# Paseos aleatorios y el modelo de los sapos sobre $\mathbb{Z}$

**José Manuel Jaramillo Toro**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

**Matemático**

Asesora:
Dra. Mary Luz Rodiño Montoya
Coasesor:
Dr. Pablo Martin Rodriguez

---

Instituto de Matemáticas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Antioquia
Medellín, Colombia
2022

# Agradecimientos

Me pasan tantas palabras, frases emotivas, oraciones, sentimientos y momentos por la cabeza, que me siento abrumado al querer plasmar estas ideas en este agradecimiento. Mucho más, en cuanto a lo que escribir, como lo quiero escribir y más importante aún, a quien se lo quiero escribir. Pero dejando a un lado los sentimientos, quiero agradecer a un par de personas, tal vez pocas, tal vez muchas, que hicieron parte de este logro, que no solo se resume en esta tesis sino al acompañamiento que hicieron conmigo en esta aventura.

Quiero comenzar los agradecimientos a los profesores que me tocaron el corazón, aquí los mencionare como profesores solamente por volver este escrito un poco más personal y más íntimo, sin embargo, el título de doctor(a) o maestro(a) a quien se lo merezca. En primer lugar, quiero agradecer a mi asesora, la profesora Mary Luz Rodiño que desde álgebra II me cautivó su metodología para enseñar y evaluar, aunque sus parciales eran, siguen y seguirán, como muchos dicen: interminables, supe que deseaba trabajar con alguien que además de hacerme sentir seguro con lo que aprendía, fuera una guía, y creo que el tiempo me dio la razón. A mi asesor el profesor Pablo Rodríguez, en el último año tuve el placer de conocerlo, de hablar, de estudiar y aprender de él y que junto con la profesora Mary me han brindado oportunidades que el José de ningún semestre, que fueron muchos, nunca pensó que tendría la oportunidad de tener. Sin embargo, se presentaron y se han llevado a cabalidad gracias al acompañamiento de ellos.

Al instituto de matemáticas y al resto de profesores, que ojalá pudiera uno dar las gracias a todos por las cosas buenas y por las cosas malas que se vivieron con cada uno, en cada materia, en cada semestre o en la carrera como total, pero si hiciera eso los agradecimientos llevarían más hojas que la propia tesis. Sin embargo, si quiero mencionar a tres profesores, al profesor Alejandro Roldán quien fue él, quien hizo que le cogiera mucho cariño a la probabilidad y a los procesos estocásticos y si no hubiese sido por esa enseñanza el trabajo de grado tendría otro título y otro derrotero. Al profesor Santiago Castañeda que más allá de su enseñanza, es un amigo que me ha apoyado y me ha ayudado a quitar el miedo en la academia y a tenerme confianza. Al profesor Diego López o como lo llamamos en el instituto, Diego “Loco”, a él muchas gracias, porque a principio de carrera donde las matemáticas parecían turbias y oscuras y las ganas de desertar eran más que las de quedarse, apareció él, enseñándonos que las matemáticas pueden ser lindas, pueden ser bellas y gracias a esa motivación que sentí por parte de él y su forma de enseñar es que estamos donde estamos.

Para finalizar los agradecimientos académicos, agradezco a la Universidad de Antioquia -UDEA- y la facultad de Ciencias Exactas y Naturales que más que un lugar de estudio, se convirtieron para mí en un segundo hogar, un lugar donde se puede aprender, se puede llorar, pero también se puede reír y se puede enseñar. De igual manera agradezco a la Universidad Federal de Pernambuco -UFPE- y su programa de Mentoría Científica del programa de posgrado en estadística -PPGE-, el cual fui participe y que justamente, gracias a esta Mentoría, guiados del profesor Pablo Rodríguez es que llevamos a cabalidad este trabajo de grado.

A mis de amigos de infancia Sebastián y David gracias por tanta sana competencia, hasta para pelar un aguacate competíamos, pero gracias a ello es que seguimos hoy queriéndonos, odiándonos, pero más que eso seguimos ahí juntos. A los físicos favoritos Saavedra, Vela y Martínez, no les digo Sebastián a los tres porque Sebastianes en la facultad hay más que números primos, a ellos agradezco su amistad, su compañía y consejos en la academia y para ellos mi admiración en lo que hacen y como lo hacen. A Carolina, Angie, Herney, María, Mateo, Diego, Daniel, Santiago, Frank, Mario y demás amigos, que compartimos muchos o pocos cursos, y que los estudiamos, los requeté estudiamos, los lloramos, los perdimos, pero aprendimos, otros cursos que perdimos y no aprendimos, otros que ganamos con corazón y alma, y otros casos donde los ganamos, aunque las probabilidades estaban en contra de nosotros y nadie daba un peso por nosotros, por eso y por muchas experiencias más, muchas gracias.

A Andrea y Laura mis amigas del alma, gracias por estar conmigo en los momentos felices, en los tristes, por inspirarme, animarme y alentarme hasta en los momentos más dramáticos y mas sencillos, espero que yo también haya sido de inspiración y de apoyo en algún momento para ustedes. A Yessenia, mi pareja de toda la vida, gracias por tantas alegrias, por tanto acompañamiento, por tanto apoyo, por tantas risas y por tantos momentos juntos.

Finalmente, a mi hermano, a mis padres: la Polva y el Firu y a mi segunda madre, mi tía Ana María, aparte de deberles esta vida y la otra, aparte de la dedicatoria, les quiero escribir que: gracias por la vida, gracias por tanto amor incondicional que me han ofrecido, desde antes de nacer creería yo, mi tía y mi madre han estado ahí para mí y mucho más en esta carrera que se le pasan tantos pensamientos a uno por la cabeza. Por entender mis miedos, por escucharme, por regañarme y sugerir lo mejor para mi vida, espero algún día pagarles eso y mucho más. Por tanto, esta tesis y este título no sólo es mío, sino que es de los cuatro, a ustedes mi amor incondicional.

“ **Hace falta mucho coraje para enfrentarse a los enemigos, pero, mucho más para hacerlo contra los amigos.** ”

**-Albus Dumbledore.**

# Dedicatoria

**A mi madre, mi padre, mi tía y mi perro.**

# ÍNDICE GENERAL

# Introducción

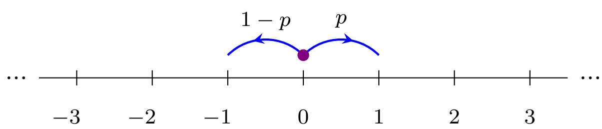
El primer objetivo de este trabajo es estudiar las cadenas de Markov a tiempo discreto [1, 2, 3]. Estas cadenas de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ son procesos estocásticos que cumplen la propiedad markoviana: Si para todo entero $n \geq 0$ y cualquier subconjunto finito $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ de posibles estados de $S$, se cumple que:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

La ecuación anterior se conoce como **propiedad markoviana**. Informalmente hablando, lo que representa la ecuación anterior es que: si conocemos el presente y el pasado de un proceso, el futuro solo depende del presente, o de igual forma, es independiente del pasado del proceso. Entre los modelos más conocidos de las cadenas de Markov, están los paseos aleatorios sobre $\mathbb{Z}$, que se definen de la siguiente manera: Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas con función de distribucción $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1 - p$, y sean además $S_0 = 0$ y $S_n = S_{n-1} + X_n$ para $n \geq 1$. Entonces $\{S_n\}_{n\in N_0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \mathbb{Z}$ y probabilidades de transición para todo $i, j \in S$, dadas por:

$$p_{ij} := \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1 \\ 1-p, & \text{si } j = i-1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Note que $S_n$ es la posición de la partícula en el tiempo $n$, este proceso se puede observar como una partícula que se mueve en los enteros vistos como un grafo, donde los vértices son los números y las aristas estarán determinadas por las probabilidades de moverse a derecha con probabilidad $p$ o moverse a izquierda con probabilidad $1 - p$.




Este modelo tiene varias generalizaciones, entre ellas destacaremos las siguientes dos: La primera es el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^3$ [4, 5] donde la partícula inicialmente en el origen, puede saltar a sus vecinos con igual probailidad. La segunda es el modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ [6, 7], en este modelo aumentaremos el número de partículas sobre el grafo, donde en un instante inicial cada vértice $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ está ocupado por partículas $\eta_i \in \mathbb{Z}^+$, donde $\eta := (\eta_i)$, además asumimos que hay dos tipos de partículas, las activas y las inactivas, donde cada partícula activa realiza de forma independiente a las demás partículas, un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ con probabilidad de salto a derecha $p$ para $p \in (0, 1)$.

Una de las preguntas interesantes que hay dentro de las cadenas de Markov es la siguiente: ¿Hay algún chance de que la partícula nunca retorne al estado inicial? Asociados a esta pregunta aparecen dos conceptos fundamentales dentro de las cadenas de Markov, los cuales son los estados de recurrencia y transitoriedad.

Nuestro primer propósito en este trabajo es estudiar y demostrar la recurrencia y transitoriedad del paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^2$ y $\mathbb{Z}^3$, mostrando que estos modelos son recurrentes y transitorios, respectivamente. Para el modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ basaremos el estudio en [7] y mostraremos bajo qué condiciones este modelo es recurrente o transitorio.

En el capítulo final estudiaremos la conexión de las cadenas de Markov con las álgebras de evolución [8]. Este tipo de álgebras no asociativas [9, 10], surgen como respuesta matemática al origen de la genética no mendeliana, introducidas por J.P. Tian y P. Vojtechovsky en 2006. Las álgebras de evolución tienen una gran conexión, no solo con las cadenas de Markov sino también con la teoría de grafos. En este último capítulo mostraremos por medio de algunos ejemplos, cuándo una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ genera un álgebra de evolución.

# CAPÍTULO 1

# NOCIONES DE PROBABILIDAD

En este primer capítulo presentaremos algunos conceptos básicos de la teoría de la probabilidad, necesarios para la comprensión de los capítulos restantes. Basaremos nuestro estudio en [11, 12] para la parte de probabilidad, además de esto necesitaremos conocimientos básicos de la teoría de conjuntos, que el lector podrá consultar en [13].

## 1.1. Espacio de probabilidad

**Definición 1.1.** *Sea $\Omega$ un conjunto diferente del vacío. Una colección $\mathcal{F}$ de subconjuntos de $\Omega$ es una **$\sigma$-álgebra** sobre $\Omega$, si:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.
2. *Si* $A \in \mathcal{F}$, *entonces* $A^c \in \mathcal{F}$.
3. *Si* $A_i \in \mathcal{F}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$, *entonces* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Notemos que las $\sigma$-álgebras son cerradas respecto a complementos, intersecciones y uniones contables. A los subconjuntos de $\Omega$ que pertenecen a la $\sigma$-álgebra $\mathcal{F}$ los llamaremos **eventos**. La unión de $n$ conjuntos la denotaremos con:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

La intersección de $n$ conjuntos la denotaremos con:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Consideraremos también la unión infinita contable de conjuntos y la intersección infinita contable de conjuntos:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

El conjunto infinito formado por los elementos $A_1, A_2, A_3, \ldots$, lo abreviaremos por $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ y lo llamaremos familia o colección de eventos. Si $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, diremos que $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es un **conjunto exhaustivo**. En caso de que $A_i \cap A_j = \phi$ para todo $i \neq j$, con $i, j = 1, 2, \ldots$, es decir, disjuntos dos a dos, diremos que los elementos del conjunto $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ son **mutuamente excluyentes**. Si el conjunto $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ es exhaustivo y sus elementos son mutuamente excluyentes y cada $A_i \neq \phi$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots\}$, entonces llamaremos a $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ una **partición** de $\Omega$.

Veamos ahora algunos ejemplos de conjuntos que son $\sigma$-álgebras y uno que no lo es.

**Ejemplo 1.1.**

- Para todo conjunto $\Omega \neq \phi$, tenemos la $\sigma$-álgebra trivial $\mathcal{F}_0 = \{\phi, \Omega\}$, que es la $\sigma$-álgebra más pequeña de subconjuntos de $\Omega$.
- Para todo conjunto $\Omega \neq \phi$, tenemos $\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$ que es la $\sigma$-álgebra más grande de subconjuntos de $\Omega$. Esta es también conocida como partes de $\Omega$.
- La menor $\sigma$-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene todos los intervalos de la forma $(-\infty, a]$ con $a \in \mathbb{R}$, se llama $\sigma$-álgebra de Borel y la denotaremos por $\mathbb{B}$.
- Consideremos $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y sea $\mathcal{F}_1 = \{\phi, \Omega, \{1\}, \{1, 2\}\}$. Es claro que este conjunto cumple la propiedad 1 y 3 de $\sigma-$álgebra, sin embargo no cumple con la propiedad 2, ya que, aunque $\{1\} \in \mathcal{F}_1$, no se cumple que $\{1\}^c = \{2, 3\} \in \mathcal{F}_1$. Por tanto $\mathcal{F}_1$ no es una $\sigma$-álgebra.

Una vez definidos los conjuntos que llamamos eventos, definiremos una función que nos permitirá calcular las probabilidades de ocurrencia de dichos eventos, recordando que los eventos representarán posibles resultados de un experimento de interés.

**Definición 1.2.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ donde $\Omega \neq \phi$ y $\mathcal{F}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $\Omega$. Definimos la* ***función de probabilidad*** *$\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ como la función que cumple las siguientes propiedades:*

1. *Para todo evento $A$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$.*
2. *$\mathbb{P}(\Omega) = 1$.*
3. *Si para todo $i \in \mathbb{N}$, los $A_i$ son eventos mutuamente excluyentes, entonces:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Estas tres propiedades son conocidas como los **axiomas de probabilidad**.

Con las definiciones de $\sigma$-álgebra y de función de probabilidad ya podemos definir un espacio de probabilidad, dicho espacio es un modelo matemático que permite describir los resultados de fenómenos o experimentos aleatorios.

**Definición 1.3.** *Un* ***espacio de probabilidad*** *es una terna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donde:*

1. *$\Omega$ es cualquier conjunto distinto de vacío.*
2. *$\mathcal{F}$ es la $\sigma$-álgebra sobre el conjunto $\Omega$.*
3. *$\mathbb{P}$ es la función de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.*

**Ejemplo 1.2.** Consideremos el experimento de lanzar dos dados equilibrados y observar los resultados de cada dado. Para este experimento vamos a trabajar con el conjunto $\Omega = \{(a, b)|a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ y la $\sigma$-álgebra $\mathcal{P}(\Omega)$. Nuestra función de probabilidad será, en este caso, igual a:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Si consideramos el evento A="La suma de los resultados de los dados es igual a 6 o 8 ", entonces:

$$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)\} \in \mathcal{F},$$

por tanto: $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 10/36 = 5/18$.

Cuando tenemos un espacio $\Omega$ con un número finito de elementos y asumimos que los resultados siempre son equiprobables, es decir, todos tienen la misma chance de ocurrir, entonces las probabilidades se calculan como: # casos favorables/# casos totales.

**Teorema 1.1.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Entonces:*

1. $\mathbb{P}(\phi) = 0$.
2. *Para todo evento $A$, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - P(A)$.*
3. *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ y $\mathbb{P}(B\backslash A) := \mathbb{P}(B \cap A^c) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.*
4. *Si $A$ y $B$ son dos eventos cualesquiera, entonces $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.*

**Demostración:** Usando los axiomas de probabilidad y la teoría de conjuntos tenemos que:

1. $\Omega \cap \phi = \phi$ y $\phi \cap \phi = \phi$, por tanto:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \phi \cup \cdots \cup \phi) = \mathbb{P}(\Omega) + n\mathbb{P}(\phi),$$

y ya que, $0 \leq \mathbb{P}(\phi)$ y $n > 0$ concluimos que $\mathbb{P}(\phi) = 0$.

2. Para cualquier evento $A \subseteq \Omega$ tenemos que, $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \phi$, así:

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c),$$

por tanto, $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

3. Como $A \subseteq B$, al evento $B$ lo podemos reescribir como $B = (B \cap A^c) \cup A$ y ya que $B \cap A^c = B\backslash A$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}((B\backslash A) \cup A) \\ &= \mathbb{P}(B\backslash A) + \mathbb{P}(A) \\ &\geq \mathbb{P}(A). \end{aligned}$$

Además, podemos concluir que $\mathbb{P}(B\backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

4. Como el conjunto $A \cup B = A\backslash(A \cap B) \cup B$, $(A \cap B) \subseteq A$ y además los conjuntos $A\backslash(A \cap B)$ y $B$ son disjuntos, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}(A\backslash(A \cap B) \cup B) \\ &= \mathbb{P}(A\backslash(A \cap B)) + \mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) \quad \text{ítem } \mathit{3} \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \end{aligned}$$

□

Una proposición que nos será de utilidad en el capítulo 4 es la siguiente.

**Proposición 1.2.** *Si* $\mathbb{P}(A_i) = 1$ *para cada* $i \in \mathbb{N}$*, entonces* $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1$.

**Demostración:** La función de probabilidad es sub-adictiva, es decir, para cualquier colección de eventos se cumple que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

En particular, si para cada $i \in \mathbb{N}$, se cumple que $\mathbb{P}(A_i^c) = 0$, entonces: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i^c) = 0$. Por tanto, tenemos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) = 1.$$

□

El ítem *4* del Teorema 1.1 lo podemos extender a una unión de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos, esto se puede probar por inducción y se llama la fórmula de inclusión-exclusión dada por:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\ & + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r}) + \ldots \\ & + (-1)^{n+1} \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n),\end{aligned}$$

donde la suma $\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_r})$ se toma sobre todos los posibles subconjuntos de tamaño $r$ del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Notemos que el axioma *3* de los axiomas de probabilidad, vale para un número finito de elementos, este hecho lo usamos en el ítem *2* del teorema anterior, en efecto, tenemos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

considerando $A_n = \phi$, para $i \in \{n+1, n+2, \ldots\}$,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Dados los axiomas de probabilidad sabemos calcular la probabilidad de una unión infinita de eventos disjuntos, donde dicha probabilidad es igual a la suma de sus probabilidades. Por la fórmula de inclusión-exclusión que mencionamos en el ítem *4* del Teorema 1.1 podemos encontrar probabilidades para eventos que no son disjuntos, pero en el caso finito. Ahora bien, ¿podremos calcular probabilidades de uniones o intersecciones en el caso infinito? El siguiente teorema nos dará una fórmula para calcular ciertas probabilidades con algunas condiciones sobre los eventos.

**Teorema 1.3.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y sea* $(A_i)$ *una sucesión de elementos de* $\mathcal{F}$*. Entonces:*

1. *Si* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión tal que* $A_i \subseteq A_{i+1}$ *para* $i = 1, 2, \ldots,$ *entonces:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

2. *Si* $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ *es una sucesión tal que* $A_{i+1} \subseteq A_i$ *para* $i = 1, 2, \ldots,$ *entonces:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

**Demostración:** Tengamos en cuenta que si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A^c \in \mathcal{F}$ y por tanto, $A^c \cup B \in \mathcal{F}$ y $(A^c \cup B)^c = A \cup B^c \in \mathcal{F}$, lo que implica que $(A^c \cup B)^c = A \cap B^c \in \mathcal{F}$. Recordemos que $A \cap B^c = A \backslash B$.

1. Sea $B_1 = A_1$ y $B_n = A_i \backslash A_{i-1}$ para todo $i = 2, 3, \ldots$ Entonces $B_i \in \mathcal{F}$ y además $B_i \cap B_j = \phi$ si $i \neq j$, luego $A_i = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_i = \cup_{n=1}^{i} B_n$. Sea $A = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Entonces:

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{i} B_n\right) = \sum_{n=1}^{i} \mathbb{P}(B_n) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n),$$

ya que $\lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) = \lim_{i\to\infty} \sum_{n=1}^{i} \mathbb{P}(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A)$.

2. Como $A_i$ es una sucesión tal que $A_i \supseteq A_{i+1}$ para todo $i \geq 1$, la sucesión de complementos es tal que $A_i^c \subseteq A_{i+1}^c$ para todo $i \geq 1$, luego aplicando el ítem anterior tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\right) &= \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i^c),\\
1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \lim_{i\to\infty} (1 - \mathbb{P}(A_i)),\\
\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i).
\end{aligned}$$

□

El teorema anterior se refiere a sucesiones monótonas de conjuntos, en particular, una sucesión de conjuntos que satisface el ítem *1* se conoce como sucesión creciente de eventos, mientras una que satisface el ítem *2* se conoce como sucesión decreciente de eventos.

## 1.2. Probabilidad condicional e independencia

Retomemos el Ejemplo 1.2 para dar una introducción a la probabilidad condicional y definamos el siguiente evento B:= "el resultado del segundo dado es 5". Supongamos además que el evento B ocurrió, ¿qué podemos decir de la ocurrencia del evento A?, es decir, ¿cuáles son los casos donde la suma de los resultados es 6 o 8, dado que el resultado del segundo lanzamiento es 5? Podriamos pensar por un momento, que la probabilidad pedida es 2/36=1/18, ya que solo tenemos dos posibles casos que cumplen esto, el (1,5) y (3,5). Esto es un resultado erróneo ya que, aunque solo hay dos casos posibles que cumplen las condiciones pedidas, estamos dividiendo sobre el total de casos posibles. Ahora bien, como estamos en la suposición de que el evento B ocurrió, nuestro espacio muestral cambió, ya solo nos limitamos al evento donde el resultado del segundo dado es igual a 5, es decir, $B = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5), (6,5)\}$ y de allí extraemos cuales son los casos donde la suma de sus resultados sea igual a 6 o 8, que efectivamente son los casos (1,5) y (3,5), por lo cual la probabilidad pedida es igual a 2/6=1/3. Notemos 2 cosas:

1. El primer razonamiento puede ser visto como la probabilidad de la intersección de los eventos A y B, es decir, $A \cap B$="la suma del resultado de los dados es 6 o 8 y el resultado del segundo dado es 5", por tanto $\mathbb{P}(A \cap B) = |A \cap B|/|\Omega| = 2/36 = 1/18$.

2. La probabilidad pedida afectó la probabilidad del evento $A$, es decir, la probabilidad pedida es distinta a la probabilidad de $A$ y la podemos calcular como $\mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

**Definición 1.4.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Si $A, B \in \mathcal{F}$ y $\mathbb{P}(B) > 0$, entonces la* ***probabilidad condicional*** *de un evento $A$, conociendo que el evento $B$ ocurrió, la denotaremos por $\mathbb{P}(A|B)$ y la leeremos "probabilidad de $A$ dado que $B$ ocurrió" o, simplemente, "probabilidad de $A$ dado $B$" y la definimos como:*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

El siguiente resultado nos muestra que la probabilidad condicional cumple las mismas propiedades de las funciones de probabilidad, donde el espacio muestral queda restringido al evento B.

**Proposición 1.4** (Medida de probabilidad condicional)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y sea $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mathbb{P}(B) > 0$. Si la aplicación $\mathbb{P}_B : \mathcal{F} \to [0, 1]$ está definida por $\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A|B)$, para todo $A \in \mathcal{F}$, entonces $\mathbb{P}_B$ es una función de probabilidad en $\mathcal{F}$.*

**Demostración:** Verifiquemos los axiomas de probabilidad:

1. Sabemos que para todo evento $C \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(C) \geq 0$, en particular $\mathbb{P}(A \cap B) \geq 0$, por tanto, $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) \geq 0$.

2. Notemos que $\mathbb{P}_B(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega|B) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$. Análogamente, $\mathbb{P}_B(B) = \mathbb{P}(B|B) = \mathbb{P}(B \cap B)/\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)/\mathbb{P}(B) = 1$.

3. Sean $A_1, A_2, \ldots$ elementos de $\mathcal{F}$ mutuamente excluyentes. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_B\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} && \text{axioma } \mathit{3}\text{, Definición 1,2} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B) && \text{probabilidad condicional} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_B(A_i).
\end{aligned}$$

□

**Definición 1.5.** *Diremos que dos eventos $A$ y $B$ son **independientes** si, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, en caso contrario diremos que los eventos son **dependientes**.*

**Ejemplo 1.3.** Retomemos el Ejemplo 1.2 y consideremos los siguientes eventos:

$A =$ "La suma de los resultados de los dados es igual a 6 o 8".
$D =$ "La suma de los resultados de los dados es par".
$E =$ "El resultado del primer dado es impar".
$F =$ "El resultado del primer dado es 3 o 4 y el resultado del segundo dado es diferente de 6 ".

Las probabilidades de dichos eventos se calculan como hicimos en el Ejemplo 1.2. En primer lugar tenemos que: $\mathbb{P}(D) = 1/2, \mathbb{P}(E) = 1/2$ y $\mathbb{P}(D \cap E) = 1/4$. Por tanto estos eventos son independientes.

En segundo lugar tenemos que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(F) = 5/18$ y además:

$$P(A)P(F) = \left(\frac{5}{18}\right)^2 \neq \frac{1}{9} = \mathbb{P}(A \cap F),$$

por tanto los eventos son dependientes.

**Definición 1.6.** *Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de eventos.*

1. *Diremos que $\{A_i : i \in I\}$ es **independiente** si:*

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i),$$

*para todo subconjunto finito $J \subseteq I$.*

2. *Diremos que $\{A_i : i \in I\}$ es **independiente dos a dos** si:*

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j); \quad \textit{para todo} \quad i \neq j.$$

**Ejemplo 1.4.** Continuando con el Ejemplo 1.2, consideremos los eventos:

$$G := \text{“El resultado del primer lanzamiento es 3”.}$$
$$H := \text{“El resultado del segundo lanzamiento es 4”.}$$
$$I := \text{“La suma de los resultados de los dados es 7”.}$$

Tenemos que:

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(I) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$
$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(H \cap I) = \mathbb{P}(I \cap G) = \frac{1}{36},$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36}.$$

Por tanto:

$$\mathbb{P}(G \cap H) = \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(H), \quad \mathbb{P}(H \cap I) = \mathbb{P}(H)\mathbb{P}(I) \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(I \cap G) = \mathbb{P}(I)\mathbb{P}(G),$$

es decir, estos eventos son independientes dos a dos, sin embargo tenemos que:

$$\frac{1}{6^2} = \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{6^3},$$

lo que muestra que estos eventos no son independientes.

**Teorema 1.5** (Teorema de probabilidad total)**.** *Sea* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una partición de* $\Omega$ *tal que* $\mathbb{P}(B_i) > 0$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots$ *Entonces para todo evento D, tenemos la siguiente ecuación, conocida como* ***ley de la probabilidad total****:*

$$\mathbb{P}(D) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D|B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

**Demostración:** Para todo evento $D$ tenemos que $D = D \cap \Omega$, de lo cual se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D \cap \Omega) \\
&= \mathbb{P}\left(D \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)\right) && \{B_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ partición de } \Omega \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (D \cap B_i)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D \cap B_i) && \text{eventos mutuamente excluyentes} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D|B_i)\mathbb{P}(B_i) && \text{probabilidad condicional.}
\end{aligned}$$
□

Aunque la prueba se hizo para un número infinitos eventos, la misma vale para un número finito de eventos.

**Teorema 1.6** (Teorema de Bayes)**.** *Sea D un evento y* $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ *una partición tal que* $\mathbb{P}(B_i) > 0$, *para cada* $i = 1, 2, \ldots$. *Entonces la probabilidad* $\mathbb{P}(B_j|D)$ *se obtiene mediante la siguiente ecuación que llamaremos* ***fórmula de Bayes****:*

$$\mathbb{P}(B_j|D) = \frac{\mathbb{P}(D|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D|B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

**Demostración:** De la definición de probabilidad condicional tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_j|D) &= \frac{\mathbb{P}(B_j \cap D)}{\mathbb{P}(D)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(D|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\mathbb{P}(D)} && \text{probabilidad condicional} \\
&= \frac{\mathbb{P}(D|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(D|B_i)\mathbb{P}(B_i)} && \text{ley de la probabilidad total.}
\end{aligned}$$
□

**Ejemplo 1.5.** El Sr. Potter sabe que hay un 0,5 de probabilidad que el Ministerio, en el cual trabaja, abra una sede en Rumania. Si lo hacen la probabilidad de que él sea nombrado Jefe de Aurores de dicha sede es de 0,9. Si no lo hacen, la probabilidad de que el Sr. Potter sea nombrado Jefe de Aurores en otra sede es de tan sólo 0,15. ¿Cuál es la probabilidad de que el Sr. Potter sea nombrado Jefe de Aurores del ministerio? Para calcular dicha probabilidad definimos los siguientes dos eventos:

$$H := \text{“El Sr. Potter es nombrado Jefe de Aurores”}.$$

$$M := \text{“El Ministerio abre una sucursal en Rumania”}.$$

Entonces, usando la ley de probabilidad total, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(H|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(H|M^c)\mathbb{P}(M^c)\\ &= 0{,}9 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}5\\ &= 0{,}525,\end{aligned}$$

es decir, la probabilidad de que el Sr. Potter sea nombrado Jefe de Aurores de cualquier sede del Ministerio es de 0,525. Si se sabe que el Sr. Potter fue nombrado Jefe de Aurores de una sede del Ministerio ¿cuál es la probabilidad de que el Ministerio haya abierto la sede en Rumania? De la regla de Bayes tenemos que:

$$\mathbb{P}(M|H) = \frac{\mathbb{P}(H|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(H)} = \frac{0{,}9 \times 0{,}5}{0{,}525} = 0{,}8571,$$

es decir, la probabilidad que hayan abierto la sede en Rumania, dado que el Sr. Potter fue nombrado Jefe de Aurores, es de 0,8571.

## 1.3. Variables aleatorias

**Definición 1.7** (Variable Aleatoria)**.** *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *un espacio de probabilidad y* $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ *la* $\sigma$*-álgebra de Borel de* $\mathbb{R}$*. Una* ***variable aleatoria real (v.a.)*** *es una aplicación* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $A \in \mathbb{B}$ *se tiene que* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$*.*

En este trabajo nos concetraremos en las variables aleatorias reales **discretas**, esto ocurre en el caso que $X(\Omega)$ es un conjunto finito o infinito numerable.

**Ejemplo 1.6.** Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $A \in \mathcal{F}$ fijo. La aplicación $\mathcal{X}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ dada por:

$$\mathcal{X}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad \omega \in A \\ \\ 0, & \text{si} \quad \omega \notin A, \end{cases}$$

es una variable aleatoria y se llama **variable indicadora del evento A**, algunos autores también la llaman función característica.

**Definición 1.8.** *Sea* $X$ *una variable aleatoria discreta con valores* $x_1, x_2, \ldots,$ *(todos diferentes). La función* $p_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definida por:*

$$p_X(x) = \begin{cases} \mathbb{P}(X = x_i), & \textit{si} \qquad x = x_1, x_2, \ldots \\ \\ 0, & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

*la llamaremos* ***función o distribución de probabilidad*** *de la variable* $X$*.*

Recordemos tres variables aleatorias discretas conocidas:

1. **Distribución de Bernoulli:** Una v.a. $X$ se llama de **Bernoulli** de parámetro $p$, con $p \in [0, 1]$, si solo toma dos valores 1 o 0 asociados al éxito o fracaso respectivamente, con probabilidades $p$ y $1-p$, es decir:

   $$p_X(0) = 1 - p, \quad p_X(1) = p.$$

   Esta distribución la denotaremos por $X \sim Bern(p)$.

2. **Distribución binomial:** Si $X$ es una v.a. que representa el número de éxitos en $n$ repeticiones independientes de pruebas Bernoulli, con probabilidad de éxito fija $p$, entonces $X$ es llamada v.a. **binomial** con parámetros $n$ y $p$, y su ditribución de probabilidad está dada por :

$$p_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para} \quad x = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Esta distribución la denotaremos por $X \sim Bin(n, p)$.

3. **Distribución geométrica:** Si $X$ es una v.a. que representa el número de ensayos sucesivos independientes de una v.a. de $Bern(p)$, hasta que ocurre el primer éxito, decimos que $X$ es una v.a. **geométrica** de parámetro $p$, y su ditribución de probabilidad está dada por:

$$p_X(x) = (1-p)^{x-1} p, \quad \text{para} \quad x = 0, 1, \ldots$$

Esta distribución la denotaremos por $X \sim Geom(p)$.

**Definición 1.9** (Valor esperado)**.** *Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad y $X$ una variable aleatoria discreta definida sobre el espacio de probabilidad con valores $x_1, x_2, \ldots$ Diremos que $X$ posee un **valor esperado** si:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| P(X = x_k) < \infty.$$

*En tal caso, definimos el **valor esperado** $\mathbb{E}(X)$, también llamado **esperanza matemática o media** de $X$, como:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

**Teorema 1.7.** *Sea $X$ una v.a. discreta y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $Y = g(X)$ es una v.a. Entonces:*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

La demostración de este teorema puede ser vista en [11, a Lema 2.52], o en [12, Proposición 4.1].

**Ejemplo 1.7.** Retomemos el Ejemplo 1.2 y el evento $D :=$ "la suma de los resultados de los dados es par" del Ejemplo 1.3. La función indicadora sobre el evento D solo toma dos valores $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, además $\mathbb{P}(\mathcal{X}_D = x_1) = \mathbb{P}(D)$ y $\mathbb{P}(\mathcal{X}_D = x_2) = \mathbb{P}(D^c)$. Por tanto el valor esperado de la función indicadora sobre el evento D es:

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_D) = \sum_{k=1}^{2} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = 1 \times \mathbb{P}(\mathcal{X}_D = 1) + 0 \times \mathbb{P}(\mathcal{X}_D = 0) = P(D) = \frac{1}{2}.$$

Notemos que la esperanza de una función característica sobre un evento, es igual a la probabilidad de dicho evento.

**Definición 1.10.** *Sean $X$ y $Y$ v.a. discretas. Definimos a función de **distribución condicional**:*

$$p_{X|Y}(x|y) = \mathbb{P}(X = x | Y = y),$$

*para todos los $y$ para los cuales $\mathbb{P}(Y = y) > 0$. En particular, el **valor esperado condicional** está dado por:*

$$\mathbb{E}(X | Y = y) = \sum_{x} x \mathbb{P}(X = x | Y = y),$$

*para todo $x$ y para todo $y$ para los cuales $\mathbb{P}(Y = y) > 0$.*

**Ejemplo 1.8.** Una bolsa contiene 3 bolas amarillas y 2 negras. Se extraen dos bolas, una tras otra sin reposición. Sean:

$$X := \begin{cases} 1, & \text{si la primera bola extraida es amarilla.} \\ 0, & \text{si la primera bola extraida es negra.} \end{cases}$$

$$Y := \begin{cases} 1, & \text{si la segunda bola extraida es amarilla.} \\ 0, & \text{si la segunda bola extraida es negra.} \end{cases}$$

Entonces:

$$p_{Y|X}(y|0) := \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si} \quad y = 0 \\ \frac{3}{4}, & \text{si} \quad y = 1 \end{cases} , \qquad p_{Y|X}(y|1) := \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si} \quad y = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad y = 1 \end{cases}$$

y

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \begin{cases} \frac{3}{4}, & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

**Teorema 1.8.** *Sean $X$ y $Y$ variables aleatorias discretas definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Si $\mathbb{E}(X)$ existe, entonces:*

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X).$$

**Demostración:** Del Teorema 1.7 tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) &= \sum_y \mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) \\ &= \sum_y \left( \sum_x x\mathbb{P}(X = x|Y = y) \right) \mathbb{P}(Y = y) && \text{valor esperado condicional} \\ &= \sum_y \sum_x x\mathbb{P}(X = x, Y = y) && \text{distribución condicional} \\ &= \sum_x x \sum_y \mathbb{P}(X = x, Y = y) && \text{por } \mathbb{E}(X) \text{ existir} \\ &= \sum_x xP(X = x) \\ &= \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

□

En particular, si $h$ es una función tal que $h(X) = Z$ es una variable aleatoria, tenemos que $\mathbb{E}(\mathbb{E}(h(X)|Y)) = \mathbb{E}(h(X))$.

**Corolario 1.9.** *Sean $X$ y $Y$ variables aleatorias discretas, definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Entonces:*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_y \mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y).$$

La demostración de este corolario puede ser vista en [12, Proposición 5.1]. El siguiente ejemplo ilustrará el corolario, mostrando como obtener el valor esperado de una variable geométrica.

**Ejemplo 1.9.** Consideremos el evento de lanzar una moneda y observar su resultado, donde $\Omega = \{c, s\}$, $\mathcal{F} = \{\phi, \{c\}, \{s\}, \Omega\}$ y además la probabilidad de obtener cara o sello es $\mathbb{P}(\{c\}) = 1 - p$ y $\mathbb{P}(\{s\}) = p$, respectivamente. Consideremos las siguientes variables aleatorias: $X =$"el número de fracasos (caras) antes de obtener el primer éxito (sello)" y $Y=$ "el resultado del primer lanzamiento". Con estas variables queremos encontrar el valor esperado de fracasos, condicionándolo al resultado del primer lanzamiento. Observemos que la v.a. $X$ puede tomar los valores $x = 0, 1, 2, \dots$ y que la v.a. $Y$ puede tomar los valores $y = 0, 1$, donde $Y = 0$, si el primer lanzamiento es un fracaso y $Y = 1$, si el primer lanzamiento es un éxito. Entonces el valor esperado de X condicionado a la variable $Y$, por el Corolario 1.9, es igual a:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{y=0}^{1} \mathbb{E}(X|Y = y)\mathbb{P}(Y = y) \\ &= (1 - p)\mathbb{E}(X|Y = 0) + p\mathbb{E}(X|Y = 1).\end{aligned}$$

Notemos que el número de fracasos dado que el primer lanzamiento fue un éxito, es cero, es decir, no obtuvimos fracasos y por ello tenemos que: $\mathbb{E}(X|Y = 1) = 0$. De forma análoga, esperar el número de fracasos dado que el primer lanzamiento fue un fracaso, es repetir el proceso pero ya contando un tiempo, es decir, $\mathbb{E}(X|Y = 0) = \mathbb{E}(X) + 1$. De donde concluimos que:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1 - p}{p}.$$

# CAPÍTULO 2

# PROCESOS ESTOCÁSTICOS

En este segundo capítulo estudiaremos las cadenas de Markov y los conceptos básicos que las rodean, como son las probabilidades de transición, las matrices de transición y las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov. Estudiaremos dos conceptos importantes en las cadenas de Markov los cuales son los estados de recurrencia y transitoriedad, y finalizaremos el capítulo demostrando la recurrencia en el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$, tema central de este texto. Basaremos nuestro estudio en [1, 2, 3, 7].

## 2.1. Cadenas de Markov

**Definición 2.1.** *Un* ***proceso estocástico*** *es una colección de variables aleatorias* $\{X_t : t \in T\}$*, definidas en un mismo espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$T$ es llamado conjunto de índices (o tiempo), este conjunto $T$ puede ser finito, contable o no contable. En el caso en el que $T$ es finito o contable se dice que el proceso es de **tiempo discreto**. El conjunto de valores que asumen las v.a. $X_t$ es llamado **espacio de estados** denotado por $S$. El espacio de estados $S$ se clasifica como continuo si es no enumerable, o discreto si el espacio de estados es finito o numerable.

**Definición 2.2.** *Un proceso estocástico* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$*, con espacio de estados* $S$ *finito o numerable, es una* ***cadena de Markov de tiempo discreto*** *o simplemente* ***cadena de Markov discreta****, si para todo* $n \geq 0$ *y cualquier subconjunto finito* $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ *de posibles estados de* $S$*, cumple que:*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n).$$

La ecuación anterior se conoce como **propiedad markoviana**. Informalmente hablando, lo que representa la ecuación anterior es que: si conocemos el presente y el pasado de un proceso, el futuro solo depende del presente, o de igual forma, es independiente del pasado del proceso.
Las cadenas de Markov las podemos representar mediante un dígrafo ponderado, donde los vértices representan estados de la cadena y las aristas posibles transiciones, además, el peso de cada arista es la respectiva probabilidad de transición, el lector podrá encontrar más información sobre grafos en [14]. De aquí en adelante será natural mostrar (cuando sea necesario) el grafo asociado. Una cadena de Markov cumple la siguiente propiedad:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1|X_0 = x_0)\cdots\mathbb{P}(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}). \quad (2.1)$$

Dicha propiedad la podemos probar por inducción sobre $n$: en efecto, el paso base $n = 1$ lo obtenemos de inmediato por probabilidad condicional:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_1 = x_1|X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_0 = x_0).$$

Para el paso inductivo, supongamos que la igualdad es válida para $n-1$:

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1|X_0 = x_0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}|X_{n-2} = x_{n-2}),$$

y veamos que se cumple para $n$: en efecto, utilizando probabilidad condicional y por la propiedad Markoviana obtenemos lo querido, así:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = x_n)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})\mathbb{P}(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0)\\
&= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1|X_0 = x_0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1} = x_{n-1}|X_{n-2} = x_{n-2})\mathbb{P}(X_n = x_n|X_{n-1} = x_{n-1}).
\end{aligned}$$

Para tener todos los datos en la ecuación (2.1) y encontrar dicha probabilidad falta definir el concepto de distribución inicial, es decir, la probabilidad de $\mathbb{P}(X_0 = i)$, donde $i$ es cualquier posible estado de la cadena.

**Definición 2.3.** *La función $\pi_0(i) := \mathbb{P}(X_0 = i)$ definida para todo $i \in S$, es la* ***distribución inicial*** *de la cadena y dicha función cumple las siguientes propiedades:*

1. $0 \leq \pi_0(i) \leq 1$.

2. $\sum_{i\in S} \pi_0(i) = 1$.

Las probabilidades condicionales en la Definición 2.2 son de vital importancia, ya que son las probabilidades de ir del estado $j$ al estado $i$ en un solo paso. A estas probabilidades las llamaremos **probabilidades de transición** y las denotaremos por:

$$p_{ij}(n, n+1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i).$$

Si $p_{ij}(n, n+1)$ no depende de $n$, decimos que la cadena de Markov es **homogénea ó estacionaria** en el tiempo. En lo que resta de este texto trabajaremos cadenas de Markov homogéneas y por simplicidad denotaremos:

$$p_{ij} := p_{ij}(n, n+1).$$

**Ejemplo 2.1.** Sean $X_1, X_2, \dots$ v.a. independientes idénticamente distribuidas (i.i.d) con distribución $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$ y $\mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$, $S_0 = 0$ y $S_n = S_{n-1} + X_n$ para $n \geq 1$. Entonces $\{S_n\}_{n\in N_0}$ es una cadena de Markov, con espacio de estados $S = \mathbb{Z}$ y probabilidades de transición dadas por:

$$p_{ij} := \begin{cases} p, & \text{si } j = i+1\\ 1-p, & \text{si } j = i-1\\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}$$

para todo $i, j \in S$. Este proceso se conoce como paseo aleatorio pues lo podemos observar como una partícula que se mueve en los enteros vistos como un grafo, donde los vértices son los números y las aristas estarán determinadas por las probabilidades de moverse a derecha con probabilidad $p$ o moverse a izquierda con probabilidad $1-p$, este proceso está ilustrado en la siguiente figura:

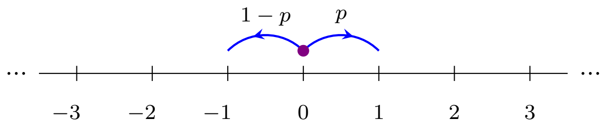



Figura 2.1: Grafo del paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$.

Note que $S_n$ representa la posición de la partícula en el tiempo $n$, este proceso $\{S_n\}_{n\in N_0}$ satisface la propiedad markoviana:

$$\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) = \mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}|S_n = s_n). \tag{2.2}$$

Recordemos que las variables que son independientes son las $X_n$ y además $S_n = S_{n-1} + X_n$ para $n \geq 1$. Por tanto, en el lado izquierdo de la igualdad tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}|S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n) &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}, S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n)}{\mathbb{P}(S_1 = s_1, \dots, S_n = s_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(s_n + X_{n+1} = s_{n+1}, X_1 = s_1, \dots, s_{n-1} + X_n = s_n)}{\mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, s_{n-1} + X_n = s_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n, X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n - s_{n-1})}{\mathbb{P}(X_1 = s_1, \dots, X_n = s_n - s_{n-1})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n)\mathbb{P}(X_1 = s_1) \dots \mathbb{P}(X_n = s_n - s_{n-1})}{\mathbb{P}(X_1 = s_1) \dots \mathbb{P}(X_n = s_n - s_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n),
\end{aligned}$$

donde la cuarta igualdad es por la independencia de las v.a. $X_i$. Del lado derecho de la igualdad, en la ecuación (2.2), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}|S_n = s_n) &= \frac{\mathbb{P}(S_{n+1} = s_{n+1}, S_n = s_n)}{\mathbb{P}(S_n = s_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(s_n + X_{n+1} = s_{n+1}, s_{n-1} + X_n = s_n)}{\mathbb{P}(s_{n-1} + X_n = s_n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n, X_n = s_n - s_{n-1})}{\mathbb{P}(X_n = s_n - s_{n-1})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n)\mathbb{P}(X_n = s_n - s_{n-1})}{P(X_n = s_n - s_{n-1})} \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = s_{n+1} - s_n),
\end{aligned}$$

siendo la cuarta igualdad válida por la independencia de las v.a. $X_i$. La información de las probabilidades de transición será almacenada en la matriz $P$, que llamaremos **matriz de transición** de la cadena de Markov $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$:

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Los elementos de la matriz de transición cumplen las siguientes dos propiedades:

- Todas las entradas de la matriz de transición son no negativas, es decir $p_{ij} \geq 0$, para todo $i, j \in S$.
- La suma de los elementos de cada fila es 1, es decir, para cualquier $i$:

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1.$$

**Ejemplo 2.2.** Consideremos el fenómeno de lanzar un dado equilibrado sucesivamente y para todo $n \geq 1$, sea $X_n$:="el número de caras con resultado 5 obtenidos hasta el lanzamiento $n$". Notemos que la sucesión $\{X_n\}_{n \in N_0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \mathbb{N}_0$ y con probabilidades de transición dadas por:

$$p_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } j = i+1 \\ \frac{5}{6}, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para todo $i, j \in S$. La matriz de transición de esta cadena de Markov está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \cdots & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

El grafo asociado a esta cadena de Markov es el siguiente:

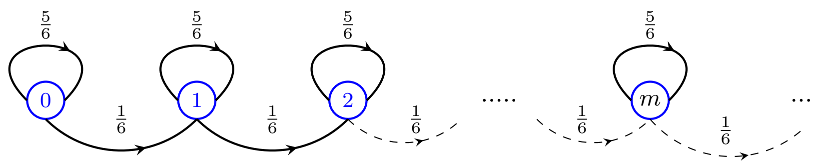



Figura 2.2: Grafo Ejemplo 2.2.

La probabilidad de ir del estado $i$ al estado $j$ en $n$ pasos la denotaremos por $p_{ij}^n$, donde:

$$p_{ij}^n := \mathbb{P}(X_{m+n} = j | X_m = i), \quad m, n \geq 0.$$

Las probabilidades de transición en $n$ pasos se almacenan en la **matriz de transición en $n$ pasos**, denotada por $P^{(n)}$ :

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^n & p_{01}^n & p_{02}^n & \cdots \\ p_{10}^n & p_{11}^n & p_{12}^n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Notemos que $p_{ij}^1 = p_{ij}$ y que además:

$$p_{ij}^0 = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{si } j = i \\ 0, & \text{si } j \neq i, \end{cases}$$

ya que $\mathbb{P}(X_n = j | X_n = i) = 0$ si $i \neq j$ En otras palabras $P^{(1)} = P$ y $P^{(0)}$ coincide con la matriz identidad. En el Corolario 2.3 veremos que $P^{(n)} = P^n$, donde $P^n$ es la $n$-ésima potencia de la matriz de transición.

**Proposición 2.1** (Ecuaciones de Chapman-Kolmogorov)**.** *Para* $0 \leq r \leq n$ *se cumple que:*

$$p_{ij}^n = \sum_k p_{ik}^r p_{kj}^{n-r}.$$

**Demostración:** Note que $\{X_r = k\}$ con $k \in S$, es una partición de $\Omega$, porque en el instante $r$ solo puede estar en un solo estado, además la unión es $\Omega$ porque en el instante $r$ tiene que estar en al menos un estado, por tanto:

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(X_n = j, \cup_{k \in S}\{X_r = k\} | X_0 = i) \\ &= \mathbb{P}(\cup_{k \in S}\{X_n = j, X_r = k\} | X_0 = i) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_n = j, X_r = k | X_0 = i). \end{aligned}$$

Donde la segunda igualdad está dada porque $\{X_n = j\} \subseteq \cup_{k \in S}\{X_r = k\}$ y por tanto $\{X_n = j\} \cap \cup_{k \in S}\{X_r = k\} = \{X_n = j\}$. La cuarta línea se da gracias a que $\cup_{k \in \mathbb{S}}\{X_n = j, X_r = k\}$ es una unión de eventos disjuntos y aplicamos el axioma *3* de los axiomas de probabilidad. Finalizando tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{ij}^n &= \sum_k \frac{\mathbb{P}(X_n = j, X_r = k, X_0 = i)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \frac{\mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j | X_r = k)}{\mathbb{P}(X_0 = i)} \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i)\mathbb{P}(X_n = j | X_r = k) \\ &= \sum_k \mathbb{P}(X_r = k | X_0 = i)\mathbb{P}(X_{n-r} = j | X_0 = k) \\ &= \sum_k p_{ik}^r p_{kj}^{n-r}. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad aplicamos la ecuación (2.2) y en la cuarta aplicamos el supuesto de homogeniedad, obteniendo así lo querido. $\square$

Notemos que los casos en que $r = 0$ o $r = n$ no son tan interesantes ya que $p^0_{ij} = \delta_{ij}$.

**Corolario 2.2.** *Para cualquier estado $k$, con $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq r \leq n$:*

$$p^n_{ij} \geq p^r_{ik} p^{n-r}_{kj}.$$

**Demostración:** En la siguiente expresión, la igualdad se obtiene por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, y la desigualdad del hecho de que la sumatoria sea mayor o igual que cualquier término en ella, así:

$$p^n_{ij} = \sum_k p^r_{ik} p^{n-r}_{kj} \geq p^r_{ik} p^{n-r}_{kj}.$$ $\square$

**Corolario 2.3.** *La matriz de transición en $n$ pasos coincide con la $n$-ésima potencia de la matriz de probabilidad en $n$ pasos. Dicho de otra forma $P^{(n)} = P^n$ para $n \geq 1$.*

**Demostración:** Haremos la demostración por inducción sobre $n$ y para esto definiremos $b^{(n)}_{ij}$ como la $ij$-ésima entrada de la $n$-ésima potencia de la matriz $P$. Para $n = 1$ observemos que $b^{(1)}_{ij} = p_{ij}$ para todo $i, j$, por tanto las entradas de las matrices son iguales una a una, es decir, $P^{(1)} = P$. Supongamos ahora que la igualdad se cumple para $n$, es decir, $P^{(n)} = P^n$, así para toda entrada $ij$ se cumple que $p^n_{ij} = b^{(n)}_{ij}$. Veamos que la igualdad se cumple para $n + 1$. Por el producto de matrices, cada entrada $ij$-ésima de la matriz $P^n$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$b^{(n+1)}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b^{(n)}_{ik} b^{(1)}_{kj}.$$

Por las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov y por la hipótesis de inducción, tenemos que:

$$p^{n+1}_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p^n_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b^{(n)}_{ik} b^{(1)}_{kj} = b^{(n+1)}_{ij},$$

donde cada $p^n_{ik}$ es entrada de la matriz $P^{(n)}$ y cada $p_{kj}$ es entrada de la matriz $P^{(1)}$, así por el supuesto tenemos que $p^n_{ik} = b^{(n)}_{ik}$ y $p_{kj} = b^{(1)}_{kj}$, es decir, las entradas de la matriz $P^{(n+1)}$ coincide con las entradas de la $n + 1$-ésima potencia de $P$, por tanto $P^{(n+1)} = P^{n+1}$. $\square$

**Ejemplo 2.3.** Consideremos el fenómeno de observar el funcionamiento de una máquina que cada día está en uno de los dos estados siguientes: "encendida (1)", "apagada (0) ", y consideremos $\forall n \geq 1$ la v.a $X_n :=$ el estado de la maquina el $n$-ésimo día. Asumamos que esta sucesión $\{X_n\}_{n \in N_0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1\}$ y que su matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{bmatrix}.$$

Antes de analizar la información que nos da la matriz de transición, el grafo asociado a esta cadena de Markov es:

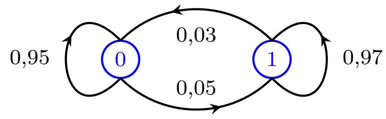



Figura 2.3: Grafo Ejemplo 2.3.

Ahora analicemos la información que nos da la matriz de transición:

- $p_{00}$:= La probabilidad de que, la máquina estando apagada, al día siguiente siga apagada.
- $p_{01}$:= La probabilidad de que, la máquina estando apagada, al día siguiente esté encendida.
- $p_{10}$:= La probabilidad de que, la máquina estando encendida, al día siguiente se apague.
- $p_{11}$:= La probabilidad de que, la máquina estando encendida, al día siguiente siga encendida.

Podemos dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuál es el valor de $\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1)$?, es decir, ¿cuál es la probabilidad de ir al segundo día y que la máquina esté encendida, dado que inicialmente la máquina estaba encendida? Podemos responder esta pregunta mediante dos caminos, el primer camino es directamente de las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = 1|X_0 = 1) = p_{11}^2 &= p_{10}p_{01} + p_{11}^2\\ &= 0{,}03 \times 0{,}05 + 0{,}97\\ &= 0{,}9424,\end{aligned}$$

el segundo camino es observar la entrada $1, 1$ de la matriz $P^2$, que gracias al Corolario 2.3 sabemos que es una consecuencia inmediata de dichas ecuaciones:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}904 & 0{,}096 \\ 0{,}0576 & 0{,}9424 \end{bmatrix}.$$

## 2.2. Clasificación de los estados de una cadena de Markov

**Definición 2.4.**

1. *Decimos que un estado $j$ es* ***accesible*** *desde $i$, si existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^n > 0$. Si $j$ es accesible desde $i$, escribimos $i \to j$.*
2. *Si los estados $i$ y $j$ son accesibles cada uno desde el otro, es decir, $i \to j$ y $j \to i$, entonces decimos que $i$ y $j$* ***se comunican*** *y escribimos $i \leftrightarrow j$.*

La relación de comunicación es una relación de equivalencia, dado que es:

- Reflexiva: Un estado $j$ se comunica con $j$, ya que $p_{jj}^0 = 1 > 0$.
- Simétrica: De la definición.
- Transitiva: Sean $i, j, k$ estados. Supongamos que $i$ y $j$ se comunican, y que $j$ y $k$ se comunican. Veamos que $i$ y $k$ se comunican. Como $i$ y $j$ se comunican, existe $n \geq 0$ tal que $p_{ij}^n > 0$ y como $j$ y $k$ se comunican, existe $m \geq 0$ tal que $p_{jk}^m > 0$. Por tanto, por el Corolario 2.2 tenemos que $p_{ik}^{n+m} \geq p_{ij}^n p_{jk}^m > 0$.

Las relaciones de equivalencia permiten particionar el conjunto en subconjuntos disjuntos llamados clases. En una cadena de Markov, la relación de equivalencia de comunicación divide el espacio de estados en clases, las cuales contienen los estados que se comunican entre sí. Esta definición nos permitirá hablar de dos conceptos en las cadenas de Markov, los cuales son los estados de recurrencia y de transitoriedad.

**Definición 2.5.** *Decimos que una cadena de Markov es* ***irreducible****, si existe una única clase, es decir, todos los estados se comunican entre sí.*

En el Teorema 2.4, estudiaremos los estados de recurrencia y transitoriedad. Para ello consideramos la siguiente variable aleatoria, que nos ayudará a hablar de estos dos conceptos:

$$\tau_i := inf\{n \geq 1 : X_n = i\},$$

la cual representa el primer instante en el que la partícula retorna al estado $i$, y donde tendremos como convención que $\tau_i = \infty$ en caso de que la partícula nunca retorne al estado $i$.

**Definición 2.6.**

1. *Decimos que el estado $i$ es recurrente, si $\mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i) = 1$, es decir, $i$ es recurrente, si la partícula saliendo del estado $i$ vuelve al estado $i$ con probabilidad 1.*

2. *Decimos que el estado $i$ es transitorio, si $\mathbb{P}(\tau_i = \infty | X_0 = i) > 0$, es decir, $i$ es transitorio, si la partícula saliendo del estado $i$ tiene una probabilidad positiva de no volver al estado $i$.*

Ahora denotemos:

$$f_{ii}^n := \mathbb{P}(X_n = i, X_{n-1} \neq i, X_{n-2} \neq i, \ldots, X_1 \neq i | X_0 = i) \quad \text{y} \quad f_i := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n,$$

y notemos que: $f_i = \mathbb{P}(\tau_i < \infty | X_0 = i)$.

**Ejemplo 2.4** (Ruina del jugador)**.** Considere un jugador que gana 10 mil pesos colombianos con probabilidad 0,4 y pierde 10 mil pesos colombianos con probabilidad 0,6. Suponga que el jugador juega hasta que su fortuna es de 40 mil pesos o 0 pesos. Sea $X_n :=$ “el dinero del jugador en la $n$-ésima jugada”. Notemos que la sucesión $X_n$ es una cadena de Markov con espacio de estados dado por $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, donde 0 es tener 0 pesos, 1 es tener 10 mil pesos, 2 es tener 20 mil pesos, 3 es tener 30 mil pesos y 4 es tener 40 mil pesos. Así nuestras probabilidades de transición están dadas por:

$$p_{ij} := \begin{cases} 0{,}4 & \text{si } j = i + 1, \quad \text{para } i \neq 0 \text{ o } i \neq 4 \\ 0{,}6 & \text{si } j = i - 1, \quad \text{para } i \neq 0 \text{ o } i \neq 4 \\ 1 & \text{si } j = i, \quad \text{para } i = 0 \text{ o } i = 4 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Construyendo nuestra matriz de transición, que es una matriz $5 \times 5$, tenemos que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y que su grafo asociado es:

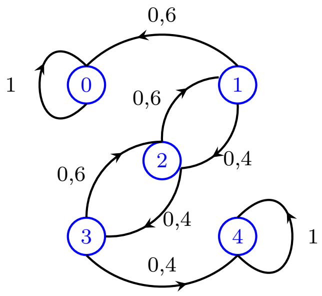



Figura 2.4: Grafo Ejemplo 2.4 “Ruina del jugador”.

Analicemos varias cosas sobre el problema:

1. Con las condiciones del problema, el jugador siempre tiene que jugar, no hay probablidad de que haya pasado una ronda de juego y él conserve el dinero, él siempre tiene que jugar sea que gane o que pierda. Por ello los estados 1, 2 y 3 no tienen lazos en su grafo asociado.

2. Los estados 0 y 4 son estados que se conocen como estados absorbentes, porque cuando entramos a ellos ya no podremos salir y dentro de nuestro problema tiene todo el sentido, ya que después que el jugador no tiene dinero para jugar, la probabilidad de que deje de jugar es 1 y análogamente cuando el jugador ya tenga los 40 mil pesos, la probabilidad de que él deje de jugar es 1.

3. Nuestra cadena tiene 3 clases, las clases del $\{0\}, \{1\}$ y $\{4\}$, dado que los estados 1, 2 y 3 se comunican entre ellos, por eso escogemos un representante que en este caso es el 1, pero puede ser el 2 o el 3, sin problema alguno.

4. Los estados 0 y 4 son estados recurrentes, porque cuando entramos en cada estado no hay probabilidad de salir o de entrar a otro estado, matemáticamente tenemos que:
$$\begin{aligned} f_{00}^1 = 1 \quad &\text{y} \quad f_{00}^n = 0 \text{ para todo } n \geq 2, \text{ por tanto } f_0 = 1. \\ f_{44}^1 = 1 \quad &\text{y} \quad f_{44}^n = 0 \text{ para todo } n \geq 2, \text{ por tanto } f_4 = 1. \end{aligned}$$

5. Los estados 1, 2 y 3 son estados transitorios, mostraremos solamente $f_1$, ya que en el Corolario 2.5 veremos que si dos estados se comunican entre sí, si uno es recurrente o transitorio el otro también es recurrente o transitorio, respectivamente. Por tanto, para $f_1$ podemos observar dos cosas: La primera de ellas, es observar que si salimos del estado uno, no podemos volver a él en pasos impares, por ello tenemos que para todo $n \geq 0$ $f_{11}^{2n+1} = 0$. Para el caso par note que: $f_{11}^2 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 6/25$ y $f_{11}^4 = 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0,6 = (6/25)^2$. En general para todo $n \geq 1$, se cumple que:
$$f_{ii}^{2n} = \left(\frac{6}{25}\right)^{2n},$$
porque, para llegar en $2n$ pasos del estado 1 al estado 1, sin visitar al 1 en estos $2n$ pasos, debemos ir del 1 al 2 y del 2 al 3 quedarnos dando vueltas, haciendo $2n-2$ pasos, para finalmente volver del 2 al 1 y obtener los $2n$ pasos. Por tanto:
$$f_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6}{25}\right)^n = \frac{6}{19} < 1.$$

6. Finalmente haciendo un análisis sobre el grafo, notemos que los estados 1,2 y 3 son transitorios ya que en el estado 3 y 1 existe la probabilidad de salir a 4 y 0 respectivamente, y no volver.

*Observación.* Este ejemplo es un caso particular del modelo de la Ruina del jugador, y se puede estudiar como un paseo aleatorio. En este modelo podemos tener dos escenarios, el primero es cuando dos jugadores tienen dinero finito, el jugador $A$ en un instante inicial tiene $i$ pesos y el jugador $B$ tiene $n-i$ pesos, el jugador $A$ puede ganar un peso con probabilidad $p$ y lo pierde con probabilidad $1-p$, en este caso el espacio de estados es de la forma $S=[0,n]$ donde $n \in \mathbb{Z}^+$. El segundo caso, un poco más general, es cuando el jugador A tiene $i$ pesos y el jugador B, a veces llamado el casino, tiene una cantidad infinita de pesos, el jugador A gana un peso con probabilidad $p$ y pierde un peso con probabilidad $1-p$. Este modelo se puede estudiar en [1, pág. 22], o [3, pág. 194], o [2, pág. 16].

El siguiente teorema será de vital importancia, ya que nos ayudará a determinar recurrencia o transitoriedad en los estados de una cadena de Markov mediante una serie numérica. Determinar la convergencia o divergencia de esta serie nos dará información del estado de la cadena, por ello daremos un esquema de su prueba, omitiendo algunos detalles. La demostración completa se puede encontrar en [1, 2, 3].

**Teorema 2.4.** *Sea $\{X_n\}_{n\in N_0}$ una cadena de Markov. Un estado $i$ es recurrente, si y solamente si,* $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n = \infty$.

**Demostración:** Para cada $n \geq 1$ consideremos la siguiente variable aleatoria:

$$I_n := \begin{cases} 1 & \text{si } X_n = i \\ 0 & \text{si } X_n \neq i, \end{cases}$$

y observemos que $\sum_{n=0}^{\infty} I_n$ es igual al número de visitas del proceso al estado $i$. Para la primera implicación supongamos que $i$ es recurrente. De la propiedad Markoviana se sigue que, comenzando en el estado $i$, el estado $i$ será visitado un número infinito de veces, es decir:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) = \infty.$$

Por consiguiente, el valor esperado de esta expresión es igual a:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(I_n | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot \mathbb{P}(I_n = 1 | X_0 = i) + 0 \cdot \mathbb{P}(I_n = 0 | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^n.
\end{aligned}$$

Para la segunda implicación supongamos por reducción al absurdo que $i$ es transitorio. Por tanto comenzando en $i$, el proceso regresa a $i$ un número finito de veces, además observemos que tiene distribución geométrica con parámetro $f_i$ teniendo que:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) = \frac{1}{1-f_i}.$$

Por consiguiente, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{n} = \mathbb{E}\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n | X_0 = i\right) = \frac{1}{1-f_i} < \infty. \qquad \square$$

**Corolario 2.5.** *Sean $j$ y $k$ estados de una cadena de Markov.*

1. *Si $j$ es un estado recurrente y $j \leftrightarrow i$, entonces $i$ también es recurrente.*

2. *Si $j$ es un estado transitorio y $j \leftrightarrow i$, entonces $i$ también es transitorio.*

**Demostración:** Supongamos que $i \leftrightarrow j$. Entonces existen naturales $n$ y $m$ tales que $p_{ij}^{n} > 0$ y $p_{ji}^{m} > 0$. Así, por el Corolario 2.2 y para todo $r \geq 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{jj}^{n+m+r} &\geq p_{ji}^{m} p_{ii}^{r} p_{ij}^{n} \\ \sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{m+n+r} &\geq p_{ji}^{m} p_{ij}^{n} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{r}. \end{aligned}$$

Notemos que $p_{ji}^{m} p_{ij}^{n} > 0$, por tanto tenemos una comparación de series positivas:

- En la parte izquierda de la desigualdad, si nuestro estado $j$ es transitorio tenemos que dicha serie converge, al ser mayor o igual que la serie derecha esta también converge, por tanto el estado $i$ es transitorio.
- En la parte derecha de la desigualdad, si nuestro estado $i$ es recurrente tenemos que dicha serie diverge, al ser menor o igual que la serie izquierda esta también diverge, por tanto el estado $j$ es recurrente. $\square$

Retomemos el Ejemplo 2.1 del paseo aleatorio sobre $\mathbb{Z}$. Sabemos que su espacio de estados es $S = \mathbb{Z}$, por tanto su matriz de transición esta dada por:

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

y su grafo asociado es:

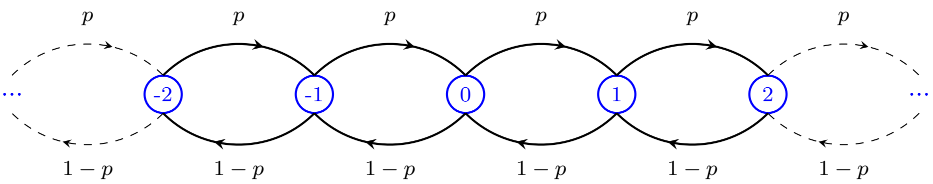



Figura 2.5: Grafo del paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$.

Observemos además que el paseo aleatorio es una cadena de Markov irreducible ya que todos sus estados se comunican entre sí, por tanto para probar la recurrencia o transitoriedad basta considerar un estado, para ello consideremos el estado 0 (origen). Notemos dos cosas:

1. La probabilidad de salir del 0 y retornar a él en pasos impares es cero, es decir $p_{00}^{2n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. La partícula saliendo del origen solo puede retornar al origen en pasos pares, por tanto preguntémonos por el siguiente evento, $\{S_{2n} = 0\} :=$ " La partícula regresa al origen en el tiempo $2n$", cuya probabilidad es dada por:

$$\mathbb{P}[S_{2n} = 0] = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

   En efecto, consideremos la siguiente variable aleatoria:

$$\begin{aligned} R_n &:= \# \text{ de pasos a la derecha en los primeros } 2n \text{ pasos} \\ &= \{i : 1 \leq i \leq 2n, X_i = +1\} \sim Bin(2n, p), \end{aligned}$$

   es decir, los pasos a la derecha de nuestro paseo aleatorio, que se dan con probabilidad $p$ son una variable aleatoria $Bin(2n, p)$. Notemos que la posición de nuestra partícula está determinada por el número de pasos a la derecha $R_n$, restando el número de pasos a izquierda que es $n - R_n$, así: $S_{2n} = R_n - (2n - R_n) = 2R_n - 2n$. Teniendo que: $\mathbb{P}[S_{2n} = 0] = \mathbb{P}[2R_n - 2n = 0] = \mathbb{P}[R_n = n]$, es decir, preguntarnos por la probabilidad del evento $\{S_{2n} = 0\}$, es preguntarnos por la probabilidad de la v.a. $\{R_n = n\}$, que es una v.a. Binomial, por tanto:

$$\mathbb{P}[S_{2n} = 0] = \mathbb{P}[R_n = n] = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Con el Teorema 2.4 y el Corolario 2.5 podemos probar el siguiente resultado.

**Proposición 2.6.** *El paseo aleatorio sobre $\mathbb{Z}$ es recurrente, si y solamente si, $p = \frac{1}{2}$.*

**Demostración:** Por lo visto anteriormente, basta mostrar la convergencia o divergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n.$$

Para estudiar la convergencia o divergencia de esta serie, haremos uso de la fórmula de Stirling. Esto con el fin de trabajar con una serie equivalente más sencilla en cuanto a cálculos. Recordemos que por el criterio de comparación en el límite, si dos series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cumplen que: $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$ con $0 \leq L < \infty$, ambas convergen o divergen mutuamente. Por tanto, la fórmula de Stirling nos dice que: $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$, lo que es equivale a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n} = 1.$$

Finalmente, por Stirling tenemos que:

$$\binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \frac{4^n n^{2n}}{e^{2n}} \frac{e^{2n}}{n^{2n}} (p(1-p))^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Así, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{2n} < \infty$, si y solamente si, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$.

Usando el criterio de la raíz podemos mostrar que esta última serie converge, si y solamente si, $4p(1-p) < 1$, es decir, si $p \neq 1/2$, y la serie diverge si $4p(1-p) = 1$, es decir, si $p = 1/2$. □

Cuando $p = 1/2$ el proceso se conoce como paseo aleatorio simétrico. En el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ se pueden estudiar otros resultados que sirven para ampliar el comportamiento de este proceso cuando la probabilidad no necesariamente es $p = 1/2$.

**Proposición 2.7.** *Sea $\{X_n\}_{n\geq 0}$ el paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que:*

$$\mathbb{P}(\tau_n < \infty | X_0 = 0) = \begin{cases} 1, & si \quad p \in [1/2, 1) \\ \{\frac{p}{1-p}\}^n, & si \quad p \in (0, 1/2). \end{cases}$$

**Demostración:** Denotemos por $\beta_n = \mathbb{P}(\tau_n < \infty | X_0 = 0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, esta $\beta_n$ es la probabilidad de que la partícula alcance el estado $n$, dado que la partícula inició en el origen. Como $\beta_n = \beta_1^n$, para encontrar la probabilidad de $\beta_n$, encontraremos $\beta_1$ y para ello vamos a condicionar esta probabilidad con el primer salto, teniendo que:

$$\beta_1 = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_0 = 0, X_1 = 1)p + \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_0 = 0, X_1 = -1)q,$$

y que:

$$\mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_1 = 1) = 1 \text{ y } \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X = -1) = \beta_2 = \beta_1^2.$$

Por tanto:

$$\beta_1 = p + q\beta_1^2,$$

y las soluciones de este polinomio $q\beta_1^2 - \beta_1 + p = 0$ son:

$$\beta_1 = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4pq}}{2q}.$$

Notemos que $1 - 4pq = (p + q)^2 - 4pq = (p - q)^2$, por tanto $\beta_1 = \frac{1 \pm |p-q|}{2q}$ y así:

$$\beta_1 = \frac{p + q + p - q}{2q} = \frac{p}{q} \quad \text{ó} \quad \beta_1 = \frac{p + q - p + q}{2q} = 1.$$

Procedamos por casos.

**Caso 1:** Si $p \in [1/2, 1)$, entonces $\frac{p}{q} \geq 1$, por tanto en este caso $\beta_1 = 1$ y consecuentemente $\beta_n = \beta_1^n = 1$.

**Caso 2:** Si $p \in (0, 1/2)$, tenemos que: $\beta_2 = \mathbb{P}(\tau_1 < \infty | X_1 = -1) = 1 - \mathbb{P}(\tau_1 = \infty | X_1 = -1)$ y que $\{\tau_0 = \infty | X_1 = -1\} \subseteq \{\tau_1 = \infty | X_1 = -1\}$, por lo cual: $\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | X_1 = -1) \leq \mathbb{P}(\tau_1 = \infty | X_1 = -1)$ y $-\mathbb{P}(\tau_1 = \infty | X_1 = -1) \leq -\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | X_1 = -1)$. De la ecuación (2.2) tenemos que: $\beta_1 = p + q\beta_1^2 \leq p + q(1 - \mathbb{P}(\tau_0 = \infty | X_1 = -1))$. Por la observación dada en el Ejemplo 2.4 de la Ruina del jugador y dado $p \in (0, 1/2)$, la probabilidad de que la partícula estando en $-1$ nunca alcance el 0, está dada por: $\mathbb{P}(\tau_0 = \infty | X_1 = -1) = 1 - p/q$.
Concluyendo que: $\beta_1 = p + q\beta_2 \leq p + q(1 - (1 - p/q)) = 2p < 1$, es decir, $\beta_1 < 1$, por lo que $\beta_1 = p/q$ y así: $\beta_n = (p/q)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

# CAPÍTULO 3

# GENERALIZACIONES DEL PASEO ALEATORIO

En este tercer capítulo estudiaremos dos generalizaciones del paseo aleatorio. En la primera parte estudiaremos el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^d$, enfocándonos en los casos $d = 2$ y $d = 3$. Basaremos la primera sección en [4, 5]. En la segunda sección del capítulo estudiaremos el Modelo de los Sapos en $\mathbb{Z}$, dicho estudio estará basado en [7].

## 3.1. Paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^d$

### El paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^2$

Consideremos la cadena de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ con espacio de estados $S = \mathbb{Z}^2$ y probabilidades de transición para $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$ dadas por:

$$p_{uv} := \mathbb{P}(Y_{n+1} = v|Y_n = u) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } v \in \{(u_1 \pm 1, u_2), (u_1, u_2 \pm 1)\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

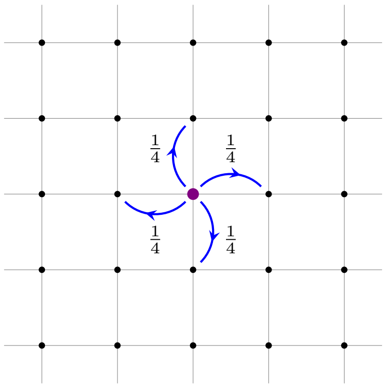



Figura 3.1: Grafo del paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^2$.

Este proceso puede ser interpretado como las consecutivas posiciones de una partícula que pasea por los vértices del grafo eligiendo siempre entre vértices vecinos, esto se puede observar en la Figura 3.1. Antes de demostrar que el paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^2$ es recurrente, enunciaremos y demostraremos el siguiente lema.

**Lema 3.1.** *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

**Demostración:** Por el binomio de Newton tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ se da que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

por tanto, para todo $N \in \mathbb{Z}^+$ y $0 \leq k \leq N$:

$$\begin{aligned} (a+b)^N &= (a+b)^k (a+b)^{N-k} \\ \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} a^n b^{N-n} &= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}\right)\left(\sum_{j=0}^{N-k} \binom{N-k}{j} a^j b^{(N-k)-j}\right). \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes del término $a^n b^{N-n}$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \binom{N}{n} &= \sum_{i+j=n} \binom{k}{i}\binom{N-k}{j} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i}. \end{aligned}$$

Finalmente si hacemos $N = 2n$ y $k = n$ obtenemos el resultado querido

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

□

**Proposición 3.2.** *El paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^2$, es recurrente.*

**Demostración:** Por el Corolario 2.5 es suficiente mostrar que el cero es un estado recurrente. Además por el Teorema 2.4 sabemos que el cero es recurrente, si y solamente si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^n$ es divergente. Observemos que la probabilidad de retornar al origen en pasos impares es cero, es decir, $p_{00}^{2n+1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y por ello solo nos preguntaremos por $p_{00}^{2n}$, o sea la probabilidad de retornar al origen en pasos pares.

Para determinarlo necesitamos una configuración favorable, la cual saliendo del origen retorne a él en $2n$ pasos. Si queremos dar $2n$ pasos y estar de nuevo en el origen, podemos dar $i$ pasos al oeste e $i$ pasos al este para volver al origen. Luego de los pasos restantes, damos $(n-i)$ pasos al norte y $(n-i)$ pasos al sur, para retornar al origen, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Notemos que este conteo de posibilidades es equivalente a hacer un reordenamiento de $2n$ elementos, donde tenemos $i$ elementos de un primer tipo, $i$ elementos de un segundo tipo, $(n-i)$ elementos de un tercer tipo y $(n-i)$ elementos de un cuarto tipo, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que cada paso es independiente del otro y cada uno tiene probabilidad $1/4$, entonces la probabilidad de cada una de estas posibilidades es igual a $(1/4)^{2n}$. Teniendo que:

$$p_{00}^{2n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2n!}{i!i!(n-i)!(n-i)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n},$$

que podemos simplificar así:

$$\begin{aligned} p_{00}^{2n} &= \sum_{i=0}^{n} \frac{2n!}{(i!(n-i)!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{2n!\, n!^2}{(i!(n-i)!n!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!^2}{(i!(n-i)!)^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \binom{2n}{n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Por el Lema 3.1 y la fórmula de Stirling tenemos que:

$$\begin{aligned} p_{00}^{2n} &= \binom{2n}{n}\binom{2n}{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{2n!}{n!n!}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &\sim \frac{4\pi n 4^{2n}}{4\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \\ &= \frac{1}{\pi n}. \end{aligned}$$

Por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{2n}$ diverge ya que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi n}$ diverge, por ser una serie armónica. Así, el paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^2$ es recurrente. □

Para finalizar esta sección mostraremos que en el caso de $\mathbb{Z}^3$, el paseo aleatorio simétrico es transitorio, lo que se cumple en general para $\mathbb{Z}^d$ con $d \geq 3$.

### El paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^3$

Consideremos la cadena de Markov $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ con espacio de estados $S = \mathbb{Z}^3$ y probabilidades de transición para $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3$, dados por:

$$p_{uv} = \mathbb{P}(Y_{n+1} = v | Y_n = u) := \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } v \in \{(u_1 \pm 1, u_2, u_3), (u_1, u_2 \pm 1, u_3), (u_1, u_2, u_3 \pm 1)\} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Este proceso puede ser interpretado como las posiciones consecutivas de una partícula que se mueve por los vértices del grafo eligiendo siempre entre vértices vecinos, como se muestra en la Figura 3.2.

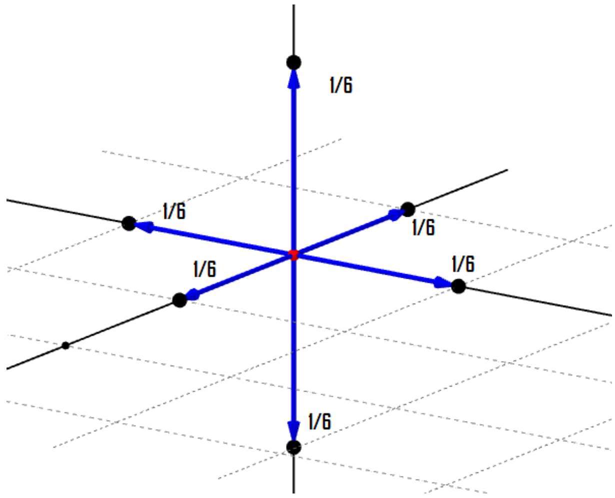



Figura 3.2: Grafo del paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^3$.

Antes de demostrar que el paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^3$ es transitorio, enunciaremos y probaremos dos lemas que nos serán de ayuda para demostrar la siguiente proposición.

**Lema 3.3.** *Para todo $n$ natural se cumple la siguiente igualdad:*

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

**Demostración:** Demostraremos esta igualdad de una forma probabilistica. Para ello consideremos el siguiente experimento: "Distribuir $n$ bolas independientes en 3 urnas distintas", donde la probabilidad de que una bola esté en cualquier urna es de $1/3$, nos preguntaremos por el siguiente evento A:= "tener $i$ bolas en la primera urna y $j$ bolas en la segunda urna, dado que hay un total de $n$ bolas". Como nos piden que en la primera urna hayan $i$ bolas y en la segunda hayan $j$ bolas, entonces en la última urna deben haber $n-i-j$ bolas, donde $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n-i\}$, notemos que $i + j + (n-i-j) = n$. Por tanto, la combinatoria que debemos hacer es el resultado de querer ordenar $n$ elementos, donde $i$ de ellos son tipo I (están en la urna I), $j$ elementos son de tipo II (están en la urna II) y $n-i-j$ elementos son de tipo III (están en la urna III). Como la probabilidad de que cada bola esté en una urna es de $1/3$ y cada una de las $n$ bolas es independiente de las otras, entonces la probabilidad del evento pedido es igual a:

$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Finalmente, notemos que esta es la distribución de probabilidad de un vector aleatorio de dos coordenadas con valores $i, j$ tales que $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ y $j \in \{0, 1, \ldots, n-i\}$. Luego, al sumar todas las configuraciones posibles de esta distribución, la suma es igual a 1:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1.$$

$\square$

Para todo $i, j, k, m \in \mathbb{N}$ usaremos la siguiente notación:

$$\binom{m}{i\,j\,k} := \frac{m!}{i!\,j!\,k!}.$$

**Lema 3.4.** *Para todo $i, j, k \in \mathbb{N}$, tal que $i + j + k = 3m$:*

$$\binom{3m}{i\,j\,k} \leq \binom{3m}{m\,m\,m}. \tag{3.1}$$

**Demostración:** Para todo $i, j, k$ tal que $i+j+k = 3m$, fijemos $i, j, k$ y sin perdida de generalidad, supongamos que $i < m$ y que $j \geq m + 1$. Notemos que $i + 1 < j$ y así:

$$\binom{3m}{i\,j\,k} \leq \left(\frac{i}{j+1}\right)\binom{3m}{i\,j\,k} = \binom{3m}{(i-1)\,(j+1)\,k}.$$

Repitiendo este proceso obtenemos la desigualdad (3.1). □

**Proposición 3.5.** *El paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^3$, es transitorio.*

**Demostración:** Por el Corolario 2.5 es suficiente mostrar que el cero es un estado transitorio. Además por el Teorema 2.4 sabemos que el cero es transitorio, si y solamente si, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{n}$ es convergente. Para determinarlo necesitamos una configuración favorable, la cual saliendo del origen retorne a él en $2n$ pasos.

Notemos que este conteo de posibilidades es equivalente a hacer un reordenamiento de $2n$ elementos, donde tenemos $i$ elementos de un primer tipo, que son los pasos que daremos a derecha e $i$ elementos de un segundo tipo, que son los pasos que daremos a izquierda, para así retornar al origen. Tenemos además $j$ elementos de un tercer tipo, que son los pasos que podemos dar hacia el norte y $j$ elementos de un cuarto tipo, que son los pasos que daremos hacia el sur, para así retornar al origen. Finalmente tenemos $(n - i - j)$ elementos de un quinto tipo, que son los pasos que daremos hacia arriba y $(n - i - j)$ elementos de un sexto tipo, que son los pasos que daremos hacia abajo, para así retornar al origen, donde $i \in \{1, \ldots, n\}$ y $j \in \{1, \ldots, n - i\}$. Además, observemos que este posible camino se lleva a cabo con probabilidad $(1/6)^{2n}$, ya que cada paso es independiente del otro y tiene probabilidad $1/6$, teniendo así que $p_{00}^{2n}$ es igual a:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{2n!}{(i!j!(n-i-j)!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n},$$

que podemos simplificar así:

$$\begin{aligned} p_{00}^{2n} &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} \frac{2n!}{(i!j!(n-i-j)!)^2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2n} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\binom{2n}{n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}. \end{aligned}$$

En el segundo renglón dividimos y multiplicamos por $(n!)^2$ y colocamos a la izquierda de la sumatoria los términos $(1/2)^{2n}, (1/3)^n$ y $2n$ tomados de a $n$. Consideremos:

$$C_{n,3} := \max_{0<i+j\leq n}\left\{\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right\},$$

y notemos que:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\left(\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq C_{n,3}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

donde la sumatoria a la derecha es igual a 1, por el Lema 3.3. Luego:

$$p_{00}^{2n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\left(\frac{1}{3}\right)^n\binom{2n}{n}C_{n,3}.$$

Si consideramos a $n = 3m$ de modo que, para todo $i, j$ y $k$, se cumple que $i+j+k = 3m$, tendremos la siguiente desigualdad, que se cumple por el Lema 3.4:

$$\binom{n}{i\,j\,k} \leq \binom{3m}{m\,m\,m},$$

por tanto:

$$\begin{aligned} p_{00}^{6m} &\leq \binom{6m}{3m}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\binom{3m}{m\,m\,m}\left(\frac{1}{3}\right)^{3m} \\ &= \frac{(6m)!}{(m!)^3}\left(\frac{1}{2}\right)^{6m}\left(\frac{1}{3}\right)^{3m} \\ &\sim \frac{1}{2(\pi m)^{3/2}}, \end{aligned}$$

donde fue aplicada la fórmula de Stirling, así: $\sum_{m=1}^{\infty} p_{00}^{6m} < \infty$, por el hecho de que, $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2(\pi m)^{3/2}} < \infty$, ya que esta serie converge, por ser una serie $p$, con $p = 3/2 > 1$. Sin embargo, falta mostrar que la serie inicial converge para cualquier $n$. Así, por el Corolario 2.2 tenemos que:

$$p_{00}^{2(3m)} \geq p_{00}^2 p_{00}^{2(3m-1)} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 p_{00}^{2(3m-1)}.$$

Igualmente tenemos que:

$$p_{00}^{2(3m)} \geq p_{00}^4 p_{00}^{2(3m-2)} = \left(\frac{1}{6}\right)^4 p_{00}^{2(3m-2)},$$

por tanto para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{2n} < \infty,$$

lo que muestra que el paseo aleatorio simétrico sobre $\mathbb{Z}^3$, es transitorio. □

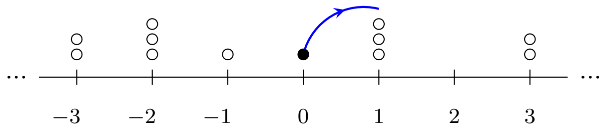
Hasta el momento hemos probado que el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^2$ es una cadena recurrente y que el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^3$ es una cadena transitoria. El resultado en general se conoce como El Teorema de Pólya y este nos dice que el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}^d$ es recurrente, si y solamente si, $d \in \{1, 2\}$. La demostración de este teorema puede ser estudiada en [15, Teorema 5.1].

## 3.2. Modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$

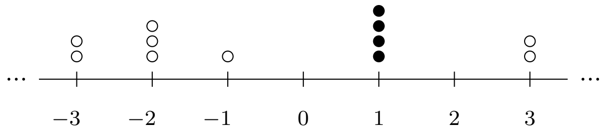
Para esta sección estudiaremos el modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$. Basaremos nuestro estudio en [7].

El modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ lo podemos considerar de la siguiente manera: en un instante inicial cada vértice $i \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ está ocupado por partículas $\eta_i \in \mathbb{Z}^+$, donde $\eta := (\eta_i)$, además, suponemos que en el 0 hay solo una partícula. Asumimos que hay dos tipos de partículas, las activas y las inactivas, donde cada partícula activa realiza de forma independiente a las demás partículas, un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$, con probabilidad de salto a derecha $p$ con $p \in (0, 1)$. Por otro lado, las partículas inactivas permanecen inmóviles hasta que el vértice donde se encuentran es visitado por alguna partícula activa, en cuyo caso es activada.

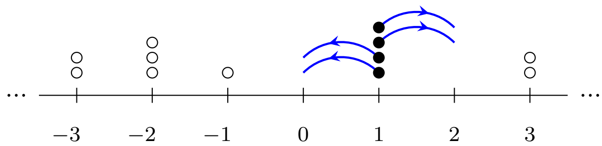
En la Figura 3.3 ilustramos una posible realización del modelo, que llamamos modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ con probabilidad de salto a derecha $p$ y configuración inicial $\eta$, en esta figura representaremos las partículas activas con puntos negros y las inactivas con puntos blancos.



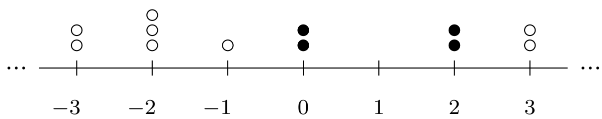

(a) La única partícula inicialmente activa, que está en el origen, escoge un vecino con probabilidad $p$ (derecha), o $1 - p$ (izquierda).




(b) En el instante $n = 1$, la partícula inicialmente activa salta para el vértice vecino escogido, activando todas las partículas localizadas allí.




(c) Cada partícula activa escoge un vértice vecino para saltar, de forma independiente, con probabilidad $p$ (derecha) o $1 - p$ (izquierda).




(d) Las partículas inactivas son activadas cuando una partícula activa salta al vértice donde se encuentran.

Figura 3.3: Modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$.

**Definición 3.1.** *Decimos que el modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ es recurrente, si el 0 es visitado infinitas veces por partículas activas con probabilidad 1. Caso contrario, decimos que el modelo es transitorio.*

Como ya discutimos la recurrencia del paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$, podemos concluir que si $p = 1/2$, entonces el modelo de los sapos es recurrente. En efecto, en este caso la partícula activa inicial realizará inifinitas visitas al vértice 0 con probabilidad 1. Estudiaremos ahora el modelo para valores de $p \neq 1/2$, para lo cual será suficiente considerar $p \in (1/2, 1)$ debido a la simetría del problema. Enunciaremos y demostraremos el siguiente teorema, el cual nos será de utilidad para la prueba del teorema principal de esta sección.

**Teorema 3.6** (Productos infinitos ). *Sea* $\{a_k\}_{k\geq 1}$ *una sucesión de números en el intervalo* $[0, 1)$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) > 0 \textit{ si, y solamente si, } \sum_{k=1}^{\infty} a_k < \infty.$$

**Demostración:** La prueba está basada en la prueba del libro [16, Apéndice Teorema 1.9]. Para nuestra primera implicación supongamos que la serie es divergente. Por la desigualdad $1 - x \leq e^{-x}$ para $x \in [0, 1)$, tenemos que:

$$\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{-a_k} \leq e^{-\sum_{k=1}^{n} a_k},$$

así, tomando limite cuando $n \to \infty$ y dado que por hipótesis tenemos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, podemos concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) = 0.$$

Para nuestra segunda implicación vamos a demostrar que para cualesquiera $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en $[0, 1)$ se cumple la siguiente desigualdad:

$$(1 - c_1)(1 - c_2)\cdots(1 - c_n) \geq 1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_n.$$

Probemos esta desigualdad por inducción sobre $n$. Para $n = 1$ se tiene que $1 - c_1 \geq 1 - c_1$. Supongamos por hipótesis de inducción que se cumple para $n$, es decir: $(1 - c_1)(1 - c_2)\cdots(1 - c_n) \geq 1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_n$. Multiplicamos a ambos lados de la desigualdad por $1 - c_{n+1}$, que es un término positivo, pues $c_{n+1} \in [0, 1)$ y obtenemos que:

$$\begin{aligned}
(1 - c_1)(1 - c_2)\cdots(1 - c_n)(1 - c_{n+1}) &\geq (1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_n)(1 - c_{n+1}) \\
&\geq 1 - c_{n+1} - c_1 - c_2 - \cdots - c_n + c_1c_{n+1} + \cdots + c_nc_{n+1} \\
&\geq 1 - c_1 - c_2 - \cdots - c_n - c_{n+1}.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, existe un $N$ tal que para todo $n \geq N$,

$$\sum_{i=N}^{n} a_i < \frac{1}{2}.$$

Si definimos $\pi(n) := \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k)$ para todo $n \geq N$, tenemos que:

$$\frac{\pi(n)}{\pi(N-1)} = (1 - a_N)\cdots(1 - a_n) \geq 1 - a_N - \cdots - a_n \geq \frac{1}{2}.$$

Por tanto, la sucesión $\{\pi(n)\}_{n\geq N}$ es una sucesión no-creciente acotada por abajo por $\frac{1}{2}\pi(N-1) > 0$, así $\lim_{n\to\infty} \pi(n) > 0$, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) > 0.$$

□

A continuación enunciaremos y probaremos el Teorema 2.1 de [6]. Basamos los detalles de la prueba en [7].

**Teorema 3.7.** *[6, Teorema 2.1]. Consideremos el modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ con configuración inicial $\eta$ y probabilidad de salto a derecha $p \in (1/2, 1)$. El modelo es recurrente si, y solamente si,*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \eta_i \left(\frac{1-p}{p}\right)^j = \infty.$$

**Demostración:** Para facilitar la notación, a cada partícula inactiva que inicialmente está en el vértice $j$, la llamaremos $j-$partícula, para todo $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Para la primera implicación supongamos que, $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \left((1-p)/p\right)^j = \infty$ y veamos que el modelo es recurrente mostrando que $\mathbb{P}(0$ sea visitado infinitas veces$) = 1$. Para ello, denotamos el evento: $V_i := \bigcup_{j=1}^{\infty}\{$alguna $j$-partícula visite el vértice $-i\}$, es decir, el evento $V_i$ es el evento de que alguna $j$-partícula con $j \in \mathbb{N}$ visite al vértice $-i$ eventualmente. Entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V_i) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{\text{alguna } j\text{-partícula visita el vértice -}i\}\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}\{\text{ninguna } j\text{-partícula visita el vértice -}i\}\right) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i}\right)^{\eta_j}.
\end{aligned}$$

Para calcular la probabilidad de $V_i$ encontraremos su complementar. Notemos que dicha probabilidad es una sucesión de eventos decrecientes, por tanto, por el Teorema 1.3 aplicamos la continuidad de la probabilidad, seguido por la productoria que viene de la independencia de cada $j$-partícula. Además, por el Teorema 2.7 la probabilidad de que una $j$-partícula nunca visite el vértice $-i$, está dada por la expresión: $(1 - ((1-p)/p)^{(j+i)})$.

Ahora, para $x \in [0, 1]$ note que: $1 - x \leq e^{-x}$. Entonces, para todo $n \geq 1$ tenemos que:

$$\left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}\right) \leq e^{-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}},$$

lo que implica que:

$$\prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}\right)^{\eta_j} \leq \prod_{j=1}^{n} e^{-\eta_j\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}} \leq e^{-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}} \leq e^{-\sum_{j=1}^{n}\eta_j\left(\frac{1-p}{p}\right)^{i+j}}.$$

Como por hipótesis la serie es divergente, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$, el lado derecho de la desigualdad tiende a cero y tenemos que: $\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+i}\right)^{\eta_j} = 0$ y así $\mathbb{P}(V_i) = 1$, para cada $i \in \mathbb{Z}^+$.

Denotemos los eventos $T_i :=$ "alguna $(-i)$-partícula una vez activada visite el 0", para cada $i \in \mathbb{Z}^+$ y $V :=$"la partícula activa inicialmente en el 0 visite todos los vértices de $\mathbb{Z}^+$". Entonces por el Teorema 2.7, como $p > 1/2$ obtenemos que $\mathbb{P}(T_i) = 1$ y $\mathbb{P}(V) = 1$, luego, por la Proposición 1.2, concluimos que:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} V_i\right) = 1 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} T_i\right) = 1.$$

Notemos que la intersección de los $V_i$ nos dice que todas las $j$-partículas en los vértices negativos serán activadas por alguna $j$-partícula positiva con probabilidad 1. Además, la intersección de los $T_i$ nos dice que estas partículas en vértices negativos, cuando sean activadas visitarán eventualmente al cero con probabilidad 1. Por lo cual, la intersección de estos tres eventos: $\cap_{i=1}^{\infty} V_i, \cap_{i=1}^{\infty} T_i, V$, nos dice que la partícula que inicialmente está en el origen activada, visitará y activará todas las $j$-partículas con $j \in \mathbb{Z}^+$ y que todas las partículas en vértices negativos serán activadas por alguna $j$-partícula, con $j \in \mathbb{Z}^+$. Finalmente estas partículas en vértices negativos visitarán al cero con probabilidad 1, por lo cual esta interseción de eventos, nos indica que el cero será visitado infinitas veces.

Aplicamos probabilidad total sobre la probabilidad de que el 0 sea visitado infinitas veces, condicionado a la intersección de los eventos anteriores y el complemento de ellos, teniendo así que:

$$\mathbb{P}(0 \text{ sea visitado infinitas veces}) = \mathbb{P}(0 \text{ sea visitado infinitas veces} | \cap_{i=1}^{\infty} V_i, \cap_{i=1}^{\infty} T_i, V) = 1,$$

es decir, el modelo es recurrente.

Para la otra implicación razonemos por absurdo, supongamos que el modelo es recurrente, es decir, $\mathbb{P}(0 \text{ sea visitado infinitas veces}) = 1$ y que $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \left((1-p)/p\right)^j < \infty$.

Por el lema de Borel-Cantelli, en [6, 7] afirman que:

$$\mathbb{P}(0 \text{ sea visitado infinitas veces}) \leq \mathbb{P}(\text{-1 sea visitado al menos una vez}).$$

Cabe aclarar que si la partícula en cero nunca visita los vértices negativos, el -1 nunca va a ser visitado por partículas negativas, por tanto:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{-1 sea visitado al menos una vez}) &= 1 - \mathbb{P}\left(\text{-1 nunca es visitado }\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right)^{\eta_j}.\end{aligned}$$

Notemos que la probabilidad del evento: el vértice -1 nunca es visitado, es una sucesión de eventos decrecientes, por tanto, por el Teorema 1.3 y dado que las $j$-partículas son independientes, tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{-1 sea visitado al menos una vez}) &= 1 - \mathbb{P}\left(\text{-1 nunca es visitado }\right) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)\right) \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right)^{\eta_j} \\ &\leq 1 - \left(1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)\right) \lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \eta_j \left(\frac{1-p}{p}\right)^{j+1}\right),\end{aligned}$$

en la segunda linea aplicamos la desigualdad de Bernoulli, la cual nos dice que: Si $x \geq -1$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Por hipótesis tenemos que $\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \left((1-p)/p\right)^j < \infty$, entonces por el Teorema 3.6, $\prod_{j=1}^{\infty}(1 - \eta_j((1-p)/p)^{j+1}) > 0$, de lo cual se tiene que $\mathbb{P}(0 \text{ sea visitado infinitas veces}) < 1$, es decir, el modelo es transitorio, lo que es una contradicción. Concluimos así que si el modelo es recurrente, la serie es divergente. $\square$

El modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$ es un modelo reciente y los primeros resultados se encuentran en [17, 18] [2002]. En estos artículos se asume que cada partícula tiene un tiempo de vida, después de lo cual la partícula es retirada del grafo. Para ver una conexión de este modelo con modelos de transmisión de información ver [19].

# CAPÍTULO 4

# ÁLGEBRAS DE EVOLUCIÓN Y CADENAS DE MARKOV

El propósito de este cuarto y último capítulo es estudiar las álgebras de evolución y su conexión con las cadenas de Markov. Basaremos nuestro estudio en [8, 9, 10].

## 4.1. Álgebras de evolución

**Definición 4.1.** *Una $\mathbb{K}-$**álgebra** es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathscr{A}$, en el cual está definido un producto que es bilineal, es decir:*

1. *Si $a, b, c \in \mathscr{A}$, entonces $(a+b)c = ac + bc$.*
2. *Si $a, b, c \in \mathscr{A}$, entonces $a(b+c) = ab + ac$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $a, b \in \mathscr{A}$, entonces $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.*

Dos propiedades que puede tener una $\mathbb{K}$-álgebra son las siguientes:

- Si $ab = ba$ para cada $a, b \in \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A}$ es **conmutativa**.
- Si $(ab)c = a(bc)$ para cada $a, b, c \in \mathscr{A}$, entonces $\mathscr{A}$ es **asociativa**.

Diremos que $B$ es una base de $\mathscr{A}$ como $\mathbb{K}$-álgebra, si $B$ es una base para $\mathscr{A}$ como $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Por tanto, la dimensión de la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ es su dimensión como $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Enfatizamos que la base $B$ de la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ es una base de Hamel, es decir, para todo elemento no nulo $x \in \mathscr{A}$, hay una representación única finita de elementos de la base $B$, con coeficientes en $\mathbb{K}$ distintos de cero. Llamaremos **constantes de estructura** a las constantes $p_{ijk}$ que aparecen en los productos entre los elementos de la base:

$$e_i e_j = \sum_{k \in \Lambda} p_{ijk} e_k, \quad p_{ijk} \in \mathbb{K}.$$

Si la $\mathbb{K}-$álgebra $\mathscr{A}$ es de dimensión finita, con base $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, entonces tenemos $n^3$ constantes de estructura y $n^2$ igualdades que salen de la igualdad anterior, estas $n^2$ ecuaciones se pueden organizar de la siguiente manera, dando lugar a la tabla de multiplicación del álgebra:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & e_1 & \dots & e_j & \dots & e_n \\
\hline
e_1 & \sum_{k=1}^{n} p_{11k}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{1jk}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{1nk}e_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_i & \sum_{k=1}^{n} p_{i1k}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{ijk}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{ink}e_k \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_n & \sum_{k=1}^{n} p_{n1k}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{njk}e_k & \dots & \sum_{k=1}^{n} p_{nnk}e_k
\end{array}
$$

*Observación.* El producto en la $\mathbb{K}$-álgebra $\mathscr{A}$ con base $B$ está totalmente determinado por las constantes de estructura, en nuestro caso siempre trabajaremos con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, por tanto, las constantes de estructura serán números reales y nos refiriremos a la $\mathbb{R}$-álgebra $\mathscr{A}$ simplemente como el álgebra $\mathscr{A}$.

**Ejemplo 4.1.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con base $B = \{e_1, e_2\}$ y con producto:

$$
\begin{aligned}
e_1e_2 &= e_2e_1 = 0, \\
e_1e_1 &= e_1^2 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2, \\
e_2e_2 &= e_2^2 = \frac{1}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2.
\end{aligned}
$$

Notemos que esta álgebra es conmutativa, pero no es asociativa, ya que:

$$
(e_1e_1)e_2 = \left(\frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2\right)e_2 = \frac{1}{15}e_1 + \frac{4}{15}e_2 \neq e_1 \cdot 0 = e_1(e_1e_2).
$$

**Ejemplo 4.2.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con base $B = \{e_1, e_2\}$ y con producto:

$$
\begin{aligned}
e_1e_2 &= e_2e_1 = 0, \\
e_1e_1 &= e_1^2 = 2e_1, \\
e_2e_2 &= e_2^2 = e_2.
\end{aligned}
$$

Esta álgebra es conmutativa y asociativa, ya que los elementos de la base son conmutativos y además:

$$
\begin{aligned}
(e_1e_1)e_2 &= 2e_1e_2 = 0 = e_1 \cdot 0 = e_1(e_1e_2), \\
(e_2e_2)e_1 &= e_2e_1 = 0 = e_2 \cdot 0 = e_2(e_2e_1).
\end{aligned}
$$

**Ejemplo 4.3.** Sea $\mathscr{A}$ un álgebra con base $B = \{e_1, e_2\}$ y con producto:

$$
\begin{aligned}
e_1e_2 &= e_1, \\
e_2e_1 &= e_2, \\
e_1e_1 &= e_1^2 = e_1, \\
e_2e_2 &= e_2^2 = -e_2.
\end{aligned}
$$

Esta álgebra es asociativa, ya que los elementos de la base son asociativos:

$$(e_1e_1)e_2 = e_1e_2 = e_1 = e_1e_1 = e_1(e_1e_2),$$
$$(e_2e_2)e_1 = -e_2e_1 = -e_2 = e_2e_2 = e_2(e_2e_1).$$

Sin embargo, esta álgebra no es conmutativa, ya que: $e_1e_2 \neq e_2e_1$. Para mas resultados y estudios sobre las álgebras recomendamos al lector consultar [9, 10].

Las álgebras que estudiaremos a continuación vienen motivadas por las leyes de la genética no mendeliana y fueron introducidas por J. Tian [8] en 2008. Estás álgebras, que Tian llama de Evolución, son un tipo particular de álgebras no asociativas.

**Definición 4.2.** *Un álgebra $\mathscr{A}$ es llamada de* ***evolución****, si existe una base $B = \{e_i | i \in \Lambda\}$ de $\mathscr{A}$, tal que $e_ie_j = 0$, para $i \neq j$ y $e_i^2 = \sum_{j\in\Lambda} p_{ij}e_j$.*

Este tipo de bases donde los productos cruzados son nulos y los cuadrados son combinaciones lineales finitas, se conocen como **bases naturales**, estas pueden ser finitas o infinitas. Las álgebras de los Ejemplos 4.1 y 4.2, son álgebras de evolución y el álgebra del Ejemplo 4.3 no es álgebra de evolución. Un álgebra $\mathscr{A}$ de dimensión $n$ es una álgebra de evolución, si y solo si, tiene una base natural $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cuya tabla de multiplicación es de la forma:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & e_1 & \dots & e_i & \dots & e_n \\
\hline
e_1 & \sum\limits_{k=1}^{n} p_{1k}e_k & \dots & 0 & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_i & 0 & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}e_k & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
e_n & 0 & \dots & 0 & \dots & \sum\limits_{k=1}^{n} p_{nk}e_k
\end{array}$$

En el caso finito, la matriz de estructura de $\mathscr{A}$ con respecto a la base natural $B$ es:

$$M_B = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

donde los $p_{ij}$ son las constantes de estructura de $\mathscr{A}$ con respecto a la base natural $B$. Esta matriz determina completamente el álgebra de evolución. El álgebra que construimos en el Ejemplo 4.2, es un álgebra de evolución con matriz de estructura igual a:

$$M_B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## 4.2. Cadenas de Markov y álgebras de evolución

En el caso de las cadenas de Markov discretas, es posible definir un sistema algebraico, el cual bajo ciertas condiciones podrá ser una álgebra de evolución. Recordemos que las cadenas de Markov cumplen que: Las probabilidades de transición de un estado $i$ a un estado $j$ son no-negativas, es decir, $p_{ij} \geq 0$ para todo $j \in S$, y además, la suma de las probabilidades de transición de un estado $i$ a los demás estados debe ser igual a 1, es decir, para cualquier estado $i$: $\sum_{j\in S} p_{ij} = 1$. Estas probabilidades de transición están almacenadas en la matriz de probabilidad $P = (p_{ij})$.

**Definición 4.3.** *Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov discreta, con espacio de estados $S$ y matriz de transición $P = (p_{ij})$, tal que para cada fila $i$, las secuencias $\{p_{ij}\}_j$ sobre $j$ son secuencias casi nulas.* ***El álgebra de evolución $\mathscr{A}$ asociada a la cadena de Markov****, denotada por $\mathscr{A}(X_n)$, es el álgebra con base natural $B = \{e_i | i \in S\}$ y productos dados por:*

$$e_i^2 = \sum_{j\in S} p_{ij} e_j.$$

Nos referiremos a estas álgebras como álgebras de evolución Markovianas. Notemos que las constantes de estructura de esta álgebra de evolución Markoviana son las probabilidades de transición del estado $i$ a los estados $j$. La definición anterior está basada en el capítulo 4 de [8].

En el siguiente ejemplo veremos cómo una cadena de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, con espacio de estados finito, genera una álgebra de evolución Markoviana.

**Ejemplo 4.4.** Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{1, 2\}$ y matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

El álgebra de evolución que genera esta cadena de Markov tiene como base natural $B = \{e_1, e_2\}$ y productos:

$$\mathscr{A}(X_n) := \begin{cases} e_1^2 = \frac{2}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_2 \\ e_2^2 = \frac{1}{5}e_1 + \frac{4}{5}e_2 \end{cases}$$

Notemos que esta álgebra $\mathscr{A}(X_n)$ es precisamente la misma del Ejemplo 4.1 y que la matriz de estructura de $\mathscr{A}(X_n)$ es igual a la matriz de transición de la cadena. En general, siempre se cumple esta igualdad matricial.

En general, cualquier cadena de Markov con espacio de estados finito genera una álgebra de evolución.

**Ejemplo 4.5.** Retomemos el Ejemplo 2.3 donde consideramos el fenómeno de observar el funcionamiento de una máquina que cada día está en uno de los estados siguientes: "encendida (1)", "apagada (0) ", y consideremos $\forall n \geq 1$ la v.a $X_n :=$ el estado de la maquina el $n$-ésimo día. Asumamos que esta sucesión $\{X_n\}_{n\in N_0}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1\}$ la cual tiene matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}03 & 0{,}97 \end{bmatrix},$$

y grafo asociado:

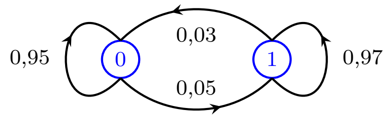



Figura 4.1: Grafo Ejemplo 2.3.

Esta cadena de Markov genera un álgebra de evolución, ya que las secuencias $\{p_{ij}\}_j$ de cada fila $i$ son secuencias finitas, en este caso $\{p_{1j}\}_j = (19/20, 1/20)$, y $\{p_{2j}\}_j = (3/100, 97/100)$. Esta cadena de Markov genera la siguiente álgebra de evolución, con base natural $B = \{e_0, e_1\}$ y productos dados por :

$$\mathscr{A}(X_n) := \begin{cases} e_0^2 = \frac{19}{20}e_0 + \frac{1}{20}e_1 \\ e_1^2 = \frac{3}{100}e_0 + \frac{97}{100}e_1, \\ e_ie_j = 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Como observamos en el ejemplo anterior, toda cadena de Markov con espacio de estados finito genera un álgebra de evolución. Sin embargo, esto no depende de la finitud del espacio de estados, lo que importará es que las secuencias de las filas sean finitas o secuencias casi nulas.

En el siguiente ejemplo, veremos como el paseo aleatorio sobre $\mathbb{Z}$, genera un álgebra de evolución Markoviana.

**Ejemplo 4.6.** Retomemos el Ejemplo 2.1 del paseo aleatorio sobre $\mathbb{Z}$. Esta cadena de Markov $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ tiene como espacio de estados $S = \mathbb{Z}$, su matriz de transición está dada por:

$$P = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

y su grafo asociado es igual a:

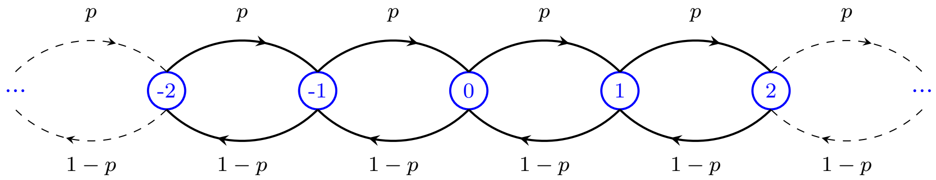



Figura 4.2: Grafo del paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$.

Esta cadena de Markov genera la siguiente álgebra de evolución con base natural $\{e_i | i \in \mathbb{Z}\}$ y productos tal que:

$$\mathscr{A}(S_n) := \begin{cases} e_i^2 = (1-p)e_{i-1} + pe_{i+1} & \text{para } i = j, \\ e_ie_j = 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

En este caso tenemos que cada fila $i$ de la matriz de probabilidad tiene una secuencia de la siguiente forma: $\{p_{ij}\}_j = (\cdots, 0, 1-p, 0, p, 0, \cdots)$, estas secuencias son casi nulas ya que solo poseen dos entradas no nulas.

Aunque la finitud del espacio de estados $S$, en una cadena de Markov, no nos limita al momento de generar álgebras de evolución, si tendremos problema cuando un estado o varios estados de una cadena de Markov se comuniquen con infinitos estados de la cadena, es decir, cuando una o varias secuencias $\{p_{ij}\}_j$ de una fila $i$ de la matriz de transición, no sea una secuencia casi nula. En este caso, no será posible hallar una base natural, aunque sí se pueda definir un sistema algebraico. El siguiente ejemplo nos ilustra este caso.

**Ejemplo 4.7.** Sea $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ y probabilidades de transición dadas por:

$$p_{ij} = \begin{cases} p, & \text{si} j = i+1, \text{ con } i \neq 0, \\ 1-p, & \text{si} j = i-1, \text{ con } i \neq 0, \\ \frac{e^{-1}}{j!}, & \text{para todo } j \in \mathbb{S}, \text{ con } i = 0. \end{cases}$$

Esta cadena de Markov tiene como matriz de transición:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{e^{-1}}{0!} & \frac{e^{-1}}{1!} & \frac{e^{-1}}{2!} & \frac{e^{-1}}{3!} & \frac{e^{-1}}{4!} & \frac{e^{-1}}{5!} & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

y su grafo asociado es igual a:

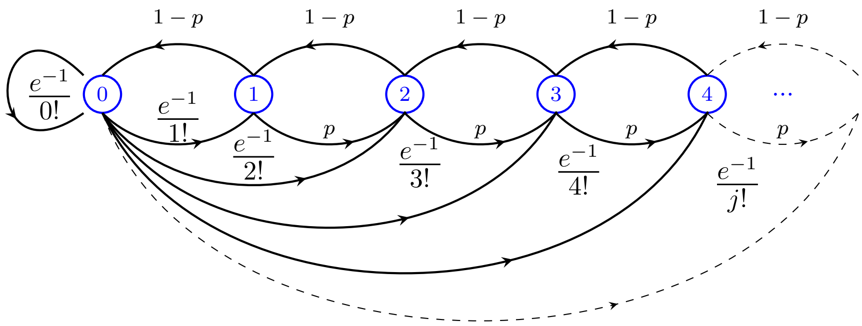



Figura 4.3: Grafo Ejemplo 4.7.

El sistema algebraico que genera esta cadena de Markov tiene base $B = \{e_i | i \in \mathbb{Z}\}$ y productos tal que:

$$E := \begin{cases} e_i^2 = (1-p)e_{i-1} + pe_{i+1}, & \text{para } i \neq 0, \\ e_0^2 = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{e^{-1}}{j!} e_j, & \text{para } i = 0, \\ e_i e_j = 0, & \text{para } i \neq j. \end{cases}$$

Sin embargo, aunque tenemos un sistema algebraico, esta cadena de Markov no genera una álgebra de evolución, ya que la primera fila no es una secuencia casi nula, es decir, $\{p_{1j}\}_j = (\frac{e^{-1}}{0!}, \frac{e^{-1}}{1!}, \frac{e^{-1}}{2!}, \frac{e^{-1}}{3!}, \frac{e^{-1}}{4!}, \dots, \frac{e^{-1}}{j!}, \dots, )$, es una secuencia que tiene infinitos términos no nulos. Por tanto, no podemos encontrar una base natural tal que el elemento $e_0^2$ se pueda escribir como combinación lineal finita de elementos de la base, es decir, no existe $N \in \mathbb{N}$ tal que:

$$e_0^2 = \sum_{j=0}^{N} \frac{e^{-1}}{j!} e_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=0}^{N} \frac{e^{-1}}{j!} = 1.$$

Por tanto, no toda cadena de Markov genera una álgebra de evolución.

Con este último ejemplo mostramos que no toda cadena de Markov discreta genera una álgebra de evolución. En el artículo [20] [2021], se proporciona una generalización a la Definición 4.3, capaz de tratar con espacios de dimensión infinita.

# CONCLUSIONES

En el estudio del modelo de los sapos en $\mathbb{Z}$, basamos nuestro estudio en las actas [7][2019] del Profesor Pablo Rodriguez, para enunciar y demostrar el Teorema 2.1 del artículo [6] de los profesores Gantert & Schmidt [2009]. El Teorema 3.7, es el primero de los resultados obtenidos en [6], en este artículo también se dan criterios para garantizar la recurrencia, en caso de que las $\eta_i$ partículas sean variables aleatorias. Este modelo es bastante estudiado en la actualidad, en [21] [2014], se obtuvieron resultados sobre la recurrencia del modelo de los sapos en $\mathbb{Z}^d$. En [17, 18] [2002] se encuentran los primeros resultados donde se estudia el modelo en grafos infinitos y en estas primeras versiones, en el modelo, se asume que cada partícula tiene un tiempo de vida despúes de lo cual la partícula es retirada del grafo, este tiempo de vida puede ser dado por una variable aleatoria geométrica de parámetro $p$. Como una aplicación al modelo citamos [19] [2013], donde se estudia la trasmisión de una información en una población.

Para las álgebras de evolución Markovianas, o las álgebras de evolución determinadas por una cadena de Markov, basamos nuestro estudio en [8][2008], y nuevamente hacemos énfasis en que la Definición 4.3 nos dice que, una cadena de Markov determina una álgebra de evolución, siempre y cuando cumpla con las condiciones allí dadas, por lo cual el Ejemplo 4.7 no determina un álgebra de evolución con la definición dada. Análogamente, en el trabajo [22] [2016], se consideran álgebras de evolución infinito-dimensionales, pero se sigue considerando que todo producto cuadrado del álgebra se puede escribir como combinación lineal finita de elementos de la base.

En [20] [2021] se proporciona una generalización que sea capaz de tratar con espacios de dimensión infinita, en los cuales la Definición 4.3 no funciona. En este artículo se estudian las álgebras de evolución en espacios de Hilbert y con bases Shauder, que generaliza la Definición 4.3 de álgebra de evolución.

# BIBLIOGRAFÍA


[1] L.C. Acero. *Introducción a los procesos estocásticos.* Universidad de Antioquia, 2020.

[2] L. Rincón. *Introducción a los procesos estocásticos.* Facultad de Ciencias UNAM, 2012.

[3] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models.* Elsevier Science, 2014.

[4] R.B. Schinazi. *Classical and Spatial Stochastic Processes.* Birkhäuser, 1999.

[5] J. R. Norris. *Markov Chains.* Cambridge University Press, 1997.

[6] N. Gantert and P. Schmidt. Recurrence for the frog model with drift on $\mathbb{Z}$. *Markov Process and Related Fields*, 15(1):51–58, 2009.

[7] P. M. Rodriguez. Modelos probabilísticos in: Actas del XV congreso. *Dr. Antonio A. R. Monteiro*, pages 3–26, 2019.

[8] J.P. Tian. *Evolution Algebras and Their Applications.* Springer, 2008.

[9] R.D. Schafer. *An Introduction to Nonassociative Algebras.* Dover Publications, 2017.

[10] K.A. Zhevlakov, A. M. Slinko, I. P. Shestakov, and A. I. Shirshov. *Rings That are Nearly Associative.* Elsevier Science, 1982.

[11] L.B. Castañeda. *Probabilidad.* Universidad Nacional de Colombia, 2004.

[12] Sheldon M. Ross. *A First Course in Probability.* Prentice Hall, 1998.

[13] D. Mejía. *Lógica simbólica y demostraciones.* Notas de clase, 2006.

[14] R. Balakrishnan and K. Ranganathan. *A Textbook of Graph Theory.* Springer, 2012.

[15] R.N. Bhattacharya and E.C. Waymire. *Stochastic Processes with Applications.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.

[16] P. Bremaud. *Markov Chains: Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues.* Texts in Applied Mathematics. Springer, 2001.

[17] O.S. M. Alves, F.P. Machado, and S. Yu. Popov. Phase Transition for the Frog Model. *Electronic Journal of Probability*, 7:1 – 21, 2002.

[18] O. S. M. Alves, F. P. Machado, and S. Yu. Popov. The shape theorem for the frog model. *The Annals of Applied Probability*, 12(2):533 – 546, 2002.

[19] E. Lebensztayn and P.M. Rodriguez. A connection between a system of random walks and rumor transmission. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392(23):5793–5800, 2013.

[20] S. J. Vidal, P. Cadavid, and P. M. Rodriguez. Hilbert evolution algebras and its connection with discrete-time markov chains, arxiv:2111.07399, 2021.

[21] C. Döbler and L. Pfeifroth. Recurrence for the frog model with drift on $\mathbb{Z}^d$. *Electronic Communications in Probability*, 19:1 – 13, 2014.

[22] Y. Cabrera, M. Siles, and M. V. Velasco. Evolution algebras of arbitrary dimension and their decompositions. *Linear Algebra and its Applications*, 495:122–162, 2016.

[23] P. Mellon and M. V. Velasco. Analytic aspects of evolution algebras. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, 13(1):113 – 132, 2019.