Un paseo fascinante por la tabla de multiplicar

Orlando Monsalve Posada **

Resumen

Amables lectores, la intención de este artículo consiste en presentar las insospechadas sorpresas que nos depara una lectura y un uso diferentes de las tan temidas tablas de multiplicar que tantas mortificaciones nos causaron en nuestras mocedades escolares.

De otro lado, como lo enfatizamos en el artículo anterior, se trata de evidenciar las hermosas relaciones matemáticas que se pueden establecer entre materias tan aparentemen-

* Ponencia presentada al Primer Congreso nacional de Estudiantes de Matemáticas y Física. Medellín: Agosto lo. al 5 de 1994

** Profesor de la Facultad de Educación. Universidad de Antioquia. Últimamente se ha destacado por el esfuerzo para llegar a constituir una didáctica de las matemáticas

te disímiles como la Aritmética, la Geometría, el Algebra y algunos tópicos del Cálculo Diferencial.

Asimismo, presentaremos, a guisa de ejemplo, seis casos de factorizaciones (de los 10 o más que aparecen en los libios clásicos del Algebra de Bachillerato); tres en dos dimensiones y tres casos en tercera dimensión:

$(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a^2 - b^2)$; $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $(a^3 - b^3)$

Como corolario de lo acá presentado, creo que debemos revisar la enseñanza memorísüca y aislada de las tablas de multiplicar, en esta forma es muy difícil hacer ver las elegantes relaciones matemáticas que uno puede detectar en una tabla de multiplicar de doble entrada.

Summary

The aim of this article is to try to present the unexpected surprises which one can find in a different reading and diverse uses of the menacing multiplication tablcs that cause us many troubles in our froliesome scholar times.

On the other hand, as was stated in the previous issuc, we endeavour to make evident the nice mathemalical relationships that may be established among subjeets apparently dissimilar such as Arithmetic, Gcometry, Algebra, and some topics of the Differential Calculus.

In like manner, we will include in this paper, six factoring examples (from the ten or more that appear in elassie algebraic books), three cases in two dimensions, to wit:

$(a + b)^2$;$(a-b)^2$,(a^2-b^2);

and three in the fhird dimensión: $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $(a^3 - b^3)$

As a corollary, we believe that we should revise the memoristic and isolated teaching of the multiplication table; because in this way it is very difficult to detect the handsome mathematical relationships that are present in a double entry multiplication table.

Exposé

Mes chéres lecteurs: l'intent on de cet article est presenter les insupconnés surprises que nous donne une lecture et une utilisation trop different des tableaux de multiplier qui ont causee tant des préocupations aux étudiants.

Comme on a relevé dans le chapitre anterieur, il faut mettre en évidence les belles rélations matématiques qu'on peut établir entre des matiéres si differentes comme l'aritmétique, la géometrie, l'algébre et quelques topiques du calcul Diferenciel.

Comme exemple on présente six cases du factorisation (du 10 qu'on) ou plus qu'on trouve aux livres du bacalauréat); trois en deux dimensions et trois cases en troisiéme dimensión.

$(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a^2 - b^2)$; $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $(a^3 - b^3)$

Ye crois que nous devons réviser l'enseignemcnt memoristique et isoléc du tableaux de multiplier; dans cetle facón c'est tres dificile faire voir les élcgants rélations matématiques qu'on peut détecter dans une tableau de multiplier de double entrée.

La tabla de multiplicar de doble entrada es una cajita china llena de pequeñas sorpresas pedagógicas; los invitamos a visitar algunas de sus fantásticas maravillas.

En esta oportunidad complementaremos, más en detalle, algunos de los aspectos mencionados en el artículo anterior; asimismo, incluiremos otros aprendizajes igualmente bonitos a partir de la mencionada tabla.

Lo anterior nos ha permitido detectar algunas de las interrclaciones que se establecen entre la Aritmética, la Geometría, el Algebra, y el Cálculo diferencial, por ejemplo.

Para comprender las estructuras de las Matemáticas, nos dicen Lauren B. Resnick y Wendy W. Ford en su interesante libro *La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Sicológicos.* (1990) "Hay que comprender en consecuencia tanto las interrelaciones entre los conceptos y las operaciones como las reglas por las que se pueden manipular y reorganizar para descubrir nuevos patrones y propiedades. La mayor parte de los adultos, y hasta hace pocos años, la mayor parte de los escolares, no han visto casi nunca estos aspectos estructurales de las Matemáticas (excepto quizás, en la Geometría), porque la enseñanza de la escuela sólo ha presentado elementos aislados, y rara vez los ha relacionado con la estructura global en evolución de las Matemáticas."

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

A continuación nos centraremos metodológicamente en el numeral 5 del artículo anterior titulado Una tabla de multiplicar dinámica.

Aprendizajes geométricos

Si observamos la tabla, podemos recortar de ella 55 rectángulos diferentes, distribuidos así:

Diez rectángulos cuadrados con las siguientes dimensiones:

Un cuadrado de 1 x 1

Un cuadrado de 2 x 2

Un cuadrado de 3 x 3

Un cuadrado de 4 x 4

Un cuadrado de 5 x 5

Un cuadrado de 6 x 6

Un cuadrado de 7 x 7

Un cuadrado de 8 x 8

Un cuadrado de 9 x 9

Un cuadrado de 10 x 10

Nueve rectángulos de las siguientes medidas:

Uno de 1 x 2
Uno de 1 x 3
Uno de 1 x 4
Uno de 1 x 5
Uno de 1 x 6
Uno de 1 x 7
Uno de 1 x 8
Uno de 1 x 9
Uno de 1 x 10

Ocho rectángulos así:

Uno de 2 x 3
Uno de 2 x 4
Uno de 2 x 5
Uno de 2 x 6
Uno de 2 x 7
Uno de 2 x 8
Uno de 2 x 9
Uno de 2 x 10

Siete rectángulos de:

3 x 4
3 x 5
3 x 6

3 x 7

3 x 8

3 x 9

3 x 10

Seis rectángulos de:

4x5

4x6

4x7

4x8

4x9

4x 10

Cinco rectángulos de:

5 x 6

5 x 7

5 x 8

5 x 9

5 x 10

Cuatro rectángulos de:

6 x 7

6 x 8

6 x 9

6 x 10

Tres rectángulos de:

7 x 8

7 x 9

7 x 10

Dos rectángulos de:

8 x 9

8 x 10

Un rectángulo de:

9 x 10

En conclusión, tenemos todas las tablas de multiplicar, pero con una ventaja adicional: las tenemos en su versión geométrica.

Dicho de otra manera: cuando multiplicamos dos números naturales distintos, entre sí, automáticamente hemos engendrado un rectángulo y además hemos calculado también su área.

Si la multiplicación se hace con números naturales iguales, engendramos un cuadrado; y podemos calcular también, su área.

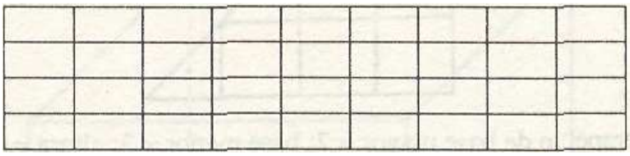
Para lo que viene a continuación, sugerimos a los lectores tener recortados todos los rectángulos (con excepción de los cuadrados) en forma doble; es decir un total de noventa (90) rectángulos.

Como la tabla está montada sobre la operación del conteo, tomemos uno cualquiera de los 45 rectángulos mencionados arriba, por ejemplo el de 6 x 6. En él podemos comprobar que a 36 se llega mediante diferentes operaciones de conteo: de 1 en 1 (36 veces); de 2 en 2 (18 veces); de 3 en 3 (12 veces); de 4 en 4 (9 veces) y de 6 en 6 (6 veces).

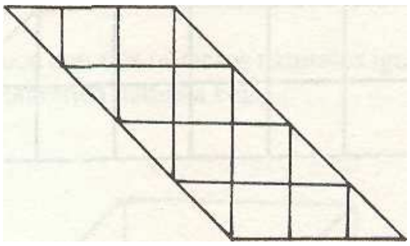
El perímetro como operación de conteo sería sumamente fácil en figuras geométricas como el cuadrado, el rectángulo, el paralelogramo.

Es importante que para facilitar el cálculo del área mediante una operación de conteo no, al menos inicialmentc, como aplicación directa de la fórmula respectiva, diseñemos las figuras geométricas en la fórmula más precisa posible; veamos:

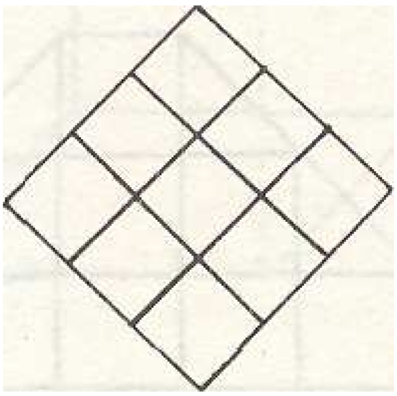
El área del siguiente rectángulo — 9 x 4 — (figura que tiene cuatro ángulos rectos), se calcula simplemente contando el número de cuadritos que tenga; pero como vimos, la fórmula aritmética ya la sabemos de antemano (multiplicación de dos números naturales diferentes o b x h).



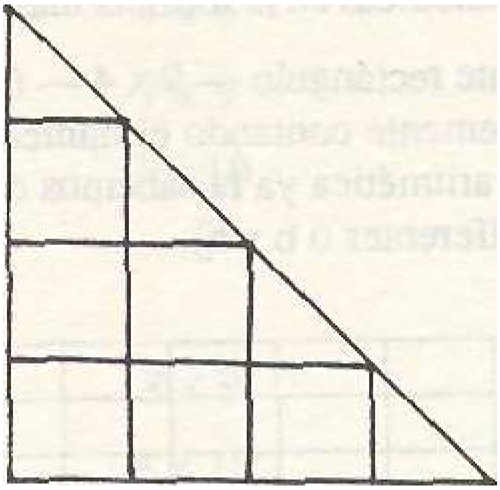
Área del paralelogramo de 3 x 4 (b x h):



Área del rombo $\frac{(Dxd)}{2}$

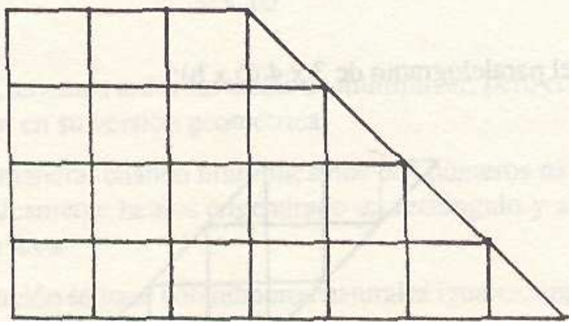


Área del triángulo de 4 x 4 $\frac{(b \times h)}{2}$



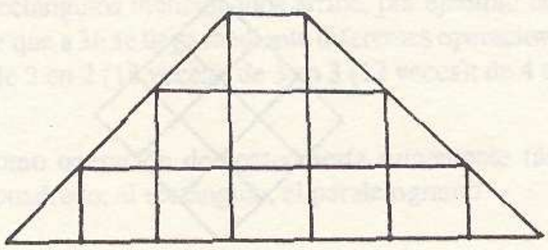
Área del trapecio de base mayor = 7; base menor = 3; altura = 4

$$\frac{(B + b)h}{2}$$



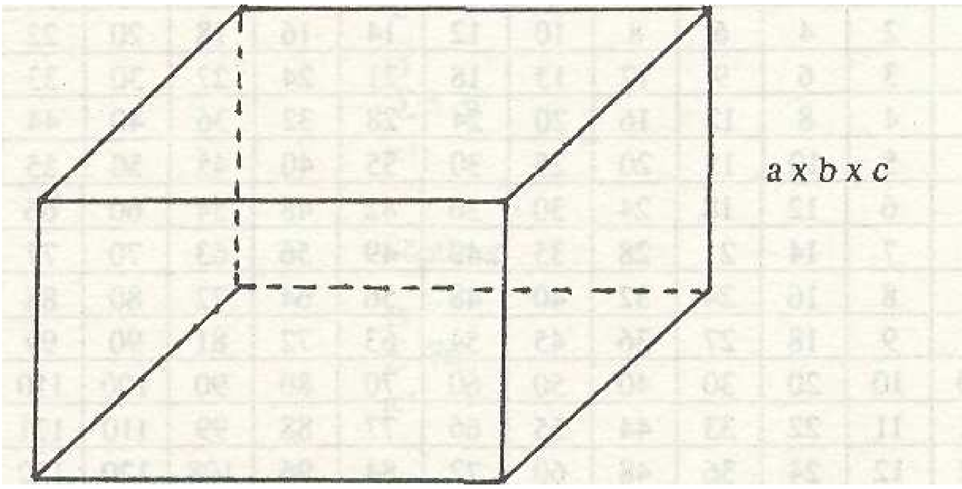
Área del trapecio isósceles de base mayor = 7; base menor = 1;

$$\frac{(B + b)h}{2}$$

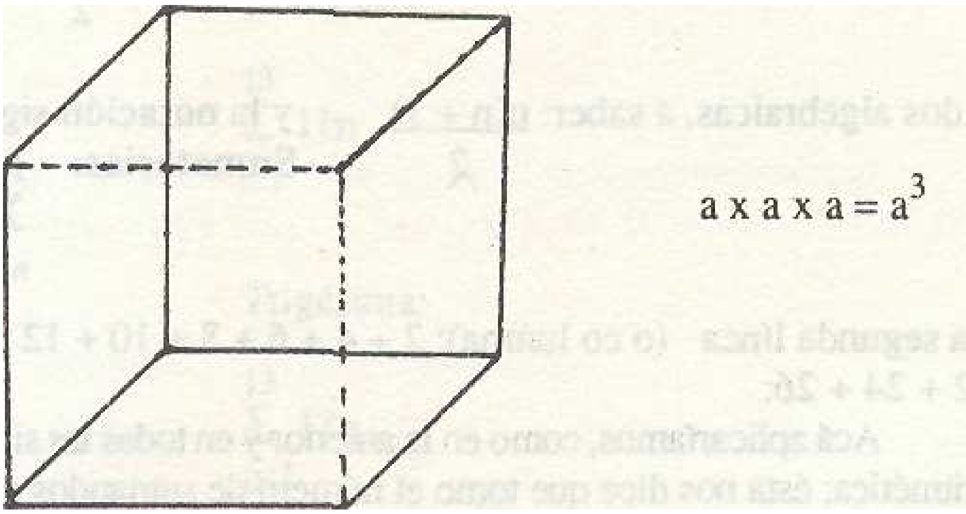


Más adelante volveremos sobre las derivaciones geométricas de la tabla de multiplicar.

Cuando la multiplicación se da entre números naturales diferentes, por ejemplo 3 x 4 x 5 , entramos de antemano y sin dolor al mundo de la tercera dimensión (largo, ancho, alto), al mundo de los sólidos o más en general al mundo de los volúmenes.



Si la multiplicación se hace con tres números naturales iguales (3 x 3 x 3) lo que se genera es la figura geométrica llamada cubo.



Aprendizajes algebraicos

Las sumas rápidas que se pueden ejecutar, de cualquiera de las columnas o líneas, —por tener razones constantes— pueden ser las siguientes:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169

Cuánto suman los números de la primera línea, (o columna, pues tienen el mismo número de sumandos) es decir, los números: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13.
Acá se aplicaría la primera fórmula aritmética: $\frac{13\,(13 + 1)}{2}$

y dos algebraicas, a saber: $\frac{n(n + 1)}{2}$ y la **notación sigma** para las respectivas **Sumatorias:** $\sum_{n=1}^{13} 91n$

La segunda línea (o co lumna): 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 22 + 24 + 26.

Acá aplicaríamos, como en la anterior y en todas las siguientes, la misma fórmula aritmética; ésta nos dice que tomo el número de sumandos de la progresión aritmética, los multiplico por lo que dé la suma del primer y último términos y el resultado lo divido por dos.

2a. línea:

$$\sum_{n:1}^{13} 2n$$

Tercera línea:

$$\sum_{n:1}^{13} 3n$$

Cuarta línea:

$$\sum_{n:1}^{13} 4n$$

Quinta línea:

$$\sum_{n:1}^{13} 5\ n$$

Sexta:

$$\sum_{n:1}^{13} 6n$$

Séptima:

$$\sum_{n:1}^{13} 7n$$

Octava:

$$\sum_{n:1}^{13} 8n$$

Novena:

$$\sum_{n:1}^{13} 9n$$

Décima:

$$\sum_{n:1}^{13} 10n$$

Undécima:

$$\sum_{n:1}^{13} 11n$$

Duodécima:

$$\sum_{n:1}^{13} 12n$$

Trigésima:

$$\sum_{n:1}^{13} 13n$$

Otra suma significativa que se puede ilustrar es la de los impares: 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13. Su representación gráfica es:

	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
1	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
2	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
3	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
4	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
5	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
6	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
7	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
8	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
9	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
10	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

La sumatoria sería:

$$\sum_{n:0}^{10} 2n+1$$

Igualmente los resultados de las sumatorias de cada una de las líneas: 91 + 182 + 273 + 364 + 455 + 546 + 637 + 728 + 819 + 910 + 1.001 + 1.092 + 1.183.

$$\sum_{n:1}^{13} 91n$$

Como se puede observar, éstas son sumas semillas de lo que el estudiante encontrará más adelante en Algebra como Sumatonas.

A esta clase de sumas las denominamos sumas significativas, ya que no sólo sirven para comprobar si nuestros estudiantes de Primaria dominan el algoritmo de la suma sino también como proceso mental que más adelante les será de alguna utilidad para otras facetas de las Matemáticas, como las Sumatorias mencionadas anteriormente.

Ahora pasemos revista a las implicaciones algebraicas de la misma.

Observemos su diagonal

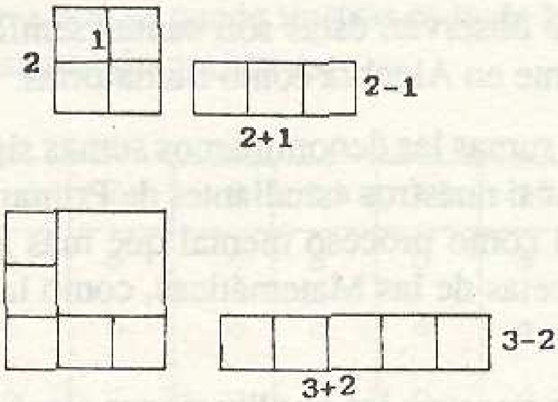
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2		4								
3			9							
4				16						
5					25					
6						36				
7							49			
8								64		
9									81	
10										100

De 2^2 restamos 1^2 obtenemos 3; 3 es la suma de sus raíces.

De 3^2 restamos 2^2 nos da 5; otra vez, 5 es la suma de las respectivas raíces

De 4^2 restamos $3^2 = 7$; 7 es la suma de las raíces.

Geométricamente



Así sucesivamente.

Así sucesivamente.

¿Para qué nos sirve este aspecto de la tabla?

Primero que todo, para aligerar de trabajo nuestra memoria semántica o memoria a largo plazo como la llaman otros, segundo, porque como ya lo hemos demostrado reiteradamente, acá están las semillas para la resolución de algunos problemas algebraicos pertinentes; tercero, para la resolución rápida de problemas como los siguientes:

Resolvamos por ejemplo, los ejercicios que aparecen en las páginas 141 y 248 respectivamente del conocido libro de *Algebra* de Aurelio Baldor.

La diferencia de los cuadrados de dos números enteros consecutivos es 31. Hallarlos números, (página 141.)

Primer número: a

Segundo número $(a + 1)$

Cuadrado del primero a^2

Cuadrado del segundo $(a + 1)^2$

Diferencia de sus cuadrados:

$(a + 1)^2 - (a)^2 = 31.$

$a^2 + 2a + 1 - a^2 = 31.$

$\boxed{2a + 1 = 31.}$

$2a = 31 - 1$

$2a = 30$

$a = 15.$

La fórmula del recuadro es la regla de formación de números enteros impares; completa sería:

$$\boxed{\begin{array}{l} 2a + 1 \\ 2a - 1 \end{array}}$$

Que leída o interpretada de otra manera nos dice lo siguiente:

Al número que me den en el enunciado lingüístico del problema le sumo 1 y el resultado lo divido por 2 y así obtengo el número mayor; o le resto 1 y divido por 2; así obtengo el número menor.

La diferencia de los cuadrados de dos números pares consecutivos es 324. Hallar los números, (página 248).

Primer número: a

Segundo número: $(a + 2)$

Cuadrado del primero a^2

Cuadrado del segundo $(a + 2)^2$

Diferencia de los cuadrados: $(a + 2)^2 - a^2$

$(a + 2)^2 - a^2 = 324.$

$a^2 + 4a + 4 - a^2 = 324.$

$\boxed{4a + 4 = 324}$

$4a = 320$

$a = 320/4 = 80.$

La fórmula del recuadro es la regla de formación de números pares enteros consecutivos; completa sería

$$\boxed{\begin{array}{l} 4a + 4 \\ 4a - 4 \end{array}}$$

La cual me dice que al número que me den en el enunciado lingüístico del problema, le sumo 4 y lo divido por 4 y obtengo así el número mayor, si le resto 4 y divido por 4; obtengo el menor.

Volvamos a la diagonal nuevamente y anotemos, después de observar detenidamente, a qué es igual la suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos.

Procedamos algebraicamente:

Primer número: a

Segundo número: $(a + 1)$

Cuadrado del primero a^2

Cuadrado del segundo: $(a + 1)^2$

Suma de cuadrados: $a^2 + 2a + 1 + a^2$

$$\boxed{2a^2 + 2a + 1}$$

Esta fórmula también es otra regla de formación de números enteros impares.

Supongamos que esa fórmula del recuadro sea igual a 113 y resolvámosla.

$$2a^2 + 2a + 1 = 113$$
$$2a^2 + 2a = 113 - 1$$
$$2a^2 + 2a = 112$$
$$a^2 + a = 112/2$$
$$a^2 + a = 56$$
$$a^2 + a - 56 = 0$$

Esta última forma nos dice que el término independiente debe ser el producto de dos números enteros consecutivos.

La cual nos dice que hay una íntima conexión entre las sumas de los cuadrados de dos números consecutivos y el producto de sus respectivas raíces.

Ahora utilicemos algunos de los anteriores cuadrados y rectángulos para las demostraciones de algunos casos de factorización.

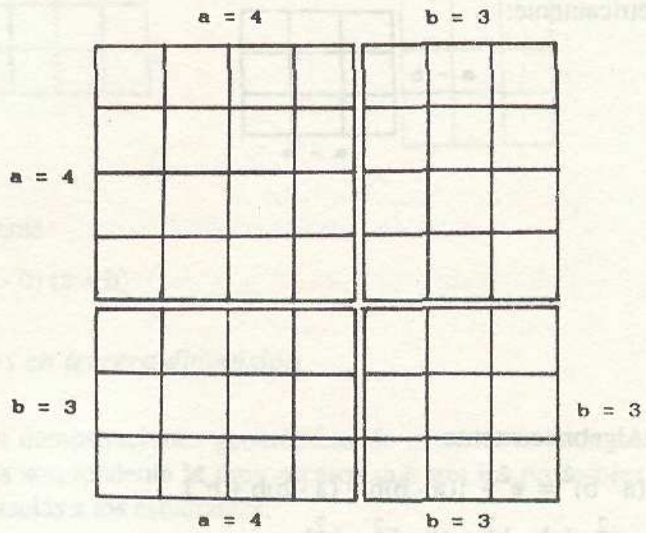
Tomamos un cuadrado de lado 4x4; otro cuadrado de lado 3 x 3; y dos rectángulos de 3 x 4; el área total de las cuatro figuras es 49.

Ahora coloquémoslos como indica la ilustración; se verá fácilmente que el área del nuevo cuadrado que se forma es la suma de las áreas parciales de las anteriores cuatro figuras:

Aritméticamente

O sea, $(4 + 3)^2 = 4^2 + 2(3 \times 4) + 3^2 = 49$

Geométricamente:

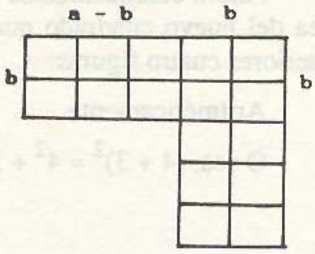


algebraicamente: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

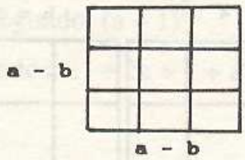
Seguidamente, observemos la factorización de $(a - b)^2$

Aritméticamente

$(5 - 2)^2 = [(3 \times 2) + (3 \times 2) = 2^2] = 9$



Geométricamente:



Algebraicamente

$(a - b)^2 = a^2 - [(a - b)b + (a - b)b + b^2]$

$= a^2 - [ab - b^2 + ab - b^2 + b^2]$

$= a^2 - ab + b^2 - ab + b^2 - b^2$

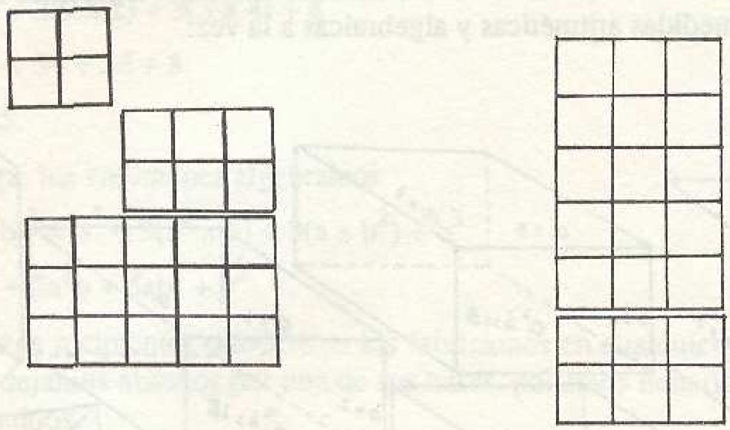
$= a^2 - 2ab + b^2$

Observemos la factorización de $(a^2 - b^2)$

Aritméticamente

$(5^2 - 2^2) = (5 - 2)(5 + 2) = 21$

Geométricamente



Algebraicamente

$(a^2 - b^2) = (a - b)(a + b)$

Aprendizajes en tercera dimensión

Aunque estas demostraciones geométricas de ecuaciones "son tan viejas como el Algebra, es sorprendente lo muy escasos que son los profesores que se molestan en mostrárselas a los estudiantes.

Este tipo de demostraciones se pueden generalizar rápidamente a tres dimensiones para hacer ver la identidad cúbica

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

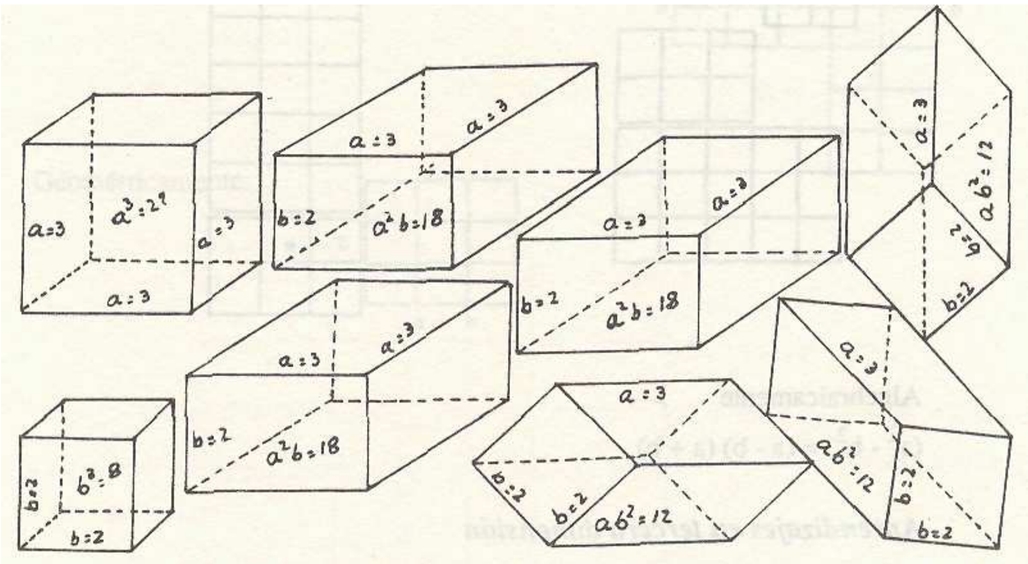
Si tuviera que enseñar Algebra me prepararía un modelo para que los estudiantes pudieran desmontarlo y comprobar la identidad algebraica" (Martin Gardner, 1987).

Antes de continuar, trate el lector de responder a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos volúmenes hay en el polinomio?

2. Con a y b mayores que 0; y con a>b, ¿Cuál de todos los volúmenes es mayor?

Pues bien, para poder observar multisensorialmente la anterior factorización, le sugerimos al lector recortar en forma tridimensional los siguientes sólidos con las siguientes medidas aritméticas y algebraicas a la vez:



Ahora, calculemos los volúmenes (aritméticos y algebraicos) de todos y cada uno de esos recipientes; procedamos seguidamente a sumarlos:

Volúmenes aritméticos

$(3 + 2)^3 = 3^3 + 3(3^2 \text{ x } 2) + 3(3 \text{ x } 2^2) + 2^3$

$= 27 + 3(9\text{x}2) + 3(3\text{x}4) + 8$

$= 27 + 54 + 36 + 8$

$= 125$

Ahora, los volúmenes algebraicos

$(a + b)^3 = a^3 + 3(a^2 \text{ x } b) + 3(a \text{ x } b^2) + b^3$

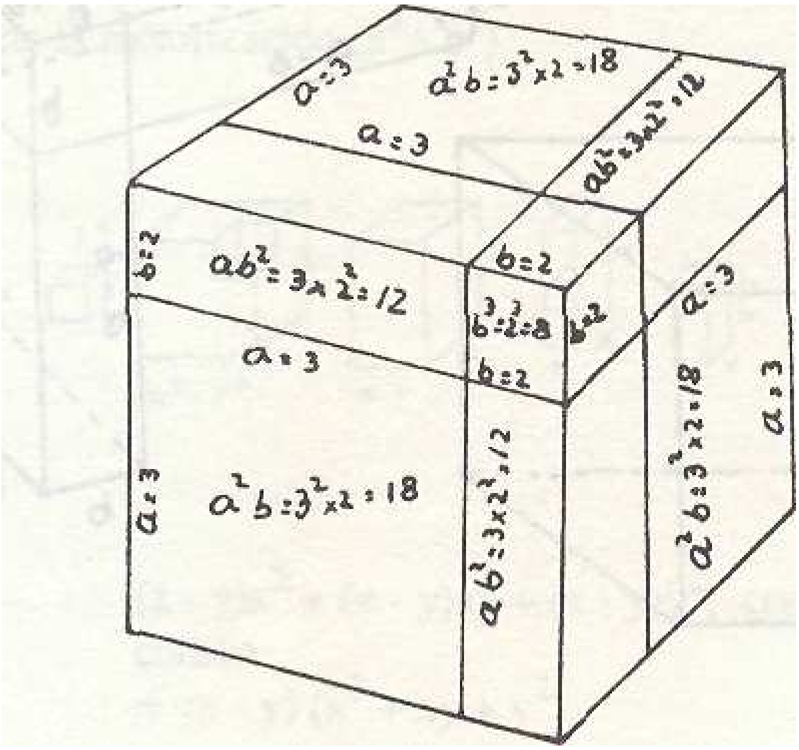
$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Si estos recipientes ortoédricos los fabricamos en cualquier material resistente y los dejamos abiertos por una de sus bases, podemos llenarlos de cualquier clase de líquidos.

Hemos llegado en esta forma, a integrar conocimientos de aritmética, geometría, álgebra, medidas de peso y capacidad respectivamente.

Con todos estos sólidos recortados en forma tangible, formemos ahora un cubo.

Evidentemente, lo que hemos acabado de hacer es la demostración tridimensional de $(a + b)^3$.



En cuanto a la factorización de $(a - b)^3$, nos queda de la siguiente manera:

Volúmenes aritméticos

$(5 - 2)^3 = 5^3 - 3(5^2 \times 2) + 3(5 \times 2^2) - 2^3.$

$= 125 - 3(25 \times 2) + 3(5 \times 4) - 8$

$= 125 - 50 + 60 - 8$

$= 185 - 158$

$= 27.$

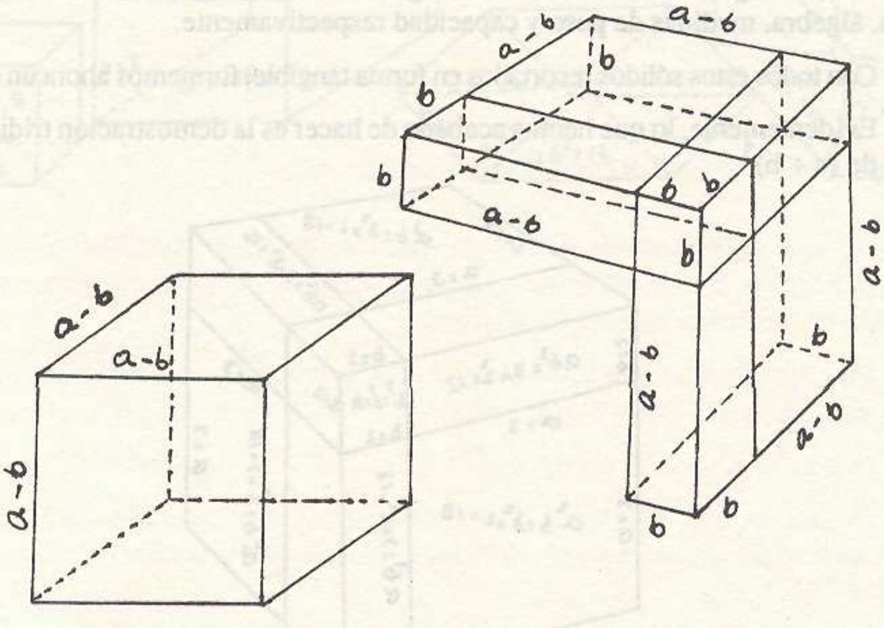
Volúmenes algebraicos: $(a - b)(a - b)(a - b) = (a - b)^3$

$(a - b)^3 = a^3 - [3(a - b)(a - b)b + 3(a - b)b^2 + b^3]$

$= a^3 - (3a^2b - 6ab^2 + 3b^3 + 3ab^2 - 3b^3 + b^3)$

$= a^3 - 3a^2b + 6ab^2 - 3b^3 - 3ab^2 + 3b^3 - b^3.$

$= a^3 - 3a^2 + 3ab^2 - b^3.$



Obsérvese de pasada que éstas y otras demostraciones de la geometría espacial son imposibles de ilustrar completamente en superficies planas como las del cuaderno o el tablero y por lo tanto hay que trabajarlas con material de apoyo multisensorial de carácter tridimensional.

Si no me creen, traten de ilustrar gráficamente casos de factorizaciones como:

$(a + b + c)^J$ $\qquad$ $(a + b + c + d)$~ $\qquad$ $(a + b + c + d + e)$

Cuando nos enfrentamos a la manipulación de estas fórmulas geométricas espaciales nos damos cuenta inmediatamente de que hay una relación muy íntima entre el número de sumandos que hay dentro del paréntesis de la forma cúbica y el número de sumandos que corresponden a los volúmenes parciales del desarrollo de la fórmula.

O dicho de otra manera; el número de recipientes parciales es el cubo del número de sumandos del paréntesis:

$(1 + 1)^3$ = 8 volúmenes parciales

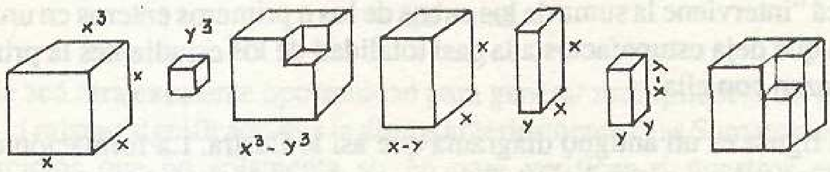
$(1 + 1 + 1)^3$ = 27 volúmenes parciales

$(1 + 1 + 1 + 1)^3$ = 64 volúmenes parciales

$(1 + 1 + 1 + 1 + 1)^3$ = 125 volúmenes parciales

Y así sucesivamente...

Procedamos, por analogía con el caso anterior, a observar la siguiente ilustración gráfica de la factorización $(a^3 - b^3)$



$(x - y)x^2 + (x - y)xy + (x - y)y^2$; como (x-y) es un factor común

$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Esta se comprenderá mejor si se tiene a la mano el modelo tridimensional ilustrativo de éste y otras demostraciones de la geometría cúbica.

Otro aspecto tridimensional de la tabla es el que comenta Martin Gardner en *Rosquillas anudadas y otras amenidades matemáticas* (1987) donde aparece la siguiente e interesantísima ilustración

	1^3	2^3	3^3	4^3	5^3	6^3	7^3	8^3	9^3	10^3
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Acá "interviene la suma de los cubos de los n primeros enteros en una notable identidad que deja estupefactos a la casi totalidad de los estudiantes la primera vez que tropiezan con ella.

La figura es un antiguo diagrama que así lo ilustra. La formación cuadrada de números, que se extiende indefinidamente hacia la derecha y hacia abajo, es sencillamente la tabla de multiplicar. Cada número es el producto del número situado a la izquierda de su fila y el número que encabeza su columna. La tabla está dividida en "escuadras", y la suma de los números contenidos en la n-ésima escuadra en n .

Aprendizaje de las proporciones

Lo último que nos hallamos en esta pesquisa emocionante de la tabla de multiplicar es la posibilidad que ella ofrece para trabajar la materia prima del tema de las proporciones aritméticas y de refilón las proporciones geométricas.

Para ello nos basaremos en un artículo del profesor Jesús A. del Valle (1987), dedicado al tratamiento matemático de las ternas pitagóricas, a partir también de la tabla de multiplicar, y de ésta se incluyen allí las siguientes propiedades:

1. Los elementos de la n-ésima fila (columna) son múltiplos positivos de n.

2. Los elementos de la diagonal principal son los cuadrados de los enteros positivos.

3. Existe simetría con respecto a la diagonal principal.

4. Si a, b, c, y d son enteros de la tabla que representan los vértices de un cuadrado o de un rectángulo, entonces

$$a.c = b.d.$$

Además, si dichos vértices se multiplican por un entero positivo, los resultados son también vértices de un cuadrado o de rectángulo en la tabla y para ellos también se verifica la propiedad 4. (hasta acá el artículo del profesor A. del Valle).

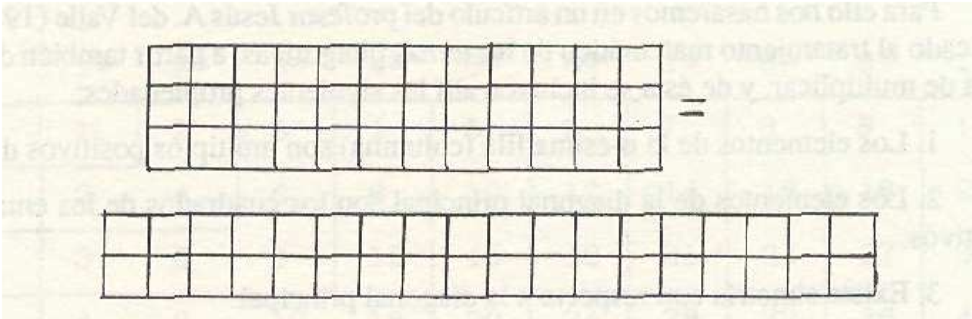
Ahora bien, si la fórmula de la propiedad 4 la escribimos como una proporción; se hace patente entonces que una proporción se puede entender como la igualdad de dos áreas:

$$a:b = c:d$$

He acá otra excelente oportunidad para generar multiplicaciones significativas, con el mismo significado que le dimos anteriormente a las Sumatorias; es decir, son ejercicios que no solamente sirven para verificar si nuestros estudiantes dominan el algoritmo de la multiplicación sino también para que lo utilicen como trampolín para saltar alegremente al espinoso tema de la igualdad de dos razones.

El estudiante tiene entonces a su disposición una cantidad enorme de posibilidades para que él mismo genere o construya sus propias proporciones con sólo mirar o elegir los cuadrados o los rectángulos adecuados.

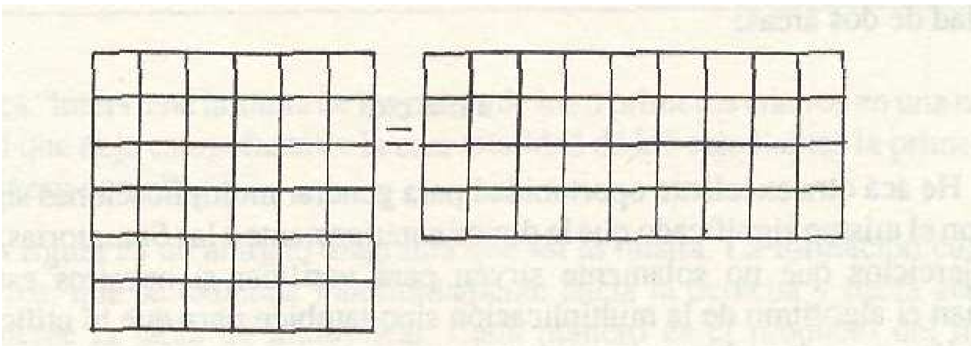
A modo de ejercicio, tomemos el rectángulo de largo 12 y de ancho 3; igualémoslo al rectángulo de largo 18 y de ancho 2.



3 x 12 = 2 x 18; 3 :2 = 18 :12; a : b = c : d

Con los elementos geométricos que ya poseemos podemos demostrar gráficamente la media proporcional logrando así unos aprendizajes más significativos y por lo tanto más duraderos.

Si recordamos que la media proporcional se define como el término medio repetido de una proporción continua, tenemos entonces que la demostración geométrica se reduce a igualar el área de un cuadrado cualquiera de la tabla de multiplicar con el área de otro rectángulo cualquiera pero que tenga la misma área del cuadrado.



6 x 6 = 4 x 9; 6 : 4 = 9 : 6; a : 4 = 9 : a ; a^2 = 36

Amables lectores, la intención de este artículo no es de posar de original —mucho de lo acá presentado aparece en la bibliografía adjunta— sino de presentar las insospechadas sorpresas que nos depara una lectura y uso diferentes de las tan temidas tablas de multiplicar que tanta mortificación nos causaron en nuestras mocedades escolares.

De otro lado, como lo enfatizamos en el artículo anterior, se trata de hacer ver las hermosas relaciones matemáticas que se pueden establecer entre materias tan aparentemente disímiles como la Aritmética, la Geometría, el Algebra y algunos temas del Cálculo diferencial.

Recordemos, a guisa de ejemplo, los seis casos de factorizaciones (de los diez o más que aparecen en los libros clásicos del Algebra de Bachillerato); tres casos en dos dimensiones y tres casos en tercera dimensión:

$(a + b)^2$; $(a - b)^2$; $(a^2 - b^2)$; $(a + b)^3$; $(a - b)^3$; $(a^3 - b^3)$

Como corolario de todo lo anteriormente presentado, creo que debemos revisar la enseñanza memorística y aislada de las tablas de multiplicar; pues en esta forma es muy difícil hacer ver las elegantes relaciones matemáticas que uno puede detectar en una tabla de multiplicar de doble entrada.

BIBLIOGRAFÍA

DEL VALLE, Jesús. Temas pitagóricas. En: *Notas Educativas.* No. 24 s.l. s.e. 1987. p **1-19.**

GARDNER, Martín. *Rosquillas anudadas y otras diversiones matemáticas.* Barcelona. Labor. 1987. p 212.

LIZCANO, Emmanuel. *Imaginario colectivo y creación matemática:* la construcción del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia. Madrid. Gedisa. 1993.

RESNICK, Lauren B. y FORD, Wendy W. *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos sicológicos.* Barcelona. Paidós. 1990. p 132.

RODRÍGUEZ VIDAL, Rafael. *Diversiones matemáticas.* Barcelona. Reverte. 1983. p 31.

URIBE CALAD, Julio A. y BERRIO MOLINA, José Israel. *Elementos de matemáticas 8.* Medellín. Bedout. 1989. p 114.