

Clasificación de superficies compactas

JUAN PABLO VALDERRAMA ACOSTA

Trabajo de grado para optar al título de:
Matemático

Director: DIEGO ALEXANDER ACOSTA ÁLVAREZ

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas
–Medellín–
2022

Agradecimientos

En primer lugar, deseo darle las gracias a mi director, el Dr. Diego Alexander Acosta, no solo por su apoyo y disponibilidad, sino también por su conocimiento y orientación, estos fueron fundamentales para superar los diferentes desafíos que surgieron a lo largo del presente trabajo.

Agradezco a mi familia y amigos por su paciencia y apoyo incondicional durante la consecución de este proyecto.

Contenido

Agradecimientos	5
Introducción	9
1 Preliminares	11
1.1 Relaciones de equivalencia	11
1.2 Espacios métricos y espacios normados	13
1.3 Funciones continuas	14
1.4 Funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos	16
1.5 Invariantes topológicos	18
1.5.1 Conexidad	18
1.5.2 Conexidad por caminos	20
1.5.3 Espacios Hausdorff	22
1.5.4 Espacios primero y segundo contables	24
1.5.5 Compacidad	26
1.5.6 Uniones disjuntas	27
1.5.7 Productos	31
2 Topología cociente	35
2.1 Espacios cociente	35
2.2 Adjunción de espacios	47
3 Superficies	55
3.1 Superficies	55
3.2 Superficies con frontera	62
4 El grupo fundamental y orientabilidad	65
4.1 Grupos de Homotopía	65
4.1.1 Homotopía	65
4.1.2 Espacios punteados	73
4.1.3 Concatenación de funciones $f: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$	75
4.1.4 Homomorfismos inducidos	83
4.1.5 Compatibilidad con productos	86
4.2 Grupo fundamental	90
4.2.1 Conexidad por caminos	90
4.2.2 Estructura algebraica de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$	92
4.3 Grado de una función en el plano	101
4.4 Superficies orientables	102
5 Simplejos, complejos y triangulaciones	107
5.1 Simplejos y complejos simpliciales	108
5.2 Teorema de aproximación simplicial	123
5.2.1 Primera aproximación simplicial	123
5.2.2 Subdivisión baricéntrica y teorema de aproximación simplicial	127
5.3 Triangulación de superficies	130
6 Grupos de homología	135

6.1 Grupos abelianos finitamente generados	135
6.2 Homología simplicial	139
6.2.1 Orientación de un simplejo	140
6.2.2 p -cadenas y homología simplicial	143
6.2.3 Homología de 2-complejos finitos	152
7 El teorema de clasificación de superficies compactas	157
7.1 Complejos celulares	158
7.2 Formas normales de complejos celulares	160
7.3 Demostración del teorema de clasificación	173
7.4 Sumas conexas y el teorema de clasificación	174
Conclusiones	179
Bibliografía	181

Introducción

El teorema de clasificación de superficies fue uno de los primeros logros de la topología algebraica. Dicho teorema establece que cualquier par de superficies compactas son homeomorfas si y solo si ambas tienen la misma característica de Euler-Poincaré, y son orientables o no orientables. A pesar de que las primeras ideas en torno a este teorema datan desde la segunda mitad del siglo XIX, no fue hasta la segunda década del siglo XX que una prueba rigurosa fue establecida por Henry Roy Brahana [8]. Durante un periodo de alrededor de 60 años, varios matemáticos, entre ellos Möbius y Jordan, propusieron diferentes pruebas, pero en todos los casos se encontraron razonamientos que no estaban debidamente justificados.

Un hecho muy importante del cual depende este teorema de clasificación es que todas las superficies deben estar trianguladas. Intuitivamente, una superficie se dice *triangulada* si es homeomorfa a un espacio obtenido al pegar triángulos a lo largo de sus aristas, en otras palabras, si la superficie se puede deformar hasta obtener un poliedro cuyas caras sean triángulos. En esta situación es posible hacer un número finito de cortes a lo largo de curvas cerradas en el poliedro (o también en la superficie misma) obteniendo un polígono con pares de aristas identificadas. En la figura 1 se observa este procedimiento para el caso del *doble Toro*¹

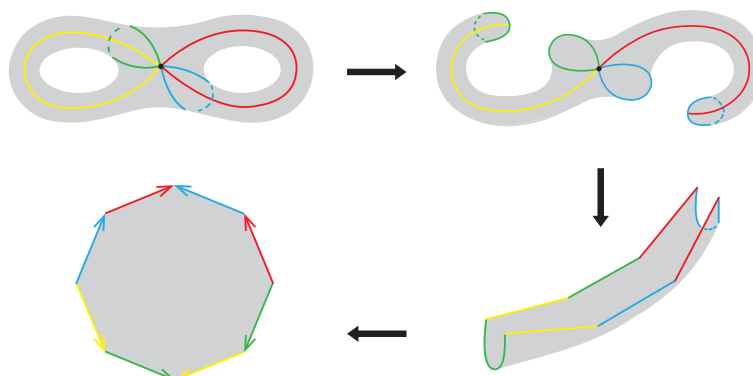


Figura 1.

Al polígono obtenido suele llamársele una *triangulación* de la superficie. Es preciso mencionar que todos los artículos antes de 1925 asumían que las superficies estaban trianguladas. Fue el matemático Húngaro Tibor Radó quién en ese mismo año suministro la primera prueba detallada de esta propiedad para el caso de las superficies compactas. En particular, estas admiten triangulaciones finitas por ser conjuntos cerrados y acotados.

La importancia de lo anterior es que permite trasladar el proceso de clasificación de superficies compactas al proceso de clasificar espacios cocientes de polígonos identificando pares de aristas: Una vez obtenida una representación planar de la superficie se procede a reducir a este polígono a una *forma canónica* mediante un conjunto finito de transformaciones las cuales se asemejan al proceso de cortar y pegar; luego, las formas canónicas se pueden distinguir por medio de los siguientes invariantes topológicos:

- a) Su característica de Euler-Poincaré
- b) Su orientabilidad

1. Véase <https://www.youtube.com/watch?v=G1yyfPShgqw>.

Para una superficie triangulada M , si n_0 es el número de caras, n_1 es el número de aristas y n_2 es el número de vértices de alguna triangulación, entonces la característica de Euler-Poincaré² está dada por el número

$$\chi(M) = n_0 - n_1 + n_2$$

La orientabilidad es un concepto fundamental para estudiar las superficies. Intuitivamente, una superficie se dice orientable si se puede asignarle un sentido de giro *coherente* en toda la superficie, en caso contrario se dice que la superficie no es orientable. Para ver mejor esta idea considere una superficie cuyo material es transparente y sea p cualquier punto de ella. Ubique sobre este punto una moneda cuya cara se denotará por C y su sello por S . Iniciando en el lado C y partiendo del punto p , si desliza la moneda a lo largo de una curva cerrada en la superficie, cuando la moneda llegue nuevamente al punto p se tienen las siguientes posibilidades:

1. La moneda muestra el lado C
2. La moneda muestra el lado S

Si el primer caso ocurre para todos los caminos cerrados de la superficie entonces se dice que es orientable. Si ocurre el segundo, se dice que no es orientable.

A partir de algunos hechos generales sobre la teoría de superficies y de la teoría de grupos, la idea del presente trabajo es desarrollar las herramientas que permitan demostrar el teorema de clasificación de superficies compactas (sin frontera) y la relación que dicho resultado tiene con las sumas conexas de superficies. En este sentido, el primer capítulo empieza con una revisión de los conceptos topológicos necesarios para entender el teorema, incluyendo las definiciones básicas asociadas a espacios topológicos y algunas de sus propiedades. En el segundo capítulo se introduce la topología cociente la cual permitirá considerar las superficies compactas como espacios cociente de polígonos identificando pares de aristas, y definir los espacios adjuntos los cuales son la base para definir la operación de suma conexa de superficies. El tercer capítulo está destinado a las superficies sin frontera donde se presentarán algunos resultados generales asociados a este tipo de espacios. En el cuarto capítulo se definen los conceptos de *simplejo* y *complejo simplicial* los cuales darán paso a los conceptos de *realización geométrica de un complejo* y *triangulación* de una superficie, además se mostrarán las condiciones bajo las cuales un complejo corresponde a una triangulación de una superficie. El quinto capítulo se abordará el grupo fundamental el cual se empleará para definir la orientabilidad de una superficie, se verá que esta propiedad es un invariante topológico. En el capítulo seis se estudiarán los grupos de homología de complejos y los grupos de homología de espacios topológicos mediante el uso de la homología simplicial y la homología singular respectivamente; se observará la igualdad entre los grupos de homología de un complejo K y los grupos de homología de una superficie homeomorfa a la realización geométrica de K ; luego se introducirá la característica de Euler-Poincaré de superficies que admiten una triangulación y se verá su invarianza topológica. Por último, se analizarán los grupos de homología de los poliedros finitos. Para el capítulo siete, se definirán los *complejos celulares* (una extensión del concepto de complejo) y se asociará para cada complejo celular K un espacio topológico $|K|$, luego se considerarán los complejos celulares canónicos y la operación de subdivisión elemental la cual ayudará a establecer el concepto de *equivalencia* de dos complejos celulares; con base en estas ideas y algunos resultados preliminares se demostrará el teorema de clasificación. Finalmente, se concluirá el capítulo introduciendo brevemente la operación de *suma conexa* de superficies y su relación con el teorema.

Es necesario clarificar que esta tesis no cubrirá exhaustivamente todos los temas relacionados con el teorema de clasificación de superficies, sin embargo, brindará la bibliografía necesaria para profundizar en cada uno de los contenidos que se estarán presentando.

2. Note que no depende de la triangulación.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo presentará algunas nociones topológicas básicas e introducirá algunos conceptos auxiliares los cuales cumplirán un papel importante con relación al estudio de ciertos espacios topológicos. Se asumirán conocimientos sobre espacio topológicos, continuidad de una función, funciones abiertas, funciones cerradas, homeomorfismos, compacidad, propiedad Hausdorff, conexidad, conexidad por caminos, espacio segundo contable, espacio regular, entre otras. Para una exposición más detallada de estos temas se recomienda Singh [1]. Algunos espacios topológicos considerados tendrán como base un conjunto en el cual se ha definido una relación de equivalencia; por esta razón, se iniciará el estudio de este capítulo haciendo un breve repaso de dicho concepto.

1.1 Relaciones de equivalencia

Notación 1.1. Si X es un conjunto y R una relación en X , entonces xRy denotará $(x, y) \in R$

Definición 1.2. Sea X un conjunto y R una relación en X . Se dice que R es una **relación de equivalencia** en X si R satisfacen las siguientes condiciones para todo $x, y, z \in X$:

1. R es reflexiva: xRx
2. R es simétrica: Si xRy entonces yRx
3. R es transitiva: Si xRy e yRz entonces xRz

Definición 1.3. Si R es una relación de equivalencia en X , entonces para cada $a \in X$ el conjunto $[a] = \{x \in X \mid xRa\}$ se denomina la **clase de equivalencia** de a (módulo R). Se usará la notación $X/R = \{[a]_R \mid a \in X\}$ para designar al conjunto de clases de equivalencia en X .

Proposición 1.4. Si $\{R_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de relaciones de equivalencia definidas en un conjunto X , entonces la relación R definida por

$$R = \bigcap_{\alpha \in I} R_\alpha$$

es una relación de equivalencia en X .

De las diferentes relaciones de equivalencia que se pueden definir en un conjunto, se desea destacar una en particular, conocida como la *relación de equivalencia generada por una relación*, la cual desempeña un papel importante en el análisis de algunos espacios topológicos.

Definición 1.5. Sea R una relación en un conjunto X . La **relación de equivalencia generada por R** , denotada por \hat{R} , se define como la intersección de todas las relaciones de equivalencia en X que contienen a R . En símbolos:

$$\hat{R} = \bigcap_{N \in T} N$$

donde T es el conjunto de todas las relaciones de equivalencia que contienen a R .

Observación 1.6.

1. $T \neq \emptyset$ dado que $X \times X \in T$

2. Para $x, y \in X$, $(x, y) \in \acute{R}$ es equivalente a alguna de las siguientes condiciones
- $x = y$
 - $(x, y) \in R$ ó $(y, x) \in R$
 - Existen $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tal que $x_1 = x$, $y = x_n$ y $(x_k, x_{k+1}) \in R$ ó $(x_{k+1}, x_k) \in R$ para $k = 1, \dots, n-1$.

Sea R' la relación de equivalencia generada por una relación R en un conjunto X , y

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/R' \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

la proyección canónica la cual envía cada elemento $x \in X$ a su respectiva clase de equivalencia. En muchas situaciones, se requerirá definir funciones con dominio en X/R' satisfaciendo ciertas propiedades. Para este fin, se tiene el siguiente teorema en el cual interviene el concepto de *fibra de una función*.

Definición 1.7. Sea $f: X \longrightarrow Y$ una función. Un subconjunto $U \subseteq X$ se dice **saturado con respecto a f** si $U = f^{-1}(f(U))$.

Observación 1.8.

- Si f es sobreyectiva entonces $f^{-1}(V) \subseteq X$ es saturado para cada $V \subseteq Y$ ya que

$$f^{-1}(f(f^{-1}(V))) = f^{-1}(V)$$

Definición 1.9. Sean X, Y, Z conjuntos, $f: X \longrightarrow Y$ una función e $y \in Y$. Al subconjunto $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ se le llama **fibra de f en el punto y** . Si $g: X \longrightarrow Z$ es una función tal que

$$g(f^{-1}(\{y\})) = \{z_y\}$$

es unipuntual para cada fibra de f , entonces se dice que g es constante en las fibras de f .

Observación 1.10. Si g es constante en las fibras de f entonces para $x, y \in X$, se tiene que $g(x) = g(y)$ siempre que $f(x) = f(y)$.

Teorema 1.11. Sea R una relación en un conjunto X y \acute{R} la relación de equivalencia generada por R . Si $f: X \longrightarrow Y$ es una función tal que $f(x) = f(y)$ para todo $(x, y) \in R$, entonces existe una función $\tilde{f}: X/\acute{R} \longrightarrow Y$, única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ X/\acute{R} & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

Demostración. Si f es una función tal que $f(x) = f(y)$ para todo $(x, y) \in R$, entonces es posible definir la función

$$\begin{aligned} \tilde{f}: X/\acute{R} &\longrightarrow Y \\ [x] &\longrightarrow \tilde{f}([x]) = f(x) \end{aligned}$$

Si $y \in X$ es tal que $(x, y) \in \acute{R}$, entonces puede comprobarse en cualquier caso que

$$\begin{aligned} \tilde{f}([x]) &= f(x) \\ &= f(y) \\ &= \tilde{f}([y]) \end{aligned}$$

esto es, \tilde{f} está bien definida y ciertamente se tiene que $\tilde{f} \circ \pi = f$. Por último, si g es otra función tal que $g \circ \pi = f$, entonces para $x \in X$ se observa que

$$\begin{aligned} g \circ \pi(x) &= g([x]) \\ &= f(x) \\ &= \tilde{f}([x]) \end{aligned}$$

de modo que $\tilde{f} = g$. □

1.2 Espacios métricos y espacios normados

Otro tipo de espacios a tener en cuenta son aquellos cuya estructura topológica está inducida por una *métrica* o *norma*.

Definición 1.12. Un **espacio métrico** es un par ordenado (X, d) donde X es un conjunto no vacío y $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, una función llamada *métrica* o *distancia*, la cual asigna a cada par $(x, y) \in X \times X$, un número real $d(x, y)$ y tal que para todo $x, y, z \in X$:

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$; desigualdad triangular

Ejemplo 1.13. Sea $X = \mathbb{R}^n$ y $d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

para $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en \mathbb{R}^n . El espacio (\mathbb{R}^n, d) es conocido como el espacio métrico *euclidiano*.

Ejemplo 1.14. Sea X un conjunto con al menos dos elementos. La función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

se le conoce como la métrica discreta y al espacio métrico (X, d) se le llama espacio métrico *discreto*.

Un concepto asociado a los espacios métricos es el de **ϵ -vecindad de un punto**.

Definición 1.15. Sea (X, d) un espacio métrico, $a \in X$ y ϵ un número real positivo. El conjunto

$$B(a, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) < \epsilon\}$$

se denomina **ϵ -vecindad abierta del punto a** . De manera similar, el conjunto

$$B[a, \epsilon] = \{x \in X \mid d(x, a) \leq \epsilon\}$$

se denomina **ϵ -vecindad cerrada del punto a** . Por último, el conjunto

$$S(a, \epsilon) = \{x \in X \mid d(x, a) = \epsilon\}$$

se denomina **esfera de centro a y radio ϵ** .

A los conjuntos $B(a, \epsilon)$, $B[a, \epsilon]$ también se les conoce respectivamente como **bola abierta**, **bola cerrada**, de centro a y radio ϵ .

Definición 1.16. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Se dice que A es **acotado** en X si existen $x_0 \in X$ y $0 < \epsilon < \infty$ tal que $A \subseteq B(x_0, \epsilon)$.

Notación 1.17. Cuando $a = (0, \dots, 0_n)$ y $\epsilon = 1$, se denotará $B[a, \epsilon]$ por \mathbb{B}^n y $S(a, \epsilon)$ por \mathbb{S}^{n-1} . En tal caso se suele llamar \mathbb{B}^n la bola unitaria y \mathbb{S}^{n-1} la esfera unitaria.

Si (X, d) es un espacio métrico entonces la colección

$$\{B(x, \epsilon) \mid x \in X, \epsilon > 0\}$$

constituye una base para una topología en dicho espacio, es decir, para $U \subseteq X$, se tiene que U es abierto si y solo si para todo $x \in U$ existe $\epsilon_x > 0$ tal que $B(x, \epsilon_x) \subseteq U$; en particular, las bolas abiertas (resp. cerradas) son conjuntos abiertos (resp. cerrados) en (X, d) . En el caso del espacio métrico euclidiano (\mathbb{R}^n, d) definido en el ejemplo 1.13 se dice que (\mathbb{R}^n, d) posee la *topología usual*.

Definición 1.18. Sea X un espacio vectorial sobre un campo K , donde K es \mathbb{R} o \mathbb{C} . Una **norma en X** es una función, $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbb{R}$, cuyo valor para cada $x \in X$ se denota por $\|x\|$, y la cual satisface las siguientes propiedades para todo $x, y \in X$:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo $\alpha \in K$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Al par $(X, \| \cdot \|)$ se le denomina *espacio vectorial normado*

De 4 se sigue que

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$$

Si se define

$$\begin{aligned} d: X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y) = \|x - y\| \end{aligned}$$

entonces se observa que d es una métrica. Así, cada espacio normado es inmediatamente un espacio métrico. En este caso, la métrica asociada a una norma es invariante bajo *traslaciones*, esto es,

$$d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

para todo $x, y, z \in X$.

Ejemplo 1.19. El par $(\mathbb{R}^n, \| \cdot \|)$ donde

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, es un espacio normado. En este caso la métrica inducida por la norma es precisamente la métrica del espacio euclidiano del ejemplo 1.13.

1.3 Funciones continuas

El objetivo de esta sección es recordar el concepto de función continua entre espacios topológicos, sus propiedades elementales e introducir los conceptos de *conjunto saturado* y *retractos*.

Definición 1.20. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función entre espacios topológicos. Se dice que f es una **función continua** en el punto $x \in X$, si para cada vecindad abierta V de $f(x)$ existe una vecindad abierta U de x tal que $f(U) \subseteq V$. Si f es continua para todo $x \in X$ entonces se dice que f es continua.

La siguiente caracterización sobre funciones continuas es una de las herramientas más útiles para estudiar la continuidad de una función $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos.

Teorema 1.21. Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es continua
2. La imagen inversa de cada conjunto abierto en Y es abierto en X
3. La imagen inversa de cada conjunto cerrado en Y es cerrado en X
4. La imagen inversa de cada miembro de una base(subbase) \mathcal{B} para Y es un abierto en X .

Proposición 1.22. Sean $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ topologías definidas en un mismo conjunto X no vacío. Luego la función identidad $\text{Id}: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es continua si y solo si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$.

Ejemplo 1.23. Sea $\text{Id}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ donde \mathcal{T}_1 es la topología usual en \mathbb{R} y \mathcal{T}_2 es la topología cofinita

$$\mathcal{T}_2 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A = \emptyset \text{ ó } \mathbb{R} \setminus A \text{ es finito}\}$$

Si $U \in \mathcal{T}_2$ es un conjunto no vacío y distinto de \mathbb{R} entonces $\mathbb{R} \setminus U$ es finito, lo cual implica que $\mathbb{R} \setminus U$ es cerrado en \mathcal{T}_1 y por tanto $\mathbb{R} \setminus (\mathbb{R} \setminus U) = U \in \mathcal{T}_1$; no obstante, $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ y en consecuencia Id es continua de acuerdo a la proposición 1.22.

El próximo lema se conoce comúnmente como el **lema del pegado**.

Lema 1.24. Sean X, Y espacios topológicos y $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de subconjuntos abiertos de X tal que $X = \bigcup A_\alpha$. Si para cada índice α , $f_\alpha: A_\alpha \rightarrow Y$ es continua y es tal que $f_\alpha|_{A_\alpha \cap A_\beta} = f_\beta|_{A_\alpha \cap A_\beta}$ para todo α, β ; entonces la función f definida por $f|_{A_\alpha} = f_\alpha$ es continua.

Observación 1.25. Existe también una versión del lema del pegado para conjuntos cerrados, sin embargo, en este caso el conjunto I debe ser finito.

Definición 1.26. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$ un subespacio. Se dice que A es un **retracto** de X si existe una retracción de X en A , esto es, una función continua $r: X \rightarrow A$ tal que $r \circ i = \text{Id}_A$, donde $i: A \hookrightarrow X$ es la inclusión. Se dice que A es un **retracto** de una **vecindad**^{1.1} de X si A es el retracto de una vecindad U de A en X .

Observación 1.27.

1. Si U es una vecindad de A entonces U es vecindad de cada punto de A y en consecuencia $A \subseteq \text{Int}U$. Por tanto, si A es un retracto de U se sigue que A es también un retracto de $\text{Int}U$. Lo anterior muestra que la vecindad U de la definición anterior se puede tomar siempre abierta.

Ejemplo 1.28.

- Un espacio X es un retracto de sí mismo.
- Sea $\mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Entonces \mathbb{S}^1 es un retracto de la vecindad abierta \mathbb{B}^2 . En este caso la función continua

$$\begin{aligned} r: \mathbb{B}^2 \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ x &\longmapsto x/\|x\| \end{aligned}$$

^{1.1} Un subconjunto V de un espacio topológico X se dice que es una **vecindad** de X si para cada $x \in V$ existe un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq V$.

es una retracción de $\mathbb{B}^2 \setminus \{0\}$ en \mathbb{S}^1 .

1.4 Funciones abiertas, cerradas y homeomorfismos

En conexión con las funciones continuas, las funciones abiertas, cerradas, y los homeomorfismos, proporcionan condiciones que permiten reconocer la estructura de los espacios topológicos, entre ellos las superficies.

Definición 1.29. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es **abierto** si para cualquier abierto $U \subseteq X$, la imagen $f(U)$ es abierto en Y . Similarmente, se dice que f es **cerrada** si la imagen de cada conjunto cerrado en X es cerrado en Y .

Ejemplo 1.30. Si $A \subseteq X$, entonces la inclusión $i: A \hookrightarrow X$ es abierta (respect. cerrada) si y solo si A es abierto (respect. cerrado) en X .

Ejemplo 1.31. Una función abierta (resp. cerrada) no es necesariamente continua. La función identidad $\text{Id}: (X, \mathcal{T}_1) \rightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ es abierta si y solo si $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ y es continua si y solo si $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$. En particular, cuando $X = \mathbb{R}$, \mathcal{T}_2 es la topología usual y \mathcal{T}_1 es la topología definida por

$$\mathcal{T}_1 = \{U \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tal que } [x, x+r] \subseteq U\}$$

se sigue que $\text{Id}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ es continua, pero no es abierta ni cerrada: la imagen directa del conjunto abierto y cerrado $[a, b]$ no es abierto ni cerrado respecto a la topología usual. Por otra parte, $\text{Id}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ no es continua, pero sí es abierta y cerrada.

Al espacio $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ se le conoce como la **recta de Sorgenfrey** y se suele denotar por \mathbb{R}_l .

Aunque los ejemplos anteriores muestran la independencia de los conceptos de función abierta, función cerrada, para una función biyectiva $f: X \rightarrow Y$, dichos conceptos son equivalentes, lo cual puede deducirse a partir del hecho que $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$.

Teorema 1.32. Una función $f: X \rightarrow Y$ es abierta si y solo si f envía cada miembro de un base para la topología de X en un abierto en Y

Demostración. La primera implicación es inmediata. Recíprocamente, si $U \subseteq X$ es abierto y \mathcal{B} es una base para X entonces existe $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$$

en cuyo caso

$$\begin{aligned} f(U) &= f\left(\bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha\right) \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} f(V_\alpha) \end{aligned}$$

es abierto en Y . □

Teorema 1.33. Una función $f: X \rightarrow Y$ es cerrada si y solo si para cada subconjunto $V \subseteq Y$ y para cada abierto $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$, existe un conjunto abierto $W \subseteq Y$ el cual contiene a V y es tal que $f^{-1}(W) \subseteq U$.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ cerrada, $V \subseteq Y$ un subconjunto, y $U \subseteq X$ abierto tal que $f^{-1}(V) \subseteq U$. Como f es cerrada, el conjunto $f(X \setminus U)$ es cerrado en Y , y por tanto, $W = Y \setminus f(X \setminus U)$ es abierto en Y . Por otra parte, dado que $X \setminus U \subseteq X \setminus f^{-1}(V)$, entonces se obtiene que

$$f(X \setminus U) \subseteq f(X \setminus f^{-1}(V))$$

lo cual implica que

$$V \cap f(X \setminus U) \subseteq V \cap f(X \setminus f^{-1}(V))$$

y en consecuencia,

$$V \cap f(X \setminus U) = \emptyset$$

de donde se concluye que

$$V \subseteq Y \setminus f(X \setminus U) = W$$

y

$$\begin{aligned} f^{-1}(W) &= f^{-1}(Y \setminus f(X \setminus U)) \\ &= X \setminus f^{-1}(f(X \setminus U)) \\ &\subseteq X \setminus (X \setminus U) \\ &= U \end{aligned}$$

Recíprocamente, si f cumple dicha condición y $U \subseteq X$ es cerrado, entonces para $y \in Y \setminus f(U)$, se observa que $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X \setminus U$, el cual es abierto de modo que existe $V \subseteq Y$ abierto tal que $\{y\} \subseteq V, f^{-1}(V) \subseteq X \setminus U$. Así, $y \in V \subseteq Y \setminus f(U)$, y por tanto $Y \setminus f(U)$ es abierto, esto es, $f(U)$ es cerrado. \square

Definición 1.34. Sean X, Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se dice que es un **homeomorfismo** si f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas. En este caso, se dice que los espacios X, Y son homeomorfos, lo cual se suele denotar por $X \cong Y$ ó $f: X \cong Y$.

Proposición 1.35. Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es un homeomorfismo.
2. f es continua y abierta.
3. f es continua y cerrada.

Ejemplo 1.36. Cualquier bola abierta en \mathbb{R}^n es homeomorfa a \mathbb{R}^n . En efecto, sea $p \in \mathbb{R}^n$ y considere la bola abierta

$$B(p, \epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \epsilon\}$$

La función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n &\rightarrow B(p, \epsilon) \\ x &\mapsto \epsilon x / (1 + \|x\|) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo de \mathbb{R}^n en $B(p, \epsilon)$ cuya continuidad se sigue fácilmente de las propiedades elementales de funciones continuas. Su inversa está dada por

$$\begin{aligned} f^{-1}: B(p, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto x / (\epsilon - \|x\|) \end{aligned}$$

Como una consecuencia inmediata de este hecho se obtiene que cualquier par de bolas abiertas en \mathbb{R}^n son homeomorfas.

Ejemplo 1.37. La función $\text{Id}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ del ejemplo 1.23 es biyectiva y continua, sin embargo, no es un homeomorfismo ya que no es abierta, o bien porque $\mathcal{T}_1 \neq \mathcal{T}_2$.

Definición 1.38. Sean X, Y espacios topológicos. Se dice que $f: X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo local** si para todo $x \in X$ existe un abierto $U_x \subseteq X$ tal que $x \in U_x, f(U_x) = V_x$ es abierto en Y y $f|_{U_x}: U_x \rightarrow V_x$ es un homeomorfismo. Cuando f posee dicha propiedad se dice entonces que X es localmente homeomorfo a Y .

Proposición 1.39. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local entonces f es continua y abierta.

Demostración. Dado $x \in X$ existen abiertos $U_x \subseteq X$, $V_x \subseteq Y$ tal que $f|_{U_x}: U_x \rightarrow V_x$ es un homeomorfismo. Sea V una vecindad abierta de $f(x)$ en Y , luego $V \cap V_x$ es una vecindad abierta de $f(x)$ en Y de modo que por la continuidad de $f|_{U_x}$ existe $U \subseteq U_x$ con $x \in U$ y $f(U) \subseteq V \cap V_x$; puesto que U es abierto en U_x y este último es abierto en X entonces U es abierto en X en cuyo caso $f(U) \subseteq V$ y por tanto f es continua en x . Ahora, si $U \subseteq X$ es abierto entonces para cada $x \in U$ existen abiertos $U_x \subseteq X$, $V_x \subseteq Y$ los cuales son homeomorfos a través de f ; esto implica que $f(U \cap U_x)$ es abierto en V_x y por tanto abierto en Y ; luego como

$$f(U) = \bigcup_{x \in U} f(U \cap U_x)$$

entonces $f(U)$ es abierto en Y . En consecuencia, f es abierta. \square

Ejemplo 1.40. Es claro que todo homeomorfismo es un homeomorfismo local, sin embargo, no todo homeomorfismo local es un homeomorfismo: Sean $X = \{1\}$, $Y = \{2, 3\}$ espacios topológicos discretos, luego como la función

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ 1 &\longmapsto f(1) = 2 \end{aligned}$$

posee como rango un espacio discreto entonces f es continua. Más aún, como $\{2\}$ es abierto en Y , entonces f es abierta, de modo que f es un homeomorfismo sobre su imagen $f(X)$, sin embargo, f no es un homeomorfismo de X en Y ya que ambos conjuntos poseen diferente cardinalidad.

1.5 Invariantes topológicos

En esta sección se hará un breve repaso de algunas propiedades topológicas así como se establecerán las condiciones bajo las cuales estas se preservan por medio de funciones continuas y homeomorfismos. En el primer caso se dice que la propiedad es un *invariante continuo* y en el segundo caso se dice que la propiedad es un *invariante topológico*. Note que todo invariante continuo es un invariante topológico, más no todo invariante topológico es un invariante continuo (se mostrará un ejemplo de esto más adelante).

1.5.1 Conexidad

Una de las características principales de las superficies es que estas son conexas, lo cual, como se verá, tiene repercusiones importantes en cuanto a la estructura topológica de estos espacios. Intuitivamente, se puede pensar los espacios conexos como aquellos que están formados por una sola pieza.

Definición 1.41. Sea X un espacio topológico. Se dice que X es **disconexo** si X puede expresarse como la unión de dos subconjuntos disjuntos, no vacíos y abiertos. En caso contrario, se dice que X es **conexo**.

Observación 1.42.

1. Si $X = A \cup B$, donde A, B son no vacíos, disjuntos y abiertos, entonces al par $\{A, B\}$ se le llama una desconexión de X . En este caso, se observa que A, B son también cerrados pues $A = X \setminus B$, $B = X \setminus A$.
2. Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio conexo se dice conexo si A considerado como subespacio de X cumple dicha propiedad.

El siguiente teorema permite caracterizar los espacios conexos.

Teorema 1.43. Sea X un espacio. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es conexo

2. X y \emptyset son los únicos subconjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente.
3. Cualquier función continua de X en un espacio discreto es constante.

Ejemplo 1.44. La recta de Sorgenfrey introducida en el ejemplo 1.31 es desconexo. En este caso, \mathbb{R}_l es la unión de los conjuntos abiertos disjuntos $\{x \mid x < a\}$, $\{x \mid x \geq a\}$.

Ejemplo 1.45. Un espacio trivial es conexo mientras que un espacio discreto con más de un punto no lo es.

Ejemplo 1.46. Subespacios de espacios conexos no son necesariamente conexos. Por ejemplo, considere \mathbb{R} con la topología usual. $\{0, 1\}$ visto como subespacio de \mathbb{R} es un espacio discreto y por tanto desconexo de acuerdo al ejemplo 1.54.

Observación 1.47. Se puede probar que un subconjunto no vacío A de \mathbb{R} es conexo si y solo si A es un intervalo. En particular, \mathbb{R} es conexo.

Teorema 1.48. Si $f: X \rightarrow Y$ es función continua entre espacios topológicos y X es conexo, entonces $f(X)$ es conexo. Así, la conexidad es un invariante continuo.

Demostración. Si $f(X)$ es desconexo entonces existen abiertos no vacíos U, V en Y tales que $f(X) \cap U$ y $f(X) \cap V$ son no vacíos, disjuntos, y

$$f(X) = (f(X) \cap U) \cup (f(X) \cap V)$$

Luego, de la continuidad de f se sigue que $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos en X , por lo que

$$X = (X \cap f^{-1}(U)) \cup (X \cap f^{-1}(V))$$

donde $X \cap f^{-1}(U)$, $X \cap f^{-1}(V)$ son conjuntos no vacíos, disjuntos y abiertos en X ; lo cual contradice el hecho de que X es conexo. \square

Corolario 1.49. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo y X es conexo entonces Y es conexo. Así, la conexidad es un invariante topológico.

Proposición 1.50. Sea X un espacio topológico. Si $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subconjuntos no vacíos conexos de X tal que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ para todo $i, j \in I$, entonces

$$A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$$

también es un subconjunto conexo de X .

De acuerdo a la proposición anterior, para cada $x \in X$ existe un subconjunto maximal conexo que contiene a x , a saber, la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x . Esto da lugar al siguiente concepto:

Definición 1.51. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. La **componente conexa**, $C(x)$, de x en X es la unión de todos los subconjuntos conexos de X que contienen a x .

Observación 1.52.

1. De acuerdo a la proposición 1.50 se tiene que la componente $C(x)$ de x en X es conexa. Más aún, $C(x)$ es un subconjunto maximal conexo de X , esto es, no existe un subconjunto conexo A en X tal que $x \in A$ y $C(x)$ es un subconjunto propio de A .
2. Si $C(x), C(y)$ son las componentes conexas de puntos $x, y \in X$ y $z \in C(x) \cap C(y)$, entonces $C(x) \cup C(y)$ es conexo, lo cual implica, por la maximalidad de $C(x), C(y)$, que $C(x) \subseteq C(y)$ y $C(y) \subseteq C(x)$, es decir, $C(y) = C(x)$. Por tanto, las componentes conexas del espacio X forman una partición del conjunto X .

3. X es conexo si y solo si no tiene más de una componente conexa.
4. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, y $C(x)$ es la componente de $x \in X$ entonces se observa que $f(C(x)) \subseteq C(f(x))$. Si además f es un homeomorfismo entonces se obtiene $f^{-1}(C(f(x))) \subseteq C(x)$, de modo que $f(C(x)) = C(f(x))$. En particular, se observa que el número de componentes conexas se preserva bajo homeomorfismos.

Ejemplo 1.53. Un espacio conexo X posee una sola componente conexa, a saber, el mismo X . Por otra parte, las componentes conexas en un espacio discreto D son los singuletes $\{x\}$ para todo $x \in D$.

1.5.2 Conexidad por caminos

La conexidad por caminos es una propiedad de las superficies la cual facilita el estudio de estos espacios. Dicha propiedad será importante para entender la estructura de otros espacios topológicos que serán introducidos más adelante.

Definición 1.54. Sea X un espacio topológico. Un **camino en X** es una función continua,

$$f: [a, b] \rightarrow X$$

donde $[a, b]$ es un intervalo cerrado de \mathbb{R} . Al punto $f(a)$ se le denomina **punto inicial** de f mientras que a $f(b)$ se le denomina **punto final** de f .

Observación 1.55.

1. En la definición se considera $[a, b]$ como subespacio de \mathbb{R} con la topología usual.
2. Se suele decir que f es un camino que conecta los puntos $f(a), f(b)$.
3. Es preciso indicar que f y su trazo $f([a, b])$ son objetos distintos.
4. Es común tomar $a = 0$ y $b = 1$. En adelante, se fijarán estos valores para a y b ^{1.2}.
5. Sean $x, y \in X$. Si $f: [0, 1] \rightarrow X$, es un camino que une a x con y , entonces la función

$$\begin{aligned} g: [0, 1] &\rightarrow X \\ t &\mapsto g(t) = f(1 - t) \end{aligned}$$

es un camino que une a y con x , llamado el **camino opuesto** de f el cual suele denotarse por \bar{f} . Note que $\bar{f}(0) = f(1)$ y $\bar{f}(1) = f(0)$.

6. Si f es inyectiva se dice que f es un **camino simple**.
7. Un camino $f: [0, 1] \rightarrow X$ se dice cerrado si $a = f(0) = f(1)$. En dicho caso se suele decir que f es un **camino cerrado basado en a** .
8. Un camino cerrado $f: [0, 1] \rightarrow X$, es simple si f es inyectiva en $[0, 1)$.

Definición 1.56. Un espacio topológico X es **conexo por caminos** si para cada par de puntos $x, y \in X$, existe un camino en X que une a x con y .

Proposición 1.57. Un espacio X es conexo por caminos si y solo si existe $x_0 \in X$ tal que para cada $x \in X$ existe un camino que conecta a x con x_0 .

Demostración. La primera implicación es consecuencia inmediata de la definición de la conexidad por caminos. Para el recíproco, sean $x, y \in X$. Si

$$f: [0, 1] \rightarrow X$$

$$g: [0, 1] \rightarrow X$$

^{1.2}. Note que la función $f: [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $f(t) = a + (b - a)t$, es un homeomorfismo.

son caminos que conectan a x con x_0 , y x_0 con y , respectivamente, entonces la función (conocida como la *concatenación* de los caminos f y g) definida por

$$h: [0, 1] \longrightarrow X$$

$$t \longmapsto \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es continua por el lema del pegado, y es tal que $h(0) = x$, $h(1) = y$, esto es, h es un camino que conecta a x con y . \square

Ejemplo 1.58. Cualquier espacio trivial es conexo por caminos.

Teorema 1.59. Si un espacio topológico X es conexo por caminos entonces es conexo.

Ejemplo 1.60. Sea S el subconjunto del plano definido por

$$S = \{(x, \operatorname{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$$

En este caso, $\bar{S} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup S$. Más aún, \bar{S} es conexo pero no es conexo por caminos. En particular, note que no existe un camino que conecte a los puntos $(0, 0)$ y $(1/\pi, 0)$.

Ejemplo 1.61. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Se dice que A es **convexo** si para todo $x, y \in A$, el segmento de recta entre x e y , a saber, el conjunto

$$\{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

se contiene en A . Si A es un subespacio convexo de \mathbb{R}^n entonces A es conexo por caminos: Dados $x, y \in A$ se observa que la función

$$f: [0, 1] \longrightarrow A$$

$$t \longmapsto (1-t)x + ty$$

es un camino de x a y . Es fácil probar que las bolas abiertas (resp. bola cerradas) en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^n son convexos. Por tanto, estos también son conexos por caminos (y por tanto son también conexos).

Ejemplo 1.62. $\mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ es conexo por caminos. En efecto, sean $p, q \in \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y considere la función

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$t \longmapsto p + t(q - p)$$

Si $(0, 0) \notin f([0, 1])$, entonces es claro que f es un camino (el segmento) que conecta a p y q . Si $(0, 0) \in f([0, 1])$, entonces considere un punto $u \in \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, que no pertenezca a la recta determinada por p y q , luego sea

$$g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

el segmento que conecta a p con u y

$$h: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

el segmento que conecta a u con q ; luego la función definida por

$$r: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{B}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$t \longmapsto \begin{cases} g(2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ h(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino que conecta a p con q .

Del ejemplo anterior y del ejemplo 1.36 se sigue cualquier bola abierta sin su centro es conexa por caminos.

Ejemplo 1.63. Subespacios de espacios conexos por caminos no son necesariamente conexos por caminos: \mathbb{R} es conexo por caminos, sin embargo, el subespacio $\{0, 1\}$ no puede ser conexo por caminos de acuerdo al teorema 1.59 y al ejemplo 1.46.

Teorema 1.64. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos y X es conexo por caminos, entonces $f(X)$ es conexo por caminos. Así, la conexidad por caminos es un invariante continuo.

Como una consecuencia de la proposición 1.57, se tiene:

Corolario 1.65. La unión de una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subespacios conexos por caminos de un espacio X con un punto en común es conexo por caminos.

Similar al caso de las componentes conexas se tiene el concepto de componentes conexas por caminos:

Definición 1.66. Sea X un espacio y $x \in X$. La **componente conexa por caminos**, $P(x)$, de x es la unión de todos los conjuntos conexos por caminos de X que contienen a x .

Se puede verificar que las componentes conexas por caminos del espacio X forman una partición del conjunto X y que X es conexo por caminos si y solo si X no posee más de una componente conexa por caminos.

Otra característica importante de las superficies es que estas son espacios Hausdorff. Intuitivamente, esta propiedad se asegura que un espacio topológico tenga suficientes subconjuntos abiertos de modo de cada par de puntos distintos esten *separados* por medio de conjuntos abiertos disjuntos.

1.5.3 Espacios Hausdorff

Definición 1.67. Un espacio topológico X se dice T_1 si para cada par de puntos $x, y \in X$ existen abiertos U, V tal que $x \in U, y \notin V, y \in V, x \notin V$.

Definición 1.68. Un espacio topológico X se dice T_2 o **Hausdorff** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ existen abiertos U, V , en X tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Definición 1.69. Un espacio topológico X se dice T_3 si para todo $x \in X$ y todo subespacio $A \subseteq X$ cerrado con $x \notin A$, existen abiertos U, V tal que $x \in U$ y $A \subseteq V$. X se dice **regular** si X es T_1 y T_3 .

Ejemplo 1.70. Cualquier espacio discreto es Hausdorff y cualquier espacio trivial con más de un punto es T_3 (por vacuidad), pero no es T_1 ni tampoco T_2 .

Ejemplo 1.71. Subespacios de espacios Hausdorff son Hausdorff: Si $A \subseteq X$ es un subespacio y X es Hausdorff entonces dados $x, y \in A$, existen abiertos U, V en X tales que $U \cap V = \emptyset, x \in U, y \in V$; luego, $A \cap U, A \cap V$ son conjuntos disjuntos, abiertos en A , los cuales contiene a x, y , respectivamente.

Ejemplo 1.72. Si A es un subespacio de un espacio regular X entonces A es regular. En efecto, sea $x \in A$ y $B \subseteq A$ cerrado, luego $x \in X$ y existe U cerrado en X tal que $B = U \cap A$. Como X es regular entonces existen abiertos disjuntos V, W , tales que $U \subseteq V$, $x \in W$; luego $A \cap W$ y $V \cap A$ son abiertos disjuntos de A tales que $x \in A \cap W$ y $B \subseteq V \cap A$. Por otra parte, si $x, y \in A$ son dos puntos distintos entonces existen abiertos U, V en X tales que $x \in U$, $y \notin U$, $y \in V$, $x \notin V$; luego $A \cap U, A \cap V$ son abiertos en A tales que $x \in A \cap U$, $y \notin A \cap U$, $y \in A \cap V$, $x \notin A \cap V$.

Ejemplo 1.73. La imagen $f(X)$ de una función continua $f: X \rightarrow Y$ con dominio en un espacio Hausdorff no es necesariamente Hausdorff: La función

$$\text{Id}: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$$

definida en el ejemplo 1.23 es continua donde $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1)$ es Hausdorff; sin embargo, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_2)$ no es un espacio Hausdorff: Dados $x, y \in \mathbb{R}$, $U, V \in \mathcal{T}_2$ con $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$, se sigue en particular que $V \subseteq \mathbb{R} \setminus U$, lo cual implica que V es finito y en consecuencia $V \notin \mathcal{T}_2$, lo cual es una contradicción. En consecuencia, la propiedad Hausdorff no es un invariante continuo.

Teorema 1.74. Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva y cerrada. Si X es Hausdorff entonces Y es Hausdorff.

Demostración. Sean $u, v \in Y$, $u \neq v$. Si f es biyectiva entonces existen $x, w \in X$, $x \neq w$, tales que $f(x) = u$, $f(w) = v$. Como X es Hausdorff, existen abiertos U, V , en X tales que $x \in U$, $w \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; lo cual implica que $X \setminus U, X \setminus V$ son conjuntos cerrados y por tanto

$$\begin{aligned} f(X \setminus U) &= Y \setminus f(U) \\ f(X \setminus V) &= Y \setminus f(V) \end{aligned}$$

son cerrados en Y , es decir, $f(U), f(V)$ son abiertos en Y . Más aún, $u \in f(U)$, $v \in f(V)$ y $f(U) \cap f(V) = \emptyset$: si $y \in f(U) \cap f(V)$, entonces existen $a \in U, b \in V$, tales que $f(a) = y = f(b)$ lo cual contradice la inyectividad de f . \square

Teorema 1.75. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua e inyectiva y Y es Hausdorff entonces X es Hausdorff

Lema 1.76. Si X es T_1 entonces $\{x\}$ es cerrado para todo $x \in X$.

Demostración. Para cada $y \in X \setminus \{x\}$ existe U_y abierto en X tal que $x \notin U_y$; luego

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} U_y$$

de modo que $X \setminus \{x\}$ es abierto y en consecuencia $\{x\}$ es cerrado. \square

Teorema 1.77. Todo espacio regular es Hausdorff.

Demostración. Sea X un espacio regular y $x, y \in X$, $x \neq y$. Como X es T_1 entonces por el lema anterior, $\{x\}, \{y\}$ son cerrados, en cuyo caso, existen abiertos disjuntos U, V , en X tales que $x \in U$, $\{y\} \subseteq V$, esto es, existen abiertos U, V disjuntos con $x \in U$, $y \in V$; así, X es Hausdorff. \square

Observación 1.78. Se puede probar que cualquier espacio métrico (X, d) es regular, en cuyo caso, por el teorema anterior se sigue que (X, d) es Hausdorff.

Proposición 1.79. Sea X un espacio regular y $x \in X$. Para cada vecindad abierta U de x , existe una vecindad abierta V de x tal que $\bar{V} \subseteq U$.

Demostración. Sea X regular y U una vecindad abierta de $x \in X$. Como $X \setminus U$ es cerrado y $x \notin X \setminus U$, entonces existen abiertos V, B en X tal que $x \in V$, $X \setminus U \subseteq B$ y $V \cap B = \emptyset$; luego, dado que $X \setminus B$ es cerrado y $V \subseteq X \setminus B$, se sigue que $\bar{V} \subseteq X \setminus B$. Notando que $X \setminus U \subseteq B$, se obtiene que $x \in \bar{V} \subseteq X \setminus B \subseteq X \setminus (X \setminus U) = U$. \square

Proposición 1.80. Sea A un subespacio cerrado de un espacio regular X . Entonces para todo $x \in X \setminus A$, existen abiertos U, V , tales que $x \in V$, $A \subseteq U$ y $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$.

Demostración. Sea X un espacio regular y $x \in X \setminus A$, luego existen abiertos disjuntos W, U , tales que $x \in W$ y $A \subseteq U$. En particular, como $A \subseteq U$ se sigue que $A \subseteq \bar{U}$. Más aún, $x \notin \bar{U}$, pues W es una vecindad abierta de x tal que $W \cap U = \emptyset$; no obstante, $X \setminus \bar{U}$ es una vecindad abierta de x y en consecuencia, por la proposición 1.85, existe una vecindad abierta V de x tal que $\bar{V} \subseteq X \setminus \bar{U}$; luego U, V son abiertos tales que $x \in V$, $A \subseteq U$ y $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. \square

1.5.4 Espacios primero y segundo contables

Un hecho crucial que permite clasificar las superficies compactas es que éstas admiten una triangulación, lo cual es posible, en cierta medida, por ser estos espacios segundo contable.

Definición 1.81. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Un sistema fundamental de vecindades de x es una colección \mathcal{B}_x de vecindades de x la cual posee la siguiente propiedad: Si V es una vecindad de x entonces existe $U \subseteq \mathcal{B}_x$ tal que $x \in U \subseteq V$. Una base local de x es un sistema fundamental de vecindades abiertas para x .

Proposición 1.82. En un espacio topológico (X, \mathcal{T}) , una colección $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq \mathcal{T}$ es una **base** para X si, y solo si, para cada conjunto abierto $U \subseteq X$ y para cada $x \in U$, existe $B_{\alpha(x)} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_{\alpha(x)} \subseteq U$.

La relación entre los conceptos de base y base local se establecen en el siguiente enunciado el cual es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

Proposición 1.83. Sea (X, \mathcal{T}) un espacio topológico. Una colección $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ es una base para X si, y solo si, para cada $x \in X$, la colección $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}$ es una base local de x .

Definición 1.84. En un conjunto X , una colección $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq P(X)$ es una **subbase** para alguna topología en X si el conjunto constituido de todas las intersecciones finitas de elementos de \mathcal{B} (adicionado X si es necesario) es base para alguna topología en X .

Proposición 1.85. Una colección $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos de un conjunto no vacío X es la subbase de una única topología en X .

Definición 1.86. Un espacio topológico X se dice **primero contable** si para cada $x \in X$ existe una base local contable \mathcal{B}_x .

Definición 1.87. Un espacio X se dice **segundo contable** si su topología posee una base contable.

Con base en la proposición 1.83 se tiene el siguiente teorema

Teorema 1.88. Todo espacio segundo contable es primero contable.

Ejemplo 1.89. Un espacio métrico (X, d) es primero contable: Dado $x \in X$, la colección

$$\mathcal{B}_x = \{B(x, 1/n)\}; n \in \mathbb{N}$$

es una base local contable de x .

Ejemplo 1.90. Sea (X, d) un espacio métrico discreto donde X es un conjunto no contable. Entonces (X, d) no es segundo contable: dado $x \in X$ se observa que

$$\{x\} = B(x, \epsilon); \epsilon \leq 1$$

es abierto en X , no obstante, si \mathcal{B} es una base para de (X, d) , es claro que $\{x\} \subseteq \mathcal{B}$ para todo $x \in X$, lo cual implica que \mathcal{B} no puede ser contable.

Ejemplo 1.91. \mathbb{R}^n con la topología usual es segundo contable: En este caso la colección

$$\mathcal{B} = \{B(x, \epsilon) \mid x \in \mathbb{Q}^n, \epsilon \in \mathbb{Q}\}$$

constituye una base contable para \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.92. La *recta de Sorgenfrey* \mathbb{R}_l es primero contable. En este caso, para cada $x \in \mathbb{R}_l$ se tiene que la colección $\mathcal{B}_x = \{[x, x+1/n); n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de x ; sin embargo, \mathbb{R}_l no es segundo contable: Si \mathcal{B} es una base de \mathbb{R}_l , entonces para cada $x \in \mathbb{R}_l$ existe $B_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$, luego para $x, y \in \mathbb{R}_l, x \neq y$, se observa que $B_x \neq B_y$ ($x = \inf B_x, y = \inf B_y$), de modo que la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ x &\longmapsto B_x \end{aligned}$$

es inyectiva y por tanto \mathcal{B} no es contable.

Ejemplo 1.93. Cualquier subespacio A de un espacio primero (segundo) contable X es primero (segundo) contable: para $x \in A$ existe una base local \mathcal{B}_x en X , luego la colección

$$\{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}_x\}$$

es una base local de x en A . Si \mathcal{B} es una base contable para X entonces la colección

$$\{A \cap B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

es una base contable para A .

Definición 1.94. Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Un *cubrimiento abierto* \mathcal{U} de A es una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de subconjuntos abiertos de X tal que

$$A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$$

Un *subcubrimiento* de un *cubrimiento abierto* $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de A es cualquier subfamilia $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ la cual es un *cubrimiento* de A con $J \subseteq I$. $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ es un *subcubrimiento contable* si J es contable.

Teorema 1.95. Sea X un espacio segundo contable. Entonces cualquier *cubrimiento abierto* de X posee un *subcubrimiento contable*.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un *cubrimiento abierto* de X y $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base contable de X . Sea

$$V = \{n \in \mathbb{N} \mid B_n \subseteq U_\alpha \text{ para algún } \alpha \in I\}$$

Si para cada $m \in V$ se toma $U_m \in \mathcal{U}$, tal que $B_m \subseteq U_m$, entonces la familia

$$\{U_m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

es contable. Más aún, dicha familia cubre a X : Dado $x \in X$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal $x \in U$. Como U_α es abierto, entonces existe $B_n \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_n \subseteq U$, de modo que $n \in V$ y $x \in B_n \subseteq U_n$. Por tanto, $\{U_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ es un *subcubrimiento contable* de \mathcal{U} . \square

Observación 1.96. Si $f: X \longrightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos y X es primero contable o segundo contable, entonces $f(X)$ no es necesariamente primero o segundo contable. En el siguiente capítulo se proporcionarán algunos ejemplos de este hecho.

Teorema 1.97. Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \longrightarrow Y$ una función continua y abierta. Si X es segundo contable entonces $f(X)$ es segundo contable.

Teorema 1.98. Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \longrightarrow Y$ una función continua y abierta. Si X es primero contable entonces $f(X)$ es primero contable.

Proposición 1.99. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un *cubrimiento abierto* de X . Entonces:

1. Si para cada $\alpha \in I$, \mathcal{B}_α es una base para $U_\alpha \in \mathcal{U}$ (U_α considerado como subespacio de X), entonces

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$$

es una base para X .

2. Si \mathcal{U} es contable y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es segundo contable entonces X es segundo contable.

Demostración.

1. Sea $V \subseteq X$ abierto y $x \in V$. Como \mathcal{U} es un cubrimiento abierto de X entonces existe $\alpha \in I$ tal que $x \in U_\alpha$, en cuyo caso, $x \in V \cap U_\alpha$, con $V \cap U_\alpha$ abierto en U_α . Como \mathcal{B}_α es una base para U_α , entonces existe $W \in \mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}$, tal que $x \in W \subseteq V \cap U_\alpha \subseteq V$. Más aún, como U_α es abierto en X entonces W es abierto en X de modo que $x \in W \subseteq V$, luego de la proposición 1.82 se concluye que \mathcal{B} es una base para X .
2. Por 1, la colección

$$\mathcal{B} = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{B}_\alpha$$

es una base para X , luego, como \mathcal{U} es contable y $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es segundo contable entonces \mathcal{B} es una unión contable de conjuntos contables y por tanto contable, así, X es segundo contable. \square

1.5.5 Compacidad

Definición 1.100. Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice compacto si cada cubrimiento de A por abiertos de X posee un subcubrimiento finito.

Ejemplo 1.101. Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ es finito entonces A es compacto.

Ejemplo 1.102. El espacio métrico euclidiano \mathbb{R}^n no es compacto. La colección de bolas abiertas de radio n y centro en el origen $0 = (0_1, \dots, 0_n)$

$$\{B(0, n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es un cubrimiento abierto de \mathbb{R}^n el cual no admite un subcubrimiento finito.

Ejemplo 1.103. Sea $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. Es claro que \mathbb{S}^n es un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n . Más aún, como $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^n = U \cup V$, donde U, V , son los conjuntos abiertos

$$\begin{aligned} U &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\} \\ V &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| > 1\} \end{aligned}$$

entonces se tiene que \mathbb{S}^n es cerrado, de modo que por el teorema de Heine-Borel se concluye que \mathbb{S}^n es compacto. El hecho de que U, V son abiertos se sigue a partir de que para cualquier punto $p \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{S}^n$, se tiene que $\epsilon = \left| \|p\| - 1 \right| > 0$, en cuyo caso $B(p, \epsilon/3)$ no intercepta a \mathbb{S}^n , esto es, $B(p, \epsilon/3) \subseteq U$ o $B(p, \epsilon/3) \subseteq V$.

Teorema 1.104. Sea $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y X compacto. Entonces A es compacto.

Demostración. Sea \mathcal{U} un cubrimiento abierto de A . Como A es cerrado entonces $X \setminus A$ es abierto, luego $(X \setminus A) \cup \mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X , no obstante, existe una subcolección finita $\mathcal{U}' \subseteq (X \setminus A) \cup \mathcal{U}$ que cubre a X . Si $(X \setminus A)$ se encuentra en \mathcal{U}' entonces la subcolección $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq \mathcal{U}'$ tal que $X \setminus A \notin \tilde{\mathcal{U}}$ es un subcubrimiento finito de A ; en caso contrario, \mathcal{U}' es un subcubrimiento finito de A ; en cualquier caso, \mathcal{U} posee un subcubrimiento finito de A y en consecuencia A es compacto. \square

Proposición 1.105. Sea $A \subseteq X$ un subespacio compacto, X Hausdorff y $x \in X \setminus A$, luego existen abiertos U, V , disjuntos tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$.

Demostración. Sea X Hausdorff, $A \subseteq X$ compacto y $x \in X \setminus A$. Para cada $a \in A$ existen abiertos U_a, V_a , tales que $x \in U_a$, $a \in V_a$ y $U_a \cap V_a = \emptyset$; lo cual implica que la colección $\{V_a \mid a \in A\}$ es un cubrimiento abierto de A y por tanto existen a_1, \dots, a_n en A tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{a_i} = V$$

Si

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{a_i}$$

entonces $U \cap V = \emptyset$ ya que $U_{a_i} \cap V_{a_i} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$; luego U, V , son conjuntos disjuntos y abiertos con $x \in U$ y $A \subseteq V$. \square

Teorema 1.106. *Sea X un espacio Hausdorff y $A \subseteq X$ un subespacio compacto. Entonces:*

1. A es cerrado
2. Si $B \subseteq X$ es otro subespacio compacto de X tal que $A \cap B = \emptyset$, entonces existen abiertos U, V , disjuntos tales que $A \subseteq U, B \subseteq V$.

Demostración.

1. Sea $x \in X \setminus A$. Por la proposición 1.105 existen abiertos U, V , tales que $x \in U, A \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$, lo cual implica que $x \in U \subseteq X \setminus V \subseteq X \setminus A$, esto es, x es un punto interior de $X \setminus A$. Como $x \in X \setminus A$ es arbitrario se obtiene que $X \setminus A$ es abierto y en consecuencia A es cerrado.
2. Sean A, B subespacios disjuntos compactos de X . De la proposición 1.105, para cada $b \in B$ existen abiertos U_b, V_b tal que $A \subseteq U_b, b \in V_b$ y $U_b \cap V_b = \emptyset$. Como la colección $\{V_b | b \in B\}$ cubre a B , entonces existen b_1, \dots, b_n en B tal que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{b_i} = V$$

luego, tomando

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_{b_i}$$

se concluye que $A \subseteq U, B \subseteq V$, y $U \cap V = \emptyset$, pues $U_{b_i} \cap V_{b_i} = \emptyset$ para todo $i = 1, \dots, n$. \square

Observación 1.107. En \mathbb{R}^n puede probarse que todo subconjunto A cerrado y acotado si y solo si A es compacto. Este resultado se conoce como el Teorema de Heine-Borel. En particular, observe que $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, sin embargo, $(0, 1)$ no es compacto pues no es un subconjunto cerrado de \mathbb{R} .

La observación anterior también permite ilustrar que subespacios de espacios compactos no son en general compactos, note que $(0, 1) \subseteq [0, 1]$

Teorema 1.108. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos. Si X es compacto entonces $f(X)$ es compacto. Así, la compacidad es un invariante continuo.*

Demostración. Sea \mathcal{U} un cubrimiento de $f(X)$ por abiertos de Y . Como la colección $\{f^{-1}(U) | U \in \mathcal{U}\}$ constituye un cubrimiento abierto de X y este es compacto entonces existe un subcubrimiento finito $\{f^{-1}(U_i)\}_{i=1}^n$ de X , de donde se obtiene que U_1, \dots, U_n cubren a $f(X)$. \square

Como consecuencia de los teoremas 1.111 y 1.112 se tiene:

Corolario 1.109. *Sea $f: X \rightarrow Y$ es una función continua entre espacios topológicos. Si X es compacto y Y es Hausdorff entonces f es cerrada. Si además, si f es una función biyectiva entonces f es un homeomorfismo.*

1.5.6 Uniones disjuntas

Definición 1.110. *Sea $G = \{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de conjuntos no vacíos. La unión disjunta de la familia G se define como el conjunto*

$$\bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X_\alpha \times \{\alpha\})$$

Definición 1.111. Sea $G = \{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos no vacíos. Sea $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ la unión disjunta de dicha familia. Entonces se define el espacio topológico (X, \mathcal{T}) donde \mathcal{T} es la topología definida por $\mathcal{T} = \{\bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}_{\alpha \in I}$, esto es, los abiertos de X son uniones disjuntas de abiertos de los espacios X_α .

Observación 1.112.

1. Para cada $\alpha \in I$, se observa que la función

$$\begin{aligned} \iota_\alpha: X_\alpha &\longrightarrow X \\ x_\alpha &\longmapsto (x_\alpha, \alpha) \end{aligned}$$

es inyectiva, continua y abierta y por tanto un homeomorfismo sobre su imagen $X_\alpha \times \{\alpha\}$. Por esta razón, se suele considerar a X_α como un subespacio de X .

2. $U \subseteq X$ es abierto si y solo si $\iota_\alpha^{-1}(U)$ es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$. En efecto, si $U \subseteq X$ es abierto entonces para cada $\alpha \in I$ existe $U_\alpha \subseteq X_\alpha$ abierto tal que

$$\begin{aligned} U &= \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \iota_\alpha(U_\alpha) \end{aligned}$$

luego, $\iota_\alpha^{-1}(U) = U_\alpha$ es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$. Recíprocamente, si $U \subseteq X$ es tal que $\iota_\alpha^{-1}(U) = U_\alpha$ es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$, entonces

$$\begin{aligned} U &= \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \\ &= \bigcup_{\alpha \in I} \iota_\alpha(U_\alpha) \end{aligned}$$

donde U_α es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$.

La unión disjunta X , junto con las inclusiones canónicas $\iota_\alpha: X_\alpha \longrightarrow X$, $\alpha \in I$, pueden caracterizarse por la siguiente propiedad universal.

Teorema 1.113. Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia indexada de espacios topológicos no vacíos, $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, Y un espacio topológico y $\{f_\alpha: X_\alpha \longrightarrow Y\}$ una familia de funciones continuas. Entonces existe una función continua $f: X \longrightarrow Y$, única tal que $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$.

$$\begin{array}{ccc} X_i & & \\ \downarrow \iota_\alpha & \searrow f_\alpha & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Demostración. Dado que para cada $x \in X$ existe un único índice $\alpha \in I$ tal que

$$\begin{aligned} x &= (x_\alpha, \alpha) \\ &= \iota_\alpha(x_\alpha) \end{aligned}$$

para algún $x_\alpha \in X_\alpha$, entonces se puede definir la función

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(\iota_\alpha(x_\alpha)) = f_\alpha(x_\alpha) \end{aligned}$$

Es claro que f está bien definida y $f \circ \iota_\alpha = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Para la continuidad, sea $V \subseteq Y$ abierto, luego como

$$\begin{aligned}\iota_\alpha^{-1}(f^{-1}(V)) &= (f \circ \alpha)^{-1}(V) \\ &= f_\alpha^{-1}(V)\end{aligned}$$

es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$ entonces de la observación 1.112 se sigue que $f^{-1}(V)$ es abierto en X y por tanto f es continua. Para la unicidad, sea $\bar{f}: X \rightarrow Y$ continua tal que $f_\alpha = \bar{f} \circ \iota_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, luego para $x \in X$ se tiene que

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \bar{f}((x_\alpha, \alpha)) \\ &= \bar{f}(\iota_\alpha(x_\alpha)) \\ &= \bar{f} \circ \iota_\alpha(x_\alpha) \\ &= f_\alpha(x_\alpha) \\ &= f((x_\alpha, \alpha)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

donde $\alpha \in I$ es el único índice tal que $x = (x_\alpha, \alpha)$. \square

Teorema 1.114. *Suponga que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia indexada de espacios topológicos, $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, y Y cualquier espacio topológico. Entonces una función $f: X \rightarrow Y$ es continua si y solo si $f_\alpha = f \circ \iota_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in I$.*

Demostración. Sea $V \subseteq Y$ abierto y f continua, luego $f^{-1}(V)$ es abierto en X lo cual implica, por la observación 1.112, que

$$\begin{aligned}\iota_\alpha^{-1}(f^{-1}(V)) &= (f \circ \iota_\alpha)^{-1}(V) \\ &= f_\alpha^{-1}(V)\end{aligned}$$

es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$, esto es, f_α es continua para todo $\alpha \in I$. Recíprocamente, si $f_\alpha = f \circ \iota_\alpha$ es continua para cada $\alpha \in I$ y $V \subseteq Y$ es abierto, entonces

$$\begin{aligned}\iota_\alpha^{-1}(f^{-1}(V)) &= (f \circ \iota_\alpha)^{-1}(V) \\ &= f_\alpha^{-1}(V)\end{aligned}$$

es abierto en X_α para todo $\alpha \in I$ de modo que $f^{-1}(V)$ es abierto en X por la observación 1.112. Por tanto, f es continua. \square

Observación 1.115.

1. La unión disjunta de espacios arbitrarios no triviales no es un espacio conexo cuando $|I| \geq 2$: Para cada $\alpha \in I$ se observa que

$$X_\alpha \times \{\alpha\} = X_\alpha \times \{\alpha\} \cup \bigcup_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} (\emptyset \times \{\beta\})$$

$$X \setminus X_\alpha \times \{\alpha\} = \emptyset \times \{\alpha\} \cup \bigcup_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} (X_\beta \times \{\beta\})$$

lo cual indica que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es conjunto abierto y cerrado en

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$$

de modo que X no puede ser conexo de acuerdo al teorema 1.43.

2. Del hecho anterior y el teorema 1.59 se sigue que la unión disjunta de espacios no es conexo por caminos.
3. Si X_α es Hausdorff para cada $\alpha \in I$ entonces $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$ es Hausdorff: Sean $x, y \in X$, con $x \neq y$, luego existen índices $i, j \in I$ y $x_i \in X_i, x_j \in X_j$, tales que

$$\begin{aligned} x &= (x_i, i), x_i \in X_i \\ y &= (y_j, j), x_j \in X_j \end{aligned}$$

Como $x \neq y$ entonces $i \neq j$ o bien $i = j$ y $x_i \neq y_j$. En el primer caso, se observa que

$$\begin{aligned} U &= X_i \times \{i\} \\ V &= X_j \times \{j\} \end{aligned}$$

son abiertos de X tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; en el segundo caso, existen abiertos disjuntos U_i, V_i contenidos en X_i tales que $x_i \in U_i, y_i \in V_i$ y $U_i \cap V_i = \emptyset$; luego

$$\begin{aligned} U &= U_i \times \{i\} \\ V &= V_i \times \{i\} \end{aligned}$$

son abiertos de X tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

4. Si X_i es segundo contable para cada $i \in I$ e I es contable entonces $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ es segundo contable: Sea B_i una base contable de X_i para cada $i \in I$, luego la colección $\{\bigsqcup_{i \in I} U_i \mid U_i \in B_i\}$ es una base contable de X , esto es, la unión disjunta contable de los miembros de las bases B_i de los espacios X_i .
5. La unión disjunta de una familia $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de espacios compactos es compacto si y solo si I es finito. En efecto, considere $X = \bigsqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$, y sea X compacto. Del ítem 1 se tiene que $X_\alpha \times \{\alpha\}$ es un conjunto abierto en X para cada $\alpha \in I$ lo cual implica que

$$\bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \times \{\alpha\}$$

es un cubrimiento abierto de X el cual admite un subcubrimiento finito

$$\bigcup_{\alpha=1}^n X_\alpha \times \{\alpha\}$$

Así,

$$X \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^n X_\alpha \times \{\alpha\}$$

lo cual implica que I es finito. Recíprocamente, sea $I = n$ y \mathcal{U} un cubrimiento abierto X . De la definición de la topología en X se tiene que cada abierto $V \subseteq \mathcal{U}$ puede escribirse como una unión disjunta de abiertos de los espacios X_α , esto implica que \mathcal{U} cubre cada conjunto compacto X_α y por lo tanto existen n cubrimientos finitos $\mathcal{U}_{\alpha_k}, k = 1, \dots, n$, tales que $\mathcal{U}_{\alpha_k} \subseteq \mathcal{U}$ y $X_\alpha \subseteq \mathcal{U}_\alpha$ respectivamente; luego $\mathcal{U}_0 = \bigsqcup_{\alpha=1}^n \mathcal{U}_\alpha$ es un cubrimiento de X .

Ejemplo 1.116. En vista de que las funciones

$$\begin{aligned} f_1: \mathbb{R} &\longrightarrow (0, \infty) \\ x &\longmapsto f_1(x) = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2: \mathbb{R} &\longrightarrow (-\infty, 0) \\ x &\longmapsto f_2(x) = -e^x \end{aligned}$$

son homeomorfismos, por el teorema 1.113 existe una función continua,

$$f: \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & & \\
 \downarrow \iota_i & \searrow f_i & \\
 \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \setminus \{0\}
 \end{array}$$

para $i = 1, 2$. Más aún, siendo f_1, f_2 funciones biyectivas y abiertas, se obtiene que f es biyectiva y abierta. En este caso, para $U \subseteq \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ abierto existen conjuntos $V, W \subseteq \mathbb{R}$ abiertos tales que $U = V \sqcup W$ en cuyo caso

$$\begin{aligned}
 f(U) &= f(V \sqcup W) \\
 &= f_1(V) \cup f_2(W)
 \end{aligned}$$

es abierto en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto, f es un homeomorfismo de modo que $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ es homeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.5.7 Productos

Dada una colección $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de conjuntos no vacíos, se define y se denota el producto cartesiano de $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ como

$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \left\{ x: I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \mid x(\alpha) \in X_\alpha \right\}$$

En general se usa la notación $x(\alpha) := x_\alpha$ y $(x_\alpha) := x$. Note que si $X = X_\alpha$ para todo α , entonces el producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ no es más que el conjunto de todas las funciones $x: I \longrightarrow X$, el cual se denota por X^I .

Para cada $\beta \in I$ se define la proyección en la β -ésima componente como la función

$$\begin{aligned}
 \pi_\beta: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha &\longrightarrow X_\beta \\
 (x_\alpha) &\longmapsto x_\beta
 \end{aligned}$$

Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos. Se desea dotar al producto cartesiano $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ con una estructura de espacio topológico. Para ello, se apelará a un resultado conocido en topología:

Con base en la proposición anterior, se tiene:

Definición 1.117. Sea $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una familia de espacios topológicos. La topología \mathcal{T} en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ generada por la subbase

$$\mathcal{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in I\}$$

se denomina la **topología producto**.

Observación 1.118.

1. En otras palabras, la topología \mathcal{T} en $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ es: \emptyset, X , todas las intersecciones finitas de miembros de \mathcal{B} , y todas las uniones arbitrarias de tales intersecciones finitas.
2. Como una consecuencia inmediata de la definición 1.117, se tiene que para cada $\beta \in I$, la proyección

$$\begin{aligned}
 \pi_\beta: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha &\longrightarrow X_\beta \\
 (x_\alpha) &\longmapsto x_\beta
 \end{aligned}$$

es continua pues $\pi_\beta^{-1}(U_\beta) \in \mathcal{T}$ para todo abierto $U_\beta \in X_\beta$. Más aún, como

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \left\{ x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \mid x_\beta \in U_\beta \right\}$$

entonces una intersección finita de la forma

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

es un abierto de \mathcal{T} de la forma

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$$

donde $U_\alpha = X_\alpha$, excepto para $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$. Esto implica que la colección

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{\alpha \in I} U_\alpha \mid U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, U_\alpha = X_\alpha, \text{ excepto para un número finito de índices } \alpha \in I \right\}$$

es una base para $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, de donde se concluye que π_β es una función abierta para cada $\beta \in I$.

El espacio producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ junto con las proyecciones $\left\{ \pi_\beta: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow X_\beta \right\}$ se pueden caracterizar por medio de la siguiente propiedad conocida como la **propiedad universal del producto**:

Teorema 1.119. *Sea $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos, Y un espacio topológico cualquiera y $\{f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una colección de funciones continuas. Entonces existe una función $f: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$, única tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, es decir, el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ \downarrow f & \searrow f_\alpha & \\ \prod_{\alpha \in I} X_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & X_\alpha \end{array}$$

Demostración. Sea

$$f: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

definida por

$$f(y): I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$$

$$\alpha \mapsto f(y)(\alpha) = f_\alpha(y)$$

Observe que f está bien definida pues f_α es función para cada $\alpha \in I$. Más aún, para todo $y \in Y$,

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha \circ f)(y) &= \pi_\alpha(f(y)) \\ &= f_\alpha(y) \end{aligned}$$

de modo que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Por último, para cada $\alpha \in I$ y cada conjunto abierto $U_\alpha \in X_\alpha$ se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)) &= (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U_\alpha) \\ &= f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \end{aligned}$$

lo cual implica, junto con la continuidad de cada función f_α , que $f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ es abierto en cuyo caso f es continua por el ítem 4 del teorema 1.21. \square

Definición 1.120. Sea Y un espacio topológico y

$$f: Y \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$$

una función. Para cada $\alpha \in I$, la α -ésima componente de la función f se define como siendo la función $f_{\alpha} = \pi_{\alpha} \circ f$, esto es, $f_{\alpha}: Y \longrightarrow X_{\alpha}$, es la función para la cual el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \pi_{\alpha} \downarrow & \swarrow f & \\ X_{\alpha} & \longleftarrow f_{\alpha} & Y \end{array}$$

es conmutativo. En este caso se escribe $f = (f_{\alpha})_{\alpha \in I}$

Proposición 1.121. Sea $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios topológicos, $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ dotado con la topología producto y $f: Y \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ una función. Entonces f es continua si y solo si para cada $\alpha \in I$ la α -ésima componente f_{α} es continua.

Demostración. En efecto, si f es continua entonces por el ítem 2 de la observación 1.118 se tiene que π_{α} es continua para todo $\alpha \in I$, de donde se sigue que $f_{\alpha} = \pi_{\alpha} \circ f$ es continua para toda α . Recíprocamente, si f_{α} es continua para todo $\alpha \in I$, como

$$\begin{aligned} f^{-1}(\pi_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha})) &= (\pi_{\alpha} \circ f)^{-1}(U_{\alpha}) \\ &= f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in I$ y todo abierto $U_{\alpha} \in X_{\alpha}$, entonces se concluye que f es continua. \square

Observación 1.122.

1. Si $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es una colección de espacios topológicos entonces se puede que el espacio producto $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ es conexo si y solo si X_{α} es conexo para cada $\alpha \in I$. Lo mismo es cierto para el caso de espacios conexos por caminos.
2. Para el caso de una colección de espacios primero (resp. segundo contable) se puede probar el siguiente resultado: El producto $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ de una colección $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de espacios es primero contable (resp. segundo contable) si y solo si cada X_{α} es primero contable (resp. segundo contable) y todos, excepto una cantidad contable, son espacios triviales.
3. Si $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios compactos entonces se puede probar que $\prod_{\alpha \in I} X_{\alpha}$ es compacto si y solo si X_{α} es compacto para cada $\alpha \in I$. Este resultado se conoce como el *teorema de Tychonoff*.
4. El producto de una colección $\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de espacios es Hausdorff si y solo si X_{α} es Hausdorff para cada $\alpha \in I$.

Capítulo 2

Topología cociente

En este capítulo se presentan los espacios cocientes y espacios adjuntos, los cuales constituyen el punto de partida para el estudio posterior sobre superficies.

2.1 Espacios cociente

Se verá en última instancia que cada superficie compacta se puede representar como el espacio cociente de un polígono plano en el cual se han identificado pares de aristas. El primer paso para formular esta idea rigurosamente es introducir el concepto de *topología cociente*.

Definición 2.1. Sea (X, \mathcal{T}_X) un espacio topológico, Y un conjunto y $f: X \rightarrow Y$ una función sobreyectiva. La colección \mathcal{T}_f de subconjuntos de Y definida por

$$\mathcal{T}_f = \{V \subseteq Y : f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X\}$$

determina una topología en Y , llamada la **topología cociente inducida por f** . Cuando Y posee dicha topología se dice que (Y, \mathcal{T}_f) es un **espacio cociente** de X y f una **aplicación cociente**.

Ejemplo 2.2. Si X es un espacio topológico y R una relación de equivalencia en X , entonces el conjunto X/R junto con la topología cociente inducida por la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/R \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

es un espacio cociente.

Observación 2.3.

1. La topología cociente inducida por f es la topología más fina para la cual f es continua. Si \mathcal{T} es cualquier topología en Y para la cual f es continua entonces $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ para todo $V \in \mathcal{T}$, es decir, $V \in \mathcal{T}_f$ para todo $V \in \mathcal{T}$ y por tanto $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_f$.
2. No toda función continua y sobreyectiva es una aplicación cociente. En efecto, considerando \mathbb{R} con la topología discreta en el dominio, y \mathbb{R} con la topología usual de la recta en el codominio, la función identidad $\text{Id}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, es tal que $\text{Id}^{-1}([0, 1]) = [0, 1]$ es abierto en el dominio ya que es un subconjunto de \mathbb{R} , sin embargo, $[0, 1]$ no es abierto en la topología usual de la recta.
3. Las aplicaciones cocientes no son homeomorfismos locales porque estas no son funciones necesariamente abiertas o cerradas. Por ejemplo, si en \mathbb{R} con la topología usual se considera la relación de equivalencia \sim generada por la relación

$$xRy \iff x, y \in (0, 1) \text{ o } x, y \in [2, 3]$$

y se considera \mathbb{R}/\sim con la topología inducida por la proyección canónica π ,

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}/\sim \\ x &\longmapsto [x]\end{aligned}$$

Se observa entonces que π no es abierta ni cerrada. Por ejemplo, $\pi((2, 3))$ no es abierto y $\pi(\{\frac{1}{2}\})$ no es cerrado. En el primer caso, $\pi^{-1}(\pi((2, 3))) = [2, 3]$, mientras que $\pi^{-1}(\pi(\{\frac{1}{2}\})) = (0, 1)$.

Se desea analizar las condiciones bajo las cuales una función $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente, es decir, que propiedades debe satisfacer f para que una topología preasignada \mathcal{T} en Y sea precisamente la topología cociente \mathcal{T}_f . En principio, es claro que f debe ser continua y sobreyectiva. Como una primera aproximación a este problema se tiene la siguiente proposición en la cual se indican algunas propiedades de las aplicaciones cociente:

Proposición 2.4.

1. La composición de aplicaciones cociente es una aplicación cociente
2. Una aplicación cociente inyectiva es un homeomorfismo
3. f es una aplicación cociente si y solo si satisface la condición: “ $V \subseteq Y$ es abierto si solo si $f^{-1}(V)$ es abierto en X ”.
4. Si $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente y $U \subseteq X$ es un conjunto abierto (respect. cerrado) saturado, entonces la restricción $f|_U: U \longrightarrow f(U)$ es una aplicación cociente
5. Si $\{f_\alpha: X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia indexada de aplicaciones

Aunque las aplicaciones cociente no son necesariamente funciones abiertas o cerradas, existe una caracterización de las aplicaciones cociente en términos de conjuntos abiertos (resp. cerrados) saturados.

Proposición 2.5. Sean X, Y , espacios topológicos. Una función sobreyectiva y continua $f: X \longrightarrow Y$ es una aplicación cociente si y solo si lleva conjuntos abiertos (respect. cerrados) saturados de X en conjuntos abiertos (respect. cerrados) de Y .

Demostración. Si f es una aplicación cociente y $U \subseteq X$ es un abierto saturado entonces $U = f^{-1}(f(U))$, esto es, $f(U)$ es abierto en Y . Para la otra implicación, sea f continua, sobreyectiva y satisfaciendo la segunda parte del enunciado. Dado $V \subseteq Y$ abierto se tiene que $f^{-1}(V)$ es abierto en X por la continuidad de f . Por otro lado, sea $V \subseteq Y$ con $f^{-1}(V)$ abierto en X . Como f es sobreyectiva entonces se obtiene $f^{-1}(f(f^{-1}(V))) = f^{-1}(V)$, esto es, $f^{-1}(V)$ es saturado por f de modo que cuyo $f(f^{-1}(V)) = V$ es abierto en Y . De estos hechos y del ítem 3 de la proposición 2.4 se concluye que f es una aplicación cociente. Con un razonamiento similar se puede demostrar el caso para conjuntos cerrados. \square

Ejemplo 2.6. La función exponencial

$$\begin{aligned}f: [0, 1) &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto (\cos 2\pi t, \text{sen} 2\pi t)\end{aligned}$$

es sobreyectiva y continua, sin embargo, no es una aplicación cociente porque $[0, \frac{1}{2})$ es un subconjunto abierto saturado de $[0, 1)$ cuya imagen no es abierto en \mathbb{S}^1 . En particular, $f(0)$ no posee un abierto que se contenga en $f([0, \frac{1}{2})) = (1, 0) \cup \{(x, y) \in \mathbb{S}^1: y > 0\}$, como se muestra en la figura 2.1,

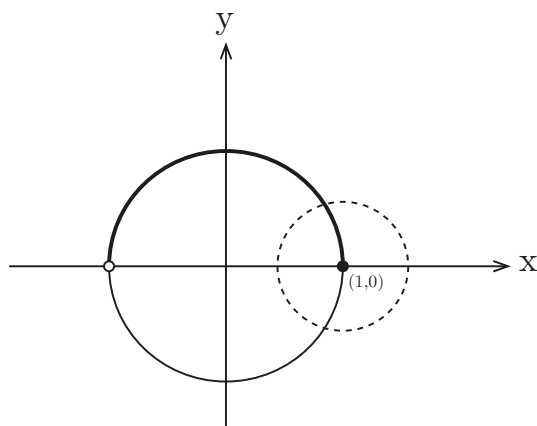


Figura 2.1.

Como un corolario de la proposición 2.5 se tiene:

Corolario 2.7. Si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, sobreyectiva y abierta (respect. cerrada) entonces f es una aplicación cociente.

Demostración. Si f es una función continua, sobreyectiva y abierta (respect. cerrada) entonces en particular f mapea conjuntos abiertos (respect. cerrados) saturados en conjuntos abiertos (respect. cerrados) lo cual implica que f es una aplicación cociente de acuerdo a la proposición 2.5. \square

Observación 2.8.

1. Sean $f: X \rightarrow Y$, $g: X \rightarrow Z$ aplicaciones cocientes. Si $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$ es una función tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \downarrow f & \searrow g & \\
 Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z
 \end{array}$$

conmuta, entonces \tilde{f} es una aplicación cociente. En efecto, para $V \subseteq Z$ abierto se tiene que

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) &= (f \circ \tilde{f})^{-1}(V) \\
 &= g^{-1}(V)
 \end{aligned}$$

es abierto en X , esto es, $\tilde{f}^{-1}(V)$ es abierto en Y . De forma similar, si $V \subseteq Y$ es tal que $\tilde{f}^{-1}(V)$ abierto en Y , entonces

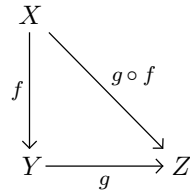
$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\tilde{f}^{-1}(V)) &= (f \circ \tilde{f})^{-1}(V) \\
 &= g^{-1}(V)
 \end{aligned}$$

es abierto en X , lo cual implica que V es abierto en Y pues g es una aplicación cociente; de acuerdo al ítem 3 de la proposición 2.4 se concluye que \tilde{f} es una aplicación cociente.

2. Una función biyectiva $f: X \rightarrow Y$ es una aplicación cociente si y solo si es un homeomorfismo. En efecto, f es un homeomorfismo entonces f es una aplicación cociente por el corolario 2.7. Recíprocamente, si f es una aplicación cociente inyectiva entonces $f^{-1}(f(U)) = U$ para todo abierto $U \subseteq X$, lo cual implica que f es una función abierta. De la proposición 1.35 se sigue que f es un homeomorfismo.
3. Si $f: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo local sobreyectivo entonces f es una aplicación cociente. De acuerdo a la proposición 1.39 se tiene que f es una función continua y abierta. Como f también es sobreyectiva, entonces por el corolario 2.7 se concluye que f es una aplicación cociente.

Se estudiará ahora la propiedad característica de la topología cociente.

Teorema 2.9. Sean X, Y , espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Entonces para cualquier espacio topológico Z , una función $g: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ es continua si y solo si $g \circ f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Z, \mathcal{T}_Z)$ es continua:

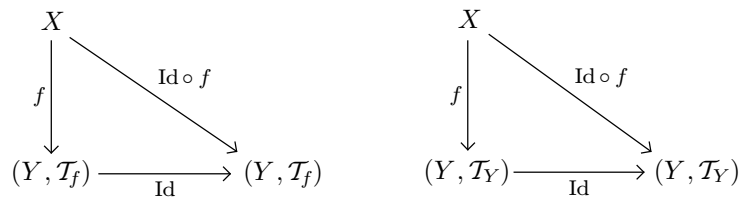


Demostración. Este resultado se sigue inmediatamente del hecho de que para cualquier conjunto abierto $U \subseteq Z$, $g^{-1}(U)$ es abierto en Y si y solo si $f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$ es abierto en X . \square

Al resultado anterior se le conoce como la *propiedad característica de la topología cociente*. El siguiente resultado garantiza la unicidad de la topología cociente:

Teorema 2.10. Dado un espacio topológico X , un conjunto Y , y una función sobreyectiva $f: X \rightarrow Y$, la topología cociente es la única topología en Y para la cual la propiedad característica se cumple.

Demostración. En efecto, suponga que existe otra topología \mathcal{T}_Y tal que la propiedad característica se cumple. Al considerar los diagramas



y sabiendo que las funciones

$$\text{Id}: (Y, \mathcal{T}_f) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$$

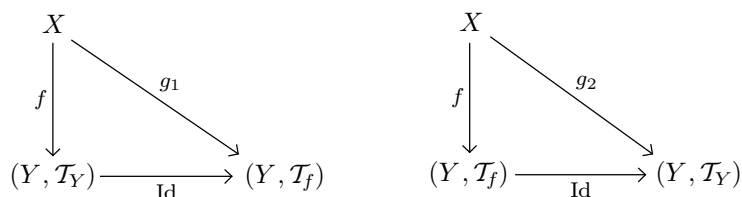
$$\text{Id}: (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

son continuas, se obtiene de la propiedad característica que las funciones

$$g_1 = \text{Id} \circ f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$$

$$g_2 = \text{Id} \circ f: X \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

son continuas; luego de los diagramas



y de la propiedad característica se sigue que las funciones

$$\text{Id}: (Y, \mathcal{T}_Y) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_f)$$

$$\text{Id}: (Y, \mathcal{T}_f) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$$

son continuas lo cual implica que $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_Y$ de acuerdo a la proposición 1.22. \square

El próximo teorema, conocido como **la propiedad universal del cociente**, es la consecuencia más importante de la propiedad característica de la topología cociente ya que indica como se pueden definir funciones con dominio en un espacio cociente.

Teorema 2.11. *Sea $f: X \longrightarrow Y$ una aplicación cociente, Z un espacio topológico y $g: X \longrightarrow Z$ una función continua que es constante en las fibras de f . Entonces existe una función continua $\tilde{f}: Y \longrightarrow Z$, única tal que $g = f \circ \tilde{f}$.*

Demostración. Sea g continua y constante en las fibras de f . Como f es sobreyectiva, es posible definir la función

$$\begin{aligned} \tilde{f}: Y &\longrightarrow Z \\ y &\longmapsto \tilde{f}(y) = g(x) \end{aligned}$$

donde $x \in X$ es tal que $y = f(x)$.

- \tilde{f} está bien definida: dados $y_1, y_2 \in Y$ existen $x_1, x_2 \in X$ tal que $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ respectivamente; luego para $y_1 = y_2$ se cumple que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y_1) &= g(x_1) \\ &= g(x_2) \\ &= \tilde{f}(y_2) \end{aligned}$$

- \tilde{f} es continua y es la única tal que $g = f \circ \tilde{f}$: Como \tilde{f} hace conmutar el diagrama,

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{\tilde{f}} & Z \end{array}$$

f es una aplicación cociente y g es continua, entonces \tilde{f} es continua por el teorema 2.7. Para la unicidad, sea $h: Y \longrightarrow Z$ continua tal que $g = h \circ f$, luego dado $y \in Y$ se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{f}(y) &= g(x) \\ &= (h \circ f)(x) \\ &= h(f(x)) \\ &= h(y) \end{aligned} \quad \square$$

En las condiciones del teorema anterior se suele decir que g pasa al cociente por f .

La próxima consecuencia de la propiedad característica, conocida como la **unicidad de los espacios cociente**, muestra que los espacios cocientes están únicamente determinados, salvo homeomorfismos, por las identificaciones hechas por sus aplicaciones cociente.

Teorema 2.12. *Suponga que $f_1: X \longrightarrow Y_1$ y $f_2: X \longrightarrow Y_2$ son aplicaciones cocientes que hacen las mismas identificaciones, es decir, $f_1(x) = f_1(\acute{x})$ si y solo si $f_2(x) = f_2(\acute{x})$. Entonces existe un único homeomorfismo $\varphi: Y_1 \longrightarrow Y_2$ tal que $\varphi \circ f_1 = f_2$.*

Demostración. Por el teorema 2.11 existen funciones \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 continuas, únicas tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} X & & X \\ \downarrow f_1 & \searrow f_2 & \downarrow f_1 \\ Y_1 & \xrightarrow{\tilde{f}_2} & Y_2 \\ & & \downarrow \tilde{f}_1 \\ & & Y_1 \end{array}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \tilde{f}_1 \circ (\tilde{f}_2 \circ f_1) &= \tilde{f}_1 \circ f_2 \\ &= f_1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Considere ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow f_1 & \searrow f_1 & \\ Y_1 & \dashrightarrow & Y_1 \end{array}$$

Si la línea punteada es $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2$ entonces 2.1 muestra que el diagrama conmuta. También es claro que el diagrama conmuta cuando la línea punteada es la identidad en Y_1 . Por el teorema 2.11 se sigue que $\tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2 = \text{Id}_{Y_1}$. De manera similar, $\tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1 = \text{Id}_{Y_2}$. Así, $\varphi = \tilde{f}_2$ es el homomorfismo requerido, el cual es único por el teorema 2.11. \square

Ejemplo 2.13. Sea R una relación de equivalencia en un espacio topológico X . Sea X/R el conjunto formado por las clases de equivalencia respecto a R . Considere la proyección canónica $\pi: X \rightarrow X/R$ la cual envía cada elemento a su respectiva clase de equivalencia, esto es,

$$\begin{aligned} \pi: X &\longrightarrow X/R \\ x &\longrightarrow [x] \end{aligned}$$

Suponga X/R con la topología cociente inducida por π . Si Y es otro espacio topológico y $f: X \rightarrow Y$ es una función continua tal que f es constante en las fibras de π , es decir, $f(x) = f(y)$ siempre que xRy , entonces por el teorema 2.11 existe una función continua $\tilde{f}: X/R \rightarrow Y$, única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ X/R & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y \end{array}$$

Ejemplo 2.14. Considere la relación de equivalencia R en \mathbb{Z} generada por la relación

$$xRy \iff x, y \in \mathbb{Z}$$

Entonces el espacio cociente resultante \mathbb{R}/\sim no es *primero contable*. Si $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base local contable de $[\mathbb{Z}]$ en \mathbb{R}/\sim entonces cada conjunto de la forma $\pi^{-1}(V_n)$, $n \in \mathbb{N}$, es una vecindad abierta de \mathbb{Z} en \mathbb{R} , no obstante, para cada $n \in \mathbb{N}$, por la propiedad arquimediana, existe $r_n \in \mathbb{R}$ tal que $1/2 > r_n > 0$ y $(n - r_n, n + r_n) \subseteq \pi^{-1}(V_n)$; luego la imagen del abierto

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (n - r_n, n + r_n)$$

bajo la proyección canónica

$$\begin{aligned}\pi: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}/\sim \\ x &\longmapsto [x]\end{aligned}$$

corresponde a una vecindad abierta G de $[\mathbb{Z}]$, la cual, sin embargo, no contiene ningún conjunto V_n . Por tanto, $[\mathbb{Z}]$ no posee una base local contable, es decir, \mathbb{R}/\sim , no es *primero contable*. Más aún, por el teorema 1.88, \mathbb{R}/\sim , no es *segundo contable*.

Se ha visto (ejemplos 1.73, 2.14) que las propiedades Hausdorff y *segundo contable* no son necesariamente invariantes continuos. En cada caso, para preservar la propiedad, se requiere que la función cumpla propiedades adicionales a la continuidad, por ejemplo, que sea cerrada o abierta. La relación entre la topología cociente y estas propiedades es importante como se verá en algunos de los ejemplos del presente capítulo y en el siguiente.

Proposición 2.15. *Sea X segundo contable y Y un espacio cociente de X . Si Y es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n entonces Y es segundo contable.*

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una aplicación cociente. Como Y es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , entonces para cada $y \in Y$, existen abiertos $W \subseteq Y$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y un homeomorfismo $g: W \rightarrow V$, en cuyo caso existe $\epsilon_{g(y)} > 0$ tal que $B(g(y), \epsilon_{g(y)}) \subseteq V$ y $B(g(y), \epsilon_{g(y)}) \cong g^{-1}(B(g(y), \epsilon_{g(y)})) \subseteq W$, lo cual da lugar a un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de Y donde cada conjunto $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es homeomorfo a una bola abierta en \mathbb{R}^n . Observe que la colección

$$\{f^{-1}(U_\alpha): U_\alpha \in \mathcal{U}\}$$

es un cubrimiento abierto de X y por tanto dicha colección admite un subcubrimiento contable de acuerdo al teorema 1.95. Si $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ es un conjunto contable tal que $\{f^{-1}(U_\alpha): U_\alpha \in \mathcal{U}'\}$ cubre a X , entonces \mathcal{U}' es un cubrimiento contable de Y donde cada conjunto $U_n \in \mathcal{U}'$ es segundo contable, de modo que Y es contable por la proposición 1.99. \square

Teorema 2.16. *Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva. Suponga que X es compacto, Hausdorff, y Y posee la topología cociente inducida por f . Entonces Y es Hausdorff si y solo si f es cerrada. En particular, si f es biyectiva se cumple que Y es Hausdorff si y solo si f es un homeomorfismo.*

Demostración. La primera implicación es una consecuencia inmediata del corolario 1.109. Para el recíproco, dado $a \in X$, se observa que $\{a\}$ es cerrado por ser X Hausdorff, lo cual implica que $\{f(a)\}$ es cerrado en Y pues f es cerrada. Más aún, como f es sobreyectiva, para cada $b \in Y$, el conjunto $\{b\}$ es cerrado (Y es Hausdorff) en cuyo caso como f es continua, para $b_1, b_2 \in Y$, $b_1 \neq b_2$, se sigue que $f^{-1}(\{b_1\})$ y $f^{-1}(\{b_2\})$ son disjuntos y cerrados en X y por tanto compactos; luego como X es Hausdorff existen abiertos U y V disjuntos que contienen a $f^{-1}(\{b_1\})$ y $f^{-1}(\{b_2\})$ respectivamente. Dado que $X \setminus U$, $X \setminus V$ con cerrados y f es cerrada entonces $f(X \setminus U)$, $f(X \setminus V)$ son cerrados de modo que los conjuntos

$$\begin{aligned}W_1 &= Y \setminus f(X \setminus U) \\ W_2 &= Y \setminus f(X \setminus V)\end{aligned}$$

son abiertos en Y y satisfacen $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $b_1 \in W_1$, $b_2 \in W_2$. Por tanto Y es Hausdorff. \square

Para visualizar un espacio cociente X se procura hallar un homeomorfismo entre éste y un espacio conocido Y .

Ejemplo 2.17. En el cuadrado unitario $X = [0, 1] \times [0, 1]$ de \mathbb{R}^2 con la topología inducida del plano, considere la relación de equivalencia R generada por la relación $(0, t) \sim (1, t)$, $0 \leq t \leq 1$. El espacio cociente obtenido al considerar X/R con la topología inducida por la proyección canónica $\pi: X \rightarrow X/R$, $\pi(x) = [x]$, se le conoce como el **cilindro**. Como la función sobreyectiva y continua

$$\begin{aligned} f: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \\ (s, t) &\longmapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s), t) \end{aligned}$$

es tal que

$$\begin{aligned} f(0, t) &= (1, 0, t) \\ &= f(1, t) \end{aligned}$$

para todo $0 \leq t \leq 1$, esto es, f es constante en las fibras de π , entonces por la propiedad universal del cociente, la función \tilde{f} definida por

$$\begin{aligned} \tilde{f}: X/R &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \\ [(s, t)] &\longmapsto \tilde{f}[(s, t)] = f(s, t) \end{aligned}$$

es una función continua. Observe que \tilde{f} es una función biyectiva pues f es sobreyectiva y

$$\begin{aligned} \tilde{f}[(0, t)] &= f(0, t) \\ &= f(1, t) \\ &= \tilde{f}[(1, t)] \quad ; 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

$$f(s, 1) \neq f(s, 0) \quad ; 0 \leq s \leq 1$$

lo cual implica que \tilde{f} es inyectiva. Como X/R es un espacio compacto y $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ es un espacio Hausdorff entonces \tilde{f} es un homeomorfismo de acuerdo al teorema 2.16.

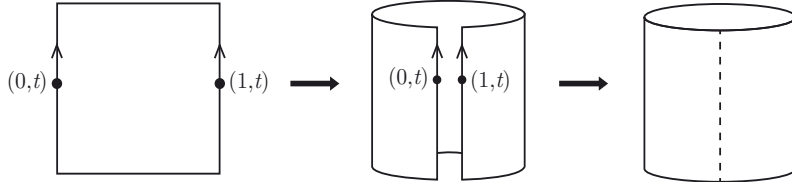


Figura 2.2. El cilindro

Ejemplo 2.18. De nuevo en el cuadrado unitario $X = [0, 1] \times [0, 1]$, se define la relación de equivalencia R generada por la relación $(0, t) \sim (1, t)$, $0 \leq t \leq 1$, $(s, 0) \sim (s, 1)$, $0 \leq s \leq 1$. Al espacio cociente X/R obtenido se le conoce como **el toro** el cual suele denotarse por \mathbb{T}^2 . Dicho espacio es homeomorfo al espacio $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. En efecto, como la función sobreyectiva y continua

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ (s, t) &\longmapsto (\cos(2\pi s), \operatorname{sen}(2\pi s), \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t)) \end{aligned}$$

es constante en las fibras de $\pi: X \rightarrow X/R$, $\pi(x) = [x]$, entonces por la propiedad universal del cociente, la función definida

$$\begin{aligned} \tilde{f}: X/R &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \\ [(s, t)] &\longmapsto \tilde{f}[(s, t)] = f(s, t) \end{aligned}$$

continua, la cual es biyectiva, con dominio compacto y codominio Hausdorff, es decir, \tilde{f} es un homeomorfismo.

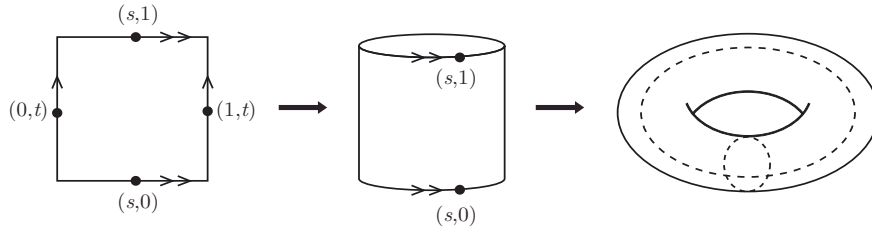


Figura 2.3. El toro

Ejemplo 2.19. Al definir en el cuadrado unitario $X = [0, 1] \times [0, 1]$ la relación de equivalencia R generada por la relación $(0, t) \sim (1, 1 - t)$, $0 \leq t \leq 1$, se obtiene el espacio cociente X/R conocido como la **banda de Möbius**.

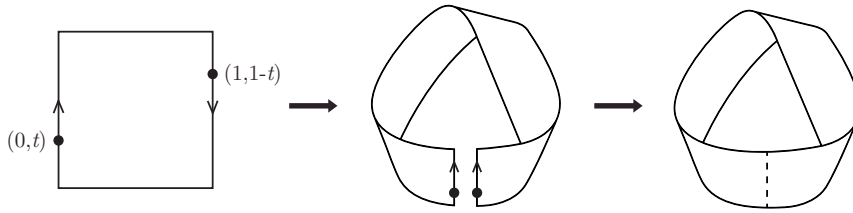


Figura 2.4. Banda de Möbius

Ejemplo 2.20. En $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ considere la relación de equivalencia

$$x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0$$

esto es, dos puntos están en la misma clase de equivalencia si pertenecen a una misma recta que pasa por el origen. El espacio cociente $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$ inducido por la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

se le conoce como el **espacio proyectivo real de dimensión n** y se denota por \mathbb{RP}^n . Existen formas equivalentes de definir a este espacio, una de ellas, consiste en tomar el espacio cociente \mathbb{S}^n / R donde R es la relación de equivalencia definida por

$$x R y \iff x = -y$$

Para probar esto, considere primero el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ & \searrow \pi|_{\mathbb{S}^n} & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{RP}^n \end{array}$$

donde $i: \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es la inclusión y $\pi|_{\mathbb{S}^n} = \pi \circ i$. $\pi|_{\mathbb{S}^n}$ es continua por ser la composición de funciones continuas. Más aún, es sobreyectiva ya que dado $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, $x / \|x\| \in \mathbb{S}^n$. Además, si $x, y \in \mathbb{S}^n$ son tales que $x R y$ entonces $\pi(x) = \pi(y)$, lo cual implica que $\pi|_{\mathbb{S}^n}(x) = \pi|_{\mathbb{S}^n}(y)$. Por tanto, $\pi|_{\mathbb{S}^n}$ es constante en las fibras de la proyección canónica

$$\begin{aligned} q: \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n / R \\ x &\longmapsto q(x) = [x] \end{aligned}$$

de modo que, por la propiedad universal del cociente, $\pi|_{\mathbb{S}^n}$ induce una función continua

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}^n / R &\longrightarrow \mathbb{RP}^n \\ [x] &\longmapsto f([x]) = \pi|_{\mathbb{S}^n}(x) \end{aligned}$$

única tal que $f \circ q = \pi|_{\mathbb{S}^n}$. Note que f es sobreyectiva ya que $f([x]) = \pi|_{\mathbb{S}^n}(x)$, y es inyectiva porque dados $x, y \in \mathbb{S}^n, x \neq y$, con $f([x]) = f([y])$, se tiene que $\pi|_{\mathbb{S}^n}(x) = \pi|_{\mathbb{S}^n}(y)$, de modo que $x = \lambda y$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$. Como $x, y \in \mathbb{S}^n$ entonces se observa que

$$\begin{aligned} 1 &= \|x\| \\ &= \|\lambda y\| \\ &= |\lambda| \|y\| \\ &= |\lambda| \end{aligned}$$

lo cual implica que $\lambda = \pm 1$. En cualquier caso, se sigue que $[x] = [y]$. Considere ahora el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{h} & \mathbb{S}^n \\ & \searrow q \circ h & \downarrow q \\ & & \mathbb{S}^n / R \end{array}$$

donde h es la función continua

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto x / \|x\| \end{aligned}$$

Si $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ son tales que $x \sim y$, entonces existe $\lambda \neq 0$ tal que $x = \lambda y$, en cuyo caso

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\lambda y) \\ &= \pm h(y) \end{aligned}$$

lo cual implica que $q \circ h(x) = q \circ h(y)$ y en consecuencia $q \circ h$ es constante en las fibras de π . Por tanto, por la propiedad universal del cociente, existe una función continua

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}\mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n / R \\ [x] &\longmapsto g([x]) = q \circ h(x) \end{aligned}$$

única tal que $g \circ \pi = q \circ h$. Note que

$$\begin{aligned} g \circ f([x]) &= g \circ f(q(x)) \\ &= g(\pi|_{\mathbb{S}^n}(x)) \\ &= q \circ h(x) \\ &= q(x / \|x\|) \\ &= q(x) \quad ; x \in \mathbb{S}^n, \|x\| = 1 \\ &= [x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \circ g([y]) &= f(q \circ h(y)) \\ &= f \circ q(y / \|y\|) \\ &= \pi|_{\mathbb{S}^n}(y / \|y\|) \\ &= \pi(y) \\ &= [y] \end{aligned}$$

Por tanto, $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{S}^n / R}$ y $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}\mathbb{P}^n}$, de modo que f es un homeomorfismo.

Por otro lado, si $x, y \in \mathbb{S}^n$ son tales que $[x] \neq [y]$ entonces se tiene que $x \neq y, x \neq -y$, luego como \mathbb{S}^n es Hausdorff, existen abiertos U, V en \mathbb{S}^n los cuales satisfacen $x \in U, y \in V$, y son tal que la colección de conjuntos abiertos $\{U, -U, V, -V\}$, donde $-U = \{-x | x \in U\}, -V = \{-x | x \in V\}$, es disjunta dos a dos. De lo anterior, y considerando que los conjuntos

$$q^{-1}(q(U)) = U \cup (-U)$$

$$q^{-1}(q(V)) = V \cup (-V)$$

son abiertos en \mathbb{S}^n , se concluye que $q(U), q(V)$ son vecindades abiertas disjuntas de $[x], [y]$ respectivamente. Por tanto, \mathbb{S}^n/R es Hausdorff y en consecuencia $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ también es Hausdorff.

Ejemplo 2.21. Considere la bola unitaria

$$\mathbb{B}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\}$$

entonces la relación de equivalencia R definida en \mathbb{B}^2 ,

$$xRy \iff x = y \text{ ó } x, y \in \mathbb{S}^1$$

induce un espacio cociente, \mathbb{B}^2/R , el cual es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 . En efecto, definiendo

$$f: (\mathbb{B}^2)^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1 - \|x\|}$$

se obtiene una función que está bien definida, es continua, y posee inversa continua,

$$f^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow (\mathbb{B}^2)^\circ$$

$$x \longmapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

esto es, f es un homeomorfismo. Considere ahora la función continua

$$g: \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$$

cuya inversa (también continua) está dada por

$$g^{-1}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

$$(x_1, x_2) \longmapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)$$

En particular, note que g^{-1} está bien definida ya que $g^{-1}(x_1, x_2) = g^{-1}(y_1, y_2)$ siempre que $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$. Además,

$$\|g^{-1}(x_1, x_2)\| = \sqrt{\frac{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}{(x_1^2 + x_2^2 + 1)^2}}$$

$$= 1$$

es decir, $g^{-1}(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$.

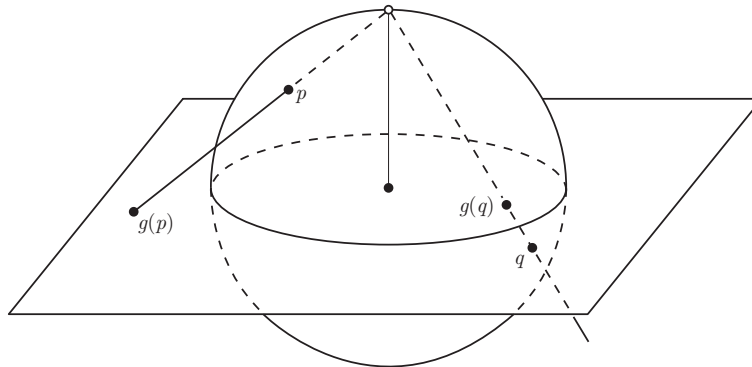


Figura 2.5. Proyección estereográfica.

A la función g suele conocerse como la *proyección estereográfica*. Al componer f con la proyección estereográfica se obtiene el homeomorfismo,

$$g^{-1} \circ f: (\mathbb{B}^2)^\circ \longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$$

Considere ahora la función $h: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1} \circ f(x) & \text{si } x \in \mathbb{B}^2 \setminus \mathbb{S}^1 \\ (0, 0, 1) & \text{si } x \in \mathbb{S}^1 \end{cases}$$

Es claro que h es sobreyectiva. h es continua: sea $x \in \mathbb{B}^2$ y $U \subseteq \mathbb{S}^2$ una vecindad abierta de $h(x)$. Si $x \in \mathbb{B}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ entonces $V = h^{-1}(U \setminus \{(0, 0, 1)\})$ es una vecindad de x tal que $f(V) \subseteq U$; si $x \in \mathbb{S}^1$ entonces existe una bola abierta $B((0, 0, 1); \epsilon) \subseteq U$ la cual luce como un casquete esférico cuya base es un círculo C de radio $r = \epsilon\sqrt{4 - \epsilon^2}/2$ y centro $(0, 0, (2 - \epsilon^2)/2)$. La imagen inversa de C bajo h corresponde al conjunto

$$h^{-1}(C) = \left\{ x \in \mathbb{B}^2 \mid \|x\|^2 = (4 - \epsilon^2) / (4 + 2\epsilon\sqrt{4 - \epsilon^2}) \right\}$$

por tanto, la imagen inversa de $B((0, 0, 1); \epsilon)$ es

$$\begin{aligned} h^{-1}(B((0, 0, 1); \epsilon)) &= \{x \in \mathbb{B}^2: l < \|x\| \leq 1\} \\ l &= (4 - \epsilon^2) / (4 + 2\epsilon\sqrt{4 - \epsilon^2}) \end{aligned}$$

el cual es abierto en \mathbb{B}^2 dado que

$$h^{-1}(B((0, 0, 1); \epsilon)) = \mathbb{B}^2 \cap \{x \in \mathbb{R}^2: \|x\| > l\}$$

Así, h es continua y sobreyectiva. Como h es constante en las fibras de

$$\pi: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2/R$$

entonces h induce una función continua $\tilde{h}: \mathbb{B}^2/R \rightarrow \mathbb{S}^2$, $\tilde{h}([x]) = h(x)$, la cual es sobreyectiva pues h lo es. Además, es inyectiva ya que de $\tilde{h}([x]) = \tilde{h}([y])$ se sigue que $h(x) = h(y)$, lo cual implica que $x = y$ ó $x, y \in \mathbb{S}^1$. En cualquier caso se obtiene que $[x] = [y]$. Como \tilde{h} es biyectiva, continua, está definida en un espacio compacto y tiene rango en un espacio Hausdorff, se concluye que \tilde{h} es un homeomorfismo.

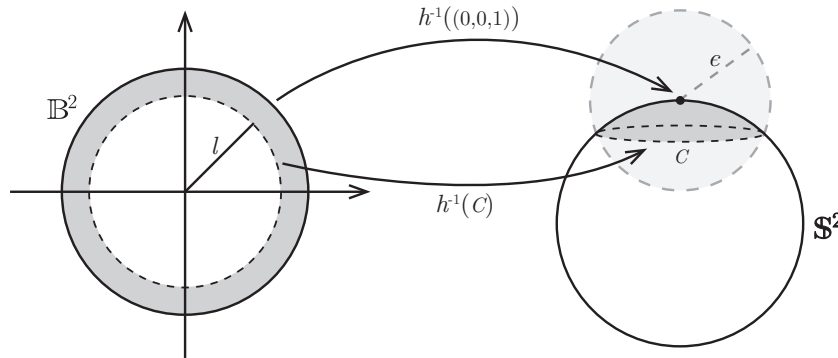


Figura 2.6. $h^{-1}((0, 0, 1))$, $h^{-1}(C)$.

Ejemplo 2.22. El espacio cociente $([0, 1] \times [0, 1])/R$, donde R es la relación de equivalencia generada por la relación $(0, t) \sim (1, t)$, $(s, 0) \sim (1 - s, 1)$ para todo $s, t \in [0, 1]$, se le conoce como la **botella de Klein**. Se puede pensar en la botella de Klein como el espacio obtenido al identificar los extremos opuestos de un cilindro finito con la orientación de dos circunferencias invertidas. Cabe mencionar que este espacio solo se puede representar en un espacio tridimensional al permitir autointersecciones de dicho espacio^{2.1}.

2.1. Véase <https://www.youtube.com/watch?v=yaeyNjUPVqs>.

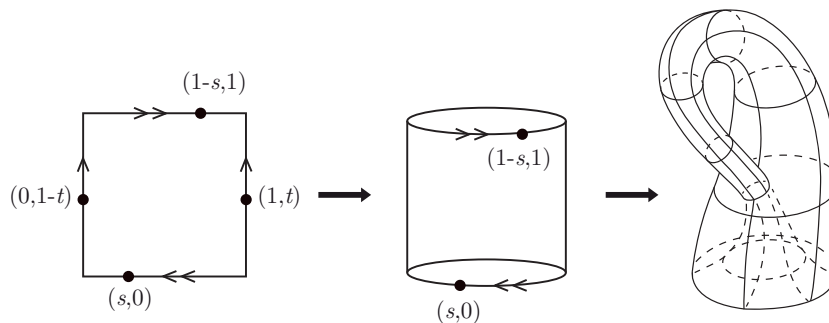


Figura 2.7. La botella de Klein

2.2 Adjunción de espacios

El concepto de topología cociente desarrollado en la sección anterior da lugar a una importante clase de espacios topológicos conocidos como *espacios adjuntos*. Si X, Y son espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio y $f: A \rightarrow Y$ una función continua, entonces el espacio adjunto determinado por f , el cual suele denotarse como $X \cup_f Y$, intuitivamente representa el espacio obtenido al pegar los espacios X y Y a lo largo de A por medio de f .

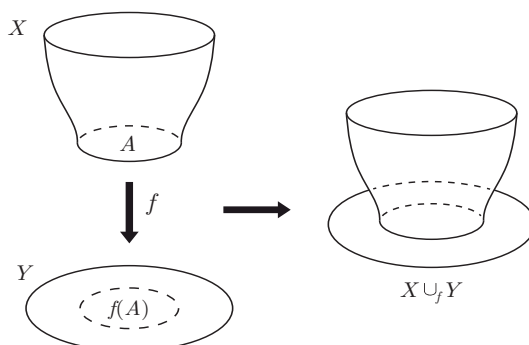


Figura 2.8.

Sean X, Y , espacios topológicos. A fin de definir los espacios adjuntos, conviene recordar que las funciones

$$\begin{aligned} \iota_X: X &\longrightarrow X \sqcup Y \\ x &\longmapsto (x_1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_Y &\longrightarrow X \sqcup Y \\ y &\longmapsto (y_2, 2) \end{aligned}$$

son continuas, abiertas e inyectivas.

Definición 2.23. Sean X, Y , espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio, $f: A \rightarrow Y$ una función continua y $i: A \hookrightarrow X$ la inclusión. El **espacio adjunto determinado por f** , denotado por $X \cup_f Y$, se define como el espacio cociente

$$X \cup_f Y = X \sqcup Y / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por las identificaciones $(\iota_X \circ i)(a) \sim (\iota_Y \circ f)(a)$ para cada $a \in A$.

Observación 2.24.

1. En este caso, las clases de equivalencia de la relación pueden describirse como

- $[(x_1, 1)] = \{(x_1, 1)\}$ para todo $x_1 \in X \setminus A$.
- $[(y_2, 2)] = \{(y_2, 2)\}$ para todo $y_2 \in Y \setminus f(A)$.
- $[(a_1, 1)] = \{(f(a_1), 2)\} \cup \{(a'_1, 1) \mid a'_1 \in A \text{ y } f(a'_1) = f(a_1)\}$ para todo $a_1 \in A$.

2. Como las funciones

$$\begin{aligned} \iota_1: X &\longrightarrow X_1 \times \{1\} \\ x &\longmapsto (x_1, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_2: Y &\longrightarrow Y_2 \times \{2\} \\ y &\longmapsto (x_2, 2) \end{aligned}$$

son homeomorfismos, se hablará del espacio X (respect. Y) en $X \sqcup Y$ como siendo el espacio $X_1 \times \{1\}$ (resp. $Y_2 \times \{2\}$).

3. Si $A = \emptyset$, $X \cup_f Y = X \sqcup Y$. Si $A = X$, $X \cup_f Y = Y$. Si $A = Y$, $X \cup_{\text{Id}_A} Y = X$. En lo sucesivo solo se asumirá que $A \neq \emptyset$.

4. Es claro que $\pi(X \setminus A) \cap \pi(Y) = \emptyset$ y $X \cup_f Y = \pi(X \setminus A) \cup \pi(Y)$ de acuerdo a como está definida la relación de equivalencia generada por \sim .

Análogo a la sección anterior, se desea estudiar el tipo de propiedades que el espacio $X \cup_f Y$ hereda de $X \sqcup Y$. Los próximos dos teoremas constituyen herramientas que facilitarán este análisis. El primero, constituye un método para construir funciones continuas con dominio en un espacio adjunto; el segundo indica algunas características de la proyección canónica $\pi: X \sqcup Y \longrightarrow X \cup_f Y$.

Teorema 2.25. Sean X, Y , espacios topológicos, A un subespacio de X y $f: A \longrightarrow Y$ una función continua. Considere el espacio $X \cup_f Y$ y las funciones continuas

$$\begin{aligned} \phi_X: X &\longrightarrow X \cup_f Y \\ x &\longmapsto \phi_X(x) = \pi \circ \iota_X(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_Y: Y &\longrightarrow X \cup_f Y \\ y &\longmapsto \phi_Y(y) = \pi \circ \iota_Y(y) \end{aligned}$$

Si Z es un espacio topológico y $h: X \longrightarrow Z$, $g: Y \longrightarrow Z$, son funciones continuas tales que $g \circ f = h \circ i$, entonces existe una función continua $\varphi: X \cup_f Y \longrightarrow Z$, única tal que $\varphi \circ \phi_X = h$ y $\varphi \circ \phi_Y = g$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow i & & \downarrow \phi_Y \\ X & \xrightarrow{\phi_X} & X \cup_f Y \\ & \searrow h & \downarrow \varphi \\ & & Z \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a curved arrow g from Y to Z and a curved arrow h from X to Z , with the condition $g \circ f = h \circ i$.)

Demostración. Al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & X & \\
 \iota_X \swarrow & & \searrow h \\
 X \sqcup Y & & Z \\
 \iota_Y \swarrow & & \searrow g \\
 & Y &
 \end{array}$$

se sigue del teorema 1.113, la existencia de una función continua $F: X \sqcup Y \rightarrow Z$, única tal que $h = F \circ \iota_X$ y $g = F \circ \iota_Y$. Más aún, F es constante en las fibras de $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$; sea $a \in A$ y $(\iota_X \circ i)(a) \sim (\iota_Y \circ f)(a)$, luego

$$\begin{aligned}
 F((\iota_X \circ i)(a)) &= (F \circ \iota_X)(i(a)) \\
 &= h(i(a)) \\
 &= h \circ i(a) \\
 &= (g \circ f)(a) \\
 &= g(f(a)) \\
 &= F \circ \iota_Y(f(a)) \\
 &= F((\iota_Y \circ f)(a))
 \end{aligned}$$

En consecuencia, por el teorema 2.11, F induce una función continua $\varphi: X \cup_f Y \rightarrow Z$, única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 \pi \downarrow & \searrow F & \\
 X \cup_f Y & \xrightarrow{\varphi} & Z
 \end{array} \tag{2.2}$$

Además, φ es tal que

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \phi_X &= F \circ \iota_X \\
 &= h
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \varphi \circ \phi_Y &= F \circ \iota_Y \\
 &= g
 \end{aligned}$$

Por último, si $\psi: X \cup_f Y \rightarrow Z$ es otra función continua tal que $\psi \circ \phi_X = h$ y $\psi \circ \phi_Y = g$, entonces para $x = (x_1, 1)$ en $X \sqcup Y$, se observa que

$$\begin{aligned}
 \psi \circ \pi(x) &= \psi \circ \pi((x_1, 1)) \\
 &= \psi \circ ((\pi \circ \iota_X)(x_1)) \\
 &= \psi \circ \phi_X(x_1) \\
 &= h(x_1) \\
 &= F \circ \iota_X(x_1) \\
 &= F((x_1, 1)) \\
 &= F(x)
 \end{aligned}$$

De manera similar, para $y = (y_2, 2)$ en $X \sqcup Y$ se tiene $\psi \circ \pi((y)) = F(y)$; esto es, $\psi \circ \pi = F$. lo cual implica, por la unicidad de φ en (2.2), que $\varphi = \psi$. \square

Teorema 2.26. Sean X, Y , espacios topológicos, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $f: A \rightarrow Y$ continua. Considere el espacio $X \cup_f Y$ junto con la proyección canónica $\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y$. Entonces

- a) $\pi|_Y: Y \rightarrow \pi(Y)$ es un homeomorfismo y $\pi(Y)$ es un subespacio cerrado de $X \cup_f Y$.

- b) $\pi|_{X \setminus A}: X \setminus A \longrightarrow \pi(X \setminus A)$ es un homeomorfismo y $\pi(X \setminus A)$ es un subespacio abierto de $X \cup_f Y$.

Demostración.

- a) Como π es continua entonces $\pi|_Y$ es continua por restricción. Es claro que $\pi|_Y$ es sobreyectiva. Es inyectiva porque la relación de equivalencia \sim no identifica puntos de Y entre sí. Por otro lado, para $V \subseteq Y$ cerrado se tiene que $f^{-1}(V)$ es cerrado en A . Como este último es cerrado en X , se sigue que $f^{-1}(V)$ es cerrado en X . Considere el conjunto

$$f^{-1}(V) \sqcup V = (f^{-1}(V) \times \{1\}) \cup (V \times \{2\})$$

y sea $x \in f^{-1}(V) \sqcup V$. Si $x \in f^{-1}(V)$ entonces $f(x) \in V$, en cuyo caso $\pi(x) = \pi(f(x)) \in \pi(V)$, es decir, $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$. Si $x \in V$ entonces es claro que $\pi(x) \in \pi(V)$ de modo que $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$. Por tanto, $f^{-1}(V) \sqcup V \subseteq \pi^{-1}(\pi(V))$. De manera similar, si $x \in \pi^{-1}(\pi(V))$, es claro que $x \in f^{-1}(V) \sqcup V$ de acuerdo a como está definida \sim . Así, $f^{-1}(V) \sqcup V = \pi^{-1}(\pi(V))$, lo cual implica que $\pi|_Y$ es una función cerrada. De todo lo anterior se concluye que $\pi|_Y$ es un homeomorfismo.

- b) Si $U \subseteq X \setminus A$ es abierto entonces U es abierto en X porque $X \setminus A$ es abierto (A es cerrado), luego de acuerdo a como está definida \sim se sigue que

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U$$

esto es, $\pi(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$ (en particular, $\pi(X \setminus A)$). Por tanto, $\pi|_{X \setminus A}$ es una función continua, biyectiva y abierta, es decir, $\pi|_{X \setminus A}$ es un homeomorfismo sobre su imagen $\pi(X \setminus A)$. \square

Ejemplo 2.27. Sean $X = Y = [0, 1]$, $A = [0, 1] \subseteq X$ y $i: A \hookrightarrow Y$ la inclusión. $[0, 1]$ considerado como subespacio de \mathbb{R} es Hausdorff y por tanto $X \sqcup Y$ es Hausdorff; sin embargo, el espacio adjunto $X \cup_i Y$ no es Hausdorff. En efecto, se observa inicialmente que las clases de equivalencia de la relación de equivalencia generada por la relación

$$(x_1, 1) \sim (x_2, 2) \iff x_2 = i(x_1) = x_1$$

son

- $[(x_1, 1)] = \{(x_1, 1)\} \cup \{(x_2, 2) \mid x_2 = x_1\}$ para todo $x_1 \in A$
- $[(1, 1)] = \{(1, 1)\}$
- $[(1, 2)] = \{(1, 2)\}$

Por tanto, de la definición de la topología en $X \cup_i Y$ se sigue que las vecindades abiertas de $(1, 1)$, $(1, 2)$ en $X \cup_i Y$ son precisamente aquellas que contienen subconjuntos de la forma

$$\begin{aligned} (\epsilon, (1, 1)] &= (\epsilon, 1) \cup \{(1, 1)\} \\ (\epsilon, (1, 2)] &= (\epsilon, 1) \cup \{(1, 2)\} \end{aligned}$$

donde $\epsilon > 0$; pero esto significa que los “dos unos” $(1, 1)$, $(1, 2)$, no se pueden separar por vecindades ya que la intersección de $(\epsilon, (1, 1)]$, $(\epsilon, (1, 2)]$ siempre es distinta de vacío:

$$(\epsilon, (1, 1)] \cap (\epsilon, (1, 2)] = (\epsilon, 1)$$

Intuitivamente, el espacio $X \cup_i Y$ luce como un intervalo con “dos unos”.

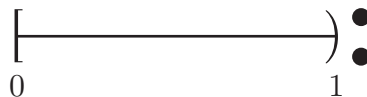


Figura 2.9.

A pesar de que la propiedad Hausdorff en general no es heredada por los espacios adjuntos, es importante señalar algunas situaciones en las cuales esto sucede. La primera, ocurre cuando $A \subseteq X$ es compacto y X, Y , son Hausdorff.

Teorema 2.28. Sean X, Y , Hausdorff, $A \subseteq X$ compacto y $f: A \rightarrow X$ continua. Entonces $X \cup_f Y$ es Hausdorff.

Demostración. Si $Z \subseteq X \sqcup Y$ es cerrado entonces Z es de la forma

$$Z = U \sqcup V$$

donde U, V , son cerrados en X, Y respectivamente. Como f es una función continua con dominio compacto y codominio Hausdorff entonces f es cerrada. Siendo $A \cap U$ cerrado se sigue que $f(A \cap U) \subseteq Y$ es cerrado; luego dado que

$$\pi^{-1}(\pi(Z)) = Z \cup f(A \cap U) \cup f^{-1}(V \cup f(U \cap A))$$

es cerrado en $X \sqcup Y$, $\pi(Z)$ es cerrado en $X \cup_f Y$ y en consecuencia π es cerrada. Por otra parte, para $z \in X \sqcup Y$ se observa que

$$\pi^{-1}(\pi(z)) = \begin{cases} \{z\} & \text{si } z \in (X \setminus A) \cup (Y \setminus f(A)) \\ \{z\} \cup f^{-1}(z) & \text{si } z \in f(A) \end{cases}$$

lo cual indica que la fibra de $\pi(z)$ es compacta en cualquier caso. Así, para puntos distintos z, z' de $X \cup_f Y$, las fibras $\pi^{-1}(z), \pi^{-1}(z')$ son disjuntas y compactas. Además, como $X \sqcup Y$ es Hausdorff, existen abiertos disjuntos $W_z, W_{z'}$ en $X \sqcup Y$ tales que $\pi^{-1}(z) \subseteq W_z$ y $\pi^{-1}(z') \subseteq W_{z'}$; luego como π es cerrada, por el teorema 1.33, existen abiertos $U_z, U_{z'}$ en $X \cup_f Y$ con

$$\begin{aligned} z &\in U_z \\ \pi^{-1}(U_z) &\subseteq W_z \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} z' &\in U_{z'} \\ \pi^{-1}(U_{z'}) &\subseteq W_{z'} \end{aligned}$$

Más aún, $U_z \cap U_{z'} = \emptyset$, ya que $W_z, W_{z'}$, son disjuntos; por tanto, $X \cup_f Y$ es Hausdorff. \square

La segunda situación se presenta cuando X es regular, y $A \subseteq X$ es un subespacio cerrado que es un retracto de una vecindad de X .

Teorema 2.29. Sea Y Hausdorff. Si X es regular y $A \subseteq X$ un subespacio cerrado que es un retracto de una vecindad de X entonces $X \cup_f Y$ es Hausdorff.

Demostración. Sean $z, z' \in X \cup_f Y$, con $z \neq z'$. A fin de encontrar abiertos disjuntos $U_z, U_{z'}$ de z, z' , se distinguen 3 casos:

- i. $z, z' \in X \setminus A$: Dado que $X \setminus A$ es Hausdorff, existen abiertos disjuntos $U_z, U_{z'}$ en $X \setminus A$ tales que $z \in U_z, z' \in U_{z'}$. Más aún, como $X \setminus A$ es abierto, del teorema 2.26 se obtiene que $\pi(U_z), \pi(U_{z'})$ son vecindades abiertas disjuntas de z, z' , en $X \cup_f Y$ respectivamente.
- ii. $z \in X \setminus A, z' \in Y$: Siendo X regular, $A \subseteq X$ un subespacio cerrado y $z \notin A$, existen abiertos disjuntos U_z, V en X tales que

$$\begin{aligned} z &\in U_z \subseteq X \setminus A \\ A &\subseteq V \\ \bar{U}_z \cap \bar{V} &= \emptyset \end{aligned}$$

En particular, como $U_z \subseteq X \setminus A$, por el teorema 2.26 se sigue que $\pi(U_z)$ es una vecindad abierta de z en $X \cup_f Y$. Sea $W = \pi(\bar{U}_z)$ y $U_{z'} = X \cup_f Y \setminus W$, luego

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_{z'}) &= \pi^{-1}(X \cup_f Y \setminus W) \\ &= X \setminus \bar{U}_z \cup Y \end{aligned}$$

es abierto en $X \sqcup Y$, es decir, $U_{z'}$ es una vecindad abierta de z' en $X \cup_f Y$. Más aún, $U_{z'} \cap \pi(U_z) = \emptyset$.

- iii. $z, z' \in Y$: Si Y es Hausdorff entonces existen vecindades disjuntas y abiertas $V_z, V_{z'}$ de z, z' respectivamente; luego $f^{-1}(V_z), f^{-1}(V_{z'})$, son abiertos en A . Sea

$$r: N \longrightarrow A$$

una retracción de una vecindad $N \subseteq X$ abierta en A . Si se definen

$$\begin{aligned} W_z &= (f \circ r)^{-1}(V_z) \\ W_{z'} &= (f \circ r)^{-1}(V_{z'}) \end{aligned}$$

se observa que $W_z, W_{z'}$, son abiertos disjuntos en N y por tanto abiertos en X . Más aún, como r es una retracción se obtiene

$$\begin{aligned} W_z \setminus A &= W_z \setminus f^{-1}(V_z) \\ W_{z'} \setminus A &= W_{z'} \setminus f^{-1}(V_{z'}) \end{aligned}$$

luego, si se consideran los subconjuntos $U_z, U_{z'}$, en $X \cup_f Y$ definidos por

$$\begin{aligned} U_z &= (W_z \setminus A) \cup V_z \\ U_{z'} &= (W_{z'} \setminus A) \cup V_{z'} \end{aligned}$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_z) &= \pi^{-1}((W_z \setminus A) \cup V_z) \\ &= (W_z \setminus A) \cup f^{-1}(V_z) \cup V_z \\ &= W_z \setminus f^{-1}(V_z) \cup f^{-1}(V_z) \cup V_z \\ &= W_z \cup V_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_{z'}) &= \pi^{-1}((W_{z'} \setminus A) \cup V_{z'}) \\ &= (W_{z'} \setminus A) \cup f^{-1}(V_{z'}) \cup V_{z'} \\ &= W_{z'} \setminus f^{-1}(V_{z'}) \cup f^{-1}(V_{z'}) \cup V_{z'} \\ &= W_{z'} \cup V_{z'} \end{aligned}$$

son abiertos en $X \sqcup Y$ y por tanto, $U_z, U_{z'}$ son vecindades abiertas de z, z' en $X \cup_f Y$ con $U_z \cap U_{z'} = \emptyset$. \square

Si X, Y , son espacios topológicos compactos entonces $X \sqcup Y$ es compacto por el ítem 5 de la observación 1.115, lo cual implica que $X \cup_f Y$ es compacto pues $X \cup_f Y = \pi(X \sqcup Y)$. Por tanto, se tiene:

Teorema 2.30. *Si X, Y , son espacios topológicos compactos, $A \subseteq X$ es un subespacio, y $f: A \longrightarrow Y$ es una función continua. Entonces $X \cup_f Y$ es compacto.*

Observación 2.31.

1. En general, la adjunción de espacios segundo contable no es segundo contable. Por ejemplo, se puede probar que el espacio adjunto de un número contable de esferas \mathbb{S}^1 no es primero contable.
2. Para el caso de espacios adjuntos segundo contables conviene recordar la proposición 2.15.

Ejemplo 2.32. Sea X un espacio topológico, $Y = \{y_0\}$ un espacio trivial. Observe que el conjunto $X \times \{0\}$ es cerrado en $X \times [0, 1]$. Sea f la función

$$\begin{aligned} f: X \times \{0\} &\longrightarrow Y \\ (x, 0) &\longmapsto y_0 \end{aligned}$$

Al espacio adjunto $(X \times [0, 1]) \cup_f Y$, el cual se denota por CX , se le conoce como *el cono sobre X* . En particular, el punto $[X \times \{0\}]$ es referido como el *vértice* del cono. Si

$$\pi: (X \times [0, 1]) \sqcup Y \longrightarrow CX$$

es la proyección cociente, entonces por el teorema 2.26, $\pi|_Y$ es un homeomorfismo de Y en $\pi(Y)$, donde $\pi(Y)$ es un subespacio cerrado de CX . Más aún, como $[(x, 1), 1] = \{(x, 1), 1\}$ para todo $x \in X$, se tiene que $\pi|_{X \times \{1\}}$ es un homeomorfismo de $X \times \{1\}$ en $\pi(X \times \{1\})$, este último cerrado en CX ; luego como X es homeomorfo a $X \times \{1\}$ y este es homeomorfo a $(X \times \{1\}) \times \{1\}$, se obtiene que X es homeomorfo a $\pi(X \times \{1\})$.

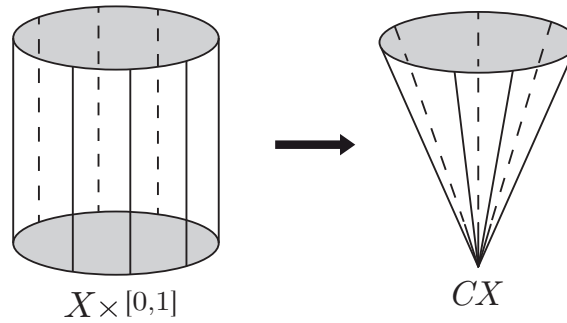


Figura 2.10. Cono sobre X .

Ejemplo 2.33. Si en CX del ejemplo anterior se considera la relación de equivalencia generada por todas las identificaciones de la forma

$$(z, 1) \sim (z', 1)$$

para todo $z, z' \in X \times \{1\}$, entonces el espacio cociente $CX / X \times \{1\}$, el cual se denota por ΣX , se le llama la *suspensión de X* . En este caso, los puntos $[(x, 0), 1], [(x, 1), 1]$ son los *vértices* de ΣX , X es homeomorfo a $\pi(X \times \{1/2\})$, donde $\pi: CX \longrightarrow \Sigma X$ es la proyección cociente.

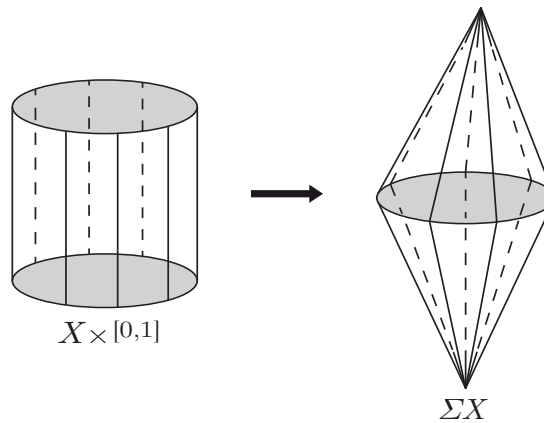


Figura 2.11. Suspensión de X .

Teorema 2.34. Sean X, Y , espacios conexos, $A \subseteq X$ un subespacio y $f: A \longrightarrow Y$ una función continua. Entonces $X \cup_f Y$ es conexo.

Demostración. Sean X, Y , espacios conexos, $A \subseteq X$ un subespacio y $f: A \longrightarrow Y$ una función continua. Como X y Y entonces $\pi(X), \pi(Y)$, son conexos por el teorema 1.57; luego para $x \in A$ y $y \in Y$ con $f(x) = y$ se tiene que $\pi((x, 1)) = \pi((y, 2))$; luego como

$$X \cup_f Y = \pi(X) \cup \pi(Y)$$

y $z = [(x, 1)] = [(y, 2)] \in \pi(X) \cap \pi(Y)$, entonces por la proposición 1.50 se concluye que $X \cup_f Y$ es conexo. \square

Observe que un argumento similar al anterior se puede utilizar en el caso de que X, Y sean conexos por caminos: Como $\pi(X), \pi(Y)$ son conexos por caminos y tienen al menos un punto en común z , entonces de la proposición 1.57 se sigue que $X \cup_f Y$ es conexo por caminos.

Teorema 2.35. Sean X, Y , espacios conexos, $A \subseteq X$ un subespacio y $f: A \rightarrow Y$ una función continua. Entonces $X \cup_f Y$ es conexo por caminos.

Ejemplo 2.36. Sea $A = \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$ y $i: A \hookrightarrow \mathbb{D}^2$ la inclusión. El espacio adjunto $\mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2$ es homeomorfo a \mathbb{S}^2 . En efecto, a partir del diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{D}^2 & \\
 \iota_1 \swarrow & & \searrow g \\
 \mathbb{D}^2 \sqcup \mathbb{D}^2 & & \mathbb{S}^2 \\
 \iota_2 \swarrow & & \nearrow h \\
 & \mathbb{D}^2 &
 \end{array}$$

donde g, h son los homeomorfismos que van del disco al hemisferio inferior y superior de \mathbb{S}^2 respectivamente,

$$\begin{aligned}
 g: \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\
 (x_1, x_2) &\longmapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 1}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h: \mathbb{D}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\
 (x_1, x_2) &\longmapsto \left(\frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{2x_2}{x_1^2 + x_2^2 + 1}, \frac{1 - (x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2 + 1} \right)
 \end{aligned}$$

entonces por la propiedad universal de la unión disjunta existe una función continua

$$F: \mathbb{D}^2 \sqcup \mathbb{D}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$$

única tal que

$$\begin{aligned}
 F \circ \iota_1(x) &= g(x) \\
 F \circ \iota_2(x) &= h(x)
 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{D}^2$. Más aún, como F es una función sobreyectiva y es tal que

$$F \circ \iota_1(x) = F \circ \iota_2(x)$$

para todo $x \in \mathbb{S}^1$, esto es, F es constante en las fibras de $\pi: \mathbb{D}^2 \sqcup \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2$, entonces por la propiedad universal de cociente existe una función continua $\tilde{F}: \mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, única tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}^2 \sqcup \mathbb{D}^2 & & \\
 \pi \downarrow & \searrow F & \\
 \mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2 & \xrightarrow{\tilde{F}} & \mathbb{S}^2
 \end{array}$$

Siendo \tilde{F} biyectiva, \mathbb{S}^2 Hausdorff y $\mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2$ compacto, entonces \tilde{F} es un homeomorfismo. Note que $\mathbb{D}^2 \cup_i \mathbb{D}^2$ es conexo por caminos (y por tanto conexo) por el teorema anterior.

Capítulo 3

Superficies

Intuitivamente, lo que distingue a una superficie de un espacio topológico arbitrario es que este tipo de espacio posee la propiedad de que para cada uno de sus puntos existe una vecindad que luce *localmente* como una pequeña región del plano; en otras palabras, una superficie es un espacio topológico el cual puede ser cubierto por conjuntos abiertos los cuales son homeomorfos a bolas abiertas del plano. Esta idea puede generalizarse a dimensiones superiores lo cual da lugar al concepto de *variedad topológica*.

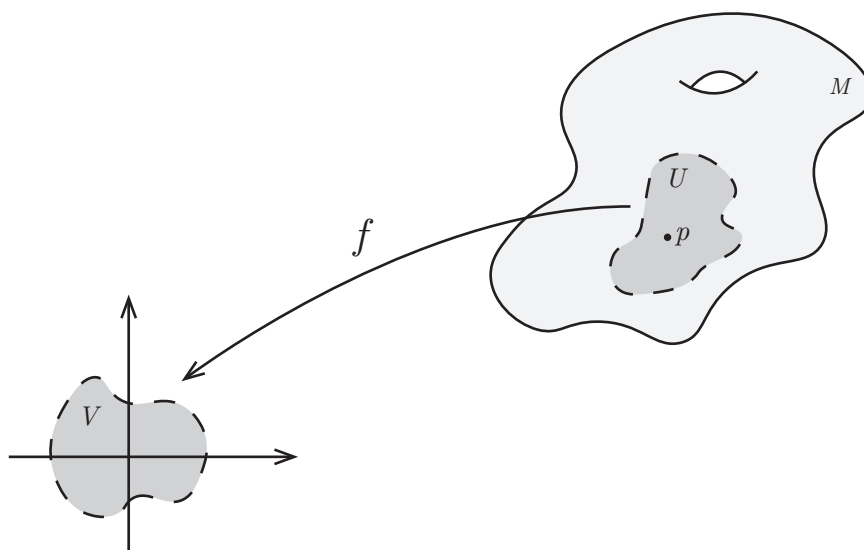


Figura 3.1. Superficie

3.1 Superficies

Definición 3.1. Sea n un entero positivo. Una **n -variedad topológica** es un espacio conexo, Hausdorff, segundo contable, M , el cual es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Una **superficie** es una 2-variedad. En este caso se dice que M es una superficie sin frontera.

Observación 3.2.

1. Si M es una n -variedad topológica y $p \in M$ entonces existen abiertos $U \subseteq M$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $p \in U$, y un homeomorfismo $f: U \rightarrow V$. En esta situación, al par (U, f) se le denomina una **carta** para p en M , mientras que el par (V, f^{-1}) se denomina una **parametrización** para p en M . Si V es una bola abierta en \mathbb{R}^n , entonces se dice que U es una **bola coordenada** de p en M .
2. Sea M una n -variedad topológica y $p \in M$. Si $(U, f), f: U \rightarrow V$, es una carta para p en M , entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(p), \epsilon) \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$, en cuyo caso $f^{-1}(B(f(p), \epsilon)) \subseteq U$ es una vecindad abierta de p en M . Por tanto, M posee una base constituida por bolas coordenadas que son homeomorfas a bolas abiertas de \mathbb{R}^n . Más aún, del ejemplo 1.36 se concluye que cada punto de la n -variedad M posee una vecindad abierta homeomorfa a \mathbb{R}^n .

3. Una pregunta que surge a partir de la definición de variedad es sobre la posibilidad de que una variedad M sea simultáneamente una n -variedad y m -variedad para $n \neq m$. Por ejemplo, ¿una superficie puede ser una curva? Afortunadamente, para el caso de variedades topológicas conexas esto no es posible. Usando el *Teorema de invarianza de la dimensión*^{3.1}, se puede probar que una m -variedad conexa no es una n -variedad para $n \neq m$. En el capítulo 5 se presentará una demostración parcial de hecho, aunque se asumirá como cierto en lo sucesivo.
4. Aparte de la conexidad, en la definición adoptada de variedad topológica se exige que M sea Hausdorff y segundo contable. Este requerimiento obedece a que dichas propiedades no se siguen de las condiciones locales impuestas para M . En efecto, considere inicialmente el espacio producto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ donde el primer factor posee la topología usual y el segundo factor posee la topología discreta. Es claro que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es un espacio Hausdorff ya que ambos factores son espacios Hausdorff, y es localmente homeomorfo a \mathbb{R} ya que para todo $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, el conjunto $\mathbb{R} \times \{y\}$ es una vecindad abierta de (x, y) , en cuyo caso la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \times \{y\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

es un homeomorfismo; sin embargo, no es segundo contable ya que el segundo factor no posee una base contable para su topología. Como $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ no cumple esta última propiedad entonces se tiene que dicho espacio no es una 1-variedad. Por otro lado, si se toma \mathbb{R} con la topología usual y se considera en $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ la relación de equivalencia \sim generada por la relación R

$$(x, 1)R(x, 2) \iff x \neq 0$$

entonces el espacio cociente $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$, conocido como la *recta con dos orígenes*, es un espacio segundo contable, localmente homeomorfo a \mathbb{R} , pero no Hausdorff. Para la primera afirmación note primero que \mathbb{R} es segundo contable, lo cual implica que $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$ es segundo contable por el ítem 4 de la observación 1.115; luego como la proyección canónica

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim \\ x &\longmapsto [x] \end{aligned}$$

es una función continua y es tal que para abiertos básicos (a, b) , (c, d) de \mathbb{R} ,

$$\pi^{-1}(\pi((a, b) \sqcup (c, d))) = ((a, b) \cup (c, d)) \sqcup ((a, b) \cup (c, d)) ; 0 \notin (a, b) \cup (c, d)$$

$$\pi^{-1}(\pi((a, b) \sqcup (c, d))) = (a, b) \cup (c, d) \sqcup ((a, 0) \cup (0, b) \cup (c, d)) ; 0 \in (a, b), 0 \notin (c, d)$$

$$\pi^{-1}(\pi((a, b) \sqcup (c, d))) = ((a, b) \cup (c, 0) \cup (d, 0)) \sqcup ((a, 0) \cup (0, b) \cup (c, d)) ; 0 \in (a, b) \cap (c, d)$$

es un conjunto abierto en $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$, entonces se sigue π es abierta lo cual implica que $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$ es segundo contable de acuerdo al teorema 1.97. Por otro lado, como la función sobreyectiva

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, i) &\longmapsto x \quad ; i = 1, 2 \end{aligned}$$

es continua y es constante en las fibras de π , por la propiedad universal del cociente, existe una función continua \bar{f} , única tal que $\bar{f} \circ \pi = f$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} & & \\ \downarrow \pi & \searrow f & \\ \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathbb{R} \end{array}$$

3.1. El teorema de invarianza de la dimensión establece que \mathbb{R}^n es homeomorfo a \mathbb{R}^m si y solo si $m = n$.

Observe que \bar{f} es una función sobreyectiva, pero no es inyectiva ya que

$$\bar{f}([(0, 1)]) = \bar{f}([(0, 2)])$$

$$[(0, 1)] \neq [(0, 2)]$$

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, en cuyo caso el conjunto

$$\pi(B(x, \epsilon) \sqcup B(x, \epsilon))$$

es una vecindad abierta de $[x]$ en $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$. Restringiendo \bar{f} a dicha vecindad se obtiene el homeomorfismo

$$\begin{aligned} \bar{f}|_{\pi(B(x, \epsilon) \sqcup B(x, \epsilon))}: \pi(B(x, \epsilon) \sqcup B(x, \epsilon)) &\longrightarrow B(x, \epsilon) \subseteq \mathbb{R} \\ [y] &\longmapsto y \end{aligned}$$

De forma similar, si para los puntos $[(0, 1)], [(0, 2)]$ se consideran respectivamente las vecindades abiertas

$$\pi(B(0, \epsilon) \sqcup (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon))$$

$$\pi((-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \sqcup B(0, \epsilon))$$

y se restringe \bar{f} a cada una de ellas, se obtiene en cada caso un homeomorfismo con el conjunto $B(0, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}$. Así, se concluye que $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R} . Por último, si U, V son vecindades abiertas disjuntas de $[(0, 1)], [(0, 2)]$ respectivamente, entonces

$$\pi^{-1}(U) = A \sqcup B; (0, 2) \notin B$$

$$\pi^{-1}(V) = D \sqcup C; (0, 1) \notin D$$

son conjuntos abiertos, donde A, B, C, D , son abiertos en \mathbb{R} . Por tanto, existen $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$ tal que $B(0, \epsilon_1) \subseteq A, B(0, \epsilon_2) \subseteq C$, lo cual implica que

$$\pi(B(0, \epsilon_1) \sqcup B) \subseteq U$$

$$\pi(D \sqcup B(0, \epsilon_2)) \subseteq V$$

Note que para cada $x \in (-\epsilon, \epsilon)$, con $x \neq 0$ y $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$,

$$[x] \in \pi(B(0, \epsilon_1) \sqcup B) \cap \pi(D \sqcup B(0, \epsilon_2))$$

es decir, $U \cap V \neq \emptyset$, lo cual es absurdo. En consecuencia, $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} / \sim$ no es Hausdorff. El caso de un espacio Hausdorff, segundo contable, pero no localmente homeomorfo a \mathbb{R} se exhibe en el ejemplo 3.10.

Ejemplo 3.3. Sea M una n -variedad y $U \subseteq M$ abierto y conexo. Entonces U es una n -variedad. En efecto, sea $p \in U$. Como M es una n -variedad, existe $V \subseteq M$ abierto, con $p \in V$, y un homeomorfismo $f: V \rightarrow W$, donde W es abierto en \mathbb{R}^n ; luego, $U \cap V \subseteq U$ es un abierto en U el cual es homeomorfo al abierto $f(U \cap V) \subseteq W$. Más aún, como $f(p) \in f(U \cap V)$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f(p), \epsilon) \subseteq f(U \cap V)$, en cuyo caso $f^{-1}(B(f(p), \epsilon))$ es una vecindad abierta de p contenida en U la cual es homeomorfa a $B(f(p), \epsilon) \cong \mathbb{R}^n$. Por tanto, U es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n . Como M es un espacio Hausdorff y segundo contable, entonces U es Hausdorff y segundo contable; así, U es una n -variedad.

Ejemplo 3.4. La esfera n -dimensional $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ es una n -variedad. Para ver esto, note primero que \mathbb{S}^n es Hausdorff y segundo contable por ser un subespacio de \mathbb{R}^{n+1} el cual es Hausdorff y segundo contable. Por otra parte, como los conjuntos

$$U = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, 1_{n+1})\}$$

$$V = \mathbb{S}^n \setminus \{(0, \dots, -1_{n+1})\}$$

son subconjuntos abiertos de \mathbb{S}^n tal que $\mathbb{S}^n = U \cup V$, y las funciones

$$\begin{aligned} f: U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: V &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

son homeomorfismos con inversas

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow U \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto t(y_1, \dots, y_n, 1 - t) ; t = 2 / \left(1 + \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^{-1}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow V \\ (y_1, \dots, y_n) &\longmapsto t(y_1, \dots, y_n, t - 1) ; t = 2 / \left(1 + \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2 \right) \end{aligned}$$

entonces, en particular, se tiene que U, V , son conjuntos conexos. Más aún, como $U \cap V \neq \emptyset$, entonces se concluye que \mathbb{S}^n es conexo por la propiedad 1.50.

Ejemplo 3.5. Si M es una m -variedad y N es una n -variedad entonces el espacio producto $M \times N$ es una $(m+n)$ -variedad. En efecto, de acuerdo a la observación 1.122 se tiene que $M \times N$ es un espacio Hausdorff, segundo contable y conexo. Además, si $U \subseteq M$, $U' \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq N$, $V' \subseteq \mathbb{R}^n$, son conjuntos abiertos, y $f_1: U \rightarrow U'$, $f_2: V \rightarrow V'$ son homeomorfismos, entonces la función definida por

$$\begin{aligned} f: U \times V &\longrightarrow U' \times V' \\ (u, v) &\longmapsto f(u, v) = (f_1(u), f_2(v)) \end{aligned}$$

es un homeomorfismo y $U' \times V' \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$.

Ejemplo 3.6. Con bases en los ejemplos 3.5 y 3.6 se sigue que $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es una 2-variedad. Más aún, del ejemplo 2.18 se sigue que el toro \mathbb{T}^2 es una superficie pues es homeomorfo al espacio producto $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Ejemplo 3.7. El plano proyectivo real de dimensión n , $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$, es una n -variedad. En efecto, como \mathbb{S}^n es conexo, entonces del ejemplo 2.20 se tiene que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es conexo y Hausdorff; por otra parte, para cada $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ se observa que que $y \in \pi^{-1}([x])$ si y solo si existe $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $y = \lambda x$; lo anterior significa que

$$\pi^{-1}([x]) = \{\lambda x \mid \lambda \neq 0 \in \mathbb{R}\}$$

Por tanto, dado $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \{\lambda x \mid x \in U\} \\ &= \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} f_\lambda(U) \end{aligned} \tag{3.1}$$

en que para cada $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f_λ es el homeomorfismo definido por

$$\begin{aligned} f_\lambda: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto f_\lambda(x) = \lambda x \end{aligned}$$

Por tanto, si $U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es abierto, entonces para todo $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se tiene que $f_\lambda(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, lo cual implica, de acuerdo a (3.1), que $\pi(U)$ es abierto en $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$. De lo anterior, se sigue que $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es una función abierta. Como $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es segundo contable, entonces por el teorema 1.97 se concluye que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es segundo contable. Para probar que $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ es localmente homeomorfo a \mathbb{R}^n , considere inicialmente los conjuntos

$$V_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x_\alpha \neq 0\}; \alpha = 1, \dots, n+1$$

$$U_\alpha = \pi(V_\alpha)$$

Para cada $\alpha = 1, \dots, n+1$, se tiene que $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es un conjunto abierto y saturado respecto a

$$\begin{aligned} q: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ x &\longmapsto q(x) = [x] \end{aligned}$$

En efecto, es claro que $V_\alpha \subseteq q^{-1}(q(V_\alpha))$. Si $y \in q^{-1}(q(V_\alpha))$ entonces $q(y) \in q(V_\alpha)$, por tanto, existe $x \in V_\alpha$ tal que $q(y) = q(x)$, esto es, $y = \lambda x$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, luego como $x_\alpha \neq 0$, se sigue que $y_i = \lambda x_\alpha \neq 0$, y en consecuencia $y \in V_\alpha$. Así, $q^{-1}(q(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$ de modo que $V_\alpha = q^{-1}(q(V_\alpha))$. Dado que para cada $\alpha = 1, \dots, n+1$, se tiene que

$$V_\alpha = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \setminus \pi_\alpha^{-1}(\{0\})$$

donde

$$\begin{aligned} \pi_\alpha: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}_\alpha \\ (x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_n) &\longmapsto x_\alpha \end{aligned}$$

$$\pi_\alpha^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}_1 \times \dots \times \{0\}_\alpha \times \dots \times \mathbb{R}_{n+1}$$

entonces V_α es abierto. De lo anterior, se sigue que $U_\alpha = \pi(V_\alpha)$ es abierto para $\alpha = 1, \dots, n+1$. Más aún, si $v \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$, entonces existe $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y $\alpha \in \{1, \dots, n+1\}$ tal que $v = [x]$ y $x_\alpha \neq 0$, es decir, $v = [x] \in \pi(V_\alpha) = U_\alpha$, de donde se concluye que

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^{n+1} U_\alpha$$

Finalmente, si para cada $\alpha = 1, \dots, n+1$, se define

$$\begin{aligned} f_\alpha: U_\alpha &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ [(x_1, \dots, x_{n+1})] &\longmapsto f_\alpha([(x_1, \dots, x_{n+1})]) = \left(\frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right) \end{aligned}$$

entonces se tiene que f_α es función continua ya que

$$\begin{aligned} f_\alpha \circ q|_{V_\alpha}: V_\alpha &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \frac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_\alpha} \right) \end{aligned}$$

es continua para todo $\alpha = 1, \dots, n+1$. En este caso,

$$\begin{aligned} f_\alpha^{-1}: \mathbb{R}^n &\longrightarrow U_\alpha \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto [(x_1, \dots, x_{\alpha-1}, 1, x_{\alpha+1}, \dots, x_n)] \end{aligned}$$

es también continua pues $f_\alpha^{-1} = q \circ g_\alpha$, donde g_α es la función continua

$$\begin{aligned} g_\alpha: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, 1, x_{\alpha+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Así, para $\alpha = 1, \dots, n+1$ se concluye que f_α es una función biyectiva, continua, con inversa continua, esto es, f_α es un homeomorfismo.

Ejemplo 3.8. El subespacio de \mathbb{R}^3 definido por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2\}$$

conocido como el doble cono, no es una superficie. En efecto, si A fuese una superficie entonces en particular para el punto $p = (0, 0, 0)$ existe un homeomorfismo

$$f: U \longrightarrow W$$

donde U es una vecindad abierta de p en A y W es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 . Más aún, si $a \in W$ es tal que $f(p) = a$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(a, \epsilon) \subseteq W$, en cuyo caso, $V = f^{-1}(B(a, \epsilon))$ es una vecindad abierta de p contenida en U y $f|_V: V \longrightarrow B(a, \epsilon)$ es un homeomorfismo. Como V es abierto y $p \in V$ entonces V contiene una bola $B(p, \gamma)$ para algún $\gamma > 0$, lo cual implica que V contiene puntos de la parte inferior y superior de A , a saber, el conjunto $\{q = (x, y, z) \in A \mid |z| < \gamma/\sqrt{2}\}$; luego, dado que $V, B(a, \epsilon)$ son homeomorfos entonces se sigue que los conjuntos $V \setminus \{p\}, B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$, son homeomorfos, sin embargo, como el número de componentes conexas de $V \setminus \{p\}$ es 2,

$$V_- = \{w = (x, y, z) \in V \mid z > 0\}$$

$$V_+ = \{w = (x, y, z) \in V \mid z < 0\}$$

y el número de componentes conexas de $B(a, \epsilon) \setminus \{a\}$ es 1 (la bola sin el centro aún sigue siendo conexa, ejemplo 1.62) entonces de la observación 1.52 se obtiene que V y $B(a, \epsilon)$ no pueden ser homeomorfos, lo cual es una contradicción; en consecuencia, el punto p no posee una vecindad localmente homeomorfa a un abierto de \mathbb{R}^2 de modo que A no es una superficie.

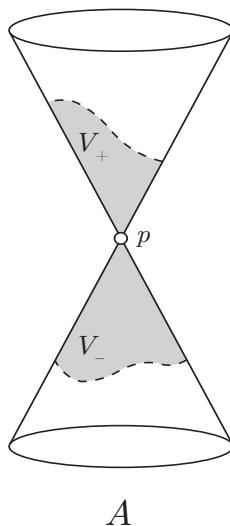


Figura 3.2.

Ejemplo 3.9. De manera similar, el subespacio de \mathbb{R}^2 definido por

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$

no es una superficie. En este caso, para cualquier vecindad abierta U en \mathbb{R}^2 del origen $(0, 0)$, se puede observar que el número de componentes conexas de $(H \cap U) \setminus \{(0, 0)\}$ es 4 mientras que el número de componentes conexas de una bola abierta $B(u, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$ agujerada es 1.

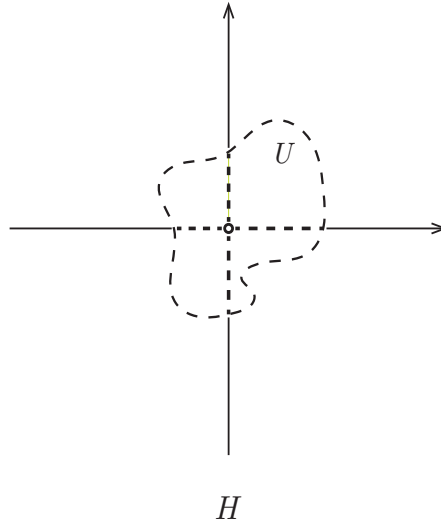


Figura 3.3.

Aunque los espacios conexos no son necesariamente conexos por caminos (ejemplo 1.60), en el caso de superficies esto es cierto.

Teorema 3.10. *Una superficie M es conexa por caminos.*

Demostración. En efecto, fije $p \in M$, y sea

$$A := \{q \in M \mid \text{existe un camino de } q \text{ a } p\}$$

Como la función

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto f(t) = p \end{aligned}$$

es un camino que conecta p con p , entonces $p \in A$ y en consecuencia $A \neq \emptyset$. Se desea probar que $A = M$. En efecto, observe que A es un subconjunto de M el cual es abierto y cerrado: dado $q \in A$, existen conjuntos abiertos $U \subseteq M$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$, con $q \in U$, y un homeomorfismo $g: U \rightarrow V$; en particular, como $g(q) \in V$, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $B(g(q), \epsilon) \subseteq V$, en cuyo caso, $g^{-1}(B(g(q), \epsilon))$ es abierto y conexo por caminos ya que es homeomorfo a $B(g(q), \epsilon)$, lo cual implica que $g^{-1}(B(g(q), \epsilon)) \subseteq A$, ya que cada punto z en dicho conjunto se conecta con q y este a su vez se conecta con p ; por tanto A es abierto. De manera similar, para $w \in M \setminus A$, existen abiertos $U' \subseteq M$, $V' \subseteq \mathbb{R}^n$, con $w \in U'$, y un homeomorfismo $g': U' \rightarrow V'$; luego, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(g'(w), \epsilon) \subseteq V'$, de modo que $(g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon))$ es abierto y conexo por caminos. Si $p \notin (g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon))$. Como cada punto $z \in (g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon))$ está conectado con w entonces z no puede estar conectado con p y por tanto $(g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon)) \subseteq M \setminus A$. Si $p \in U'$ entonces tomando $\epsilon' = \min\{\epsilon/2, d(g'(w), g'(p))/2\}$, se obtiene que $g'(p) \notin B(g'(w), \epsilon')$, luego $p \notin (g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon')) \subseteq U'$ y en consecuencia $(g')^{-1}(B(g'(w), \epsilon')) \subseteq M \setminus A$; en cualquier caso, w posee una vecindad abierta la cual se contiene en $M \setminus A$, es decir, $M \setminus A$ es abierto, luego A es cerrado. Por el teorema 1.43, se sigue que $A = M$ y por la proposición 1.57 se concluye que M es conexo por caminos. \square

Se hará ahora una breve presentación del concepto de *superficie con frontera*, el cual será importante para introducir la operación de *sumas conexas* en el capítulo 7.

3.2 Superficies con frontera

En esta sección se desea ampliar el concepto de variedad topológica para dar lugar a una nueva clase de espacios denominados *variedades topológicas con frontera*. Para lograr esto, se permite esta vez que los abiertos del espacio M sean homeomorfos a conjuntos abiertos de \mathbb{R}^n o \mathbb{H}^n , donde éste último es el subespacio cerrado de \mathbb{R}^n definido por

$$\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

El cilindro (ej. 2.17), la banda de Möbius (ej. 2.20) y las bolas cerradas en \mathbb{R}^n , son algunos de los espacios que forman parte de esta familia los cuales es preciso señalar, no son variedades en el sentido de la definición 3.1 ya que en cada caso puede observarse (intuitivamente) que los puntos que se encuentran en el borde no poseen vecindades homeomorfas a bolas abiertas del plano \mathbb{R}^2 .

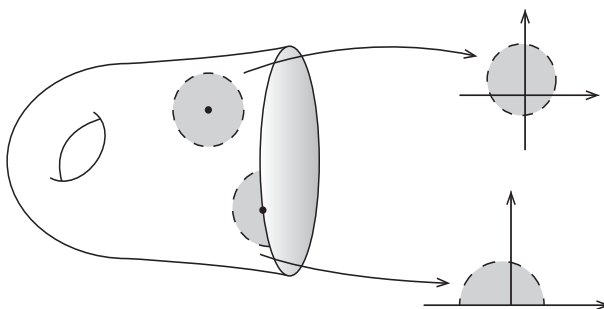


Figura 3.4. Superficie con frontera

Definición 3.11. Sea n un entero positivo. Una n -variedad topológica con frontera M es un espacio Hausdorff, segundo contable, en el cual todo punto $p \in M$ posee una vecindad abierta la cual es homeomorfa, o bien a un abierto de \mathbb{R}^n , o bien a un abierto de \mathbb{H}^n . Una **superficie con frontera** es una 2-variedad conexa con frontera.

Observación 3.12.

1. Note que una n -variedad M es también una n -variedad M con frontera (en este caso $\partial M = \emptyset$), sin embargo, el recíproco no es necesariamente cierto.
2. Dada la posibilidad de que los abiertos en M sean homeomorfos a abiertos de \mathbb{H}^n , es adecuado caracterizar la frontera y el interior de \mathbb{H}^n ,

$$\partial\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$$

$$\text{Int}\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$$

3. Si M es una n -variedad con frontera y $p \in M$ entonces existe $U \subseteq M$ abierto con $p \in U$ y un homeomorfismo $f: U \rightarrow V$. Si V es abierto en \mathbb{R}^n o abierto en \mathbb{H}^n con $V \subseteq \text{Int}\mathbb{H}^n$, entonces se dice que (U, f) es una *carta interior* de p en M y p es un *punto interior* de M . Si $V \subseteq \mathbb{H}^n$ es abierto con $V \cap \partial\mathbb{H}^n \neq \emptyset$, y $f(p) \in \partial\mathbb{H}^n$, entonces se dice que (U, f) es una *carta frontera* de p en M , y p es un *punto frontera* de M . Al conjunto de todos los puntos interiores de M se denota por $\text{Int}M$, mientras que ∂M denota el conjunto de todos los puntos frontera de M .
4. Es preciso distinguir entre la *frontera topológica de M* y la *frontera de la variedad M* . Por ejemplo, la bola abierta $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ tiene como frontera topológica a \mathbb{S}^1 con respecto a la topología del plano, sin embargo, la frontera de $B(0, 1)$ considerada como una 2-variedad es el vacío. De manera similar, para la bola cerrada $\mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ se observa que \mathbb{S}^1 es tanto su frontera topológica como su frontera como una 2-variedad, pero, note que \mathbb{B}^2 considerado como un espacio topológico en sí mismo con la topología inducida del plano posee frontera topológica igual al vacío: dado $x \in \mathbb{B}^2$, entonces existe $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $x \in U$, de modo que $x \in U \cap \mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{B}^2$, y en consecuencia x es un punto interior de \mathbb{B}^2 .

5. En una n -variedad con frontera $M \neq \emptyset$ se verifica que $\text{Int}M$ es un subconjunto abierto de M el cual es en sí mismo una n -variedad *sin frontera*. De manera similar, se tiene ∂M que es una $n - 1$ variedad. A las componentes conexas de ∂M se le conocen como *contornos*.
6. Si M es una n -variedad con frontera y $p \in M$ entonces parece ser claro que p es un punto de la frontera de M o un punto del interior de M , esto es, $\text{Int}M \cap \partial M = \emptyset$. Este hecho, conocido como el *teorema de la invarianza de la frontera*, pese a su aparente simpleza, requiere de conceptos teóricos muy sofisticadas que sobrepasan los objetivos del presente trabajo y por lo tanto no se hará una demostración del mismo, aunque se asumirá como cierto en lo sucesivo. En consecuencia, ∂M es un conjunto cerrado y $\partial M = \emptyset$ si y solo si M es una n -variedad.

Ejemplo 3.13. \mathbb{H}^n es en sí mismo una n -variedad con frontera con la función identidad como carta global.

Ejemplo 3.14. El intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ es una 1-variedad con frontera. En efecto, basta observar que las funciones

$$\begin{aligned} f: [0, 1) &\longrightarrow [0, 1) \\ x &\longmapsto f(x) = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: (0, 1] &\longrightarrow [0, 1) \\ x &\longmapsto g(x) = 1 - x \end{aligned}$$

son homeomorfismos donde $[0, 1)$ es abierto en $\mathbb{H}^1 = [0, \infty)$. En este caso, observe que la frontera topológica de $[0, 1]$ como subespacio de \mathbb{R} coincide con su frontera como una 1-variedad.

Ejemplo 3.15. Cualquier bola cerrada $\bar{B}(p, \epsilon) \subseteq \mathbb{R}^n$ es una n -variedad con frontera. En efecto, dado que cualquier bola cerrada $\bar{B}(p, \epsilon)$ en \mathbb{R}^n es homeomorfa a la bola unitaria cerrada \mathbb{B}^n por medio de la función

$$\begin{aligned} \mathbb{B}^n &\longrightarrow \bar{B}(p, \epsilon) \\ x &\longmapsto \epsilon x + p \end{aligned}$$

entonces basta probar que ésta última es una superficie con frontera. Para ello, observe primero que \mathbb{B}^n es segundo contable y Hausdorff por ser un subespacio de \mathbb{R}^n . Para todo $x \in B(0, 1)$, el par $(B(0, 1), \text{Id}_{B(0,1)})$ constituye una carta local de x en \mathbb{B}^n . No obstante, solo resta construir cartas frontera para cada punto $x \in \partial \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$. Considerando \mathbb{B}^n como subespacio de \mathbb{R}^{n+1} y teniendo en cuenta la proyección estereográfica desde el polo sur $s = (0, \dots, -1_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$,

$$\begin{aligned} h: \mathbb{S}^n \setminus \{s\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

defina para cada $\alpha = 1, \dots, n$, los conjuntos

$$U_\alpha^+ = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_\alpha > 0\}$$

$$U_\alpha^- = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_\alpha < 0\}$$

$$V_\alpha^+ = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_\alpha > 0\}$$

$$V_\alpha^- = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_\alpha < 0\}$$

Es claro que $U_\alpha^+, U_\alpha^-, V_\alpha^+, V_\alpha^-$, son conjunto abiertos de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}$ respectivamente. Más aún, observe que

$$h^{-1}(U_\alpha^\pm) = \mathbb{S}^n \cap V_\alpha^\pm$$

para $\alpha = 1, \dots, n$; esto es, h^{-1} envía el conjunto U_α^+ al hemisferio abierto de \mathbb{S}^n donde $x_\alpha > 0$, y U_α^- es enviado al hemisferio abierto de \mathbb{S}^n donde $x_\alpha < 0$. Note además que h^{-1} es la identidad en

$$\begin{aligned} \partial\mathbb{B}^n &= \mathbb{S}^{n-1} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0, \sum_{\alpha=1}^n x_\alpha^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

mientras que $B(0, 1) \cap U_\alpha^+$ es mapeado a la parte superior ($x_{n+1} > 0$) del hemisferio $h^{-1}(U_\alpha^+)$, y $U_\alpha^+ \setminus B(0, 1)$ corresponde a la parte inferior ($x_{n+1} < 0$) de $h^{-1}(U_\alpha^+)$ (análogo para U_α^-). Como cada uno de los hemisferios $h^{-1}(U_\alpha^\pm)$ es homeomorfo a $B(0, 1)$ por medio de la proyección

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_\alpha, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \dots, x_{n+1}) \end{aligned}$$

entonces se obtiene que $g = \pi \circ h^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, restringida a $\mathbb{B}^n \cap U_\alpha^\pm$, es un homeomorfismo donde $g(\mathbb{B}^n \cap U_\alpha^\pm)$ es media bola unitaria abierta en \mathbb{H}^n , y $g(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ para todo $p \in \mathbb{S}^{n-1}$. Dado que

$$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \bigcup_{\alpha=1}^n ((\mathbb{B}^n \cap U_\alpha^+) \cup (\mathbb{B}^n \cap U_\alpha^-))$$

entonces se concluye que \mathbb{B}^n es una n -variedad con frontera, cuya frontera coincide con su frontera topológica \mathbb{S}^{n-1} .

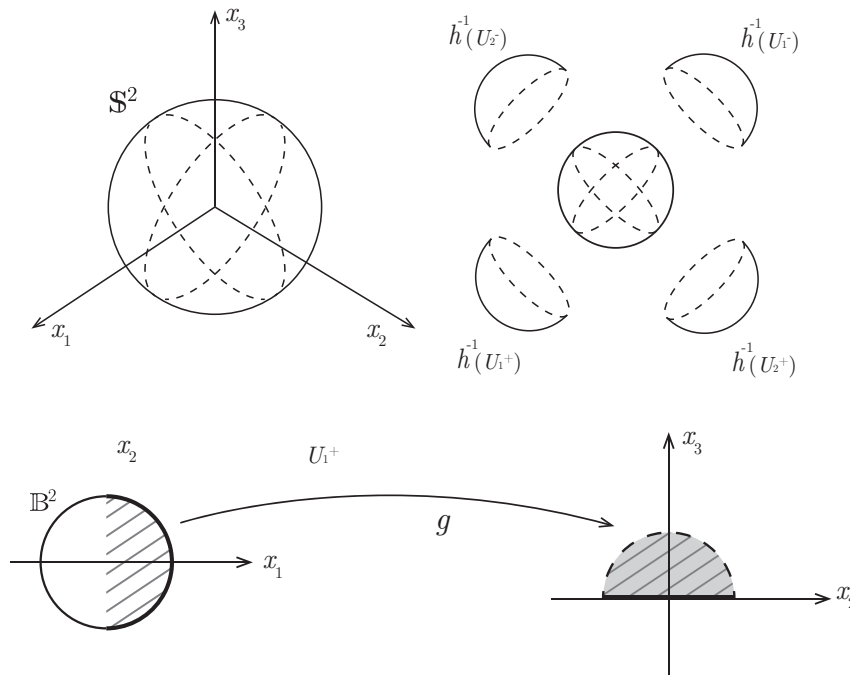


Figura 3.5. caso $n = 2$

Observación 3.16.

1. En lo sucesivo, se entenderá por *superficie* (sin frontera) conforme a la definición 3.1. Se hará uso explícitamente del concepto de *superficie con frontera* cuando sea necesario.

Capítulo 4

El grupo fundamental y orientabilidad

Uno de los problemas básicos de la topología es la de determinar cuándo dos espacios son o no homeomorfos, y aunque no hay un método general para resolver dicho problema, hay casos en los cuales se cuenta con herramientas para resolverlo. En particular, para las superficies compactas, se utilizarán *El grupo fundamental* y los *grupos de homología*. Ambos conceptos se basan en la siguiente idea: Dado un espacio topológico X , se le asocia a este un objeto algebraico $H(X)$, de modo que cualquier espacio Y homeomorfo a X le corresponde, por un procedimiento similar, un objeto algebraico $H(Y)$ el cual es isomorfo a $H(X)$, esto es, $H(\cdot)$ es un invariante topológico. Se iniciará este capítulo con el estudio del grupo fundamental mientras que el capítulo 6 estará dedicado a los grupos de homología.

4.1 Grupos de Homotopía

A fin de dar una descripción más clara y general entorno a la construcción del grupo fundamental, se estudiará primero una colección (infinita numerable) de invariantes topológicos de tipo algebraico conocidos como los *grupos de homotopía*. Específicamente, a cada espacio punteado^{4.1} (X, x_0) , se le asocia, para cada $n \in \mathbb{N}$, un grupo $\pi_n(X, x_0)$, denominado n -ésimo grupo de homotopía del espacio X con punto base x_0 ; de forma que si dos espacios difieren en alguno de sus grupos de homotopía, entonces estos no pueden ser homeomorfos. Un requisito fundamental para entender la estructura de los grupos de homotopía es el concepto de *homotopía* el cual permitirá clasificar espacios de una manera más general que el homeomorfismo.

4.1.1 Homotopía

Definición 4.1. Sean X, Y , espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Y$ funciones continuas. Se dice que f es **homotópica** a g , si existe una función continua

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

tal que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.

Observación 4.2.

1. El espacio $X \times [0, 1]$ se considera con la topología producto.
2. Si f, g , son homotópicas se escribe $f \simeq g$
3. Se dice que la función H es una **homotopía** de f a g , lo cual se denotará por $H: f \simeq g$
4. Si $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ es una homotopía entre f y g , entonces para cada $t \in [0, 1]$ existe una función continua h_t definida por $h_t(x) = H(x, t)$ para todo $x \in X$. La continuidad se sigue del hecho que la función

$$\begin{aligned} \alpha_t: X &\rightarrow X \times \{t\} \\ x &\mapsto (x, t) \end{aligned}$$

4.1. Un espacio punteado es un par (X, x_0) , donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$.

es un homeomorfismo y $h_t = H \circ \alpha_t$. Por tanto, H da lugar a una familia de funciones continuas $\{h_t\}_{t \in I}$ donde $h_0 = f$ y $h_1 = g$. Si se considera t como siendo el tiempo, entonces conforme t varía en $[0, 1]$, el punto $h_t(x)$, para todo $x \in X$, se mueve continuamente de $f(x)$ a $g(x)$. Así, H podría pensarse intuitivamente como una forma de deformar continuamente f en g , en cuyo caso h_t describe la deformación en el tiempo t .

Ejemplo 4.3. Considere las funciones

$$\begin{aligned} f: [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \cos(4x) - 1 \end{aligned}$$

Dado que la función

$$\begin{aligned} H: [-2, 2] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

es una homotopía entre f y g , entonces se tiene que f y g son homotópicas. En la figura 4.1 se exhiben algunos miembros de la familia $\{h_t\}_{t \in I}$ generada por H .

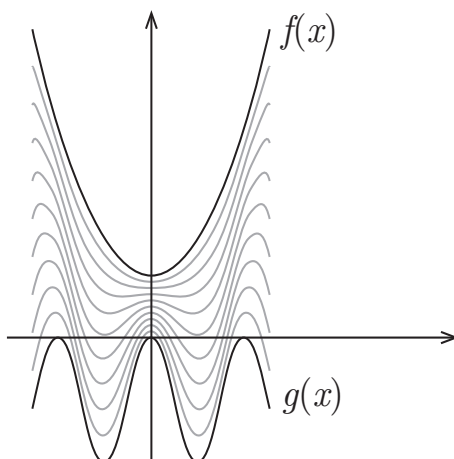


Figura 4.1.

El ejemplo anterior es un caso particular del siguiente hecho:

Proposición 4.4. Sea E un espacio normado y $Y \subseteq E$ un subconjunto convexo. Si X es cualquier espacio topológico y $f, g: X \longrightarrow Y$ son funciones continuas, entonces $f \simeq g$.

Demostración. Defina

$$\begin{aligned} H: X \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

Como las funciones

$$\begin{aligned} k_1: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto 1-t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2: [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ t &\longmapsto t \end{aligned}$$

son continuas entonces las funciones

$$\begin{aligned} h_1: X \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto k_1(t)f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_2: X \times [0, 1] &\longrightarrow Y \\ (x, t) &\longmapsto k_2(t)f(x) \end{aligned}$$

son continuas, es decir, H es una suma de funciones continuas y por tanto es continua. Además, dado que $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$, se concluye que $f \simeq g$. \square

Se desea mostrar ahora que la relación de homotopía es una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$ de todas las funciones continuas de X a Y . Para ello, se hará uso del siguiente resultado:

Proposición 4.5. Sean X, Y , espacios topológicos. Para cualquier $a \in (0, 1)$, si las funciones

$$h_1: X \times [0, a] \longrightarrow Y$$

$$h_2: X \times [a, 1] \longrightarrow Y$$

son continuas y cumplen que $h_1(x, a) = h_2(x, a)$ para todo $x \in X$, entonces por el lema de pegado la función

$$F(x, t) = \begin{cases} h_1(x, t) & t \leq a \\ h_2(x, t) & t \geq a \end{cases}$$

está bien definida y es continua.

Demostración. Observe que

$$(X \times [0, a]) \cup (X \times [a, 1]) = X \times [0, 1]$$

y

$$(X \times [0, a]) \cap (X \times [a, 1]) = X \times \{a\}$$

es decir, se tienen dos cerrados cuya unión es todo el espacio y con intersección $X \times \{a\}$. Como h_1, h_2 coinciden en dicha intersección, el lema del pegado garantiza la buena definición y la continuidad de F . \square

Teorema 4.6. El concepto de homotopía define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{C}(X, Y)$.

Demostración. En efecto, es claro que \simeq es reflexiva pues dado $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, la función $H(x, t) = f(x)$ para todo $x \in X$ y todo $t \in I$, es una homotopía de f en sí misma, esto es, $f \simeq f$. Ahora, si $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ y $f \simeq g$, entonces existe una homotopía

$$F: X \times [0, 1] \longrightarrow Y$$

de f a g , en cuyo caso la función $H(x, t) = F(x, 1 - t)$ es una homotopía de g a f , es decir, $g \simeq f$. Finalmente, si $f \simeq g$ y $g \simeq h$, entonces existen homotopías F, G , de f a g y g a h respectivamente. Si se define $H: X \times [0, 1] \longrightarrow Y$ por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & 0 \leq t \leq 1/2 \\ G(x, 2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

entonces se verifica para $t = 1/2$ que

$$\begin{aligned} F(x, 2(1/2)) &= F(x, 1) \\ &= g(x) \quad ; \text{ para todo } x \in X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G(x, 2(1/2) - 1) &= G(x, 0) \\ &= f(x) \quad ; \text{ para todo } x \in X \end{aligned}$$

lo cual implica que H está bien definida y es continua por la proposición anterior. Además, como

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= F(x, 0) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x, 1) &= G(x, 1) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

entonces se tiene que $f \simeq h$. □

Del teorema 4.6 se obtiene entonces una partición de $\mathcal{C}(X, Y)$, donde cada clase de equivalencia $[f]$, denominada *clase de homotopía*, corresponde al conjunto de funciones continuas $g: X \rightarrow Y$ que son homotópicas a f . De acuerdo a la proposición 4.4, si Y es convexo, entonces para cualquier espacio X , $\mathcal{C}(X, Y)$ consta de un solo elemento.

El próximo resultado se utilizará con frecuencia:

Proposición 4.7. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ y $h, k: Y \rightarrow Z$ funciones continuas con $f \simeq g$ y $h \simeq k$. Entonces $h \circ f \simeq k \circ g$.

Demostración. Sean

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$G: Y \times [0, 1] \rightarrow Z$$

homotopías de f a g y h a k , respectivamente. Considere el diagrama,

$$\begin{array}{ccccc} X \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi'_2} & [0, 1] & & \\ & \searrow (F, \text{id}) & & \searrow \text{Id} & \\ & & Y \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] \\ & \searrow F & \downarrow \pi_1 & \searrow G & \\ & & Y & & Z \end{array}$$

donde π_2, π'_2, π_1 , son las proyecciones canónicas y (F, Id) es la función continua garantizada por la propiedad universal del producto, definida por

$$(F, \text{Id})(x, t) := (F(x, t), \text{Id} \circ \pi'_2(x, t)) = (F(x, t), t)$$

Entonces $H = G \circ (F, \text{Id})$ es continua y

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= G \circ (F, \text{Id})(x, 0) \\ &= G(F(x, 0), 0) \\ &= G(f(x), 0) \\ &= h(f(x)) \\ &= h \circ f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(x, 1) &= G \circ (F, \text{Id})(x, 1) \\ &= G(F(x, 1), 1) \\ &= G(g(x), 1) \\ &= k(g(x)) \\ &= k \circ g(x) \end{aligned}$$

es decir, H es una homotopía de $h \circ f$ a $k \circ g$. \square

En otras palabras, la proposición anterior afirma que si $[f] = [g]$ y $[h] = [k]$ entonces $[h \circ f] = [k \circ g]$.

Se desea ahora presentar el concepto de *equivalencia homotópica* el cual dará lugar al concepto de *invariante homotópico*.

Definición 4.8. Se dice que dos espacios X, Y , son **homotópicamente equivalentes** (o **homotópicos**) si existen funciones continuas $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow X$, tales que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$.

En el contexto de la definición 4.8 se suele decir que f es una *equivalencia homotópica* y que h es *inversa homotópica de f* . En particular, si f es un homeomorfismo entonces f es una equivalencia homotópica (tome $g = f^{-1}$). Se verá que el recíproco no es cierto en general.

Proposición 4.9. Sea E un espacio normado y $X \subseteq E$ un subconjunto convexo de E con más de un punto. Sea $Y = \{y_0\}$ un espacio trivial. Entonces X, Y , son homotópicos.

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ definida naturalmente por $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Entonces f es continua pues es constante. Sea $g: Y \rightarrow X$ cualquier función. Como $Y = \{y_0\}$ entonces g es constante y por tanto es continua; luego $f \circ g = \text{Id}_Y$ de modo que $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Más aún, como X es convexo y $g \circ f: X \rightarrow X$, $\text{Id}_X: X \rightarrow X$, son funciones con codominio en X entonces $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ por la proposición 4.4. \square

Note que la función f de la función anterior no es un homeomorfismo ya que $|X| > 1 = |Y|$. Así, el concepto de equivalencia homotópica es más general que el de homeomorfismo.

Definición 4.10. Un **invariante homotópico** es una propiedad que comparten todos los espacios que son homotópicos.

Observación 4.11.

1. Como todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica entonces todo invariante homotópico es un invariante topológico. No todo invariante topológico es un invariante homotópico.

Ejemplo 4.12. Por la proposición 4.9, \mathbb{R}^n es homotópico a cualquier espacio $\{y_0\}$. Como la cardinalidad es un invariante topológico y $|\mathbb{R}^n| \neq |\{y_0\}|$, entonces se concluye que la cardinalidad no es un invariante homotópico. De hecho, este ejemplo muestra también que la compacidad no es un invariante homotópico pues $\{y_0\}$ es compacto mientras que \mathbb{R}^n no lo es.

Ejemplo 4.13. Sea X un espacio trivial con más de un punto y $Y = \{y_0\}$. Note que X no es Hausdorff mientras que Y lo es. Sea $x_0 \in X$ fijo y defina

$$\begin{aligned} f: X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto f(x) = y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: Y &\longrightarrow X \\ y_0 &\longmapsto g(y_0) = x_0 \end{aligned}$$

Entonces $f \circ g = \text{Id}_Y$ de modo que $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$. Se probará ahora que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. En efecto, se quiere definir una función continua

$$H: X \times [0, 1] \longrightarrow X$$

tal que $H(x, 0) = g \circ f(x) = x_0$, y $H(x, 1) = \text{Id}_X(x) = x$, para todo $x \in X$. Como X es un espacio trivial entonces cualquier función

$$H: X \times [0, 1] \longrightarrow X$$

es continua. Por tanto, si H es cualquier función satisfaciendo las condiciones anteriores y $H(x, t)$ es arbitrario para $t \in (0, 1)$, se obtiene que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$. Así, la propiedad Hausdorff no es un invariante homotópico.

Para el caso de la conexidad (respect. conexidad por caminos) se tiene el siguiente hecho:

Proposición 4.14. *Sean X, Y , espacios homotópicos. Entonces X, Y , poseen el mismo número de componentes conexas (resp. componentes conexas por caminos).*

Demostración. Sea $f: X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica y $C(X), C(Y)$, las familias de componente conexas de X y Y respectivamente. Defina

$$\begin{aligned} F: C(X) &\rightarrow C(Y) \\ C(x) &\mapsto F(C(x)) = C(f(x)) \end{aligned}$$

Se probará que F es una biyección. En efecto, observe primero que F está bien definida: Sea $C(x) = C(x')$ para $x, x' \in X$. Como $C(x)$ es un conjunto conexo que contiene a x, x' , entonces $f(C(x))$ es un conjunto conexo que contiene a $f(x), f(x')$, lo cual implica que

$$f(x), f(x') \in f(C(x)) \subseteq C(f(x))$$

De manera similar, para $C(x')$ se obtiene que

$$f(x), f(x') \in f(C(x')) \subseteq C(f(x'))$$

Por tanto, $C(f(x)) \cap C(f(x')) \neq \emptyset$, lo cual implica que $C(f(x)) = C(f(x'))$. Así, F está bien definida.

Para ver que F es una biyección, existe $g: Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ y $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$, por lo que se puede definir

$$\begin{aligned} G: C(Y) &\rightarrow C(X) \\ C(y) &\mapsto G(C(y)) = C(g(y)) \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} G(F(C(x))) &= G(C(f(x))) \\ &= C(g \circ f(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(G(C(y))) &= F(C(g(y))) \\ &= C(f \circ g(y)) \end{aligned}$$

entonces basta probar que $x, g \circ f(x)$ (resp $y, f \circ g(y)$), están en la misma componente conexas. Dado que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ entonces existe una homotopía

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

tal que $H(x, 0) = g \circ f(x)$ y $H(x, 1) = \text{Id}_X(x) = x$, para todo $x \in X$; luego, como $C(x) \times [0, 1]$ es conexo, se sigue que $H(C(x) \times [0, 1])$ está contenido en alguna componente de X . Más aún, como

$$\begin{aligned} H(C(x) \times \{1\}) &= \text{Id}_X(C(x)) \\ &= C(x) \end{aligned}$$

entonces $H(C(x) \times [0, 1]) \subseteq C(X)$, de donde se obtiene que

$$g \circ f(x) \in H(C(x) \times \{0\}) \subseteq C(x)$$

lo cual implica que $C(x) = C(g \circ f(x))$. De manera similar, $C(y) = C(f \circ g(y))$.

Para el caso de las componentes conexas por caminos, note que la homotopía

$$H: X \times [0, 1] \rightarrow X$$

da lugar al camino $\varphi(t) = H(x, t)$ el cual conecta a $g \circ f(x)$ con x , es decir, $P(x) = P(g \circ f(x))$. \square

Como una consecuencia del resultado anterior, se sigue que la conexidad y la conexidad por caminos son invariantes homotópicos.

Ejemplo 4.15. $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ es homotópico a \mathbb{S}^n . Considere inicialmente la inclusión

$$i: \mathbb{S}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

la cual es continua. Defina

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto x/\|x\| \end{aligned}$$

Como g es el producto de las funciones continuas

$$\begin{aligned} h: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto h(x) = 1/\|x\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

entonces g es continua. Note que $g \circ i = \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$ de modo que $g \circ i \simeq \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$. Para probar que $i \circ g \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$, defina

$$\begin{aligned} H: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)x + t(x/\|x\|) = (1-t)\text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}} + t(i \circ g(x)) \end{aligned}$$

Aunque $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ no es convexo, H está bien definida y es continua por ser una suma de funciones continuas. Más aún, $H(x, 0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ y $H(x, 1) = i \circ g(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Así, $i \circ g \simeq \text{Id}_{\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}}$ y en consecuencia i es una equivalencia homotópica.

Observación 4.16.

1. Se puede demostrar que la esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ es homeomorfa al espacio cociente $[0, 1]^n / \partial([0, 1]^n)$, donde

$$[0, 1]^n = \underbrace{[0, 1] \times \cdots \times [0, 1]}_{n \text{ veces}}$$

y

$$\partial([0, 1]^n) = \{x \in [0, 1]^n \mid x_i \in \{0, 1\} \text{ para algún } i \in \{1, \dots, n\}\}$$

2. En adelante se hará uso de la notación \mathbb{S}^n para considerar el espacio cociente $[0, 1]^n / \partial([0, 1]^n)$. Por la propiedad universal del cociente, dado cualquier espacio Y , hay una correspondencia entre funciones continuas $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow Y$ y funciones continuas $\tilde{f}: [0, 1]^n \longrightarrow Y$ tales que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$ para $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$, definida por $f \longmapsto f \circ \pi = \tilde{f}$.

Proposición 4.17. Sean $f, g: \mathbb{S}^n \longrightarrow X$ homotópicas. Entonces $\tilde{f}, \tilde{g}: [0, 1]^n \longrightarrow X$ son homotópicas.

Demostración. Sea

$$H: \mathbb{S}^n \times [0, 1] \longrightarrow X$$

una homotopía de f a g . Sabiendo que $\pi \simeq \pi$ mediante la homotopía

$$\begin{aligned} F: [0, 1]^n \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (x, t) &\longmapsto F(x, t) = \pi(x) \end{aligned}$$

y que $f \simeq g$, entonces por la proposición 4.7 se obtiene que

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= f \circ \pi \\ &\simeq g \circ \pi \\ &= \tilde{g} \end{aligned}$$

son homotópicas. Más aún, por dicha proposición, al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 [0, 1]^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] & & \\
 \pi_1 \downarrow & \searrow (\pi, \text{Id}) & \searrow \text{Id} & & \\
 [0, 1]^n & & \mathbb{S}^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] \\
 & \searrow \pi & \downarrow \pi_1 & \searrow H & \\
 & & \mathbb{S}^n & & X
 \end{array}$$

se obtiene que $\tilde{f} \simeq \tilde{g}$ mediante la homotopía

$$\tilde{H} = H \circ (\pi, \text{Id}) \quad ; \quad (\pi, \text{Id}) := (\pi \circ \pi_1, \text{Id} \circ \pi_2)$$

Además, para todo $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$, se verifica que

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}(x, t) &= H(\pi(x), t) \\
 &= H(\pi(x'), t) \\
 &= \tilde{H}(x', t)
 \end{aligned}$$

□

Proposición 4.18. Si $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow X$ son continuas y $F: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ tal que $F(x, t) = F(x', t)$ para todo $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$, entonces $f \simeq g$.

Demostración. En efecto, considere el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 [0, 1]^n \times [0, 1] & & \\
 (\pi, \text{Id}) \downarrow & \searrow F & \\
 \mathbb{S}^n \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{F}} & X
 \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}: \mathbb{S}^n \times [0, 1] &\longrightarrow X \\
 (\pi(x), t) &\longmapsto \tilde{F}(\pi(x), t) = F(x, t)
 \end{aligned}$$

Observe que \tilde{F} está bien definida ya que para todo $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$, y toda $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{F}(\pi(x), t) &= F(x, t) \\
 &= F(x', t) \\
 &= \tilde{F}(\pi(x'), t)
 \end{aligned}$$

Para la continuidad, sea $A \subseteq X$ cerrado. Se puede verificar que $\tilde{F}^{-1}(A) = (\pi, \text{Id})(F^{-1}(A))$. Como $F^{-1}(A) \subseteq [0, 1]^n \times [0, 1]$ es cerrado entonces es compacto, luego

$$\tilde{F}^{-1}(A) = (\pi, \text{Id})(F^{-1}(A)) \subseteq \mathbb{S}^n \times [0, 1]$$

es un subespacio compacto de un espacio Hausdorff y por tanto es cerrado. Así, \tilde{F} es continua. Note que $\tilde{F} \circ (\pi, \text{Id}) = F$. Más aún, si G es otra función tal que $G \circ (\pi, \text{Id}) = F$ entonces

$$\begin{aligned}
 G(\pi(x), t) &= F(x, t) \\
 &= \tilde{F}(\pi(x), t)
 \end{aligned}$$

Así, $G = \tilde{F}$. Por último, dado que

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\pi(x), 0) &= F(x, 0) \\ &= \tilde{f}(x) \\ &= f \circ \pi(x) \\ &= f(\pi(x))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{F}(\pi(x), 1) &= F(x, 1) \\ &= \tilde{g}(x) \\ &= g \circ \pi(x) \\ &= g(\pi(x))\end{aligned}$$

se concluye que $\tilde{F}: f \simeq g$. □

Las proposiciones anteriores implican que para funciones $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow X$ hay una correspondencia entre homotopías $H: f \simeq g$ y homotopías $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ ($\tilde{f} = f \circ \pi$, $\tilde{g} = g \circ \pi$) tales que $\tilde{H}(x, t) = \tilde{H}(x', t)$ para todo $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$; dada por $H \rightarrow \tilde{H} = H \circ (\pi, \text{Id})$.

Se pasará ahora a estudiar las clases de homotopía de funciones $f: \mathbb{S}^n \rightarrow X$ a fin de definir una estructura de grupo en el conjunto $\mathcal{C}(\mathbb{S}^n, X)$. Para esto, será necesario considerar *espacios punteados* en lugar de simplemente espacios.

4.1.2 Espacios punteados

Definición 4.19. Un *espacio punteado* es un par (X, x_0) , donde X es un espacio topológico y $x_0 \in X$.

Si es necesario indicar cual es la topología \mathcal{T} en X , se escribirá $((X, \mathcal{T}), x_0)$

Observación 4.20.

1. Si x, x_0 , son puntos distintos de un espacio X , entonces los espacios (X, x) , (X, x_0) no son necesariamente homeomorfos. Este hecho se verá con detalle más adelante.

Definición 4.21. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ son espacios punteados. Una *función punteada* es una función continua $f: X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Si f es una función punteada se usará la notación $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$. $\mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0))$ denotará el conjunto de todas las funciones punteadas de (X, x_0) a (Y, y_0) .

Ejemplo 4.22. La identidad $\text{Id}_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_0)$, es una función punteada. Si $x_1 \neq x_0$ entonces $\text{Id}_X: (X, x_0) \rightarrow (X, x_1)$ no es una función punteada.

Ejemplo 4.23. Si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ y $g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$ son funciones punteadas entonces $g \circ f: (X, x_0) \rightarrow (Z, z_0)$ es una función punteada: $g(f(x_0)) = g(y_0) = z_0$.

Ejemplo 4.24. Si $f: X \rightarrow Y$ es continua y $x_0 \in X$, entonces $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, f(x_0))$ es punteada.

Ejemplo 4.25. Dado un espacio punteado (X, x_0) , por la propiedad universal del cociente, hay una correspondencia entre funciones punteadas $f: (\mathbb{S}^n, \pi(0)) \rightarrow (X, x_0)$ y funciones continuas $\tilde{f}: [0, 1]^n \rightarrow X$ tales que $\tilde{f}(x) = x_0$ para toda $x \in \partial([0, 1]^n)$, dada por $f \rightarrow f \circ \pi = \tilde{f}$.

Definición 4.26. Dadas funciones punteadas $f, g: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, una *homotopía punteada* de f a g , es una homotopía $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ de f a g tal que $H(x_0, t) = y_0$ para toda $t \in [0, 1]$.

Se usará la notación $f \simeq_* g$ para indicar que f, g , son funciones punteadas homotópicas. De manera similar, se escribirá $H: f \simeq_* g$, si H es una homotopía punteada de f a g .

Ejemplo 4.27. Considere los espacios $([-2, 2], 0)$, $(\mathbb{R}, 0)$, y las funciones punteadas

$$\begin{aligned} f: [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: [-2, 2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \cos(4x) - 1 \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} H: [-2, 2] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto H(x, t) = (1-t)f(x) + tg(x) \end{aligned}$$

es una homotopía entre f y g . Más aún, como $H(0, t) = 0$ para toda $t \in [0, 1]$, entonces $H: f \simeq_* g$.

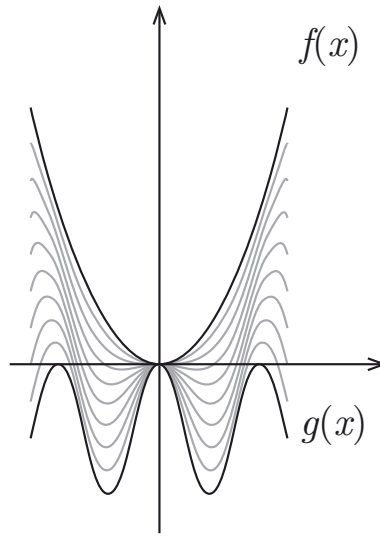


Figura 4.2. $f \simeq_* g$

Similar a la proposición 4.4 se tiene:

Proposición 4.28. Sea E un espacio normado y $Y \subseteq E$ un subconjunto convexo. Si X es cualquier espacio topológico y $f, g: X \longrightarrow Y$ son funciones continuas, entonces $f \simeq_* g$.

Proposición 4.29. Dadas funciones punteadas $f, g: (\mathbb{S}^n, \pi(0)) \longrightarrow (X, x_0)$, hay una correspondencia entre homotopías punteadas $H: f \simeq_* g$ y homotopías $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ (no punteadas) tales que $\tilde{H}(x, t) = x_0$ para toda $x \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$. Específicamente, $\tilde{H} = H \circ (\pi, \text{Id})$.

Demostración. Suponga $H: f \simeq_* g$. En particular, como $H: f \simeq g$, entonces por la proposición 4.17, $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$, donde $\tilde{H} = H \circ (\pi, \text{Id})$. Más aún, para todo $x \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$ se verifica que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, t) &= (H \circ (\pi, \text{Id}))(x, t) \\ &= H(\pi(x), t) \\ &= H(\pi(0), t) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Por otra parte, si $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq \tilde{g}$ es una homotopía tal que $\tilde{H}(x, t) = x_0$, para todo $x \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in [0, 1]$, entonces \tilde{H} es tal que $\tilde{H}(x, t) = \tilde{H}(x', t)$ para todo $x, x' \in \partial([0, 1]^n)$ y toda $t \in \partial([0, 1]^n)$. Por tanto, por la proposición 4.18, la función

$$\begin{aligned} H: \mathbb{S}^n \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (\pi(x), t) &\longrightarrow H(\pi(x), t) = \tilde{H}(x, t) \end{aligned}$$

es una homotopía de f a g . Más aún, para todo $t \in [0, 1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(\pi(0), t) &= \tilde{H}(0, t) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

es decir, $H: f \simeq_* g$. □

Proposición 4.30. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados. La homotopía punteada define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{C}((X, x_0), (Y, y_0))$.

La demostración de la proposición 4.30 es similar a la hecha en el teorema en 4.6. En particular, la homotopía punteada define una relación de equivalencia en el conjunto $\mathcal{C}((\mathbb{S}^n, \pi(0)), (X, x_0))$ para cada espacio punteado (X, x_0) . El conjunto cociente $\mathcal{C}((\mathbb{S}^n, \pi(0)), (X, x_0)) / \simeq_*$ se denotará por $\pi_n(X, x_0)$. Si f es una función punteada, $[f]_*$ denotará su clase de equivalencia, llamada clase de homotopía. Se escribirá \mathbb{S}^n para denotar el espacio punteado $(\mathbb{S}^n, \pi(0))$.

Se pasará ahora a definir la **concatenación** de funciones punteadas. Se verá que dicha operación es compatible con la homotopía punteada, lo cual permitirá definir una operación y se probará que se tiene una estructura de grupo en el conjunto $\pi_n(X, x_0)$.

4.1.3 Concatenación de funciones $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$

Sean $f, g: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ funciones punteadas. Entonces f, g , son continuas y $f(\pi(0)) = x_0 = g(\pi(0))$. Se desea definir una función punteada $f \# g: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$. Para ello, considere primero la función

$$f \times g: [0, 1]^n \longrightarrow X$$

$$s \longmapsto \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases}$$

$f \times g$ está bien definida y es continua: Observe que

$$\begin{aligned} [0, 1]^n &= [0, 1]^{n-1} \times [0, 1] \\ &= [0, 1]^{n-1} \times ([0, 1/2] \cup [1/2, 1]) \\ &= ([0, 1]^{n-1} \times [0, 1/2]) \cup ([0, 1]^{n-1} \times [1/2, 1]) \end{aligned}$$

Si $A_1 = [0, 1]^{n-1} \times [0, 1/2]$ y $A_2 = [0, 1]^{n-1} \times [1/2, 1]$, entonces A_1, A_2 son cerrados de $[0, 1]^n$ con $A_1 \cap A_2 = [0, 1]^{n-1} \times \{1/2\}$. Sean

$$\begin{aligned} \alpha: A_1 &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \alpha(s) = f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta: A_2 &\longrightarrow X \\ s &\longmapsto \beta(s) = g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) \end{aligned}$$

Al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} [0, 1]^{n-1} \times [0, 1/2] & \xrightarrow{\pi'_2} & [0, 1/2] & & \\ \pi'_1 \downarrow & \searrow (\alpha_1, \alpha_2) & \searrow \alpha_2 & & \\ [0, 1]^{n-1} & & [0, 1]^{n-1} \times [0, 1] & \xrightarrow{\pi_2} & [0, 1] \\ & \searrow \alpha_1 = \text{Id} & \downarrow \pi_1 & & \\ & & [0, 1]^{n-1} & & \end{array}$$

donde α_2 es la función continua

$$\begin{aligned}\alpha_2: [0, 1/2] &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longrightarrow 2x\end{aligned}$$

entonces por la propiedad universal del producto, la función (α_1, α_2) es continua y única tal que $\pi \circ (\alpha_1, \alpha_2) = \pi'_1$ y $\pi_2 \circ (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 \circ \pi'_2$. Note que

$$(\alpha_1, \alpha_2)((s_1, \dots, s_{n-1}), s_n) = ((s_1, \dots, s_{n-1}), 2s_n).$$

lo cual implica que α es continua. Efectuando un procedimiento similar al anterior, se tiene que β es continua. Además, si $s \in A_1 \cap A_2$, entonces $s = (s_1, \dots, s_{n-1}, 1/2)$, de modo que

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 1)) \\ &= f(\pi(0)) \quad ; (s_1, \dots, s_{n-1}, 1) \in \partial([0, 1]^n) \\ &= x_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(s) &= g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)) \\ &= g(\pi(0)) \quad ; (s_1, \dots, s_{n-1}, 0) \in \partial([0, 1]^n) \\ &= x_0\end{aligned}$$

Así, $f \times g$ es continua por el lema de pegado.

Se verá ahora como $f \times g$ induce una función punteada $\mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$, es decir, si $s \in \partial([0, 1]^n)$, entonces $(f \times g)(s) = x_0$. En efecto, si $s \in \partial([0, 1]^n)$ entonces es fácil ver que

- Si $s_n \leq 1/2$, entonces $(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n) \in \partial([0, 1]^n)$
- Si $s_n \geq 1/2$, entonces $(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1) \in \partial([0, 1]^n)$

En cualquier caso se obtiene que $(f \times g)(s) = x_0$. Por el ejemplo 4.25 se sigue que la función

$$f \# g: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$$

$$\pi(s) \longmapsto \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases}$$

es punteada. Así, $f \times g = \widetilde{f \# g} = (f \# g) \circ \pi$.

Definición 4.31. Si f, g , son funciones punteadas, la función punteada $f \# g: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ se llama **concatenación** de f y g .

Observación 4.32.

1. Si bien la concatenación define una operación en el conjunto $\mathcal{C}((\mathbb{S}^n, \pi(0)), (X, x_0))$, dicha operación no es asociativa, ni tiene elemento neutro ni tampoco es conmutativa. En efecto, sean $f, g, h: \mathbb{S}^1 \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ las funciones de modo que las correspondientes funciones $\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \tilde{g}(0) = \tilde{g}(1) = \tilde{h}(0) = \tilde{h}(1) = 0$, tienen las gráficas que se muestran a continuación:

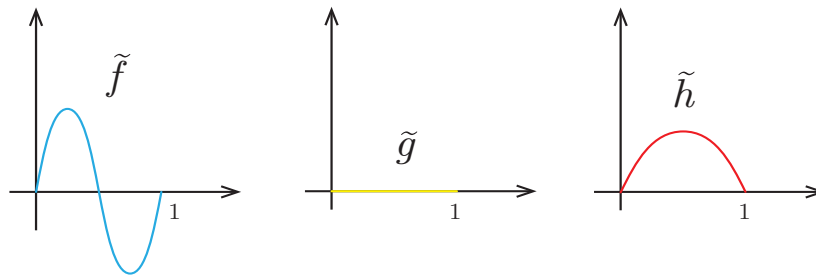


Figura 4.3.

Por tanto, $f \times (g \times h)$ y $(f \times g) \times h$, son las funciones con las siguientes gráficas:

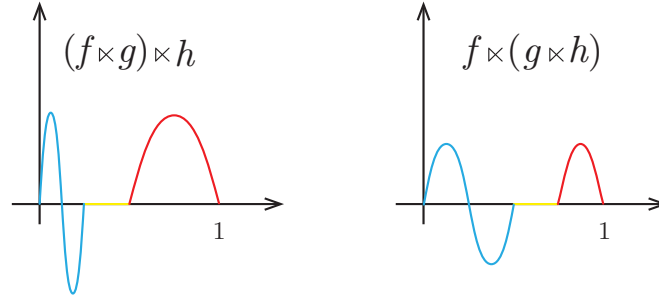


Figura 4.4.

Como puede observarse, $f \times (g \times h) \neq (f \times g) \times h$, lo cual implica que $f \# (g \# h) \neq (f \# g) \# h$.

A pesar de lo anterior, si se consideran funciones homotópicas punteadas, se verá que el conjunto $\pi_n(X, x_0)$ con la concatenación de funciones sí posee una estructura de grupo. Para esto será necesario probar que la homotopía punteada es compatible con la concatenación de funciones.

Proposición 4.33. Sean $f, g, f', g': \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ funciones punteadas tales que $F: f \simeq_* f'$ y $G: g \simeq_* g'$. Entonces $f \# g \simeq_* f' \# g'$.

Demostración. Se quiere definir una función $H: \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow X$, continua tal que:

1. $H(\pi(s), 0) = (f \# g)(s), \forall s \in [0, 1]^n$
2. $H(\pi(s), 1) = (f' \# g')(s), \forall s \in [0, 1]^n$
3. $H(\pi(0), t) = x_0, \forall t \in [0, 1]$

para lo cual se tiene

$$F: \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$G: \mathbb{S}^n \times [0, 1] \rightarrow X$$

Por la proposición 4.29, esto equivale a definir $\tilde{H}: [0, 1]^n \times [0, 1] \rightarrow X$ continua tal que $\tilde{H}: \widetilde{f \# g} \simeq \widetilde{f' \# g'}$ y $\tilde{H}(s, t) = x_0, \forall s \in \partial([0, 1]^n), \forall t \in [0, 1]$. Recuerde que $\widetilde{f \# g} = f \times g$, $\widetilde{f' \# g'} = f' \times g'$ y $\tilde{F}: \tilde{f} \simeq \tilde{f}'$, $\tilde{G}: \tilde{g} \simeq \tilde{g}'$, donde $\tilde{F} = F \circ (\pi, \text{Id})$ y $\tilde{G} = G \circ (\pi, \text{Id})$. Sea

$$\tilde{H}: [0, 1]^n \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} \tilde{F}((s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n), t) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ \tilde{G}((s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1), t) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases}$$

El lema de pegado permite concluir que \tilde{H} es continua. Además, si $s \in \partial([0, 1]^n)$, entonces por lo visto antes,

$$(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n) \in \partial([0, 1]^n) \text{ para } s_n \leq 1/2$$

$$(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1) \in \partial([0, 1]^n) \text{ para } s_n \geq 1/2$$

y por las condiciones de frontera de \tilde{F} y \tilde{G} , se sigue que $\tilde{H}(s, t) = x_0$, para toda $t \in [0, 1]$, para toda $s \in \partial([0, 1]^n)$. Ahora, observe que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= \begin{cases} \tilde{F}((s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n), 0) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ \tilde{G}((s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1), 0) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \tilde{f}(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ \tilde{g}(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \\ &= f \times g \\ &= \widetilde{f \# g} \end{aligned}$$

Asimismo, $\tilde{H}(s, 1) = f' \times g' = \widetilde{f' \# g'}$. Por tanto, $\tilde{H}: \widetilde{f \# g} \simeq \widetilde{f' \# g'}$, y con la condición de frontera, esta define una homotopía $H: f \# g \simeq_* f' \# g'$. \square

La proposición anterior garantiza la buena definición de la siguiente operación en $\pi_n(X, x_0)$:

$$\begin{aligned} \bullet: \pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ ([f]_*, [g]_*) &\longmapsto [f \# g]_* \end{aligned}$$

esto es, si $[f]_* = [f']_*$ y $[g]_* = [g']_*$, entonces $[f \# g]_* = [f' \# g']_*$.

A continuación se probará que $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$ es un grupo. Se verá además que dicho grupo es abeliano para $n \geq 2$.

Sea $c: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$, la función definida por $c(\pi(s)) = x_0$, para toda $s \in [0, 1]$. Claramente, c es una función punteada llamada *constante al punto base*. Se probará que $[c]_*$ es el elemento neutro (identidad) de $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$.

Si $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ es una función punteada entonces la función

$$\begin{aligned} \bar{f}: \mathbb{S}^n &\longrightarrow (X, x_0) \\ \pi(s_1, \dots, s_n) &\longmapsto \bar{f}(\pi(s_1, \dots, s_n)) = f(\pi(s_1, \dots, 1 - s_n)) \end{aligned}$$

denominada la *función opuesta* de f , es punteada. Note que \bar{f} está bien definida pues si $s = (s_1, \dots, s_n) \in \partial([0, 1]^n)$ entonces $(s_1, \dots, 1 - s_n) \in \partial([0, 1]^n)$.

Proposición 4.34. *Sea $c: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ la función constante al punto base. Entonces para toda función punteada $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ se tiene que $f \# c \simeq_* f$ y $c \# f \simeq_* f$*

Demostración. Considere la función

$$\begin{aligned} \tilde{H}: [0, 1]^n \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \begin{cases} x_0 & 0 \leq s_n \leq t/2 \\ f\left(\pi\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n - t}{2 - t}\right)\right) & t/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como la función

$$\begin{aligned} \alpha: [0, 1]^n \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((s_1, \dots, s_n), t) &\longmapsto (t/2) - s_n \end{aligned}$$

es continua y

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(s, t) \mid 0 \leq s_n \leq t/2\} \\ &= \alpha^{-1}([0, \infty)) \end{aligned}$$

entonces A_1 es cerrado de $[0, 1]^n \times [0, 1]$. De manera similar, se tiene que

$$A_2 = \{(s, t) \mid t/2 \leq s_n \leq 1\}$$

es cerrado en $[0, 1]^n \times [0, 1]$. Observe que $A_1 \cup A_2 = [0, 1]^n \times [0, 1]$, $A_1 \cap A_2 = \{(s, t) \mid s_n = t/2\}$, y las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1: A_1 &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \tilde{H}_1(s, t) = x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2: A_2 &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \tilde{H}_2(s, t) = f\left(\pi\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n - t}{2 - t}\right)\right) \end{aligned}$$

son continuas. Si $s_n = t/2$, entonces

$$\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n - t}{2 - t}\right) = (s_1, \dots, s_{n-1}, 0) \in \partial([0, 1]^n)$$

y $f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)) = x_0$. Por el lema de pegado, \tilde{H} es continua. Más aún, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 1) &= \begin{cases} x_0 & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \\ &= (c \times f)(s) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, 0) &= f(\pi(s)) \\ &= \tilde{f}(s) \end{aligned}$$

de modo que $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq c \# \tilde{f}$. Note que si $s \in \partial([0, 1]^n)$, entonces $s_i \in \{0, 1\}$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $i \in \{1, \dots, n-1\}$ ó $i = n$ y $s_n = 0$, es claro que $\tilde{H}(s, t) = x_0$. Si $s_n = 1$ entonces $\frac{2s_n - t}{2 - t} = 1$, y por tanto $\tilde{H}(s, t) = x_0$. Así, $\tilde{H}: \tilde{f} \simeq_* c \# \tilde{f}$.

Similarmente, $c \# \tilde{f} \simeq_* \tilde{f}: \tilde{H}$, considerando la homotopía

$$\begin{aligned} \tilde{H}: [0, 1]^n \times [0, 1] &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \begin{cases} f\left(\pi\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{2s_n}{2 - t}\right)\right) & 0 \leq s_n \leq 1 - (t/2) \\ x_0 & 1 - (t/2) \leq s_n \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

□

Corolario 4.35. $[c]_*$ es el elemento neutro de $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$.

Proposición 4.36. Si $f: \mathbb{S}^n \longrightarrow (X, x_0)$ es una función punteada, entonces $f \# \bar{f} \simeq_* c$ y $\bar{f} \# f \simeq_* c$.

Demostración. Defina

$$[0, 1]^n \times [0, 1] \longrightarrow X$$

$$\tilde{H}(s, 1) = \begin{cases} (f \times \bar{f})\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1-t}{2}\right) & \frac{1-t}{2} \leq s_n \leq \frac{1+t}{2} \\ (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n) & \frac{1-t}{2} \geq s_n \text{ ó } s_n \geq \frac{1+t}{2} \end{cases}$$

Sean

$$A_1 = \left\{ (s, t) \mid \frac{1-t}{2} \leq s_n \right\} \cap \left\{ (s, t) \mid s_n \leq \frac{1-t}{2} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (s, t) \mid \frac{1-t}{2} \geq s_n \right\} \cup \left\{ (s, t) \mid s_n \geq \frac{1+t}{2} \right\}$$

Se puede probar que A_1, A_2 son cerrados de $[0, 1]^n \times [0, 1]$ tales que $A_1 \cup A_2 = [0, 1]^n \times [0, 1]$, $A_1 \cap A_2 = \{(s, t) \mid s_n = \frac{1+t}{2}\} \cup \{(s, t) \mid s_n = \frac{1-t}{2}\}$. Además, las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1: A_1 &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \tilde{H}_1(s, t) = (f \times \bar{f})\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1-t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2: A_2 &\longrightarrow X \\ (s, t) &\longmapsto \tilde{H}_2(s, t) = f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)) \end{aligned}$$

son continuas. Si $s_n = (1-t)/2$ entonces $\tilde{H}_1(s, t) = \tilde{H}_2(s, t)$. Si $s_n = \frac{1+t}{2}$, como $\frac{1+t}{2} \geq 1/2$ y $\frac{1-t}{2} \leq 1/2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_n) &= (f \times \bar{f})\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1+t}{2}\right) \\ &= \bar{f}(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, t)) \\ &= f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 1-t)) \\ &= (f \times \bar{f})\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{1-t}{2}\right) \end{aligned}$$

lo cual implica que \tilde{H} es continua por el lema de pegado. Note que si $s \in \partial([0, 1]^n)$, entonces $s_i \in \{0, 1\}$ para $i \in \{1, \dots, n\}$. Si $s_i \in \{0, 1\}$ para $i \in \{1, \dots, n-1\}$ es claro que $\tilde{H}(s, t) = x_0$. Si $i = n$, entonces dado que $0 \leq \frac{1-t}{2}$ y $1 \geq \frac{1+t}{2}$, se sigue que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(s, t) &= \tilde{H}_2(s, t) \\ &= (f \times \bar{f})(s) \\ &= x_0 \end{aligned}$$

Por último,

$$\tilde{H}(s, 0) = \begin{cases} (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, 1/2) & \frac{1}{2} \leq s_n \leq \frac{1}{2} \\ (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n) & \frac{1}{2} \geq s_n \text{ ó } s_n \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

es decir, $\tilde{H}(s, 0) = (f \times \bar{f})(s)$. También,

$$\tilde{H}(s, 1) = \begin{cases} (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) & \text{si } 0 \leq s_n \leq 1 \\ (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, s_n) & \text{si } s_n = 0 \text{ ó } s_n = 1 \end{cases}$$

esto es, $\tilde{H}(s, 1) = (f \times \bar{f})(s_1, \dots, s_{n-1}, 0) = x_0 = \tilde{c}(s)$. Por tanto, \tilde{H} determina una homotopía punteada de $f \# \bar{f}$ a c . Como $\bar{f} = f$, aplicando lo anterior se obtiene que $\bar{f} \# f = \bar{f} \# \bar{f} \simeq_* c$. \square

Corolario 4.37. $[\bar{f}]_*$ es el inverso de $[f]_*$ en $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$.

Proposición 4.38. Si $f, g, h: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$, son funciones punteadas, entonces $f \# (g \# h) \simeq_* (f \# g) \# h$.

Demostración. Observe primero que

$$\begin{aligned} (f \times (g \times h))(s) &= \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & s_n \leq 1/2 \\ (g \times h)(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1) & 1/2 \leq s_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2(2s_n - 1))) & 2s_n - 1 \leq 1/2 \text{ y } 1/2 \leq s_n \\ h(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2(2s_n - 1) - 1)) & 2s_n - 1 \geq 1/2 \text{ y } 1/2 \leq s_n \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n)) & s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 2)) & 1/2 \leq s_n \leq 3/4 \\ h(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 3)) & 3/4 \leq s_n \end{cases} \end{aligned}$$

Similarmente,

$$((f \times g) \times h)(s) = \begin{cases} f(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n)) & s_n \leq 1/4 \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n - 1)) & 1/4 \leq s_n \leq 1/2 \\ h(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & 1/2 \leq s_n \end{cases}$$

Sea

$$\tilde{H}: [0, 1]^n \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(s, t) \mapsto \begin{cases} f\left(\pi\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n}{2-t}\right)\right) & s_n \leq \frac{2-t}{4} \\ g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2)) & \frac{2-t}{4} \leq s_n \leq \frac{3-t}{4} \\ h(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 2s_n - 1)) & \frac{3-t}{4} \leq s_n \end{cases}$$

Entonces $[0, 1]^n \times [0, 1]$ es la unión de tres cerrados cuyas intersecciones están dadas por las ecuaciones

$$s_n = \frac{2-t}{4}$$

$$s_n = \frac{3-t}{4}$$

Si $s_n = \frac{2-t}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} f\left(\pi\left(s_1, \dots, \frac{4s_n}{2-t}\right)\right) &= f(\pi(s_1, \dots, 1)) \\ &= x_0 \\ &= g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)) \\ &= g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2)) \end{aligned}$$

Si $s_n = \frac{3-t}{4}$, entonces

$$\begin{aligned} g(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 4s_n + t - 2)) &= g(\pi(s_1, \dots, 1)) \\ &= x_0 \\ &= h(\pi(s_1, \dots, s_{n-1}, 0)) \\ &= h\left(\pi\left(s_1, \dots, s_{n-1}, \frac{4s_n + t - 3}{t+1}\right)\right) \end{aligned}$$

Por tanto, por el lema del pegado, \tilde{H} está bien definida y es continua. Se puede verificar que

$$\tilde{H}(s, 0) = (f \times (g \times h))(s)$$

$$\tilde{H}(s, 1) = ((f \times g) \times h)(s)$$

y que si $s \in \partial([0, 1]^n)$, entonces $\tilde{H}(s, t) = x_0$, para toda $t \in [0, 1]$. Así, \tilde{H} corresponde a una homotopía punteada $H: f \# (g \# h)(s) \simeq_* (f \# g) \# h$. \square

Corolario 4.39. $[f]_* \bullet ([g]_* \bullet [h]_*) = ([f]_* \bullet [g]_*) \bullet [h]_*$

Observación 4.40.

1. No es posible demostrar en general que la operación \bullet en $\pi_n(X, x_0)$ es conmutativa pues existen espacios punteados para los cuales, por ejemplo, $\pi_1(X, x_0)$ no es abeliano. Por esta razón fue necesario garantizar que $[c]_*$ es el elemento neutro a izquierda y a derecha y que $[\bar{f}]_*$ es inversa a derecha e izquierda de $[f]_*$. También por esto se usa la notación multiplicativa en lugar de la aditiva.

Definición 4.41. Sea (X, x_0) un espacio punteado y $n \in \mathbb{N}$. El grupo $(\pi_n(X, x_0))$ se llama *n-ésimo grupo de homotopía* del espacio punteado (X, x_0) .

Se probará ahora que $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$ es abeliano para $n \geq 2$. Para esto, se usará el siguiente resultado algebraico conocido como el *truco de Eckmann-Hilton*:

Proposición 4.42. Sea A un conjunto y $\bullet, \circ: A \times A \rightarrow A$, operaciones asociativas con el mismo elemento neutro $e \in A$, y satisfaciendo

$$(\alpha \bullet \beta) \circ (\gamma \bullet \delta) = (\alpha \circ \gamma) \bullet (\beta \circ \delta)$$

para todo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$. Entonces \circ y \bullet son la misma operación y \bullet es conmutativa.

Demostración. Tomando $\beta = \gamma = e$, se obtiene que $\alpha \circ \delta = \alpha \bullet \delta$ y por tanto \circ y \bullet coinciden. Luego, tomando $\alpha = \delta = e$, se tiene $\beta \bullet \gamma = \beta \circ \gamma = \gamma \bullet \beta$, esto es, \bullet es conmutativa. \square

Teorema 4.43. *Sea (X, x_0) un espacio punteado. Entonces para todo $n \geq 2$, el grupo $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$ es abeliano.*

Demostración. Si $n \geq 2$, se puede definir otra concatenación $\tilde{\#}$ de la siguiente manera: Dadas $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ punteadas, sea

$$(f\tilde{\#}g)(\pi(s)) := \begin{cases} f(\pi(2s_1, \dots, s_{n-1}, s_n)) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ g(\pi(2s_1 - 1, \dots, s_{n-1}, s_n)) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases}$$

Haciendo un razonamiento análogo al anterior, se puede demostrar que $f\tilde{\#}g$ es una función punteada y que hay compatibilidad con homotopía punteada. Esto permite definir en $\pi_n(X, x_0)$ la operación $[f]_* \circ [g]_* := [f\tilde{\#}g]_*$. Dicha operación es asociativa y tiene como elemento neutro a $[c]_*$ (de hecho, $(\pi_n(X, x_0), \circ)$ es grupo). Además, se verifica que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ son funciones punteadas entonces

$$(\alpha\tilde{\#}\beta)\tilde{\#}(\gamma\tilde{\#}\delta) = (\alpha\tilde{\#}\gamma)\tilde{\#}(\beta\tilde{\#}\delta)$$

Por tanto,

$$([a]_* \bullet [\beta]_*) \circ ([\gamma]_* \bullet [\delta]_*) = ([\alpha]_* \circ [\gamma]_*) \bullet ([\beta]_* \bullet [\delta]_*)$$

de modo que por el truco de Heckmann-Hilton, \bullet es conmutativa. \square

4.1.4 Homomorfismos inducidos

Una consecuencia importante de la existencia de una estructura grupo en $\pi_n(X, x_0)$ es que permite, para cada $n \in \mathbb{N}$, tener una asignación

$$\pi_n: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$$

de la clase de todos los espacios topológicos punteados Top_* en la clase de todos los grupos, esto es, a cada espacio punteado (X, x_0) se le asocia un grupo $\pi_n(X, x_0)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Se desea probar ahora que dicha asignación es *functorial* (o que $\pi_n: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ es un *functor*), lo cual significa que a cada función punteada

$$f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$$

le corresponde un homeomorfismo de grupos

$$\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

el cual satisface

$$\pi_n(\text{Id}_{(X, x_0)}) = \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)}$$

$$\pi_n(g \circ f) = \pi_n(g) \circ \pi_n(f)$$

donde

$$g: (Y, y_0) \rightarrow (Z, z_0)$$

es otra función punteada.

Una vez se pruebe que $\pi_n: \text{Top}_* \rightarrow \text{Grp}$ es un functor, se tendrá, en particular, que si $f: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo punteado, entonces el homomorfismo

$$\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$$

es un isomorfismo de grupos para cada $n \in \mathbb{N}$. Así, la clase de isomorfismo del n -ésimo grupo de homotopía es un invariante topológico punteado.

A fin de definir $\pi_n(f)$ y probar que es un homeomorfismo se requieren los siguientes resultados:

Proposición 4.44. Sean $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ funciones punteadas y $h: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función punteada. Entonces

$$h \circ (f \# g) = (h \circ f) \# (h \circ g)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} h \circ (f \# g)(\pi(s)) &= h((f \# g)(\pi(s))) \\ &= \begin{cases} h(f(\pi(2s_1, \dots, s_{n-1}, s_n))) & 0 \leq s_n \leq 1/2 \\ h(g(\pi(2s_1 - 1, \dots, s_{n-1}, s_n))) & 1/2 \leq s_n \leq 1 \end{cases} \\ &= (h \circ f) \# (h \circ g) \end{aligned}$$

□

Proposición 4.45. Sean $f, g: X \rightarrow Y$ y $h, k: Y \rightarrow Z$ funciones continuas con $f \simeq_* g$ y $h \simeq_* k$. Entonces $h \circ f \simeq_* k \circ g$.

Demostración. Sean

$$F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$G: Y \times [0, 1] \rightarrow Z$$

homotopías punteadas de f a g y h a k , respectivamente. En particular, como $H: f \simeq g$ y $G: h \simeq k$, entonces por la proposición 4.7 se sigue que $H = G \circ (F, \text{Id}): h \circ f \simeq k \circ g$. Más aún, para todo $t \in [0, 1]$ se verifica que

$$\begin{aligned} H(x_0, t) &= G \circ (F, \text{Id})(x_0, t) \\ &= G(F(x_0, t), t) \\ &= G(y_0, t) \quad ; F: f \simeq_* g \\ &= z_0 \quad ; G: h \simeq_* k \end{aligned}$$

esto es, $H: h \circ f \simeq_* k \circ g$. □

Teorema 4.46. Sea $\varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ una función punteada. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, la función

$$\begin{aligned} \pi_n(\varphi): \pi_n(X, x_0) &\rightarrow \pi_n(Y, y_0) \\ [f]_* &\mapsto \pi_n(\varphi)([f]_*) = [\varphi \circ f]_* \end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Al hacer uso de la proposición 4.45 con $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ y $h, k = \varphi: (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$, se sigue que $\pi_n(\varphi)$ está bien definida. Para ver que $\pi_n(\varphi)$ es homomorfismo, sean $[f]_*, [g]_* \in \pi_n(X, x_0)$, luego

$$\begin{aligned} \pi_n(\varphi)([f]_* \bullet [g]_*) &= \pi_n(\varphi)([f \# g]_*) \\ &= [\varphi \circ (f \# g)]_* \\ &= [\varphi \circ f \# \varphi \circ g]_* \quad ; \text{proposición 4.43} \\ &= [\varphi \circ f]_* \bullet [\varphi \circ g]_* \\ &= \pi_n(\varphi)([f]_*) \bullet \pi_n(\varphi)([g]_*) \end{aligned}$$

□

El homomorfismo de grupos, $\pi_n(f): \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$, se denomina n -ésimo homomorfismo inducido por la función punteada $\varphi: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$.

Teorema 4.47. Sean $(X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ espacios punteados y $\varphi: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, $\psi: (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$ funciones punteadas. Entonces:

1. $\pi_n(\psi \circ \varphi) = \pi_n(\psi) \circ \pi_n(\varphi)$
2. $\pi_n(\text{Id}_{(X, x_0)}) = \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)}$
3. Si $\rho: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es una función homotópica punteada tal que $\rho \simeq_* \varphi$ entonces $\pi_n(\varphi) = \pi_n(\rho)$.
4. Si $k: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es la función constante y_0 , entonces $\pi_n(c)$ es el homomorfismo trivial.

Demostración.

1. Sea $[f]_* \in \pi_n(X, x_0)$, luego

$$\begin{aligned} \pi_n(\psi \circ \varphi)([f]_*) &= [(\psi \circ \varphi) \circ f]_* \\ &= [(\psi \circ (\varphi \circ f))]_* \\ &= \pi_n(\psi)[(\varphi \circ f)]_* \\ &= \pi_n(\psi)(\pi_n(\varphi)[f]_*) \\ &= (\pi_n(\psi) \circ \pi_n(\varphi))([f]_*) \end{aligned}$$

2. Sea $[f]_* \in \pi_n(X, x_0)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \pi_n(\text{Id}_{(X, x_0)})([f]_*) &= [\text{Id}_{(X, x_0)} \circ f]_* \\ &= [f]_* \\ &= \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)} \end{aligned}$$

3. Si $\rho \simeq_* \varphi$, entonces dada $[f]_* \in \pi_n(X, x_0)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \pi_n(\varphi)([f]_*) &= [\varphi \circ f]_* \\ &= [\rho \circ f]_* \quad ; \text{proposición 4.44} \\ &= \pi_n(\rho)([f]_*) \end{aligned}$$

4. Sea $[f]_* \in \pi_n(X, x_0)$. Como k es la función constante y_0 , se obtiene que

$$\begin{aligned} \pi_n(k)([f]_*) &= [k \circ f]_* \\ &= [c]_* \\ &\square \end{aligned}$$

Corolario 4.48. Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$, espacios punteados. Si $(X, x_0), (Y, y_0)$ son homotópicos punteados, entonces $\pi_n(X, x_0) \cong \pi_n(Y, y_0)$.

Demostración. Como $(X, x_0), (Y, y_0)$ son homotópicos punteados, existen funciones punteadas

$$\varphi: (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$$

$$\rho: (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

tales que $\rho \circ \varphi \simeq_* \text{Id}_{(X, x_0)}$ y $\varphi \circ \rho \simeq_* \text{Id}_{(Y, y_0)}$. Se afirma que $\pi_n(\varphi): \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$, es un isomorfismo. En efecto, considere $\pi_n(\rho): \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$. Sea $[f]_* \in \pi_n(X, x_0)$, luego

$$\begin{aligned} (\pi_n(\rho) \circ \pi_n(\varphi))([f]_*) &= \pi_n(\rho \circ \varphi)([f]_*) \\ &= \pi_n(\text{Id}_{(X, x_0)})([f]_*) \\ &= \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)}([f]_*) \\ &= [f]_* \end{aligned}$$

Similarmente, sea $[g]_* \in \pi_n(Y, y_0)$, luego

$$\begin{aligned} (\pi_n(\varphi) \circ \pi_n(\rho))([g]_*) &= \pi_n(\varphi \circ \rho)([g]_*) \\ &= \pi_n(\text{Id}_{(Y, y_0)})([g]_*) \\ &= \text{Id}_{\pi_n(Y, y_0)}([g]_*) \\ &= [g]_* \end{aligned}$$

Por tanto, $\pi_n(\varphi) \circ \pi_n(\rho) = \text{Id}_{\pi_n(Y, y_0)}$, y $\pi_n(\rho) \circ \pi_n(\varphi) = \text{Id}_{\pi_n(X, x_0)}$, lo cual implica que $\pi_n(\varphi): \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$, es un isomorfismo. \square

4.1.5 Compatibilidad con productos

Una propiedad notable del funtor de homotopía π_n es su compatibilidad con productos, lo cual es especialmente útil para calcular los grupos de homotopías de espacios que se pueden describir como un producto de espacios para los cuales sus grupos de homotopía son conocidos (por ejemplo, el toro $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$).

A fin de dar más claridad a las ideas que se desarrollarán en esta sección, será importante tener en cuenta lo siguiente:

Dado una familia de grupos $\{(G_\alpha, \otimes_\alpha)\}_{\alpha \in \lambda}$, considere su producto cartesiano

$$\prod_{\alpha \in I} G_\alpha = \left\{ x: I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha \mid x(\alpha) \in G_\alpha \right\}$$

Es común escribir x_α en lugar de $x(\alpha)$ y (x_α) para x . El producto $\prod_{\alpha \in I} G_\alpha$ posee estructura de grupo al considerar la operación

$$\otimes: \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \times \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$$

definida por

$$\otimes(x, y): I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

$$\alpha \longmapsto x_\alpha \otimes_\alpha y_\alpha$$

Además, es fácil ver que las proyecciones

$$\pi_\beta: \prod_{\alpha \in I} G_\alpha \longrightarrow G_\beta$$

$$(x_\alpha) \longmapsto x_\beta$$

son epimorfismos de grupos. El grupo $G = (\prod_{\alpha \in I} G_\alpha, \otimes)$ se denomina el **grupo producto** de la familia $\{(G_\alpha, \otimes_\alpha)\}_{\alpha \in \lambda}$.

El grupo producto $(\prod_{\alpha \in I} G_\alpha, \otimes)$, junto con las proyecciones $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I}$, cumplen la siguiente propiedad universal conocida como la **propiedad universal del producto**:

Teorema 4.49. *Sea $\{(G_\alpha, \otimes_\alpha)\}_{\alpha \in \lambda}$ una familia de grupos, (H, \star) un grupo y $\{f_\alpha: H \longrightarrow G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de homomorfismos de grupos. Entonces existe un homomorfismo de grupos*

$$f: H \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$$

único tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} H & & \\ \downarrow f & \searrow f_\alpha & \\ \prod_{\alpha \in I} G_\alpha & \xrightarrow{\pi_\alpha} & G_\alpha \end{array}$$

Demostración. Sea

$$f: H \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$$

definida por

$$f(h): I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

$$\alpha \longmapsto f_\alpha(h)$$

Entonces es claro que f está bien definida pues f_α es función para cada α . Además, como

$$\begin{aligned} (\pi_\alpha \circ f)(h) &= \pi_\alpha(f(h)) \\ &= f_\alpha(h) \end{aligned}$$

para todo $h \in H$, entonces $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Para ver que f es un homomorfismo, sean $h, k \in H$, luego para todo α se verifica que

$$\begin{aligned} f(h \star k)(\alpha) &= f_\alpha(h \star k) \\ &= f_\alpha(h) \otimes_\alpha f_\alpha(k) \\ &= f(h)(\alpha) \otimes f(k)(\alpha) \\ &= (f(h) \otimes f(k))(\alpha) \end{aligned}$$

Así, $f(h \star k) = f(h) \otimes f(k)$.

Por último, si $g: H \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$, es otro homomorfismo tal que $\pi_\alpha \circ g = f_\alpha$ para todo $\alpha \in I$, entonces para todo $h \in H$ y toda $\alpha \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned} g(h)(\alpha) &= \pi_\alpha(g(h)) \\ &= f_\alpha(h) \\ &= f(h)(\alpha) \end{aligned}$$

Así, $g = f$. □

Si $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ es una familia de espacios punteados entonces el espacio producto $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ puede considerarse punteado con punto base

$$x: I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} G_\alpha$$

$$\alpha \longmapsto x_\alpha$$

lo cual implica que las proyecciones canónicas $\pi_\alpha: \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ son punteadas (Observe que x es el único punto de $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ para el cual todas las proyecciones resultan punteadas). El espacio punteado $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$ se llama **producto punteado** de la familia $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$.

El espacio punteado $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$, junto con las proyecciones punteadas π_α satisface, de manera similar para el caso productos, la siguiente propiedad universal:

Teorema 4.50. Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}$ una colección de espacios punteados, (Y, y_0) cualquier espacio punteado y $\{f_\alpha: (Y, y_0) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de funciones punteadas. Entonces existe una función punteada $f: (Y, y_0) \rightarrow (\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$, única tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$ para toda $\alpha \in I$, es decir el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} (Y, y_0) & & \\ \downarrow f & \searrow f_\alpha & \\ \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) & \xrightarrow{\pi_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha) \end{array}$$

Demostración. Por la propiedad universal para productos (no punteados) existe una función continua

$$f: Y \rightarrow \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

única tal que $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$. Por tanto, solo resta verificar que f es punteada. En efecto, observe que

$$f(y_0): I \rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha$$

es tal que

$$\begin{aligned} f(y_0)(\alpha) &= f_\alpha(y_0) \\ &= x_\alpha \quad ; f_\alpha \text{ es punteada para toda } \alpha \in I \\ &= x(\alpha) \end{aligned}$$

para toda $\alpha \in I$, es decir, $f(y_0) = x$. □

Observación 4.51.

1. Observe que para cada espacio punteado (X_α, x_α) , $\alpha \in I$, se asocia el grupo $(\pi_n(X_\alpha, x_\alpha), \otimes_\alpha)$, por lo cual tiene sentido considerar el grupo producto

$$\left(\prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha), \otimes \right)$$

Por otro lado, para el espacio producto punteado $\prod_{\alpha \in I} (X_\alpha, x_\alpha)$ se asocia el grupo

$$\left(\pi_n \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right), \tilde{\otimes} \right)$$

2. Dado que para cada $\alpha \in I$, la proyección

$$\pi_\alpha: \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) \rightarrow (X_\alpha, x_\alpha)$$

es punteada, entonces para cada $\alpha \in I$ se tiene un homomorfismo inducido

$$\pi_n(\pi_\alpha): \pi_n \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) \rightarrow \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$$

Además, para cada $\alpha \in I$ se tiene también una proyección

$$\tilde{\pi}_\alpha: \left(\prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha), \otimes \right) \rightarrow (\pi_n(X_\alpha, x_\alpha), \otimes_\alpha)$$

3. De 1, 2, y por la propiedad universal del producto de grupos (teorema 4.49) existe un homomorfismo de grupos

$$\varphi: \pi_n \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha),$$

único tal que $\tilde{\pi}_\alpha \circ \varphi = \pi_n(\pi_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$, esto es, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \pi_n \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) & & \\ \downarrow \varphi & \searrow \pi_n(\pi_\alpha) & \\ \prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha) & \xrightarrow{\tilde{\pi}_\alpha} & (\pi_n(X_\alpha, x_\alpha)) \end{array}$$

De hecho, se tiene que φ es un isomorfismo. Para ver esto, se hará uso del siguiente resultado:

Proposición 4.52. *Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios punteados. Considere el espacio producto punteado $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$ junto con la colección de proyecciones $\{\pi_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Entonces para todo par de funciones punteadas $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow (\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$, si $\pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$ para todo $\alpha \in I$ si y solo si $f \simeq_* g$.*

Demostración. Por la proposición 4.45 es claro que si $f \simeq_* g$ entonces $\pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$ para todo $\alpha \in I$. Para la otra implicación, suponga $\pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$ para todo $\alpha \in I$, entonces para cada $\alpha \in I$ existe $H_\alpha: \pi_\alpha \circ f \simeq_* \pi_\alpha \circ g$, en cuyo caso por la propiedad universal del producto, existe una función continua H , única tal que el siguiente diagrama conmuta para toda $\alpha \in I$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n \times [0, 1] & & \\ \downarrow H & \searrow H_\alpha & \\ \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) & \xrightarrow{\pi_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha) \end{array}$$

Luego para cada $\alpha \in I$ se tiene

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(H(\pi(s), 0)) &= H_\alpha(\pi(s), 0) \\ &= \pi_\alpha(f(\pi(s))) \end{aligned}$$

lo cual implica que $H(\pi(s), 0) = f(\pi(s))$. Asimismo, $H(\pi(s), 1) = g(\pi(s))$, de modo que $H: f \simeq g$. Más aún, dado que

$$\begin{aligned} \pi_\alpha(H(\pi(0), t)) &= H_\alpha(\pi(0), t) \\ &= x_\alpha \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in I$, entonces $H(\pi(0), t) = x$. Así, $H: f \simeq_* g$. □

Teorema 4.53. *Sea $\{(X_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ una colección de espacios punteados y $(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$ el espacio producto punteado correspondiente. Entonces*

$$\pi_n \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) \cong \prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$$

Demostración. De acuerdo al ítem 3 de la observación 4.51, solo basta verificar que la función φ es un isomorfismo de grupos. En efecto, suponga $\varphi([f]_*) = \varphi([g]_*)$, luego

$$\tilde{\pi}_\alpha(\varphi([f]_*)) = \tilde{\pi}_\alpha(\varphi([g]_*))$$

para todo $\alpha \in I$. Por la conmutatividad del diagrama, se obtiene entonces que

$$\pi_n(\pi_\alpha)([f]_*) = \pi_n(\pi_\alpha)([g]_*)$$

para todo $\alpha \in I$, esto es,

$$[\pi_\alpha \circ f]_* = [\pi_\alpha \circ g]_*$$

para todo $\alpha \in I$, lo cual implica, por la proposición 4.52, que $f \simeq_* g$. Así, $[f]_* = [g]_*$. Para ver que φ es sobreyectiva, sea $g \in \prod_{\alpha \in I} \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$, luego para todo $\alpha \in I$ se tiene

$$\tilde{\pi}_\alpha(g) = [g_\alpha] \in \pi_n(X_\alpha, x_\alpha)$$

Para la colección de funciones punteadas $\{g_\alpha\}_{\alpha \in I}$ considere el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^n & & \\ \downarrow f & \searrow g_\alpha & \\ \left(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x \right) & \xrightarrow{\pi_\alpha} & (X_\alpha, x_\alpha) \end{array}$$

Por la propiedad universal del producto (en el contexto de espacios punteados) existe una función punteada f , única tal que $\pi_\alpha \circ f = g_\alpha$ para todo $\alpha \in I$. Note que $[f] \in \pi_n(\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, x)$. Más aún, como

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_\alpha(\varphi([f]_*)) &= \pi_n(\pi_\alpha)([f]_*) \\ &= [\pi_\alpha \circ f]_* \\ &= [g_\alpha] \\ &= \tilde{\pi}_\alpha(g) \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in I$, entonces se sigue que $\varphi([f]_*) = g$. □

4.2 Grupo fundamental

De acuerdo al teorema 4.43, el primer grupo de homotopía es el único grupo que no necesariamente es abeliano, razón por la cual recibe un nombre especial. Dado un espacio punteado (X, x_0) , el grupo de homotopía $\pi_1(X, x_0)$ se denomina **grupo fundamental**. Se desea mostrar en esta sección que $\pi_1(X, x_0)$ es independiente del punto base x_0 cuando X es conexo por caminos y que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es isomorfo a \mathbb{Z} .

4.2.1 Conexidad por caminos

Sea (X, x_0) un espacio punteado con X conexo por caminos. Para mostrar la independencia de la estructura algebraica del grupo $\pi_1(X, x_0)$ respecto al punto base x_0 es necesario definir un nuevo tipo de homotopía llamada **homotopía de extremos fijos**.

Definición 4.54. Sea X un espacio, $x_0, x_1 \in X$ y $f, g: [0, 1] \rightarrow X$ caminos que conectan a x_0 y x_1 . Una homotopía F de h a k se llama de **extremos fijos** si $F(0, t) = x_0$ y $F(1, t) = x_1$, para toda $t \in [0, 1]$. Se usa la notación $h \simeq k \text{ rel}\{0, 1\}$.

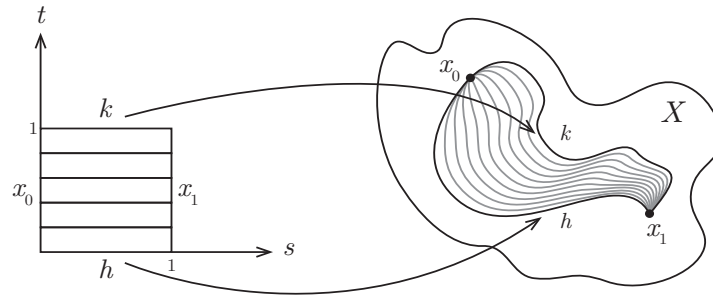


Figura 4.5. homotopía de extremos fijos

Observación 4.55.

1. Note que si $x_0 = x_1$, entonces h, k , corresponden a funciones punteadas $\hat{h}, \hat{k}: \mathbb{S}^1 \rightarrow (X, x_0)$, y una homotopía H de extremos fijos de h a k corresponde a una homotopía punteada \tilde{H} de \hat{h} a \hat{k} .
2. Se puede demostrar, de manera similar al caso de homotopías y homotopías punteadas, que la homotopía de extremos fijos define una relación de equivalencia en el conjunto de caminos que conectan a x_0 y x_1 . En este caso, $[h]_{\{0,1\}}$ denota la clase de homotopía de h .
3. Si $x_2 \in X$ y $k: [0, 1] \rightarrow X$ es un camino que conecta a x_1 y x_2 , entonces como $h(1) = k(0) = x_1$, el lema de pegado permite definir la concatenación:

$$(h\#k)(s) = \begin{cases} h(2s) & s \leq 1/2 \\ k(2s - 1) & s \geq 1/2 \end{cases}$$

la cual es un camino que conecta a x_0 y x_2 . ($h\#k$)

4. Es fácil verificar que la concatenación definida en 3 es compatible con la homotopía de extremos fijos. Además, si $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow (X, x_0)$ son funciones punteadas, entonces $f \times g = \tilde{f}\#\tilde{g}$.

El siguiente resultado se puede obtener imitando lo hecho para el caso de las homotopías punteadas:

Proposición 4.56. Sean h, k, l , caminos de x_0 a x_1 , x_1 a x_2 y x_2 a x_3 , c_0 la función constante x_0 , c_1 la función constante x_1 y \bar{h} el camino opuesto a h , entonces:

1. $(h\#(k\#l)) \simeq ((h\#k)\#l) \text{ rel}\{0, 1\}$
2. $(c_0\#h) \simeq h \text{ rel}\{0, 1\}$ y $h\#c_1 \simeq h \text{ rel}\{0, 1\}$
3. $(h\#\bar{h}) \simeq c_0 \text{ rel}\{0, 1\}$ y $\bar{h}\#h \simeq c_1 \text{ rel}\{0, 1\}$

Con base en la proposición anterior se tiene:

Teorema 4.57. Si X es un espacio topológico y x_0, x_1 están en la misma componente conexa por caminos, entonces $\pi(X, x_0) \cong \pi(X, x_1)$.

Demostración. Sea $h: [0, 1] \rightarrow X$ un camino de x_0 a x_1 . Defina

$$\begin{aligned} \varphi: \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [f]_* &\longmapsto \varphi([f]_*) = [\rho]_* \end{aligned}$$

donde ρ corresponde a la función $\tilde{\rho} = \bar{h}\#(\tilde{f}\#h)$. Observe que φ está bien definida, pues $\tilde{f} = f \circ \pi$ es un camino de x_0 a x_0 y por tanto $\bar{h}\#(\tilde{f}\#h)$ es un camino de x_1 a x_1 . Se afirma que φ es un homomorfismo. En efecto, si $\varphi([f]_*) = [\rho]_*$, $\varphi([g]_*) = [\tau]_*$ y $\varphi([f]_* \bullet [g]_*) = [\gamma]_*$, entonces

$$\begin{aligned} \varphi([f]_* \bullet [g]_*) &= \varphi([f\#g]_*) \\ &= [\gamma]_* \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned}
[\tilde{\gamma}]_{\{0,1\}} &= [\bar{h}\#((\widetilde{f\#g})\#h)]_{\{0,1\}} \\
&= [\bar{h}\#((f \times g)\#h)]_{\{0,1\}} \\
&= [\bar{h}\#(\tilde{f}\#\tilde{g})\#h]_{\{0,1\}} \\
&= [\bar{h}\#((\tilde{f}\#(h\#\bar{h}))\tilde{g})\#h]_{\{0,1\}} \\
&= [(\bar{h}\#\tilde{f}\#h)\#(\bar{h}\#\tilde{g}\#h)]_{\{0,1\}} \\
&= [\tilde{\rho}\#\tilde{\tau}]_{\{0,1\}} \\
&= [\rho \times \tau]_{\{0,1\}}
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned}
[\gamma]_* &= [\rho\#\tau] \\
&= [\rho]_* \bullet [\tau]_* \\
&= \varphi([f]_*) \bullet \varphi([g]_*)
\end{aligned}$$

Similarmente, si se define $\psi: \pi_1(X, x_1) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ por $\psi([\rho]_*) = [f]_*$, donde f corresponde a la función $\tilde{f} = h\#(\tilde{\rho}\#\bar{h})$, se puede verificar ψ es un homomorfismo. Más aún, puede verificarse que φ, ψ , son mutuamente inversas, es decir, φ es un isomorfismo de grupos. \square

Cuando X es conexo por caminos se utiliza la notación $\pi(X)$ en lugar de $\pi(X, x_0)$ pues en este caso el punto base es irrelevante en la estructura del grupo fundamental.

Ejemplo 4.58. Sean $f, g: \mathbb{S}^n \rightarrow (X, x_0)$ funciones punteadas donde (X, x_0) es homotópico punteado a $\{x_0\}(\{x_0\}, x_0)$. Se afirma que f, g , son homotópicas punteadas. En efecto, sean

$$h: (X, x_0) \rightarrow \{x_0\}$$

$$k: \{x_0\} \rightarrow (X, x_0)$$

funciones punteadas tales que

$$h \circ k \simeq \text{Id}_{\{x_0\}}$$

$$k \circ h \simeq \text{Id}_{(X, x_0)}$$

Por la compatibilidad de la homotopía punteada con la composición se tiene que

$$(k \circ h) \circ f \simeq \text{Id}_{(X, x_0)} \circ f = f$$

$$(k \circ h) \circ g \simeq \text{Id}_{(X, x_0)} \circ g = g$$

Como $h \circ f = h \circ g$, entonces nuevamente por la compatibilidad de la homotopía punteada con la composición se obtiene que $f \simeq_* g$.

De lo anterior se concluye que $\pi_n(X, x_0) = \{[c]_*\}$, es decir, $(\pi_n(X, x_0), \bullet)$ es trivial.

4.2.2 Estructura algebraica de $\pi_1(\mathbb{S}^1)$

Se probará ahora que $\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$, lo cual requerirá de una serie de resultados técnicos de topología. El primero de ellos se conoce como el teorema de *División del dominio*:

Teorema 4.59. Sea X un espacio métrico compacto, Y un espacio topológico, $f: X \rightarrow Y$ una función continua y $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ un cubrimiento abierto de Y . Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq X$ es tal que $\text{diam}(V) < \delta$, entonces $f(V) \subseteq W_\alpha$, para algún $\alpha \in I$.

Demostración. Para cada $\alpha \in I$, sea $U_\alpha = f^{-1}(W_\alpha)$. Entonces $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ es un cubrimiento abierto de X y como éste es compacto, existen U_1, \dots, U_n , tales que $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ defina

$$\begin{aligned} g_i: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g_i(x) = d(x, X \setminus U_i) \end{aligned}$$

donde $d(x, X \setminus U_i)$ denota la distancia de x al conjunto $X \setminus U_i$. Entonces g_i es continua y $g_i(x) = 0$ si y solo si $x \in \overline{X \setminus U_i} = X \setminus U_i$, lo cual implica que $g_i(x) > 0$ para todo $x \in U_i$. Defina

$$\begin{aligned} g: X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) = \|(g_1(x), \dots, g_n(x))\|_\infty \end{aligned}$$

Entonces g es continua. Además, dado $x \in X$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in U_i$ de modo que $g_i(x) > 0$ y por tanto $g(x) > 0$. Como X es compacto, $g(X) \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, así, $g(X)$ es cerrado y es tal que $0 \notin g(X)$. Por tanto, existe δ tal que $(-\delta, \delta) \subseteq \mathbb{R} \setminus g(X)$ y como $g(X) \subseteq (0, +\infty)$, se obtiene que $g(x) \geq \delta$ para todo $x \in X$. Si $V \subseteq X$ y $\text{diam}(V) < \delta$, entonces $V \subseteq B(x, r)$ para algún $x \in X$ y $0 < r < \delta$. Sea $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $g(x) = g_i(x)$, luego $d(x, X \setminus U_i) \geq \delta > r$ y por tanto, si $y \in X \setminus U_i$, entonces $d(x, y) > r$. Luego, $B(x, r) \subseteq U_i$, de donde se sigue que $f(V) \subseteq f(U_i) \subseteq W_i$. \square

El valor $\delta > 0$ del teorema anterior se denomina *número de Lebesgue* del cubrimiento $\{W_\alpha \mid \alpha \in I\}$ vía f .

Corolario 4.60. Sea X un espacio métrico compacto y $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ un cubrimiento abierto de X . Entonces existe $\delta > 0$ tal que si $V \subseteq X$ y $\text{diam}(V) < \delta$, entonces $V \subseteq U_\alpha$ para algún $\alpha \in I$.

Demostración. Usar el teorema anterior con $f = \text{Id}_X$. \square

Observación 4.61.

1. Considere la función exponencial

$$\begin{aligned} e: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ t &\longmapsto e(t) = (\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t)) \end{aligned}$$

Es claro que e es una función continua y sobreyectiva. Además, como $e(t+n) = e(t)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces e es de periodo 1. Se puede demostrar que si $z \in \mathbb{S}^1$ y $t_0 \in e^{-1}(z)$ entonces $e^{-1}(z) = \{t_0 + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Más aún, si U es un subconjunto propio de \mathbb{S}^1 , entonces

$$e^{-1}(U) = \coprod_{n \in \mathbb{Z}} U_n$$

donde para cada $n \in \mathbb{Z}$, U_n es homeomorfo a U mediante el homeomorfismo $e|_{U_n}: U_n \longrightarrow U$. Esto se sigue del hecho que $e|_{(0,1)}: (0,1) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(0)\}$ es un homeomorfismo.

2. Sea $i: [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}$ la inclusión. Al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{i} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & & \downarrow e \\ \mathbb{S}^1 & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{S}^1}} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

entonces por la propiedad universal de cociente existe una función continua $f: \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, única tal que $f \circ \pi = e|_{[0,1]}$. Como $\text{Id}_{\mathbb{S}^1} \circ \pi = e|_{[0,1]}$, entonces se obtiene $\text{Id}_{\mathbb{S}^1} = f$, de modo que $e|_{[0,1]} = \pi$. Por lo anterior, se estudiarán funciones punteadas $f: (\mathbb{S}^1, \pi(0)) \longrightarrow (\mathbb{S}^1, \pi(0))$, analizando las composiciones $f \circ \pi: [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$, donde $\pi = e|_{(0,1)}$.

El próximo teorema se denomina *levantamiento de caminos*:

Teorema 4.62. Si $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua y $x \in \mathbb{R}$ es tal que $e(x) = g(0)$, entonces existe $\hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $e \circ \hat{g} = g$ y única satisfaciendo $\hat{g}(0) = x$.

Demostración. Sean $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(0)\}$ y $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(1/2)\}$. Entonces U y V es un cubrimiento abierto de \mathbb{S}^1 en cuyo caso $g^{-1}(U), g^{-1}(V)$ es un cubrimiento abierto de $[0, 1]$. Sea $\delta > 0$ el número de Lebesgue de $\{U, V\}$ vía g . Por la propiedad arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r = 1/m < \delta$. Considere los conjuntos cerrados $I_1 = [0, r], I_2 = [r, 2r], \dots, I_m = [r(m-1), 1]$. Como $\text{diám}(I_k) = r < \delta$ para $k \in \{1, \dots, m\}$, se sigue que para cada $k \in \{1, \dots, m\}$, $g(I_k) \subseteq U$ ó $g(I_k) \subseteq V$. Se usará el lema de pegado para definir \hat{g} inductivamente.

Sea W_x el único abierto de $e^{-1}(U)$ ó $e^{-1}(V)$ (podrían ser los dos) que contienen a x y es homeomorfo a U ó V vía $\varphi_x = e|_{W_x}$. Defina

$$\begin{aligned} \hat{g}_1: I_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \hat{g}_1(t) = \varphi_x^{-1}(g(t)) \end{aligned}$$

Entonces \hat{g}_1 es continua y

$$\begin{aligned} \hat{g}_1(0) &= \varphi_x^{-1}(g(0)) \\ &= \varphi_x^{-1}(e(x)) \\ &= \varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \\ &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e \circ \hat{g}_1 &= e \circ (\varphi_x^{-1} \circ g) \\ &= g|_{I_1} \end{aligned}$$

Así, considerando $\hat{g}_1(r) \in \mathbb{R}$, se puede usar el mismo argumento para definir $\hat{g}_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}$, con $\hat{g}_2(r) = \hat{g}_1(r)$ y $e \circ \hat{g}_2 = g|_{I_2}$. Continuando el argumento, el lema de pegado implica que se tiene una función continua $\hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\hat{g}|_{I_k} = \hat{g}_k$, para $k \in \{1, \dots, m\}$. Así, $\hat{g}(0) = \hat{g}_1(0) = x$ y $e \circ \hat{g} = g$.

Por último, si $\bar{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es otra función continua tal que $e \circ \bar{g} = g$ y $\bar{g}(0) = x$, entonces $\bar{g}(t) - \hat{g}(t) \in \mathbb{Z}$ para toda $t \in [0, 1]$, y como $[0, 1]$ es conexo, la función $\bar{g} - \hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ es constante, luego dado que

$$\begin{aligned} (\bar{g} - \hat{g})(0) &= x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

se concluye que $\bar{g} - \hat{g} = 0$, es decir, $\bar{g} = \hat{g}$. □

Si $e \circ \hat{g} = g$, se dice que \hat{g} es un **levantamiento** de g . Esto implica que $e(\hat{g}(0)) = g(0)$, esto es, $\hat{g}(0) \in e^{-1}(g(0))$ y por tanto $\hat{g}(0) - x \in \mathbb{Z}$. Más aún, para cada $n \in \mathbb{Z}$, existe un levantamiento \hat{g}_n tal que $\hat{g}_n(0) - x = n$.

El teorema anterior permite definir el **índice** de una función continua $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ de la siguiente manera: Sea $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua y $g = f \circ \pi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$. Como $\pi(0) = \pi(1)$, se tiene que $g(0) = g(1)$ y por tanto, considerando un levantamiento $\hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $e \circ \hat{g} = g$, se tiene $e(\hat{g}(0)) = e(\hat{g}(1))$, de modo que $\hat{g}(1) - \hat{g}(0) \in \mathbb{Z}$. Se afirma que dicho entero no depende de la función \hat{g} tal que $e \circ \hat{g} = g$. En efecto, si $\bar{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $e \circ \bar{g} = g$, entonces dada $t \in [0, 1]$ se tiene $e(\hat{g}(t)) = e(\bar{g}(t))$, y por tanto $\hat{g}(t) - \bar{g}(t) \in \mathbb{Z}$. Así, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\hat{g}(t) - \bar{g}(t) \in \mathbb{Z} = k$ para toda $t \in [0, 1]$, es decir, $\hat{g}(t) = \bar{g}(t) + k$ para toda $t \in [0, 1]$. Así,

$$\begin{aligned} \hat{g}(1) - \hat{g}(0) &= \bar{g}(1) + k - (\bar{g}(0) + k) \\ &= \bar{g}(1) - \bar{g}(0) \end{aligned}$$

Definición 4.63. Sea $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ una función continua. Si $\hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $e \circ \hat{g} = f \circ \pi$, entonces al entero $\hat{g}(1) - \hat{g}(0)$ se le denomina **índice** de f el cual se denota por $\text{ind}(f)$.

Ejemplo 4.64. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea g_n la función que resulta al considerar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & & \\ \hat{g}_n \downarrow & \searrow g_n & \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & \mathbb{S}^1 \end{array}$$

esto es, $g_n = e \circ \hat{g}_n$, donde $\hat{g}_n := nt$. Note que

$$\begin{aligned} g_n(0) &= e \circ \hat{g}_n(0) \\ &= e(\hat{g}_n(0)) \\ &= e(0) \\ &= \pi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n(1) &= e \circ \hat{g}_n(1) \\ &= e(\hat{g}_n(1)) \\ &= e(n) \\ &= \pi(n) \end{aligned}$$

Por tanto, para cada $n \in \mathbb{Z}$, g_n induce una función continua $f_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, única tal que $f_n \circ \pi = g_n$, así

$$\begin{aligned} f_n \circ \pi &= g_n \\ &= e \circ \hat{g}_n \end{aligned}$$

Por tanto, \hat{g}_n es un levantamiento de $f_n \circ \pi$. Además,

$$\begin{aligned} \text{ind}(f_n) &= \hat{g}_n(1) - \hat{g}_n(0) \\ &= n \end{aligned}$$

Ejemplo 4.65. Para cada $n, m \in \mathbb{Z}$, sean f_n, f_m , como en el ejemplo anterior. Considere la función

$$\begin{aligned} \hat{g}_{nm}: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \hat{g}_{nm}(t) = nmt \end{aligned}$$

Es claro que \hat{g}_{nm} es continua. Más aún, como

$$e \circ \hat{g}_{nm} = (f_n \circ f_m) \circ \pi$$

entonces \hat{g}_{nm} es un levantamiento de $(f_n \circ f_m) \circ \pi$, luego

$$\begin{aligned} \text{ind}(f_n \circ f_m) &= \hat{g}_{nm}(1) - \hat{g}_{nm}(0) \\ &= nm \\ &= \text{ind}(f_{nm}) \end{aligned}$$

Por otra parte, como $f_n(\pi(0)) = \pi(0) = f_m(\pi(0))$, entonces tiene sentido considerar la concatenación

$$\begin{aligned} (f_n \# f_m)(\pi(t)) &= \begin{cases} f_n(2t) & t \leq 1/2 \\ f_m(2t-1) & t \geq 1/2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\cos(4\pi nt), \text{sen}(4\pi nt)) & t \leq 1/2 \\ (\cos(4\pi mt), \text{sen}(4\pi mt)) & t \geq 1/2 \end{cases} \end{aligned}$$

Como se observó en el ejemplo anterior, las funciones $\hat{g}_n := nt$, $\hat{g}_m := mt$, son levantamientos de $f_n \circ \pi$ y $f_m \circ \pi$, respectivamente. Considere la función

$$\hat{h}_{n,m}(t) = \begin{cases} \hat{g}_n(2t) & t \leq 1/2 \\ \hat{g}_n(1) + \hat{g}_m(2t-1) & t \geq 1/2 \end{cases}$$

Es claro que $\hat{h}_{n,m}$ está bien definida y es continua por el lema de pegado. Más aún, note que

$$\begin{aligned}
e \circ \hat{h}_{n,m}(t) &= \begin{cases} e(\hat{g}_n(2t)) & t \leq 1/2 \\ e(\hat{g}_n(1) + \hat{g}_m(2t-1)) & t \geq 1/2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e(2nt) & t \leq 1/2 \\ e(n+m(2t-1)) & t \geq 1/2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\cos(4\pi nt), \text{sen}(4\pi nt)) & t \leq 1/2 \\ (\cos(4\pi mt + 2\pi(n-m)), \text{sen}(4\pi mt + 2\pi(n-m))) & t \geq 1/2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\cos(4\pi nt), \text{sen}(4\pi nt)) & t \leq 1/2 \\ (\cos(4\pi mt), \text{sen}(4\pi mt)) & t \geq 1/2 \end{cases} \\
&= ((f_n \# f_m) \circ \pi)(t)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\text{ind}(f_n \# f_m) &= \hat{h}_{n,m}(1) - \hat{h}_{n,m}(0) \\
&= n + m \\
&= \text{ind}(f_n) + \text{ind}(f_m)
\end{aligned}$$

A partir de la definición 4.63, a cada función $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ se le puede asociar un número entero y el ejemplo anterior muestra que dicha asignación es sobreyectiva. Se verá ahora que funciones punteadas $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ son homotópicas si y solo si $\text{ind}(f) = \text{ind}(g)$, para lo cual será necesario extender el teorema del levantamiento de caminos al caso de homotopías. Dicho resultado se conoce como **levantamiento de homotopías**:

Teorema 4.66. *Si $F: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua y $x \in \mathbb{R}$ es tal que $e(x) = F(0, 0)$, entonces existe $\hat{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $e \circ \hat{F} = F$ y única satisfaciendo $\hat{F}(0, 0) = x$.*

Demostración. Sean $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(0)\}$, $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{\pi(1/2)\}$ y $\delta > 0$ tal que si $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ tiene $\text{diam}(A) < \delta$, entonces $F(A) \subseteq U$ ó $F(A) \subseteq V$. Tome $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1/m) < \delta/\sqrt{2}$ y se divide $[0, 1] \times [0, 1]$ es una malla de $m \times n$ cuadrados de lado $r = 1/m$, lo cual garantiza que cada cuadrado tiene diámetro menor que δ y por tanto su imagen está contenida en U ó V . Sean W_x y φ_x como en 4.62 y defina

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{(1,1)}: [0, r] \times [0, r] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
(s, t) &\longmapsto \varphi_x^{-1}(F(s, t))
\end{aligned}$$

Entonces nuevamente $e \circ \hat{F}_{(1,1)} = F|_{[0,r] \times [0,r]}$ y $\hat{F}_{(1,1)}(0, 0) = x$. Considerando $\hat{F}_{(1,1)}((0, r)) \in \mathbb{R}$, con un argumento similar se define $\hat{F}_{(1,2)}: [0, r] \times [r, 2r] \rightarrow \mathbb{R}$. Para definir una extensión de $\hat{F}_{(1,1)}$ y $\hat{F}_{(1,2)}$, se debe garantizar que estas coinciden en el segmento $[0, r] \times \{r\}$. Para ello, note que estas restricciones corresponden a caminos que inician en $(0, r)$, y por construcción, $\hat{F}_{(1,1)}((0, r)) = \hat{F}_{(1,2)}((0, r))$. Por un argumento similar como en el teorema de levantamiento de caminos, la parte de unicidad implica que $\hat{F}_{(1,1)}$ y $\hat{F}_{(1,2)}$ coinciden en $[0, r] \times \{r\}$. Razonando inductivamente, el lema de pegado garantiza una función continua $\hat{F}_1: [0, r] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $e \circ \hat{F}_1 = F|_{[0,r] \times [0,1]}$ y $\hat{F}_1(0, 0) = x$. Considerando $\hat{F}_1(r, 0)$ se define $\hat{F}_{(2,1)}$ en $[r, 2r] \times [0, r]$, y teniendo en cuenta la coincidencia con $\hat{F}_{(1,1)}$ en $(r, 0)$, se concluye por el teorema de levantamiento de caminos que $\hat{F}_{(2,1)}$ y $\hat{F}_{(1,1)}$ coinciden en $\{r\} \times [0, r]$. Razonando inductivamente, se tiene una función \hat{F}_2 definida en $[r, 2r] \times [0, r]$ y continuando el proceso, se obtienen $\hat{F}_1, \dots, \hat{F}_m$, y por el lema de pegado se define \hat{F} en todo $[0, 1] \times [0, 1]$ tal que $e \circ \hat{F} = F$ y $\hat{F}(0, 0) = x$. Como antes, si \bar{F} es otro levantamiento, entonces $\bar{F} - \hat{F}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$ debe ser constante y como $\hat{F}(0, 0) = \bar{F}(0, 0)$, se sigue $\bar{F} = \hat{F}$. \square

Corolario 4.67. Si $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ son homotópicas punteadas, entonces $\text{ind}(f) = \text{ind}(g)$.

Demostración. Sea $H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ una homotopía punteada de f a g . Por la proposición 4.29, $\tilde{H} = H \circ (\pi, \text{Id}): [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es una homotopía punteada de $f \circ \pi$ a $g \circ \pi$. Por el teorema de levantamiento de homotopías, sea $\hat{H}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento de \tilde{H} . Restringiendo \hat{H} a $[0, 1] \times \{0\}$ y $[0, 1] \times \{1\}$ se obtienen levantamientos para $f \circ \pi$ y $g \circ \pi$ respectivamente y por tanto $\text{ind}(f) = \hat{H}(1, 0) - \hat{H}(0, 0)$ y $\text{ind}(g) = \hat{H}(1, 1) - \hat{H}(0, 1)$. Defina

$$\begin{aligned} h: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \hat{H}(1, t) - \hat{H}(0, t) \end{aligned}$$

Se afirma que $h(t) \in \mathbb{Z}$ para toda $t \in [0, 1]$. En efecto, note que

$$\begin{aligned} e(\hat{H}(1, t)) &= \tilde{H}(1, t) \\ &= H \circ (\pi, \text{Id})(1, t) \\ &= H(\pi(1), t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e(\hat{H}(0, t)) &= \tilde{H}(0, t) \\ &= H \circ (\pi, \text{Id})(0, t) \\ &= H(\pi(0), t) \end{aligned}$$

Como $(\pi(0), t) = (\pi(1), t)$ para toda $t \in [0, 1]$, entonces $e(\hat{H}(0, t)) = e(\hat{H}(1, t))$, de modo que $\hat{H}(1, t) - \hat{H}(0, t) \in \mathbb{Z}$. Entonces h es continua y por tanto constante, luego $\text{ind}(f) = h(0) = h(1) = \text{ind}(g)$. \square

Corolario 4.68. $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es no trivial.

Observación 4.69.

1. El corolario 4.67 muestra que la función

$$\begin{aligned} \text{deg}: \pi_1(\mathbb{S}^1) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f]_* &\longmapsto \text{ind}(f) \end{aligned}$$

está bien definida. Más aún, de acuerdo al ejemplo 4.64, dicha función es sobreyectiva.

Del próximo teorema se obtendrá que $\text{deg}: \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva. Esto, junto con el hecho de que $\text{ind}(f_n \# f_m) = \text{ind}(f_n) + \text{ind}(f_m)$, permitirá establecer un isomorfismo de grupos entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y \mathbb{Z} .

Teorema 4.70. Si $f, g: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ son funciones punteadas tales que $\text{ind}(f) = \text{Ind}(g)$ entonces $f \simeq_* g$.

Demostración. Teniendo en cuenta que $f(\pi(0)) = \pi(0) = g(\pi(0))$, por el teorema de levantamiento de caminos para $f \circ \pi, g \circ \pi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, existen $\hat{f}, \hat{g}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tales que $e \circ \hat{f} = f \circ \pi, e \circ \hat{g} = g \circ \pi$, donde, sin pérdida de generalidad, se puede tomar $\hat{f}(0) = \hat{g}(0)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \hat{f}(1) &= \text{Ind}(f) + \hat{f}(0) \\ &= \text{Ind}(g) + \hat{g}(0) \\ &= \hat{g}(1) \end{aligned}$$

Como \mathbb{R} es convexo, la función

$$\begin{aligned} \hat{H}: [0, 1] \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (s, t) &\longmapsto t\hat{g}(s) + (1-t)\hat{f}(s) \end{aligned}$$

es una homotopía de \hat{f} a \hat{g} , donde

$$\begin{aligned}\hat{H}(0, t) &= \hat{f}(0) \\ &= \hat{g}(0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}(1, t) &= \hat{g}(1) \\ &= \hat{f}(1)\end{aligned}$$

para toda $t \in [0, 1]$. Considere la función

$$e \circ \hat{H}: [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

Es claro que $e \circ \hat{H}$ es continua. Además, como

$$\begin{aligned}e(\hat{H}(s, 0)) &= e(\hat{f}(s)) \\ &= f \circ \pi(s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e(\hat{H}(s, 1)) &= e(\hat{g}(s)) \\ &= g \circ \pi(s)\end{aligned}$$

entonces $e \circ \hat{H}: f \circ \pi \simeq g \circ \pi(s)$. Más aún, dado que

$$\begin{aligned}e(\hat{H}(0, t)) &= e(\hat{f}(0)) \\ &= f \circ \pi(0) \\ &= \pi(0)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}e(\hat{H}(1, t)) &= e(\hat{f}(1)) \\ &= f(\pi(1)) \\ &= f(\pi(0)) \quad ; \pi(0) = \pi(1) \\ &= \pi(0)\end{aligned}$$

para toda $t \in [0, 1]$, de la proposición 4.29 se sigue que la función

$$\begin{aligned}H: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (\pi(s), t) &\longmapsto H((\pi(s), t)) = e \circ \hat{H}(s, t)\end{aligned}$$

es continua, única tal que $H \circ (\pi, \text{Id}) = e \circ \hat{H}$, y $H: f \simeq_* g$. □

Corolario 4.71. *La función $\text{deg}: \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es inyectiva.*

Corolario 4.72. *La función $\text{deg}: \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.*

Demostración. Dadas $[f]_*, [g]_* \in \pi_1(\mathbb{S}^1)$, con $n = \text{deg}([f]_*)$ y $m = \text{deg}([g]_*)$, se tiene

$$\begin{aligned}\text{ind}(f) &= n \\ &= \text{ind}(f_n)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ind}(g) &= m \\ &= \text{ind}(f_m)\end{aligned}$$

de modo que $[f]_* = [f_n]_*$ y $[g]_* = [f_m]_*$ por el teorema anterior. Así,

$$\begin{aligned}\text{deg}([f]_* \bullet [g]_*) &= \text{deg}([f_n]_* \bullet [g_m]_*) \\ &= \text{deg}([f_n \# f_m]_*) \\ &= \text{ind}(f_n \# f_m) \\ &= \text{ind}(f_n) + \text{ind}(f_m) \\ &= n + m \\ &= \text{deg}([f]_*) + \text{deg}([g]_*)\end{aligned}$$

□

De todo lo anterior se concluye que $\text{deg}: \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos. En consecuencia, $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ es cíclico infinito.

Ejemplo 4.73. Recuerde que el cilindro corresponde al espacio $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$. Por compatibilidad con productos, $\pi_n(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) \cong \pi_n(\mathbb{S}^1) \times \pi_n([0, 1])$, para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular,

$$\begin{aligned} \pi_1(\mathbb{S}^1 \times [0, 1]) &\cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1([0, 1]) \\ &\cong \mathbb{Z} \times \{0\} \\ &\cong \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ejemplo 4.74. Como el toro $\mathbb{T} \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, entonces $\pi_n(\mathbb{T}) \cong \pi_n(\mathbb{S}^1) \times \pi_n(\mathbb{S}^1)$. En particular, $\pi_1(\mathbb{T}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Note que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ no es un grupo cíclico: si existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (a, b) \rangle$, entonces, en particular, existen $n, k \in \mathbb{Z}$ tales que

$$n(a, b) = (0, 1)$$

y

$$k(a, b) = (1, 0)$$

lo cual implica que $a=b=0$, esto es, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle (0, 0) \rangle$, lo cual es absurdo. Este hecho permite concluir que \mathbb{S}^1 y el toro \mathbb{T} no son homotópicos y por tanto no son homeomorfos.

Ejemplo 4.75. Del ejemplo 4.15 se obtiene que $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$.

Ejemplo 4.76. Sea $p \in \mathbb{R}$ y considere el espacio $\mathbb{R} \setminus \{p\} = (-\infty, p) \cup (p, \infty)$. Es claro que $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ no es conexo por caminos. Si $f, g: (\mathbb{S}^1, \pi(0)) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{p\}$ son funciones punteadas entonces $f(\mathbb{S}^1), g(\mathbb{S}^1)$, son conexos por caminos, lo cual implica que $f(\mathbb{S}^1), g(\mathbb{S}^1) \subseteq (-\infty, p)$ ó $f(\mathbb{S}^1), g(\mathbb{S}^1) \subseteq (p, \infty)$, dependiendo si el punto base se encuentra en $(-\infty, p)$ ó (p, ∞) . En cualquier caso se obtiene que $f \simeq_* g$ pues $(-\infty, p), (p, \infty)$, son convexos. Así, $\pi_1(\mathbb{R} \setminus \{p\}) \cong \{0\}$. De este hecho y el ejemplo anterior se sigue que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}$ y $\mathbb{R} \setminus \{p\}$ no son homotópicos y por tanto no son homeomorfos. A su vez esto implica que \mathbb{R}^2 y \mathbb{R} no son homeomorfos.

El siguiente ejemplo justifica la observación hecha en 4.20:

Ejemplo 4.77. Sea $A = \{(x, \text{sen}(1/x)) \mid 0 < x \leq 1\}$, $B = \{0\} \times [0, 1]$ y C una circunferencia en el segundo cuadrante tangente al eje y en el punto $(0, 1)$. Considere el subespacio $X = A \cup B \cup C$ de \mathbb{R}^2 representado en la figura 4.6:

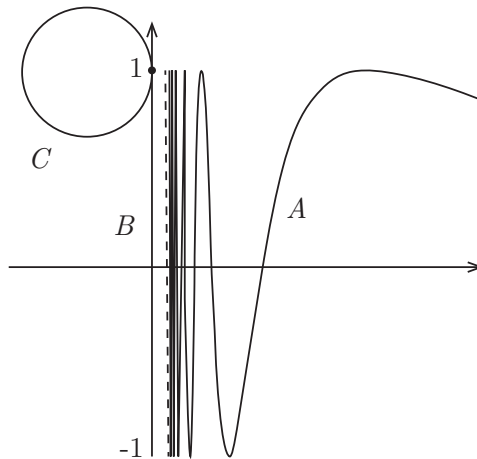


Figura 4.6. Subespacio X

Como A es homeomorfo a $(0, 1]$ por medio de la proyección canónica

$$\begin{aligned}\pi|_A: A &\longrightarrow (0, 1] \\ (x, \operatorname{sen}(1/x)) &\longmapsto x\end{aligned}$$

y $(0, 1]$ es convexo (y conexo por caminos), entonces de la proposición 4.28, corolario 4.48 y teorema 4.57 se sigue que $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1((0, 1]) \cong \{0\}$, para cualquier punto $x_0 \in A$. Por otro lado, como C es homeomorfo a \mathbb{S}^1 se sigue $\pi_1(X, (0, 1)) \cong \mathbb{Z}$.

Observación 4.78.

1. Se puede demostrar que para toda $n \in \mathbb{N}$,

$$\pi_i(\mathbb{S}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = n \\ \{0\} & \text{si } i < n \end{cases}$$

Para $i > n$ el problema de determinar $\pi_i(\mathbb{S}^n)$ sigue abierto. Por ejemplo, se puede probar que $\pi_3(\mathbb{S}^2) \cong \mathbb{Z}$, lo cual indica que dicho grupo puede ser no trivial.

2. Usando el hecho anterior se puede probar que $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ si y solo si $n = m$. En efecto, es claro que si $n = m$ entonces $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$. Para la otra implicación, suponga $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$. Entonces $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0_n)\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0_m)\}$, lo cual implica, por el ejemplo 4.15, que

$$\begin{aligned}\pi_i(\mathbb{S}^{n-1}) &\cong \pi_i(\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0_n)\}) ; n-1 \geq 1 \\ &\cong \pi_i(\mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0_m)\}) \\ &\cong \pi_i(\mathbb{S}^{m-1}) ; m-1 \geq 1\end{aligned}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Suponga $n < m$. Usando el resultado en 1 para $i = n-1, m-1$, se obtiene

$$\begin{aligned}\pi_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) &\cong \mathbb{Z} \\ \pi_{n-1}(\mathbb{S}^{m-1}) &\cong \{0\}\end{aligned}$$

esto es, \mathbb{S}^{n-1} y \mathbb{S}^{m-1} no pueden ser homotópicos y por tanto no pueden ser homeomorfos. Esto a su vez implica que $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0_n)\}$ y $\mathbb{R}^m \setminus \{(0, \dots, 0_m)\}$ no pueden ser homeomorfos, de donde se sigue que $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$. El mismo resultado se obtiene cuando $m < n$. Se concluye entonces que $m = n$.

3. Como consecuencia de 2 y del ítem 2 de la observación 3.2 se sigue que una n -variedad topológica conexa no puede ser una m -variedad para $n \neq m$.

El siguiente teorema es una aplicación interesante del grupo fundamental:

Teorema 4.79. *No existe una función continua $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{S}^1$.*

Demostración. Suponga que existe $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua tal que $f(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{S}^1$. Como la inclusión $i: \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{B}^2$ es continua y $f(x) = x$, para toda $x \in \mathbb{S}^1$, entonces $f \circ i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es la identidad. Por funtorialidad de π_1 , se sigue

$$\begin{aligned}\pi_1(f \circ i) &= \pi_1(f) \circ \pi_1(i) \\ &= \pi_1(\operatorname{Id}_{\mathbb{S}^1}) \\ &= \operatorname{Id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}\end{aligned}$$

Como \mathbb{B}^2 es convexo entonces $\pi_1(\mathbb{B}^2)$ es trivial, luego $\pi_1(i): \pi_1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \pi_1(\mathbb{B}^2)$ es el homeomorfismo trivial, lo cual implica que $\pi_1(f) \circ \pi_1(i)$ es también el homeomorfismo trivial, esto es, $\operatorname{Id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)}$ es el homeomorfismo trivial, lo cual es absurdo ya que $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ no es trivial. \square

Definir de manera rigurosa el concepto de *orientabilidad* de una superficie no es un procedimiento sencillo, pero esto puede lograrse a partir del concepto de *grado de un homeomorfismo de una región plana*. Para esto, se debe definir primero el concepto de *grado de una función en el plano*:

4.3 Grado de una función en el plano

Definición 4.80. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función continua. Se dice que f es **regular** en $z_0 \in D$, si existe un abierto $V \subseteq D$ tal que $z_0 \in V$ y $\varphi(z) \neq \varphi(z_0)$, para todo $z \in V \setminus \{z_0\}$.

Observación 4.81.

1. De acuerdo a la definición 4.80, siendo V una vecindad abierta de z_0 entonces existe $r > 0$ tal que $B(z_0, r) \subseteq V$ en cuyo caso $\varphi(z) \neq \varphi(z_0)$ para toda $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Así, puede decirse que f es regular en z_0 si existe una bola abierta B tal que $z_0 \in B$ y $\varphi(z) \neq \varphi(z_0)$, para todo $z \in B \setminus \{z_0\}$.

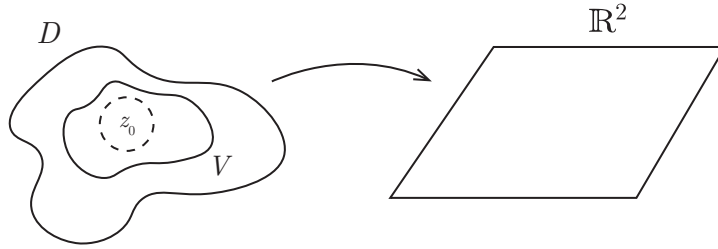


Figura 4.7. función regular

Sea $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ regular en z_0 . Entonces existe $r > 0$ tal que $\Omega = \{z \in V \mid 0 < \|z - z_0\| < r\} \subseteq D$ y $\varphi(z) \neq \varphi(z_0)$ para todo $z \in \Omega$. Note que $\varphi(\Omega) \subseteq \Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(z_0)\}$. Considerando la restricción $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$, φ induce un homomorfismo de grupos

$$\pi_1(\varphi): \pi_1(\Omega) \rightarrow \pi_1(\Omega')$$

Como Ω, Ω' , son homotópicos puntuados a \mathbb{S}^1 entonces $\pi_1(\Omega), \pi_1(\Omega')$, son ambos isomorfos a \mathbb{Z} , es decir, son grupos cíclicos infinitos. Por tanto, el homomorfismo $\pi_1(\varphi)$ se puede determinar a partir de la imagen del generador de $\pi_1(\Omega)$ ^{4.2}. Sean $[\alpha]_* \in \pi_1(\Omega), [\beta]_* \in \pi_1(\Omega')$, respectivos generadores donde α es un lazo en Ω y β es un lazo en Ω' . Así, existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\pi_1(\varphi)([\alpha]_*) = [\beta]^d$$

Note que si $d=0$, entonces $\pi_1(\varphi)$ es el homomorfismo trivial mientras que para $d \neq 0$, $\pi_1(\varphi)(\pi_1(\Omega))$ es el subgrupo generado por $[\beta]^d$. El valor d se llama **grado** de φ en z_0 , el cual se denota por $d(\varphi)_{z_0}$. Como Ω es conexo por caminos entonces d no depende del punto base de α y por tanto tampoco depende de Ω .

Si una segunda función ψ es regular en $w_0 = \varphi(z_0)$ entonces es fácil verificar que $\psi \circ \varphi$ es regular en z_0 . Más aún, si $[\varphi(\alpha)] = [\beta]^{d(\varphi)_{z_0}}$ y $[\psi(\beta)] = [\gamma]^{d(\psi)_{w_0}}$, entonces

$$\begin{aligned} [(\psi \circ \varphi)(\alpha)] &= [\psi(\varphi(\alpha))] \\ &= \pi_1(\psi)([\varphi(\alpha)]) \\ &= \pi_1(\psi)([\beta]^{d(\varphi)_{z_0}}) \\ &= (\pi_1(\psi)([\beta]))^{d(\varphi)_{z_0}} \\ &= ([\psi(\beta)])^{d(\varphi)_{z_0}} \\ &= ([\gamma]^{d(\psi)_{w_0}})^{d(\varphi)_{z_0}} \\ &= [\gamma]^{d(\psi)_{w_0} d(\varphi)_{z_0}} \end{aligned}$$

esto es, $d(\psi \circ \varphi)_{z_0} = d(\psi)_{w_0} d(\varphi)_{z_0}$. Además, es inmediato que $d(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = 1$.

4.2. Recuerde que si G es un grupo cíclico infinito con generador g , H un grupo cualquiera y $h \in H$, entonces existe un homomorfismo único $f: G \rightarrow H$ tal que $f(g) = h$, definido por $f(g^n) = h^n$.

Ahora suponga que $D \subseteq \mathbb{R}^2$, es una región (abierto y conexo) y $\varphi: D \rightarrow \varphi(D)$ un homeomorfismo. Note que si $\varphi(D)$ es abierto entonces se puede definir el grado de la función inversa $\varphi^{-1}: \varphi(D) \rightarrow D$ (φ^{-1} es también regular), en cuyo caso, como la función identidad tiene grado 1, se obtiene

$$\begin{aligned} d(\varphi)_{z_0} d(\varphi^{-1})_{\varphi(z_0)} &= d(\varphi \circ \varphi^{-1}) \\ &= d(\text{Id}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así, $d(\varphi)_{z_0} = \pm 1$. De hecho, por el teorema de invarianza del dominio^{4.3}, siempre se tiene que $\varphi(D)$ es abierto. Se probará, sin usar este hecho, que $d(\varphi)$ es constante en D siempre que $\varphi(D)$ tenga interior no vacío. Para esto será preciso considerar lo siguiente: Si $\Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \|z - z_0\| < r\}$ es una bola perforada y $f: \pi_1(\Omega) \rightarrow \mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos, dada $[\alpha] \in \pi_1(\Omega)$, se puede definir el **índice** de α en z_0 , denotado por $\text{ind}(\alpha, z_0)$, como

$$\text{ind}(\alpha, z_0) = f([\alpha])$$

Con base en esta idea y el hecho de que Ω, \mathbb{S}^1 , son homotópicos punteados, se tiene que $\text{ind}(\alpha, z_0) = \text{ind}(\alpha', z_0)$ si y solo si $\alpha \simeq_* \alpha'$. En efecto, sea $z_0 \in D$ fijo y $\Omega, \Omega', \alpha, \beta$, como antes. Entonces $\pi_1(\varphi)([\alpha]) = [\beta]^{d(\varphi)_{z_0}}$, de modo que $\text{ind}(\varphi \circ \alpha, \varphi(z_0)) = d(\varphi)_{z_0}$. Sea z_1 suficientemente cerca de z_0 tal que $\text{ind}(\alpha, z_0) = \text{ind}(\alpha, z_1) = 1$ y $\text{ind}(\varphi \circ \alpha, \varphi(z_0)) = \text{ind}(\varphi \circ \alpha, \varphi(z_1)) = d(\varphi)_{z_0}$. A fin de definir $d(\varphi)_{z_1}$, se usa una bola perforada Ω_1 centrada en z_1 , el plano perforado Ω'_1 en $\varphi(z_1)$ y generadores α_1, β_1 de $\pi_1(\Omega_1)$ y $\pi_1(\Omega'_1)$ respectivamente.

Como φ es un homeomorfismo, la única restricción de Ω_1 es estar contenido en D . Por tanto, si z_1 está suficientemente cerca a z_0 , $\alpha \subseteq \Omega_1$, lo cual implica que $\alpha \simeq_* \alpha_1$ en Ω_1 y $\varphi \circ \alpha \simeq_* \varphi \circ \alpha_1$ en Ω'_1 ; luego

$$\begin{aligned} \text{ind}(\varphi \circ \alpha_1, \varphi(z_1)) &= \text{ind}(\varphi \circ \alpha, \varphi(z_1)) \\ &= d(\varphi)_{z_0} \end{aligned}$$

Así, $\pi_1(\varphi)([\alpha_1]) = [\beta]^{d(\varphi)_{z_0}}$ en Ω'_1 , de donde se concluye que $d(\varphi)_{z_0} = d(\varphi)_{z_1}$. Se tiene entonces una función

$$\begin{aligned} d(\varphi): D &\rightarrow \{-1, 1\} \\ z &\mapsto d(\varphi)_z \end{aligned}$$

que es localmente constante (para todo punto existe un abierto que lo contiene donde $d(\varphi)$ es constante). Como D es conexo, $d(\varphi)_z$ es constante. Más aún, de acuerdo al teorema de invarianza del dominio, se concluye que $d(\varphi)_z = \pm 1$.

Con base en los hechos anteriores se tiene:

Definición 4.82. Sea D un dominio y $\varphi: D \rightarrow \varphi(D)$ un homeomorfismo. Si $d(\varphi) = 1$, se dice que φ **preserva el sentido**. Si $d(\varphi) = -1$, se dice que φ **reversa el sentido**.

4.4 Superficies orientables

Definición 4.83. Sea M una superficie. Un subconjunto $V \subseteq M$ se denomina una **región plana**, si existe un homeomorfismo $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$. Se dice que dos de tales homeomorfismos $h_1: V \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h_2: V \rightarrow \mathbb{R}^2$, son **equivalentes**, lo cual se escribe como $h_1 \sim h_2$, si y solo si $h_1 \circ h_2^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tiene grado 1.

4.3. El teorema de invarianza del dominio establece: Si U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función continua e inyectiva, entonces $V = f(U)$ es abierto y $f: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Cabe señalar que una de las consecuencias de este teorema es el teorema de invarianza de la dimensión.

Observación 4.84.

1. \sim define una relación de equivalencia en el conjunto de homeomorfismos con dominio en V que efectúan tales mapeos. En efecto,

- Reflexiva: Si $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo entonces $h \circ h^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$, de modo que

$$\begin{aligned} d(h \circ h^{-1}) &= d(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Simétrica: Si $h_1 \sim h_2$, entonces $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = 1$, luego

$$\begin{aligned} d(h_2 \circ h_1^{-1}) &= d(h_2) d(h_1^{-1}) \\ &= d(h_1^{-1}) d(h_2) \\ &= d(h_1) d(h_2^{-1}) \\ &= d(h_1 \circ h_2^{-1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

- Transitiva: Si $h_1 \sim h_2$ y $h_2 \sim h_3$, entonces $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = 1$ y $d(h_2 \circ h_3^{-1}) = 1$, luego

$$\begin{aligned} d(h_1 \circ h_3^{-1}) &= d(h_1 \circ h_2^{-1} \circ h_2 \circ h_3^{-1}) \\ &= d(h_1 \circ h_2^{-1}) d(h_2 \circ h_3^{-1}) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Dados homeomorfismos $h_1, h_2: V \rightarrow \mathbb{R}^2$, se tiene entonces que $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = \pm 1$. Por tanto, h_1, h_2 no están en la misma clase si y solo si $d(h_1 \circ h_2^{-1}) = -1$. Esto muestra que existen exactamente dos clases de equivalencia.

3. Si $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo, entonces se define la función

$$\begin{aligned} \bar{h}: V &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto \bar{h}(z) = \overline{h(z)} \end{aligned}$$

donde $\overline{(x, y)} = (x, -y)$, conocida como **conjugación**. Es fácil ver que \bar{h} es un homeomorfismo pues es la composición de un homeomorfismo con una reflexión respecto al eje x .

4. h y \bar{h} no están en la misma clase de equivalencia. En efecto, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $z = h^{-1}(x, y)$, entonces $h(z) = (x, y)$ y por tanto $\bar{h}(z) = \overline{h(z)} = (x, -y)$; luego como

$$\bar{h} \circ h^{-1}(x, y) = (x, -y)$$

entonces $\bar{h} \circ h^{-1}$ es la conjugación. Considerando

$$\bar{h} \circ h^{-1}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

y sabiendo que $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $\alpha(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ es generador de $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$, se observa que

$$\begin{aligned} (\bar{h} \circ h^{-1})(\alpha(t)) &= (\cos(2\pi t), -\sin(2\pi t)) \\ &= (\cos(-2\pi t), \sin(-2\pi t)) \\ &= \bar{\alpha}(t) \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}$ es el camino opuesto de α . Por tanto,

$$\begin{aligned} [(\bar{h} \circ h^{-1})(\alpha)]_* &= [\bar{\alpha}]_* \\ &= [\alpha]_*^{-1} \end{aligned}$$

luego, recordando que $[(\bar{h} \circ h^{-1})(\alpha)]_* = [\alpha]_*^{d(\bar{h} \circ h^{-1})}$, se concluye que $d(\bar{h} \circ h^{-1}) = -1$.

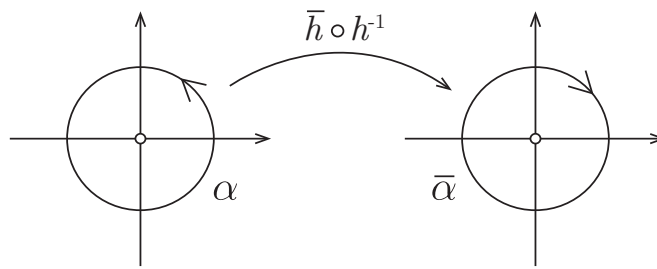


Figura 4.8. Conjugación

Definición 4.85. Sea V una región plana de una superficie M y $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo. La elección de una de las dos clases de equivalencia, $[h]$ ó $[\bar{h}]$, se llama una **orientación** de V .

En lo sucesivo se hará usar la notación $o(h)$ (ó $o(\bar{h})$) para indicar cuando V está orientado.

Sea M una superficie, V una región plana de M y $W \subseteq V$ una subregión de V ($W \subseteq V$ abierto tal que W es homeomorfo a \mathbb{R}^2). Se desea inducir una orientación en W a partir de una orientación $o(h)$ de V . En efecto, como $h: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo, entonces $h \circ i: W \rightarrow h(i(W))$ es un homeomorfismo, donde $i: W \hookrightarrow V$ es la inclusión. Dado que $W \cong \mathbb{R}^2$, por transitividad $h(i(W)) \cong \mathbb{R}^2$. Sea $f: h(i(W)) \rightarrow \mathbb{R}^2$ un homeomorfismo tal que $d(f) = 1$. Entonces $k = f \circ h \circ i: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo. La orientación $o(k)$ en W se denomina la *orientación inducida* por la orientación $o(h)$ en V , la cual se denota por $o(h_W)$.

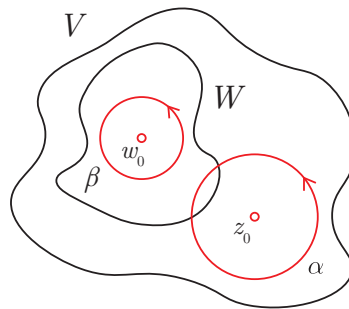


Figura 4.9. Orientación inducida

Definición 4.86. Si V_1 y V_2 son dos regiones planas de una superficie M y cada una tiene una orientación $o(h_1)$ y $o(h_2)$, se dice que dichas orientaciones son **compatibles** si $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ y $o(h_1)$, $o(h_2)$, inducen la misma orientación en cada subregión común.

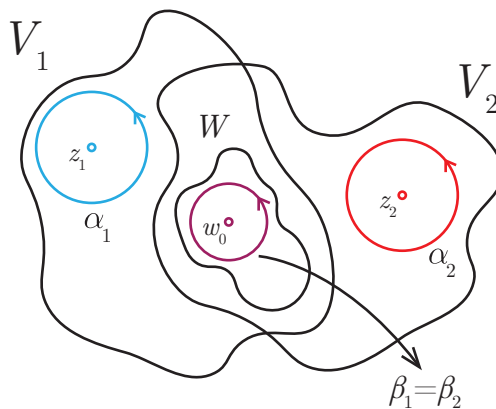


Figura 4.10. Orientaciones compatibles

Definición 4.87. Una superficie M es **orientable** si existe un cubrimiento abierto de M por regiones planas tal que es posible asignar a cada región plana una orientación de modo que todo par de regiones planas superpuestas tienen orientaciones compatibles.

Observación 4.88.

1. La orientabilidad de una superficie es un invariante topológico. En efecto, sean M y N superficies, M orientable y $\varphi: M \rightarrow N$ un homeomorfismo. Como M es orientable entonces existe un cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de M y una familia de homeomorfismos $\{h_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2\}_{\alpha \in I}$ tales que la orientación en cada U_α es $o(h_\alpha)$ (se podría considerar la orientación $o(\overline{h_\alpha})$, pero como $\overline{h_\alpha}: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ es homeomorfismo y $o(h_\alpha) \neq o(\overline{h_\alpha})$, no se pierde generalidad en suponer que la orientación en U_α siempre es $o(h_\alpha)$) y las orientaciones son compatibles, es decir, si $\alpha, \beta \in I$ son tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ y $U_{\alpha\beta}$ es una subregión de $U_\alpha \cap U_\beta$, entonces $o((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}}) = o((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}})$. Se desea probar que N también es orientable. En efecto, note primero que la familia $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$, donde $V_\alpha = \varphi(U_\alpha)$ para cada $\alpha \in I$, es un cubrimiento abierto de N por regiones planas ya que para cada $\alpha \in I$, V_α es abierto y $k_\alpha = h_\alpha \circ \varphi|_{U_\alpha}^{-1}: V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo.

$$\begin{array}{ccc}
 U_\alpha & \xrightarrow{\varphi|_{U_\alpha}^{-1}} & V_\alpha \\
 \downarrow h_\alpha & \swarrow k_\alpha = h_\alpha \circ \varphi|_{U_\alpha}^{-1} & \\
 \mathbb{R}^2 & &
 \end{array}$$

Para cada $\alpha \in I$, considere en V_α la orientación $o(k_\alpha)$. Se desea ver que dichas orientaciones son compatibles: Si $\alpha, \beta \in I$ son tales que $V_\alpha \cap V_\beta \neq \emptyset$ y $V_{\alpha\beta}$ es una subregión de $V_\alpha \cap V_\beta$ entonces $o((k_\alpha)_{V_{\alpha\beta}}) = o((k_\beta)_{V_{\alpha\beta}})$. Para ver esto, sea $U_{\alpha\beta} = \varphi^{-1}(V_{\alpha\beta})$. Entonces $U_{\alpha\beta}$ es una subregión de $U_\alpha \cap U_\beta$ de modo que $o((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}}) = o((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}})$, esto es,

$$d((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}} \circ ((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}})^{-1}) = 1$$

Luego, como

$$\begin{aligned}
 d((k_\alpha)_{V_{\alpha\beta}} \circ ((k_\beta)_{V_{\alpha\beta}})^{-1}) &= d(((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}} \circ \varphi|_{U_{\alpha\beta}}^{-1}) \circ ((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}} \circ \varphi|_{U_{\alpha\beta}}^{-1})^{-1}) \\
 &= d((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}} \circ (\varphi|_{U_{\alpha\beta}}^{-1} \circ \varphi|_{U_{\alpha\beta}}) \circ ((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}})^{-1}) \\
 &= d((h_\alpha)_{U_{\alpha\beta}} \circ ((h_\beta)_{U_{\alpha\beta}})^{-1}) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

entonces $o((k_\alpha)_{V_{\alpha\beta}}) = o((k_\beta)_{V_{\alpha\beta}})$.

2. A fin de orientar una superficie M , es suficiente orientar todas las regiones planas que pertenecen a algún un cubrimiento abierto de M por regiones planas.
3. Se puede probar que \mathbb{S}^2 y \mathbb{T}^2 son orientables, mientras que $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ y la botella de Klein no son orientables.
4. Si M es una superficie con frontera, se dice que M es orientable si y solo si $\text{Int}M$ es orientable. En este caso, se puede probar que una orientación de $\text{Int}M$ induce una orientación en ∂M . Se puede probar que la banda de Möbius es una superficie con frontera no orientable. Para más detalles consulte [3, página 24].

Capítulo 5

Simplejos, complejos y triangulaciones

Una de las ideas clave que permite clasificar las superficies compactas tiene que ver con el hecho de que las superficies (con frontera o sin frontera) se pueden triangular. Intuitivamente, una superficie se dice triangulable si es homeomorfa a un espacio obtenido al pegar triángulos a lo largo de sus aristas. Para definir esta idea de manera rigurosa se debe definir primero el concepto de *complejo simplicial*, el cual es una extensión de la noción de poliedro. La primera prueba de que toda superficie es triangulable fue establecida en 1925 por el matemático húngaro Tibor Radó. Los detalles involucrados en la demostración de este resultado son bastante técnicos, razón por la cual se omitirá aquí; para más detalles consúltese [7]. La idea detrás de la prueba es la siguiente: Como una superficie compacta es localmente homeomorfa a \mathbb{R}^2 entonces ésta puede cubrirse con un número finito de triángulos. El resultado no es necesariamente un triangulación de la superficie porque algunos de los triángulos quizá no se intersectan de manera apropiada, pero es posible (está es la parte más difícil del teorema) reorganizar y subdividir los triángulos para que el resultado sea un triangulación de la superficie.

Sea M una superficie compacta triangulada. Para ver como M da lugar a una representación poligonal se hace lo siguiente: Se parte de un triángulo en el cual se identifica una arista que es compartida por otro triángulo. Al pegar estos triángulos a lo largo de dicha arista se obtiene un polígono de cuatro lados el cual es homeomorfo a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 . Ahora, entre los triángulos restantes en M , al menos uno estará pegado a una de las aristas que conforman la frontera de este polígono. Pegando este triángulo con el polígono a lo largo de la arista mencionada se obtiene nuevamente un polígono el cual es homeomorfo a una bola cerrada en \mathbb{R}^2 . Este proceso continua hasta que todos los triángulos hayan sido identificados juntos en un polígono homeomorfa a una bola cerrada de \mathbb{R}^2 y con pares de aristas identificadas en la frontera. En la figura 5.1 se describe este procedimiento.

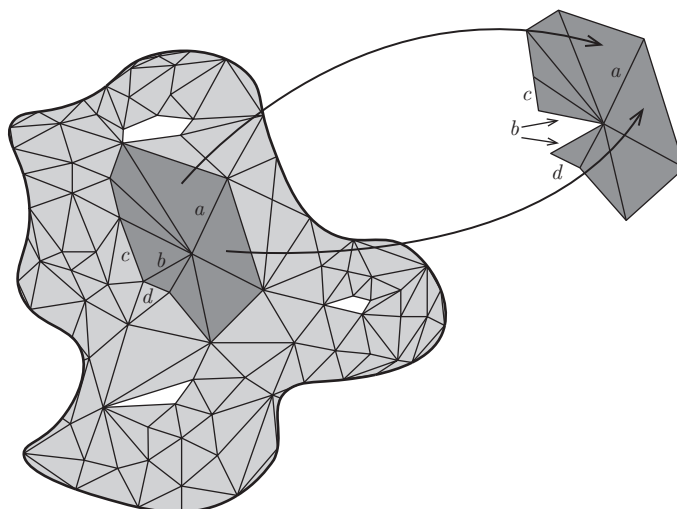


Figura 5.1.

5.1 Simplejos y complejos simpliciales

Considere \mathbb{R}^n como espacio vectorial euclidiano con la topología usual. Un subconjunto $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ de \mathbb{R}^n se dice *linealmente independiente* si para escalares arbitrarios $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, la condición

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$$

implica que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$.

A partir del concepto de *independencia lineal* se puede definir el concepto de independencia geométrica de un conjunto de puntos $\{a_0, \dots, a_k\}$ en \mathbb{R}^n

Definición 5.1. Un conjunto $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, $k \geq 1$, de puntos de \mathbb{R}^n se dice **geoméricamente independiente** si el conjunto $S = \{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ de vectores en \mathbb{R}^n es linealmente independiente. Un conjunto que consta de un solo punto se considerará geoméricamente independiente.

Ejemplo 5.2. Considere el conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ de puntos en \mathbb{R}^2 . Este será geoméricamente independiente si el conjunto de vectores $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0\}$ es linealmente independiente, esto es, si uno no es múltiplo escalar del otro (los vectores no son paralelos). Así, $\{a_0, a_1, a_2\}$ será geoméricamente independiente si los puntos a_0, a_1, a_2 no son colineales.

En general, para n suficientemente grande, $k + 1$ puntos serán geoméricamente independientes en \mathbb{R}^n si no existe un hiperplano de dimensión $k - 1$ que los contenga. A fin de probar este hecho primero debe definirse lo que se entiende por un hiperplano de una dimensión dada.

Definición 5.3. Un subconjunto H de \mathbb{R}^n es un **hiperplano k -dimensional** si existe un punto $x \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio k -dimensional V^k de \mathbb{R}^n tal que

$$H = x + V^k$$

La próxima proposición aclara el uso del término *geoméricamente independiente* y la independencia del orden de los puntos de la definición correspondiente.

Proposición 5.4. Un subconjunto $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, $k \geq 1$, de \mathbb{R}^n es geoméricamente independiente si y solo si no existe un hiperplano de dimensión $k - 1$ que contenga todos los puntos de A .

Demostración. Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ geoméricamente independiente y suponga que existe un hiperplano H^{k-1} tal que $A \subseteq H^{k-1}$. Si esto es cierto, entonces existe $x \in \mathbb{R}^n$ y un subespacio V^{k-1} de dimensión $k - 1$ tal que $a_0, \dots, a_k \in x + V^{k-1}$, lo cual implica que $a_0 - x, \dots, a_k - x \in V^{k-1}$. Restando el primer vector a los demás se obtiene que $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0 \in V^{k-1}$. Por tanto, V^{k-1} , que es de dimensión $k - 1$, contiene k vectores linealmente independientes, absurdo. Recíprocamente, suponga que $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ es linealmente independiente. Entonces el subespacio generado por estos vectores es de dimensión menor o igual que $k - 1$. Por tanto, se puede asumir, agregando vectores si es necesario, que existe un subespacio V^{k-1} de dimensión $k - 1$ tal que $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\} \subseteq V^{k-1}$. Luego, el hiperplano $H^{k-1} = a_0 + V^{k-1}$ contiene a a_0 y por tanto a $a_i = a_0 + a_i - a_0$ para cada $i = 0, \dots, k$, lo cual es una contradicción. \square

La condición de independencia geométrica se puede expresar de manera algebraica y en términos de sus elementos.

Proposición 5.5. Un subconjunto $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, $k \geq 1$, de \mathbb{R}^n es geoméricamente independiente si y solo si para reales $\alpha_0, \dots, \alpha_k$, las condiciones

$$1. \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i = 0$$

$$2. \sum_{i=0}^k \alpha_i = 0$$

implican que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 0, 1, 2, \dots, k$.

Demostración. Sea A geoméricamente independiente, es decir, $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ es linealmente independiente. Despejando α_0 de la segunda condición y sustituyéndolo en la primera condición se obtiene

$$(-\alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_k)a_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i = 0$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (a_i - a_0) = 0$$

lo cual implica que $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, k$. Más aún, $\alpha_0 = 0$ de acuerdo a la segunda condición. Recíprocamente, suponga que se cumplen las condiciones del enunciado y asuma que

$$\sum_{i=1}^k \beta_i (a_i - a_0) = 0$$

para algunos reales β_i . Entonces se tiene

$$-\left(\sum_{i=1}^k \beta_i\right)a_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i a_i = 0$$

Haciendo $\beta_0 = -\sum_{i=1}^k \beta_i$, se obtiene que

$$\sum_{i=0}^k \beta_i a_i = 0$$

y

$$\sum_{i=0}^k \beta_i = 0$$

de modo que $\beta_i = 0$, para todo $i = 0, 1, \dots, k$. \square

La siguiente proposición muestra que cualquier conjunto geoméricamente independiente de puntos en \mathbb{R}^n determina un único hiperplano de \mathbb{R}^n que pasa a través de ellos.

Proposición 5.6. Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, $k \geq 1$, un conjunto geoméricamente independiente de \mathbb{R}^n . Entonces existe un único hiperplano k -dimensional que pasa a través de todos los puntos de A .

Demostración. La existencia es inmediata porque, si V^k es el subespacio de \mathbb{R}^n generado por el subconjunto linealmente independiente $\{a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$, entonces el hiperplano $H^k = a_0 + V^k$ es k -dimensional y pasa a través de todos los puntos de A . Para la unicidad, suponga que existe otro hiperplano F^k el cual contiene a todos los puntos de A . Por tanto, existe un subespacio W^k de dimensión k y $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $F^k = x + W^k$. Como $a_0, \dots, a_k \in F^k$, entonces existen $w_0, \dots, w_k \in W^k$ tales que $a_i = x + w_i$, $i = 0, \dots, k$, en cuyo caso se obtiene que $a_i - a_0 \in W^k$, $i = 1, \dots, k$, de modo que V^k es un subespacio de W^k . Más aún, como ambos subespacios poseen la misma dimensión se tiene que $V^k = W^k$. Luego, considerando la relación módulo V^k en \mathbb{R}^n , se observa que las clases laterales

$$H^k = a_0 + V^k$$

$$F^k = x + V^k$$

son tales que $A \subseteq H^k \cap F^k$, de modo que $H^k = F^k$ \square

La siguiente proposición muestra como son las coordenadas de los puntos del hiperplano H^k en términos de los puntos de A .

Proposición 5.7. Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$, $k \geq 1$, un conjunto geoméricamente independiente de \mathbb{R}^n . Entonces cada punto h del hiperplano k -dimensional determinado por A se puede expresar de manera única como

$$h = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

donde

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

Demostación. Si h es cualquier punto del hiperplano determinado por A , entonces de la proposición 5.6 se sigue que h es de la forma

$$h = a_0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i (a_i - a_0)$$

donde los α_i son números reales únicos. Por tanto, h se puede expresar de manera única como

$$\begin{aligned} h &= \left(1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i\right) a_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \\ &= \alpha_0 a_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i \quad ; \alpha_0 = 1 - \sum_{i=1}^k \alpha_i \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \end{aligned}$$

donde $\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$. □

El siguiente concepto de *coordenadas baricéntricas* es importante pues permite definir el concepto de simplejo, su interior y su frontera, además de establecer sus propiedades.

Definición 5.8. Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^n y h un punto en el hiperplano determinado por A . Si

$$h = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

donde

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

entonces al vector $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ se le denomina **coordenadas baricéntricas** de h respecto al conjunto A .

Observación 5.9.

1. Observe que las coordenadas baricéntricas de un punto pueden ser valores reales arbitrarios.

Ejemplo 5.10. En el espacio euclidiano \mathbb{R}^3 , considere los puntos $a_0 = (2, 0, 0)$, $a_1 = (0, 3, 0)$. El hiperplano 1-dimensional determinado por el conjunto $\{a_0, a_1\}$ es la recta ℓ que pasa por dichos puntos (Fig. 5.2a). Note que los puntos h que se encuentran estrictamente en el segmento de recta determinado por a_0, a_1 , a saber, los puntos de la forma

$$\begin{aligned} h &= a_0 + t(a_1 - a_0) \\ &= (1-t)a_0 + ta_1 \quad ; 0 < t < 1 \end{aligned}$$

poseen coordenadas baricéntricas positivas. Las coordenadas baricéntricas de los puntos a_0, a_1 , son $(1, 0)$ y $(0, 1)$ respectivamente. Para $h = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1$ en ℓ , donde $\alpha_0 + \alpha_1 = 1$, $\alpha_0 > 0, \alpha_1 < 0$, se tiene que h se encuentra a la izquierda del punto a_0 . Si $\alpha_0 < 0, \alpha_1 > 0$, entonces h se encuentra a la derecha de a_1 . De manera similar, si $\{a_0, a_1, a_2\}$ es un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, entonces para números reales positivos $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, tales que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

el punto

$$h = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$$

se encuentra en el interior del triángulo con vértices en a_0, a_1 y a_2 (Fig. 5.3b). En efecto, note que

$$\begin{aligned} h &= \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \\ &= \alpha_0 a_0 + (1 - \alpha_0)[(\alpha_1/\lambda)a_1 + (\alpha_2/\lambda)a_2] \quad ; \lambda = 1 - \alpha_0 \end{aligned}$$

luego, dado que

$$\begin{aligned} p &= (\alpha_1/\lambda)a_1 + (\alpha_2/\lambda)a_2 \\ &= a_1 + (\alpha_1/(\alpha_1 + \alpha_2))(a_2 - a_1) \end{aligned}$$

es un punto en el interior del segmento entre a_1 y a_2 entonces h es un punto en el interior del segmento de línea entre a_0 y p . Note que para un punto en la frontera del triángulo, las coordenadas baricéntricas son no negativas y al menos una es cero. Las coordenadas baricéntricas de a_0, a_1 y a_2 son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente. Las coordenadas de un punto por debajo de la línea que une a a_0 y a_1 y opuesto a a_2 , son tales que $\alpha_0 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 < 0$, etc.

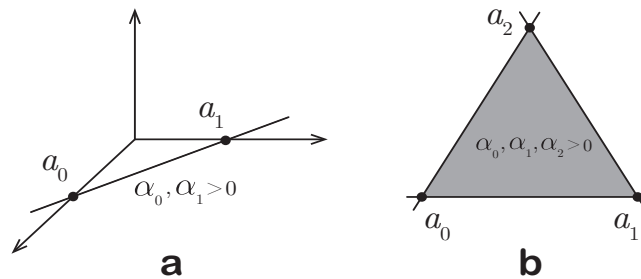


Figura 5.2.

Con base en el ejemplo anterior se tiene:

Definición 5.11. Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^n , $k \leq n$. El **simplejo geométrico k -dimensional** o **k -simplejo** generado por A , denotado por $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ o simplemente σ^k , es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

donde

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \quad ; \alpha_i \geq 0$$

para todo $i = 0, \dots, k$.

Definición 5.12. Sean σ^q, σ^p , $p \leq q \leq n$, simplejos en \mathbb{R}^n . Se dice que σ^p es una **cara p -dimensional** de σ^q si cada vértice de σ^p es también un vértice de σ^q . Si además $p < q$, se dice que σ^p es una **cara propia** de σ^q . Toda cara propia de un k -simplejo σ^k que es un $k-1$ -simplejo se denomina una **cara frontera** de σ^k . La unión de las caras frontera de σ^k se denomina la **frontera** de σ^k , la cual se denota por $\partial\sigma^k$. El **interior** de σ^k , el cual se denota por $\text{Int}(\sigma^k)$, se define como $\text{Int}(\sigma^k) = \sigma^k \setminus \partial\sigma^k$.

Observación 5.13.

1. Note que para un 0-simplejo $\sigma = \langle a_0 \rangle$, $\partial\sigma = \emptyset$ y $\text{Int}(\sigma) = \langle a_0 \rangle$.
2. $\partial\sigma^k$ consiste de todos los puntos $x \in \sigma^k$ tal que al menos una de las coordenadas baricéntricas de x es cero. Por tanto, $\text{Int}(\sigma^k)$ consiste de aquellos puntos de σ^k cuyas coordenadas baricéntricas son estrictamente positivas. Para cada $x \in \sigma^k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$, existe una única cara τ de σ^k tal que $x \in \text{Int}(\tau)$, a saber, la cara generada por los puntos a_i para los cuales $\alpha_i > 0$, donde $(\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ son las coordenadas baricéntricas de x .

- Observe que los interiores de cualquier par de caras de un k -simple σ^k son, o bien idénticos, o bien disjuntos. Por tanto, cualquier k -simplejo σ^k se puede escribir como la unión disjunta de los interiores de sus caras.
- El k -simplejo, $\langle e_0, \dots, e_k \rangle$, donde e_0, \dots, e_k , es la base canónica de \mathbb{R}^{k+1} se denomina el **k -simplejo estándar**, el cual se denota por Δ^k . Note en este caso que

$$\Delta^k = \left\{ (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1; \alpha_i \geq 0, 0 \leq i \leq k \right\}$$

Ejemplo 5.14. Un 0-simplejo $\langle a_0 \rangle$ es simplemente un punto. Si a_0, a_1 , son puntos distintos en \mathbb{R}^n entonces el 1-simplejo $\langle a_0, a_1 \rangle$ es el segmento de recta determinado por los puntos $\{a_0, a_1\}$. Para el conjunto de puntos geoméricamente independiente, $\{a_0, a_1, a_2\}$, el 2-simplejo $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ es un triángulo (con su interior), cuyos vértices son a_0, a_1 y a_2 . Si $\{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ es un conjunto geoméricamente independiente entonces el 3-simplejo $\langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$ es un tetraedro sólido con vértices a_0, a_1, a_2 y a_3 .

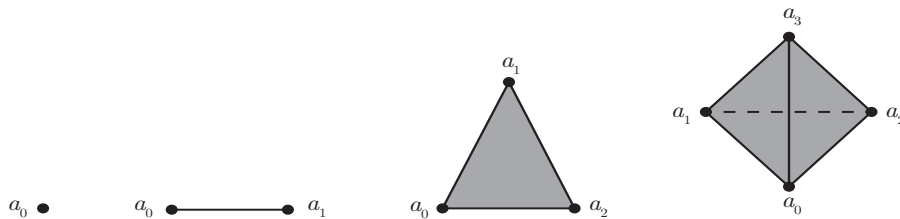


Figura 5.3. Ejemplo de simplejos.

Ejemplo 5.15. Cualquier cara 0-dimensional de σ^q es simplemente un **vértice** de σ^q . Una cara 1-dimensional de un simplejo es usualmente llamada una **arista** de dicho simplejo. Si considera el 3-simplejo $\sigma^3 = \langle a_0, a_1, a_2, a_3 \rangle$, entonces σ^3 tiene cuatro 0-caras, seis aristas, cuatro 2-caras propias y una 3-cara que es precisamente σ^3 .

Proposición 5.16. Δ^k es compacto.

Demostración. Si $x \in \Delta^k = \langle e_0, \dots, e_k \rangle$, entonces existen escalares únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, tales que

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i e_i \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \quad ; \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1$$

luego

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| \sum_{i=0}^k \alpha_i e_i \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^k |\alpha_i| \|e_i\| \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i \\ &= 1 \end{aligned}$$

Así, Δ^k es acotado. Por otro lado, como Δ^n es la imagen inversa de $\{1\}$ de la función continua (constante)

$$f: \Delta^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i e_i \longmapsto f\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

entonces Δ^k es cerrado. Por tanto, Δ^k es un subconjunto acotado y cerrado de \mathbb{R}^{k+1} , es decir, Δ^k es compacto. \square

Proposición 5.17. σ^k es homeomorfo a Δ^k . Entonces σ^k es compacto.

Demostración. En efecto, sea $\sigma^k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle \subseteq \mathbb{R}^m$, $k \leq m$. Si H^k es el hiperplano determinado por el conjunto geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_k\}$, entonces la función

$$f: H^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$$

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \longmapsto f\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i\right) = \sum_{i=0}^k \alpha_i e_i$$

es continua. En efecto, como $\{a_0, \dots, a_k\}$ es geoméricamente independiente entonces el conjunto $A = \{b_1, \dots, b_k\}$, $b_i = a_i - a_0$, $i = 0, \dots, k$, es linealmente independiente. Si $k = m$, entonces A es una base de \mathbb{R}^m . Si $k < m$, entonces se pueden añadir vectores b_{k+1}, \dots, b_m , a A tal que $\{b_1, \dots, b_m\}$ es una base de \mathbb{R}^m . Considere ahora la asignación

$$g(b_i) = \begin{cases} f(a_i) - f(a_0) & \text{si } 1 \leq i \leq k \\ 0 & \text{si } k < i \leq m \end{cases}$$

la cual da lugar a una única transformación lineal $g: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ que es continua. Más aún, Para $x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \in H^k$, se observa que

$$\begin{aligned} g\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i\right) &= g\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i (a_i - a_0) + \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i\right) a_0\right) \\ &= g\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i (a_i - a_0) + a_0\right) \quad ; \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \\ &= g\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i + a_0\right) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i g(b_i) + g(a_0) \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i (f(a_i) - f(a_0)) + g(a_0) \\ &= \sum_{i=0}^k \alpha_i (f(a_i) - f(a_0)) + g(a_0) \\ &= \left(\sum_{i=0}^k \alpha_i f(a_i)\right) - f(a_0) + g(a_0) \quad ; \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \\ &= f\left(\sum_{i=0}^k \alpha_i a_i\right) - f(a_0) + g(a_0) \\ &= f(x) - f(a_0) + g(a_0) \end{aligned}$$

Definiendo $y_0 = f(a_0) - g(a_0)$ en la última igualdad se obtiene

$$g(x) = f(x) - y_0$$

esto es, para todo $x \in H^k$ se tiene que

$$f(x) = g(x) + y_0$$

lo cual implica que f es continua pues es la suma de una función continua más una constante. Por tanto,

$$f|_{\sigma^k}: \sigma^k \longrightarrow f(\sigma^k)$$

también es continua. Más aún, como $\{e_0, \dots, e_k\}$ es una base de \mathbb{R}^{k+1} y $f(\sigma^k) = \Delta^k$, entonces $f|_{\sigma^k}$ es biyectiva con inversa $f|_{\sigma^k}^{-1}$ continua (se puede utilizar un argumento similar al anterior para probar que $f|_{\sigma^k}^{-1}$ también es continua), esto es, $f|_{\sigma^k}$ es un homeomorfismo. De la proposición 5.16 se concluye que σ^k es compacto. \square

Proposición 5.18. Sea H^k el hiperplano determinado por el conjunto geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_k\} \subseteq \mathbb{R}^n, k \leq n$. La función

$$\begin{aligned} p_i: H^k &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha_0, \dots, \alpha_k) &\longmapsto \alpha_i \end{aligned}$$

denominada la *i-ésima proyección baricéntrica*, es continua.

Demostración. Considere los vectores e_0, \dots, e_k , de la base canónica de \mathbb{R}^{k+1} . Por la proposición 5.17 existe una función continua $f: H^k \longrightarrow \mathbb{R}^{k+1}$ definida por

$$f(\alpha_0 a_0 + \dots + \alpha_k a_k) = \alpha_0 e_0 + \dots + \alpha_k e_k \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

Si

$$\pi_i: \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la proyección canónica en la *i-ésima* componente entonces es claro que $p_i = \pi_i \circ f$ es continua. \square

Proposición 5.19. Sea $k \leq n$, $\sigma^k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle \subseteq \mathbb{R}^n$ un *k-simplejo* y H^k el hiperplano determinado por el conjunto geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_k\}$. Entonces $\text{Int}(\sigma^k)$ es abierto en H^k , σ^k es la clausura de $\text{Int}(\sigma^k)$ y $\partial\sigma^k$ es la frontera de σ^k en H^k .

Demostración. En efecto, por la proposición anterior, se tiene que para cada $i = 0, \dots, k$, la proyección p_i sobre la *i-ésima* coordenada baricéntrica es continua, lo cual implica que $p_i^{-1}((0, 1))$ es abierto en H^k para $i = 0, \dots, k$, luego como

$$\text{Int}(\sigma^k) = \bigcap_{i=0}^k p_i^{-1}((0, 1))$$

entonces es claro que $\text{Int}(\sigma^k)$ es abierto en H .

Por otra parte, como σ^k es cerrado entonces $\overline{\text{Int}(\sigma^k)} \subseteq \sigma^k$. Sea $x \in \partial\sigma^k$. Se desea probar que existe una sucesión $(x_n) \subseteq \text{Int}(\sigma^k)$ que converge a x . Sin pérdida de generalidad, suponga que

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i$$

donde $\alpha_i > 0$ para $0 \leq i \leq j$, y $\alpha_{j+1} = \dots = \alpha_k = 0$. Sea $r = \left(\min_{0 \leq i \leq j} \{\alpha_i\} \right) / 2$, y para cada n sea

$$x_n = \sum_{i=0}^j \left(\alpha_i - \frac{r}{n(j+1)} \right) a_i + \sum_{i=j+1}^k \frac{r}{n(k-j)} a_i$$

Observe que $x_n \in \text{Int}(\sigma^k)$ ya que

$$\alpha_i - \frac{r}{n(j+1)} > 0 \quad ; 0 \leq i \leq j$$

$$\frac{r}{n(k-j)} > 0 \quad ; k > j$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^j \left(\alpha_i - \frac{r}{n(j+1)} \right) + \sum_{i=j+1}^k \frac{r}{n(k-j)} &= 1 - \frac{r}{n} + \frac{r}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Más aún, como

$$\begin{aligned} \|x_n - x\| &= \left\| \sum_{i=0}^j \left(\alpha_i - \frac{r}{n(j+1)} \right) a_i + \sum_{i=j+1}^k \frac{r}{n(k-j)} a_i - \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \right\| \\ &= \frac{r}{n} \left\| \sum_{i=j+1}^k \frac{a_i}{k-j} - \sum_{i=0}^j \frac{a_i}{j+1} \right\| \end{aligned}$$

y la sucesión $(\frac{1}{n})$ es convergente entonces se obtiene que (x_n) converge a x . En consecuencia, $x \in \overline{\text{Int}(\sigma^k)}$ de modo que $\sigma^k \subseteq \overline{\text{Int}(\sigma^k)}$ y así $\sigma^k = \overline{\text{Int}(\sigma^k)}$.

Por último, como $\sigma^k = \overline{\sigma^k}$ y $\text{Int}(\sigma^k)$ es abierto en H^k entonces se concluye que

$$\partial\sigma^k = \sigma^k \setminus \text{Int}(\sigma^k)$$

es la frontera de σ^k en H^k . □

Recuerde que un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice convexo (ejemplo 1.61) si dados $x_1, x_2 \in A$, el conjunto $\{tx_1 + (1-t)x_2 \mid t \in [0, 1]\} \subseteq A$, esto es, si el segmento entre x_1 y x_2 está contenido en A . Se puede verificar que la intersección de una familia arbitraria de subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n es de nuevo un subconjunto convexo. Más aún, como \mathbb{R}^n es convexo, para cualquier subconjunto A de \mathbb{R}^n , la familia de todos los subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a A es no vacía, por lo cual se puede hablar de la intersección de los miembros de dicha familia, dando como resultado el subconjunto convexo más pequeño que contiene a A , el cual se conoce como la **envolvente convexa** de A .

La siguiente proposición caracteriza al k -simplejo $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ como la envolvente convexa del conjunto geoméricamente independiente $\{a_0, \dots, a_k\}$.

Proposición 5.20. *Sea $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ un conjunto geoméricamente independiente en \mathbb{R}^n . El k -simplejo $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ es la envolvente convexa de A .*

Demostración. Sea H^k el hiperplano k -dimensional determinado por A . Para cada $i \in \{0, \dots, k\}$, sea H_i el subconjunto del hiperplano H^k cuya i -ésima coordenada baricéntrica es no negativa, esto es,

$$H_i = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_k) \in H^k \mid \alpha_i \geq 0\}$$

Se afirma que H_i es convexo. En efecto, sean $x_1 = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$, $x_2 = (\beta_0, \dots, \beta_k)$ dos puntos de H_i representados en coordenadas baricéntricas. Entonces $\alpha_i, \beta_i \geq 0$. Por tanto, para cada t , $0 \leq t \leq 1$, la i -ésima coordenada de $tx_1 + (1-t)x_2$, a saber, $t\alpha_i + (1-t)\beta_i$, es también no negativa de modo que $tx_1 + (1-t)x_2 \in H_i$. Como

$$\langle a_0, \dots, a_k \rangle = \bigcap_{i=0}^k H_i$$

entonces $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ es convexo.

Solo basta probar que si B es cualquier subconjunto convexo de \mathbb{R}^n que contiene a A , entonces $\langle a_0, \dots, a_k \rangle \subseteq B$. La prueba se hará por inducción sobre k . Para $k=0$, el resultado es trivial. Sea $k \geq 1$, y suponga que el resultado es cierto para $k-1$, es decir, si B contiene el conjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ entonces contiene al $k-1$ -simplejo $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Se afirma que cualquier punto de $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ se puede expresar en la forma $ta_0 + (1-t)x_1$, para algún $x_1 \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, lo cual implica el resultado para k , ya que B es convexo, contiene a a_0 y por hipótesis inductiva contiene a x_1 . Se sabe que cualquier punto $x \in \langle a_0, \dots, a_k \rangle$ se puede escribir como

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \quad ; \quad \alpha_i \geq 0$$

Si $\alpha_0 = 1$, entonces $x = a_0 \in B$, y si $\alpha_0 = 0$ entonces $x \in \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ y de nuevo $x \in B$. Si ambos, α_0 , $\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i$, no son cero, entonces

$$x_1 = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\alpha_i}{\alpha} \right) a_i$$

pertenece a $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, y como $\alpha_0 + \alpha = 1$, se obtiene que $\alpha = 1 - \alpha_0$, de donde se concluye que $x = \alpha_0 a_0 + (1 - \alpha_0) x_1$. \square

Como una consecuencia de inmediata de la proposición anterior y del ejemplo 1.61 se obtiene que $\langle a_0, \dots, a_k \rangle$ es conexo por caminos y por tanto también es conexo.

Observe que $\text{Int}(\sigma^k)$ también es convexo (y por tanto es conexo y conexo por caminos). En efecto, si $x, y \in \text{Int}(\sigma^k)$, entonces existen escalares $\alpha_0, \dots, \alpha_k, \beta_0, \dots, \beta_k$, tales que

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i \quad ; \quad \alpha_i > 0, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1$$

$$y = \sum_{i=0}^k \beta_i a_i \quad ; \quad \beta_i > 0, \quad \sum_{i=0}^k \beta_i = 1$$

luego

$$\begin{aligned} (1-t)x + ty &= (1-t) \sum_{i=0}^k \alpha_i a_i + t \sum_{i=0}^k \beta_i a_i \\ &= \sum_{i=0}^k ((1-t)\alpha_i + t\beta_i) a_i \end{aligned}$$

Como

$$\sum_{i=0}^k ((1-t)\alpha_i + t\beta_i) = 1$$

y $((1-t)\alpha_i + t\beta_i) > 0$ para $i=0, \dots, k$, entonces $(1-t)x + ty \in \text{Int}(\sigma^k)$.

Definición 5.21. Un **complejo simplicial** o **complejo geométrico** K es una colección finita de simplejos de \mathbb{R}^m los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

1. Si $\sigma \in K$, entonces todas las caras de σ también están en K .
2. Si σ y τ están en K , luego, o bien $\sigma \cap \tau = \emptyset$, o $\sigma \cap \tau$ es una cara común de σ y τ .

La **dimensión** de un complejo simplicial K , denotada por $\dim K$, es -1 si $K = \emptyset$, y $n \geq 0$ si n es el mayor entero tal que K tiene un n -simplejo.

Observación 5.22.

1. Cuando dos simplejos satisfacen la segunda condición de la definición. se dice que dichos simplejos están **propriadamente unidos**. Así, un complejo simplicial es una colección finita de simplejos propriadamente unidos.
2. A los 0-simplejos de K se les denominan los **vértices** de K .

Definición 5.23. Un complejo simplicial K se dice **conectado** si para cada par de vértices $a, b \in K$, existe una colección finita de 1-simplejos $\{\langle a_i, a_{i+1} \rangle\}$, $i = 0, \dots, p-1$, en K tal que $a = a_0$ y $b = a_p$.

Ejemplo 5.24. Sea $\sigma^2 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ un 2-simplejo. Entonces el conjunto K de todas las caras de σ^2 , a saber,

$$K = \{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a_1, a_2 \rangle\}$$

es un complejo simplicial conectado el cual se denota por $\text{Cl}(\sigma^2)$. En general, dado un simplejo σ^k , el conjunto $\text{Cl}(\sigma^k)$ de todas las caras de σ^k es un complejo simplicial conectado llamado la **clausura** de σ^k .

Ejemplo 5.25. En la figura 5.4 se muestra una colección K de simplejos (ambas piezas tomadas juntas) los cuales no representan un complejo simplicial. En particular, observe que la intersección de los 2-simplejos $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$, $\langle v_3, v_4, v_5 \rangle$, es un punto que es una cara del segundo simplejo pero no una cara del primero. De manera similar, los 2-simplejos $\langle a_1, a_4, a_5 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ no están propriadamente unidos.

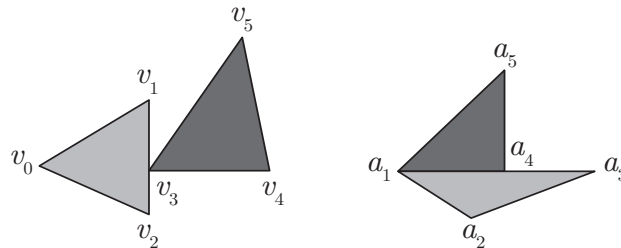


Figura 5.4.

Definición 5.26. Sea K un complejo simplicial en \mathbb{R}^n y sea $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ con la topología subespacio de \mathbb{R}^n . El espacio $|K|$ se denomina **realización geométrica** (o politopo) de K . Un subespacio de \mathbb{R}^n que es la realización geométrica de algún complejo simplicial se denomina **poliedro rectilíneo**.

Definición 5.27. Un espacio topológico X se llama **poliedro** si existe un complejo simplicial K tal que $|K|$ es homeomorfo a X . En este caso se dice que X es **triangulable** y K una **triangulación** de X .

Observación 5.28.

1. Es importante señalar la diferencia entre un complejo simplicial K y su realización geométrica $|K|$. El complejo simplicial K es un conjunto finito de simplejos, mientras que $|K|$ es un subespacio topológico de \mathbb{R}^n . Los simplejos son elementos del conjunto finito K y no subconjuntos de K , mientras que cada simplejo es un subespacio del espacio $|K|$. Además, dado un simplejo σ , se verifica que $|\text{Cl}(\sigma^k)| = \sigma^k$.

2. Si K es un complejo simplicial, entonces $|K|$ es compacto, ya que es la unión finita de simplejos, los cuales son compactos. Por tanto, todo poliedro es compacto. Si K es una triangulación de un poliedro X , entonces $|K|$ es una representación de X como poliedro rectilíneo.
3. Como $|K| \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $|K|$ es Hausdorff.
4. Si K es complejo simplicial conectado entonces $|K|$ es conexo por caminos (y por tanto conexo). En efecto, sean $x, y \in |K|$, entonces existen $\sigma, \tau \in |K|$ tales que $x \in \sigma$ y $y \in \tau$. Sean v_x, v_y vértices de σ, τ respectivamente. Como K es conectado, existe un camino rectilíneo que conecta a v_x y v_y , y como σ, τ son convexos, entonces existe un camino que conecta a x con v_x y y con v_y . Concatenando estos caminos se obtiene un camino que conecta a x y y .
5. Si bien se tomó $|K|$ como subespacio de \mathbb{R}^n , se puede considerar la topología \mathcal{T} en $|K|$ definida al declarar un subconjunto A de $|K|$ cerrado si y solo si $A \cap \sigma$ es cerrado en σ (σ visto como subespacio de \mathbb{R}^n) para todo $\sigma \in K$. Ambas topologías son la misma: Si A es cerrado en $|K|$ en la topología subespacio, entonces $A = B \cap |K|$ para algún conjunto B cerrado en \mathbb{R}^n ; luego $A \cap \sigma = B \cap \sigma$ es cerrado en σ para cada $\sigma \in K$. Recíprocamente, si A es cerrado en $(|K|, \mathcal{T})$ entonces $A \cap \sigma$ es cerrado en σ y por tanto cerrado en \mathbb{R}^n . Como A es la unión de un número finito de conjuntos $A \cap \sigma$ (K es finito), entonces A también es cerrado en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 5.29. Considere el conjunto $X = \{(\cos\theta, \sin\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$ (Fig.5.5). Entonces X es un poliedro, pero no un poliedro rectilíneo. En efecto, sean $a_0 = (1, 0), a_1 = (0, 1)$ y considere el 1-simplejo $\sigma^1 = \langle a_0, a_1 \rangle$. Entonces el complejo simplicial $\text{Cl}(\sigma^1) = \langle \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle \rangle$ es una triangulación de X , pues $|K|$, el segmento determinado puntos a_0 y a_1 , es homeomorfo a X . Observe además que si $a_2 \in \sigma^1$ es punto cuyas coordenadas baricéntricas son estrictamente positivas entonces el complejo simplicial $L = \{\langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle\}$ es otra triangulación de X .

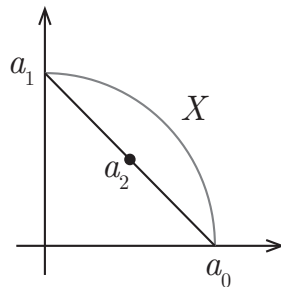


Figura 5.5.

Ejemplo 5.30. Considere el prisma hueco de la figura 5.6. Si se divide cada uno de las caras rectangulares del prisma en dos triángulos, entonces el complejo simplicial K ,

$$\begin{aligned}
 K = \{ & \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle b_0 \rangle, \langle b_1 \rangle, \langle b_2 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \\
 & \langle b_0, b_1 \rangle, \langle b_1, b_2 \rangle, \langle b_0, b_2 \rangle, \langle a_0, b_0 \rangle, \langle a_0, b_1 \rangle, \langle a_0, b_2 \rangle, \langle a_1, b_2 \rangle, \\
 & \langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle, \langle a_0, b_1, b_0 \rangle, \langle a_0, a_1, b_1 \rangle, \langle a_1, b_1, b_2 \rangle, \\
 & \langle a_1, a_2, b_2 \rangle, \langle a_0, a_2, b_2 \rangle, \langle a_0, b_0, b_2 \rangle \}
 \end{aligned}$$

es una triangulación del cilindro hueco.

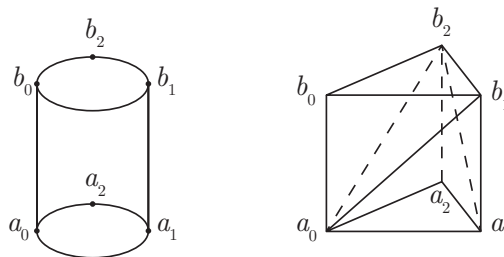


Figura 5.6.

Definición 5.31. Dado un punto $a \in \mathbb{R}^n$ y un vector u no nulo de \mathbb{R}^n , al conjunto

$$\{a + \lambda u \mid \lambda \geq 0\}$$

se le denomina **rayo** con origen en a .

Proposición 5.32. Sea U un conjunto abierto convexo y acotado de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, y $w \in U$. Entonces

1. Cada rayo L con origen en w intercepta a ∂U en exactamente un punto.
2. Existe un homeomorfismo h de \bar{U} a \mathbb{B}^n tal que $h(\partial U) = \mathbb{S}^{n-1}$.

Demostración. 1) Sea L un rayo con origen en w . Siendo U, L convexos, se tiene que $L \cap U$ es un abierto de L el cual es acotado y convexo. Más aún, es de la forma

$$L \cap U = \{w + tu \mid t \in [0, a]\}$$

donde u es el vector unitario en la dirección del rayo. Para ver esto último, observe que la función

$$\begin{aligned} f: L &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w + tu &\longmapsto t \end{aligned}$$

es una función continua creciente la cual envía $L \cap U$, que es conexo (ejemplo 1.69) y acotado, a un subconjunto conexo de \mathbb{R} , esto es, $f(L \cap U)$ es un intervalo el cual es además semiabierto a derecha ya que $L \cap U$ es un abierto convexo de L . Por tanto, L intercepta a la frontera de U en el punto $x = w + au$.

2) Sin pérdida de generalidad, trasladando si es necesario, asuma que w es el origen. La función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ x &\longmapsto x/\|x\| \end{aligned}$$

es continua y sobreyectiva. Por (1), la restricción de f a ∂U ,

$$f|_{\partial U}: \partial U \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$$

define una biyección, la cual es un homeomorfismo, pues ∂U es compacto y \mathbb{S}^{n-1} es Hausdorff. Sea

$$g: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \partial U$$

su inversa y extienda dicha función a la función $G: \mathbb{B}^n \longrightarrow \bar{U}$, definida por

$$G(x) = \begin{cases} \|g(x/\|x\|)\| x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Es claro que G es biyectiva y continua para todo $x \neq 0$. Más aún, como g es continua y \mathbb{S}^{n-1} es compacto entonces existe $M > 0$ tal que $\|g(x)\| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{S}^{n-1}$, en cuyo caso si $\|x\| < d$, $d = \epsilon/M$, entonces

$$\begin{aligned} \|\|g(x/\|x\|)\| x\| &= \|g(x/\|x\|)\| \|x\| \\ &\leq M \|x\| \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

lo cual muestra que G también es continua en $x = 0$. Observe que G envía el segmento en \mathbb{B}^n que une el origen y el punto $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ al segmento que va del origen al punto $g(x)$. Por tanto, G es biyectiva y continua, lo cual resulta nuevamente en un homeomorfismo cuya restricción a \mathbb{S}^{n-1} es precisamente la función g . \square

Observación 5.33.

1. Es importante notar que la segunda parte de la proposición 5.32 muestra que si U es un subconjunto no vacío, abierto, conexo y acotado de \mathbb{R}^n , entonces cualquier homeomorfismo $g: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \partial U$ se puede extender a un homeomorfismo $G: \mathbb{B}^n \longrightarrow \bar{U}$. Más aún, de dicha proposición se sigue que si $h: \partial U \longrightarrow \partial U$ es un homeomorfismo, entonces $h \circ g: \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \partial U$ también se puede extender a un homeomorfismo $H: \mathbb{B}^n \longrightarrow \bar{U}$, en cuyo caso, $H^{-1} \circ G: \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$ es un homeomorfismo. Así, h se puede extender a un homeomorfismo $k: \bar{U} \longrightarrow \bar{U}$.

Ejemplo 5.34. Considere la bola unitaria \mathbb{B}^n y el complejo simplicial $\text{Cl}(\sigma^n)$. Entonces $\sigma^n = |\text{Cl}(\sigma^n)|$ es homeomorfo a \mathbb{B}^n y por tanto este último es un poliedro con triangulación $\text{Cl}(\sigma^n)$. De la proposición anterior se concluye entonces que cualquier conjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n es un poliedro.

Definición 5.35. Un **subcomplejo** de un complejo simplicial K es un complejo simplicial L tal que $L \subseteq K$.

Definición 5.36. Sea K un complejo simplicial k -dimensional. Para cada r , $0 \leq r \leq k$, sea K^r el conjunto de todos aquellos simplejos de K cuya dimensión es a lo sumo r . Entonces K^r es un subcomplejo simplicial de K denominado el **esqueleto** r -dimensional de K . En esta situación, se dice que $|K^r|$ es un subpoliedro rectilíneo de $|K|$.

De la definición se tiene entonces que el esqueleto 0-dimensional es el conjunto de vértices, el esqueleto 1-dimensional el conjunto de vértices y aristas, el esqueleto 2-dimensional el conjunto de vértices, aristas y triángulos, etc.

Ejemplo 5.37. Sea σ^k un k -simplejo, $k \geq 1$, y $K = \text{Cl}(\sigma^k)$. Sea K^{k-1} el esqueleto $k-1$ -dimensional de K . Entonces K^{k-1} son todas las caras propias de σ^k . Se puede mostrar que $|K^{k-1}|$ es homeomorfo a \mathbb{S}^{k-1} . Esto muestra que toda esfera \mathbb{S}^{k-1} es un poliedro y que la colección de todas las caras propias de un $k+1$ -simplejo es una triangulación de \mathbb{S}^k .

Dar ejemplos de poliedros como la unión de una colección de simplejos satisfaciendo las dos condiciones de la definición 5.26 no es siempre lo más conveniente. Por lo general, verificar que los simplejos están propiamente unidos conduce a problemas complicados de geometría analítica. Por esta razón, es más sencillo definir un poliedro usando complejos simpliciales abstractos:

Definición 5.38. Un **complejo simplicial abstracto** es un par $K = (V, \mathcal{L})$, donde V es un conjunto finito no vacío cuyos elementos se llaman **vértices**, y \mathcal{L} es una familia de subconjuntos finitos de V denominados **simplejos abstractos** (o simplemente **simplejos**), que satisface las siguientes condiciones:

1. Todo vértice de V pertenece al menos a uno y como máximo a un número finito de simplejos de \mathcal{L}
2. Si $\sigma \in \mathcal{L}$ y $\rho \subseteq \sigma$, entonces $\rho \in \mathcal{L}$.

Observación 5.39.

1. Observe que todo complejo simplicial geométrico define inmediatamente un complejo simplicial abstracto.
2. Si $\sigma \in \mathcal{L}$ es un simplejo con $n+1$ vértices entonces se dice que *dimensión* es n . Un 0-simplejo $\{x\}$ se identifica con el vértice $x \in V$. La *dimensión* de un complejo simplicial abstracto es la máxima dimensión de sus simplejos.
3. Si K es un complejo simplicial k -dimensional entonces la realización geométrica $|K|$ no necesariamente se puede encajar en el espacio euclidiano \mathbb{R}^k . Por ejemplo, \mathbb{S}^1 es homeomorfo a la realización geométrica del 1-esqueleto $|K^1|$ de $K = \text{Cl}(\sigma^2)$, el cual no puede encajarse en \mathbb{R} (si esto fuese cierto, entonces existe un homeomorfismo f de $|K^1|$ a $f(|K^1|) \subseteq \mathbb{R}$. Como $|K^1|$ es compacto y conexo por caminos entonces $f(|K^1|)$ también lo es, de donde se sigue que $f(|K^1|) \subseteq \mathbb{R}$ es conexo y es cerrado (\mathbb{R} es hausdorff), esto es, $f(|K^1|)$ es un intervalo cerrado $[a, b]$; pero, si $x \in (a, b)$, entonces $[a, b] \setminus \{x\}$ es desconexo mientras $|K^1| \setminus \{f^{-1}\{x\}\}$ no lo es). De hecho, puede pasar que $|K|$ no pueda ni siquiera encajarse en \mathbb{R}^{k+1} . Una triangulación del plano proyectivo es un complejo simplicial 2-dimensional K cuya realización geométrica $|K|$ no se puede encajar en \mathbb{R}^3 . Este hecho conduce a la siguiente pregunta: ¿Si K es un complejo simplicial k -dimensional, cual es el menor entero $n \in \mathbb{N}$ tal que $|K|$ puede encajarse en \mathbb{R}^n ? La respuesta es conocida: $n = 2k + 1$.

Ejemplo 5.40. (Grafo de Kuratowski). Considere el siguiente complejo simplicial:

$$K = \{ \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_3 \rangle, \langle a_4 \rangle, \langle a_5 \rangle, \langle a_0, a_3 \rangle, \langle a_0, a_4 \rangle, \langle a_0, a_5 \rangle, \langle a_1, a_3 \rangle, \langle a_1, a_4 \rangle, \langle a_1, a_5 \rangle, \langle a_2, a_3 \rangle, \langle a_2, a_4 \rangle, \langle a_2, a_5 \rangle \}$$

Entonces K es un complejo simplicial 1-dimensional conectado. Note que cualquier par de aristas de K solo se interceptan en los vértices. Un argumento combinatorio, que es consecuencia del teorema de Euler^{5.1}, muestra que $|K|$ no se puede encajar en \mathbb{R}^2 , en otras palabras, dicho grafo no es *planar*.

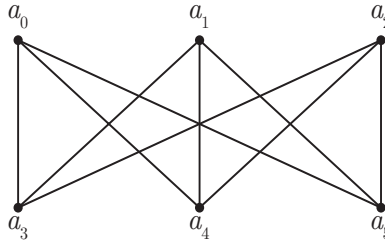


Figura 5.7.

Definición 5.41. Sea K un complejo simplicial. La **frontera** de K , denotada por ∂K , es el conjunto de todas las caras de k -simplejos que son a su vez caras de un único $(k+1)$ -simplejo de K .

Ejemplo 5.42. Si $K = \text{Cl}(\sigma^2)$, donde $\sigma^2 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, entonces $\partial K = \{ \langle a_0 \rangle, \langle a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle, \langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_1, a_2 \rangle \}$. De manera similar, si K es el complejo del ejemplo 5.52 entonces

$$\partial K = \{ \langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_3 \rangle, \langle v_4 \rangle, \langle v_5 \rangle, \langle v_6 \rangle, \langle v_7 \rangle, \langle v_1, v_5 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle, \langle v_3, v_5 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_3, v_4 \rangle, \langle v_5, v_6 \rangle, \langle v_4, v_6 \rangle, \langle v_6, v_1 \rangle \}$$

Ejemplo 5.43. Para el complejo K cuya realización geométrica se muestra en la figura 4.8

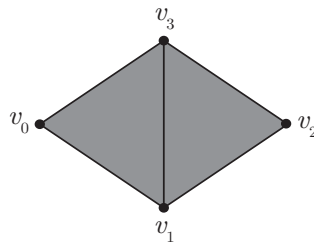


Figura 5.8.

Se tiene que

$$\partial K = \{ \langle v_0 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_0, v_3 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle \}$$

Definición 5.44. Sean K, L , complejos simpliciales. Una **función simplicial** f de K a L , es una función del conjunto de vértices de K al conjunto de vértices de L tal que si $\langle v_0, \dots, v_k \rangle$ es un simplejo de K entonces $f(v_0), \dots, f(v_k)$ son los vértices de un simplejo de L . Si f es una función simplicial de K a L se usa la notación $f: K \rightarrow L$.

Observación 5.45.

1. Note que en la definición anterior los puntos $f(v_0), \dots, f(v_k)$, no son necesariamente todos distintos. Por tanto, la imagen de un k -simplejo podría ser un r -simplejo con $r < k$.
2. Es fácil verificar que la función identidad $\text{Id}_K: K \rightarrow K$ es una función simplicial. Además, si $f: K \rightarrow L, g: L \rightarrow M$, son funciones simpliciales entonces su composición, denotada por $f \circ g: K \rightarrow M$, también es una función simplicial.
3. Como solo se están considerando complejos simpliciales finitos, el número de funciones simpliciales de K a L es siempre finito.

5.1. Para un grafo finito, conexo y planar, si v es el número de vértices, e es el número de aristas y f es el número de caras (las regiones acotadas por las aristas y la región exterior que no está acotada) entonces $v - e + f = 2$.

Definición 5.46. Una función simplicial $f: K \rightarrow L$ es un **isomorfismo simplicial** si existe una función simplicial $g: L \rightarrow K$, tal que $g \circ f = \text{Id}_K$ y $f \circ g = \text{Id}_L$.

Si K es un complejo simplicial finito y $x \in |K|$ entonces existe un simplejo $\sigma^k = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ tal que $x \in \text{Int}\sigma^k$. Si $\alpha_0, \dots, \alpha_k$ son las coordenadas baricéntricas de x respecto a $\{v_0, \dots, v_k\}$, entonces

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i \quad ; \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1 \quad ; \quad \alpha_i > 0$$

Ahora, si w es cualquier otro vértice de K que no se encuentra en σ^k , entonces la coordenada baricéntrica de x respecto a éste es cero. Por tanto, la expresión de x considera todos los vértices de K , a saber,

$$x = \sum_{v \in \text{vert}(K)} \alpha_v v$$

donde $\alpha_v \geq 0$ y

$$\sum_{v \in \text{vert}(K)} \alpha_v = 1$$

Si x se encuentra en dos simplejos σ y τ , entonces x está en la cara común $\sigma \cap \tau$ lo cual implica que su representación depende únicamente de los vértices en dicha cara. Así, la expresión de x en términos de todos los vértices de K es única.

Definición 5.47. Sea K un complejo simplicial y v un vértice de K . La función

$$\begin{aligned} f_v: |K| &\longrightarrow [0, 1] \\ x &\longmapsto f_v(x) = \alpha_v \end{aligned}$$

se llama **función vértice relativa a v** .

Proposición 5.48. La función vértice $f_v: |K| \rightarrow [0, 1]$ es continua

Demostración. Si σ^k es un simplejo de K y $x \in \sigma^k$ entonces $f_v(x)$ es simplemente la proyección en la v -ésima coordenada baricéntrica de x , la cual es continua por la proposición 5.18. Por tanto, f_v restringida a cada simplejo es continua. Como $|K|$ es una unión finita de simplejos cerrados, por el lema de pegado se concluye que f_v es continua. \square

Proposición 5.49. Sea $f: K \rightarrow L$ una función simplicial. Entonces f induce una función continua $|f|: |K| \rightarrow |L|$ definida por: si $x \in |K|$ posee la representación

$$x = \sum_{v \in \text{vert}(K)} \alpha_v v$$

entonces

$$|f|(x) = \sum_{v \in \text{vert}(K)} \alpha_v f(v)$$

Demostración. Es claro que $|f|$ está bien definida ya que la representación de x como

$$x = \sum_{v \in \text{vert}(K)} \alpha_v v$$

es única. Aún si dos o más vértices distintos de K tienen la misma imagen, como la suma de todas las coordenadas baricéntricas que aparecen en la representación de x como combinación lineal de los vértices es 1, se sigue que $|f|(x) \in |L|$. Para la continuidad de $|f|$, basta probar, de acuerdo al lema de pegado, que $|f|_\sigma$ es continua para cada simplejo $\sigma \in K$. En efecto, si $x \in \sigma^k = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ entonces

$$x = \sum_{i=0}^k \alpha_i v_i$$

en cuyo caso es fácil verificar que las coordenadas baricéntricas de $|f|(x)$ son las mismas de x o una suma de ellas dependiendo de si todos los $f(v_i)$ son distintos o no. En cualquier caso, si se consideran las composiciones

$$\pi_i \circ |f|_{\sigma^k}: \sigma^k \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde $\pi_i: \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la proyección canónica, entonces para cada i se obtiene que $\pi_i \circ |f|_{\sigma^k}$ es la proyección baricéntrica p_i o sumas de estas, esto es, $\pi_i \circ |f|_{\sigma^k}$ es continua para $i=0, \dots, k$. En consecuencia, por la proposición 1.121 se sigue que $|f|_{\sigma^k}$ es continua lo cual implica que $|f|: |K| \longrightarrow |L|$ es continua por el lema de pegado. \square

Observación 5.50.

1. Cuando una función continua $f: |K| \longrightarrow |L|$ es una función inducida por una función simplicial $g: K \longrightarrow L$, se suele abusar del lenguaje indicando que f es un función simplicial.

5.2 Teorema de aproximación simplicial

De acuerdo a la proposición 5.49, si $f: K \longrightarrow L$ es una función simplicial entonces la función inducida $|f|: |K| \longrightarrow |L|$ es continua, sin embargo, dado cualquier función continua $h: |K| \longrightarrow |L|$, esta no necesariamente está inducida por una función simplicial. De hecho, observe que $|f|: |K| \longrightarrow |L|$ siempre mapea segmentos de línea contenidas en un simplejo de $|K|$ a un vértice o segmentos de línea de $|L|$, etc; mientras que una función continua $h: |K| \longrightarrow |L|$, podría mapear segmentos de línea en segmentos curvos, y por tanto h no necesariamente es una función simplicial. Por ejemplo, considere $|K| = [0, 1]$ donde $K = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 0, 1 \rangle\}$ y $|L| = [0, 1] \times [0, 1]$, con $|L|$ formado por la clausura de $\sigma^2 = \langle (0, 0), (0, 1), (1, 1) \rangle$ y la clausura de $\tau^2 = \langle (0, 0), (1, 0), (1, 1) \rangle$. Si para cada $n \geq 1$ se define $f_n: |K| \longrightarrow |L|$, $f_n(t) = (t, t^n)$, entonces se observa que f_1 es inducida por una función simplicial mientras que f_n , $n > 1$, nunca es inducida por una función simplicial.

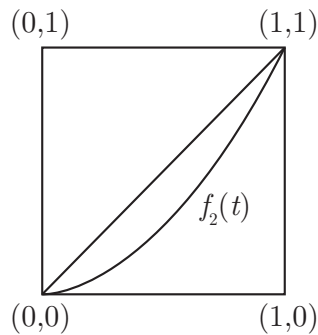


Figura 5.9. $f_2(t)$

A pesar de lo anterior, el *teorema de aproximación simplicial* asegura la existencia de una función simplicial $g: K^m \longrightarrow L$ y un complejo simplicial K^m , tal que $|g|$ es homotópica a f y $|K^m| = |K|$. En esta sección se desarrollarán los conceptos que permiten demostrar este teorema.

5.2.1 Primera aproximación simplicial

Se iniciará con la presentación de una instancia particular del teorema de aproximación simplicial.

Definición 5.51. Sea K un complejo simplicial y v un vértice de K . La *estrella* de v , denotada por $\text{St}(v)$, es el subconjunto de K definido por

$$\text{St}(v) = \{\sigma \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma\}$$

La *estrella abierta* de v , denotada por $\text{Ost}(v)$, es el subconjunto de $|K|$ definido por

$$\text{Ost}(v) = \bigcup \{\text{Int}(\sigma) \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma\}$$

La **estrella cerrada** de v , denotada por $\overline{\text{St}}(v)$, es el subconjunto de $|K|$ definido por

$$\overline{\text{St}}(v) = \bigcup \{ \sigma \mid \sigma \text{ es un simplejo de } |K| \text{ y } v \text{ es un v\u00e9rtice de } \sigma \}$$

Ejemplo 5.52. Considere el complejo simplicial K cuya realizaci\u00f3n geom\u00e9trica $|K|$ se muestra en la figura 5.10

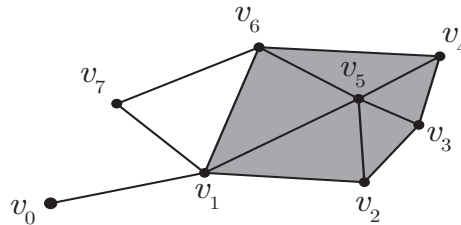


Figura 5.10.

Entonces,

$$\text{St}(v_0) = \{ \langle v_0 \rangle, \langle v_0, v_1 \rangle \}$$

$$\text{St}(v_5) = \{ \langle v_5 \rangle, \langle v_1, v_5 \rangle, \langle v_2, v_5 \rangle, \langle v_3, v_5 \rangle, \langle v_4, v_5 \rangle, \langle v_5, v_6 \rangle, \langle v_1, v_2, v_5 \rangle, \langle v_2, v_3, v_5 \rangle, \langle v_3, v_4, v_5 \rangle, \langle v_4, v_5, v_6 \rangle, \langle v_1, v_5, v_6 \rangle \}$$

$$\text{Ost}(v_0) = \langle v_0 \rangle \cup \text{Int} \langle v_0, v_1 \rangle$$

$$\text{Ost}(v_5) = \langle v_5 \rangle \cup \text{Int} \langle v_1, v_5 \rangle \cup \dots \cup \text{Int} \langle v_5, v_6 \rangle \cup \text{Int} \langle v_1, v_2, v_5 \rangle \cup \dots \cup \text{Int} \langle v_1, v_5, v_6 \rangle$$

$$\overline{\text{St}}(v_0) = \{ \langle v_0, v_1 \rangle \}$$

$$\overline{\text{St}}(v_5) = \{ \langle v_1, v_2, v_5 \rangle, \langle v_1, v_2, v_5 \rangle, \langle v_3, v_4, v_5 \rangle, \langle v_4, v_5, v_6 \rangle, \langle v_1, v_5, v_6 \rangle \}$$

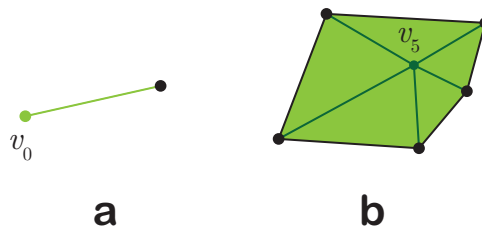


Figura 5.11. (a) $\text{Ost}(v_0)$. (b) $\text{Ost}(v_5)$

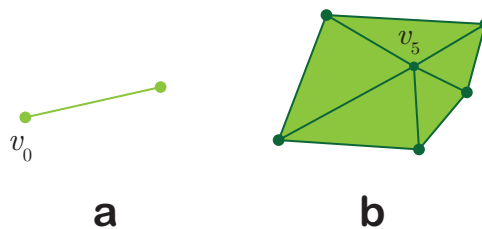


Figura 5.12. (a) $\overline{\text{St}}(v_0)$. (b) $\overline{\text{St}}(v_5)$

Proposici\u00f3n 5.53. $\text{Ost}(v)$ es un subconjunto abierto de $|K|$, $\overline{\text{Ost}(v)} = \overline{\text{St}(v)}$, $\overline{\text{St}(v)}$ es compacto. $\text{Ost}(v)$, $\overline{\text{St}}(v_0)$, son conexos por caminos.

Demostración. Como la función vértice f_v es continua y $f_v^{-1}(0, 1] = \text{Ost}(v)$ entonces $\text{Ost}(v)$ es abierto en $|K|$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\overline{\text{Ost}(v)} &= \bigcup \{ \overline{\text{Int}(\sigma)} \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma \} \\ &= \bigcup \{ \sigma \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma \} \\ &= \overline{\text{St}(v)}\end{aligned}$$

$\overline{\text{St}(v)}$ es compacto por ser una unión de simplejos. Más aún, siendo $\overline{\text{St}(v)}$ una unión de conjuntos conexos por caminos los cuales tienen un punto en común (el vértice v), se tiene que $\overline{\text{St}(v)}$ también es conexo por caminos por la proposición 1.65.

Por último, si σ es un simplejo de K y v es un vértice de σ , entonces $\text{Int}(\sigma) \cup \{v\}$ es convexo. En efecto, observe que por la proposición 5.19, v pertenece a la frontera topológica de σ . Sean $x, y \in \text{Int}(\sigma) \cup \{v\}$. Si $x, y \in \text{Int}(\sigma)$, entonces el segmento determinado por x, y se encuentra en $\text{Int}(\sigma)$ pues éste último es convexo. Si $x \in \text{Int}(\sigma)$ y $y = v$, entonces es claro que el segmento

$$\{(1-t)x + ty \mid 0 \leq t \leq 1\}$$

está contenido en $\text{Int}(\sigma) \cup \{v\}$. Por tanto, $\text{Int}(\sigma) \cup \{v\}$ es convexo lo cual implica que $\text{Int}(\sigma) \cup \{v\}$ es conexo por caminos; luego como

$$\begin{aligned}\text{Ost}(v) &= \bigcup \{ \text{Int}(\sigma) \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma \} \\ &= \bigcup \{ \text{Int}(\sigma) \cup \{v\} \mid \sigma \text{ es un simplejo de } K \text{ y } v \text{ es un vértice de } \sigma \}\end{aligned}$$

es una unión de conjuntos conexos por caminos los cuales poseen un punto en común (el vértice v) entonces se concluye por la proposición 1.57 que $\text{Ost}(v)$ es conexo por caminos. \square

Definición 5.54. Sea $h: |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Una función simplicial $g: K \rightarrow L$ es una **aproximación simplicial** de h si para cada vértice v de K , $h(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(g(v))$.

Ejemplo 5.55. Sea K cualquier complejo simplicial y $L = \text{Cl}(\sigma^k)$, donde $\sigma^k = \langle a_0, \dots, a_k \rangle$. Suponga que $h: |K| \rightarrow |L|$ es cualquier función continua tal que $h(|K|)$ no intersecta la cara opuesta al vértice a_0 , esto es, $h(|K|)$ no intercepta a $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. Sea $g: K \rightarrow L$ la función simplicial que mapea todos los vértices de K al vértice a_0 de L . Entonces g es una aproximación simplicial de h . En efecto, note que $\text{Ost}(a_0) = \langle a_0, \dots, a_k \rangle \setminus \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, de modo que para cada vértice v de K , $h(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(a_0)$.

Proposición 5.56. Suponga que $g_1: K \rightarrow L$ es una aproximación simplicial de $f_1: |K| \rightarrow |L|$ y $g_2: L \rightarrow M$ es una aproximación simplicial de $f_2: |L| \rightarrow |M|$. Entonces $g_2 \circ g_1: K \rightarrow M$ es una aproximación simplicial de $f_2 \circ f_1$.

Demostración. Es claro que $g_2 \circ g_1$ es una función simplicial. Como g_1 es una aproximación simplicial de f_1 entonces para cada vértice v de K se tiene que $f_1(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(g_1(v))$. De manera similar, dado que g_2 es una aproximación simplicial de f_2 entonces para cada vértice w de L , $f_2(\text{Ost}(w)) \subseteq \text{Ost}(g_2(w))$. En particular, como $g_1(v)$ es un vértice de L entonces

$$f_2(\text{Ost}(g_1(v))) \subseteq \text{Ost}(g_2(g_1(v)))$$

lo cual implica que $f_2 \circ f_1(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(g_2 \circ g_1(v))$. \square

Definición 5.57. Sean K, L , complejos simpliciales y $f: |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Se dice que K es una **estrella relacionada** a L con respecto a f , si para cada vértice v de K , hay un vértice v' de L tal que $f(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(v')$.

Proposición 5.58. Un conjunto $\{v_0, \dots, v_k\}$ de vértices de un complejo simplicial K forma un simplejo de K si y solo si $\bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(v_i)$ es no vacío.

Demostración. Si $\sigma^k = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ es un simplejo de K , entonces por la definición de estrella abierta, es claro que $\text{Int}(\sigma^k) \subseteq \text{Ost}(v_i)$ para $i = 0, \dots, k$, de modo que $\emptyset \neq \text{Int}(\sigma^k) \subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(v_i)$. Recíprocamente, suponga que $x \in \bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(v_i)$, entonces para cada $i = 0, \dots, k$, existe un simplejo $\sigma_i \in K$ tal que $x \in \text{Int}(\sigma_i)$ y v_i es un vértice de σ_i . Note que el conjunto de los interiores de todos los simplejos de un complejo simplicial K constituye una partición de $|K|$ y por tanto, hay un único simplejo de K cuyo interior contiene a x , es decir, $\sigma_0 = \sigma_1 = \dots = \sigma_k$, lo cual implica que v_0, \dots, v_k son los vértices del simplejo σ_0 . \square

El próximo teorema es un caso especial del teorema de aproximación simplicial:

Teorema 5.59. *Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Suponga que K es una estrella relativa a L con respecto a f . Entonces existe una función simplicial $g: K \rightarrow L$ tal que g es una aproximación simplicial de f . En particular, $|g|: |K| \rightarrow |L|$ es homotópica a f .*

Demostración. Como K es una estrella relacionada a L con respecto a f , para todo vértice $v \in K$ existe un vértice $v' \in L$ tal que

$$f(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(v')$$

Por tanto, se puede definir una función g de los vértices de K a los vértices de L al hacer $g(v) = v'$. Se afirma que g es una aproximación simplicial de f . En efecto, es inmediato que

$$f(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(g(v))$$

Por otro lado, si v_0, \dots, v_k , son los vértices de un simplejo de K , entonces por la proposición 4.58,

$$\bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(v_i) \neq \emptyset$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \emptyset &\neq f\left(\bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(v_i)\right) \\ &\subseteq \bigcap_{i=0}^k f(\text{Ost}(v_i)) \\ &\subseteq \bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(g(v_i)) \end{aligned}$$

es decir,

$$\bigcap_{i=0}^k \text{Ost}(g(v_i)) \neq \emptyset$$

de modo que $g(v_0), \dots, g(v_k)$, son los vértices de algún simplejo de L . En consecuencia, g es una función simplicial y así g es una aproximación simplicial de f .

Por último, sea $x \in |K|$ y $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ el simplejo de dimensión más pequeña que contiene a x . Sea v_i cualquier vértice de σ . Note que $x \in \text{Ost}(v_i)$, lo cual significa que

$$\begin{aligned} f(x) &\in f(\text{Ost}(v_i)) \\ &\subseteq \text{Ost}(g(v_i)) \end{aligned}$$

Así, $f(x) \in \text{Int}(g(v_0), \dots, g(v_k))$. Ahora, si se escribe

$$x = \alpha_0 v_0 + \dots + \alpha_k v_k, \alpha_i > 0, i = 0, \dots, k$$

se obtiene que

$$|g|(x) = \alpha_0 g(v_0) + \dots + \alpha_k g(v_k)$$

donde algunos de los $g(v_i)$ quizá sean iguales. En cualquier caso, el coeficiente de $g(v_i)$ será estrictamente positivo, es decir, $|g|(x) \in \text{Int}\langle g(v_0), \dots, g(v_k) \rangle$. Esto significa que para cada $x \in |K|$, tanto $f(x)$ como $|g|(x)$ están en el mismo simplejo de L . Dado que un simplejo es un conjunto convexo, se puede definir la función

$$\begin{aligned} H: |K| \times [0, 1] &\longrightarrow |L| \\ (x, t) &\longmapsto (1-t)f(x) + t|g|(x) \end{aligned}$$

la cual es continua pues es una combinación lineal de funciones continuas y $|L|$ es un subconjunto de \mathbb{R}^n . Por tanto, H es una homotopía de f a $|g|$. \square

5.2.2 Subdivisión baricéntrica y teorema de aproximación simplicial

Como se mencionó antes, el teorema 5.59 es un caso particular del teorema de aproximación simplicial (el cual se va a probar luego) porque dado una función continua $f: |K| \longrightarrow |L|$, podría darse que K no es una estrella relacionada a L con respecto a f . En esta situación es cuando se hace uso del concepto de *subdivisión simplicial* de un complejo. Geométricamente hablando, se divide cada simplejo σ de K en un conjunto de simplejos más pequeños lo cual da lugar a un nuevo complejo simplicial K' con la propiedad de que $|K'| = |K|$ y K' es una estrella relacionada a L con respecto a f .

Definición 5.60. Sea $\sigma = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ un k -simplejo en \mathbb{R}^n . El **baricentro** de σ , denotado por $\dot{\sigma}$, se define como el punto de σ dado por

$$\dot{\sigma} = \sum_{i=0}^k \frac{1}{k+1} v_i$$

En otras palabras, el baricentro $\dot{\sigma}$ de σ es el punto de σ cuyas coordenadas baricéntricas, respecto a cada uno de los vértices de σ , son iguales.

Ejemplo 5.61. El baricentro de un 0-simplejo $\langle v_0 \rangle$ es el punto v_0 mismo. Para un 1-simplejo $\langle v_0, v_1 \rangle$ el baricentro es simplemente el punto medio del segmento de línea que une a v_0 con v_1 . De manera similar, el baricentro de un 2- $\langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ es el centroide del triángulo, etc.

Definición 5.62. Sea K un complejo simplicial. Sea $K^{(1)}$ el complejo simplicial cuyos vértices son los baricentros de todos los simplejos de K , y para distintos simplejos $\sigma_0, \dots, \sigma_n$ de K , $\langle \dot{\sigma}_0, \dots, \dot{\sigma}_n \rangle$ es un simplejo de $K^{(1)}$ si y solo si σ_i es una cara de σ_{i+1} para cada $i = 0, \dots, n-1$. Entonces $K^{(1)}$ es un complejo simplicial denominado la **primera subdivisión baricéntrica** de K . Por inducción, se define la n -ésima **subdivisión baricéntrica** $K^{(n)}$ de K como la primera subdivisión baricéntrica de $K^{(n-1)}$ para cada $n > 1$. Para $n = 0$ se define $K^{(0)} = K$.

Ejemplo 5.63. Sea $\sigma^2 = \langle v_0, v_1, v_2 \rangle$ y

$$\begin{aligned} K &= \text{Cl}(\sigma^2) \\ &= \{ \langle v_0 \rangle, \langle v_1 \rangle, \langle v_2 \rangle, \langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_0, v_2 \rangle, \langle v_0, v_1, v_2 \rangle \} \end{aligned}$$

Si (v_0v_1) denota el baricentro de $\langle v_0, v_1 \rangle$, etc., entonces $K^{(1)}$ posee siete vértices,

$$(v_0), (v_1), (v_2), (v_0v_1), (v_0v_2), (v_1v_2), (v_0v_1v_2)$$

doce 1-simplejos,

$$\begin{aligned} &\langle (v_0), (v_0v_1) \rangle, \langle (v_0), (v_0v_2) \rangle, \langle (v_0), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_1), (v_0v_1) \rangle, \langle (v_1), (v_1v_2) \rangle, \\ &\langle (v_1), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_2), (v_0v_2) \rangle, \langle (v_2), (v_1v_2) \rangle, \langle (v_2), (v_0v_1v_2) \rangle, \\ &\langle (v_0v_1), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_0v_2), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_1v_2), (v_0v_1v_2) \rangle \end{aligned}$$

y seis 2-simplejos,

$$\begin{aligned} &\langle (v_0), (v_0v_1), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_0), (v_0v_2), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_1), (v_0v_1), (v_0v_1v_2) \rangle, \\ &\langle (v_1), (v_1v_2), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_2), (v_1v_2), (v_0v_1v_2) \rangle, \langle (v_2), (v_0v_2), (v_0v_1v_2) \rangle \end{aligned}$$

Es claro que $|K| = |K^{(1)}|$.

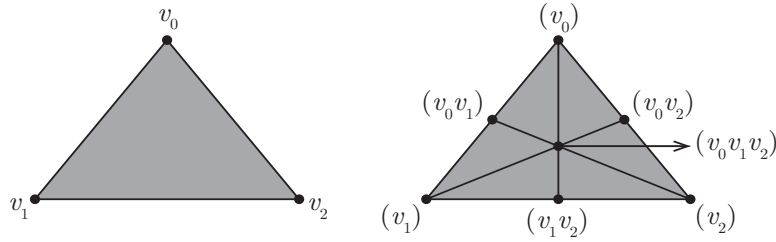


Figura 5.13. $|K|, |K^{(1)}|$

Observación 5.64.

1. Note que $|K^{(n)}| = |K|$ para todo $n \geq 0$.
2. Note que al efectuar la primera subdivisión $K^{(1)}$ de un complejo simplicial positivo dimensional K , los simplejos de $K^{(1)}$ son estrictamente más pequeños en tamaño en comparación a los de K . De hecho, sus tamaños se aproximan a cero a medida que se hacen más y más subdivisiones.

Si A es un subconjunto de \mathbb{R}^n , entonces el diámetro de A , denotado por $\text{diam}(A)$, se define como

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$$

donde $d(x, y)$ es la métrica euclidiana.

Definición 5.65. Sea K un complejo simplicial. Se define la **medida** de K , denotada por $\text{mesh}(K)$, como el número

$$\text{mesh}(K) = \max\{\text{diam}(\sigma) : \sigma \text{ es un simplejo de } K\}$$

Note que si K es un complejo simplicial 0-dimensional, entonces

$$0 = \text{mesh}(K^{(1)}) = \text{mesh}(K^{(2)}) = \dots$$

Lema 5.66. Sea σ un simplejo de dimensión positiva. Entonces $\text{diam}(\sigma) = \|v - w\|$ para algún par de vértices v, w , de σ .

Demostración. Sea $\sigma = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$ y $x, y \in \sigma$. Sea $y = \sum_{i=0}^k b_i v_i$, donde b_i son las coordenadas baricentricas de y , luego

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \sum_{i=0}^k b_i x - \sum_{i=0}^k b_i v_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^k b_i (x - v_i) \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^k b_i \|x - v_i\| \\ &\leq \sum_{i=0}^k b_i \cdot \max\{\|x - v_i\| \mid 0 \leq i \leq k\} \\ &\leq \max\{\|x - v_i\| \mid 0 \leq i \leq k\} \end{aligned}$$

Reemplazando x por v_i y y por x se obtiene similarmente que

$$\|x - v_i\| \leq \max\{\|v_j - v_i\| \mid 0 \leq j \leq k\}$$

Combinando las dos desigualdades anteriores se sigue que

$$\|x - y\| \leq \max\{\|v_j - v_i\| \mid 0 \leq j \leq k\}$$

lo cual implica que $\text{diam}(\sigma) = \|v_r - v_s\|$ para algunos vértices v_r, v_s del simplejo σ . \square

Teorema 5.67. *Sea K un complejo simplicial de dimensión positiva. Entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh}(K^{(n)}) = 0$$

Demostración. Suponga que $\dim(K) = m$. Se desea comparar primero $\text{mesh}(K)$ y $\text{mesh}(K^{(1)})$. Considere cualquier 1-simplejo $\langle \dot{\sigma}, \dot{\tau} \rangle$ de $K^{(1)}$ donde σ, τ , son simplejos de K y σ es una cara propia de $\tau = \langle v_0, \dots, v_k \rangle$. Se sabe que

$$\dot{\tau} = \frac{1}{(k+1)} \sum_{i=0}^k v_i$$

luego, como $\dot{\sigma}, \dot{\tau}$, son ambos puntos de τ , por el lema anterior, existe un vértice v de τ tal que

$$\|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| \leq \|\dot{\tau} - v\|$$

luego,

$$\begin{aligned} \|\dot{\tau} - \dot{\sigma}\| &\leq \|\dot{\tau} - v\| \\ &= \left\| \frac{1}{k+1} \left(\sum_{i=0}^k v_i \right) - v \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (v_i - v) \right\| \\ &\leq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \|v_i - v\| \\ &\leq \frac{1}{k+1} (k \cdot \text{mesh}(K)) \\ &\leq \frac{m}{m+1} \cdot \text{mesh}(K) \quad ; k \leq m \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\text{mesh}(K) \leq \frac{m}{m+1} \cdot \text{mesh}(K)$$

Por inducción, se puede probar que

$$\text{mesh}(K^{(n)}) \leq \left(\frac{m}{m+1} \right)^n \text{mesh}(K)$$

en cuyo caso, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{m+1} \right)^n = 0$$

se obtiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{mesh}(K^{(n)}) = 0 \quad \square$$

Se cuentan ahora con las herramientas para probar el **teorema de aproximación simplicial**. Para ello, se utilizará el corolario 4.60.

Teorema 5.68. *Sea $f: |K| \rightarrow |L|$ una función continua. Entonces existe una subdivisión baricéntrica $K^{(k)}$ de K y una función simplicial $g: K^{(k)} \rightarrow L$ tal que g es una aproximación simplicial de f . En particular, $|g|: |K^{(k)}| = |K| \rightarrow |L|$ y f son homotópicas.*

Demostración. Si K es una estrella relativa a L con respecto a f , entonces por el teorema 5.59 se sabe que existe una función simplicial $g: K \rightarrow L$ tal que g es una aproximación simplicial de f y $|g|, f$, son homotópicas. Si K no es una estrella relativa a L respecto a f , entonces se procede de la siguiente manera: Como $|L|$ es un espacio métrico compacto, aplicando el teorema del número de Lebesgue al cubrimiento abierto $\{\text{ost}(v) \mid v \text{ es un vértice de } L\}$ de $|L|$, existe $\eta > 0$ tal que toda bola abierta con radio η , con centro en cualquier punto de $|L|$, está contenida en $\text{Ost}(v)$ para algún vértice de L ; luego, como f es una función continua con dominio en un espacio métrico compacto entonces f es uniformemente continua, por tanto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in |K|$ con $\|x - y\| < \delta$ entonces $\|f(x) - f(y)\| < \eta$ en $|L|$. Ahora, considere k lo suficientemente grande tal que $\text{mesh}(K^{(k)}) < \delta/2$. Si v es un vértice de $K^{(k)}$, entonces $\text{Ost}(v)$ está contenida en una bola de diámetro δ , lo cual implica que $f(\text{Ost}(v))$ está contenida en una bola de diámetro η , esto es, $f(\text{Ost}(v)) \subseteq \text{Ost}(v')$ para algún vértice v' de L . De lo anterior se sigue que $K^{(k)}$ es una estrella relacionada a L respecto a $f: |K^{(k)}| = |K| \rightarrow |L|$, en cuyo caso el resultado se sigue del teorema 5.59. \square

5.3 Triangulación de superficies

Considere el complejo simplicial K cuya realización geométrica $|K|$ se muestra en la figura 5.14

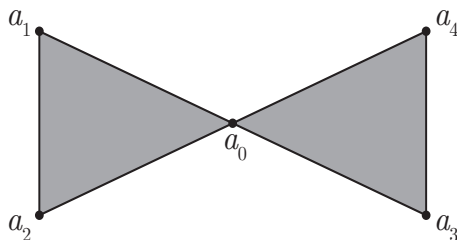


Figura 5.14.

Observe en particular que el punto a_0 no tiene una vecindad homeomorfa a una bola abierta del plano, lo cual implica, de acuerdo a la definición 5.27, que K no puede ser la triangulación de una superficie M . Con base en este hecho, surge la necesidad de establecer las condiciones bajo las cuales un complejo K es una triangulación de una superficie.

Proposición 5.69. *Una superficie M es **triangulable** si existe un 2-complejo simplicial K y una función $f: K \rightarrow \mathcal{P}(M)$ que mapea cada simplejo $\sigma \in K$ a un subconjunto cerrado $f(\sigma)$ de M , satisfaciendo las siguientes condiciones:*

1. $f(\sigma_1 \cap \sigma_2) = f(\sigma_1) \cap f(\sigma_2)$, para todo $\sigma_1, \sigma_2 \in K$.
2. Para cada simplejo $\sigma \in K$, existe un homeomorfismo $\varphi_\sigma: \sigma \rightarrow f(\sigma)$, tal que $\varphi_\sigma(\sigma') = f(\sigma')$ para todo $\sigma' \subseteq \sigma$.
3. $\bigcup_{\sigma \in K} f(\sigma) = M$, es decir, los conjuntos $f(\sigma)$ cubren a M .
4. Para cada $x \in M$, existe alguna vecindad de x que intersecta solo un número finito de los conjuntos $f(\sigma)$.

La siguiente proposición justifica el por qué en las condiciones de la definición anterior se dice que (K, f) es una triangulación de M , o bien que K es una triangulación de M , o bien que f es una triangulación de M .

Proposición 5.70. *Si M es una superficie triangulable, a saber, existe un par (K, f) como en 4.68, entonces existe un homeomorfismo $h: |K| \rightarrow M$, tal que $h(\sigma) = f(\sigma)$, para todo $\sigma \in K$.*

Demostración. Claramente, para cada vértice (0-complejo) $\sigma \in K$, sea $h(\sigma) = f(\sigma)$. Si σ es un 1-simplejo, entonces se puede definir h en σ usando cualquiera de los homeomorfismos cuya existencia está asegurada por 2 en 5.69. Habiendo definido h en la frontera de cada 2-simplejo σ , se necesita extender h a todo el 2-simplejo σ . Para esto, nuevamente por 2 en 5.69, existe un homeomorfismo $\varphi: \sigma \rightarrow f(\sigma)$, y si no coincide con h en la frontera de σ , la cual es un triángulo, por la observación 5.33, como la restricción de $\varphi^{-1} \circ h$ a la frontera de σ es un homeomorfismo, dicha función se puede extender a un homeomorfismo $\psi: \sigma \rightarrow \sigma$ (con $\psi|_{\partial\sigma} = \varphi^{-1} \circ h$), en cuyo caso $\varphi \circ \psi: \sigma \rightarrow f(\sigma)$ es un homeomorfismo el cual coincide con h en la frontera de σ ya que

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \psi)|_{\partial\sigma}(\partial\sigma) &= \varphi \circ (\varphi^{-1} \circ h)(\partial\sigma) \\ &= h(\partial\sigma) \end{aligned}$$

De esta forma, h está ahora definida en todo $|K|$. Dado cualquier conjunto cerrado F en M , para cualquier simplejo $\sigma \in K$,

$$h^{-1}(F) \cap \sigma = h^{-1}|_{\sigma}(F)$$

donde $h|_{\sigma}$ es la restricción de h a σ , la cual es continua por construcción; luego $h^{-1}(F) \cap \sigma$ es cerrado para todo $\sigma \in K$, lo cual muestra que h es continua (ítem 5 observación 5.28). Más aún, de 5.69 se sigue que h es inyectiva (ítem 1), sobreyectiva (ítem 3) y con inversa continua (ítem 4), esto es, h es un homeomorfismo. \square

A fin de establecer la proposición que caracteriza los complejos K cuyas realizaciones geométricas son homeomorfas a superficies, se hará uso de la siguiente notación: α para los vértices, a para las aristas (1-simplejos) y A para los triángulos (2-simplejos).

Proposición 5.71. *Sea K un 2-complejo simplicial. Entonces $M = |K|$ es una superficie con triangulación $f: K \rightarrow \mathcal{P}(M)$, dada por $f(\sigma) = \sigma$ para todo $\sigma \in K$, si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. Cada arista a está contenido en exactamente dos triángulos A .
2. Para todo vértice α , las aristas a y los triángulos A que contienen a α se pueden ordenar como una secuencia cíclica

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m$$

en el sentido que $A_{i-1} \cap A_i = a_i$, para todo i , $2 \leq i \leq m$, y $a_1 = A_m \cap A_1$, con $m \geq 3$.

3. K es conexo, es decir, no se puede escribir como una unión de dos complejos disjuntos no vacíos.

La demostración de la proposición 5.71 se puede consultar en [6, página 170]. Un complejo 2-dimensional satisfaciendo las condiciones de la proposición 4.70 se denomina un **2-complejo triangulado** y su realización geométrica se llama **poliedro**.

Ejemplo 5.72. El complejo simplicial 2-dimensional K definido por $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, $\langle a_0, a_1, a_3 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\langle a_0, a_2, a_3 \rangle$ junto con sus subconjuntos no vacíos, constituye una triangulación de la esfera \mathbb{S}^2 . Note que $|K|$ se encaja en \mathbb{R}^3 y no en \mathbb{R}^2 , aunque K es 2-dimensional.

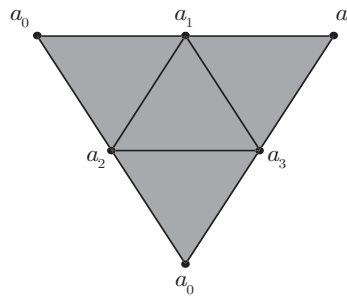


Figura 5.15. Triangulación esfera

Ejemplo 5.73. La figura 5.16 muestra una triangulación de \mathbb{T}^2

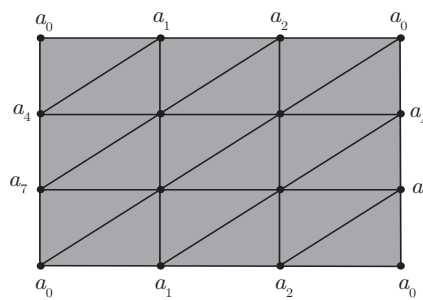


Figura 5.16. Triangulación del toro

Ejemplo 5.74. El siguiente diagrama muestra una triangulación de \mathbb{RP}^2

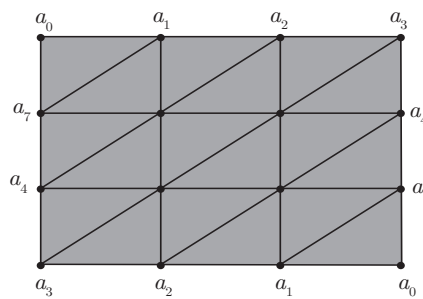


Figura 5.17. Triangulación del plano proyectivo real \mathbb{RP}^2

Ejemplo 5.75. La figura 5.18 muestra una triangulación de la botella de Klein.

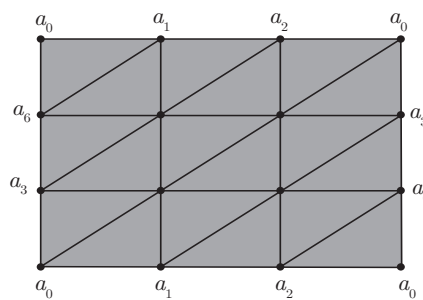


Figura 5.18. Botella de Klein

Aunque el objetivo del presente trabajo no es clasificar las superficies con frontera, en este punto es preciso indicar que hay una versión de la proposición 5.71 para estos espacios. En este caso, el concepto de triangulación de una superficie con frontera es idéntico al concepto definido para una superficie en 5.69, y la proposición 5.70 también es cierta, sin embargo, se deben hacer algunos cambios en la proposición 5.71.

Proposición 5.76. *Sea K un 2-complejo simplicial. Entonces $M = |K|$ es una superficie con triangulación $f: K \rightarrow \mathcal{P}(M)$, dada por $f(\sigma) = \sigma$ para todo $\sigma \in K$, si y solo si se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Toda arista a tal que a contiene algún punto en el interior $\text{Int}M$ de M está contenida en exactamente dos triángulos A . Toda arista a tal que a está adentro de la frontera ∂M de M está contenida en exactamente un triángulo A . La frontera de M consiste de aquellas aristas a que pertenecen a un solo triángulo A . Un vértice en la frontera o una arista en la frontera es un simplejo σ tal que $\sigma \subseteq \partial M$.*
2. *Para todo vértice α que no está en la frontera, las aristas a y los triángulos A que contienen a α se pueden ordenar como una secuencia cíclica*

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m$$

en el sentido que $a_i = A_{i-1} \cap A_i$ para todo $2 \leq i \leq m$, y $a_1 = A_m \cap A_1$, con $m \geq 3$.

3. *Para todo vértice α que está en la frontera, las aristas y los triángulos A que contienen a α pueden ser ordenados como una secuencia*

$$a_1, A_1, a_2, A_2, \dots, A_{m-1}, a_m, A_m, a_{m+1}$$

en el sentido que $a_i = A_{i-1} \cap A_i$ para todo $2 \leq i \leq m$, donde a_1 y a_{m+1} son aristas frontera solo contenidas en A_1 y A_m respectivamente.

4. *K es conexo. es decir, no se puede escribir como una unión de dos complejos disjuntos no vacíos.*

La demostración de 5.76 puede consultarse en [6, página 50]. Un complejo 2-dimensional satisfaciendo las condiciones de la proposición 4.76 se denomina un **2-complejo triangulado con frontera** y su realización geométrica se llama **poliedro con frontera**.

Ejemplo 5.77. El diagrama de la figura 5.19 representa una triangulación de la banda de Möbius. En este caso, el complejo simplicial 2-dimensional K está determinado por los simplejos $\langle a_0, a_1, a_3 \rangle$, $\langle a_0, a_5, a_3 \rangle$, $\langle a_1, a_3, a_4 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_4 \rangle$, $\langle a_2, a_5, a_0 \rangle$, $\langle a_0, a_2, a_4 \rangle$ junto con sus subconjuntos finitos.

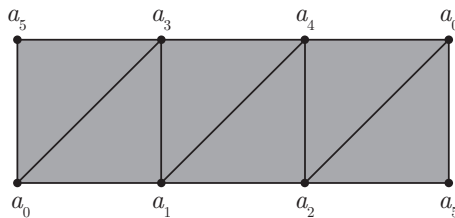


Figura 5.19. Triangulación banda de Möbius

Note que el borde $\langle a_0, a_5 \rangle$ de la izquierda se identifica con el mismo a la derecha, por lo que uno de ellos se debe girar 180° lo cual produce el torcimiento característico de este espacio.

Ejemplo 5.78. El diagrama de la figura 5.20 define un complejo simplicial K 2-dimensional, el cual está determinado por los simplejos $\langle a_0, a_1, a_3 \rangle$, $\langle a_0, a_3, a_5 \rangle$, $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\langle a_2, a_3, a_4 \rangle$, $\langle a_0, a_2, a_4 \rangle$, $\langle a_0, a_4, a_5 \rangle$, junto con sus subconjuntos no vacíos.

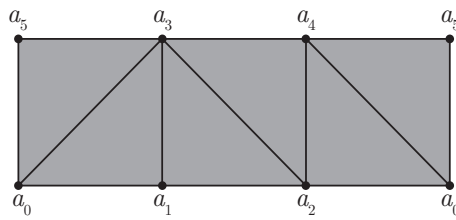


Figura 5.20. Triangulación del cilindro

Note que el borde $\langle a_0, a_5 \rangle$ de la izquierda se identifica con el borde de la derecha, así, es fácil ver que K es una triangulación del cilindro hueco. Si se agrega el simplejo $\langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ se obtiene un cilindro con la tapa inferior, es decir, una triangulación de la bola \mathbb{B}^2 . Si además se agrega el simplejo $\langle a_3, a_4, a_5 \rangle$, entonces se obtiene un cilindro con ambas tapas, esto es, una triangulación de \mathbb{S}^2 .

Capítulo 6

Grupos de homología

En este capítulo se hará una breve presentación sobre los grupos de homología, los cuales servirán para demostrar la invarianza topológica de la característica de Euler-Poincaré. Se inicia este capítulo haciendo un pequeño repaso sobre los grupos abelianos finitamente generados.

6.1 Grupos abelianos finitamente generados

Definición 6.1. Dado un grupo abeliano G y un subconjunto $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq G$, se dice que G está **generado** por A si todo elemento $a \in G$ se puede expresar de la forma

$$a = \sum_{j \in J} n_j a_j \quad (6.1)$$

para algún subconjunto finito $J \subseteq I$, y algunos números $n_j \in \mathbb{Z}$.

Definición 6.2. Una subconjunto $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq G$ de un grupo abeliano G se dice **linealmente independiente** si para cualquier subconjunto finito $J \subseteq I$, la condición

$$\sum_{j \in J} n_j a_j = 0$$

implica que $n_j = 0$ para todo j . En caso contrario, se dice que A es **linealmente dependiente**.

Observación 6.3.

1. Si I es finito en 6.1 entonces se dice que G es **finitamente generado** por A .
2. Si A en 6.1 es además linealmente independiente, entonces se dice que A es una **base**. Más aún, $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una base de G si y solo si todo elemento $a \in G$ posee una representación única de la forma

$$a = \sum_{j \in J} n_j a_j$$

donde $J \subseteq I$ es finito.

Definición 6.4. Un grupo G se dice **libre** si posee una base.

Observación 6.5.

1. Se puede demostrar que si G es un grupo abeliano libre entonces el cardinal de todas las bases de G es el mismo, lo cual se conoce como la **dimensión** de G . Si G es un grupo abeliano finitamente generado entonces el número de elementos de una base de G se conoce como el **rango** de G , el cual se denota por $r(G)$. Note que en este caso la dimensión de G y $r(G)$ son iguales.
2. Si G es un grupo abeliano generado por $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$, entonces para cualquier grupo abeliano H , y para cualquier homomorfismo $f: A \rightarrow H$, existe un homomorfismo $\bar{f}: G \rightarrow H$, único tal que $\bar{f} \circ i(a_\alpha) = f(a_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$, donde $i: A \hookrightarrow G$ es la inclusión.

3. Dado un conjunto arbitrario $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$, se puede construir un grupo abeliano libre generado por A . En efecto, considere el conjunto $F(A)$ formado por todas las funciones $f: A \rightarrow \mathbb{Z}$ con soporte finito. Para dotar a este grupo con una estructura de grupo se define la suma

$$(f + g)(a) = f(a) + g(a)$$

para todo $a \in A$. Con esta operación se puede verificar que $F(A)$ es un grupo abeliano. Más aún, si se identifica cada a_α con la función

$$f_\alpha(a_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = j \\ 0 & \text{si } \alpha \neq j \end{cases}$$

entonces se obtiene que $F(A)$ es un grupo libre generado por A . Además, cada $f \in F(A)$ puede escribirse de manera única como

$$f = \sum_{j \in J} n_j f_j$$

para algún subconjunto finito J de I tal que $n_j = f(a_j) \neq 0$. Para simplificar la notación, se escribirá

$$f = \sum_{j \in J} n_j a_j$$

4. Dado un grupo abeliano G , para cualquier $a \in G$ se dice que a tiene *orden finito* si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na = 0$. Si a tiene orden finito entonces existe un entero positivo n mínimo tal que $na = 0$, al cual se le conoce como el *orden de a* . Los elementos de G que poseen orden finito forman un subgrupo T conocido como la **Torsión de G** . Cuando $T = \{0\}$ se dice que G es **libre de torsión**. Es preciso aclarar que un grupo libre de torsión no es necesariamente libre. Por ejemplo, el grupo \mathbb{Q} de los números racionales es libre de torsión, sin embargo, no es libre ya que cualquier par de números racionales son linealmente dependientes.

De aquí en adelante, a menos que se diga lo contrario, R denotará un anillo con unidad.

Definición 6.6. Sea R un anillo. Un **R -módulo a izquierda** es un grupo abeliano aditivo G junto con una aplicación

$$\begin{aligned} R \times G &\longrightarrow G \\ (r, g) &\longmapsto r \cdot g \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades para todo $a, b \in G$ y $r, s \in R$:

1. $r \cdot (a + b) = r \cdot a + r \cdot b$
2. $(r + s) \cdot a = r \cdot a + s \cdot a$
3. $(rs) \cdot a = r \cdot (s \cdot a)$
4. $1 \cdot a = a$

Observación 6.7.

1. De manera similar se define un R -módulo a derecha, multiplicando a derecha por los elementos del anillo. Cuando no haya lugar a ambigüedades, se referirá al R -módulo a izquierda simplemente como un R -módulo. Note que si R es conmutativo entonces todo R -módulo a izquierda es un R -módulo a derecha.
2. Si R es un anillo entonces R es un R -módulo a derecha (izquierda) vía la multiplicación de R .

3. Todo grupo abeliano G es un \mathbb{Z} -módulo a izquierda (a derecha) por medio de la aplicación

$$\mathbb{Z} \times G \longrightarrow G$$

$$(n, g) \longmapsto \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{n\text{-veces}} & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0 \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{|n|\text{-veces}} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

Definición 6.8. Sea R un anillo y G un R -módulo. Un subconjunto H de G se dice un **R -submódulo**, o simplemente un submódulo de G , si H es un subgrupo de G y H es cerrado respecto a la multiplicación por escalares, es decir, $rh \in H$, para todo $r \in R$ y $h \in H$.

Ejemplo 6.9. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R -módulos y sea

$$G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \mid a_\alpha \in G_\alpha, \forall \alpha \in I\}$$

el producto cartesiano de los miembros de la familia. El conjunto G posee estructura de R -módulo con las operaciones

$$(a_\alpha)_{\alpha \in I} + (b_\alpha)_{\alpha \in I} = (a_\alpha + b_\alpha)_{\alpha \in I}$$

y

$$r(a_\alpha)_{\alpha \in I} = (ra_\alpha)_{\alpha \in I}$$

Al R -módulo G se le conoce como el **producto directo** de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$. Cuando I es finito se suele escribir $G = G_1 \times \cdots \times G_n$.

Ejemplo 6.10. Sea H un subconjunto de un R -módulo. El conjunto

$$\langle H \rangle = \left\{ \sum_{\alpha=1}^n r_\alpha h_\alpha \mid n \in \mathbb{N}, r_\alpha \in R, h_\alpha \in H \right\}$$

es un submódulo de M llamado el **submódulo generado por H** . Cuando $H = \{h\}$, entonces se dice que $\langle H \rangle$ es el **submódulo cíclico generado por h** .

Note que $\langle H \rangle$ es precisamente la intersección de todos los submódulos que contienen a H .

Ejemplo 6.11. Sea G un R -módulo y sea $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R -submódulos de H . Dado que $\bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha$ es un subconjunto de G , entonces tiene sentido hablar del submódulo generado por dicho conjunto, el cual se denotará por $\sum_{\alpha \in I} H_\alpha$, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in I} H_\alpha &= \left\langle \bigcup_{\alpha \in I} H_\alpha \right\rangle \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^n r_{\alpha_i} h_{\alpha_i} \mid n \in \mathbb{N}, r_{\alpha_i} \in R, h_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i} \right\} \end{aligned}$$

Definición 6.12. Un R -módulo G es la **suma directa interna** de la familia de submódulos $\{H_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq G$, si $G = \sum_{\alpha \in I} H_\alpha$, y $H_j \cap \sum_{\alpha \neq j} H_\alpha = \{0\}$ para todo $j \in I$.

Notación 6.13.

1. Se denotará la suma directa interna por $G = \bigoplus_{\alpha \in I} H_\alpha$. Si I es finito entonces se escribirá $G = H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$. Cuando $H_1 = \cdots = H_n = H$, entonces se escribirá $H_1 \oplus \cdots \oplus H_n$ como H^n .

Definición 6.14. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R -módulos y sea $G = \prod_{\alpha \in I} G_\alpha$. Un elemento $(a_\alpha)_{\alpha \in I} \in G$ se dice **casi nulo** si $a_\alpha = 0$ excepto para un número finito de índices.

Observación 6.15.

1. Sea $\dot{G} = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \mid (a_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ es casi nulo}\}$. En el conjunto \dot{G} se puede introducir una estructura de R -módulo por restricción de las operaciones de G .

Definición 6.16. El conjunto $\dot{G} = \{(a_\alpha)_{\alpha \in I} \mid (a_\alpha)_{\alpha \in I} \text{ es casi nulo}\}$, con la estructura de R -módulo definida por la restricción de las operaciones de G , es la **suma directa externa** de la familia $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Notación 6.17.

1. Se denotará la suma directa interna por $\dot{G} = \dot{\bigoplus}_{\alpha \in I} G_\alpha$. Si I es finito entonces se escribirá $\dot{G} = G_1 \dot{\bigoplus} \cdots \dot{\bigoplus} G_n$.

Observación 6.18.

1. Para cada $j \in I$ considere la función

$$\begin{aligned} i_j: G_j &\longrightarrow \dot{\bigoplus}_{\alpha \in I} G_\alpha \\ &\longmapsto (a_\alpha)_{\alpha \in I} \end{aligned}$$

con

$$a_\alpha = \begin{cases} a_j & \text{si } j = \alpha \\ 0 & \text{si } j \neq \alpha \end{cases}$$

Observe que estas funciones son homomorfismos inyectivos (monomorfismos), e isomorfismos sobre sus respectivas imágenes $i_j(G_j)$. Más aún, se tiene que $\dot{G} = \bigoplus_{\alpha \in I} i_\alpha(G_\alpha)$, como una suma directa interna de los submódulos $i_\alpha(G_\alpha) \subseteq \dot{G}$.

Proposición 6.19. Sea G un grupo abeliano libre finitamente generado por (a_1, \dots, a_n) y sea H un subgrupo de G . Entonces H es un grupo abeliano libre, existe una base (e_1, \dots, e_n) de G , algún $q \leq n$, y números enteros positivos n_1, \dots, n_q , tal que $(n_1 e_1, \dots, n_q e_q)$ es una base de H y n_α divide a $n_{\alpha+1}$ para todo α con $1 \leq \alpha \leq q-1$.

Demostración. La demostración de la proposición 6.19 se puede encontrar en [6] □

Usando la proposición 6.17 se puede probar el siguiente resultado:

Proposición 6.20. Sea G un grupo abeliano finitamente generado. Entonces existe un número entero $m \geq 0$ y números enteros positivos n_1, \dots, n_q tales que G es isomorfo a la suma directa

$$\mathbb{Z}^m \oplus (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \oplus \cdots \oplus (\mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z})$$

dónde n_α divide a $n_{\alpha+1}$ para todo α con $1 \leq \alpha \leq q-1$

Demostración. Suponga que G está generado por $A = (a_1, \dots, a_n)$ y sea $F(A)$ el grupo libre generado por A . Por el ítem 5 de la observación 6.3, la inclusión $i: A \hookrightarrow G$ puede ser extendida a un único homomorfismo $f: F(A) \rightarrow G$ el cual es sobreyectivo (epimorfismo), en cuyo caso, por el primer teorema de homomorfismos^{6.1}, se obtiene que $F(A)/\text{Ker } f$ es isomorfo a G . Por la proposición 6.17, $H = \text{Ker } f$, es un grupo abeliano libre y existe una base (e_1, \dots, e_n) de $F(A)$, algún $p \leq n$, y algunos números enteros positivos k_1, \dots, k_p , tal que $(k_1 e_1, \dots, k_p e_p)$ es una base de H y k_α divide a $k_{\alpha+1}$ para todo α con $1 \leq \alpha \leq p-1$. Sea r , $0 \leq r \leq p$, el número natural más grande tal que $k_1 = \cdots = k_p = 1$. Reescribiendo $k_{r+\alpha}$ como n_α , dónde $1 \leq \alpha \leq p-r$, sea $q = p-r$, luego se puede escribir

$$H = \mathbb{Z}^{p-q} \oplus n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus n_q\mathbb{Z}$$

6.1. Si $\varphi: G \rightarrow G'$ es un homeomorfismo de grupos entonces $G/\text{Ker } \varphi = \varphi(G)$, donde $\text{Ker } \varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = 0\}$

y como $F(A)$ es isomorfo a \mathbb{Z}^n , entonces es fácil verificar que $F(A)/H$ es isomorfo a

$$\mathbb{Z}^{n-p} \oplus \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z} \quad \square$$

Observación 6.21.

1. Note que $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$ es la torsión de G , por tanto, como un corolario de la proposición anterior, se obtiene que todo grupo abeliano finitamente generado G es la suma directa, $G = \mathbb{Z}^m \oplus T$, donde T es la torsión de G y \mathbb{Z}^m es el grupo abeliano libre de dimensión m . En estas condiciones a m se le conoce como el **número de Betti** de G .

El siguiente resultado será de utilidad a la hora de calcular los grupos de homología de poliedros.

Proposición 6.22. Si

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

es una secuencia exacta corta de homomorfismo de grupos abelianos, esto es, f es un monomorfismo, g un epimorfismo, $\text{Im} f = \text{Ker} g$; y $r(F)$ es finito, entonces $r(F) = r(E) + r(G)$. En particular, si G es un grupo abeliano de rango finito entonces H es un subgrupo de G entonces $r(G) = r(H) + r(G/H)$.

La demostración de la proposición 6.21 puede encontrarse en [3]

6.2 Homología simplicial

En esta sección se estudiarán brevemente la *homología simplicial*. Para un estudio más detallado de esta teoría se recomienda [4],[5].

Sea K un complejo simplicial. La esencia de la homología simplicial es asociar al complejo K una colección de grupos abelianos, $H_p(K)$, con K . Esto se logra al definir primero algunos grupos abelianos libres, $C_p(K)$, construidos a partir de p -simplejos orientados. Una de las ideas principales es que a cada p -simplejo orientado σ se le asigna una frontera $\partial_p \sigma$, definiendo así homomorfismos

$$\partial_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$$

con la propiedad que $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$. Si se denota por $Z_p(K)$ al núcleo de ∂_p y

$$B_p(K) = \partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$$

es la imagen de ∂_{p+1} en $C_p(K)$, como $\partial_{p-1} \circ \partial_p = 0$, el grupo $B_p(K)$ es un subgrupo del grupo $Z_p(K)$, y se define el grupo de homología, $H_p(K)$, como el grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K)$$

Una de las características importantes de los grupos de homología de los complejos es que solo dependen de la realización geométrica $|K|$ de K y no de las varias triangulaciones de $|K|$.

A fin de establecer las ideas anteriormente expuestas, el primer paso es definir lo que se entiende por *orientación*^{6.2} de un p -simplejo. Para esto, conviene recordar lo siguiente: Sea X un conjunto y defina $A(X) = \{f: X \longrightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$. Con la composición de funciones, $A(X)$ es un grupo cuyos elementos son *permutaciones*. En particular, si $X = \{1, 2, \dots, n\}$ entonces el grupo $A(X)$ se conoce como el *grupo simétrico de grado n* , el cual se denota por S_n . Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3\}$, entonces S_3 es el grupo constituido por las permutaciones

6.2. No confundir con la definición de orientación de una superficie introducida en el capítulo 4.

$$\begin{array}{ccc}
 f_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & f_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & f_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 g_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & g_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & g_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Si X es un conjunto finito, $X = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$, un *ciclo* f de orden $m \leq n$, es una permutación en X tal que $f^m = \text{Id}_X$ (o bien $f^m = e_{A(X)}$). Una *transposición* es un ciclo de orden 2. En ejemplo anterior, f_0 es un ciclo de orden 1, f_1, f_2 , ciclos de orden 3 y g_1, g_2, g_3 , son transposiciones. Más aún, como

$$\begin{aligned}
 f_1 &= g_1 \circ g_2 \\
 f_2 &= g_1 \circ g_3
 \end{aligned}$$

entonces todo elemento de S_3 se puede expresar como un producto de transposiciones (f_0 se puede expresar como el producto de 0 transposiciones). Así,

$$S_3 = \{f_0, g_1 \circ g_2, g_1 \circ g_3, g_1, g_2, g_3\}$$

En general, para $n > 1$, se puede probar que toda permutación f en S_n se puede expresar como un producto de transposiciones. Si el número de transposiciones es par entonces se dice que f es una *permutación par*. Si es impar, se dice que f es una *permutación impar*.

Por último, observe que la relación \sim en S_n definida por $f \sim g$ si y solo si $h = g^{-1} \circ f$ es una permutación par, es de equivalencia. En este caso es fácil ver que S_n / \sim solo consta de dos clases de equivalencia, a saber, la clase de todas las permutaciones pares y la clase de todas las permutaciones impares.

6.2.1 Orientación de un simplejo

Sea $\sigma^p = \langle a_0, a_1, \dots, a_p \rangle$ un n -simplejo y suponga que los vértices están ordenados haciendo $a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Entonces este orden determina cierta dirección entre los vértices de σ^p . Cualquier otra ordenación de los vértices consiste en una permutación de los mismos. Cuando se considera el simplejo σ^p junto a la clase de equivalencia de todas las permutaciones pares de sus vértices, se dice que σ^p está *positivamente orientado*, lo cual se escribe como $+\sigma^p$. De otro lado, cuando se considera σ^p con la clase de equivalencia de todas las permutaciones impares, se dice que σ^k está *negativamente orientado*, lo cual se escribe como $-\sigma^p$. Las dos clases asociadas a σ^p son las *orientaciones* de σ^p . Una vez se ha seleccionado una de estas dos clases se dice que σ^p está *orientado*, lo cual se denota por $\sigma^p = [a_0, a_1, \dots, a_p]$. Dos simplejos orientados σ_1, σ_2 se dicen que tienen la *orientación opuesta* si ellos son las dos clases de equivalencia asociadas a algún simplejo σ . Se asume que $-(-\sigma) = \sigma$.

Observación 6.23.

1. Todo simplejo σ tiene dos orientaciones, excepto cuando σ es un 0-simplejo, al cual se le asociará siempre la orientación positiva. Si un k -simplejo σ tiene una orientación, entonces se induce automáticamente una orientación en sus caras.

Ejemplo 6.24. Considere el 1-simplejo $\sigma^1 = \langle a_0, a_1 \rangle$. Si se ordena $a_0 < a_1$, entonces el simplejo

$$+\sigma^1 = [a_0, a_1]$$

está orientado positivamente, mientras que

$$-\sigma^1 = [a_1, a_0]$$

está orientado negativamente.



Figura 6.1.

Ejemplo 6.25. Si $\sigma^2 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$ es un 2-simplejo y se considera el orden $a_0 < a_1 < a_2$, se obtienen los simplejos con orientaciones opuestas

$$\begin{aligned} +\sigma^2 &= [a_0, a_1, a_2] \\ &= [a_1, a_2, a_0] \\ &= [a_2, a_0, a_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\sigma^2 &= [a_1, a_0, a_2] \\ &= [a_0, a_2, a_1] \\ &= [a_2, a_1, a_0] \end{aligned}$$

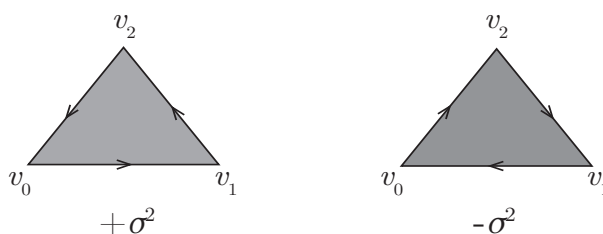


Figura 6.2.

Definición 6.26. Un complejo simplicial K se dice **orientado** si a cada uno de sus simplejos se le asigna una orientación.

Observación 6.27.

1. Hay varias formas de orientar un complejo simplicial K . Por ejemplo, si se asigna cierto orden al conjunto de todos los vértices de K , entonces dicho orden induce un orden en los vértices de cada simplejo de K . Como consecuencia, a cada simplejo se le asigna automáticamente una orientación y el complejo K se vuelve orientado.

Se introducirá ahora el concepto de *número incidencia* el cual será importante en lo sucesivo. Dicho concepto depende de una orientación asignada a un complejo simplicial K .

Definición 6.28. Sea K un complejo simplicial orientado. A cada par (σ^{p+1}, σ^p) , donde σ^p y σ^{p+1} son dos simplejos de K cuyas dimensiones difieren en 1, se le asocia un número, denotado por $[\sigma^{p+1}, \sigma^p]$, llamado **número de incidencia**, como sigue: Si σ^p no es un cara de σ^{p+1} , se pone $[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = 0$. Si σ^p es una cara de σ^{p+1} con $+\sigma^p = \langle a_0, \dots, a_p \rangle$ y a es el vértice adicional de σ^{p+1} , entonces $\langle a, a_0, \dots, a_p \rangle$ es $+\sigma^{p+1}$ ó $-\sigma^{p+1}$. Se define

$$[\sigma^{p+1}, \sigma^p] = \begin{cases} 1 & \langle a, a_0, \dots, a_p \rangle = \sigma^{p+1} \\ -1 & \langle a, a_0, \dots, a_p \rangle = -\sigma^{p+1} \end{cases}$$

Ejemplo 6.29. Sea $K = \text{Cl}(\sigma^2)$, donde $\sigma^2 = \langle a_0, a_1, a_2 \rangle$, con su orientación positiva. Entonces

$$\begin{array}{cccc}
[\sigma^2, \langle a_0, a_1 \rangle] = 1 & [\langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_0 \rangle] = -1 & [\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_0 \rangle] = 0 & [\langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_0 \rangle] = -1 \\
[\sigma^2, \langle a_1, a_2 \rangle] = 1 & [\langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_1 \rangle] = 1 & [\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle] = -1 & [\langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_1 \rangle] = 0 \\
[\sigma^2, \langle a_0, a_2 \rangle] = -1 & [\langle a_0, a_1 \rangle, \langle a_2 \rangle] = 0 & [\langle a_1, a_2 \rangle, \langle a_2 \rangle] = 1 & [\langle a_0, a_2 \rangle, \langle a_2 \rangle] = 1
\end{array}$$

El siguiente resultado sobre los números de incidencia será importante para poder introducir los grupos de homología de un complejo simplicial K .

Teorema 6.30. *Sea K un complejo simplicial orientado. Si σ^{p-2} es una cara de dimensión $p-2$ de un simplejo p -dimensional σ^p de K , entonces*

$$\sum_{\sigma^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma^{p-1}] [\sigma^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 0$$

donde σ^{p-1} es un $p-1$ -simplejo dimensional de K .

Demostración. Sea $\sigma^{p-2} = \langle a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$ y u, v , vértices adicionales de σ^p . Sin pérdida de generalidad, sea $\sigma^p = \langle u, v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$, pues en otro caso se hace una permutación de u y v con una transposición. Note que existen únicamente dos $p-1$ -simplejos de K para los cuales los términos de la suma no son cero, a saber,

$$\sigma_1^{p-1} = \langle u, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$$

$$\sigma_2^{p-1} = \langle v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$$

El orden indicado para estos simplejos puede resultar en una orientación positiva o negativa. Por tanto hay cuatro casos a examinar:

1. $+\sigma_1^{p-1} = \langle u, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$ y $+\sigma_2^{p-1} = \langle v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$. Entonces,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1, \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1, \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

2. $+\sigma_1^{p-1} = \langle u, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$ y $-\sigma_2^{p-1} = \langle v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$. Por tanto,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = -1, \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1, \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

3. $-\sigma_1^{p-1} = \langle u, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$ y $+\sigma_2^{p-1} = \langle v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$. Así,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1 \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = 1 \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = 1$$

4. $-\sigma_1^{p-1} = \langle u, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$ y $-\sigma_2^{p-1} = \langle v, a_0, \dots, a_{p-2} \rangle$. Entonces,

$$[\sigma^p, \sigma_1^{p-1}] = 1 \quad [\sigma_1^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

$$[\sigma^p, \sigma_2^{p-1}] = -1 \quad [\sigma_2^{p-1}, \sigma^{p-2}] = -1$$

En cada caso, haciendo los correspondientes productos, se obtiene que los únicos dos términos no cero de la suma son -1 y $+1$, por lo cual su suma es cero. \square

6.2.2 p -cadenas y homología simplicial

Sea K un complejo simplicial orientado y sea \tilde{S}_p el conjunto de todos los p -simplejos orientados de K . Como para cada $p \geq 1$, cada p -simplejo puede orientarse de dos formas distintas, el número de elementos en \tilde{S}_p es dos veces el número de p -simplejos de K , mientras que el número de 0-simplejos es el número de vértices de K .

Definición 6.31. Sea $1 \leq p \leq \dim K$. Una **p -cadena** de K es una función $c: \tilde{S}_p \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que $c(-\sigma^p) = -c(+\sigma^p)$. Si $p=0$, una 0-cadena es una función $c: \text{Vert}(K) \rightarrow \mathbb{Z}$. El conjunto de todas las p -cadenas de K se denota por $C_p(K)$. Si $p < 0$ ó $p > \dim K$, se define $C_p(K) = \{0\}$.

Observación 6.32.

1. Si K es complejo simplicial, entonces para cada $p \in \mathbb{Z}$, el conjunto $C_p(K)$ tiene estructura de grupo con la operación puntual $(c + c')(\sigma^p) = c(\sigma^p) + c'(\sigma^p)$, para cada $\sigma^p \in \tilde{S}_p$. Claramente, dicha operación es asociativa y conmutativa. El elemento neutro es la función cero $0: \tilde{S}_p \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $0(\sigma^p) = 0$, y la inversa $-c$ de c está definida por $(-c)(\sigma^p) = -c(\sigma^p)$. El grupo $C_p(K)$ se denomina *grupo de cadena p -dimensional* de K . Se tiene así una sucesión de grupos abelianos $\{C_p(K) | p \in \mathbb{Z}\}$, los cuales son cero, excepto para $p = 0, \dots, \dim K$.
2. Se puede dar una descripción de los elementos de $C_p(K)$ con los cuales es más fácil trabajar. Para cada p -simplejo positivamente orientado σ^p , se define una p -cadena $\bar{\sigma}_p$, llamada *p -cadena elemental* de K , como sigue:

$$\bar{\sigma}^p(\tau^p) = \begin{cases} 1, & \tau^p = \sigma^p \\ -1, & \tau^p = -\sigma^p \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

3. Para cada $p \geq 0$, S_p denota el conjunto de todos los p -simplejos positivamente orientados de K y $\bar{S}_p = \{\bar{\sigma}^p | \sigma \in S_p\}$.

El próximo resultado muestra que $C_p(K)$ es el grupo libre generado por todas las p -cadenas elementales:

Proposición 6.33. Si K es un complejo simplicial orientado, entonces $C_p(K)$ es el grupo libre abeliano con base \bar{S}_p .

Demostración. Es suficiente probar que cada p -cadena $c \in C_p(K)$ se puede escribir de manera única como una combinación lineal de las p -cadenas elementales $\bar{\sigma}^p$. Suponga que $c(\sigma^p) = n_p$, donde $\sigma^p \in S_p$. Entonces, por definición, $c(-\sigma^p) = -n_p$. Considere el elemento $\sum_{\sigma^p \in S_p} n_p \bar{\sigma}^p$. Se afirma que $c = \sum n_p \bar{\sigma}^p$. Para ver esto, se debe probar que c y $\sum n_p \bar{\sigma}^p$ tiene el mismo valor para cada p -simplejo orientado de K . Si $\sigma^p \in S_p$, entonces

$$\begin{aligned} \left(\sum n_p \bar{\sigma}^p \right) (\sigma^p) &= n_p \bar{\sigma}^p(\sigma^p) \\ &= n_p \\ &= c(\sigma^p) \end{aligned}$$

Si $\sigma^p \notin S_p$, entonces $-\sigma^p \in S_p$ y

$$\begin{aligned} c(\sigma^p) &= c(-(-\sigma^p)) \\ &= -c(-\sigma^p) \\ &= -\left(\sum n_p \bar{\sigma}^p\right)(-\sigma^p) \\ &= \left(\sum n_p \bar{\sigma}^p\right)(\sigma^p) \end{aligned}$$

Para la unicidad, suponga

$$\begin{aligned} c &= \sum n_p \bar{\sigma}^p \\ &= \sum m_p \bar{\sigma}^p \end{aligned}$$

Entonces, $\sum (n_p - m_p) \bar{\sigma}^p = 0$, en $C_p(K)$ y así $(\sum (n_p - m_p) \bar{\sigma}^p)(\sigma^p) = 0$, en \mathbb{Z} , lo cual implica que $n_p - m_p = 0$. Como σ^p es arbitrario, se obtiene que los correspondientes coeficientes de $\bar{\sigma}^p$ en las dos expresiones de c son idénticas. \square

Observación 6.34.

1. Si se considera una orientación diferente en K , entonces el conjunto de generadores de $C_p(K)$ podría ser también diferente, sin embargo, el grupo $C_p(K)$ obtenido sería isomorfo a un grupo libre abeliano con una base teniendo tantos elementos como p -simplejos en K . Por tanto, la estructura del grupo $C_p(K)$ depende únicamente de la estructura del complejo simplicial K , no de la orientación particular que se considere.
2. En adelante, cuando se escriba σ^p se entenderá que es un p -simplejo positivamente orientado. Además, se identificará σ^p con su p -cadena elemental
3. Como cada p -cadena elemental σ^p es una p -cadena, entonces tiene sentido considerar la inclusión:

$$i: \bar{S}_p \longrightarrow C_p(K)$$

Al definir

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_p: \bar{S}_p &\longrightarrow C_{p-1}(K) \\ \sigma^p &\longmapsto \bar{\partial}_p(\sigma^p) = \sum_{\alpha=0}^p [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \sigma_\alpha^{p-1} \end{aligned}$$

entonces por la propiedad universal del *objeto libre*^{6.3}, existe una única función $\bar{\partial}_p$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \bar{S}_p & \xrightarrow{i} & C_p(K) \\ & \searrow \bar{\partial}_p & \downarrow \partial_p \\ & & C_{p-1}(K) \end{array}$$

Con base en este hecho, se tiene la siguiente definición:

Definición 6.35. Para cada $0 < p \leq \dim K$, se define un homomorfismo de grupos $\bar{\partial}_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$, denominado **homomorfismo frontera**, como el único homomorfismo tal que para cada p -simplejo σ^p de K se tiene:

$$\bar{\partial}_p(\sigma^p) = \sum_{\alpha=0}^p [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \sigma_\alpha^{p-1} \quad (6.2)$$

6.3. Un objeto F de una categoría concreta \mathcal{C} se llama *libre* sobre un subconjunto $B \subseteq F$ si tiene la siguiente propiedad universal: dado un objeto X de \mathcal{C} y una función $f: B \longrightarrow X$, existe un morfismo $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$ en \mathcal{C} , único tal que $\tilde{f} \circ i = f$, donde $i: B \longrightarrow F$ es la inclusión. En este caso se dice que B es una *base* de F . Así, la propiedad universal del objeto libre dice que toda función definida en la base tiene una única extensión a un morfismo definido en F .

donde σ_α^{p-1} corre por todas las $p-1$ -caras positivamente orientadas de σ^p . Para $p \leq 0$ ó $q > \dim K$ se define necesariamente ∂_p como el homomorfismo cero.

Observación 6.36.

1. Si en 6.2 se considera el conjunto de todos los $p-1$ -simplejo de K , la suma permanece inalterada, pues si σ_α^{p-1} no es un cara de σ^p , entonces $[\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] = 0$. Por tanto, se puede escribir

$$\partial_p(\sigma^p) = \sum_{\sigma_\alpha^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \sigma_\alpha^{p-1}$$

2. Si $\sigma^p = [a_0, \dots, a_p]$ es un p -simplejo orientado con orden $a_0 < a_1 < \dots < a_p$, entonces las $p+1$ -caras de σ^p son $\sigma_\alpha^{p-1} = \langle a_0, \dots, \hat{a}_\alpha, \dots, a_p \rangle$, para $\alpha \in \{0, \dots, p\}$, donde \hat{a}_α significa que el vértice a_α ha sido eliminado del simplejo original. De este modo, como el orden se mantiene, σ_α^{p-1} obtiene la orientación positiva y por tanto al agregar en la primera posición el vértice a_α , se requiere de α transposiciones para obtener a a_α . Por tanto, $[\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] = (-1)^\alpha$ y, se puede escribir

$$\partial_p([a_0, \dots, a_p]) = \sum_{\alpha=0}^p (-1)^\alpha [a_0, \dots, \hat{a}_\alpha, \dots, a_p]$$

Ejemplo 6.37. Si $\sigma = [a_0, a_1]$, entonces

$$\partial_1 \sigma = a_1 - a_0$$

De manera similar, si $\sigma = [a_0, a_1, a_2]$, entonces

$$\begin{aligned} \partial_2 \sigma &= [a_1, a_2] - [a_0, a_2] + [a_0, a_1] \\ &= [a_1, a_2] + [a_2, a_0] + [a_0, a_1] \end{aligned}$$

Para $\sigma = [a_0, a_1, a_2, a_3]$, se obtiene que

$$\partial_3 \sigma = [a_1, a_2, a_3] - [a_0, a_2, a_3] + [a_0, a_1, a_3] - [a_0, a_1, a_2]$$

Ejemplo 6.38. Si σ es la cadena

$$\sigma = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + [a_2, a_3]$$

mostrada en la figura 6.1

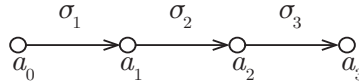


Figura 6.3.

entonces

$$\begin{aligned} \partial_1 \sigma &= \partial_1 [a_0, a_1] + \partial_1 [a_1, a_2] + \partial_1 [a_2, a_3] \\ &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_3 - a_2 \\ &= a_3 - a_0 \end{aligned}$$

Por otro lado, si σ es el ciclo cerrado

$$\sigma = [a_0, a_1] + [a_1, a_2] + [a_2, a_0]$$

mostrado en la figura 6.2

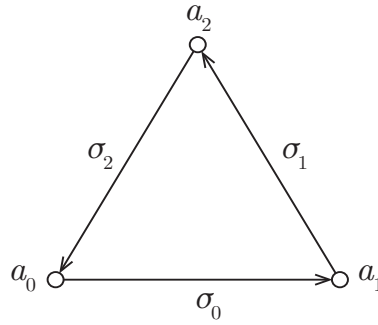


Figura 6.4.

se obtiene

$$\begin{aligned}
 \partial_1 \sigma &= \partial_1[a_0, a_1] + \partial_1[a_1, a_2] + \partial_1[a_2, a_0] \\
 &= a_1 - a_0 + a_2 - a_1 + a_0 - a_2 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

El siguiente resultado permite definir los grupos de homología simplicial.

Proposición 6.39. Para cada $p \in \mathbb{Z}$, la composición $\partial_{p-1} \circ \partial_p = C_p(K) \longrightarrow C_{p-2}(K)$ es el homomorfismo cero.

Demostración. Como cada grupo $C_p(K)$ es libre con base \bar{S}_p , entonces por la propiedad universal del objeto libre, basta probar que para cada p -simplejo $\sigma^p \in \bar{S}_p$, se tiene $\partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma^p) = 0$. En efecto,

$$\begin{aligned}
 \partial_{p-1} \circ \partial_p(\sigma^p) &= \partial_{p-1} \left(\sum_{\sigma_\alpha^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \sigma_\alpha^{p-1} \right) \\
 &= \sum_{\sigma_\alpha^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \sigma_\alpha^{p-1} \partial_{p-1}(\sigma_\alpha^{p-1}) \\
 &= \sum_{\sigma_\alpha^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] \left(\sum_{\sigma_\beta^{p-2} \in K} [\sigma_\alpha^{p-1}, \sigma_\beta^{p-2}] \sigma_\beta^{p-2} \right) \\
 &= \sum_{\sigma_\beta^{p-2} \in K} \left(\sum_{\sigma_\alpha^{p-1} \in K} [\sigma^p, \sigma_\alpha^{p-1}] [\sigma_\alpha^{p-1}, \sigma_\beta^{p-2}] \right) \sigma_\beta^{p-2} \\
 &= \sum_{\sigma_\beta^{p-2} \in K} 0 \cdot \sigma_\beta^{p-2} \quad ; \text{teorema 6.30} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

En vista de la proposición anterior, se observa que la imagen $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$ del homomorfismo

$$\partial_{p+1}: C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$$

es un subgrupo del $\text{Ker} \partial_p$, $\partial_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$. Este hecho motiva la siguiente definición:

Definición 6.40. Dado un complejo K , el kernel, $\text{Ker}\partial_p$, del homomorfismo $\partial_p: C_p(K) \longrightarrow C_{p-1}(K)$, es denotado por $Z_p(K)$ y a sus elementos se les llama **p -ciclos**. La imagen $\partial_{p+1}(C_{p+1}(K))$, $\text{Im}\partial_{p+1}$, del homomorfismo $\partial_{p+1}: C_{p+1}(K) \longrightarrow C_p(K)$ es denotada por $B_p(K)$ y a sus elementos se les llama **p -fronteras**. El **p -ésimo grupo de homología**, $H_p(K)$, es el grupo cociente

$$H_p(K) = Z_p(K) / B_p(K)$$

Dos p -cadenas c, c' , se dicen que son **homólogas**, lo cual se denota por $c \sim c'$, si existe alguna $(p+1)$ -cadena d tal que $c = c' + \partial_{p+1}d$

Observación 6.41. Observe que dos p -cadenas c, c' , son homólogas si y solo si $c - c' \sim 0$, donde 0 es la p -cadena cero en $C_p(K)$.

Definición 6.42. Dada una p -cadena $c = \sum_{\alpha=1}^k \beta_{\alpha} \sigma_{\alpha}^p$, al número entero $n = \sum_{\alpha=1}^k \beta_{\alpha}$ se le denomina **índice** de c , el cual se denota por $I(c)$.

Observación 6.43. El índice $I: C_p(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ es un homomorfismo de grupos.

Proposición 6.44. Si K es un complejo conexo, entonces para una 0 -cadena c , $I(c) = 0$ si y solo si $c \sim 0$, y $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

Demostración. Suponga primero que $c \sim 0$ y sea $\sigma_0 = (a_0, a_1)$ un 1-simplejo. Como

$$\partial_1(\beta\sigma_0) = \beta a_1 - \beta a_0$$

entonces para $c = \partial_1(\beta\sigma_0)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} I(c) &= I(\partial_1\beta\sigma_0) \\ &= I(\beta a_1 - \beta a_0) \\ &= \beta - \beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

Más aún, como I es un homomorfismo y cualquier 1-cadena $d \in C_1(K)$ es de la forma

$$d = \sum_{\alpha=0}^k \beta_{\alpha} \sigma_{\alpha}^1 \quad ; \quad \sigma_{\alpha}^1 = (a_{\alpha}, a_{\alpha+1})$$

entonces para $c = \partial_1 d$ se concluye que

$$\begin{aligned} I(c) &= I(\partial_1 d) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Para el recíproco, sean a, a' , vértices de K . Como K es conexo, o bien, K es conexo por caminos, existe un camino f entre ellos el cual está conformado por 1-simplejos $\sigma_{\alpha}^1 = (a_{\alpha}, a_{\alpha+1})$, $\alpha = 0, \dots, k-1$, donde $a_0 = a$ y $a_k = a'$. Considere la 1-cadena

$$d = \sum_{\alpha=0}^{k-1} \sigma_{\alpha}^1$$

luego,

$$\begin{aligned} \partial_1 d &= \partial_1 \left(\sum_{\alpha=0}^{k-1} \sigma_{\alpha}^1 \right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{k-1} \partial_1 \sigma_{\alpha}^1 \\ &= \sum_{\alpha=0}^{k-1} [a_{\alpha+1} - a_{\alpha}] \\ &= a' - a \end{aligned}$$

esto es, a, a' , son homólogas, lo cual implica que cualquier 0-cadena $c = \sum \beta_\alpha a_\alpha$ es homóloga a la cadena $c' = (\sum \beta_\alpha) a$; luego $c - c' \sim 0$ de modo que $I(c - c') = 0$, es decir,

$$\begin{aligned} I(c) &= I(\acute{c}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^k \beta_\alpha \end{aligned}$$

Así,

$$c \sim I(c)a$$

Por tanto, si $I(c) = 0$ entonces $c \sim 0$.

Por último, note que toda 0-cadena es un ciclo en $C_0(K)$ por lo que $C_0(K) = Z_0$. Para cualquier 0-cadena elemental c y $\beta \in \mathbb{Z}$, βc es un ciclo con $I(\beta c) = \beta$, lo cual muestra que

$$\begin{aligned} I(Z_0) &= I(C_0(K)) \\ &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $I(c) = 0$ si y solo si $c \sim 0$, se sigue que $B_0 = \text{Ker} I$, de donde se concluye que $H_0 \cong \mathbb{Z}$. □

Ejemplo 6.45. Se desea calcular los grupos de homología $H_0(K)$ y $H_1(K)$ del 2-complejo K de la figura 6.3.

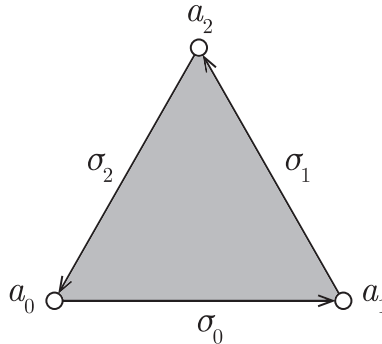


Figura 6.5.

En efecto, K consta de los tres vértices $\{a_0, a_1, a_2\}$, las tres aristas orientadas $\sigma_0 = [a_0, a_1]$, $\sigma_1 = [a_1, a_2]$, $\sigma_2 = [a_2, a_0]$, y el triángulo orientado $A = [a_0, a_1, a_2]$. Observe primero que cualquier par de vértices están conectados (la arista que los une) por lo que K es conexo y en consecuencia $H_0(K) = \mathbb{Z}$ de acuerdo a la proposición anterior. Para calcular $H_1(K)$ observe que

$$\begin{aligned} B_1(K) &= \partial_2(C_2(K)) \\ &= \{\partial_2(nA) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n\partial_2(A) \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2) \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} Z_1(K) &= \text{Ker} \partial_1 \\ &= \{n_0\sigma_0 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 \mid \partial_1(n_0\sigma_0 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2) = 0\} \\ &= \{n_0\sigma_0 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 \mid (n_2 - n_0)a_0 + (n_0 - n_1)a_1 + (n_1 - n_2)a_2 = 0\} \\ &= \{n_0\sigma_0 + n_1\sigma_1 + n_2\sigma_2 \mid n_0 = n_1 = n_2 = n \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{n(\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2) \mid n \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

Por tanto, $H_1(K) = \{0\}$.

Ejemplo 6.46. Considere el complejo K de la figura 6.3

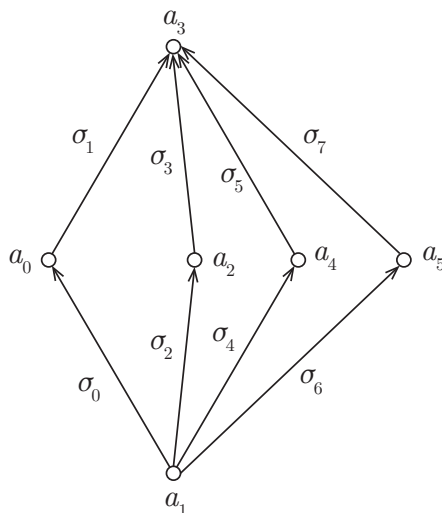


Figura 6.6.

Este complejo se compone de seis vértices $\{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y ocho aristas orientadas

$$\begin{array}{llll} \sigma_0 = [a_0, a_1] & \sigma_1 = [a_0, a_3] & \sigma_2 = [a_0, a_3] & \sigma_3 = [a_2, a_3] \\ \sigma_4 = [a_1, a_4] & \sigma_5 = [a_4, a_3] & \sigma_6 = [a_1, a_5] & \sigma_7 = [a_5, a_3] \end{array}$$

Como K es conexo se tiene que $H_0(K) = \mathbb{Z}$. Al considerar los 1-ciclos en $C_1(K)$, se observa que no todos son independientes. Por ejemplo, el 1-ciclo

$$c = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_7 - \sigma_6$$

puede escribirse como la suma de los ciclos

$$c_1 = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_2$$

$$c_2 = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_5 - \sigma_4$$

$$c_3 = \sigma_4 + \sigma_5 - \sigma_7 - \sigma_6$$

De hecho, se tiene que c_1, c_2, c_3 constituyen una base para $C_1(K)$, en cuyo caso, observando que $C_2(K) = \{0\}$, se obtiene que

$$\begin{aligned} H_1(K) &= Z_1/B_1 \\ &= \text{Ker } \partial_1 / \{0\} \\ &= \text{Ker } \partial_1 \\ &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

lo cual indica que K tiene tres agujeros 1-dimensionales.

Ejemplo 6.47. El complejo K de la figura 6.4,

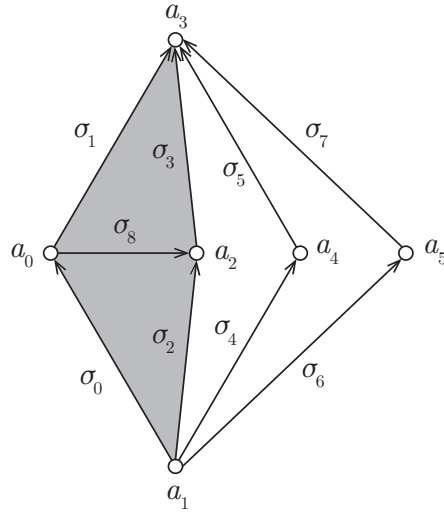


Figura 6.7.

consta de las nueve aristas

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= [a_0, a_1] & \sigma_1 &= [a_0, a_3] & \sigma_2 &= [a_0, a_3] & \sigma_3 &= [a_2, a_3] \\ \sigma_4 &= [a_1, a_4] & \sigma_5 &= [a_4, a_3] & \sigma_6 &= [a_1, a_5] & \sigma_7 &= [a_5, a_3] \\ \sigma_8 &= [a_0, a_2] \end{aligned}$$

y de los dos triángulos $A_1 = [a_1, a_0, a_2]$, $A_2 = [a_0, a_3, a_2]$. Note que

$$\partial_1 A_1 = \sigma_0 + \sigma_8 - \sigma_2$$

$$\partial_1 A_2 = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_8$$

luego

$$\partial_1(A_1 + A_2) = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$$

donde $A_1 + A_2$ es un diamante con frontera $\sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$. Dado que no hay 2-ciclos,

$$H_2(K) = \{0\}$$

Para calcular $H_1(K) = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$, observe que los ciclos que pertenecen a $\text{Im } \partial_2$ se encuentran en el diamante $A_1 + A_2$, por tanto, los únicos ciclos en $C_1(K)$ que no se encuentran en $\text{Im } \partial_2$, es decir, cuya clase de equivalencia no es el cero, deben contener, o bien a $c_1 + c_2$, o bien a $d_1 + d_2$; luego, cualquier par de ciclos que contienen a $c_1 + c_2$ (resp. $d_1 + d_2$) y pasan por $A_1 + A_2$ son homólogos. Por ejemplo, los ciclos

$$c_1 = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_5 - \sigma_4$$

$$c_2 = \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_5 - \sigma_4$$

son homólogos ya que

$$c_1 - c_2 = \partial_1(A_1 + A_2)$$

De manera similar, los ciclos

$$c_3 = \sigma_0 + \sigma_8 + \sigma_3 - \sigma_5 - \sigma_4$$

$$c_1 = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_5 - \sigma_4$$

son homólogos ya que

$$\begin{aligned} c_3 - c_1 &= \sigma_8 + \sigma_3 - \sigma_1 \\ &= \partial_1(-A_2) \end{aligned}$$

Generalizando el argumento anterior, se puede mostrar que cada ciclo es homólogo a un múltiplo de c_1 o a un múltiplo del ciclo

$$c_4 = \sigma_0 + \sigma_1 - \sigma_7 - \sigma_6$$

en otras palabras,

$$\text{Ker}\partial_1 / \text{Im}\partial_2 = \{c_1 + \text{Im}\partial_2, c_4 + \text{Im}\partial_2\}$$

de modo que

$$H_1(K) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

y en consecuencia K posee dos agujeros 1-dimensionales. Por último, siendo K conexo se concluye que $H_0(K) = \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema, el cual no se demostrará aquí, muestra la invarianza topológica de la homología simplicial. Para más detalles sobre este teorema consultar [5].

Teorema 6.48. *Dado cualquier complejo X , si $|X| \cong |K| \cong |K'|$ es homeomorfo a la realización geométrica de cualquier par de complejos K y K' , entonces*

$$H_p(X) \cong H_p(K) \cong H_p(K')$$

para todo $p \geq 0$.

Observación 6.49.

1. El teorema 6.48 implica que $H_p(K)$ es finitamente generado para todo $p \geq 0$. Es inmediato que si K tiene dimensión m , entonces $H_p(X) = 0$ para $p > m$, y se puede mostrar que $H_m(X)$ es un grupo libre abeliano.

Un invariante fundamental de los complejos finitos es la característica de Euler-Poincaré.

Definición 6.50. *Si K es un complejo finito de dimensión m y n_p es el número de p -simplejos de K , entonces la **característica de Euler-Poincaré**, $\chi(K)$, del complejo K se define por*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^m (-1)^p n_p$$

Teorema 6.51. *Dado un complejo finito K de dimensión m se tiene*

$$\chi(K) = \sum_{p=0}^m (-1)^p r(H_p(K))$$

esto es, $\chi(K)$ es la suma alternante de los números de Betti de los grupos de homología de K .

Demostración. Se sabe que $C_p(X)$ es un grupo libre de rango m_p . Como $H_p(Z) = Z_p(K) / B_p(K)$, por la proposición 6.22, se obtiene

$$r(H_p(K)) = r(Z_p(K)) - r(B_p(K))$$

luego, como la secuencia

$$0 \longrightarrow Z_p(K) \longrightarrow C_p(K) \xrightarrow{\partial_p} B_{p-1}(K) \longrightarrow 0$$

es exacta, entonces de nuevo por la proposición 6.22,

$$r(C_p(K)) = n_p = r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K))$$

luego,

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p n_p \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(Z_p(K)) + r(B_{p-1}(K)) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(Z_p(K)) + \sum_{p=0}^m (-1)^p r(B_{p-1}(K))\end{aligned}$$

Usando el hecho de que $B_m(K) = 0$, y $B_{-1}(K) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned}\chi(K) &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(Z_p(K)) + \sum_{p=0}^m (-1)^{p+1} r(B_p(K)) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p (r(Z_p(K)) - r(B_p(K))) \\ &= \sum_{p=0}^m (-1)^p r(H_p(K))\end{aligned}$$

□

Una consecuencia muy importante de los dos teoremas previos es que la característica de Euler-Poincaré de un complejo finito K de dimensión m solo depende de la realización geométrica $|K|$ de K ya que solo depende de los grupos de homología, $H_p(K) = H_p(|K|)$, de $|K|$. Por lo tanto, dos complejos K y K' con la misma realización geométrica tienen la misma característica de Euler-Poincaré, es decir, χ es un invariante de todos los complejos finitos correspondientes al mismo politopo $X = |K|$, por tanto, se puede hablar de *la* característica de Euler-Poincaré del politopo $X = |K|$, la cual se denotará por $\chi(X)$. En particular, lo anterior es cierto para superficies que admiten una triangulación, y como se verá, la característica de Euler-Poincaré cumplirá un papel muy importante en la clasificación de las superficies compactas. En este caso,

$$\chi(K) = m_0 - m_1 + m_2$$

donde m_0 es el número de vértices, m_1 el número de aristas y m_2 el número de triángulos, en K .

Considerando las triangulaciones de la esfera, el toro, el plano proyectivo y la botella de Klein presentadas en el capítulo cinco, se sigue que sus características de Euler son 2, 0, 1, 0, respectivamente.

6.2.3 Homología de 2-complejos finitos

Dado que un poliedro es la realización geométrica de un 2-complejo triangulado, entonces es posible determinar los grupos de homología de poliedros finitos. Se dice que un 2-complejo triangulado K es orientable si su realización geométrica $|K|$ es orientable. Se considerarán 2-complejos triangulados orientables y no orientables, finitos. Primero, note que $C_p(K)$ es el grupo trivial para $p < 0$ y $p > 2$, por lo que solo se estudiarán los casos donde $p = 0, 1, 2$.

Como una consecuencia inmediata de la proposición 6.44 para el caso de complejos triangulados se tiene:

Proposición 6.52. *Para todo 2-complejo triangulado K , $H_0(K) = \mathbb{Z}$.*

Proposición 6.53. *Para cualquier 2-complejo triangulado K , se cumple, o bien $H_2(K) = \mathbb{Z}$, ó $H_2(K) = \{0\}$. Más aún, $H_2(K) = \mathbb{Z}$ si y solo si $|K|$ es finito, no tiene frontera y es orientable, en otro caso, $H_2(K) = \{0\}$.*

Demostración. Cuando $p=2$, note que $B_2(K) = \{0\}$, por tanto $H_2(K) = Z_2(K)$. Considere una 2-cadena $c = \sum \beta_\alpha A_\alpha$ donde cada A_α es un triángulo orientado $[a_0, a_1, a_2]$, y suponga que c es un ciclo, esto es,

$$\partial c = \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha = 0$$

Siempre que A_α y A_j tengan una arista σ en común, la contribución de σ a ∂c es, o bien, $\beta_\alpha \sigma + \beta_j \sigma$, ó $\beta_\alpha \sigma - \beta_j \sigma$, ó $-\beta_\alpha \sigma + \beta_j \sigma$, ó $-\beta_\alpha \sigma - \beta_j \sigma$, lo cual implica que $\beta_\alpha = \epsilon \beta_j$, con $\epsilon = \pm 1$. Por tanto, si A_α y A_j están unidos por una camino de triángulos A_k , adyacentes dos a dos, todos en c , se tiene que $|\beta_\alpha| = |\beta_j|$; sin embargo, de las proposiciones 5.71, 5.76, se sigue que cualquier par de triángulos A_α y A_j en K están conectados por una secuencia de triángulos adyacentes dos a dos. Si algún triángulo en el camino no pertenece a c , entonces hay dos triángulos A_h, A_k , adyacentes en el camino, donde $A_h \in c$, y $A_k \notin c$, tal que todos los triángulos en el camino de A_α a A_h pertenecen a c ; pero entonces, A_h tiene una arista que no es adyacente a ningún otro triángulo en c , por tanto, $\beta_h = 0$ y así $\beta_\alpha = 0$. El mismo razonamiento aplicado a A_j muestra que $\beta_j = 0$. Si todos los triángulos en el camino de A_α a A_j pertenecen a c , entonces ya se sabe que $|\beta_\alpha| = |\beta_j|$. Por tanto, todos los β_α tienen el mismo valor absoluto. Si K es infinito, debe haber algún A_α en la suma finita el cual es adyacente a algún triángulo A_j que no se encuentra en la suma finita y la contribución de la arista común a A_α y A_j a ∂c debe ser cero por lo que $\beta_\alpha = 0$ para todo α . Similarmente, los coeficientes de cada triángulo con una arista en la frontera deben ser cero. Así, en estos casos, $c \sim 0$, y $H_2(K) = \{0\}$.

Suponga ahora que K es un 2-complejo triangulado finito sin frontera. El razonamiento anterior mostró que cualquier 2-ciclo distinto de cero se puede escribir como

$$c = \sum \epsilon_\alpha \beta A_\alpha$$

donde $\beta = |\beta_\alpha| > 0$ para todo α , y $\epsilon_\alpha = \pm 1$. Como $\partial c = 0$, $\sum \epsilon_\alpha A_\alpha$ es también un 2-ciclo. Para cualquier otro 2-ciclo distinto de cero $\sum \gamma_\alpha A_\alpha$, se puede sustraer $\epsilon_1 \gamma_1 (\sum \epsilon_\alpha A_\alpha)$ de $\sum \gamma_\alpha A_\alpha$, de donde se obtiene el ciclo

$$\sum_{\alpha \neq 1} (\gamma_\alpha - \epsilon_1 \epsilon_\alpha \gamma_1) A_\alpha$$

en el cual A_1 tiene coeficiente 0; pero entonces, como todos los coeficientes tienen el mismo valor absoluto, se debe tener que $\gamma_\alpha = \epsilon_1 \epsilon_\alpha \gamma_1$ para todo $\alpha \neq 1$, luego

$$\sum \gamma_\alpha A_\alpha = \epsilon_1 \gamma_1 (\sum \epsilon_\alpha A_\alpha)$$

lo cual muestra que, o bien $H_2(K) = 0$, o $H_2(K) = \mathbb{Z}$. Solo resta probar que K es orientable si y solo si $H_2(K) = \mathbb{Z}$.

Primero, suponga que $H_2(K) = \mathbb{Z}$. En este caso, se puede escoger una orientación (escogiendo una orientación para cada A_α) tal que $\sum A_\alpha$ sea un 2-ciclo. Sea $A = (a_0, a_1, a_2)$ un 2-simplejo en dicha orientación. Recuerde que la realización geométrica $|A|$ de A es un triángulo.

Sea f la aplicación afín que mapea $|A|$ a un triángulo en el plano (visto como \mathbb{C}) tal que a_0, a_1, a_2 son mapeados a $0, 1$ e i respectivamente. Esta aplicación determina una orientación de $|A|$, y es natural pensar que tal orientación podría depender del orden en que se tomen los vértices, sin embargo, la aplicación afín la cual efectúa una permutación cíclica de $0, 1, i$ (0 a 1 , 1 a i , i a 0) puede ser escrita como

$$(x, y) \longmapsto (1 - x - y, x)$$

y claramente preserva el sentido pues su jacobiano es

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

En consecuencia, se obtiene así una orientación para el interior de cada 2-simplejo.

Las estrellas abiertas de los vértices del complejo forman un cubrimiento abierto de $|K|$. Se desea mostrar que dicho cubrimiento permite una orientación compatible. Para ello, observe que Sta_0 es homeomorfo a una bola abierta. Por tanto, cada estrella es orientable, y la orientación de un $|A| \subseteq Sta_0$ determina una orientación de la estrella. Se debe probar que diferentes $|A|$ determinan la misma orientación, para lo cual es suficiente considerar dos triángulos adyacentes $|A|$ y $|A'|$ en Sta_0 . Si el lado común es (a_0, a_1) , la orientación debe ser de la forma $A = (a_0, a_1, a_2)$, $A' = (a_0, a_3, a_1)$. Sean f, f' las aplicaciones afines correspondientes a dichas orientaciones. Un homeomorfismo h de $|A| \cup |A'|$ en el plano puede ser construido al hacer $h = f$ en $|A|$ y $h = \rho \circ f'$ en $|A|$ donde ρ es la aplicación dada por $z \mapsto -iz$. Claramente, la orientaciones definidas por h y f coinciden en $|A|$ pues $h = f$ en $|A|$, mientras que las orientaciones definidas por h y f' coinciden en $|A'|$ porque ρ preserva el sentido,

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$$

lo cual implica que las orientaciones de Sta_0 definidas por f y f' coinciden. En consecuencia, se han obtenido las orientaciones de todas las estrellas. Más aún, dos estrellas abiertas son, o bien, disjuntas, o tienen una intersección conexa la cual contiene el interior de un $|A|$. Se sabe que las orientaciones coinciden en $|A|$, por tanto, $|K|$ es una superficie orientable. Recíprocamente, suponga que $|K|$ es orientable. En este caso, se puede escoger una función afín f de $|A|$ de modo que coincida con la orientación de $|K|$. Esto determina un orden (a_0, a_1, a_2) de los vértices. Si un triángulo adyacente $|A'|$ estuviera ordenado por (a_0, a_1, a_3) , se podría mapear $|A| \cup |A'|$ por $h = f$ en $|A|$ y $h = \rho' \circ f'$ en $|A'|$, donde ρ' es la función dada por $z \mapsto \bar{z}$; pero, ρ' invierte el sentido, por lo que f' no coincidiría con h y por tanto no coincidiría con la orientación de $|K|$. Se sigue que $|A'|$ está ordenado por (a_0, a_3, a_1) , y el lado común (a_0, a_1) se cancela de la frontera, así, $\sum A_\alpha$ es un ciclo, y $H_2(K) = \mathbb{Z}$. El mismo razonamiento se puede aplicar al caso de un complejo finito con frontera. Se puede probar que $|K|$ es orientable si y solo si los 2-simplejos pueden ser orientados de modo que la frontera de $\sum A_\alpha$ consista solo de simplejos frontera. \square

Proposición 6.54. *Sea K un 2-complejo triangulado finito. Entonces, o bien $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1}$ o $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Más aún, $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si y solo si $|K|$ no tiene frontera y es no orientable.*

Demostración. El primer paso es determinar el subgrupo torsión de $H_1(K)$. Sea c un 1-ciclo, y suponga que $mc \sim 0$ para algún $m > 0$, es decir, $mc = \partial c'$, para alguna 2-cadena $c' = \sum \beta_\alpha A_\alpha$. Si A_α y A_j tienen una arista común σ , la contribución de σ a $\sum \beta_\alpha \partial A_\alpha$ es, o bien $\beta_\alpha \sigma + \beta_j \sigma$, ó $\beta_\alpha \sigma - \beta_j \sigma$, ó $-\beta_\alpha \sigma + \beta_j \sigma$, ó $-\beta_\alpha \sigma - \beta_j \sigma$, lo cual implica que, o bien $\beta_\alpha \equiv \beta_j \pmod{m}$, ó $\beta_\alpha \equiv -\beta_j \pmod{m}$. Al igual que en la proposición 6.53, como K es conexo, las relaciones obtenidas anteriormente son válidas para cualquier par de triángulos A_α, A_j en c' . Si K posee una frontera, existe algún triángulo A_α el cual contiene una arista frontera no adyacente a cualquier otro triángulo, y así, β_α debe ser divisible por m , lo cual implica que cada β_α es divisible por m . Por tanto,

$$\begin{aligned} c &= \sum \frac{\beta_\alpha}{m} A_\alpha \\ &= \partial \left(\sum \frac{\beta_\alpha}{m} A_\alpha \right) \end{aligned}$$

de modo que $c \sim 0$ y $H_1(K)$ es libre de torsión. Note que un razonamiento similar aplica cuando K es infinito, aunque no estamos considerando este caso. Si K no posee frontera y es orientable entonces de la proposición 6.53, se puede asumir que $\sum A_\alpha$ es un 2-ciclo, así, $\sum \partial A_\alpha = 0$, y

$$\begin{aligned} mc &= \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha - \beta_1 \sum \partial A_\alpha \\ &= \sum (\beta_\alpha - \beta_1) \partial A_\alpha \end{aligned}$$

Debido a la conexidad de K , al igual que antes, se tiene para todo α, j , que, o bien, $\beta_\alpha - \beta_1 \equiv \beta_j - \beta_1 \pmod{m}$, o $\beta_\alpha - \beta_1 \equiv -\beta_j + \beta_1 \pmod{m}$. Tomando $j=1$ se obtiene que todo $\beta_\alpha - \beta_1$ es divisible por m de modo que $c \sim 0$,

$$\begin{aligned} c &= \sum \frac{(\beta_\alpha - \beta_1)}{m} \partial A_\alpha \\ &= \partial \left(\sum \frac{(\beta_\alpha - \beta_1)}{m} A_\alpha \right) \end{aligned}$$

Así, $H_1(K)$ es libre de torsión.

Ahora suponga que K no tiene frontera y no es orientable, luego $H_2(K) = \{0\}$ por la proposición 6.53, lo cual implica que no hay 2-ciclos excepto el 2-ciclo cero pues $Z_2(K) = H_2(K)$. Por tanto, los coeficientes en $\sum \partial A_\alpha$ deben ser, o bien 0, o ± 2 , dependiendo de la orientación de los A_α . Sea $\sum \partial A_\alpha = 2z$, luego $2z \sim 0$, pero z no es homólogo a cero, ya que de $z = \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha$, se obtendría $\sum (2\beta_\alpha - 1) \partial A_\alpha \sim 0$, lo cual contradice el hecho de que no hay 2-ciclos excepto cero, así, z tiene orden 2.

Considere de nuevo la cadena $mc = \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha$. Como, o bien $\beta_\alpha \equiv \beta_j \pmod{m}$, o $\beta_\alpha \equiv -\beta_j \pmod{m}$, tomando $j=1$ se obtiene, o bien $\beta_\alpha \equiv \beta_1 \pmod{m}$, o $\beta_\alpha \equiv -\beta_1 \pmod{m}$, por lo que $\beta_\alpha = \epsilon_\alpha \beta_1 + t_\alpha m$ para todo α , con $\epsilon_\alpha = \pm 1$ y $t_\alpha \in \mathbb{Z}$; luego,

$$\begin{aligned} mc &= \sum \beta_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \sum (\epsilon_\alpha \beta_1 + t_\alpha m) \partial A_\alpha \\ &= \beta_1 \sum \epsilon_\alpha \partial A_\alpha + m \sum t_\alpha \partial A_\alpha \end{aligned}$$

donde al menos una de las aristas que aparecen en $\sum \epsilon_\alpha \partial A_\alpha$ está multiplicada por ± 2 , ya que de lo contrario todas las aristas se cancelan de modo que

$$\begin{aligned} \sum \epsilon_\alpha \partial A_\alpha &= \partial \left(\sum \epsilon_\alpha A_\alpha \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

lo cual implica que $\sum \epsilon_\alpha A_\alpha$ es un ciclo distinto de cero, contradiciendo el hecho de que no hay 2-ciclos excepto el 0; pero entonces, $2\beta_1$ es divisible por m , luego

$$\begin{aligned} 2c &= \sum \frac{2\beta_1 \epsilon_\alpha}{m} \partial A_\alpha + \sum 2t_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \partial \left(\sum \frac{2\beta_1 \epsilon_\alpha}{m} A_\alpha + \sum 2t_\alpha A_\alpha \right) \end{aligned}$$

Así, $2c \sim 0$. Por tanto, $2c = \partial(\sum u_\alpha A_\alpha) = \sum u_\alpha \partial A_\alpha$, donde $u_\alpha \in \mathbb{Z}$ son todos pares o impares. Para ver esto último, suponga que u_1 es par y sea A_α un triángulo adyacente a A_1 , donde la arista común a ambos es σ_{1j} . Al desarrollar la expresión $\sum u_\alpha \partial A_\alpha$, aparecerá, entre otras cosas, la cadena

$$u_1 \epsilon_1 \sigma_{1j} + u_j \epsilon_j \sigma_{1j} = (u_1 \epsilon_1 + u_j \epsilon_j) \sigma_{1j}$$

donde $\epsilon_1 = \pm 1$, $\epsilon_j = \pm 1$, dependiendo de la orientación de A_1 y A_j respectivamente. Dado que $u_1 \epsilon_1 + u_j \epsilon_j$ es par, pues $2c = \sum u_\alpha \partial A_\alpha$, se tiene que u_j debe ser también par. Por la proposición 5.71, todos los triángulos están conectados por una secuencia de triángulos adyacentes, por lo que aplicando el razonamiento anterior a cada par de triángulos adyacentes se tiene que todos los u_α deben ser pares. Análogamente si u_1 es impar. Por tanto:

- Si todos los u_α son pares se sigue que

$$\begin{aligned} 2c &= \sum u_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \sum 2u'_\alpha \partial A_\alpha \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} c &= \sum u'_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \partial(\sum u'_\alpha A_\alpha) \end{aligned}$$

y así $c \sim 0$.

- Si todos los u_α son impares se tiene que

$$\begin{aligned} 2c &= \sum u_\alpha \partial A_\alpha \\ &= \sum (2u'_\alpha + 1) \partial A_\alpha \\ &= \sum 2u'_\alpha \partial A_\alpha + \sum \partial A_\alpha \\ &= \sum 2u'_\alpha \partial A_\alpha + 2z \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$c = \sum u'_\alpha \partial A_\alpha + z$$

y así, $c \sim z$.

En consecuencia, z es el único elemento de orden finito (2), lo cual implica que el subgrupo torsión de $H_1(K)$ es $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Finalmente, habiendo determinado el grupo torsión de $H_1(K)$, por el colorario de la proposición 6.20, se sabe que $H_1(K) = \mathbb{Z}^{m_1} \oplus T$, con $m_1 = r(H_1(K))$, de donde se sigue el resultado. \square

Recuerde que por el teorema 6.51, la característica de Euler-Poincaré $\chi(K)$ de un complejo está dada por

$$\chi(K) = r(H_0(K)) - r(H_1(K)) + r(H_2(K))$$

y se ha determinado que $r(H_0(K)) = 1$, y $r(H_2(K)) = 0$ para K con o sin frontera y no orientable, y $r(H_2(K)) = 1$ con K sin frontera y orientable. Así, el rango m_1 de $H_1(K)$ es, o bien

$$m_1 = 2 - \chi(K)$$

si K no tiene frontera y es orientable, y

$$m_1 = 1 - \chi(K)$$

en otro caso. Por tanto, como $m_1 \geq 0$, se obtiene que $\chi(K) \leq 2$.

Capítulo 7

El teorema de clasificación de superficies compactas

Considerando el hecho de que las superficies se pueden triangular y usando algunas de las ideas desarrolladas en los capítulos anteriores, se procederá en este capítulo a demostrar el teorema de clasificación de las superficies compactas el cual es el objetivo principal del presente trabajo. El primer paso para lograr esto, es definir el concepto de *complejo celular*, una extensión del concepto de *complejo* presentado en el capítulo 4. La idea intuitiva es generalizar un poco la noción de triangulación, y considerar objetos construidos a partir de caras orientadas, cada cara teniendo alguna frontera, siendo esta última una lista cíclicamente ordenada de aristas orientadas. Se puede pensar cada cara como un disco cerrado donde las aristas en la frontera son precisamente arcos en la frontera de dicho disco. Un complejo celular representa la superficie obtenida al identificar aristas frontera idénticas.

Una vez se ha definido el concepto de complejo celular, es posible definir una relación de equivalencia en los complejos celulares, y se puede mostrar que cada complejo celular es equivalente a un tipo particular de complejo denominado *forma normal*. Más aún, todo complejo celular tiene una realización geométrica la cual es una superficie, y complejos celulares equivalentes tiene realizaciones geométricas homeomorfas. Además, cada complejo celular es equivalente a un 2-complejo triangulado. Finalmente, se puede mostrar que realizaciones geométricas de formas normales distintas no son homeomorfas. Este es uno de los pasos más complejos, en el sentido que requiere de herramientas como el grupo fundamental y los grupos de homología.

Antes de definir el concepto de complejo celular, es preciso considerar lo siguiente:

1. Dado cualquier conjunto X , conviene introducir el conjunto $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$ de elementos inversos de elementos de X , donde se asume que $X \cap X^{-1} = \emptyset$. Se dirá que los elementos de $X \cup X^{-1}$ están **orientados**. Se asumirá también que $(x^{-1})^{-1} = x$, para todo $x \in X$.
2. Sea $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ un conjunto finito. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea

$$F_m(X) = \{f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow X\}$$

y sea $F(X) = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} F_m(X)$. Si $f \in F_m(X)$, se escribe $f = f(1)f(2)\cdots f(m)$. Dadas $f, f' \in F_m(X)$, se escribe $f \sim_m f'$ si existe $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $f' = f \circ \alpha_m^k$, donde α_m^0 es la identidad en $S_m^{7.1}$ y para $k \neq 0$, $\alpha_m = (1, \dots, m)$ es la permutación (ciclo) de S_m tal que

$$\alpha_m(1) = 2, \dots, \alpha_m(m-1) = m, \alpha_m(m) = 1$$

Se puede probar que \sim_m es una relación de equivalencia en $F_m(X)$, para cada $m \in \mathbb{N}$. Estas relaciones de equivalencia definen una en $F(X)$ así: $f \sim f'$ si y solo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f, f' \in F_m(X)$ y $f \sim_m f'$. Se denota $X^* = F(X)/\sim$. Por ejemplo, si $f: \{1, \dots, m\} \longrightarrow X$, con $f = x_1x_2x_3x_4x_5$, $f' = x_3x_4x_5x_1x_2$ y $\alpha_5^2 = (13524)$, entonces

$$\begin{aligned} f'(1) &= f \circ \alpha_5^2(1) \\ &= f(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= f \circ \alpha_5^2(2) \\ &= f(4) \end{aligned}$$

Al hacer un procedimiento similar al anterior con 3, 4, 5, se concluye que $f \sim_5 f'$, de modo que $f \sim f'$.

7.1. Capítulo 6, página 137.

7.1 Complejos celulares

Definición 7.1. Un **complejo celular** K es una terna $K = (F, E, B)$, donde F es un conjunto finito no vacío de **caras**, E es un conjunto finito de **aristas** y $B: F \cup F^{-1} \rightarrow (E \cup E^{-1})^*$ es la **función frontera** tal que

1. B es biyectiva
2. Si $A \in \{F \cup F^{-1}\}$ y $B(A) = [a_1 \dots a_n]$, entonces $B(A^{-1}) = [a_n^{-1} \dots a_1^{-1}]$
3. Dada $\alpha \in \{E \cup E^{-1}\}$, existen una o dos caras $A_1, A_2 \in F \cup F^{-1}$ tales que α aparece en las expresiones $B(A_1)$ y $B(A_2)$, de modo que si α aparece dos veces en una misma frontera, no aparece en otra.
4. K es conexo, lo cual quiere decir que K no es la unión de dos sistemas disjuntos satisfaciendo la primera condición.

Observación 7.2.

1. Es posible que $F = \{A\}$ y $E = \emptyset$, en cuyo caso $B(A) = B(A^{-1}) = \epsilon$, la secuencia vacía. Para simplificar, con frecuencia se dirá cara y arista en vez de cara orientada y arista orientada, respectivamente.
2. En lo sucesivo se usará la notación $B(A) = a_1 \dots a_n$, para describir la frontera de A .

Definición 7.3. Dado un complejo celular $K = (F, E, B)$, para cualquier arista $a \in E \cup E^{-1}$, un **sucesor** de a es una arista b tal que b es el sucesor de a en alguna frontera $B(A)$, es decir, la cadena ab aparece en alguna frontera. Si a aparece en dos lugares en el conjunto de fronteras, a tiene un par de sucesores (posiblemente idénticos). En otro caso, a tiene un solo sucesor. Una secuencia de un solo elemento $\alpha = (a)$ es un **vértice interior** si y solo si aa^{-1} ocurre en una sola frontera; el conjunto ordenado cíclicamente $\alpha = (a, b)$, $a \neq b$, es un **vértice interior** si y solo si, o bien $b = a^{-1}$ y hay una cara cuya frontera es aa , ó $b \neq a^{-1}$ y ab^{-1} aparece dos veces en el conjunto de fronteras; el conjunto ordenado cíclicamente $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, con $n \geq 3$, es un **vértice interior** si cada a_i aparece en dos lugares en el conjunto de fronteras, si los sucesores de cada a_i aparecen en α , y si a_i tiene a a_{i-1}^{-1} y a_{i+1}^{-1} como par de sucesores. Un **vértice frontera** es un conjunto ordenado cíclicamente $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$, con $n \geq 2$, tal que la condición anterior se cumple para todo i , con $2 \leq i \leq n - 1$, mientras que a_1 y a_n aparecen una sola vez en el conjunto de fronteras, a_1 tiene a a_2^{-1} como su único sucesor, y a_n tiene a a_{n-1}^{-1} como su único sucesor. Se considera que (a_1, \dots, a_n) y (a_n, \dots, a_1) representan el mismo vértice. Una arista $a \in E \cup E^{-1}$ es una **arista frontera** si aparece una vez en una sola frontera, de lo contrario, a es una **arista interior**.

Observación 7.4.

1. Note que a_1 tiene como par de sucesores a a_n^{-1} y a_2^{-1} , y a_n tiene como par de sucesores a a_{n-1}^{-1} y a_1^{-1} .

Ejemplo 7.5. Si K es el complejo de la figura 7.1a, entonces K posee una sola cara con frontera $aba^{-1}b^{-1}$ y un solo vértice interior (a^{-1}, b, a, b^{-1}) . La superficie correspondiente a K es el toro. De manera similar, el complejo de la figura 7.2b posee una sola cara con frontera $aabb$ y un solo vértice interior (a^{-1}, a, b^{-1}, b) . La superficie correspondiente es la botella de Klein. El complejo de la figura 7.1c posee una sola cara con frontera $abab$ y dos vértices interiores (b^{-1}, a) y (a^{-1}, b) . La superficie correspondiente es el plano proyectivo.

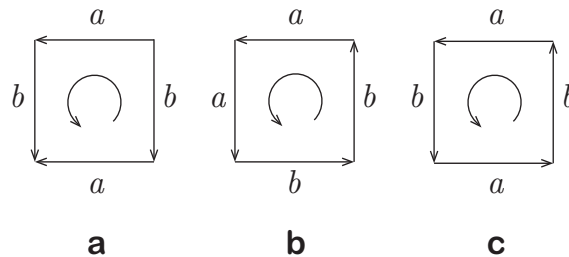


Figura 7.1.

Ejemplo 7.6. Para el complejo de la figura 7.2a con frontera $a_1 a_1^{-1}$ se tiene un único vértice interior (a_1) y la correspondiente superficie es la esfera. Si K posee una sola cara con frontera $a_1 a_1$, entonces K tiene un solo vértice interior (a_1^{-1}, a_1), como se muestra en la figura 7.2b. La superficie correspondiente es de nuevo el plano proyectivo.

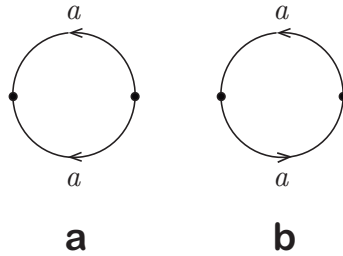


Figura 7.2.

Ejemplo 7.7. Si K posee una única cara con frontera aah , luego K no tiene vértice interior y un vértice frontera (h, a^{-1}, a, h^{-1}) como se muestra en la figura 7.3a. La superficie asociada K es la banda de Möbius. Si K posee una sola cara con frontera $aachc^{-1}$, luego K tiene un vértice interior (a^{-1}, a, c^{-1}) y un vértice frontera (h, c, h^{-1}); figura 7.3b. La superficie correspondiente es de nuevo la banda de Möbius.

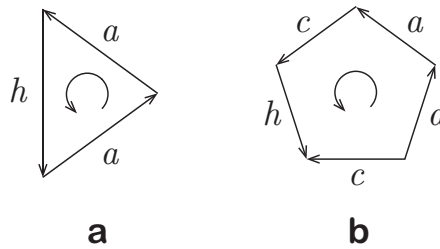


Figura 7.3.

Dada una arista $a \in E \cup E^{-1}$, se puede determinar un único vértice α de la siguiente manera: Los vecinos de a en el vértice α son los inversos de sus sucesores. Se repite este paso en ambas direcciones hasta que, o bien el ciclo se cierra, o se encuentran aristas con un único sucesor. El vértice α en cuestión es la lista de aristas que entran a él. Por esta razón, se dice que ***a conduce a α*** . Usando un lenguaje geométrico, es conveniente decir que cada arista conduce a un vértice, ***su punto terminal***. Note que cuando un vértice $\alpha = (a)$ contiene una sola arista a , debe haber una sola ocurrencia de la forma aa^{-1} en alguna frontera. También, si ab aparece una sola vez (en un sola frontera), entonces (a, b^{-1}) es un vértice frontera.

Los vértices también se pueden caracterizar de otra forma la cual será útil luego. Intuitivamente, dos aristas a y b son equivalentes si y solo si tienen el mismo vértice terminal. En el conjunto de aristas considere la relación R definida por aRb si y solo si b^{-1} es el sucesor de a en alguna frontera. Note que esta relación es simétrica ya que si ab^{-1} aparece en la frontera de alguna cara A , entonces ba^{-1} aparece en la frontera de A^{-1} . Sea R' la relación de equivalencia generada por R . En este caso, la clase de equivalencia $[a]$ de una arista a es el vértice α que *conduce a*. Así, los vértices inducen una partición de $E \cup E^{-1}$. Se dice que una arista a es una arista del vértice α al vértice β si $a^{-1} \in \alpha$ y $a \in \beta$; luego se puede probar que si K es conexo entonces existe un camino entre cualquier par de vértices, es decir, K es conexo por caminos.

La figura 7.4 muestra un complejo con frontera, el cual cuenta con tres caras y las fronteras abc , bed^{-1} , y adf^{-1} . Posee un vértice interno (b^{-1}, a, d^{-1}) , y tres vértices frontera (e, d, f) , (c^{-1}, b, e^{-1}) y (c, a^{-1}, f^{-1}) .

Si se dobla dicho complejo identificando las dos aristas marcadas como d , se obtiene un tetraedro sin una cara, a saber, la cara opuesta al vértice interior, el punto terminal de la arista a .

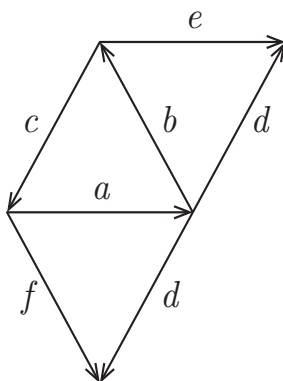


Figura 7.4.

Hay una forma natural de ver un complejo triangulado como un complejo celular, y no es difícil ver que las siguientes condiciones permiten ver un complejo celular como un complejo triangulado:

- C1.** Si a, b son aristas diferentes que conducen al mismo vértice, entonces a^{-1} y b^{-1} conducen a vértices distintos.
- C2.** La frontera de cada cara es una tripleta abc
- C3.** Diferentes caras tienen diferentes fronteras.

Como consecuencia de C1 se obtiene que a y a^{-1} no pueden conducir al mismo vértice. Más aún, las aristas a, b, c conducen a diferentes vértices y por tanto son distintos. De hecho, como abc es una frontera, a, b^{-1} , determinan el mismo vértice y b, b^{-1} , no conducen al mismo vértice, entonces b no puede pertenecer a ese vértice.

7.2 Formas normales de complejos celulares

Se desea ahora introducir el concepto de *subdivisión elemental* el cual será de gran importancia para la prueba del teorema de clasificación de superficies compactas.

Definición 7.8. Dados dos complejos celulares, K, K' , se dice que K' es una **subdivisión elemental** de K si K' se obtiene de K por medio de una de las siguientes operaciones:

- P1.** Cualquier par de aristas a y a^{-1} en K son reemplazadas por bc y $c^{-1}b^{-1}$ en todas las fronteras, donde b, c , son aristas distintas de K' no en K .
- P2.** Cualquier cara A en K con frontera $a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n$ es reemplazada por dos caras A', A'' , en K' , con fronteras $a_1 \dots a_p d$ y $d^{-1} a_{p+1} \dots a_n$, donde d es una arista en K' y no en K .

Definición 7.9. Se dice que un complejo K' es un **refinamiento** de un complejo celular K , si K y K' están relacionados en la clausura reflexiva y transitiva de la relación de subdivisión elemental^{7.2}, y se dice que K y K' son **equivalentes** si están relacionados en la relación de equivalencia generada por la relación de refinamiento.

Observación 7.10.

1. Si K' se obtiene de K por una operación elemental, se escribe $K' = P(K)$.

^{7.2.} La clausura reflexiva de una relación R en un conjunto X es la intersección de todas las relaciones reflexivas definidas en X que contienen a R , esto es, la relación reflexiva más pequeña que contiene a R . De manera similar se define la clausura transitiva.

2. De acuerdo a la definición 7.9, K' es un refinamiento de K si existe una sucesión de operaciones elementales P_1, \dots, P_n , tal que $K' = P_n(P_{n-1} \dots (P_1(K)))$ ó $K' = K$. Note que esto define una relación reflexiva y transitiva. En particular, si K' es un refinamiento de K y K'' es un refinamiento de K' , entonces K'' es un refinamiento de K .
3. Si K y K' son dos complejos equivalentes entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y complejos K_0, \dots, K_n , tal que $K = K_0$, $K' = K_n$, y $K_{\alpha-1} = P(K_\alpha)$ ó $K_\alpha = P(K_{\alpha-1})$, para $\alpha = 1, \dots, n$. Note que di K y K' son equivalentes, no necesariamente K es refinamiento de K' ó K' es refinamiento de K_1 .

Ejemplo 7.11. Si se aplica la operación $P1$ al complejo de la figura 7.5a correspondiente al plano proyectivo, se obtiene el complejo celular de la figura 7.5b.

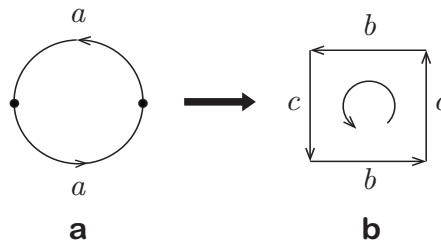


Figura 7.5.

Ejemplo 7.12. Al aplicar la operación $P2$ al complejo de la figura 7.6a, cuya frontera es $aba^{-1}b$, se obtiene un complejo celular con dos caras con fronteras abc y $c^{-1}a^{-1}b$; luego, usando la operación inversa de $P2$, $(P2)^{-1}$, se pueden pegar estas dos caras a lo largo de la arista b dando como resultado el complejo celular de la figura 7.6c el cual corresponde a la botella de Klein pues su frontera es de la forma $aacc$.

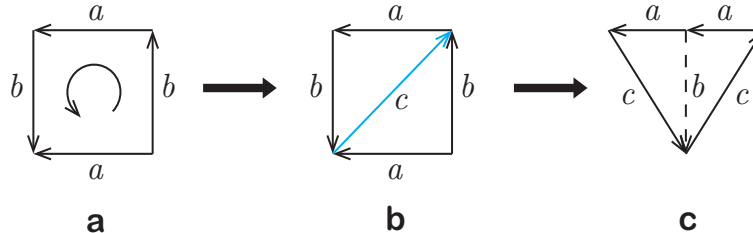


Figura 7.6.

Dado un complejo celular K , se puede asociar a K un espacio topológico K_T de la siguiente manera: Suponga primero que no hay ninguna cara A cuya frontera sea la secuencia vacía, luego para cada par A, A^{-1} , se escoge una cara, por ejemplo A , y se le asigna un disco circular cerrado. Si la frontera de A es $a_1 \dots a_m$, se divide la correspondiente frontera del disco en m arcos. Estos arcos, descritos conforme las manecillas del reloj respecto del disco, son nombrados $a_1 \dots a_m$ y los arcos opuestos, $a_1^{-1} \dots a_m^{-1}$. Siempre que, en el sistema completo, dos arcos tengan el mismo nombre, ellos serán mapeados entre sí de tal manera que las longitudes de los arcos sean proporcionales entre sí, y de manera que los puntos inicial y terminal correspondan. El espacio K_T es obtenido al identificar los arcos que tienen la misma etiqueta en los varios discos.

Sea K un complejo celular y K' el complejo que resulta al aplicar P_1 a K . Si A es una cara de K con frontera $B(A) = a_1 \dots a_n$, y $B(A)$ no contiene aristas de la forma b, b^{-1} , entonces $P_1(A) = A$, de donde es claro que A y $P(A)$ tienen asociado el mismo disco. Si $B(A)$ contiene aristas de la forma b, b^{-1} , a saber, $B(A) = a_1 \dots b \dots b^{-1} \dots a_n$, entonces $P_1(A) = A'$, con $B(A') = a_1 \dots ck \dots k^{-1}c^{-1} \dots a_n$. Si D, D' , son los discos asociados a A y A' respectivamente, entonces se observa que el arco ck es homeomorfo (proporcional) a b y $k^{-1}c^{-1}$ es homeomorfo (proporcional) a b^{-1} . Por tanto, se puede establecer una correspondencia entre los arcos de ambos discos D, D' , que ya de por sí son homeomorfos por ser bolas cerradas en \mathbb{R}^2 . De lo anterior, se sigue que K_T y K'_T son homeomorfos.

Similarmente, si K' es el complejo que resulta al aplicar P_2 a K , y A es una cara de K con $B(A) = a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n$, entonces $P_2(A) = A', A''$, con $B(A') = a_1 \dots a_p d$, y $B(A'') = d^{-1} a_{p+1} \dots a_n$. Sea D el disco asociado a A . Si D', D'' , son los discos asociados a A' , entonces el arco d en D' tiene la dirección horario mientras que el arco d^{-1} en D'' tiene sentido antihorario, por lo cual se debe rotar el disco D' de forma horaria para poder identificar dichos arcos y formar el espacio $D' \sqcup D''$, el cual es claramente un disco D''' con la secuencia de arcos $a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n$. Por tanto, se tiene K'_T y K_T son homeomorfos.

Con ayuda de los hechos anteriores, se puede probar que complejos celulares equivalentes son mapeados a espacios homeomorfos. Mas aún, como un disco cerrado es homeomorfo a cualquier 2-simplejo(triángulo), si K representa un complejo triangulado entonces K_T es homeomorfo a $|K|$.

Cuando K tiene una sola cara A con frontera vacía, como K es conexo, se sigue que A y A^{-1} son las únicas caras. Aplicando P_2 , K es equivalente al complejo celular con dos caras A', A'' , donde A' tiene frontera d y A'' tiene frontera d^{-1} . En este caso, K_T debe ser homeomorfo a una esfera.

A fin de mostrar que el espacio K_T asociado a un complejo celular K es una superficie, se probará que cada complejo celular K se puede refinar a un 2-complejo triangulado.

Proposición 7.13. *Todo complejo celular K puede ser refinado a un 2-complejo triangulado*

Demostración. El primer paso es dividir cada arista a en dos aristas b y c , con $b \neq c$, usando P_1 , introduciendo nuevos vértices frontera (b, c^{-1}). El efecto es que a y a^{-1} conducen a distintos vértices para cada (nueva) arista a ; luego, para cada frontera $B = a_1 \dots a_n$, se tiene $n \geq 2$, e intuitivamente se crea un "vértice central" $\gamma = (d_1, \dots, d_n)$, el cual se une a todos los vértices incluyendo aquellos recién creados (excepto γ). Esto se logra como sigue: Primero, usando P_2 , divida la frontera $B = a_1 \dots a_n$ en $a_1 d$ y $d^{-1} a_2 \dots a_n$, luego usando P_1 , divida d en $d_1 d_n^{-1}$, obteniendo fronteras $d_n^{-1} a_1 d_1$ y $d_1^{-1} a_2 \dots a_n d_n$. Aplicando P_2 a la frontera $d_1^{-1} a_2 \dots a_n d_n$, se obtienen las fronteras $d_1^{-1} a_2 d_2$, $d_2^{-1} a_3 d_3, \dots, d_{n-1} a_n d_n$, donde $\gamma = (d_1, \dots, d_n)$ es de hecho un vértice interior. Al final de este procedimiento, C2 y C3 se satisfacen, pero C1 quizás no. Finalmente, se divide cada nueva frontera triangular $a_1 a_2 a_3$ en cuatro subtriángulos al unir los puntos medios de sus tres lados. Esto se logra obteniendo $b_1 c_1 b_2 c_2 b_3 c_3$ al usar P_1 , y luego $c_1 b_2 d_3$, $c_2 b_3 d_1$, $c_3 b_1 d_2$, y $d_1^{-1} d_2^{-1} d_3^{-1}$, usando P_2 . El complejo celular resultante ahora también satisface C1. □

En la figura 7.7 se puede ver un ejemplo de los pasos descritos en la proposición 7.11 en el caso de un complejo celular con frontera $aba^{-1}b^{-1}$ el cual representa a un toro.

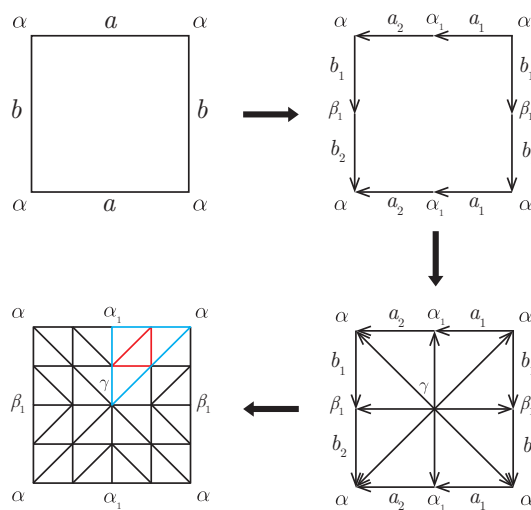


Figura 7.7.

A fin de definir los complejos en *forma normal*, se va a definir primero el concepto de *orientabilidad* para un complejo celular y luego se va a explicar el procedimiento para calcular su característica de Euler-Poincaré.

Definición 7.14. Dado un complejo celular $K = (F, E, B)$, una **orientación** de K es un conjunto de caras $\{A^\epsilon \mid A \in F\}$, donde cada cara A^ϵ es obtenida al escoger una de las dos caras orientadas A, A^{-1} , esto es, $A^\epsilon = A$ o $A^\epsilon = A^{-1}$. Una orientación es **coherente** si cada arista $a \in E \cup E^{-1}$ aparece como máximo una vez en el conjunto de fronteras de las caras en $\{A^\epsilon \mid A \in F\}$. En otras palabras, para cada arista a , si a ocurre dos veces en el conjunto de fronteras de caras en F , entonces a aparece en la frontera de una cara A_1 y en la frontera de una cara A_2^{-1} . Un complejo celular K es **orientable** si posee alguna orientación coherente. Un **contorno** de un complejo celular es una secuencia ordenada cíclicamente (a_1, \dots, a_n) de aristas tal que a_i y a_{i+1}^{-1} conducen al mismo vértice y los a_i pertenecen a una sola frontera.

Ejemplo 7.15. El complejo celular K con una sola cara cuya frontera está dada por $B(A) = aba^{-1}b^{-1}$ (el toro) es orientable.

Ejemplo 7.16. El complejo celular K con una sola cara A cuya frontera es $B(A) = aabb$ no es orientable. De manera similar, el complejo celular con dos caras A_1 y A_2 cuyas fronteras están dadas por $B(A_1) = abc$ y $B(A_2) = c^{-1}ba$ no es orientable porque las orientaciones para las cuales a y b aparecen solo una vez son $\{A_1, A_2^{-1}\}$ y $\{A_1^{-1}, A_2\}$, pero, para la primera orientación c aparece dos veces y para la segunda c^{-1} aparece dos veces.

Ejemplo 7.17. El complejo K de la figura 7.8, cuenta con dos caras A_1 y A_2 cuyas fronteras son $B(A_1) = abc$, $B(A_2) = bac$, es orientable ya que se puede tomar la orientación $\{A_1, A_2^{-1}\}$. De hecho, $B(A_2^{-1}) = c^{-1}a^{-1}b^{-1}$, y cada arista orientada aparece una vez en $\{A_1, A_2^{-1}\}$.

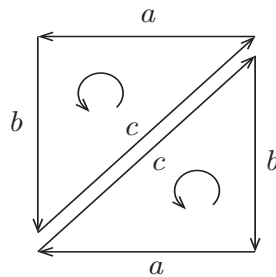


Figura 7.8.

Ejemplo 7.18. El complejo celular de la figura 7.4 posee tres caras A_1, A_2, A_3 con fronteras $B(A_1) = abc$, $B(A_2) = bed^{-1}$ y $B(A_3) = adf^{-1}$. Es orientable respecto a la orientación $\{A_1, A_2^{-1}, A_3^{-1}\}$. Por otro lado, el complejo celular K con caras A_1, A_2 , cuyas fronteras están dadas por $B(A_1) = abc$ y $B(A_2) = c^{-1}ba$, no es orientable porque las orientaciones para las cuales a, b , aparecen solo una vez son $\{A_1, A_2^{-1}\}$ y $\{A_1^{-1}, A_2\}$, pero para la primera orientación c aparece dos veces, y para la segunda orientación c^{-1} aparece dos veces.

Observación 7.19.

1. De los ejemplos anteriores se observa que para que una orientación de un complejo K sea coherente, para cada par de caras A_1 y A_2 que comparten una arista a , las caras A_1 y A_2 tienen que estar orientadas de tal manera que a aparezca en direcciones opuestas en las fronteras $B(A_1)$ y $B(A_2)$, y las fronteras "externas" de K no contengan ocurrencias de una misma arista (orientada en el mismo sentido)

2. Si $K = (F, E, B)$ es un complejo orientable entonces existe una orientación $\{A^\epsilon \mid A \in F\}$ tal que cada arista $a \in E \cup E^{-1}$ aparece como máximo una vez en el conjunto $\{B(A^\epsilon) \mid A \in F\}$. Considere el complejo K' obtenido al aplicar $P1$ a K . Se afirma que K' también es orientable. En efecto, observe primero que para cada cara $A \in \{A^\epsilon \mid A \in F\}$ que no contiene aristas de la forma b, b^{-1} , $b \in E \cup E^{-1}$, $B(A)$ no cambia, mientras que si $A \in \{A^\epsilon \mid A \in F\}$ contiene aristas de la forma b, b^{-1} , a saber, $B(A) = a_1 b a_2 \dots b^{-1} \dots a_n$, entonces estas se reemplazan por ck y $k^{-1}c^{-1}$ (c, k , aristas distintas de K' , con $c, k \notin E \cup E^{-1}$), lo cual da lugar a una cara A' de K' con $B(A') = a_1 c k a_2 \dots k^{-1} c^{-1} \dots a_n$. Note que como K es orientable, en particular, $B(A)$ no tiene dos ocurrencias de una misma arista con el mismo sentido, lo cual implica que $B(A')$ también cumple esta condición. En este punto, es claro que el conjunto C formado por la unión entre las caras de $\{A^\epsilon \mid A \in F\}$ que no fueron alteradas y las caras de la forma A' descritas previamente constituye una orientación para K' : Si a' es una arista común a K, K' , entonces es claro que a' aparece solo una vez en C ya que a' aparece como máximo una vez en $\{B(A^\epsilon) \mid A \in F\}$. Si a' es una arista en K' y no en K , entonces es claro por construcción que a' solo aparece como máximo una vez en el subconjunto de C formado por las fronteras $B(A')$, y por lo tanto aparece como máximo una vez en C .

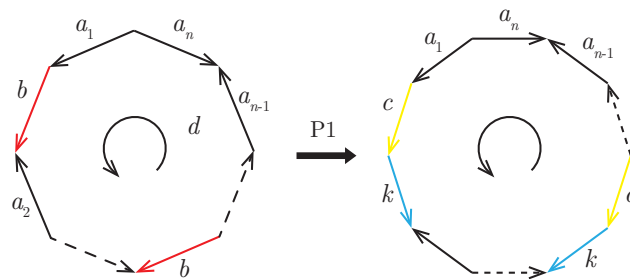


Figura 7.9.

3. Si K posee una orientación $\{A^\epsilon \mid A \in F\}$ coherente y K' es el complejo que resulta de aplicar $P2$ a K , entonces dada una cara A de K con $B(A) = a_1 \dots a_p a_{p+1} \dots a_n$, esta se divide en dos caras A', A'' , con fronteras $B(A') = a_1 \dots a_p d$, $B(A'') = d^{-1} a_{p+1} \dots a_n$, donde d es una arista en K' y no en K . Note que como K es orientable, en particular, $B(A)$ no posee dos ocurrencias de una misma arista con el mismo sentido, lo cual implica que las fronteras $B(A') = a_1 \dots a_p d$ y $B(A'') = d^{-1} a_{p+1} \dots a_n$, también cumplen esta condición. Al considerar esta situación para las demás caras de K se observa que el conjunto formado por las caras de la forma A', A'' , para cada cara $A \in \{A^\epsilon \mid A \in F\}$, constituye una orientación para K' .

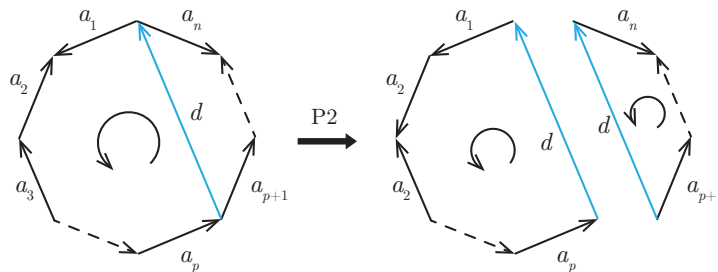


Figura 7.10.

4. De 1, 2 y 3 se sigue que complejos celulares equivalentes son orientables o no orientables.
5. Al contar los contornos, no se distingue entre (a_1, \dots, a_n) y $(a_n^{-1}, \dots, a_1^{-1})$. Note que $P1$ y $P2$ no alteran el número de contornos.

Dado un complejo celular $K = (F, E, B)$, se denota por n_0 el número de vértices, n_1 el número de aristas en E y n_2 el número de caras en F . La característica de Euler-Poincaré de K es $n_0 - n_1 + n_2$. Es fácil ver que $P1$ aumenta n_1 y n_0 en 1, dejando n_2 igual, mientras que $P2$ aumenta n_1 y n_2 en 1 y deja igual a n_0 . Así, complejos equivalentes poseen la misma característica de Euler-Poincaré. Si K consiste de un par A, A^{-1} con fronteras vacías, la aplicación de $P2$ produce fronteras d, d^{-1} , y por tanto un vértice (d, d^{-1}) . A fin de eliminar esta dificultad se asume que K posee el *vértice nulo* ϵ .

Definición 7.20. *Un complejo celular en forma normal, o complejo celular canónico, es un complejo celular $K = (F, E, B)$, donde $F = \{A\}$ y , o bien*

I. $E = \{a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_p\}$ y

$$B(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} c_1 h_1 c_1^{-1} \dots c_q h_q c_q^{-1}$$

donde $p \geq 0, q \geq 0$.

II. $E = \{a_1, \dots, a_p, c_1, \dots, c_q, h_1, \dots, h_q\}$ y

$$B(A) = a_1 a_1 \dots a_p a_p c_1 h_1 c_1^{-1} \dots c_q h_q c_q^{-1}$$

donde $p \geq 1, q \geq 0$.

Algunos ejemplos de formas normales correspondientes a superficies sin frontera se muestran en la figura 7.911 (a tipo I, b tipo II). En la figura 7.12 se muestran algunos ejemplos de formas normales para el caso de superficies con frontera.

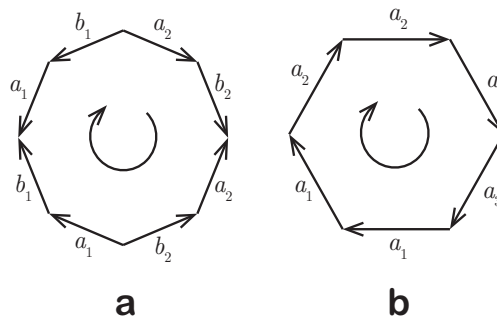


Figura 7.11.

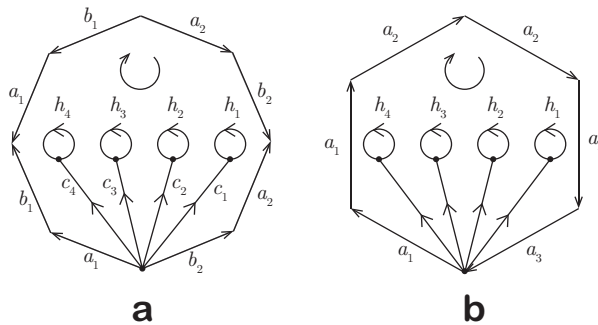


Figura 7.12.

Observe que los complejos canónicos del tipo I son orientables mientras que los complejos de tipo II no son orientables. Note que las secuencias $c_i h_i c_i^{-1}$ dan lugar a q vértices frontera, (h_i, c_i, h_i^{-1}) , por lo cual hay q contornos (h_i) , y en el caso I, el único vértice interior,

$$(a_1^{-1}, b_1, a_1, b_1^{-1}, \dots, a_p^{-1}, b_p, a_p, b_p^{-1}, c_1^{-1}, \dots, c_q^{-1})$$

y en el caso II, el único vértice interno

$$(a_1^{-1}, a_1, \dots, a_p^{-1}, a_p, c_1^{-1}, \dots, c_q^{-1})$$

Así, en el caso I hay $q + 1$ vértices, $2p$ aristas, y una cara, de modo que la característica de Euler-Poincaré es

$$\begin{aligned}\chi(K) &= 1 - 2p + 1 \\ &= 2 - 2p\end{aligned}$$

Para el caso II, hay $q + 1$ vértices, p aristas, y una cara, por tanto,

$$\begin{aligned}\chi(K) &= 1 - p + 1 \\ &= 2 - p\end{aligned}$$

Note que cuando $p = q = 0$, se obtiene $\chi(K) = 2$, lo cual es coherente con el hecho de que en este caso K posee un vértice nulo y una sola cara. Este es el caso para la esfera.

De lo anterior se sigue que complejos normales distintos K_1 y K_2 no pueden ser equivalentes ya que de lo contrario $(K_1)_T$ y $(K_2)_T$ serían homeomorfos, lo cual implicaría que K_1 y K_2 poseen el mismo tipo de orientabilidad y la misma característica de Euler-Poincaré.

Resta probar que cada complejo celular es equivalente a un complejo celular canónico, pero primero, es conveniente dar una idea más intuitiva con respecto a los complejos celulares:

Si un complejo celular canónico posee la frontera $B(A) = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$, se puede pensar la cara A como un cuadrado cuyas aristas opuestas están orientadas y etiquetadas de la misma manera, por lo que identificando los lados opuestos etiquetados por a_1 y después los lados opuestos etiquetados por b_1 se obtiene una superficie homeomorfa al toro.

Por otro lado, si se tiene una esfera y un toro, a los cuales se le quita un disco circular (conjuntos homeomorfos a bolas abiertas en \mathbb{R}^2), y posteriormente se los pega a través de las fronteras de los agujeros, se obtiene un espacio el cual luce como la esfera con un *asa*. Por esta razón, a la secuencia $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1}$ se le llama una *asa*. Un complejo celular canónico con frontera $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ se puede ver como el resultado de pegar p asas a la esfera.

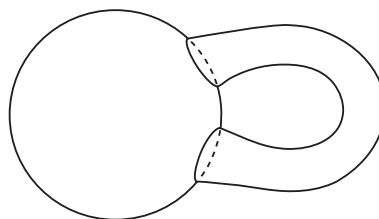


Figura 7.13. Esfera con una asa

Para un complejo celular canónico con frontera $B(A) = aa$, se puede pensar la cara A como un disco circular cuya frontera está dividida en dos semicírculos, ambos etiquetados a . La superficie correspondiente se obtiene al identificar puntos diametralmente opuestos en la frontera y así, es homeomorfo al plano proyectivo.

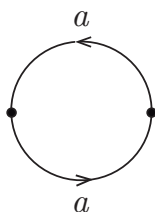


Figura 7.14.

Una secuencia de la forma aa se denomina una **cross-cap**^{7.3}. Generalmente, un complejo celular canónico con frontera $a_1a_1\dots a_p a_p$ se puede ver como el resultado de formar $p \geq 1$ cross-caps, empezando de un disco circular con $p - 1$ huecos circulares y llevando a cabo las identificaciones de las cross-caps en todas las p fronteras, incluyendo el disco original mismo.

Una secuencia de la forma $c_1h_1c_1^{-1}$ apareciendo en una frontera se puede interpretar como un agujero con frontera h_1 . Por ejemplo, si la frontera de un complejo canónico es $c_1h_1c_1^{-1}$, dividiendo la cara A en dos caras A' y A'' con fronteras $c_1h_1c_1^{-1}d$ y d^{-1} , se puede ver la cara A' como una disco con frontera d en el cual un disco circular pequeño ha sido removido. Escogiendo cualquier punto en la frontera d de A' , se puede unir este punto a la frontera h_1 del círculo pequeño por medio de una arista c_1 , obteniendo el lazo (camino cerrado o) $c_1h_1c_1^{-1}d$.

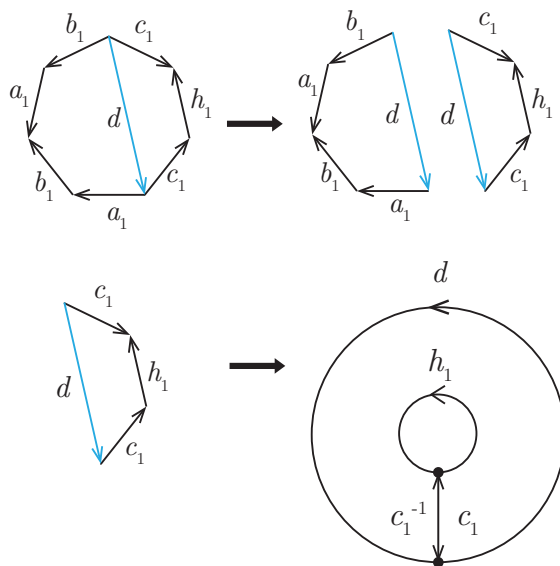


Figura 7.15.

^{7.3} Para una descripción más explícita de lo que es una cross-cap se sugiere visitar el link <https://www.youtube.com/watch?v=W-sKLN0VBkk>, en el cual se muestra la construcción de una cross-cap considerando auto intercepciones.

Se demostrará ahora un lema el cual es clave para probar el teorema fundamental de superficies compactas, pero antes, conviene notar lo siguiente:

- La operación inversa de $P1$, $(P1)^{-1}$, se aplica a una secuencia de aristas bc siempre que $b \neq c$ y (b, c^{-1}) es un vértice. El resultado es que dicho vértice frontera se elimina. La operación inversa de $P2$, $(P2)^{-1}$, aplicada a dos caras A_1 y A_2 tal que $A_1 \neq A_2$, $A_1 \neq A_2^{-1}$, y $B(A_1)$ contiene alguna arista d y $B(A_2)$ contiene alguna arista d^{-1} . El resultado es que d y d^{-1} son eliminadas
- Como un anticipo a la prueba, se desea mostrar como el complejo con frontera $abac$, el cual corresponde a una banda Möbius, es equivalente al complejo celular de tipo II con frontera $aachc^{-1}$. En efecto, usando $P2$, se divide abc en abd y $d^{-1}ac$. Como $abd = bda$ y la cara inversa de $d^{-1}ac$ es $c^{-1}a^{-1}d = a^{-1}dc^{-1}$, al aplicar $(P2)^{-1}$ se obtiene $bddc^{-1} = ddc^{-1}b$. Aplicando ahora $(P1)^{-1}$ se obtiene ddk , luego, dividiendo d en bc , se obtiene $bcbc = cbckb$. Aplicando $P2$, se obtiene cba y $a^{-1}ckb$. Como $cba = bac$ y la cara inversa de $a^{-1}ckb$ es $b^{-1}k^{-1}c^{-1}a = c^{-1}ab^{-1}k^{-1}$, al aplicar $(P2)^{-1}$ de nuevo, se obtiene $baab^{-1}k^{-1} = aab^{-1}k^{-1}b$, la cual es de la forma $aachc^{-1}$, con $c = b^{-1}$ y $h = k^{-1}$. Así, el complejo canónico con frontera $aachc^{-1}$ tiene a la banda de Möbius como su realización geométrica. Intuitivamente, esto corresponde a tener un plano proyectivo con un agujero.

Lema 7.21. *Todo complejo celular K es equivalente a algún complejo celular canónico*

Demostración. Se hará la demostración por pasos mediante los cuales se transformará el complejo K a un complejo celular canónico.

Paso 1. Eliminación de secuencias de la forma aa^{-1} en todas las fronteras.

Dada una frontera de la forma $aa^{-1}X$, donde X denota alguna secuencia de aristas (posiblemente vacía), se puede usar $P2$ para reemplazar $aa^{-1}X$ por las dos fronteras ad y $d^{-1}a^{-1}X$, donde d es una nueva arista; luego, usando $(P1)^{-1}$ se puede contraer ad a nueva arista c (y $d^{-1}a^{-1}$ a c^{-1}), en cuyo caso utilizando $(P2)^{-1}$ se elimina c , es decir, se elimina aa^{-1} .

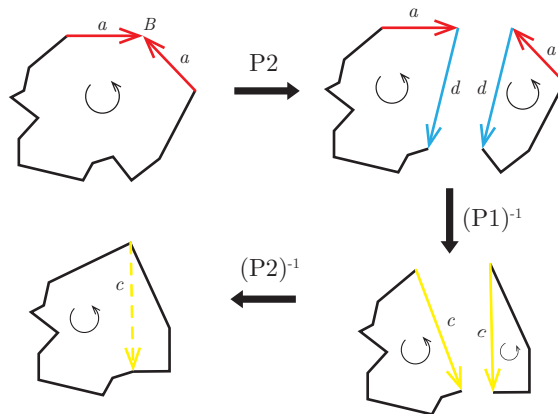


Figura 7.16. Eliminación de aa^{-1}

Paso 2. Reducción de vértices.

Si $p = 0$, $q = 0$, entonces solo hay un vértice nulo y no hay nada que hacer. De lo contrario, el propósito de este paso es obtener un complejo celular con un único vértice interior y donde los vértices frontera corresponden a lazos. Primero, se aplica el paso 1 hasta que todas las ocurrencias de la forma aa^{-1} hayan desaparecido.

Considere un vértice interior $\alpha = (b_1, \dots, b_m)$. Si b_i^{-1} también pertenece a α para todo i , $1 \leq i \leq m$, y existe otro vértice interior β , como todos los vértices están conectados, existe algún

vértice interior $\delta \neq \alpha$, directamente conectado a α , lo cual significa que algún b_i o b_i^{-1} pertenece a δ , pero, dado que los vértices forman una partición de $E \cup E^{-1}$, se sigue que $\alpha = \delta$, lo cual es una contradicción. Así, si $\alpha = (b_1, \dots, b_m)$ no es el único vértice interior, se puede asumir al reetiquetar que b_1^{-1} no pertenece a α . También, se debe tener $m \geq 2$, ya que de lo contrario habría una secuencia $b_1 b_1^{-1}$ en alguna frontera, lo cual contradice la eliminación de todas las ocurrencias de la forma aa^{-1} con el paso 1. Por tanto, existe una secuencia $b_1 b_2^{-1}$ en alguna frontera. Más aún, como α es un vértice interno, b_2 debe aparecer dos veces en el conjunto de fronteras, y así, dado que b_2^{-1} es un sucesor de b_1 , existen fronteras de la forma $b_1 b_2^{-1} X_1$ y $b_2 X_2$, luego usando *P2* se puede separar $b_1 b_2^{-1} X_1$ en $b_1 b_2^{-1} c$ y $c^{-1} X_1$, donde c es una nueva arista. Como b_2 es distinta de b_1, b_1^{-1}, c, c^{-1} , se puede eliminar b_2 por $(P2)^{-1}$ aplicado a $b_2 X_2 = X_2 b_2$ y $b_1 b_2^{-1} c = b_2^{-1} c b_1$, obteniendo $X_2 c b_1 = c b_1 X_2$. Esto tiene el efecto de encoger α . De hecho, la existencia de la frontera $c b_1 X_2$ implica que c y b^{-1} conducen al mismo vértice, y la existencia de la frontera $b_1 b_2^{-1} c$ implica que c^{-1} y b_2^{-1} conducen al mismo vértice. Por tanto, si b_2^{-1} no pertenece a α entonces no se añade nada a α y b_2 se descarta; si b_2^{-1} pertenece a α , c^{-1} se añade a α , pero ambos b_2 y b_2^{-1} se descartan.

Este proceso se puede repetir hasta que $\alpha = (b_1)$, en cuyo caso b_1 es eliminado usando el paso 1. Por tanto, es posible eliminar todos los vértices interiores excepto uno. En el caso de que no hubiera vértice interior, siempre se puede crear uno utilizando *P1* y *P2* como en la prueba de la proposición 7.13; así, se asumirá en lo sucesivo que hay un único vértice interior.

Se probará ahora que los vértices frontera pueden ser reducidos a la forma (h, c, h^{-1}) . En efecto, suponga que existe un único vértice interior α . Un vértice frontera es de la forma $\beta = (h, b_1, \dots, b_m, k)$, donde h, k son aristas frontera, y los b_i son aristas interiores. Se afirma que existe un vértice frontera $\beta = (h, b_1, \dots, b_m, k)$, donde algún b_i^{-1} pertenece a la vértice interior α . De hecho, como K es conexo, cada vértice frontera está conectado a α , y así, existe al menos un vértice frontera $\beta = (h, b_1, \dots, b_m, k)$ directamente conectado a α por alguna arista. Observe que h^{-1} y b_1^{-1} conducen al mismo vértice y, similarmente b_m^{-1} y k^{-1} conducen al mismo vértice. Por tanto, si ningún b_i^{-1} pertenece a α , entonces h^{-1} o k^{-1} pertenece a α , lo cual implicaría que b_1^{-1} o b_m^{-1} está en α . Así, dicha arista que conecta a α con β debe ser una de las b_i^{-1} ; luego, por medio del razonamiento usado en el caso de un vértice interior, se puede eliminar todos los b_j excepto b_i , y el vértice resultante es de la forma (h, b_i, k) . Si $h \neq k^{-1}$, también se puede eliminar b_i ya que h^{-1} no pertenece a (h, b_i, k) , y el vértice (h, k) puede ser eliminado usando $(P1)^{-1}$.

Se puede mostrar que reducir un vértice frontera a la forma (h, c, h^{-1}) no anula las reducciones ya efectuadas, de modo que al final del paso 2, se obtiene, o bien un complejo celular con un vértice interior nulo y vértices con bucles, o un vértice interior y vértices con bucles.

Lo anterior es cierto porque si existe un vértice (h, c, h^{-1}) , entonces debe haber una secuencia chc^{-1} en las fronteras. Tal secuencia, la cual se denomina un lazo, no se ve afectada por cualquier operación que no involucre a h o c . Como c, h y h^{-1} conducen al vértice que ya ha sido reducido, mientras que c^{-1} conduce a α_0 , se observa que h y c no están involucradas en cualquier otra reducción.

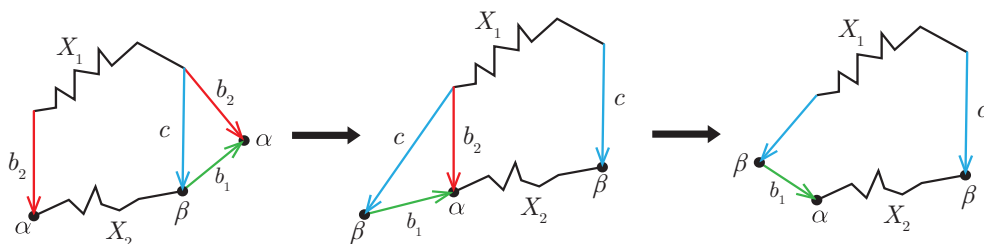


Figura 7.17. Reducción de vértices

Paso 3. Reducción a una única cara y introducción de cross-caps.

Es posible que después de haber ejecutado el paso 1 y el paso dos aún queden varias caras. Se afirma que si hay al menos dos caras entonces para cada cara A existe una cara B tal que $B \neq A$, $B \neq A^{-1}$, y existe una arista a tanto en la frontera de A como en la frontera de B . Si esto no fuera el caso, habría alguna cara A tal que para toda cara B con $B \neq A$ y $B \neq A^{-1}$, toda arista a en la frontera de B no pertenece a la frontera de A ; luego cada arista interior a apareciendo en la frontera de A debe tener ambas de sus ocurrencias en la frontera de A , y por supuesto, cada arista frontera en la frontera de A aparece solo una vez; pero luego, el complejo celular que consiste de solo la cara A y de las aristas que aparecen en su frontera formarían un subsistema propio de K , lo cual contradice el hecho de que K es conexo. Así, si hay al menos dos caras, del resultado anterior y usando $(P2)^{-1}$, se puede reducir el número de caras a solo una. Más aún, se verifica que ningún nuevo vértice es introducido y que los lazos no se ven afectados en dicho proceso.

Ahora, si alguna frontera contiene dos ocurrencias de la misma arista a , es decir, es de la forma $aXaY$, donde X, Y denotan secuencias de aristas con $X, Y \neq \epsilon$, se mostrará el procedimiento para que ambas ocurrencias sean adyacentes. Simbólicamente, se probará que la siguiente regla de reescritura es admisible:

$$aXaY \simeq bbY^{-1}X$$

o

$$aaXY \simeq bYbX^{-1}$$

De hecho, $aXaY$ se puede separar en aXb y $b^{-1}aY$, y como también se tiene la frontera,

$$\begin{aligned} (b^{-1}aY)^{-1} &= Y^{-1}a^{-1}b \\ &= a^{-1}bY^{-1} \end{aligned}$$

junto con $aXb = Xba$, se puede aplicar $(P2)^{-1}$ a Xba y $a^{-1}bY^{-1}$, obteniendo $XbbY^{-1} = bbY^{-1}X$, como se quería. Por tanto, se pueden introducir las cross-caps.

Usar la regla $aXaY \simeq bbY^{-1}X$ además no altera los lazos previos y cross-caps. Repitiendo el paso 3, se convierten fronteras de la forma $aXaY$ a fronteras con cross-caps.

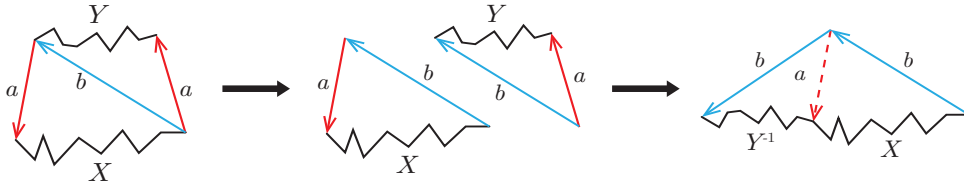


Figura 7.18. Obtención de una cross cap

Paso 4. Introducción de asas.

EL propósito de este paso es convertir fronteras de la forma $aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y$ a fronteras $cdc^{-1}d^{-1}YXVU$ conteniendo asas. Primero, se demostrará la regla de reescritura

$$aUVa^{-1}X \simeq bVUb^{-1}X$$

En efecto, se divide $aUVa^{-1}X$ en $aUc = Uca$ y $c^{-1}Va^{-1}X = a^{-1}Xc^{-1}V$, luego aplicando $(P2)^{-1}$ a Uca y $a^{-1}Xc^{-1}V$, se obtiene $UcXc^{-1}V = c^{-1}VUcX$. Haciendo $b = c^{-1}$ se sigue el resultado.

Aplicando esta regla a $aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y$, se obtiene

$$\begin{aligned} aUbVa^{-1}Xb^{-1}Y &\simeq a_1bVUa_1^{-1}Xb^{-1}Y \\ &\simeq a_1b_1a_1^{-1}XVUb_1^{-1}Y \\ &= a_1^{-1}XVUb_1^{-1}Ya_1b_1 \\ &\simeq a_2^{-1}b_1^{-1}YXVUa_2b_1 \\ &= a_2b_1a_2^{-1}b_1^{-1}YXVU \end{aligned}$$

La iteración de este paso preserva lazos preexistentes, cross-caps y asas.

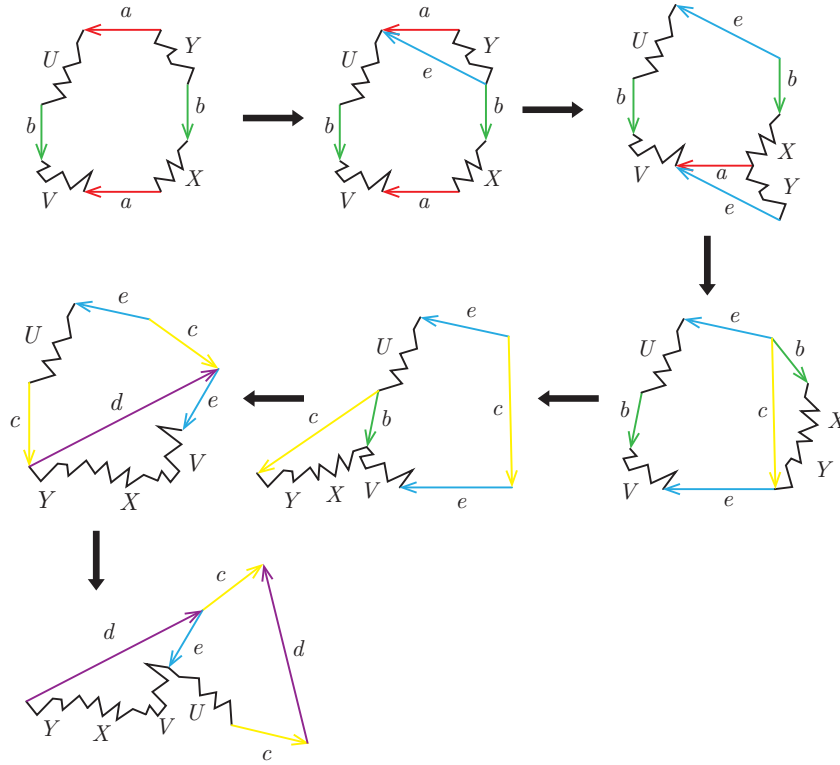


Figura 7.19. Introducción de una asa

Paso 5. Transformación de asas en cross-caps.

En este punto, uno de los obstáculos para llegar a la forma canónica es que quizás aún haya una mezcla de asas y cross-caps. Se mostrará ahora que un asa y una cross-cap es equivalente a tres cross-caps. Para esto, se aplica la regla $aaXY \simeq bYbX^{-1}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
 aaXbcb^{-1}c^{-1}Y &\simeq a_1b^{-1}c^{-1}Ya_1c^{-1}b^{-1} \\
 &= b^{-1}c^{-1}Ya_1c^{-1}b^{-1}X^{-1}a_1 \\
 &\simeq b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}Xc^{-1}Ya_1c^{-1} \\
 &= c^{-1}Ya_1c^{-1}b_1^{-1}b_1^{-1}a_1^{-1}X \\
 &\simeq c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1}a_1b_1b_1Ya_1 \\
 &= a_1b_1b_1Ya_1c_1^{-1}c_1^{-1}X^{-1} \\
 &\simeq a_2a_2Xc_1c_1b_1b_1Y
 \end{aligned}$$

En esta instancia, se afirma que todas las fronteras consisten de lazos, cross-caps, o asas. Para probar esto, se debe mostrar que no queda ningún par c, c^{-1} el cual no es parte de un lazo o de una asa. Si tal par existiese, se puede escribir la frontera de A en la forma $cXc^{-1}Y$, donde ninguna arista en X es igual o inversa a una arista en Y .

Se observa que el resultado de una reducción de vértices (paso 2) sigue siendo válida, ya que las reducciones posteriores no hicieron uso de $P1$ o su inversa. Como c y c^{-1} no son parte de una lazo, ambos deben conducir al vértice interior α_0 . Por otro lado, es claro de la hipótesis que ambos sucesores de c están en X , y que cada sucesor de una arista en X está, o bien en X , o bien identificada con c^{-1} . Se sigue que c^{-1} no está en el vértice determinado por c , lo cual es una contradicción.

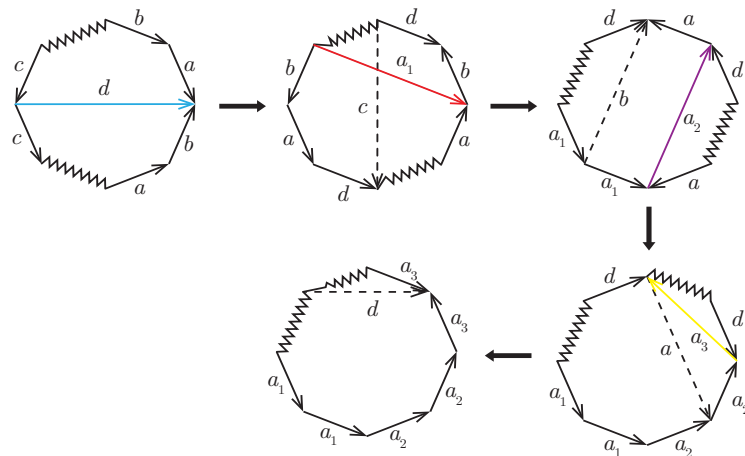


Figura 7.20. transformación de una asa en cross caps

Paso 6. Agrupamiento de lazos.

Finalmente, se tienen que agrupar los lazos juntos. Esto se puede hacer usando la regla

$$aUVa^{-1}X \simeq bVUb^{-1}X$$

De hecho, se puede escribir

$$\begin{aligned} chc^{-1}Xdkd^{-1}Y &\simeq c^{-1}Xdkd^{-1}Ych \\ &\simeq c_1^{-1}dkd^{-1}YXc_1h \\ &= c_1hc_1^{-1}dkd^{-1}YX \end{aligned}$$

lo cual indica que cualquier par de lazos pueden ser ubicados uno al lado otro sin alterar otras sucesiones.

Una vez completados todos estos pasos, se obtiene un complejo celular canónico como se quería. □

Ejemplo 7.22. Considere el complejo K de la figura

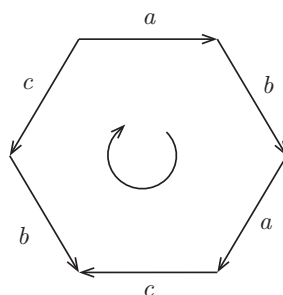


Figura 7.21.

Se desea determinar a cuál complejo canónico es equivalente K . En efecto, observe que K posee una sola cara A con frontera $B(A) = abacb^{-1}c^{-1}$. Más aún, observe que la frontera de K posee dos ocurrencias de la arista a , por tanto, haciendo uso de la equivalencia

$$zXzY \simeq wwY^{-1}X$$

con $z = a, X = b, Y = cb^{-1}c^{-1}$ se obtiene

$$ddcbc^{-1}b = bc^{-1}bddc$$

Aplicando nuevamente la misma equivalencia, esta vez con $z = b, X = c^{-1}, Y = ddc$, se obtiene

$$kkc^{-1}d^{-1}d^{-1}c^{-1} = c^{-1}d^{-1}d^{-1}c^{-1}kk$$

Aplicando una última vez la equivalencia mencionada con $z = c^{-1}, X = d^{-1}d^{-1}$ y $Y = kk$, se obtiene

$$l^{-1}l^{-1}k^{-1}k^{-1}d^{-1}d^{-1}$$

donde se reconoce esta última expresión como la correspondiente a un complejo celular canónico de tipo II.

Ejemplo 7.23. De manera similar, se desea determinar a que complejo canónico es equivalente el complejo K con una sola cara, cuya frontera es $B(A) = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$. En efecto, utilizando esta vez la equivalencia

$$zUVz^{-1}X \simeq wVUw^{-1}X$$

con $z = a, U = b, V = c, X = b^{-1}c^{-1}$, se obtiene

$$kcbk^{-1}b^{-1}c^{-1} = kcbk^{-1}(cb)^{-1}$$

Aplicando $(P1)^{-1}$ a esta última expresión respecto a las aristas cb y $(cb)^{-1}$, se obtiene

$$kllk^{-1}l^{-1}$$

lo cual indica que K es equivalente a un complejo canónico de tipo I.

7.3 Demostración del teorema de clasificación

Con la ayuda del lema 7.21, finalmente se puede probar el teorema de clasificación de superficies compactas trianguladas sin frontera.

Teorema 7.24. *Dos superficies compactas trianguladas son homeomorfas si y solo si tienen la misma característica de Euler-Poincaré y ambas son orientables o no orientables.*

Demostración. Si $M_1 = |K_1|$ y $M_2 = |K_2|$ son homeomorfas, se sabe que M_1 es orientable si y solo si M_2 es orientable. Además, se ha establecido que espacios homeomorfos poseen grupos de homología isomorfos y, por el teorema 6.51, ellos tienen la misma característica de Euler-Poincaré. Recíprocamente, por el lema 7.21, como cualquier complejo es equivalente a un complejo canónico, los 2-complejos triangulados K_1 y K_2 , vistos como complejos celulares, son equivalentes a complejos celulares canónicos K'_1 y K'_2 . Como la equivalencia preserva la orientabilidad y la característica de Euler, se sigue que K'_1 y K'_2 son idénticos, pero luego, $M_1 = |K_1|$ y $M_2 = |K_2|$, son ambos homeomorfos a $(K'_1)_T = (K'_2)_T$. \square

A fin de obtener la versión del teorema 7.23 para superficies compactas (no necesariamente trianguladas), se requiere que estas estén trianguladas. Como se mencionó en el capítulo 4, esto se puede lograr gracias al matemático Tibor Radó, lo cual hace posible la siguiente versión más general del teorema 7.23:

Teorema 7.25. *Dos superficies compactas son homeomorfas si y solo si tienen la misma característica de Euler-Poincaré y ambas son orientables o no orientables.*

7.4 Sumas conexas y el teorema de clasificación

Ya se ha observado que la identificación de las aristas en la frontera $aba^{-1}b^{-1}$ da lugar a un toro. También se ha observado que la identificación de las dos aristas en la frontera aa da lugar al plano proyectivo. El lema 7.21 implica que el complejo celular que consiste de una cara A y de la frontera $abab^{-1}$ es equivalente al complejo celular canónico $ccbb$, lo cual puede verse de la regla $aXaY \simeq bbY^{-1}X$. Además, note que la identificación de las aristas en la frontera $abab^{-1}$ genera la botella de Klein. Otra consecuencia del lema 7.21 es que el complejo celular con frontera $aabbcc$ es equivalente al complejo celular con frontera $aabcb^{-1}c^{-1}$. Así, intuitivamente parece que el espacio correspondiente es una simple combinación de un plano proyectivo y un toro, o tres planos proyectivos. Existe una operación entre superficies llamada la *suma conexa* la cual permite interpretar los complejos canónicos como combinaciones de superficies elementales, a saber, la esfera, el toro y el plano proyectivo.

Definición 7.26. Sea M una superficie sin frontera y $U \subseteq M$ un conjunto abierto homeomorfo a una bola abierta de \mathbb{R}^2 . Se dice que U es una **bola coordinada regular** si existe un conjunto abierto $U' \subseteq M$ y un homeomorfismo $f: U' \rightarrow B(x, \epsilon)$ tal que

1. $U \subseteq U'$
2. $f(U) = B(x, \epsilon')$, $f(\bar{U}) = B[x, \epsilon']$, para algún $\epsilon' > \epsilon > 0$

Observación 7.27. Si M es una superficie sin frontera y B_1, \dots, B_k , $k \geq 1$, es una colección de bolas coordinada regulares disjuntas dos a dos, entonces se puede probar que el subespacio

$$M' = M \setminus \left(\bigcup_{i=1}^k B_i \right)$$

es una **superficie con frontera**. Más aún, $\partial M' \simeq \bigsqcup_{i=1}^k \mathbb{S}^1$. En este caso se dice que $\partial M'$ es una superficie con k contornos (o k componentes frontera).

Definición 7.28. Sean M_1 y M_2 superficies sin frontera y $B_i \subseteq M_i$ bolas coordinadas regulares. Sea $M'_i = M_i \setminus B_i$, $i = 1, 2$, y $f: \partial M'_1 \rightarrow \partial M'_2$ un homeomorfismo. Al espacio adjunto $M'_1 \cup_f M'_2$ se le denomina **suma conexa de M_1 y M_2** y se denota por $M_1 \# M_2$.

Se puede demostrar que $M_1 \# M_2$ es una superficie sin frontera cuya topología no depende de las bolas B_i o del homeomorfismo f , es decir, $M_1 \# M_2$ está bien definida. Más aún, si M_1, M_2 son orientables entonces $M_1 \# M_2$ es orientable, y si M_1 no es orientable, o bien M_2 no es orientable, entonces $M_1 \# M_2$ no es orientable. Además, si M_1, M_2, M_3 , son compactas entonces se cumple que $M_1 \# M_2$ es compacta, $M_1 \# M_2 \cong M_2 \# M_1$ y $(M_1 \# M_2) \# M_3 \cong M_1 \# (M_2 \# M_3)$.

Intuitivamente, $M_1 \# M_2$ se forma al cortar un pequeño orificio circular en cada superficie y luego pegar las dos superficies a lo largo de las fronteras de estos orificios.

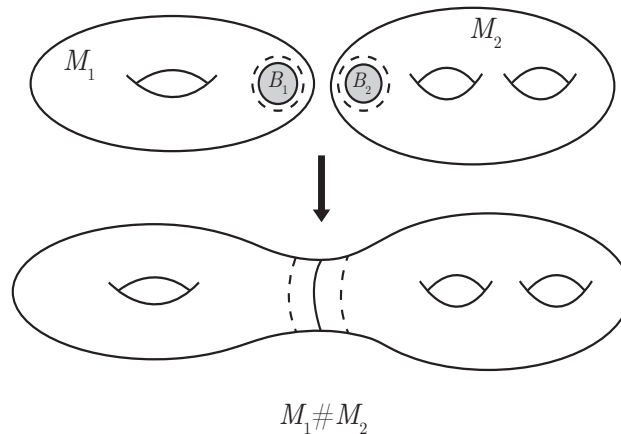


Figura 7.22. Suma conexa de dos superficies

En particular, cuando $M_2 = \mathbb{S}^2$, se observa que $M_1 \# \mathbb{S}^2$ es homeomorfo a M_1 . En efecto, sea $B_2 \subseteq \mathbb{S}^2$ el hemisferio inferior abierto, luego $(\mathbb{S}^2)' = \mathbb{S}^2 \setminus B_2$ es el hemisferio superior cerrado, el cual es homeomorfo a la bola cerrada $B[(0, 0), 1]$. Por tanto, si B_1 es una bola coordenada regular de M_1 , se obtiene que \bar{B}_1 es homeomorfo a una bola cerrada $B_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ la cual es homeomorfa a $B[(0, 0), 1]$. Así, $M_1 \# \mathbb{S}^2$ se obtiene al cortar la bola abierta B_1 de M_1 y pegar $B[(0, 0), 1]$ lo largo de la frontera de B_1 , es decir, M_1 no se ha modificado.

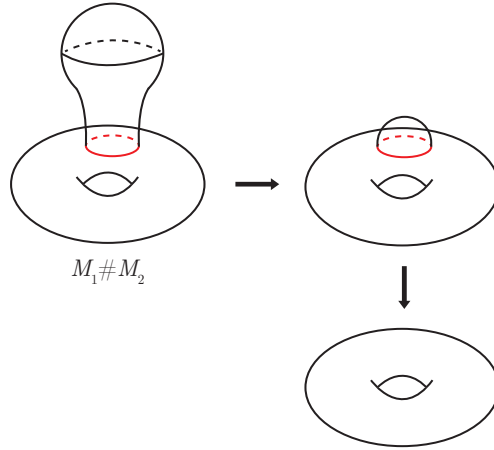


Figura 7.23. Suma conexa de un toro con al esfera

Por otra parte, si M_1, M_2 , admiten una triangulación, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \chi(M_1) &= n_0 - n_1 + n_2 \\ \chi(M_2) &= m_0 - m_1 + m_2 \end{aligned}$$

Si A_1, A_2 son triángulos en las triangulaciones de M_1 y M_2 respectivamente, cuyos interiores son removidos para realizar la suma conexa $M_1 \# M_2$, entonces la cantidad de vértices en el espacio cociente es $n_0 + m_0 - 3$, el número de aristas es $n_1 + m_1 - 3$, y un total de $n_2 + m_2 - 2$ caras. Por tanto,

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \# M_2) &= n_0 + m_0 - 3 - (n_1 + m_1 - 3) + (n_2 + m_2 - 2) \\ &= \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2 \end{aligned}$$

Usando este hecho e inducción, se pueden obtener los siguientes valores para la característica de Euler de diversas superficies compactas:

Superficie	Característica de Euler-Poincaré
Esfera	2
Suma conexa de p toros	$2 - 2p$
Suma conexa de p planos proyectivos	$2 - p$
Suma conexa plano proyectivo y p toros	$1 - 2p$
Suma conexa de la botella de Klein y p toros	$-2p$

Suponga ahora dos complejos celulares canónicos M_1 y M_2 con fronteras

$$\begin{aligned} B_1 &= a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_{p1} b_{p1} a_{p1}^{-1} b_{p1}^{-1} \\ B_2 &= c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_{p2} d_{p2} c_{p2}^{-1} d_{p2}^{-1} \end{aligned}$$

Cortando un pequeño agujero con frontera h_1 en M_1 equivale a formar la nueva frontera

$$B'_1 = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_{p1} b_{p1} a_{p1}^{-1} b_{p1}^{-1} h_1$$

y similarmente, cortando un pequeño agujero con frontera h_2 equivale a forma la nueva frontera

$$B'_2 = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_{p2} d_{p2} c_{p2}^{-1} d_{p2}^{-1} h_2^{-1}$$

Si se pegan M_1 y M_2 identificando h_1 y h_2 , se obtienen dos polígonos convexos pegados a lo largo de una sola arista, y aplicando $(P2)^{-1}$ se obtiene un polígono con frontera

$$B = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_{p1} b_{p1} a_{p1}^{-1} b_{p1}^{-1} c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \dots c_{p2} d_{p2} c_{p2}^{-1} d_{p2}^{-1}$$

Un razonamiento similar aplica para el caso de complejos celulares de tipo II. La figura 7.20 ilustra el procedimiento anterior para la suma conexas de dos toros:

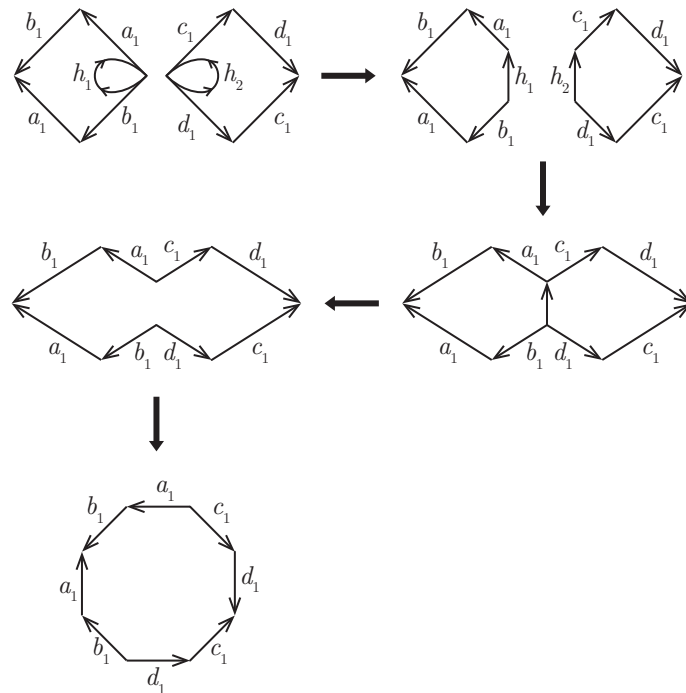


Figura 7.24. Suma conexas de toros

Como resultado, la realización geométrica de un complejo celular de tipo I es, o bien una esfera, o una suma conexas de $p \geq 1$ toros, y la realización geométrica de un complejo celular de tipo II es la suma conexas de $p \geq 1$ planos proyectivos. Más aún, la equivalencia de los complejos celulares que consisten de una sola cara A , y fronteras $abab^{-1}$ y $aabb$, muestra que la suma conexas de dos planos proyectivos es homeomorfa a la botella de Klein:

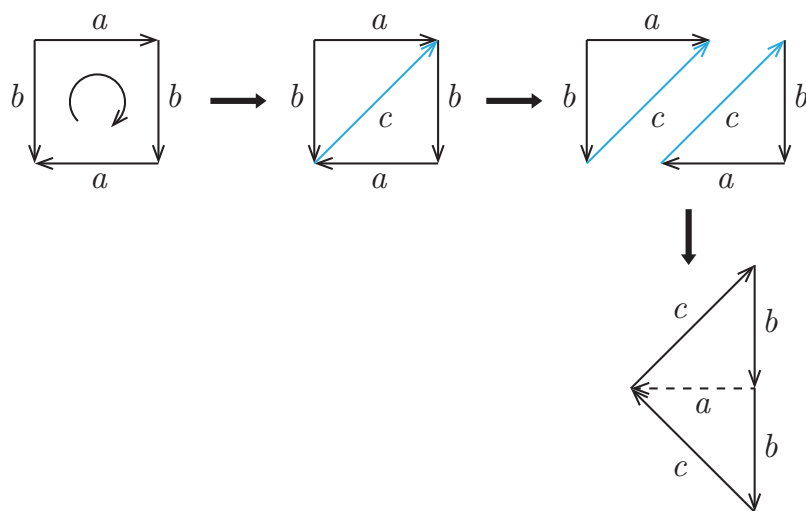


Figura 7.25. Equivalencia $abab^{-1}$ y $aabb$

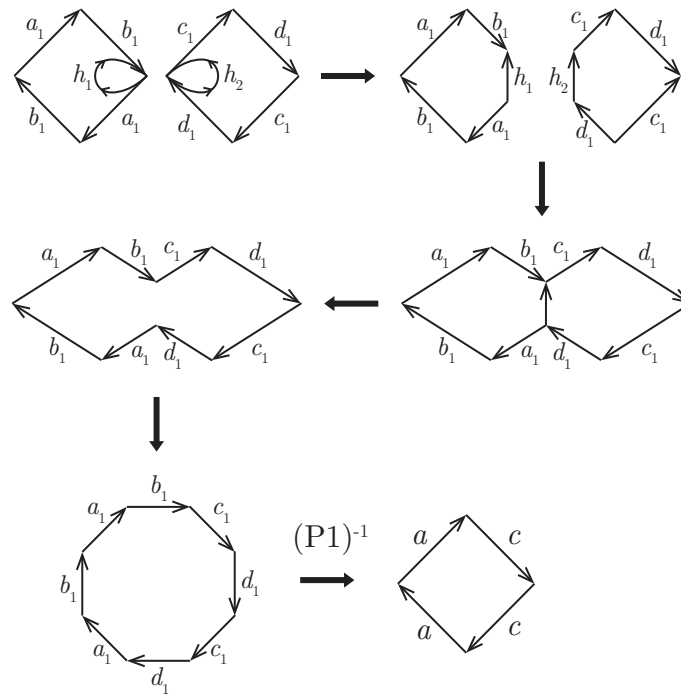


Figura 7.26. suma conexa de dos planos proyectivos (botella de Klein)

Además, la equivalencia de los complejos celulares con fronteras $aabc b^{-1} c^{-1}$ y $aabbcc$ indica que la suma conexa de un plano proyectivo y un toro es equivalente a la suma conexa de tres planos proyectivos:

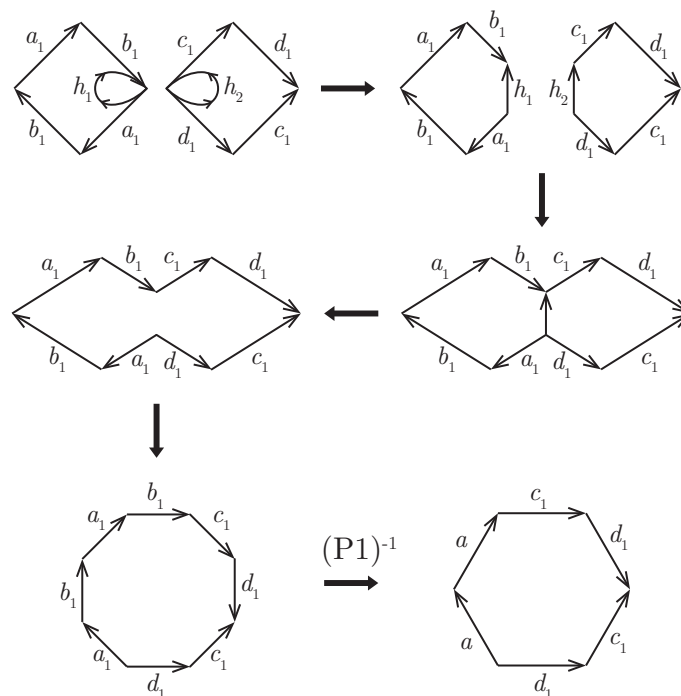


Figura 7.27. Suma conexa plano proyectivo y toro

Así, se obtiene la siguiente versión del teorema de clasificación para superficies compactas sin frontera:

Teorema 7.29. *Toda superficie compacta y orientable es homeomorfa, o bien a la esfera, o una suma conexa de una o más copias del toro \mathbb{T}^2 . Toda superficie compacta y no orientable es homeomorfa a una suma conexa de uno o más copias del plano proyectivo $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$.*

Conclusiones

- La topología algebraica es una herramienta fundamental no solo para la comprensión de las propiedades de los objetos geométricos, sino también para obtener pruebas rigurosas de enunciados que se establecen en términos topológicos generales.
- Los grupos de homología permite probar que la característica de Euler-Poincaré, χ , es un invariante topológico.
- La estructura del grupo fundamental de $\mathbb{R}^2/\{(0,0)\}$ da lugar al concepto de orientabilidad de una superficie.
- Toda superficie compacta M admite una triangulación finita. Si M_1, M_2 , son superficies compactas entonces $M_1\#M_2$ es compacta y es única, salvo homeomorfismos. Más aún, si M_1, M_2 , son orientables entonces $M_1\#M_2$ también lo es. Si M_1 ó M_2 no es orientable, entonces $M_1\#M_2$ no es orientable.
- Toda superficie M compacta y orientable es homeomorfa, o bien a la esfera, o bien a la suma conexa de $p \geq 1$ toros. En otras palabras, M es homeomorfa al espacio cociente de un polígono cuyas aristas están identificadas de acuerdo a uno y solo uno de los siguientes símbolos

$$\begin{array}{ll}
 a a^{-1} & \text{esfera} \\
 a_1 b_1 a^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} & \text{Suma conexa de } p \text{ toros,} \\
 & p \geq 1
 \end{array}$$

En el primero caso, $\chi(M) = 2$, y en el segundo $\chi(M) = 2 - 2p$.

- Toda superficie M compacta y no orientable es homeomorfa a una suma conexa de $p \geq 1$ planos proyectivos. En este caso, M es homeomorfa al espacio cociente de un polígono cuyas aristas están identificadas de acuerdo al siguiente símbolo

$$a_1 a_1 \dots a_p a_p$$

y $\chi(M) = 2 - p$.

Bibliografía

- [1] Singh, T.B. (2013). *Elements of topology*. CRC press.
- [2] Lee M.J. (2010). *Introduction to topological manifolds*. Springer.
- [3] Ahlfors, L. V., Sario, L.(1960). *Riemann surfaces*. Princeton University Press.
- [4] Massey, W. S. (1991). *Algebraic topology: an introduction*. Springer.
- [5] Rotman, J.J. (1988). *An introduction to algebraic topology*. Springer.
- [6] Gallier, J., Xu, D. (2013). *A guide to the classification theorem for compact surfaces*. Springer.
- [7] Thomassen, C. (1992). The Jordan-Schonflies Theorem and the classification of surfaces. *Am. Math. Monthly*, 99(2), 116-131.
- [8] Brahana, H.R. (1921). Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *Ann. Math*, 23(2),144-168.
- [9] Leys, J. (15 de noviembre del 2015). *From an octagon to a genus 2 surface -Mathlapse*. [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=G1yfpShgqw>.
- [10] Leys, J. (18 de noviembre del 2015). *The Klein bottle*. [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=yaeyNjUPVqs>.
- [11] Leys, J. (17 de febrero del 2016). *The cross-cap*. [Archivo de Video]. Youtube. <https://www.youtube.com/watch?v=W-sKLN0VBkk>.