

Error En El Cálculo De La Energía Por Deformación Residual

Error In The Estimate Of The Energy By Residual Deformation

G. A. Enciso ^{a,b}, A. L. Imbeth Luna ^b, J. J. Zuluaga Quintero ^b

^a Licenciado en Criminalística (Argentina); DOCTOS Consultora. www.doctosconsultora.com.ar, Resistencia, Argentina.

^b Grupo de Física Industrial y de la Radiación, Universidad de Antioquia, A.A.1226, Medellín, Colombia.

Recibido 01.04.10; Aceptado 27.01.11; Publicado en línea 04.10.11.

Resumen

Las técnicas de simulación numéricas [1] y de Monte Carlo [2] son aplicadas a uno de los modelos clásicos utilizados para estimar la energía absorbida en la deformación residual con el objeto de determinar una cota de error producida, a partir de una determinada medida de deformación para la cual se quiere calcular dicha energía. La fuente principal del error estudiada son las medidas de profundidad de deformación; se discute un criterio a considerar para la selección de la mejor estimación del error que ella produce en uno de los modelos clásicos. Se desarrolla un procedimiento estadístico para aplicarlo a un conjunto de ensayos de colisión contra barrera rígida de vehículos de la misma marca de producción. Se infiere los coeficientes de rigidez para un modelo clásico de deformación y se estima la energía absorbida más su cota de error para varias medidas de deformación residual. Por último se analiza la relación entre la magnitud del error calculada y la medida de profundidad de deformación, verificándose una correspondencia inversa.

Palabras clave: energía, deformación.

Abstract

The numerical simulation techniques [1] and Monte Carlo [2] are applied to one of the classic models used to estimate the energy absorbed in the residual strain in order to determine a margin of error produced from a particular measure of deformation for which you want to calculate this energy. The main source of error are studied depth measurements of deformation, is discussed a criterion to consider in selecting the best estimate of the error it produces one of the classic models. It develops a statistical procedure to apply to a set of crash tests rigid barrier against vehicles of the same brand of production. It follows the stiffness coefficients for a classical model of deformation and energy absorption is estimated over the margin of error for several measures of residual deformation. The paper analyzes the relationship between the magnitude of the error measure calculated and the depth of deformation, verifying a match around.

Keywords: energy, deformation.

1. Introducción

Los procedimientos para estimar las cotas de error son aplicables a cualquier trabajo de medición y/o cálculo; habiéndose empleado para nuestro objetivo una de las ecuaciones propuesto por Campbell [3] donde se infiere la energía absorbida para una deformación residual que abarque todo el frente del vehículo, mediante la siguiente ecuación:

$$Ed = M \cdot bo \cdot b1 \cdot y + \frac{M \cdot b1^2 \cdot y^2}{2} + \frac{M \cdot bo^2}{2}, \quad (1)$$

Donde:

Ed: es la energía estimada por el modelo en [J]

M: es la masa del vehículo en [kg]

y: es la medida de penetración (deformación) en [m]

bo: coeficiente del modelo [m/s]

b1: coeficiente del modelo [s⁻¹]

Las primeras variables consideradas fuentes de error son: *M*, *y*, *bo*, *b1*.

Los coeficientes *bo* y *b1* son estimados estadísticamente de acuerdo a diversos ensayos que se realicen sobre una muestra de automóviles que son lanzados a diversas velocidades contra una barrera rígida. Los ensayos son representados en un diagrama de dispersión que, generalmente, ilustran la linealidad de la relación entre velocidad de impacto y deformación residual.

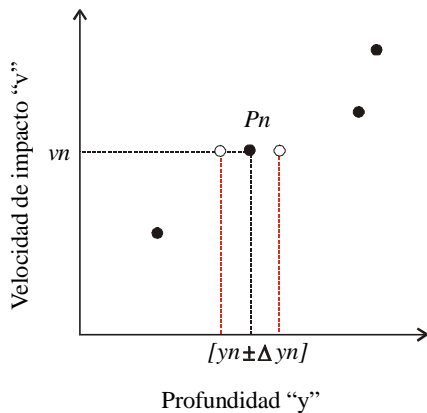


Figura 1. Diagrama de dispersión de los valores de los ensayos de choque contra barrera rígida para una muestra de vehículos similares.

Los pares ordenados *P_n* del diagrama de dispersión de la Figura 1, son puntos empíricos cuya ubicación dentro del diagrama están cargados de una cierta incertidumbre, debido a que cada valor *y_n*, corresponde a un valor prome-

dio de las medidas de deformación tomadas en todo el frente del vehículo *n*-ésimo (*v_n*) que pertenece a la muestra. Esta incertidumbre es Δy_n .

2. Metodología

Llamamos Δy al valor promedio de todos los errores Δ de cada una de las medidas *y_n* tomadas de una muestra de vehículos ensayados. Los términos *bo* y *b1* se computan mediante el método de los mínimos cuadrados aplicados para el ajuste lineal [4], mediante las siguientes expresiones:

$$bo = \frac{\sum_{n=1}^N v_n \sum_{n=1}^N (y_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N v_n y_n \sum_{n=1}^N y_n \right)}{N \sum_{n=1}^N (y_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N y_n \right)^2}, \quad (2)$$

$$b1 = \frac{\left(N \sum_{n=1}^N v_n y_n \right) - \left(\sum_{n=1}^N v_n \sum_{n=1}^N y_n \right)}{N \sum_{n=1}^N (y_n)^2 - \left(\sum_{n=1}^N y_n \right)^2}, \quad (3)$$

Donde:

N: es el tamaño de la muestra,

y_n: son las medida promedios de deformación residual de cada vehículo ensayado.

v_n: son las velocidades registradas al momento del impacto para cada valor *y_n*.

Designamos como *Se* a la medida del error estándar del estimador [4], parámetro estadístico que contempla las distancias entre los valores empíricos de *v_n* con sus valores teóricos estimados a partir de los coeficientes *bo*, *b1*, y la distancia entre los *v_n* y su valor promedio.

$$Se = \left[\frac{\sum_{n=1}^N (v_n)^2 - bo \sum_{n=1}^N v_n - b1 \sum_{n=1}^N v_n (y_n)}{N - 2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sin embargo debe tenerse presente que cada valor *y_n* varía en una cantidad $\pm \Delta y$, por lo tanto las medidas de error de *bo* y *b1* dependen de Δy .

Al mismo tiempo, al observar la ecuación 4, también se verifica que la medida del error (*Se*) en la estimación de *bo* y *b1* dependen, además, de la variación Δy . En este punto

es necesario aplicar algún criterio que nos permita considerar el mejor error de la estimación de los parámetros en discusión, dado que luego, será ésta la medida de error a considerar en la ecuación 1.

Las técnicas de simulación numéricas y de Monte Carlo permiten computar rápidamente la medida de error de cualquier variable que dependa de más de una fuente de error. Por lo tanto la medida en que hace variar a bo puede estimarse independientemente del valor Se .

Si llamamos Y_n a la sumatoria de todos los valores y_n de una muestras más la fluctuación de la muestra Δy , podemos ver en la ecuación 5 que cada término de la sumatoria puede variar entre $y_n + \Delta y$, si la función $rnd(1)$ ¹ devuelve un número igual a uno o, $y_n - \Delta y$ si la misma función devuelve un número igual a cero.

$$Y_n = \sum_{n=1}^N y_n = [y_1 + \Delta y (2rnd(1) - 1)] + [y_2 + \Delta y (2rnd(1) - 1)] + \dots + [y_n + \Delta y (2rnd(1) - 1)] \quad (5)$$

Como la ecuación 5 es un término de la ecuación 2, llamaremos Eo al error estimado de bo mediante el uso de Monte Carlo correspondiente a el triple valor de la desviación estándar² resultante de las mil soluciones de bo generadas entre $+\Delta y$ y $-\Delta y$.

La ecuación 6 se encuentra también dentro de la ecuación 4, por lo tanto diremos que $Se \pm S(Se)$ es la medida del error de estimador mas o menos su propia medida de error interna $S(Se)$ la cual resulta de computar la desviación estándar de las mil soluciones generadas para Se .

$$\sum_{n=1}^N v_n y_n = v_1 [y_1 + \Delta y (2rnd(1) - 1)] + v_2 [y_2 + \Delta y (2rnd(1) - 1)] + \dots + v_n [y_n + \Delta y (2rnd(1) - 1)] \quad (6)$$

Un criterio para establecer la *mejor medida de error* a utilizar en la ecuación 1, resulta de plantear el mayor error derivado del uso de la ecuación 2 o 4.

La Figura 2 muestra con línea intensa la recta teórica estimada a partir de los valores empíricos de y_n y *velocidad de impacto*. La pendiente de dicha recta es $b1$. Se observa que algunos pares ordenados P_n pueden no estar contenidos en la recta.

Si mediante la generación de números aleatorios se estima el error de bo (Eo), la recta teórica puede fluctuar entre las dos rectas finas segmentadas correspondientes a valores límites de $+Eo$ y $-Eo$. Aún pueden existir puntos P_n que queden fuera del área de incertidumbre. Si el error del estimador mas su propia desviación estándar es, en valor absoluto, mayor que Eo ; la recta teórica puede estar contenida dentro de las dos líneas punteadas intensas y todos los puntos P_n deberán estar contenidos en el espacio señalado.

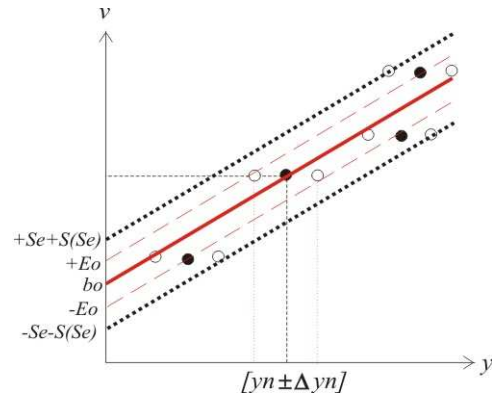


Figura 2: Recta teórica estimada para los valores bo y $b1$, y sus fluctuaciones posibles.

Finalmente llamaremos “ e ” al *mejor error estimado* para la recta teórica de velocidad de impacto, función de la profundidad de deformación residual de una muestra de ensayos de colisión contra barrera rígida.

$$e = \begin{cases} Se + S(Se) & \text{si } Se + S(Se) > Eo \\ Eo & \text{si } Se + S(Se) < Eo \end{cases}$$

La estimación del valor de la energía absorbida en la deformación a partir de la ecuación 1 y considerando el mejor error estimado e , se computa mediante la generación de mil soluciones posibles de acuerdo a los valores de bo que pueden variar entre $+e$ y $-e$, tal como se muestra en la ecuación 7:

$$Ed_i = [M \cdot [bo + e \cdot (2rnd(1) - 1)] b1 \cdot c] + \left[\frac{1}{2} M \cdot (b1)^2 \cdot c^2 \right] + \left[\frac{1}{2} M \cdot [bo + e \cdot (2rnd(1) - 1)]^2 \right] \quad (7)$$

Donde el valor c es la medida de profundidad de la deformación de un vehículo que puede no pertenece a la muestra, pero es de características semejante a estos para lo cual se quiere estimar el valor de Ed , o bien, c puede ser un valor de y_n no contenido en la muestra. Sin embargo escogemos un valor de c que esté comprendido entre el mayor y menor valor de los y_n de la muestra.

¹ Función que genera un número aleatorio en el paquete Mathcad®

² Para los fines forenses E. Martínez recomienda utilizar como medida de error el triple valor de la desviación estándar [2].

Si sucede que las masas del vehículos de la muestras no son iguales, es necesario además contemplar esta variable como otra fuente de error en la ecuación 7. Llamando Δm a la variación de las masas de los vehículos que pertenecen a la muestra, y M al promedio de las masas de la muestra, sus soluciones posibles pueden ser estimadas de la siguiente manera:

$$M + \Delta m \cdot (2rnd(1) - 1) \tag{8}$$

Introduciendo la ecuación 8 en la ecuación 7, se obtienen las soluciones posibles considerando todas las fuentes de error del modelo sometido a estudio.

3. Aplicación de la técnica de estimación del error

La técnica señalada arriba es aplicada a dos muestra de ensayos obtenidos de la base de datos de la NHTSA [5] cuyos detalles se muestra en la Tabla 1 para la primer muestra, pertenecientes a vehículos Ford Escord.

Tabla N° 1: Velocidad de impacto, promedio de deformación y masas de vehículos (Ford Escord) ensayados contra barrera rígida.

N° de Test	Vn [m/s]	yn [m]	M [kg]
1216	4,52	0,06	1254
509	13,05	0,38	923
1118	13,19	0,45	1280
373	13,5	0,45	1100
206	15,69	0,58	1175

Ajustando linealmente los datos de la Tabla 1, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 0,03m & b_0 &= 4,1m/s \\ E_o &= 0,56 m/s & b_1 &= 21,03 1/s \\ Se+S(Se) &= 0,73 m/s & \Delta m &= 178,5kg \end{aligned}$$

Como el mejor error estimado $e = Se + S(Se)$, es $0,73m/s$, se busca a continuación las mil soluciones posibles utilizando la ecuación 7 y la 8, para una deformación escogida $c = 0,5m$.

Los resultados probables y sus frecuencias de ocurrencia se detallan en la **Figura 3**.

La forma acampanada de la **Figura 3** muestra que la variable Ed es aleatoria entre los intervalos señalados de $\pm \Delta y$ y para un valor arbitrario c de deformación residual, siendo la función de densidad de la variable Ed apropiada para una distribución normal.

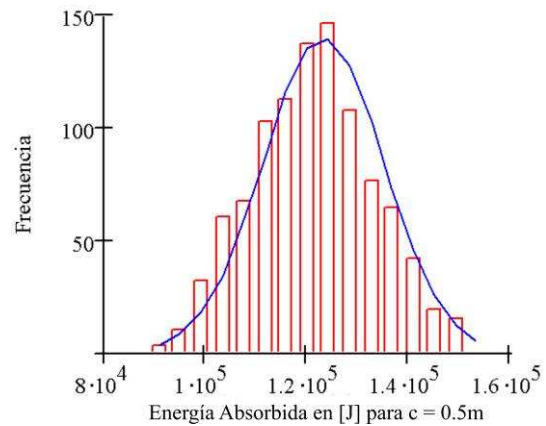


Figura 3: Distribución de frecuencia para mil soluciones posibles de energía absorbida estimada, calculadas para un valor c .

El valor central (el de mayor frecuencia) de la distribución de arriba es 121362 Joule y su desviación estándar igual a 9332 Joule . Por lo tanto se puede inferir a partir del modelo clásico planteado como ejemplo, y del valor $c = 0,5m$, que la energía absorbida en la deformación estimada es $Ed = 121362 \pm 27995 \text{ Joule}$.

El error calculado de 27995 Joule del caso señalado, es equivalente a un 21% de la medida central de 121362 Joule y de ninguna manera puede considerarse que dicho valor del error, será el mismo para otro valor c .

Para verificar esto, hacemos que c tome valores comprendidos entre el mayor y menor valor de y_n de la muestra seleccionada. Al tratarse de la misma muestra se utiliza el mismo valor de e en la ecuación 7 y de Δm para la ecuación 8.

Se calculan los distintos valores del error en la determinación de Ed y c , y se ilustran en la Tabla N° 2 y Figura 4.

Tabla N° 2: Valores del error en la estimación de Ed para distintos valores de c (medidas de profundidad de la deformación); primera muestra.

Valor de c [m]	Error de Ed [%]
0.05	44
0.1	35
0.2	27
0.3	24
0.4	23
0.5	21

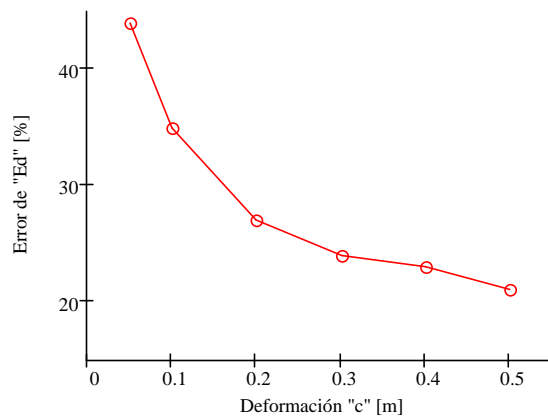


Figura 4: Valores del error en la estimación de Ed para distintos valores de c (medidas de profundidad de la deformación); primera muestra.

Se puede observar como el error estimado para Ed se incrementa, no linealmente, a medida que la medida de la profundidad de deformación va disminuyendo.

Los datos de la segunda muestra de ensayos de colisión contra barrera seleccionada, se detalla en la Tabla 3 y pertenecen a vehículos Dodge Intrepid.

Tabla N° 3: Velocidad de impacto, promedio de deformación y masas de vehículos (Dodge Intrepid) ensayados contra barrera rígida.

N° de Test	Vn [m/s]	yn [m]	M [kg]
3147	11.11	0.23	1749
3122	11.22	0.22	1691
3118	13.38	0.33	1689
3126	13.41	0.4	1798
3005	15.63	0.4	1770

Los resultados obtenidos del tratamiento estadístico desarrollado arriba, señalan a continuación:

$$\begin{aligned} \Delta y &= 0,10m & b_0 &= 8,07m/s \\ E_o &= 3.78 m/s & b_1 &= 16,161/s \\ Se+S(Se) &= 1,12 m/s & \Delta m &= 50kg \end{aligned}$$

Se elige Eo como el mejor error estimado para computar la cota de error de la energía absorbida en la deformación, la cual se calcula para distintos valores de c que varían entre 0.2 y 0.4 utilizando la ecuación 7 y 8.

Los resultados se muestran en la Tabla 4 y Figura 5.

La importante diferencia de error inferido en la muestra 2 con relación a la muestra 1, puede ser entendida en principio, si se analizan los valores de Δy de cada muestra en

comparación en el rango de variabilidad de yn respectivo de las mismas, considerando además el rango de variabilidad de las velocidades de impacto vn de la muestra. Mientras que en la primer muestra yn varía entre 0,58m - 0,06m con una desviación de Δy = 0.03m y vn varía entre 4,52m/s y 15,69m/s, en la segunda muestra yn varía entre 0,23m - 0,44m con una desviación de Δy = 0.1m y vn varía entre 11,11m/s y 15,63m/s.

Tabla N° 4: Valores del error en la estimación de Ed para distintos valores de c (medidas de profundidad de la deformación); segunda muestra.

Valor de c [m]	Error de Ed [%]
0.2	85
0.25	78
0.3	72
0.35	64
0.4	63

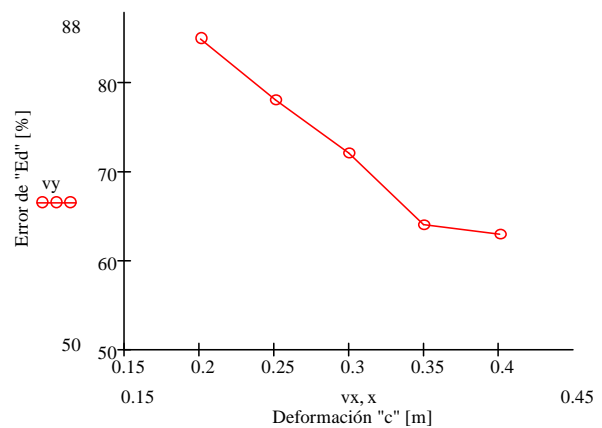


Figura 5: Valores del error en la estimación de Ed para distintos valores de c (medidas de profundidad de la deformación); segunda muestra.

4. Conclusiones

Analizando las variables consideradas en los modelos clásicos de deformación, se verifica que una de las principales fuentes de error a tener presente se rige por las fluctuaciones entre las medidas tomadas de las deformaciones residuales del frente de un vehículo Δy.

Dado que estas fluctuaciones no solo afectan los procedimientos estadísticos para la determinación de los coeficientes de rigidez (bo, b1), sino que además alcanza a producir incertidumbre en los mismos parámetros estadísticos que normalmente son usados como el error del estimador para determinar la exactitud de dichos coeficientes.

La determinación de una medida de variación que permita calcular la cota de error en la energía inferida se hace compleja debido a la cadena de cálculos y medidas a considerar.

El criterio de selección del *mejor error estimado* permite contemplar todas las incertidumbres de los datos empíricos de los cuales se parte, en el modelo estudiado. Este mejor error estimado resulta ser la medida que permite fijar los límites de las variaciones de los parámetros de los cuales depende el cálculo de la energía de deformación.

Se ha verificado en las dos muestras estudiadas la existencia de una cierta dependencia entre el error final inferido de Ed y la profundidad promedio de la deformación residual de modo que a menor deformación mayor será la incertidumbre de la energía calculada. Esta dependencia no es la única, y solo marca la relación en cuanto al crecimiento o decrecimiento del error final inferido.

Otro aspecto a tener muy presente es el la variación promedio de las medidas de deformación de cada unidad en la muestra seleccionada Δy , en comparación con el rango de variabilidad de deformación y_n de todo el conjunto de dichas medidas y el rango de velocidades de impacto puestas en juego en cada muestra; dado que al utilizar muestras donde se encuentren comprometidas valores de energías cinéticas que no discrepen entre si lo suficiente

(entre cada ensayo de la muestra), las estimaciones de Ed estarán cargadas de un importante error.

Referencias

- [1] Seminario de Ingeniería y Física Forense – I° Encuentro 2004 de Investigación de Accidentes de Tránsito. Paraná (Arg.) 22 y 23 de octubre de 2004. Enciso G., Blanco A. “Simulaciones Numéricas en Modelos de Colisión”.
- [2] Martínez E.- “Cálculo de Cotas de Error en Accidentología usando Técnica de Monte Carlo”.- Ciencia Energética, 25:25; 1994.-
- [3] Campbell K.L.-“Energy as a Basic for Accident Severity – a Preliminary Study”- The University of Wisconsin, PhD Thesis Engineering – Automotive – U.S.A. June 1972.-
- [4] Berenson M., Levine D.- “Estadística Básica en Administración”.- Cuarta Edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. 1992.-
- [5] National Highway Traffic Safety Administration. Vehicle Safety Research. (Agosto 2004). <http://www-nrd.nhtsa.dot.gov>