineal acotada que es biyectiva, entonces T^{-1} es acotada.*

Sean dos espacios de Hilbert U y V , dada una forma bilineal $a : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiremos un operador lineal $L : U \rightarrow V'$ asociado a esta forma como: $\langle Lu, v \rangle := a(u, v)$ para todo $v \in V$.

Comúnmente nos enfrentamos a problemas variacionales con la siguiente estructura: Dado $f \in V'$, debemos encontrar $u \in U$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in V. \tag{2.6}$$

Podemos escribir formalmente $u = L^{-1}f$.

Definición 2.0.5. Sean U y V espacios lineales normados. El mapeo lineal $L : U \longrightarrow V'$ es un isomorfismo si y solo si es biyectivo, y además tanto L como L^{-1} son continuos.

Teorema 2.0.6. Sean U y V espacios de Hilbert. El mapeo lineal $L : U \longrightarrow V'$ es un isomorfismo si y solo si la forma asociada $a : U \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ satisface las siguientes condiciones:

(I) (Continuidad). Entonces existe $C \geq 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_U\|v\|_V.$$

(II) (Condición Inf-Sup). Entonces existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha\|u\|_U \text{ para todo } u \in U.$$

(III) Para cualquier $v \neq 0 \in V$, existe $u \in U$ con

$$a(u, v) \neq 0.$$

Suplemento: si tenemos (I) y (II), entonces

$$L : U \longrightarrow \{v \in V; a(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in U\}^0 \subset V',$$

es un isomorfismo. Además, (III) es equivalente a

$$\|Lu\|_{V'} \geq \alpha\|u\|_U \text{ para todo } u \in U.$$

El nombre de la condición (II) proviene de la formulación “equivalente”

$$\inf_{u \in U} \sup_{v \in V} \frac{a(u, v)}{\|u\|_U\|v\|_V} \geq \alpha > 0. \quad (2.7)$$

Demostración. Asumiendo (I),(II), (III) demostraremos que L es un isomorfismo, en particular vamos a demostrar que L y L^{-1} son continuas, demostraremos la inyectividad de L y así obtendremos el suplemento.

Demostremos la continuidad de L . Por la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ tenemos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$|a(u, v)| \leq \alpha\|u\|_U\|v\|_V \text{ para todo } (u, v) \in U \times V,$$

dividiendo entre $\|v\|_V$ a ambos lados de la igualdad, y así mismo tomando el supremo a ambos lados sobre los $v \in V$,

$$\sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \leq \sup_{v \in V} \alpha\|u\|_U \text{ para todo } (u, v) \in U \times V,$$

teniendo en cuenta que $a(u, v) = Lu(v)$ para todo $v \in V$ y que $\|Lu\|_{V'} := \sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V}$ entonces

$$\|Lu\|_{V'} \leq \alpha \|u\|_U \quad \forall (u, v) \in U \times V.$$

Veamos que L es inyectiva: Sean $u_1, u_2 \in U$ tales que $Lu_1 = Lu_2$, por definición $Lu_1(v) = a(u_1, v) = Lu_2(v) = a(u_2, v)$ para todo $v \in V$. Entonces $a(u_1 - u_2, v) = 0$ para todo $v \in V$. Por (II) (Condición Inf-Sup) se obtiene

$$\sup_{v \in V} \frac{a(u_1 - u_2, v)}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V} \frac{0}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u_1 - u_2\|_U,$$

por tanto $\|u_1 - u_2\|_U = 0$, lo que es equivalente a $u_1 - u_2 = 0_V$, luego $u_1 = u_2$. Así hemos demostrado la inyectividad de L .

Veamos la continuidad de L^{-1} . Sea $f \in L(U)$, como L es inyectiva existe $u \in U$ tal que $u = L^{-1}(f)$, se debe probar que $\|L^{-1}(f)\|_U \leq \alpha \|f\|_{V'}$. Razonando por el absurdo, supongamos que para todo $\alpha > 0$ tenemos que $\|L^{-1}(f)\|_U > \alpha \|f\|_{V'}$, teniendo en cuenta que $f = L(u)$,

$$\|u\|_U = \|L^{-1}(L(u))\|_U = \|L^{-1}(f)\|_U > \alpha \|f\|_{V'} = \alpha \|L(u)\|_{V'},$$

finalmente tenemos $\alpha \|L(u)\|_{V'} < \|u\|_U$, que al dividir a ambos lados de la igualdad entre α resulta en $\|L(u)\|_{V'} < \frac{1}{\alpha} \|u\|_U$, como esto es válido para todo $\alpha > 0$, consideremos una sucesión $\left\{ \frac{1}{\alpha_i} \right\}_{i=1}^{\infty} \rightarrow 0$, luego como $\|\cdot\|$ es continua entonces $\|L(u)\|_{V'} = 0$, por tanto $L(u) = 0$ y como $L(u) = f$ entonces $f = 0$ lo cual es una contradicción pues L es inyectiva. Así, L^{-1} es continua.

Por el Teorema de la Aplicación Inversa (Teorema 2.0.4) tenemos que $L(U)$ es cerrado en V' . Por el Teorema del Rango Cerrado (Teorema 2.0.3) llegamos a que $L(U) = (Ker L')^0$.

Identificaremos el espacio bidual V'' como V debido a que los espacios de Hilbert son reflexivos. Aplicando la definición de L , tenemos que el operador adjunto $L' : V'' = V \rightarrow U'$ está definido mediante

$$\langle L'(v), u \rangle := a(u, v) \quad \text{para todo } u \in U,$$

por tanto tenemos

$$L(U) = (Ker L')^0 = \{v \in V; a(u, v) = 0 \text{ para todo } u \in U\}^0$$

probando el suplemento.

Ahora, usando la condición ((III), tenemos $L(U) = (Ker L')^0 = \{0_V\}^0$ y como todo funcional lineal de V' se anula en 0_V entonces $L(U) = V'$, por tanto L es un isomorfismo.

Ahora, asumiendo que L es un isomorfismo probemos las condiciones (III), (II) y (III).

(I) (Continuidad de $a(\cdot, \cdot)$): Debido a que Lu es un funcional continuo en V' entonces, existe $\alpha \geq 0$ tal que $\|Lu\|_{V'} \leq \alpha\|u\|_U$, teniendo en cuenta que $\|Lu\|_{V'} := \sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V}$, para $\|v\|_U \neq 0$ se tiene

$$\frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \leq \sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \leq \alpha\|u\|_U,$$

de lo cual se sigue que

$$|a(u, v)| \leq \alpha\|u\|_U\|v\|_V.$$

(II)(Condición Inf-Sup), del hecho de que L^{-1} es continuo por ser L un isomorfismo se sigue que, para $w \in V'$ existe $\alpha \geq 0$ tal que $\|L^{-1}(w)\| \leq \alpha\|w\|$. Por la sobreyectividad de L existe $u \in U$ tal que $Lu = w$, luego $\|u\| = \|L^{-1}(w)\| \leq \alpha\|Lu\|$ aplicando la definición de L y las norma del dual tenemos

$$\|Lu\|_{V'} = \sup_{v \in V} \frac{|Lu(v)|}{\|v\|_V} \sup_{v \in V} \frac{|a(u, v)|}{\|v\|_V} \geq \frac{1}{\alpha}\|u\|_U.$$

Este resultado se obtiene para todo el conjunto de preimagenes de L así,

$$\|Lu\|_{V'} \geq \frac{1}{\alpha}\|u\|_U \text{ para todo } u \in V$$

Para la condición (III): Sea cualquier $v \in V$, y sea $f \in V'$ tal que $f(v) = \alpha \neq 0$, como L es un isomorfismo entonces existe $u \in U$ tal que $Lu = f$, finalmente tenemos $a(u, v) = \alpha \neq 0$.

□

Nos daremos cuenta que más a menudo trabajaremos con ecuaciones del tipo (2.6), para resolverlas numéricamente la estrategia consistirá en considerar subespacios de dimensión finita $U_h \subset U$ y $V_h \subset V$ donde nuestro objetivo ahora es: Dado $f \in V'$, debemos encontrar $u_h \in U_h$ tal que

$$a(u_h, v) = \langle f, v \rangle \text{ para todo } v \in V_h. \quad (2.8)$$

Así como en el teorema de Céa, anteriormente visto, calcularemos el error entre dichas soluciones.

Lema 2.0.7. *Supongamos que la forma bilineal $a : U \times V \rightarrow R$ satisface las hipótesis del Teorema 2.0.6. Supongamos que los subespacios $U_h \subset U$ y $V_h \subset V$ son tales que cuando se reemplazan por U y V respectivamente, se satisfacen (2.7) y condición (III) del Teorema 2.0.6. Entonces*

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|$$

Demostración. Por (2.6) y (2.8) tenemos $a(u, v) - a(u_h, v) = a(u - u_h, v) = 0$ para todo $v \in V_h$. Sea $w_h \in U_h$ arbitrario, entonces $a(u - w_h, v) = a(u_h - w_h, v)$ para todo $v \in V_h$. Para $\langle \ell, v \rangle := a(u - w_h, v)$, tenemos

$$\|f\| = \sup_{v \in V_h} \frac{|a(u - u_h, v)|}{\|v\|} \leq \sup_{v \in V_h} \frac{C\|u - u_h\|\|v\|}{\|v\|} = C\|u - u_h\|.$$

Note que la función $L_h : U_h \rightarrow V_h$ generada por $a(u_h - w_h, \cdot)$ satisface $\|(L_h)^{-1}\| \leq 1/\alpha$ pues, de la (II)(Condición Inf-Sup) del teorema 2.0.6 se tiene:

$$\sup_{v \in V_h} \frac{|a(u_h - w_h, v)|}{\|v\|} \leq \alpha\|u_h - w_h\|,$$

sea $f \in V_h'$ tal que $f(v) = a(u_h - w_h, v)$ para todo $v \in V_h$, luego $1/\alpha \geq \sup_{f \in V_h'} \frac{\|L_h^{-1}(f)\|}{\|f\|} = \|(L_h)^{-1}\|$.

Por tanto,

$$\|u_h - w_h\| \leq \alpha^{-1}\|\ell\| \leq \alpha^{-1}C\|u - w_h\|.$$

Por la desigualdad triangular $\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \|u_h - w_h\|$, entonces

$$\|u - u_h\| \leq \|u - w_h\| + \alpha^{-1}C\|u - w_h\| \leq \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \inf_{w_h \in U_h} \|u - w_h\|.$$

□

Retomaremos con el estudio del **Problema (S)**, las formas bilineales involucradas en este problema exigen ciertas propiedades para encontrar una solución; en el Teoremas de Caracterización (Teorema 2.0.1) por ejemplo, requiere simetría y positividad de su forma bilineal implicada. También, debemos saber que no nos bastará con exigir la independencia lineal de las restricciones, por tanto transformaremos el **Problema (S)** y reformularemos (2.5) en una ecuación de operadores.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones (2.5) definen una transformación lineal

$$L : X \times M \rightarrow X' \times M' \tag{2.9}$$

tal que $(u, \lambda) \mapsto (f, g)$. Recurriremos al Teorema 2.0.6 y mas precisamente a (II) (Condición Inf-Sup) para mostrar que L es efectivamente un isomorfismo.

Definimos el operador $A : X \rightarrow X'$ de tal manera que $Au(v) = \langle Au, v \rangle := a(u, v)$ para todo $v \in X$. El operador A define una correspondencia biunívoca entre los elementos de X y X' .

De igual manera, asociamos el operador $B : X \rightarrow M'$ y su operador adjunto $B' : M \rightarrow X'$ a la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ de tal manera que para $u \in X$, $Bu(\mu) = \langle Bu, \mu \rangle = b(u, \mu)$ para todo $\mu \in M$ y para $\lambda \in M$, $B'\lambda(v) = \langle B'\lambda, v \rangle = b(v, \lambda)$ para todo $v \in X$ respectivamente.

Utilizando los operadores A , B , B' y del hecho de que $Au(v) = a(u, v)$, $Bu(\mu) = b(u, \mu)$, $B'\lambda(v) = b(v, \lambda)$ las ecuaciones (2.5) son equivalentes a

$$\begin{aligned} Au + B'\lambda &= f, \\ Bu &= g. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Definamos los siguientes espacios

$$\begin{aligned} V(g) &:= \{v \in X; b(v, \mu) = \langle g, \mu \rangle \text{ para todo } \mu \in M\}, \\ V &:= \{v \in X; b(v, \mu) = 0 \text{ para todo } \mu \in M\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Note que $\ker B = \{v \in X; Bv(\mu) = b(v, \mu) = 0 \text{ para todo } \mu \in M\} = V$.

Lema 2.0.8. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *Existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\| \|\mu\|} \geq \beta. \tag{2.12}$$

(II) *El operador $B : V^\perp \rightarrow M'$ es un isomorfismo, y*

$$\|Bv\| \geq \beta \|v\| \text{ para todo } v \in V^\perp. \tag{2.13}$$

(III) *El operador $B' : M \rightarrow V^0 \cap X'$ es un isomorfismo, y*

$$\|B'\mu\| \geq \beta \|\mu\| \text{ para todo } \mu \in M. \tag{2.14}$$

Demostración. Probemos que (I) implica (III); Por el Suplemento de Teorema 2.0.6, la condición (I) $\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\| \|\mu\|} \geq \beta$ es equivalente a $\sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\| \|\mu\|} \geq \beta \|u\|$, entonces $\|B'\mu\| = \sup_{v \in X} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|} \geq \beta \|u\|$. ■

Probemos que $B' : M \rightarrow V^0 \cap X' = (\ker B)^0$ es un isomorfismo. Dado que $b(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal continua y la Condición Inf-Sup es satisfecha, aplicando la primera parte del Suplemento del Teorema 2.0.6 se concluye que B' es un isomorfismo.

Supongamos que se cumple la condición (III), demostremos que $B : V^\perp \rightarrow M'$ es un isomorfismo. Para $v \in V^\perp$, definamos un funcional $g \in V^0$ mediante $g(w) = (v, w)$. Como B' es un isomorfismo, entonces existe $\lambda \in M$ tal que

$$B(\lambda)(w) = b(w, \lambda) = (v, w) \quad \text{para todo } w \in X. \quad (2.15)$$

Por la definición del funcional g , por el Teorema de Representación de Riesz $\|g\| = \|v\|$ y por (2.14) entonces $\|v\| = \|B'\lambda\| \geq \beta\|\lambda\|$, equivalentemente $\frac{\|v\|^2}{\|\lambda\|} \geq \beta\|v\|$. Ahora sustituyendo $w = v$ en (2.15), obtenemos

$$\sup_{\mu \in M} \frac{b(v, \mu)}{\|\mu\|} \geq \frac{b(v, \lambda)}{\|\lambda\|} = \frac{(v, v)}{\|\lambda\|} = \frac{\|v\|^2}{\|\lambda\|} \geq \beta\|v\|.$$

Por hipótesis $b(\cdot, \cdot)$ es continua y satisface la Condición Inf-Sup y además para cualquier $\mu \neq 0 \in M$ existe $v \in V^\perp$ de modo que $b(v, \mu) \neq 0$. Así $B : V^\perp \rightarrow M'$ satisface las tres condiciones del Teorema 2.0.6, y por tanto es un isomorfismo.

Supongamos que la condición (II) se satisface, veamos que se cumple (I). Tenemos que $B : V^\perp \rightarrow M'$ es un isomorfismo y para algún $\beta > 0$, $\|Bv\| \geq \beta\|v\|$ para todo $v \in V^\perp$. Para $\mu \in M$, su norma vía dualidad es

$$\|\mu\| = \sup_{g \in M'} \frac{\langle g, \mu \rangle}{\|g\|}.$$

Como B es un isomorfismo, para todo $g \in M'$ existe $v \in V^\perp$ tal que $Bv = g$ y por la definición de B tenemos $Bv(\mu) = g(\mu) = b(v, \mu)$ para todo $\mu \in M$. Puesto que $\|Bv\| \geq \beta\|v\| \quad \forall v \in V^\perp$ entonces:

$$\|\mu\| = \sup_{g \in M'} \frac{\langle g, \mu \rangle}{\|g\|} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{\langle Bv, \mu \rangle}{\|Bv\|} = \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, \mu)}{\|Bv\|} \leq \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, \mu)}{\beta\|v\|}.$$

De esto se sigue que $\|\mu\| \leq \sup_{v \in V^\perp} \frac{b(v, \mu)}{\beta\|v\|}$, lo cual es equivalente a la condición (I).

El bosquejo general de la prueba inicia demostrando (I) implica (III), (III) implica (II) y en su última etapa (II) implica (I). Así hemos demostrado la equivalencia entre estas tres propiedades.

□

Teorema 2.0.9. (Teorema de descomposición de Brezzi) para el problema de punto de silla **Problema (S)** (2.5), la transformación (2.9) define un isomorfismo $L : X \times M \rightarrow X' \times M'$ si y solo si se cumplen las siguientes condiciones.

(I) La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V -elíptica, es decir, para $\alpha > 0$ y V el espacio definido en (2.11) se tiene

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2 \quad \text{para todo } v \in V.$$

(II) La forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición Inf-Sup (2.12).

Demostración. Supongamos que se cumplen las condiciones (I) y (II). Primero mostramos que para cada par de funciones $(f, g) \in X' \times M'$, hay exactamente una solución (u, λ) , del problema del punto de silla que satisface

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \alpha^{-1} \|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\|, \\ \|\lambda\| &\leq \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \frac{C}{\beta} \|g\|. \end{aligned} \quad (2.16)$$

El conjunto $V(g)$ es distinto de vacío. Por el Lema (2.0.8)(II), existe $u_0 \in V^\perp$ con $Bu_0 = g$. Además, $\|u_0\| \leq \beta^{-1} \|g\|$.

Con $w := u - u_0$, (2.5) es equivalente a

$$\begin{aligned} a(u - u_0 + u_0, v) + b(v, \lambda) &= a(w, v) + a(u_0, v) + b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in X, \\ b(u - u_0 + u_0, \mu) &= b(w, \mu) + b(u_0, \mu) = \langle g, \mu \rangle \quad \text{para todo } \mu \in M. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} a(w, v) + b(v, \lambda) &= \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad \text{para todo } v \in X, \\ b(w, \mu) &= 0 \quad \text{para todo } \mu \in M. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por la elipticidad y continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ podemos aplicar el Teorema de Lax-Milgram y el Teorema de Caracterización para concluir que el funcional

$$\frac{1}{2} a(v, v) - \langle f, v \rangle + a(u_0, v) \quad (2.18)$$

tiene un mínimo en $w \in V$ tal que

$$\alpha \|w\|^2 \leq a(w, w) = \langle f, w \rangle - a(u_0, w) \leq \|f\| \|w\| + C \|u_0\| \|w\|,$$

dividiendo entre $\alpha \|w\|$ a ambos lado de la desigualdad, y del hecho de que $\|u_0\| \leq \beta^{-1} \|g\|$ se sigue

$$\|w\| \leq \alpha^{-1} (\|f\| + C \|u_0\|) \leq \alpha^{-1} (\|f\| + C \beta^{-1} \|g\|). \quad (2.19)$$

Observe que del Teoremas de Caracterización (Teorema 2.0.1) se sigue que

$$a(w, v) = \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad \text{para todo } v \in V. \quad (2.20)$$

Remitiéndonos a la ecuaciones (2.17), debemos encontrar $\lambda \in M$ tal que

$$b(v, \lambda) = \langle f, v \rangle - a(u_0 + w, v) \quad \text{para todo } v \in X.$$

El lado derecho define un funcional sobre X' , que según el Lema (2.0.8)(III) cae en V^0 , se puede representar como $B'\lambda$ con $\lambda \in M$ y además $\beta\|\lambda\| \leq \|B'\mu\|$ para todo $\lambda \in M$, así

$$\beta\|\lambda\| \leq \|B'\mu\| \sup_{v \in X} \frac{|b(v, \mu)|}{\|v\|} = \sup_{v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle - a(u_0 + w, v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle - a(u, v)|}{\|v\|},$$

por la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ y la desigualdad triangular se cumple que

$$\beta\|\lambda\| \leq \sup_{v \in X} \frac{|\langle f, v \rangle| + |a(u, v)|}{\|v\|} = \sup_{v \in X} \frac{\|f\|\|v\| + C\|u\|\|v\|}{\|v\|} = \|f\| + C\|u\|.$$

Luego,

$$\|\lambda\| \leq \beta^{-1}(\|f\| + C\|u\|). \quad (2.21)$$

Las desigualdades (2.16) se sigue de (2.19), (2.21), del hecho de que $\|u_0\| \leq \beta^{-1}\|g\|$ y la desigualdad triangular $\|u\| \leq \|u_0\| + \|w\|$, veamos

$$\begin{aligned} \|u\| &\leq \|u_0\| + \|w\| \leq \beta^{-1}\|g\| + \alpha^{-1}(\|f\| + C\beta^{-1}\|g\|) \\ &= \alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1}\|g\| + \alpha^{-1}C\beta^{-1}\|g\| \\ &= \alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\|. \end{aligned}$$

mientras que,

$$\begin{aligned} \|\lambda\| &\leq \beta^{-1}(\|f\| + C\|u\|) \leq \beta^{-1} \left(\|f\| + C \left(\alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\| \right) \right) \\ &= \beta^{-1}\|f\| + \beta^{-1}C \left(\alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\| \right) \\ &= \beta^{-1}\|f\| + \beta^{-1}C\alpha^{-1}\|f\| + \beta^{-1}\beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|g\| \\ &= \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \|f\| + \beta^{-1} \left(1 + \frac{C}{\alpha}\right) \frac{C}{\beta} \|g\|. \end{aligned}$$

Note que u existe como derivado de la existencia de w es cual se descomponía como $u - u_0$; λ existe por el isomorfismo planteado en el Lema 2.0.8(III). Ambos u y λ son únicos.

Ahora, si reemplazamos $f = 0$, $g = 0$, $v = u$, $\mu = -\lambda$ en las ecuaciones (2.5) obtenemos $a(u, u) + b(u, \lambda) = 0$ y $b(u, -\lambda) = 0$ de lo cual se sigue que $a(u, u) = 0$; debido a que $v \in V$ y la forma $a(\cdot, \cdot)$ es V-elíptica entonces $u = 0$. Particularmente se tiene que $\text{Sup}_v |b(v, \lambda)| = 0$, y por la condición Inf-Sup (2.12) se sigue $\lambda = 0$. Así hemos probado la inyectividad y sobreyectividad de L . Como L es acotado inferiormente como se ve en (2.16) entonces L^{-1} es continua.

Supongamos que L es un isomorfismo, veamos que las condiciones (I) y (II) son satisfechas.

Veamos que $a(\cdot, \cdot)$ es V-elíptica: Sea $v \in V$, por el teorema de representación de Riesz, existe un $f \in V'$ tal que

$$f(w) = \langle w, v \rangle \text{ para todo } w \in V$$

con $\|f\|_{V'} = \|v\|_V$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\|\tilde{f}\|_{X'} = \|f\|_{V'}$ y a su vez, existe (u, λ) con $(u, \lambda) = L^{-1}(\tilde{f}, 0)$ pues L definido mediante las ecuaciones (2.5) es un isomorfismo, por lo tanto $Bu = 0 = b(u, \mu)$ para todo $\mu \in M$ lo cual implica que u debe satisfacer $a(u, w) = \langle f, w \rangle$ para todo $w \in V$ y además,

$$\|v\|^2 = (v, v) = \langle f, v \rangle = \|f\|_{V'}^2 = a(u, v). \quad (2.22)$$

Aplicando el teorema de la caracterización se obtiene que u es un mínimo del funcional $j(v) = \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, v \rangle$ en V , es decir,

$$j(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v \rangle \geq \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u \rangle = j(u)$$

por tanto, $\frac{1}{2}a(v, v) - a(u, v) \geq \frac{1}{2}a(u, u) - a(u, u) = -\frac{1}{2}a(u, u)$. Aplicando la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$, (2.22) y puesto que L^{-1} es acotada, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(v, v) &\geq a(u, v) - \frac{1}{2}a(u, u) \\ &\geq \|f\|^2 - \|u\|^2 \\ &\geq \|v\|^2 - C_2\|f\|^2 = (1 - C_2)\|v\|^2. \end{aligned}$$

Veamos que la condición Inf-Sup (2.12) es satisfecha: Por ser L un isomorfismo, para cualquier $g \in M'$, existe un $(u, \lambda) \in X \times M$ con $L^{-1}(0, g) = (u, \lambda)$ tal que $\|u\| \leq c\|g\|$. Por otra parte, sea $u^\perp \in V^\perp$ la proyección de u sobre V^\perp , recordemos que esta proyección es única y además es un operador lineal acotado, es decir, $\|u^\perp\| \leq C\|u\|$, así la aplicación $g \rightarrow u \rightarrow u^\perp$ es inyectiva y acotada, e implícitamente corresponde al operador B restringido al espacio V^\perp , así, $B : V^\perp \rightarrow M'$ sería un isomorfismo, con $\|Bu^\perp\| = \|g\| \geq \frac{1}{c}\|u\| \geq \frac{1}{cC}\|u^\perp\|$. Aplicando el Lema (2.0.8) (II), se obtiene el resultado deseado. □

Ahora analizaremos la solución numérica de problemas de punto de silla. Elegimos subespacios de dimension finita $X_h \subset X$ y $M_h \subset M$, veamos el siguiente problema.

Problema(S_h)

Encontrar $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ tal que

$$\begin{aligned} a(u_h, v) + b(v, \lambda_h) &= \langle f, v \rangle \quad \text{para todo } v \in X_h, \\ b(u_h, \mu) &= \langle g, \mu \rangle \quad \text{para todo } \mu \in M_h. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Este enfoque es llamado un método mixto. Así como en el Lema 2.0.7, necesitamos garantizar que los espacios de elementos finitos escogidos X_h y M_h , satisfagan las mismas condiciones que X y M satisficían en el Teorema 2.0.9. Propiedades como la Coercividad o la propiedad Inf-Sup pueden suponer un desafío pero sin embargo son fundamentales para la estabilidad del cálculo de elementos finitos.

De manera análoga a (2.11) definimos el siguiente espacio:

$$V_h := \{v \in X_h; b(v, \mu) = 0 \text{ para todo } \mu \in M_h\}.$$

Definición 2.0.10. Una familia de espacios de elementos finitos X_h, M_h satisfacen la condición de Babuska-Brezzi siempre que existan constantes $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ independientes de h tal que

(I) la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es V_h -elíptica con constante elipticidad $\alpha > 0$.

(II)

$$\sup_{v \in X_h} \frac{b(v, \lambda_h)}{\|v\|} \geq \beta \|\lambda_h\| \quad \text{para todo } \lambda_h \in M_h. \tag{2.24}$$

La condición (II) generalmente la llamaremos condición inf-sup y es la más importante de las dos.

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del Lema 2.7 y del Teorema 2.0.9.

Teorema 2.0.11. *Supongamos que las hipótesis del Teorema 2.0.9 se mantienen, y supongamos que X_h, M_h satisfacen las condiciones de Babuska-Brezzi. Entonces*

$$\|u - u_h\| + \|\lambda - \lambda_h\| \leq C \left\{ \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\| + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\| \right\}. \tag{2.25}$$

En general, $V_h \not\subset V$, sin embargo, obtendremos un mejor resultado en el caso especial de aproximación cuando $V_h \subset V$. Notamos que en este caso también la aproximación de elementos finitos de $V(g)$ puede no ser conforme para $g \neq 0$.

Definición 2.0.12. El espacio $X_h \subset X$ y $M_h \subset M$ satisface la condición (C) siempre que $V_h \subset V$, es decir, si tenemos que para cada $v_h \in X_h$, $b(v_h, \mu_h) = 0$ para todo $\mu_h \in M_h$ entonces $b(v_h, \mu_h) = 0$ para todo $\mu \in M$.

Teorema 2.0.13. *Suponga que las hipótesis del Teorema (2.0.11) se satisfacen junto con la condición (C). Entonces la solución del problema (S_h) satisface*

$$\|u - u_h\| \leq c \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

Demostración. Sea $v_h \in V_h(g)$. Luego usando la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ para todo $v \in V_h$,

$$\begin{aligned} a(u_h - v_h, v) &= a(u_h, v) - a(u, v) + a(u - v_h, v) \\ &= b(v, -\lambda_h) + b(v, \lambda) + \langle f, v \rangle - \langle f, v \rangle + a(u - v_h, v) \\ &= b(v, \lambda - \lambda_h) + a(u - v_h, v) \\ &\leq C \|u - v_h\| \|v\|. \end{aligned}$$

Note que $b(v, \lambda - \lambda_h) = 0$ debido a la condición (C). Con $v := u_h - v_h$ usando el hecho de que $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica, entonces $\|u_h - v_h\|^2 \leq \alpha^{-1} C \|u_h - v_h\| \|u - v_h\|$; al dividir entre $\|u_h - v_h\|$ y aplicando ínfimo a ambos lados

$$\|u - u_h\| \leq \alpha^{-1} C \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|.$$

□

Capítulo 3

Métodos mixtos aplicados a la ecuación de Poisson

En 1812 el matemático, geómetra y físico francés Siméon-Denis Poisson publica esta ecuación, la ecuación de Poisson. La ecuación de Poisson es una ecuación en derivadas parciales que modela muchos fenómenos que acontecen en la naturaleza; Al área de la física le resulta particularmente importante esta ecuación por su aplicación en electrostática, ingeniería mecánica y física teórica. Resolver este tipo de ecuaciones consiste en encontrar las funciones que ocasionalmente bajo hipótesis o condiciones que dan información sobre la función satisfacen la ecuación en cuestión; Nos enfocaremos en el tipo de condiciones de frontera que denominamos condiciones tipo Dirichlet, así pues para la función solución conocemos su comportamiento en la frontera del dominio afín.

Para nuestro caso, supongamos que u es una función real definida en Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , sea g una función definida en $\partial\Omega$ (la frontera de Ω) y sea f una función real; La ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet queda determinada por

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= -f \text{ para } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ u &= g, \text{ sobre } \partial\Omega.\end{aligned}$$

Al operador diferencial involucrado aquí se le suele llamar operador Laplaciano o de Laplace y se define por, $\Delta u(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Usando el operador $\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$ definimos el operador gradiente de u como

$$\text{grad } u = \nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \quad (3.1)$$

y a su vez, para una función real $w(x) := (w_1(x), w_2(x), \dots, w_n(x))$ definida en \mathbb{R}^n ; definimos el operador divergente de w por

$$\text{div } w = \nabla \cdot w := \sum_{i=1}^n \frac{\partial w_i}{\partial x_i}. \quad (3.2)$$

De (3.1) y (3.2) tenemos que $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u$, pues

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

La ecuación de Poisson $\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = -f$ se puede escribir formalmente como el sistema

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \sigma, \\ \operatorname{div} \sigma &= -f. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Note que $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \operatorname{div} \sigma = -f$.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ con $d = 2$ ó 3 , para las funciones reales $\Phi(x) := (\Phi_1(x), \Phi_1(x), \dots, \Phi_d(x))$ con $x \in \Omega$ definimos $L_2(\Omega)^d := \{\Phi(x); \Phi_i(x) \in L_2(\Omega)\}$. A partir de (3.3) construyamos un problema variacional; En primera instancia multiplicamos por $\tau \in L_2(\Omega)^d$ a ambos lados de la igualdad en la primera ecuación de (3.3), e integramos sobre el dominio Ω ,

$$\begin{aligned} \tau(\nabla u) &= \tau\sigma, \\ \int_{\Omega} \tau(\nabla u) dx &= \int_{\Omega} \tau\sigma dx, \\ \int_{\Omega} \tau\sigma dx - \int_{\Omega} \tau(\nabla u) dx &= 0. \end{aligned}$$

En segunda instancia multiplicamos por $v \in H_0^1(\Omega)$ en la segunda ecuación de (3.3) e integramos sobre el dominio Ω usando el Teorema de Green,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma v &= -fv, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma v dx &= - \int_{\Omega} f v dx, \\ - \int_{\Omega} \nabla v \sigma dx + \int_{\partial\Omega} \sigma v n ds &= - \int_{\Omega} f v dx, \\ - \int_{\Omega} \nabla v \sigma dx &= - \int_{\Omega} f v dx. \end{aligned}$$

Entonces (3.3) conduce directamente a un problema de punto de silla:

Problema mixto primal: Encontrar $(\sigma, u) \in L_2(\Omega)^d \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau)_{0,\Omega} - (\tau, \nabla u)_{0,\Omega} &= 0 \quad \text{para todo } \tau \in L_2(\Omega)^d, \\ -(\sigma, \nabla v)_{0,\Omega} &= -(f, v)_{0,\Omega} \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Podemos trabajar con estas ecuaciones desde el marco de los problemas de punto de silla. Como primera estrategia definiremos espacios y formas bilineales:

$$\begin{aligned} X &:= L_2(\Omega)^d, \quad M := H_0^1(\Omega), \\ a(\sigma, \tau) &:= (\sigma, \tau)_{0,\Omega}, \quad b(\tau, v) := -(\tau, \nabla v)_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Las formas bilineales se definen a través del producto interno (\cdot, \cdot) en el espacio Hilbert L_2 , verifiquemos la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$; Para elementos arbitrarios $\vartheta, \delta \in L_2(\Omega)^d$, se tiene $|a(\vartheta, \delta)| = |(\vartheta, \delta)_{0,\Omega}| < \|\vartheta\|_X \|\delta\|_X$. Como $H_0^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ y en particular para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que $\nabla v \in L_2(\Omega)^d$, análogo a la verificación de la continuidad de $a(\cdot, \cdot)$ se comprueba que $b(\cdot, \cdot)$ es continuo.

Ahora, verifiquemos que $a(\cdot, \cdot)$ es L_2 -elíptica. Para un elemento arbitrario $\vartheta \in L_2(\Omega)^d$, se tiene $|a(\vartheta, \vartheta)| = |(\vartheta, \vartheta)_{0,\Omega}| = \|\vartheta\|^2$ así pues, para cualquier $\alpha > 1$ tenemos que $|a(\vartheta, \vartheta)| \leq \alpha \|\vartheta\|^2$. Para verificar la condición Inf-Sup, dado $v \in H_0^1(\Omega)$ consideremos el cociente que aparece en la condición para $\tau := -\nabla v \in L_2(\Omega)^d$:

$$\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_0} = \frac{-(\tau, \nabla v)_{0,\Omega}}{\|\tau\|_0} = \frac{(\nabla v, \nabla v)_{0,\Omega}}{\|\nabla v\|_0} = \frac{\|\nabla v\|_0^2}{\|\nabla v\|_0} = \|\nabla v\|_0 = |v|_1,$$

utilizando la desigualdad de Friedrichs obtenemos: $c|v|_1 \geq \|v\|_1$ equivalentemente $|v|_1 \geq \frac{1}{c}\|v\|_1$, y en definitiva si para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene $\frac{b(-\nabla v, v)}{\|-\nabla v\|_0} \geq \frac{1}{c}\|v\|_1$ entonces $\sup_{\tau \in X} \frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_0} \geq \frac{1}{c}\|v\|_1$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$; así hemos comprobado que la condición Inf-Sup es satisfecha, pues la constante c proviene de la desigualdad de Friedrichs y depende solo de Ω . El problema de punto de silla (3.4) es estable.

Ahora, para el problema variacional discreto que deriva de (3.4). Consideramos una partición de Ω que consistirá en una triangulación $\mathcal{T}_h \subset \Omega$ como se habla en nuestra Sección 1.5. **Método de elementos finitos**, definimos los espacios discretos para $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} X_h &:= \left(\mathcal{M}^{k-1}\right)^d = \{\sigma_h \in L_2(\Omega)^d; \sigma_h|_T \in \mathcal{P}_{k-1} \text{ para } T \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &:= \mathcal{M}_{0,0}^k = \{v_h \in H_0^1(\Omega); v_h|_T \in \mathcal{P}_k \text{ para } T \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Claramente para estos espacios las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son continuas y $a(\cdot, \cdot)$ es L_2 -elíptica. Note que para cualquier $v \in M_h$ tenemos que $\nabla v \in X_h$ por lo cual se tiene que $\nabla M_h \subset X_h$,

para verificar que la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición Inf-Sup se procede análogamente a como se verificó en el problema continuo. Para problemas de punto de silla el siguiente espacio representa una mejor opción para los cálculos prácticos.

$$H(\operatorname{div}, \Omega) := \{\tau \in L_2(\Omega)^d; \operatorname{div} \tau \in L_2(\Omega)\}.$$

Con la norma del grafo del operador de divergencia,

$$\|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} := (\|\tau\|_0^2 + \|\operatorname{div} \tau\|_0^2)^{1/2}. \quad (3.6)$$

A continuación definiremos un nuevo problema de punto de silla:

Problema mixto dual: Buscamos $(\sigma, u) \in H(\operatorname{div}, \Omega) \times L_2(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} (\sigma, \tau)_{0, \Omega} + (\operatorname{div} \tau, u)_{0, \Omega} &= 0 \quad \text{para todo } \tau \in H(\operatorname{div}, \Omega), \\ (\operatorname{div} \sigma, v)_{0, \Omega} &= -(f, v)_{0, \Omega} \quad \text{para todo } v \in L_2(\Omega). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Así como se procedió para al anterior problema de punto de silla, definimos espacios y formas bilineales así:

$$\begin{aligned} X &:= H(\operatorname{div}, \Omega), \quad M := L_2(\Omega), \\ a(\sigma, \tau) &:= (\sigma, \tau)_{0, \Omega}, \quad b(\tau, v) := (\operatorname{div} \tau, v)_{0, \Omega}. \end{aligned}$$

Definimos también el espacio $V := \{\tau \in X; b(\tau, v) = (\operatorname{div} \tau, v)_{0, \Omega} = 0 \text{ para todo } v \in M\}$.

Nuestro propósito se centrará en asegurar que las hipótesis del Teorema de descomposición de Brezzi (Teorema 2.0.9) sean satisfechas. Claramente, las formas bilineales son continuas, estas se definen a través del producto interno en el espacio Hilbert L_2 , así la continuidad de las formas $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ se comprueban análogamente a como se comprobó en el anterior problema de punto de silla.

Note que para $\tau \in V$ entonces $\operatorname{div} \tau = 0$, lo cual implica

$$a(\tau, \tau) = \|\tau\|_0^2 = \|\tau\|_0^2 + \|\operatorname{div} \tau\|_0^2 = \|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}^2.$$

Esto garantiza la elipticidad de la forma $a(\cdot, \cdot)$ en V . Procederemos a demostrar que la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ satisface la condición Inf-Sup; Por la densidad de $C_0^\infty(\Omega)$ en $L_2(\Omega)$, dado $v \in L_2(\Omega)$ existe $w \in C_0^\infty(\Omega)$ con $\|v - w\|_{0, \Omega} \leq \frac{1}{4}\|v\|_{0, \Omega}$ consecuentemente tenemos

$$\|v - w\|_0^2 = \|v\|_0^2 - 2(v, w) + \|w\|_0^2 \leq \frac{1}{4}\|v\|_0^2,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \|v\|_0^2 + \|w\|_0^2 \right) &\leq (w, v), \\ \frac{1}{4} \frac{\|v\|_0^2}{\|w\|_0} &\leq \frac{1}{2\|w\|_0} \left(\frac{3}{4} \|v\|_0^2 + \|w\|_0^2 \right) \leq \frac{(w, v)}{\|w\|_0}. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \|v\|_0^2 + \|w\|_0^2 \right) &\leq (w, v) \leq \|w\|_0 \|v\|_0, \\ \frac{1}{2} \|w\|_0^2 &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \|v\|_0^2 + \|w\|_0^2 \right) \leq (w, v) \leq \|w\|_0 \|v\|_0, \\ \frac{1}{2} \|w\|_0 &\leq \|v\|_0, \\ 2 \frac{\|v\|_0}{\|w\|_0} &\leq 1. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2} \|v\|_0 < \frac{1}{4} \frac{\|v\|_0^2}{\|w\|_0} < \frac{(w, v)}{\|w\|_0}. \quad (3.8)$$

Definimos $\xi := \inf\{x_1; x \in \Omega\}$ y

$$\begin{aligned} \tau_1(x) &= \int_{\xi}^{x_1} w(t, x_2, \dots, x_n) dt, \\ \tau_i(x) &= 0 \quad \text{para } i > 1. \end{aligned}$$

Note que $\tau(x) \in L_2(\Omega)^d$. Por el Primer Teorema Fundamental del Calculo, entonces

$$\operatorname{div} \tau(x) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial \tau_i(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_1(x)}{\partial x_1} = w(x),$$

entonces $\operatorname{div} \tau(x) = w(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, en particular tenemos que $\operatorname{div} \tau(x) \in L_2(\Omega)^d$, esto verifica que $\tau(x) \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, bajo el mismo argumento que en la prueba de la desigualdad de Friedrichs obtenemos $\|\tau\|_0 \leq c\|w\|_0$. Cuando nuestro objetivo es probar que la condición Inf-Sup es satisfecha, usando (3.8) y partiendo del siguiente cociente;

$$\frac{b(\tau, v)}{\|\tau\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}} = \frac{(\operatorname{div} \tau, v)_{0, \Omega}}{\|\tau\|_0^2 + \|\operatorname{div} \tau\|_0^2} \geq \frac{(w, v)_{0, \Omega}}{(1+c)\|w\|_{0, \Omega}} \geq \frac{1}{2(1+c)} \|v\|_0$$

y así se cumple la condición Inf-Sup.

Por el Teorema de descomposición de Brezzi (Teorema 2.0.9), (3.7) define un problema de punto de silla estable. A primera vista, parece que existe una solución solo en $u \in L_2(\Omega)$. Sin embargo, $u \in H_0^1(\Omega)$ y ya que $C_0^\infty(\Omega)^d \subset H(\operatorname{div}, \Omega)$ la primera ecuación de (3.7) dice en particular que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \tau_i}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \sigma_i \tau_i dx \quad \text{para } \tau_i \in C_0^\infty(\Omega)$$

Por lo tanto, en vista de la Definición 1.0.5, u posee una derivada débil $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sigma_i$ y por lo tanto $u \in H^1(\Omega)$. Ahora (3.7) junto con la fórmula de Green y $\nabla u = \sigma$ implica

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \tau n ds &= \int_{\Omega} \nabla u \tau dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau u dx \\ &= \int_{\Omega} \sigma \tau dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \tau u dx = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como esto es válido para todo $\tau \in C^\infty(\Omega)^d$, podemos concluir que $u = 0$ así pues $u \in H_0^1(\Omega)$.

Notemos que las ecuaciones (3.4) caracterizan la solución del problema variacional

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma, \sigma)_0 - (f, u) &\rightarrow \text{mín!} \\ \nabla u - \sigma &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Aquí el multiplicador de Lagrange coincide con σ y puede eliminarse de las ecuaciones. Por otro lado, (3.7) surge del problema variacional

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\sigma, \sigma)_0 &\rightarrow \text{máx!} \\ \operatorname{div} \sigma + f &= 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Aquí el multiplicador de Lagrange coincide con u de (3.3).

3.1. Elementos de Raviart-Thomas

A continuación del libro de Braess [2] definiremos los elementos de Raviart-Thomas. Sea $k \geq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, supongamos que \mathcal{T}_h es una triangulación regular de dicho dominio, sean

$$X_h := RT_k := \left\{ \tau \in L_2(\Omega)^2; \tau|_T = \begin{pmatrix} a_T \\ b_T \end{pmatrix} + c_T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, a_T, b_T, c_T \in \mathcal{P}_k \text{ para } T \in \mathcal{T}_h, \right.$$

$$M_h := \mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) = \{v \in L_2(\Omega); v|_T \in \mathcal{P}_k \text{ para } T \in \mathcal{T}_h, \tau \cdot n \text{ es continua en los bordes entre elementos}\},$$

Observación 3.1. Braess [2, pag.140] hace el siguiente comentario: La continuidad de los componentes normales en los bordes en X_h garantizan que: $X_h \subset H(\text{div}, \Omega)$. Esta propiedad se tendrá en cuenta para eventuales demostraciones.

Nos interesa saber sobre los elementos de Raviart-Thomas para el caso $k = 0$ y nos apoyaremos del artículo [4] para describirlo mejor y así también a sus funciones bases con algunas de sus propiedades. Primero, se definen los elementos de Raviart-Thomas como:

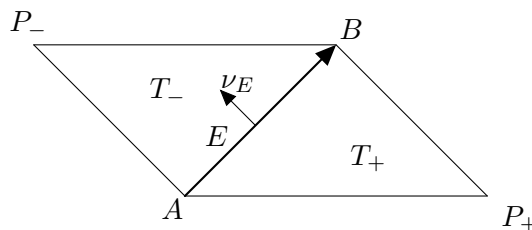
$$RT_0 := \{q \in L^2(T) : \forall T \in \mathcal{T}_h \exists a \in \mathbb{R}^2 \exists b \in \mathbb{R} \forall x \in T, q(x) = a + bx \text{ y } \forall E \in \varepsilon_\Omega, [q]_E \cdot \nu_E = 0\},$$

donde:

- ε denota el conjunto de todas las aristas de los elementos de la triangulación \mathcal{T}_h del dominio Ω , se define como: $\varepsilon := \varepsilon_\Omega \cup \varepsilon_N \cup \varepsilon_D$, siendo ε_Ω el conjunto de aristas internas de los elementos de dicha triangulación, ε_N el conjunto de aristas involucradas a condiciones tipo Neumann del problema variacional y ε_D el conjunto de aristas involucradas a condiciones tipo Dirichlet del problema en cuestión.
- $[q]_E := q|_{T_+} - q|_{T_-}$ denota el salto de q a través del borde $E = T_+ \cap T_-$ compartido por dos elementos vecinos T_+ y T_- de \mathcal{T}_h .
- ν_E es el vector normal unitario a E .

Segundo, para las funciones bases ψ_E de los elementos de Raviart-Thomas se advierte que se realizará una definición de carácter local para la buena comprensión.

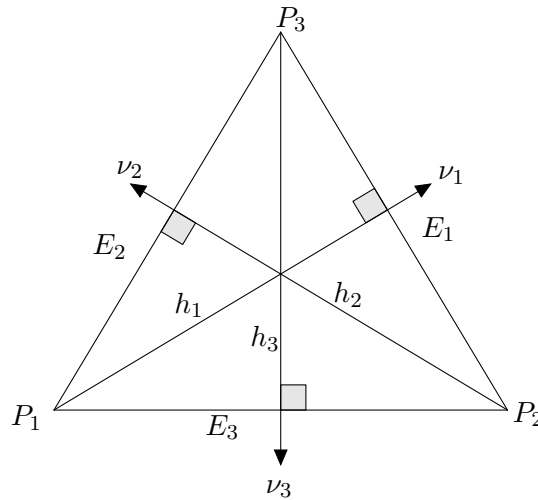
Figura 3.1: Aquí se ven dos triángulos (elementos) T_+ y T_- que comparten el lado $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ que va del nodo A al nodo B con vector normal unitario ν_E .



Definición 3.1.1 (Funciones bases ψ_E). Consideraremos un triángulo T , sus aristas E_1, E_2, E_3 opuestas a los vértices P_1, P_2, P_3 respectivamente; además, sea ν_{E_j} el vector normal unitario de E_j elegido con una orientación fija global, mientras ν_j denota el vector normal unitario exterior a T a lo largo de E_j . Definimos:

$$\psi_{E_j} = \sigma_j \frac{|E_j|}{2|T|} (x - P_j) \quad \text{para } j = 1, 2, 3 \text{ y } x \in T, \quad (3.12)$$

Figura 3.2: Triángulo T de vértices P_1, P_2, P_3 y aristas E_1, E_2, E_3 opuestas a P_1, P_2, P_3 respectivamente. Se identifican alturas h_1, h_2, h_3 de modo que $2|T| = |E_j|h_j$ para $j = 1, 2, 3$.



donde $|E_j|$ hace referencia a la longitud del lado E_j , $|T|$ hace referencia al área del triángulo T y el parámetro $\sigma_j = \nu_j \cdot \nu_{E_j}$ es igual a 1 si ν_{E_j} apunta hacia afuera, en caso contrario σ_j será igual a -1 .

Geoméricamente

$$2|T| = \det(P_2 - P_1, P_3 - P_1) = \det \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nota. extendemos una fila de unos “1” en la matriz para que el determinante tenga sentido.

Para un par de elementos vecinos T_+, T_- de una triangulación \mathcal{T}_h ; T_\pm denota el par de elementos contrarios a la arista E , así mismo identificamos a P_+, P_- vértices únicamente pertenecientes a T_+ y T_- respectivamente; P_\pm denota el par de vértices que se oponen a la arista E : La arista E va del vértice A al vértice B . Entonces ν_E apunta hacia afuera de T_+ a T_- con signo positivo como se ve en Figura 3.1. Si E es un borde exterior, es decir $E \in \varepsilon_D \cup \varepsilon_N$, entonces $\nu = \nu_E$ es el vector normal exterior y $E \subset \partial T_+$ define T_+ (y T_- no está definido).

Definición 3.1.2 (Definición global de ψ_E). Dada una arista $E \in \varepsilon$ hay dos elementos $T_+, T_- \in \mathcal{T}_h$ tal que $E = \partial T_+ \cap \partial T_-$ o bien existe un solo elemento $T_+ \in \mathcal{T}_h$ tal que $E \subset \partial T_+$. Entonces si T_\pm tiene sentido para vértices P_\pm opuestos a E definimos

$$\psi_E(x) := \begin{cases} \pm \frac{|E|}{2|T_\pm|} (x - P_\pm) & \text{si } x \in T_\pm \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (3.13)$$

Lema 3.1.3. *Tenemos las siguientes propiedades:*

$$(I) \quad \psi_E \cdot \nu_E = \begin{cases} 0 & \text{en } (\cup \varepsilon) \setminus E \\ 1 & \text{en } E \end{cases}$$

$$(II) \quad \psi_E \in H(\text{div}, \Omega)$$

$$(III) \quad (\psi_E : E \in \omega) \text{ es una base de } RT_0$$

$$(IV) \quad \text{div} \psi_E = \begin{cases} \pm \frac{|E|}{|T_\pm|} & \text{en } T_\pm \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Veamos que se cumple (I): Consideremos los elementos T_\pm con $E = T_+ \cap T_-$ como en Figura 3.1 y definamos $\omega_E := \text{int}(T_+ \cup T_-)$. Sea F una arista distinta de E en ε ; notemos que $\psi_E \cdot \nu_F = 0$ para $F \not\subset \partial \varepsilon_E$ pues $\psi_E(F) = 0$. Para $x \in F \subset \partial \omega_E$ el vector $(x - P_\pm)$ es tangente al borde $\partial \omega_E$ lo cual implica que $\psi_E(x) \cdot \nu_F = 0$. Ahora, si $x \in E = F$, entonces $(x - P_\pm)$ es la altura del triángulo T_\mp que guiándonos por Figura 3.2 y por como se define ψ_E en (3.13) nos conduce a que $\psi_E(x) = \frac{|E|}{|E_j| h_j} h_j = 1$.

Veamos que se cumple (II): Es claro que $\psi_E \in RT_0$; dado que ψ_E definido solo en T_\pm (dominio acotado) y es una función lineal, entonces $\psi_E \in L^2(\Omega)$, por otro lado $\psi|_{T_\pm}$ es tal que

$$\psi_E(x) = \pm \frac{|E|}{2|T_\pm|} P_\pm \pm \frac{|E|}{2|T_\pm|} x \text{ para todo } x \in T_\pm.$$

Note que para cualquier $F \in \varepsilon_\Omega$ se tiene que $[\psi_E]_F \cdot \nu_F = 0$, justamente por los argumentos en la demostración de (I). Concluimos entonces que $\psi_E \in RT_0(\mathcal{T})$ y por Observación 3.1 se sigue que $\psi_E \in H(\text{div}, \Omega)$.

Veamos que se cumple (III): Note que las funciones $(\psi_E : E \in \varepsilon)$ están únicamente determinadas por $\psi_E \in RT_0(\mathcal{T})$ tal que $\psi_E \cdot \nu_F = 1$ para $E = F$ con $F \in \varepsilon$ y $\psi_E \cdot \nu_F = 0$ si $E \neq F$. Para cualquier $q_h \in RT_0$, note que $q_h \cdot \nu_E$ es constante en $E \in \varepsilon$, definimos $p_h \in RT_0$ como

$$p_h := q_h - \sum_{E \in \omega} (q_h \cdot \nu_E) \psi_E.$$

Por (i) se tiene que $p_h \cdot \nu_E = 0$ para todo $E \in \varepsilon$. En el elemento $T \in \mathcal{T}_h$ de aristas E_1, E_2, E_3 como en Figura 3.2, se tiene pues: $p_h(P_j) \cdot \nu_{E_k} = 0$ para todo $k = \{1, 2, 3\} \setminus j$ en el vértice $x = P_j$ opuesto a E_j . Dado que $p_h|_T$ es afín, entonces prueba que $p_h \equiv 0$ en $T \in \mathcal{T}_0$, llegamos a que RT_0 está contenido en el conjunto generado por ψ_E con $E \in \omega$. Veamos que $(\psi_E : E \in \omega)$ es linealmente independiente:

Sea $(x_E : E \in \omega)$ conjunto de coeficientes reales tal que $p_h = \sum_{E \in \omega} x_E \psi_E \equiv 0$ en el dominio Ω , considerando la propiedad (i) se llega a que $0 = p_h|_F \cdot \nu_F = x_F$.

Veamos que se cumple (IV): Teniendo en cuenta (3.13), si $x \in T_{\pm}$ entonces $\operatorname{div} \psi_E(x) = \pm \frac{|E|}{2|T_{\pm}|}$. Si $x \notin T_{\pm}$ entonces $\operatorname{div} \psi_E(x) = 0$.

□

3.2. Resultados numéricos

Como ejemplo numérico resolveremos la formulación mixta dual (3.7) asociada a la ecuación de Poisson con condición de frontera tipo Dirichlet con solución exacta $u(\theta, r) = r^{2/3} \sin(2\theta/3)$ definida en coordenadas polares (θ, r) , y $f = 0$ en el dominio en forma de $L \Omega := (-1, 1)^2 \setminus [0, 1] \times [-1, 0]$, con $u = u_D$ en la frontera Dirichlet $\Gamma_D := \{0\} \times [-1, 0] \cup [0, 1] \times \{0\}$; se consideran los espacios discretos $X_h = RT_0$ y $M_h = \mathcal{M}^0$, este último, el espacio de las funciones constantes, para aproximar la formulación mixta.

Los algoritmos utilizados para la implementación numérica fueron extraídos en gran medida del artículo [4]. La dirección electrónica desde donde se pueden descargar estos algoritmos es: https://www.math.hu-berlin.de/~cc/cc_homepage/software/software.shtml.

Utilizaremos la herramienta MATLAB para realizar los cálculos numéricos; para el lenguaje de dicho programa f y u_D se definen como:

```
%f.m
% f = -div(grad (u_D) )
function volumeforce = f(x,rhs)
    volumeforce = zeros(size(x,1),1);
%u_D.m
function dir = u_D(x,rhs)
    a = angle((x(:,1)+x(:,2)*i)*(-1-i)/sqrt(2)) + pi*3/4;
```

```

r = sqrt(x(:,1).^2 + x(:,2).^2);
dir = r.^(2/3).*(sin(a*2/3)) ;

```

Dispusimos de 7 discretizaciones; una base de datos que contenía información de coordenadas, elementos, fronteras Dirichlet respecto de la discretización del dominio Ω . En el Cuadro 3.1 exponemos información sobre la cantidad de elementos, lados Dirichlet y el valor de h para cada discretización.

Cuadro 3.1: Datos de discretización.

Numero de elementos N	Longitud de base h	Numero de lados Dirichlet
6	1	8
24	1/2	16
96	1/4	32
384	1/8	64
1536	1/16	128
6144	1/32	256
24576	1/64	512

Para visualizar los resultados veamos las imágenes arrojadas por el algoritmo utilizando la cuarta discretización:

Figura 3.3: Esta es la gráfica de la solución (discreta) u_h del **Problema mixto dual** con $h = 1/8$.

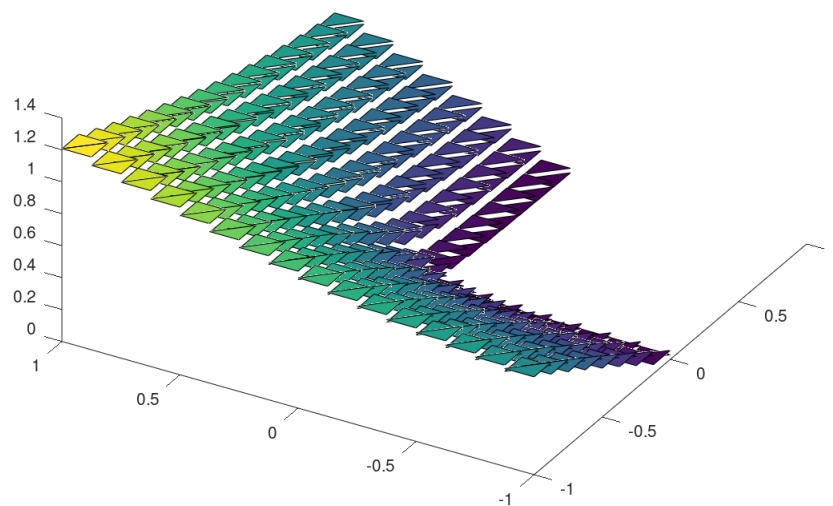
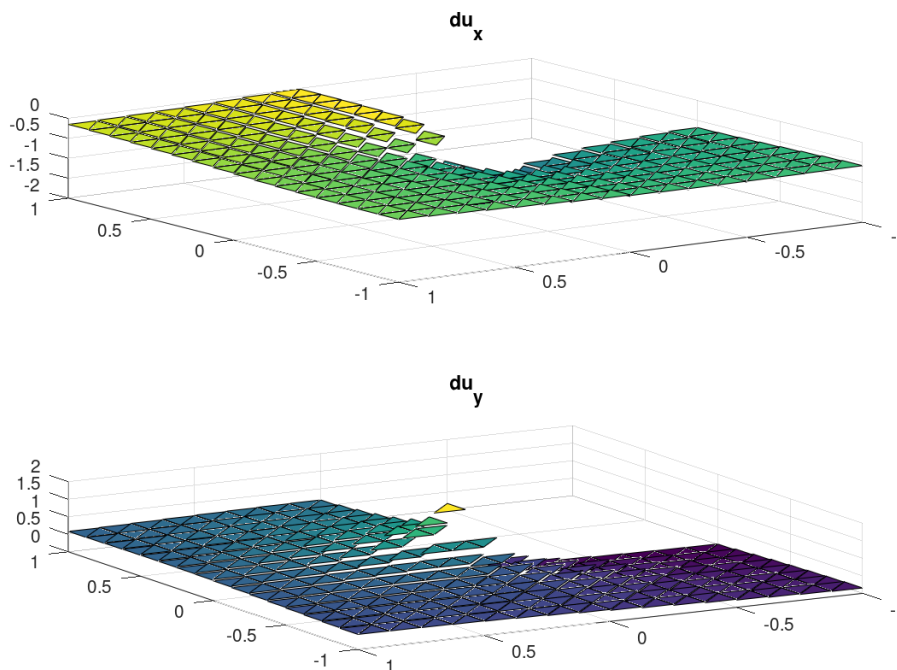


Figura 3.4: Esta es la gráfica de σ_h para el **Problema mixto dual** con $h = 1/8$.



Analizaremos el error $e^0 := \|u - u_h\|_{L^2}$, y su tasa de convergencia experimental

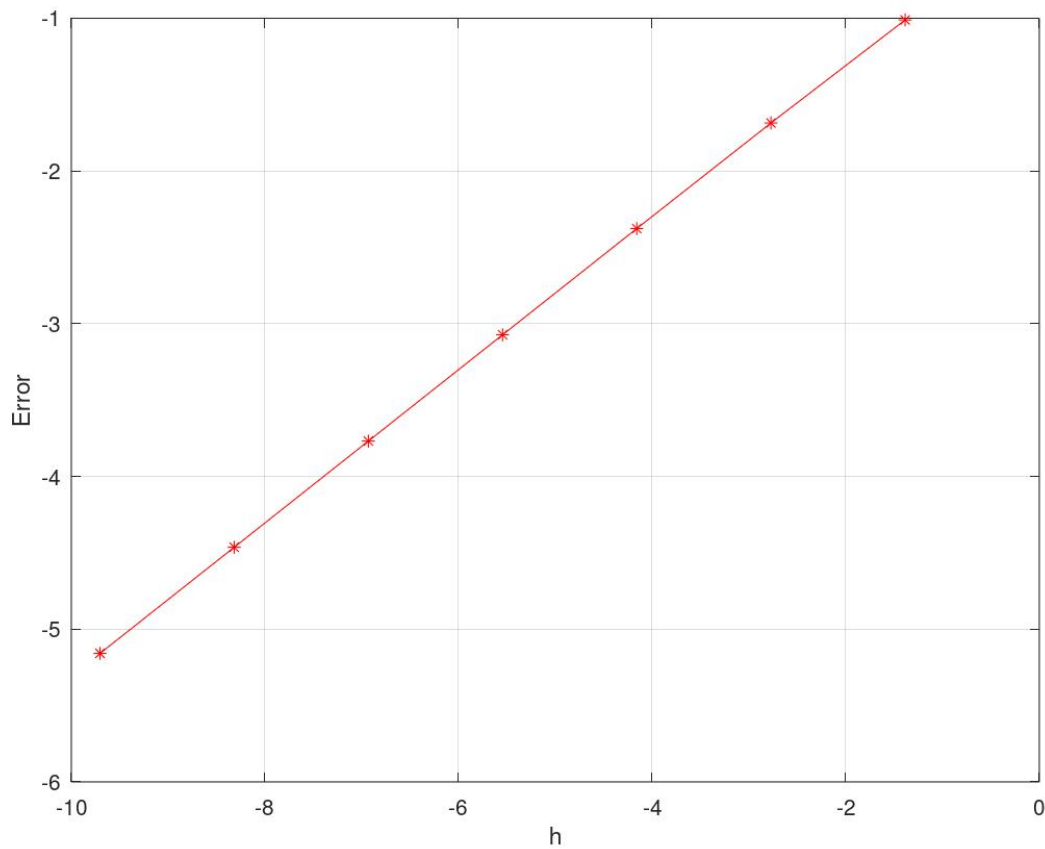
$$\theta_N := \frac{\ln \frac{e_i}{e_{i+1}}}{\ln \frac{N_{i+1}}{N_i}},$$

donde e_i representa el error e^0 respecto a la i -ésima discretización.

El Cuadro 3.2 muestra el error e^0 asociado a un respectivo h y a su vez, la tasa con la que este converge. Se observa que el error e^0 va disminuyendo a la mitad en la medida de que h también lo hace.

Cuadro 3.2: Error y tasa de convergencia.

h	e^0	θ_N
1	0.36383	—
1/2	0.18534	0.48657
1/4	0.092833	0.49872
1/8	0.046308	0.50168
1/16	0.023091	0.50196
1/32	0.011520	0.50159
1/64	0.0057510	0.50114

Figura 3.5: Gráfica en escala log-log de h vs e^0 .

En la Figura 3.5, la pendiente positiva de la gráfica respalda el hecho de que, conforme disminuye h así mismo va disminuyendo el error e^0 .

Bibliografía

- [1] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods. 3rd ed.*, vol. 15. New York, NY: Springer, 3rd ed. ed., 2008.
- [2] D. Braess, *Finite elements. Theory, fast solvers and applications in solid mechanics. Translated from German by Larry L. Schumaker. 3rd ed.* Cambridge: Cambridge University Press, 3rd ed. ed., 2007.
- [3] J. B. Conway, *A course in functional analysis.*, vol. 96. Springer, New York, NY, 1985.
- [4] C. Bahriawati and C. Carstensen, “Three Matlab implementations of the lowest-order Raviart-Thomas MFEM with a posteriori error control,” *Comput. Methods Appl. Math.*, vol. 5, no. 4, pp. 333–361, 2005.