UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Algunos teoremas de extensión para funciones continuas

José Elías Zúñiga Navarrete

Monografía presentada para optar al título de Matemático.

Tutor
Hugo Samuel Aduen Muskus, doctor en matemáticas.

Universidad de Antioquia
Facultad de ciencias exactas y naturales, instituto de matemáticas.
Matemáticas
Caucasia

2022

Dedicatoria

Esta Tesis está dedicada a mis padres: Miguel Zúñiga y Ofir Navarrete. También a mis hermanos y a todas las personas que me apoyaron.

Agradecimientos

Quiero darle un profundo y sincero agradecimiento a mi asesor el Dr. Hugo Samuel Aduen Muskus por su gran apoyo en este trabajo. Agradecerle también a todos los docentes que hicieron parte de mi formación académica, a la Universidad de Antioquia en general, a todos los administrativos, amigos y compañeros que siempre estuvieron ahí presentes apoyándome de una u otra manera. Un agradecimiento especial para la profesora Magaly Leivaz por su gran colaboración durante mi proceso formativo. Finalmente, y no menos importante, quiero agradecerle a mi familia, en particular a mis padres que siempre estuvieron ahí presentes, me motivaron y nunca dejaron de creer en mis capacidades. A mis hermanos: Eddier Zúñiga, Wilmer Zúñiga y Oralia Zúñiga que nunca me dejaron solo; también a mi cuñado Armando Muños por su aportación.

Resumen

En esta monografía, caracterizaremos ciertos espacios en los que es posible extender continuamente una función continua definida en un subespacio a todo el espacio completo. Además, nos preguntamos, ¿bajo qué condiciones una función lipschitziana con constante de Lipschitz L puede ser extendida a todo el espacio completo conservando la condición de Lipschitz con la misma constante L? Nuestro propósito es clasificar algunos teoremas importantes de extensión que caracterizan estos espacios en los que es posible hacer este tipo de extensiones. Estudiaremos algunos resultados importantes del teorema de extensión de Tietze aplicado a diferentes espacios, y por supuesto, estudiaremos las funciones de Lipschitz que conservan la propiedad mencionada.

Palabras clave: Extensiones, continuidad, paracompacidad, funciones Lipschitz.

Abstract

In this monograph, we characterize certain spaces in which it is possible to continuously extend a continuous function defined on a subspace to the whole space. We also want to know, under what conditions can a Lipschitzian function with Lipschitz constant L be extended to the whole space preserving the Lipschitz property with the same constant L? Our purpose is to classify some important extension theorems that characterize these spaces in which it is possible to do these extensions. We will study some important results of Tietze's extension theorem applied to different spaces and, of course, we will study the Lipschitz functions that preserve the mentioned property.

Keywords: Extensions, continuity, paracompactness, Lipschitz functions.

Índice general

Introducción

En muchas áreas de las matemáticas, incluyendo problemas de optimización así como algunas cuestiones importantes de análisis, tenemos que tratar con funciones f que satisfacen una propiedad $\mathscr{P}$ solo en un subconjunto A del espacio total X. Es importante saber si f puede extenderse a X conservando la propiedad $\mathscr{P}$, es decir, si existe una función F, definida y que posee la propiedad $\mathscr{P}$ sobre todo X, que es igual a f en A. Estamos interesados en estudiar funciones continuas definidas en un subespacio que pueden ser continuamente extendidas a todo el espacio. Cuando la función definida en un subconjunto de un espacio métrico X es L- Lipschitz, mostraremos la existencia de extensiones L-Lipschitz definidas en todo X.

Hay reglas para construir funciones continuas, por ejemplo, restringiendo el dominio o extendiendo el recorrido de una función continua. Es decir, si $f\colon X \to Y$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f|_A\colon A \to Y$ es continua. Por otra parte, si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g\colon X \to Z$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h\colon X \to Z$, obtenida el extender el recorrido de f, es continua (véase [7]). Ahora bien, considere los espacios X, Y y $A \subset X$. Si $f\colon A \to Y$ es continua, ¿cuándo es posible que exista una función $F\colon X \to Y$ continua en todo X tal que $F|_A = f$? En general, la existencia de F es más bien excepcional, ya que en la mayoría de los casos f no es extensible a una función continua en todo X. Lo mismo ocurre si f es una función lipschitziana, en este caso nuestra pregunta se basaría sobre la existencia de una función lipschitziana F tal que $F|_A = f$ y $L(f) = L(F)$.

El primer teorema de extensión útil fue probablemente el teorema de extensión de Tietze, este teorema caracteriza los espacios topológicos en los que es posible extender al espacio total una función continua definida en un subconjunto cerrado. Al principio el teorema simplemente afirmaba que dicha extensión era posible en ciertos espacios; solo más tarde se aspira a caracterizarlos. Lebesgue presentó en 1907 la primera demostración válida cuando X es un espacio vectorial real de dimensión finita. En espacios métricos, la primera demostración válida fue dada por Tietze en 1915 y por tal razón el teorema lleva su nombre. Hausdorff también dio una demostración válida solo en espacios métricos en 1919, más breve y que solo requiere las propiedades elementales del ínfimo de un conjunto de números reales, lo cual la hacía un poco más entendible que la de Tietze. La prueba clásica es dada por Urysohn en 1925 para espacios topológicos normales; esta demostración del teorema de Tietze requiere establecer el lema de Urysohn, una de las herramientas fundamentales de la topología general elemental, y se usa también los conceptos de series de funciones y convergencia uniforme (para más detalles véase [5])

Este trabajo contiene tres capítulos para el desarrollo del problema. El primer capítulo trata sobre los preliminares y se compone de algunos conceptos básicos del análisis matemático tales como: sucesiones y series convergentes, sucesiones y series de funciones (estableciendo previamente la noción de espacio métrico). También se establece la noción de espacio topológico y subespacios, así como también el de funciones continuas sobre espacios topológicos y espacios normados. El segundo capítulo contiene cuatro resultados importante e interesantes sobre extensión de funciones continuas, entre ellos la fórmula de Dugundji. Además, se presentan ejemplos que ilustran y aplican cada uno de estos teoremas. En el último capítulo obtenemos resultados para extender funciones Lipschitz continuas a una función Lipschitz continua conservando la misma constante de Lipschitz sobre todo el espacio. En este capítulo establecemos que si f es una función L-Lipschitz, entonces podemos saber explícitamente cuál es la menor y la mayor extensión L-Lipschitz de f.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios topológicos

Las ideas topológicas están presentes en casi todas las áreas de las matemáticas actuales. El tema de la topología en sí consta de varias ramas diferentes, tales como la topología general, la topología algebraica y topología diferencial, las cuales tienen relativamente poco en común. La topología se interesa por conceptos como proximidad, número de agujeros, el tipo de consistencia (o textura) que presenta un objeto, comparar objetos y clasificar múltiples atributos donde destacan conectividad, compacidad, metricidad o metrizabilidad, entre otros. La Topología es básica en la formación de cualquier matemático actual y se encuentra presente en áreas de las matemáticas como el álgebra, la geometría, el análisis, etc. Sus métodos y sus resultados facilitan el tratamiento de numerosos problemas e incluso permiten abordar otros que no tienen un origen estrictamente topológico. La topología ha alcanzado, digamos su madurez, recientemente. La mayoría de los estudiosos de la historia de las matemáticas sitúan su puesta de largo en las primeras décadas del siglo XX, a partir de los trabajos de F. Hausdorff (1914), P. Alexandroff (1926) y W. Sierpinski (1928).

La definición de espacio topológico, que ahora mismo está estandarizada, tardó muchos años en ser establecida. Algunos matemáticos, tales como Fréchet, Hausdorff y otros, propusieron distintas definiciones en las primeras décadas del siglo XX, pero fue mucho más tarde cuando los matemáticos establecieron la definición que finalmente fue adoptada:

Definición 1.1.1. Una topología en un conjunto X es una familia $\mathscr{T}$ de subconjuntos de X

la cual satisface las siguientes condiciones:

(1) $\emptyset$ y X son elementos de $\mathscr{T}$

(2) la unión de cualquier colección de elementos de $\mathscr{T}$ es de nuevo un elemento de $\mathscr{T}$

(3) la intersección de cualquier colección finita de elementos de $\mathscr{T}$ es de nuevo un elemento de $\mathscr{T}$

Un espacio topológico es un par $(X, \mathscr{T})$, en el cual X es un conjunto y $\mathscr{T}$ es una topología en X. Cuando no sea necesario especificar $\mathscr{T}$, simplemente diremos que X es un espacio topológico. Los elementos de X serán llamados puntos, y los miembros de $\mathscr{T}$ conjuntos abiertos o simplemente abiertos.

Ejemplo 1.1.2. Sobre un conjunto X, la colección de sus partes $\mathscr{P}(X)$ define la topología discreta. En este caso, el par $(X, \mathscr{P}(X))$ es llamado espacio topológico discreto. Para ver que un espacio topológico es discreto basta mostrar que cualquier singulete es un conjunto abierto.

Ejemplo 1.1.3. Sobre un conjunto X, la colección $\mathscr{T}_{ind} = \{\emptyset, X\}$ define la topología indiscreta (o topología trivial). En este caso, el par $(X, \mathscr{T}_{ind})$ es llamado espacio topológico indiscreto.

Ejemplo 1.1.4. Si X es un conjunto, la colección

$$\mathscr{T}_{\text{cof}} = \{\emptyset\} \cup \{U \subset X : X \setminus U \text{ es finito}\}$$

define la topología de los complementos finitos o la topología cofinita en X. A saber, es claro de la definición que $\emptyset, X \in \mathscr{T}_{cof}$. Por otro lado, si $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una colección arbitraria de elementos en $\mathscr{T}_{cof}$, en virtud de las fórmulas de De Morgan se tiene

$$X \setminus \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} \underbrace{X \setminus U_\alpha}_{finito}$$

Como el conjunto a la derecha de la igualdad anterior es finito, entonces el conjunto $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ posee complemento finito; y por lo tanto, es un elemento de $\mathscr{T}_{cof}$. De igual modo si U_α, U_β son elementos de $\mathscr{T}_{cof}$, los elementos $X \setminus U_\alpha$, $X \setminus U_\beta$ son finitos, y en consecuencia

$$X \setminus U_\alpha \cap U_\beta = X \setminus U_\alpha \cup X \setminus U_\beta$$

al ser unión de dos conjuntos finitos, es finito. Así $U_\alpha \cap U_\beta$ tiene complemento finito, luego está en $\mathscr{T}_{cof}$. Concluimos entonces que $\mathscr{T}_{cof}$ define una topología en X. En este caso, $(X, \mathscr{T}_{cof})$ es llamado espacio cofinito.

Definición 1.1.5 (Base)**.** Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X (llamados elementos baśicos) tales que:

(1) Para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico B que contiene a x

(2) Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos B_1 y B_2, entonces existe un elemento básico B_3 que contiene a x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Si $\mathscr{B}$ satisface estas dos condiciones, se define la topología $\mathscr{T}$ generada por $\mathscr{B}$ como sigue: un subconjunto U de X se dice que es abierto en X (es decir, $U \in \mathscr{T}$), si para cada $x \in X$, existe un elemento básico $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in B$ y $B \subset U$. Nótese que cada elemento básico es así mismo un elemento de $\mathscr{T}$.

Definición 1.1.6. Si $\mathscr{B}$ es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real,

$$(a, b) = \{x \colon a < x < b\}$$

la topología generada por $\mathscr{B}$ se denomina **topología usual** sobre la recta real. Siempre que estudiemos $\mathbb{R}$ supondremos que viene con esta topología, a menos que digamos lo contrario. Sus abiertos serán llamados abiertos usuales.

Si $\mathscr{B}'$ es la colección de todos los intervalos semiabiertos del tipo

$$[a, b) = \{x \colon a \leq x < b\}$$

donde $a < b$, la topología $\mathscr{T}_l$ generada por $\mathscr{B}'$ se llama **topología del límite inferior sobre** $\mathbb{R}$. El espacio $(\mathbb{R}, \mathscr{T}_l)$ se llama la recta de Sorgenfrey. Cuando $\mathbb{R}$ esté dotada de la topología del límite inferior, lo denotamos por $\mathbb{R}_l$

1.2. Subespacios

Dado $Y \subset (X, \mathscr{T})$, a partir de la topolgía de X podemos dotar al conjunto Y de una topología llamada la topología inducida o relativa.

Definición 1.2.1. Sea $Y \subset (X, \mathscr{T})$. Se define la topología de subespacio o la topología inducida por $\mathscr{T}$ sobre Y, a la topología definida por la prescripción

$$\mathscr{T}_Y = \{Y \cap U \colon U \in \mathscr{T}\}$$

En este caso, el par $(Y, \mathscr{T}_Y)$ se dice que es un subespacio topológico de $(X, \mathscr{T})$; sus conjuntos abiertos son todas la intersecciones de conjuntos abiertos de X con Y.

Definición 1.2.2. Si Y es un subespacio de X, diremos que un conjunto U es abierto en Y (o abierto relativo a Y) si pertenece a la topología de Y; esto implica, en particular, que es un subconjunto de Y. Diremos que U es abierto en X si pertenece a la topología de X.

Es fácil ver que $\mathscr{T}_Y$ es una topología sobre Y. En efecto, contiene a $\emptyset$ y X, porque

$$\emptyset = Y \cap \emptyset \quad \text{e} \quad Y = Y \cap X$$

donde $\emptyset$ y X son elementos de $\mathscr{T}$. El hecho de que sea cerrado para intersecciones finitas y uniones arbitrarias se deduce de las ecuaciones

$$(U_1 \cap Y) \cap \ldots \cap (U_n \cap Y) = (U_1 \cap \ldots \cap U_n) \cap Y$$
$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} (U_\alpha \cap Y) = \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \right) \cap Y$$

Ejemplo 1.2.3. En $X = \{a, b, c, d, e\}$ consideremos la topología

$$\mathscr{T} = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$$

Para el conjunto $A = \{c, d, e\}$ notamos que

$$A = X \cap A, \;\; \emptyset = \emptyset \cap A, \;\; \emptyset = \{a\} \cap A, \;\; \emptyset = \{a, b\} \cap A$$

$$\{c, d\} = \{a, c, d\} \cap A = \{a, b, c, d\} \cap A, \;\; \{e\} = \{a, b, e\} \cap A$$

Por lo tanto, la topología inducida en A es $\mathscr{T}_A = \{A, \emptyset, \{c, d\}, \{e\}\}$.

Ejemplo 1.2.4. Para cada $A \subset (X, \mathscr{T}_{ind})$ se verifica $\mathscr{T}_A = \{\emptyset, A\}$; i.e., todo subespacio de un espacio indiscreto, es un espacio indiscreto. Por otro lado, para cada $A \subset (X, \mathscr{P}(X))$, se verifica $\mathscr{T}_A = \mathscr{P}(A)$. Esto es, todo subespacio de un espacio discreto, es un espacio discreto.

Ejemplo 1.2.5. Para cada $A \subset (X, \mathscr{T}_{cof})$, se verifica $\mathscr{T}_A = \mathscr{P}(A)$ si A es finito. Por otro lado, $\mathscr{T}_A = \mathscr{T}_{cof}$ si A es infinito.

Ejemplo 1.2.6. Para $B = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, ($\mathbb{R}$ con la topología usual), se verifica $\mathscr{T}_B = \mathscr{P}(B)$. Para comprobarlo, basta notar que en B los singuletes son abiertos. Esto se reduce a escribir $\{\frac{1}{n}\} = (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}) \cap B$, para cada $n \geq 2$; además, $\{1\} = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap B$. No obstante, sobre $\overline{B} = \{0\} \cup B$, la topología inducida no es la discreta. Pues no es imposible escribir $\{0\} = U \cap B$ con U abierto usual.

Ejemplo 1.2.7. Tanto los números racionales, así como los números irracionales como subespacios de la recta usual no son espacios discretos.

Proposición 1.2.8. *Si $\mathscr{B}$ es una base para la topología de X, entonces la colección*

$$\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y \colon B \in \mathscr{B}\}$$

es una base para la topología de subespacio sobre Y.

1.3. Funciones continuas

1.3.1. Continuidad de una función

Definición 1.3.1. Sean $(X, \mathscr{T}_X)$ y $(Y, \mathscr{T}_Y)$ espacios topológicos. Una función $f \colon X \to Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y ($V \in \mathscr{T}_Y$), el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X ($f^{-1}(V) \in \mathscr{T}_X$).

Recordemos que $f^{-1}(V)$ es el conjunto de todos los puntos $x \in X$ para los cuales $f(x) \in V$; además, es vacío si V no interseca al conjunto imagen $f(X)$ de f.

La continuidad de una función no solamente depende de la propia función, sino que también depende de las topologías especificadas para su dominio y recorrido. Para resaltar este hecho, podemos decir que f es continua relativa a las topologías especificadas sobre X y Y.

Notamos que si la topología del espacio de llegada Y está dada por una base $\mathscr{B}$, entonces para probar la continuidad de f basta mostrar que la imagen inversa de cada elemento básico es abierto: como el conjunto abierto arbitrario V de Y se puede escribir como una unión de elementos básicos

$$V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha$$

Entonces

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} f^{-1}(B_\alpha)$$

por lo cual $f^{-1}(V)$ es abierto si cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ es abierto.

Como motivación al siguiente teorema, recordemos lo siguiente:

Para $x_0 \in \mathbb{R}$ y $r > 0$, tenemos $B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r)$; así

$$x \in B(x_0, r) \Leftrightarrow x \in (x_0 - r, x_0 + r) \Leftrightarrow x_0 - r < x < x_0 + r \Leftrightarrow |x - x_0| < r$$

En análisis se estudian diversas maneras de definir la continuidad de una función, distintas pero equivalentes.

La continuidad de una función en una variable real es definida por:

Una función $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0, si para cada número real $\varepsilon > 0$, es posible encontrar un número real $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$.

En términos de bolas abiertas, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0, si para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ siempre que $x \in B(x_0, \delta)$. Esto es, para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x_0, \delta)) = f((x_0 - \delta, x_0 + \delta)) \subset (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon) = B(f(x_0), \varepsilon)$$

En términos de vecindades sería: para cualesquier vecindad V de $f(x_0)$, existe una vecindad U para x_0 tal que $f(U) \subset V$.

Atendiendo a lo anterior, enunciaremos el siguiente resultado.

Teorema 1.3.2. *Sean X y Y espacios topológicos; sea $f \colon X \to Y$. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

(1) *f es continua.*

(2) *Para cada subconjunto A de X, se tiene que $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

(3) *Para cada conjunto cerrado B de Y, el conjunto $f^{-1}(B)$ es cerrado en X.*

(4) *Para cada $x \in X$ y cada entorno V de $f(x)$, existe un entorno U de x tal que $f(U) \subset V$.*

Diremos que f es continua en el punto x si se cumple la condición (4) para el punto x de X.

Demostración.

Vamos a probar que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) y que (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

(1) $\Rightarrow$ (2). Supongamos que f es continua. Sea A un subconjunto de X. Vamos a mostrar que si $x \in \overline{A}$, entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$. Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces $f^{-1}(V)$ es un conjunto abierto de X que contiene a x; debe intersecar a A en algún punto y. Entonces V interseca a $f(A)$ en el punto $f(y)$, por lo que $f(x) \in \overline{f(A)}$, como se quería.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea B un cerrado en Y y sea $A = f^{-1}(B)$. Queremos probar que A es cerrado en X; para ello demostremos que $A = \overline{A}$. Por teoría elemental de conjuntos, tenemos que $f(A) = f(f^{-1}(A)) \subset B$. Por lo tanto, si $x \in \overline{A}$,

$$f(x) \in f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset \overline{B} = B$$

por lo que $x \in f^{-1}(B) = A$. Así, $\overline{A} \subset A$, por lo cual $\overline{A} = A$, como se quería.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea V un subconjunto abierto de Y. Pongamos $B = Y - V$. Luego,

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$$

Ahora, B es un conjunto cerrado de Y. Entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en X por hipótesis, por lo que $f^{-1}(V)$ es abierto en X, como se quería.

(1) $\Rightarrow$ (4). Sea $x \in X$ y sea V un entorno de $f(x)$. Entonces el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un entorno de x tal que $f(U) \subset V$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Sea V un conjunto abierto de Y; sea $x \in f^{-1}(V)$. Entonces $f(x) \in V$, así que, por hipótesis, existe un entorno U_x de x tal que $f(U_x) \subset V$. Luego, $U_x \subset f^{-1}(V)$. De esto se sigue que $f^{-1}(V)$ puede ser escrito como la unión de conjuntos abiertos U_x, por lo cual es abierto.

$\square$

1.3.2. Construcción de funciones continuas

Estudiaremos ahora la forma de construir funciones continuas de un espacio topológico en otro. Consideraremos en esta sección las construcciones que se cumplen para espacios topológicos generales.

Teorema 1.3.3 (Regla para construir funciones continuas). *Sean X, Y y Z espacios topológicos.*

(a) *(Función constante) si $f\colon X \to Y$ envía todo punto de X a un mismo punto y_0 de Y, entonces f es continua.*

(b) *(Inclusión) si A es un subespacio de X, la función inclusióin $j\colon A \to X$ es continua.*

(c) *(Composición) si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son continuas, entonces la aplicación $g \circ f\colon X \to Z$ es continua.*

(d) *(Restricción del dominio) si $f\colon X \to Y$ es continua y A es un subespacio de X, entonces la función restringida $f|_A\colon A \to Y$ es continua.*

(e) *(Restricción o extensión del recorrido) sea $f\colon X \to Y$ continua. Si Z es un subespacio de Y que contiene al conjunto imagen $f(X)$, entonces la función $g\colon X \to Z$, obtenida al restringir el rango de f, es continua. Si Z es un espacio con Y como subespacio, entonces la función $h\colon X \to Z$, obtenida al extender el recorrido de f, es continua.*

(f) *(Formulación local de continuidad) la aplicación $f\colon X \to Y$ es continua si X se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración.

(a) Sea $f(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Sea V abierto en Y. El conjunto $f^{-1}(V)$ es igual a X o $\emptyset$, dependiendo de si V contiene a y_0 o no. En cualquier caso, es abierto.

(b) Si U es abierto en X, entonces $j^{-1}(U) = U \cap A$, el cual es abierto en A por definición de la topología de subespacio.

(c) Si U es abierto en Z, entonces $g^{-1}(U)$ es abierto en Y y $f^{-1}(g^{-1}(U))$ es abierto en X. Pero

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) = (g \circ f)^{-1}(U)$$

por teoría elemental de conjuntos.

(d) La aplicación $f|_A$ es igual a la composición de la aplicación inclusión $j\colon A \to X$ y la aplicación $f\colon X \to Y$, ambas continuas.

(e) Sea $f\colon X \to Y$ continua. Si $f(X) \subset Z \subset Y$, probemos que la función $g\colon X \to Z$ obtenida a partir de f es continua. Sea B abierto en Z. Luego, $B = Z \cap U$ para algún abierto U de Y. Como Z contiene completamente al conjunto imagen $f(X)$,

$$f^{-1}(U) = g^{-1}(B)$$

por teoría elemental de conjuntos. Puesto que $f^{-1}(U)$ es abierto, también lo es $g^{-1}(B)$.

Para probar que $h\colon X \to Z$ es continua si Z tiene a Y como subespacio, observemos que h es la composición de la aplicación $f\colon X \to Y$ y la inclusión $j\colon Y \to Z$.

(f) Por hipótesis, podemos escribir a X como unión de conjuntos abiertos U_α tales que $f|_{U_\alpha}$ es continua para cada $\alpha \in \Lambda$. Sea V un conjunto abierto en Y. Entonces

$$f^{-1}(V) \cap U_\alpha = (f|_{U_\alpha})^{-1}(V)$$

porque ambas expresiones representan el conjunto de los puntos x que pertenecen a U_α para los que $f(x) \in V$. Dado que $f|_{U_\alpha}$ es continua, este conjunto es abierto en U_α, y por tanto, abierto en X. Pero

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (f^{-1}(V) \cap U_\alpha)$$

por lo cual $f^{-1}(V)$ es también abierto en X.

□

Teorema 1.3.4 (Lema del pegamento)**.** *Sea $X = A \cup B$, donde A y B son cerrados en X. Sean $f\colon A \to Y$ y $g\colon B \to Y$ continuas. Si $f(x) = g(x)$ para cada $x \in A \cap B$, entonces f y g se combinan para dar una función continua $h\colon X \to Y$, definida por $h(x) = f(x)$ si $x \in A$ y $h(x) = g(x)$ si $x \in B$.*

Demostración.

Sea C un subconjunto cerrado de Y. Tenemos que

$$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$$

por teoría elemental de conjuntos. Como f es continua, $f^{-1}(C)$ es cerrado en A y, por tanto, cerrado en X. Del mismo modo, $g^{-1}(C)$ es cerrado en B y, por tanto, cerrado en X. Por lo tanto, su unión $h^{-1}(C)$ es, de este modo, cerrado en X.

□

Ejemplo 1.3.5. Toda función con dominio discreto es continua. Esto es, dado el espacio topológico discreto $(X, \mathscr{P}(X))$, para cada espacio $(Y, \mathscr{T}_Y)$, la función $f\colon X \to Y$ es continua. Igualmente, toda función con codominio indiscreto es continua. Es decir, dado el espacio topológico $(X, \mathscr{T}_{ind})$, para cada espacio $(X, \mathscr{T}_X)$, la función $f\colon X \to Y$ es continua.

Ejemplo 1.3.6. La identidad $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_l$ no es continua puesto que $\mathrm{Id}^{-1}([a,b)) = [a,b) \subset \mathbb{R}$ no es abierto. Por otra parte, $\mathrm{Id}\colon \mathbb{R}_l \to \mathbb{R}$ si es continua porque la imagen inversa de (a,b) es él mismo, que es abierto en $\mathbb{R}_l$. En general, si $\mathscr{T}_1$ y $\mathscr{T}_2$ son topologías en X, la función identidad $\mathrm{Id}\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ es continua si, y sólo si, $\mathscr{T}_2 \subseteq \mathscr{T}_1$ ($\mathscr{T}_1$ más fina que $\mathscr{T}_2$ y $\mathscr{T}_2$ más gruesa que $\mathscr{T}_1$).

1.4. Espacios métricos

El concepto de distancia es de central importancia. La "cercanía" de los elementos de un conjunto se puede medir más convenientemente como la distancia entre los elementos de ese conjunto. En $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ podemos, con la ayuda de la función valor absoluto, determinar la distancia entre dos puntos. Para investigar, por ejemplo, la convergencia de sucesiones en un conjunto arbitrario X, primero tenemos que dotar a X con una estructura que permita determinar la distancia entre dos elementos de X. Maurice Fréchet (1906), tal vez motivado por esta observación, introdujo la noción de **espacios métricos**.

Definición 1.4.1. Una métrica sobre un conjunto no vacío X es una función $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ con las siguientes propiedades:

(a) $d(x,y) = 0$ si, y solo si, $x = y$.

(b) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$ (simetría).

(c) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Si d es una métrica en X, entonces el par ordenado (X, d) es llamado un espacio métrico. Cuando la métrica sea clara en el contexto, escribiremos simplemente X en vez de (X, d). Finalmente, si $x, y \in X$, entonces $d(x, y)$ es la **distancia** de x a y.

Ejemplo 1.4.2. Sean X un conjunto no vacío y $d\colon X \times X \to [0, \infty)$ definida por:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = y \\ 1 & , \text{ si } x \neq y \end{cases}$$

Es fácil comprobar que d es una métrica en X. Al espacio métrico resultante (X, d) se le llama discreto. Esto nos indica que todo conjunto no vacío puede proveerse de una métrica

Ejemplo 1.4.3. Si $\mathbb{K}$ denota cualquiera de los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, entonces $\mathbb{K}$ es un espacio métrico con la **métrica natural**

$$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \to [0, \infty), \qquad (x, y) \mapsto |x - y|$$

Si debilitamos la propiedad (a) de la definición de métrica, escribiendo solamente $d(x, x) = 0$ para todo $x \in X$, estamos permitiendo la posibilidad de que existan $x, y \in X$ tales que $d(x, y) = 0$ y $x \neq y$. Naturalmente que d no es ya una métrica y recibe el nombre de **pseudométrica**. El espacio pseudométrico es un concepto que generaliza el de espacio métrico, de hecho, todo espacio métrico es un espacio pseudométrico.

Proposición 1.4.4. *Sea (X, d) un espacio pseudométrico. Entonces para todo $x, y, z, w \in X$ tenemos*

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w) \tag{1.1}$$

En particular, para todo $x, y, z \in X$ se tiene $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$

Demostración.

Sean $x, y, z, w \in X$. Aplicando dos veces la desigualdad triangular obtenemos:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq d(x, z) + d(z, w) + d(w, y)$$

de donde

$$d(x, y) - d(z, w) \leq d(x, z) + d(y, w) \tag{1.2}$$

De manera similar

$$d(z, w) \leq d(z, x) + d(x, w) \leq d(x, z) + d(x, y) + d(y, w)$$

de donde

$$-d(x,z) - d(y,w) \leq d(x,y) - d(z,w) \tag{1.3}$$

Las desigualdades (1.2) y (1.3) equivalen a (1.1) $\square$

Definición 1.4.5. Si (X,d) es un espacio métrico y Y es un subconjunto no vacío de X, entonces Y puede ser considerado como un espacio métrico definiendo en Y la siguiente métrica:

$$d^*\colon = d|_{Y\times Y}\colon Y \times Y \to [0,\infty), \quad d(x,y) \mapsto d^*(x,y) = d(x,y)$$

La métrica d^* se llama la **métrica relativa** inducida por la métrica d sobre Y y (Y,d^*) se dice un **subespacio métrico** de X

Definición 1.4.6. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definamos el **espacio euclidiano** $\mathbb{R}^k$ como el conjunto de todas las k-tuplas ordenadas $x = (x_1, x_2, ..., x_k)$, donde $x_1, x_2, ..., x_k$ son números reales, llamados las coordenadas de x, es decir,

$$\mathbb{R}\colon = \{(x_1, x_2, ..., x_k)\colon x_i \in \mathbb{R} \ \text{ para todo } \ i = 1, 2, ..., k\}$$

Nota. La función $d\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \to [0,\infty)$ definida por $d(x,y) = ||x-y||$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^k$, es una métrica en $\mathbb{R}^k$ y por lo tanto $(\mathbb{R}^k, d)$ es un espacio métrico.

Definición 1.4.7. Sea (X,d) un espacio métrico. Para cada $a \in X$y $r > 0$, definimos la **bola abierta** con centro a y radio r como el conjunto

$$B(a,r)\colon = B_X(a,r)\colon = B_r(a)\colon = \{x \in X\colon d(x,a) < r\}$$

La **bola cerrada** con centro a y radio r es el conjunto

$$B[a,r]\colon = B_X[a,r]\colon = B_r[a]\colon = \{x \in X\colon d(x,d) \leq r\}$$

La **esfera** con centro a y radio r es el conjunto

$$S(a,r)\colon = S_X(a,r)\colon = S_r(a)\colon = \{x \in X\colon d(x,a) = r\}$$

Definición 1.4.8. Sean (X,d) un espacio métrico y $E \subset X$. Se definen los siguientes conjuntos:

(a) El derivado de E: $\quad E'\colon = \{a \in X\colon a \ \text{ es un punto de acumulación de } \ E\}$

(b) El interior de E: $E^\circ :=\{a \in X : a \text{ es un punto interior de } E\}$

(c) La clausura de E: $\overline{E} := E \cup E'$

Proposición 1.4.9. *Sean (X,d) un espacio métrico y $E \subset F \subset X$, entonces*

(a) $E' \subset F'$

(b) $E^\circ \subset F^\circ$

(c) $\overline{E} \subset \overline{F}$

Demostración.

(a) Fijemos $x \in E'$. Por definición, para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Dado que $E \subset F$, se sigue que para todo $r > 0$, $B(x,r) \cap (F \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, es decir, $x \in F'$.

(b) Sea $x \in E^\circ$. Luego $B(x,r) \subset E$ para algún $r > 0$. De esta manera, dado que $E \subset F$, se tiene que $B(x,r) \subset F$ para algún $r > 0$. Lo cual significa que $x \in F^\circ$.

(c) $\overline{E} = E \cup E' \subset F \cup F' = F'$

□

Teorema 1.4.10. *Sean (X,d) un espacio métrico y $E \subset X$. Entonces: E es abierto en X si y solo si $E^c := X \setminus E$ es cerrado en X.*

Demostración.

Supongamos que E es abierto en X y sea $x \in E$. Luego $x \in E^\circ$ y por lo tanto, existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap E^c = \emptyset$. En consecuencia $B(x,r) \cap (E^c \setminus \{x\}) = \emptyset$ para algún $r > 0$. O sea que $x \notin (E^c)'$. Esto demuestra que $(E^c)' \subset E^c$, es decir, E^c es cerrado en X.

De otro lado, supongamos que E^c es cerrado en X y sea $x \in E$. Luego $x \notin (E^c)'$ y por lo, tanto existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap E^c \subset \{x\}$. Como $x \in E$, se sigue que $B(x,r) \subset E$ para algún $r > 0$, es decir, $x \in E^\circ$. De esta manera E es abierto en X.

□

Corolario 1.4.11. *Sean (X,d) un espacio métrico y $F \subset X$. Entonces: F es cerrado en X si y solo si $X \setminus F$ es abierto en X.*

Demostración.

F es cerrado en X si y solo si $X \setminus (X \setminus F)$ es cerrado en X si y solo si $X \setminus F$ es abierto en X.

$\square$

Teorema 1.4.12. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

(a) *Para cualquier colección $\{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos, $\bigcup_\alpha G_\alpha$ es abierto.*

(b) *Para cualquier colección $\{F_\alpha\}$ de conjuntos cerrados, $\bigcap_\alpha F_\alpha$ es cerrado.*

(c) *Para cualquier colección finita $G_1, G_2, ..., G_n$ de conjuntos abiertos, $\bigcap_{i=1}^n G_i$ es abierto.*

(d) *Para cualquier colección finita $F_1, F_2, ..., F_n$ de conjuntos cerrados, $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado.*

Demostración.

(a) Sea $G\colon = \bigcup_\alpha G_\alpha$. Si $x \in G$ entonces $x \in G_\alpha$ para algún α. Pero $G_\alpha \subset G$ y $x \in G_\alpha \subset G_\alpha^\circ \subset G^\circ$ y por lo tanto G es abierto.

(b) Sea $F\colon = \bigcap_\alpha F_\alpha$. Como $F^c = \left(\bigcap_\alpha F_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha F_\alpha^c$ es abierto, se sigue qeu F es cerrado.

(c) Sean $G\colon = \bigcap_{i=1}^n G_i$ y $x \in G$. Por definición, para cada $i \in \mathbb{J}_n$ existen $r_i > 0$ tal que $B(x, r_i) \subset G_i$. Sea $r\colon = \min\{r_i \colon i \in \mathbb{J}_n\} > 0$. Veamos que $B(x, r) \subset G$. En efecto, si $y \in B(x, r)$ entonces para cada $i \in \mathbb{J}_n$, $d(x, y) < r \leq r_i$. Así, para cada $i \in \mathbb{J}_n$, $y \in B(x, r_i)$ y como $B(x, r_i) \subset G_i$, se sigue que para cada $i \in \mathbb{J}_n$, $y \in G_i$. Luego $y \in G$. En consecuencia $x \in G^\circ$ y así G es abierto.

(d) Sea $F\colon = \bigcup_{i=1}^n F_i$. Entonces, $F^c = \left(\bigcup_{i=1}^n F_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^n F_i^c$ es abierto y de esta manera F es cerrado.

$\square$

Teorema 1.4.13. *Sean (X, d) un espacio métrico y $E \subset X$, entonces:*

(a) *$\overline{E}$ es cerrado.*

(b) *$E = \overline{E}$ si y solo si E es cerrado.*

(c) *$\overline{E} \subset F$ para todo conjunto cerrado $F \subset X$ tal que $E \subset F$*

Demostración.

(a) Demostremos que $X \setminus \overline{E} = (X \setminus E)^\circ$. En efecto, $x \in X \setminus \overline{E}$ si y solo si $B(x,r) \cap E = \emptyset$ para algún $r > 0$, lo cual equivale a $B(x,r) \subset X \setminus E$ para algún $r > 0$. O sea que $x \in (X \setminus E)^\circ$. Ahora bien, como $X \setminus \overline{E}$ es abierto, entonces $\overline{E}$ es cerrado.

(b) Si $E = \overline{E}$, entonces se sigue de (a) que E es cerrado. Recíprocamente, si E es cerrado entonces $E' \subset E$. Así, $\overline{E} = E \cup E' = E$.

(c) Sea $F \subset X$ cerrado tal que $E \subset F$. Luego $\overline{E} \subset \overline{F} = F$

□

1.5. Sucesiones y series convergentes

1.5.1. Sucesiones

Definición 1.5.1. Una secuencia en X es una función $f : \mathbb{N} \to X$, que asocia a cada número natural n un punto $x_n \in X$. Las notaciones para una secuencia son $(x_1, ..., x_n, ...)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o simplemente (x_n). También se suele usar la notación $\{x_n\}$ para indicar una sucesión.

Recordemos que una sucesión finita (x_n) (de longitud r) con elementos pertenecientes a un conjunto X, se define como una función $f\colon \{1, 2, ..., r\} \to X$, donde el elemento (x_n) corresponde a $f(n)$. Por ejemplo, la finitud, (de longitud 4) de números primos menores que 10 (2,3,5,7) corresponde a la función $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{P}$ (donde $\mathbb{P}$ es el conjunto de números primos) definida por: $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ y $f(4) = 7$.

Definición 1.5.2. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (x_n) en X se dice convergente si existe $x \in X$ con la siguiente propiedad: para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica que $d(x_n, x) < \epsilon$. En este caso, decimos también que (x_n) converge hacia x, o que x es el límite de (x_n) y escribimos $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, o $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Si la sucesión (x_n) no converge, decimos que diverge

Recordemos que el conjunto $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ es el rango de (x_n). El rango de una sucesión puede ser un conjunto finito, o puede ser infinito. Se dice que la sucesión (x_n) es acotada si lo es su rango. Por ejemplo, sea $X = \mathbb{R}^2$. Si $s_n = 1$ $(n = 1, 2, 3, ...)$, entonces (s_n) converge hacia 1, es acotado y tiene un rango finito.

Por otra parte, la convergencia depende del espacio métrico X. Por ejemplo, la sucesión $(1/n)$ converge a 0 en $\mathbb{R}$, pero no lo hace en el conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ (con $d(x, y) = |x - y|$). En casos de posible ambigüedad, debemos ser más precisos y especificar convergente en X, mejor que solamente convergente.

Teorema 1.5.3. *Sean (x_n) una sucesión en un espacio métrico (X, d) y $E \subset X$.*

(a) *Si $x, x' \in X$ y (x_n) converge a x y a x', entonces $x = x'$.*

(b) *Si (x_n) converge, entonces (x_n) es acotada.*

(c) *x es un punto adherente de E si, y sólo si, existe una sucesión (x_n) en E tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

Demostración.

(a) Sea $\varepsilon > 0$ dado. Por Definición 1.5.2, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n \geq N_1$ implica $d(x_n, x) < \varepsilon/2$ y $n \geq N_2$ implica $d(x_n, x') < \varepsilon/2$. Sea $N\colon = \max\{N_1, N_2\}$, luego por la desigualdad triangular, si $n \geq N$, entonces $d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $0 \leq d(x, x') < \varepsilon$; por lo cual $d(x, x') = 0$, es decir, $x = x'$.

(b) Digamos que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$, entonces para $\varepsilon = 1$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < 1$ para todo $n > N$. Sea $r\colon = \max\{1, d(x_1, x), \dots, d(x_N, x)\}$. Es fácil ver que $x_n \in B[x, r]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto (x_n) es acotada.

(c) Supongamos que existe una sucesión (x_n) en E tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. Sea $\varepsilon > 0$, luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x, \varepsilon)$ para todo $n \geq N$. En particular, $x_N \in B(x, \varepsilon)$ y así $B(x, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$, es decir, $x \in \overline{E}$. Recíprocamente, si $x \in \overline{E}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $B(x, 1/n) \cap E \neq \varnothing$. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$ tal que $d(x_n, x) < 1/n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, si $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $1/N < \varepsilon$; luego, si $n \geq N$, entonces $d(x_n, x) < 1/n \leq 1/N < \varepsilon$. Por lo tanto $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. $\square$

Teorema 1.5.4. *Supongamos que (t_n) y (s_n) son sucesiones complejas tales que* $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ *y* $\lim_{n\to\infty} s_n = s$*, entonces:*

(a) $\lim_{n\to\infty}(t_n + s_n) = t + s.$

(b) $\lim_{n\to\infty} c\,t_n = c\,t,$ *para todo* $c \in \mathbb{C}.$

(c) $\lim_{n\to\infty}(c + t_n) = c + t,$ *para todo* $c \in \mathbb{C}.$

(d) $\lim_{n\to\infty} t_n\, s_n = t\, s.$

(e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n} = \dfrac{1}{s},$ *siempre que* $s_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $s \neq 0.$

Demostración.

(a) Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $s_n \to s$ y $t_n \to t$ cuando $n \to \infty$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N_1$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_n - t| < \varepsilon/2$ para todo $n \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para $n \geq N$ se tiene:

$$|(t_n + s_n) - (t + s)| \leq |t_n - t| + |s_n - s| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty}(t_n + s_n) = t + s$.

(b) Sean $c \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$ dado. Como $t_n \to t$ cuando $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$, $|t_n - t| < \varepsilon/(1 + |c|)$. Luego para cada $n \geq N$ tenemos que:

$$|c\,t_n - c\,t| = |c||t_n - t| \leq (1 + |c|)|t_n - t| < \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} c\,t_n = c\,t$ para todo $c \in \mathbb{C}$.

(c) Sean $c \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$. Como $t_n \to t$ cuando $n \to \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|t_n - t| < \varepsilon$ para cada $n \geq N$. Luego si $n \geq N$, entonces

$$|(c + t_n) - (c + t)| = |t_n - t| < \varepsilon.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} c + t_n = c + t$ para todo $c \in \mathbb{C}$.

(d) Primero veamos que $(t_n - t)(s_n - s) \to 0$ cuando $n \to \infty$. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $s_n \to s$ y $t_n \to t$ cuando $n \to \infty$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}$ para todo $n \geq N_1$ y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|t_n - t| < \sqrt{\varepsilon}$ para todo $n \geq N_2$. Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, entonces para todo $n \geq N$ se tiene

$$|(t_n - t)(s_n - s)| = |t_n - t| + |s_n - s| < \sqrt{\varepsilon}\sqrt{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Ahora bien, puesto que $s_n t_n = (t_n - t)(s_n - s) + s t_n + t s_n - st$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces de (a) y (b) se sigue que $\lim_{n\to\infty} t_n\, s_n = t\, s$.

(e) Como $s \neq 0$, $|s|/2 > 0$; por tanto existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N_1$, $|s_n - s| < |s|/2$. De esto se sigue que

$$|s_n| > \frac{|s|}{2}, \quad \text{para todo } n \geq N_1. \tag{1.4}$$

Sea $\varepsilon > 0$ dado. Como $s_n \to s$ cuando $n \to \infty$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|s_n - s| < \tfrac{1}{2}|s|^2\varepsilon, \quad \text{para todo } n \geq N_2. \tag{1.5}$$

Ahora bien, sea $N = \max\{N_1, N_2\}$, así para todo $n \geq N$ se sigue de (1.4) y (1.5) que

$$\left|\frac{1}{s_n} - \frac{1}{s}\right| = \frac{|s_n - s|}{|s||s_n|} \leq \frac{2|s_n - s|}{|s|^2} < \varepsilon.$$

Entonces $\lim_{n\to\infty} 1/s_n = 1/s$, siempre que $s_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $s \neq 0$. □

Definición 1.5.5 (Sucesión de Cauchy)**.** Sean (X, d) un espacio métrico y (x_n) una sucesión en X. Diremos que (x_n) es una sucesión de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq N$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. El espacio métrico (X, d) se dice que es completo si toda sucesión de Cuachy contenida en X converge a un elemento de X.

Enunciaremos el siguiente teorema útil para averiguar si una sucesión dada converge o no, sin conocer el límite al que pueda tender. Su demostración la omitiremos y se puede encontrar en cualquier libro de cálculo.

Teorema 1.5.6. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces:*

(a) *Toda sucesión convergente en X, es una sucesión de Cauchy.*

(b) *Si X es compacto y (x_n) es una sucesión de Cauchy en X, entonces (x_n) converge a algún punto de X.*

(c) *Toda sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^k$ converge*

1.5.2. Series

Definición 1.5.7. Dada una sucesión (a_n) usaremos la notación

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \quad (p \leq q)$$

para expresar la suma $a_p, a_{p+1}, ..., a_q$. A (a_n) le asociamos una sucesión (s_n), donde $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. También usaremos para (s_n) la expresión simbólica $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ o, más brevemente

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.6}$$

Al símbolo (1.6) le llamaremos serie infinita o solamente serie. A los números s_n se le llama sumas parciales de la serie. Si (s_n) converge hacia s, diremos que la serie converge y escribiremos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Al número s se le llama suma de la serie; pero debe entenderse claramente que s es el límite de una sucesión de sumas y que no se obtiene simplemente por adición. Si (s_n) diverge, se dice que la serie diverge.

Cuando no haya peligro de ambigüedad, o si la distinción es de escasa importancia, escribiremos simplemente $\sum a_n$ en lugar de (1.6).

El **criterio de Cauchy** (el teorema 1.5.6) puede ser enunciado de nuevo en la forma siguiente:

Teorema 1.5.8. *$\sum a_n$ converge si, y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe un entero N tal que*

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \epsilon \quad \textit{si } m \geq n \geq N$$

En particular, tomando $m = n$, la expresión anterior se convertiría en $|a_n| \leq \epsilon$, $(n \geq N)$. En otras palabras, si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Existen varios criterios para verificar si una serie es convergente o no, entre ellos el criterio de comparación:

Teorema 1.5.9.

(a) *Si $|a_n| \leq c_n$ para $n \geq N_0$, donde N_0 es un entero dado, y $\sum c_n$ converge, también converge $\sum a_n$*

(b) *Si $a_n \geq b_n \geq 0$ para $n \geq N_0$ y $\sum b_n$ diverge, también diverge $\sum a_n$*

Demostración.

(a) Dado $\epsilon > 0$, existe $N \geq N_0$ tal que, $m \geq n \geq N$ implica que

$$\sum_{k=n}^{m} c_k \leq \epsilon$$

por el criterio de Cauchy. De aquí, que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k \leq \epsilon$$

La prueba se sigue por el teorema 1.5.8

(b) Esta parte se deduce de (a), porque si $\sum a_n$ converge, igual debe suceder con $\sum d_n$

□

Por ejemplo, nos preguntamos, ¿converge o diverge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5n^n-4}$?

Podríamos pensar que diverge, pues el n-ésimo término se comporta como $1/5n$ para n grande. De hecho

$$\frac{n}{5n^2-4} > \frac{n}{5n^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}$$

Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}$ diverge, pues es un quinto de la serie armónica. Así, por el criterio de comparación, la serie dada también diverge.

Serie geométrica

una serie de la forma $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + ...$ donde $a \neq 0$, es una **serie geométrica**.

Ejemplo 1.5.10. Demostremos que una serie geométrica converge y tiene suma $S = a/(1-r)$ si $|r| < 1$, pero diverge si $|r| \geq 1$.

En efecto, sea $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$. Si $r = 1$, $S_n = na$, lo cual crece sin límite, de modo que (S_n) diverge. Si $r \neq 1$, podemos escribir

$$S_n - rS_n = (a + ar + ... + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + ... + ar^n) = a - ar^n$$

y entonces

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{a}{1-r}r^n$$

Ahora bien, si $|r| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ y así $S = \lim_{n\to\infty} S_n = a/(1-r)$. Si $|r| > 1$ o $r = -1$, la sucesión (r^n) diverge y, en consecuencia, también lo hace S_n.

1.6. Sucesiones y series de funciones

Definición 1.6.1. Sean E un conjunto no vacío y (Y, d) un espacio métrico. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n \colon E \to Y$. Si para todo $x \in E$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge en Y, podemos definir una función $f \colon E \to Y$ por

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in E \tag{1.7}$$

Bajo estas circunstancias, decimos que $\{f_n\}$ converge en E y que f es el límite, o la función límite, de $\{f_n\}$. A veces utilizaremos una terminología más descriptiva y diremos que "$\{f_n\}$ converge a f puntualmente en E" si (1.7) se cumple. Del mismo modo, cuando $Y = \mathbb{C}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge para todo $x \in E$, y si definimos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ para todo } x \in E$$

La función f se le llama suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$

Definición 1.6.2 (Convergencia uniforme)**.** Sea E un conjunto no vacío y (Y, d) un espacio métrico. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n \colon E \to Y$ y $f \colon E \to Y$. Decimos que las sucesión de funciones $\{f_n(x)\}$ converge uniformemente en E a f si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon \tag{1.8}$$

Para cada $n \geq N$ y todo $x \in E$.

Es claro que toda sucesión uniformemente convergente es puntualmente convergente.

Definición 1.6.3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones complejas definidas en un conjunto E. Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en E si la sucesión $\{s_n\}$ de sumas parciales definidas por

$$s_n(x) \colon = \sum_{i=1}^{n} f_i \text{ para todo } \ x \in E$$

converge uniformemente en E.

Teorema 1.6.4 (Test-M de Weierstrass). *Sea $\{f_n\}$ una secuencia de funciones de variable real o compleja definidas en un conjunto A, y supongamos que para cada $\{f_n\}$ existe una constante positiva M_n tal que*

(i) $|f_n(x)| \leq M_n$ *para todo* $n \geq 1$ *y todo* $x \in A$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *converge.*

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *converge uniformemente en* A.

Demostración.

Sea $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$. Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge y $M_n > 0$ para cada n, entonces por el criterio de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$ para $m > n > N$. Ahora bien, para cada $x \in A$ y $m > n > N$ se tiene

$$|s_m(x) - s_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k < \varepsilon$$

La secuencia $s_n(x)$ es, por lo tanto, una secuencia de Cauchy en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, y por completitud, converge a algún $s(x)$. Para $n > N$ podemos escribir

$$|s(x) - s_n(x)| = \left|\lim_{m\to\infty} s_m(x) - s_n(x)\right| = \lim_{m\to\infty} |s_m(x) - s_n(x)| \leq \varepsilon$$

Esto significa que la secuencia s_n de sumas parciales converge uniformemente a la función s. Por lo tanto, por definición, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge uniformemente.

□

Ejemplo 1.6.5. Sean $E\colon = [0,1]$, $Y\colon = \mathbb{R}$ y $f_n(x) = x^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\{f_n\}$ converge puntualmente a la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 0 \leq x < 1. \\ 1 & , \text{ si } x = 1. \end{cases}$$

Sin embargo, la convergencia no es uniforme. En efecto, fijemos $\varepsilon_0 = 1/2 > 0$ y sea $N \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como $x^N \to 1$ cuando $x \to 1^-$, existe $x_0 \in (0,1)$ tal que $1/2 < x_0^N$. Hemos demostrado que: para cada $N \in \mathbb{N}$ existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $|f_N(x_0) - f(x_0)| = x_0^N > 1/2 = \varepsilon_0$.

1.7. Espacios normados

Definiremos ahora lo que se entiende por una norma en un espacio vectorial, llegando así a la noción general de espacio normado. Pero antes, recordemos la definición de un espacio vectorial.

Definición 1.7.1. Un espacio vectorial (o espacio lineal) sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto no vacío X de elementos $x, y, \cdots$ con dos operaciones algebraicas:

(1) Suma de vectores. Es decir, existe un mapeo fijo $X \times X \to X$ denotado por $(x, y) \mapsto x+y$ satisfaciendo los siguientes axiomas:

  (a) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (propiedad asociativa)

  (b) $x + y = y + x$ (propiedad conmutativa)

  (c) Existe un vector neutro, es decir, existe un vector 0 tal que $x + 0 = 0 + x = 0$ para cada $x \in X$

  (d) Para cada vector x existe un vector $-x$ tal que $x + (-x) = 0$

(2) Multiplicación por escalar. Existe un mapeo fijo $\mathbb{K} \times X \to X$ denotado por $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ satisfaciendo los siguientes axiomas:

  (a) $(\lambda\alpha)x = \lambda(\alpha x)$ (propiedad asociativa)

  (b) $(\lambda + \alpha)x = \lambda x + \alpha x$ (propiedad distributiva con respecto a la suma escalar)

  (c) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ (propiedad distributiva con respecto a la suma vectorial)

  (d) $1 \cdot x = x$ (existe el elemento neutro 1 de $\mathbb{K}$)

  $\mathbb{K}$ se denomina campo escalar (o campo de coeficientes) del espacio vectorial X. Decimos que X es un espacio vectorial real cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (el cuerpo de los número reales), y un espacio vectorial complejo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (el cuerpo de los números complejos).

  Nota. Recordemos que un subconjunto E de un espacio vectorial X es un subespacio de X si para todo $x, y \in E$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda x + y \in E$. Además, todo subespacio de un espacio vectorial contiene el vector cero.

Definición 1.7.2 (Norma)**.** Una norma en un espacio vectorial (real o complejo) X es una función $|| \cdot ||: X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(1) $||x|| \geq 0$

(2) $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(3) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

(4) $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Un espacio normado es un par $(X, ||\cdot||)$ formado por un espacio vectorial X y una norma $||\cdot||$.

Nota. Si quitamos la condición (2) de la definición anterior, la aplicación $||\cdot||$ recibe el nombre de seminorma.

Todo espacio normado $(X, ||\cdot||)$ es a su vez un espacio métrico, pues la norma define una métrica d en X la cual es dada por $d(x,y) = ||x-y||$, y es llamada la métrica inducida por la norma $||\cdot||$.

Proposición 1.7.3. *La norma es continua, es decir, $x \mapsto ||x||$ es un mapeo continuo de $(X, ||\cdot||)$ en $\mathbb{R}$.*

Demostración.

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos una sucesión (x_n) en X tal que $x_n \to x$. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $||x_n - x|| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Como $|||x_n|| - ||x||| \leq ||x_n - x||$ por la desigualdad triangular, entonces $|||x_n|| - ||x||| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

□

Definición 1.7.4. Sea X un espacio vectorial y $E \subset X$. Decimos que E es **convexo** si para todo $x, y \in E$ y todo $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $(1-\lambda)x + \lambda y \in E$

Observación 1.7.5. En un espacio normado $(X, ||\cdot||)$, la norma $||\cdot||$ induce una topología bajo la cual X es un espacio vectorial topológico localmente convexo. La colección $\{B(x,y)\}_{(x,r)\in X\times\mathbb{R}^+}$ es una base para la topología fuerte, (es decir, la topología inducida por la norma) y cada bola $B(x,r)$ es convexa.

Definición 1.7.6. Sea X un espacio vectorial normado, en el que se define la métrica $d(x,y) = ||x-y||$. Si (X,d) es completo, X se dice espacio de **Banach**.

Definición 1.7.7. Un espacio con producto interno (o pre-Hilbert) es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ satisfaciendo las siguientes propiedades:

(1) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

(2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.

(3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

(4) $\langle x, x\rangle \geq 0$ y $\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Observación 1.7.8. Un producto interno en X define una norma en X dada por $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ y una métrica en X dada por $d(x, y) = ||x-y|| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}$. Esto nos permite deducir que todo espacio con producto interno es, en particular, un espacio normado.

Definición 1.7.9. Un espacio de **Hilbert** es un espacio con producto interno que es completo, (con respecto a la métrica definida por el producto interior). Por lo tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interno.

Capítulo 2

Extensión de funciones continuas

Los problemas de extensión adoptan la siguiente forma general. Consideremos dos espacios X e Y y, sea $F(X,Y)$ una clase de funciones de X a Y. Sea A un subconjunto de X, y sea $F(A,Y)$ una clase de funciones de A a Y. El problema de la extensión es determinar si cada función en $F(A,Y)$ tiene una extensión en $F(X,Y)$. Estudiaremos en este capítulo algunos teoremas importantes sobre extensión de funciones continuas definidas en ciertos espacios.

Definición 2.0.1. Sea $A \subset X$. Decimos que un mapeo $F\colon X \to Y$ es una extensión de $f\colon A \to Y$ si $F(x) = f(x)$ para todo $x \in A$, es decir, cuando $F|_A = f$. Diremos que f se extiende continuamente a X cuando F es continua.

2.1. El teorema de extensión de Tietze en espacios métricos

Estamos interesados en estudiar condiciones bajo las cuales una función continua definida en un subespacio puede ser continuamente extendida a todo el espacio. Presentaremos aquí nuestro primer resultado sobre espacios métricos.

Teorema 2.1.1 (Teorema de extensión de Tietze-Urysohn). *Sean (X,d) un espacio métrico y A un subconjunto cerrado no vacío de X. Si $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una aplicación continua y acotada, entonces existe una aplicación continua $g\colon X \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ y*

$$\inf_{x\in X} g(x) = \inf_{y\in A} f(y) \qquad y \qquad \sup_{x\in X} g(x) = \sup_{y\in A} f(y).$$

Demostración.

Sean $m\colon = \inf_{y\in A} f(y)$ y $M\colon = \sup_{y\in A} f(y)$. Si $m = M$, entonces f resulta constante en A y de esta manera la definición de g es evidente. En lo que sigue asumiremos que $m < M$ y consideremos los siguientes casos:

Caso 1: $m = 1$ y $M = 2$. Definamos $h\colon X \smallsetminus A \to \mathbb{R}$ por $h(x) = \inf\{f(y)d(x,y)\colon y \in A\}$ y $g\colon X \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{h(x)}{d(x,A)} & \text{si} \quad x \in X \smallsetminus A, \\ f(x) & \text{si} \quad x \in A. \end{cases} \tag{2.1}$$

Demostremos inicialmente que $1 \leq g(x) \leq 2$ para todo $x \in X \smallsetminus A$. En efecto, fijemos $x \in X \smallsetminus A$; nótese que $d(x,A) > 0$ puesto que A es cerrado. Como $1 \leq f(y)$ para todo $y \in A$, entonces $d(x,A) \leq d(x,y) \leq f(y)d(x,y)$ para todo $y \in A$ y por tanto $d(x,A) \leq h(x)$. De otro lado, como $f(y) \leq 2$ para todo $y \in A$, entonces $h(x) \leq f(y)d(x,y) \leq 2d(x,y)$ para todo $y \in A$ y por consiguiente $h(x) \leq 2d(x,A)$. En consecuencia $1 \leq g(x) \leq 2$. De esto se deduce que

$$\inf_{x\in X} g(x) = \min\left\{\inf_{x\in A} g(x), \inf_{x\in X\smallsetminus A} g(x)\right\} = \min\left\{1, \inf_{x\in X\smallsetminus A} g(x)\right\} = 1.$$

Similarmente se demuestra que $\sup_{x\in X} g(x) = 2$. Finalmente, demostremos que g es continua en X. Fijemos $x_0 \in X$. Si $x_0 \in A^\circ$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B\colon = B(x_0,\delta) \subset A$. Dado que f es continua en B y $g = f$ en B, se sigue que g es continua en x_0. Supongamos que $x_0 \in X \smallsetminus A$; como $d(\cdot, A)$ es continua y positiva en $X \smallsetminus A$, para establecer la continuidad de g en x_0, es suficiente probar que h es continua en x_0. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, elijamos $\delta\colon = \min\{r, \varepsilon/2\}$, donde $r\colon = d(x_0, A)$. Nótese que $B(x_0,\delta) \subset X \smallsetminus A$ y si $x \in B(x_0,\delta)$, entonces para todo $y \in A$:

$$h(x) \leq f(y)d(x,y) \leq f(y)[d(x,x_0) + d(x_0,y)] < f(y)\delta + f(y)d(x_0,y) \leq \varepsilon + f(y)d(x_0,y);$$

lo cual implica que $h(x) \leq h(x_0) + \varepsilon$. Análogamente, se prueba que $h(x_0) \leq h(x) + \varepsilon$. De esta manera $|h(x) - h(x_0)| \leq \varepsilon$. Supongamos que $x_0 \in \partial A = A \cap \overline{X \smallsetminus A}$ y sea $\varepsilon > 0$; como f es continua en A y $x_0 \in A$, existe $\eta > 0$ tal que

$$y \in A \cap B(x_0,\eta) \quad \text{implica} \quad |f(y) - f(x_0)| \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Sean $\delta\colon = \eta/4$ y $x \in B(x_0,\delta)$ fijo. Si $x \in A$, se sigue de (2.2) que $|g(x) - g(x_0)| = |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.

Si $x \notin A$, sean $C = A \cap B(x_0, \eta)$ y $D = A - C$. Luego, para cada $y \in D$ se tiene que $d(x,y) \geq d(x_0,y) - d(x_0,x) \geq \eta - \delta = 3\eta/4 = 3\delta$ porque $d(x_0,y) \geq \eta$ y $d(x_0,x) \leq \delta$. Como $f(y) \geq 1$, obtenemos $f(y)d(x,y) \geq 3\delta$ y así $\inf_{y\in D} f(y)d(x,y) \geq 3\delta$.

Por otro lado, $f(x_0)d(x,x_0) \leq 2d(x,x_0) \leq 2\delta$ puesto que $f(x_0) \leq 2$ y $d(x,x_0) \leq \delta$. Así, $\inf_{y\in C} f(y)d(x,y) \leq 2\delta$. Ahora bien,

$$h(x) = \inf_{y\in A}(f(y)d(x,y)) = \min\left\{\inf_{y\in C} f(y)d(x,y), \inf_{y\in D} f(y)d(x,y)\right\} = \inf_{x\in C} f(y)d(x,y)$$

Nótese además que

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y) = \min\left\{\inf_{y\in C} d(x,y), \inf_{y\in D} d(x,y)\right\} = \inf_{y\in C} d(x,y) = d(x,C)$$

Para concluir, observe que $\inf_{y\in C} f(y)d(x,y) \leq f(y)d(x,y) \leq (f(x_0)+\varepsilon)d(x,y)$ para todo $y \in C$, lo cual implica que $\inf_{y\in C} f(y)d(x,y)/(f(x_0)+\varepsilon) \leq d(x,y)$ para todo $y \in C$. En consecuencia $\inf_{y\in C} f(y)d(x,y)/(f(x_0)+\varepsilon) \leq \inf_{y\in C} d(x,y)$, de donde se obtiene que $\inf_{y\in C} f(y)d(x,y) \leq (f(x_0)+\varepsilon)\inf_{y\in C} d(x,y)$. Haciendo un razonamiento análogo se demuestra que $(f(x_0)-\varepsilon)\inf_{y\in C} d(x,y) \leq \inf_{y\in C} f(y)d(x,y)$.

Finalmente,

$$h(x) = \inf_{y\in A}(f(y)d(x,y) = \inf_{x\in C} f(y)d(x,y)) \leq (f(x_0)+\varepsilon)\inf_{y\in C} d(x,y) = (f(x_0)+\varepsilon)d(x,A)$$

$$h(x) = \inf_{y\in A}(f(y)d(x,y) = \inf_{x\in C} f(y)d(x,y)) \geq (f(x_0)-\varepsilon)\inf_{y\in C} d(x,y) = (f(x_0)-\varepsilon)d(x,A)$$

Esto prueba que $|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Por lo tanto, g es continua en X.

Caso 2. m<M. Para el caso general $m < M$, sean $\alpha = 1/(M-m)$, $\beta = 1 - m/(M-m)$ y $F\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \alpha f(x) + \beta$. Note que

$$\begin{aligned} & m \leq f(x) \leq M \\ \implies & 0 \leq f(x) - m \leq M - m \\ \implies & 0 \leq \frac{1}{M-m}[f(x) - m] \leq 1 \\ \implies & 1 \leq \frac{f(x)}{M-m} - \frac{m}{M-m} + 1 \leq 2 \\ \implies & 1 \leq F(x) \leq 2 \end{aligned}$$

Claramente $\text{ínf}_A F = 1$, $\sup_A F = 2$ y F es continua. Por el caso anterior, existe $G\colon X \to \mathbb{R}$ continua tal que $G|_A = F$, $\text{ínf}_A F = \text{ínf}_X G$ y $\sup_A F = \sup_X G$. Definamos $g\colon X \to \mathbb{R}$ por $g(x) = G(x)/\alpha - \beta/\alpha$. Evidentemente g es continua y, para todo $x \in A$

$$g(x) = G(x)/\alpha - \beta/\alpha = F(x)/\alpha - \beta/\alpha = (\alpha f(x) + \beta)/\alpha - \beta/\alpha = f(x) + \beta/\alpha - \beta/\alpha = f(x)$$

Además

$$\begin{aligned} \operatorname*{ínf}_X g &= \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname*{ínf}_X G\right) - \beta/\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(\operatorname*{ínf}_A F\right) - \beta/\alpha = 1/\alpha - \beta/\alpha = (1-\beta)/\alpha = m = \operatorname*{ínf}_A f \\ \sup_X g &= \frac{1}{\alpha}\left(\sup_X G\right) - \beta/\alpha = \frac{1}{\alpha}\left(\sup_A F\right) - \beta/\alpha = 2/\alpha - \beta/\alpha = (2-\beta)/\alpha = M = \sup_A f \end{aligned}$$

Caso 3. f no acotada. Si f no está acotada, considere el homeomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$ dado por $\varphi(x) = x/(1+|x|)$ y sea $h = \varphi \circ f\colon A \to (-1,1)$. Claramente h es continua. Como $(-1,1) \subset [-1,1]$, por la primera parte ya probada existe $H\colon X \to [-1,1]$ continua tal que $H|_A = h$ (véase también teorema 1.3.3).

Sea $B = H^{-1}(\{-1,1\})$. Como H es continua, B es cerrado en X; además, dado que $H(A) = h(A) \subset (-1,1)$, entonces $A \cap B = \emptyset$.

Definamos $\phi\colon A \cup B \to [0,1]$ dada por $\phi(x) = 1$ si $x \in A$ y $\phi(x) = 0$ si $x \in B$. Esta función está bien definida, y además es continua por el lema del pegamento; así, por la parte acotada, existe $\Phi\colon X \to [0,1]$ tal que $\Phi(x) = 1$ si $x \in A$ y $\Phi(x) = 0$ si $x \in B$.

Consideremos la función continua $\psi(x) = \Phi(x)H(x)$ par todo $x \in X$. Afirmamos que $|\psi(x)| < 1$ para todo $x \in X$. En efecto, si $x \in B$, se obtiene $\psi(x) = \Phi(x)H(x) = 0 \cdot H(x) = 0 \in (-1,1)$. Si $x \notin B$, entonces $|\psi(x)| = |\Phi(x)||H(x)| \leq |H(x)| < 1$. Note además que si $x \in A$, entonces $\psi(x) = \Phi(x)H(x) = 1 \cdot H(x) = H(x) = h(x)$. Esto significa que la aplicación $\psi\colon X \to (-1,1)$ es una extensión continua de h.

Finalmente, sea $g = \varphi^{-1} \circ \psi$ y veamos que g es la extensión requerida. En efecto, es claro que g es una aplicación continua por ser la composición de dos funciones continuas, además, si $x \in A$, entonces $g(x) = \varphi^{-1}(\psi(x)) = \varphi^{-1}(h(x)) = f(x)$. $\square$

Cabe resaltar que este teorema se puede generalizar reemplazando $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}^J$ para algún conjunto de indexación J.

Ejemplo 2.1.2. La condición de que A sea cerrado en el teorema 2.1.1 es esencial. Considere por ejemplo $X = [0,1]$, $A = (0,1]$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$. Claramente f es continua en A; sin embargo, no puede ser continuamente extendida a todo X

Ejemplo 2.1.3. Sea ℓ^∞ el espacio de todas las sucesiones acotadas de números complejos, dotados de la métrica

$$d_\infty\big((x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\big)=\sup\big\{|x_n-y_n|\,|\,n\in\mathbb{N}\big\}.$$

Sea C el subespacio de ℓ^∞ que consta de todas las sucesiones convergentes. El mapeo

$$\begin{array}{rccc} L\colon & C & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (x_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & \lim\limits_{n\to\infty} x_n \end{array}$$

es continuo y C es un subespacio cerrado de ℓ^∞. Para probar esto, observe primero que L es lineal puesto que

$$L(\alpha x+y)=\lim_{n\to\infty}(\alpha x_n+y_n)=\alpha\lim_{n\to\infty}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n=\alpha L(x)+L(y)$$

Para ver que es continua, necesitamos ver que $|L(x)|\leq M||x||$ para alguna constante M, pero esto es fácil porque

$$|L(x)|=\left|\lim_{n\to\infty}x_n\right|=\lim_{n\to\infty}|x_n|\leq||x||$$

Finalmente, probemos que C es cerrado en ℓ^∞. Sean (x_n) sucesión en C y $x_0\in\ell^\infty$ tal que $x_n\to x_0$ cuando $n\to\infty$. Veamos que $x_0\in C$. Digamos que $x_n=(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ y $x_0=(x_k^0)_{k\in\mathbb{N}}$. Para probar que $x_0\in C$ es suficiente probar que es de Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon>0$ dado. Como $x_n\to x_0$ cuando $n\to\infty$, existe $m\in\mathbb{N}$ tal que $||x_m-x_0||_{\ell^\infty}<\varepsilon/3$. De otro lado, como $x_m\in C$, entonces x_m es de Cuachy y así, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que $|x_j^m-x_k^m|<\varepsilon/3$ para todo $j,k>N$. Ahora bien, para $j,k>N$ se tiene

$$\begin{aligned}|x_j^0-x_k^0|&\leq|x_j^0-x_j^m|+|x_j^m-x_k^m|+|x_k^m-x_k^0|\\&\leq||x_0-x_m||_{\ell^\infty}+|x_j^m-x_k^m|+||x_m-x_0||_{\ell^\infty}\\&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

Por lo tanto, según el teorema de extensión de Tietze, podemos extender L a una función continua de ℓ^∞ a $\mathbb{C}$.

2.2. El teorema de extensión de Tietze en espacios topológicos

Definición 2.2.1. Un espacio topológico $(X,\mathscr{T})$ se dice que es normal si para cada par A y B de conjuntos cerrados disjuntos de X, existen conjuntos abiertos disjuntos $U,V\subset X$ tales que $A\subset U$ y $B\subset V$.

Proposición 2.2.2. *Si $(X, \mathscr{T})$ es un espacio topológico, entonces los siguientes enunciados son equivalentes.*

(a) *X es normal*

(b) *Si A es un conjunto cerrado y G es un conjunto abierto con $A \subset G$, entonces existe un conjunto abierto U tal que $A \subset U \subset \overline{U} \subset G$*

(c) *Si A y B son conjuntos cerrados disjuntos, entonces existe un conjunto V tal que $B \subset V$ y $A \cap \overline{V} = \emptyset$*

Demostración.

Suponga (a) y sean A y G como en (b). Sea $B = X \setminus G$, y aplique la definición de normalidad para encontrar conjuntos abiertos disjuntos U y V con $A \subset U$, $B \subset V$. Así, $\overline{U} \subset X \setminus V \subset X \setminus B = G$. Ahora, suponga (b) y sean A y B como en (c). Si $G = X \setminus B$, entonces G es abierto y $A \subset G$. Así, existe un conjunto abierto U con $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$. Ponga $V = X \setminus \overline{U}$; claramente, $B \subset V$. Como $V \subset X \setminus U$, se tiene que $\overline{V} \subset X \setminus U$, y por tanto $A \cap \overline{V} = \emptyset$. Ahora suponga que (c) se cumple y sean $A, B \subset X$ subconjuntos cerrados disjuntos. Si V es como en (c) y $U = X \setminus \overline{V}$, entonces U y V son conjuntos abiertos disjuntos, $A \subset U$ y $B \subset V$. Por lo tanto, X es normal.

$\square$

Con el propósito de generalizar el teorema de extensión de Tietze a espacios topológicos normales, introduciremos uno de los teoremas profundos de la topología general. Este teorema es habitualmente llamado el "lema de Urysohn" y nos asegura la existencia de ciertas funciones continuas con valores reales sobre un espacio normal X. Es aplicado en muchas situaciones, puesto que todos los espacios métricos y todos los espacios de Hausdorff compactos son normales; además, es la herramienta básica usada al probar un gran número de teoremas importantes, entre ellos, el teorema de extensión de Tietze.

Teorema 2.2.3 (Lema de Urysohn). *Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico normal y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Sea $[a, b]$ un intervalo cerrado en la recta real. Entonces existe una aplicación continua $f \colon X \to [a, b]$ tal que $f(x) = a$ para todo $x \in A$ y $f(x) = b$ para todo $x \in B$.*

Demostración.

Necesitamos considerar solo el caso donde el intervalo en cuestión es el intervalo $[0,1]$; el caso general se sigue de este. El primer paso de la prueba es construir, usando la normalidad, una cierta familia U_p de conjuntos abiertos de X, indexada por los números racionales en $[0,1]$. Después se usan estos conjuntos para definir la función f.

Paso 1. Sea $P = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Puesto que P es numerable, lo podemos enumerar como

$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ donde los elementos de P están colocados de cualquier manera, y supondremos por comodidad que $p_0 = 1$ y $p_1 = 0$. Nuestro propósito es definir una colección $\{U_p : p \in P\}$ de subconjuntos abiertos de X, con la siguiente propiedad:

$$p < q \implies \overline{U}_p \subset U_q \qquad (*)$$

Así, los conjuntos U_p estarán simplemente ordenados por inclusión, del mismo modo que sus subíndices están ordenados por el orden usual en la recta real.

Definamos ahora los conjuntos U_p como sigue: en primer lugar, sea $U_1 = X \setminus B$. En segundo lugar, puesto que $A \subset U_1$ es cerrado, podemos elegir, por la proposición 2.2.2, un conjunto abierto U_0 tal que

$$A \subset U_0 \ \text{ y } \ \overline{U}_0 \subset U_1$$

Esta es la base de nuestra inducción, y obviamente satisface $(*)$.

Sea $P_n = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Supongamos que U_{p_k} está definido para todo $k = 1, 2, ..., n$ satisfaciendo $(*)$. Denotemos $r = p_{n+1}$; deseamos definir U_r. Consideremos el conjunto $P_{n+1} = P_n \cup \{r\}$. Es un subconjunto finito del intervalo $[0,1]$ y, como tal, tiene una ordenación simple derivada de la relación de orden usual $<$ sobre la recta real. En un conjunto finito simplemente ordenado, cada elemento (distinto del mínimo y del máximo) tiene un inmediato predecesor y un inmediato sucesor. Sabemos que p_0 y p_1 son el máximo y el mínimo del conjunto simplemente ordenado P_{n+1}, y $r \neq p_0, p_1$. Así, r tiene un inmediato predecesor p en P_{n+1} y un inmediato sucesor q en P_{n+1}. Los conjuntos U_p y U_q ya están definidos, y $\overline{U}_p \subset U_q$ por la hipótesis de inducción. Usando nuevamente la proposición 2.2.2, podemos encontrar un conjunto abierto U_r de X tal que

$$\overline{U}_p \subset U_r \ \text{ y } \ \overline{U}_r \subset U_q$$

Afirmamos que $(*)$ se cumple para cada par de elementos de P_{n+1}. Si ambos elementos pertenecen a P_n, $(*)$ se cumple por la hipótesis de inducción. Si uno de ellos es r y el otro es un punto $s \in P_n$ entonces, si $s \leq p$ se tiene $\overline{U}_s \subset \overline{U}_p \subset U_r$. Si $s \geq q$ se tiene $\overline{U}_r \subset U_q \subset U_s$. Así, para cada par de elementos de P_{n+1}, la relación $(*)$ se cumple. Por inducción tenemos U_p definido para todo $p \in P$.

Paso 2. El siguiente paso es extender esta definición a todo el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales. Ya hemos definido U_p para todo todo $p \in P = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Ahora, si $p \in (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$, sea $U_p = \emptyset$. Si $p \in (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$, sea $U_p = X$. Nótese que la colección $\{U_p \colon p \in \mathbb{Q}\}$ recién definida satisface la propiedad $p < q \implies \overline{U}_p \subset U_q$.

Paso 3. Para cada $x \in X$, definamos $\mathbb{Q}(x) \colon = \{p \in \mathbb{Q} \colon x \in U_p\}$. Es decir, definimos $\mathbb{Q}(x)$ como el conjunto de aquellos números racionales p tales que los conjuntos abiertos correspondientes U_p contienen a x. $\mathbb{Q}(x)$ está acotado inferiormente por 0, ya que si $p < 0$, entonces $U_p = \emptyset$ y así $x \notin U_p$. Además $\mathbb{Q}(x) \neq \emptyset$, ya que $x \in X = U_p$ para todo $p > 1$. Por tanto, $\mathbb{Q}(x)$ tiene un ínfimo el cual es un punto del intervalo $[0,1]$. Definamos $f \colon X \to [0,1]$ por

$$f(x) = \operatorname{ínf} \mathbb{Q}(x) = \operatorname{ínf}\{p \in \mathbb{Q} \colon x \in U_p\}$$

Paso 4. Probemos que f es la función deseada. Mostremos primero que f separa A y B, es decir, $f(x) = 0$ para todo $x \in A$ y $f(x) = 1$ para todo $x \in B$. En efecto, si $x \in A$, entonces $x \in U_0 \subset U_p$ para todo $p \geq 0$, por lo tanto, $\mathbb{Q}(x) = [0, \infty) \cap \mathbb{Q}$, y así $f(x) = 0$. De manera similar, si $x \in B$, entonces $x \notin U_1$, y así $x \notin U_p$ para todo $p \leq 1$. Por lo tanto $\mathbb{Q}(x) = (1, \infty) \cap \mathbb{Q}$ y así $f(x) = 1$.

Lo anterior ha sido fácil. La parte difícil es probar que f es continua. Para este propósito, primero demostraremos los siguientes hechos elementales:

(1) $x \in \overline{U}_p \implies f(x) \leq p$

(2) $x \notin U_p \implies f(x) \geq p$

Para probar (1), observe que si $x \in \overline{U}_p$, entonces $x \in U_q$ para todo $q > p$, y por lo tanto $(p, \infty) \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(x)$, lo cual implica que $f(x) \leq p$.

Para probar (2), observe que si $x \notin U_p$, entonces $x \notin U_q$ para todo $q \leq p$. Por lo tanto $(-\infty, p] \cap \mathbb{Q}(x) = \emptyset$, lo cual implica que $f(x) \geq p$.

Finalmente, probemos la continuidad de f. Dado un punto $x_0 \in X$ y un intervalo abierto $(c, d) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) \in (c, d)$, deseamos encontrar encontrar un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset (c, d)$. Elijamos números racionales p y q tales que $c < p < f(x_0) < q < d$. Afirmamos que el conjunto abierto $U = U_q \backslash \overline{U}_p$ es el entorno deseado de x_0. En primer lugar, observamos que $x_0 \in U$. Esto se verifica por el echo de que $f(x_0) < q$ implica, por la condición (2), que $x_0 \in U_q$, mientras el hecho de que $f(x_0) > p$ implica, por (1), que $x_0 \notin \overline{U}_p$. En segundo lugar, probemos que $f(U) \subset (c, d)$. Sea $x \in U$ entonces $x \in U_q \subset \overline{U}_q$, por lo que $f(x) \leq q$, por (1). Y $x \notin \overline{U}_p$, por lo que $x \notin U_p$ y $f(x) \geq p$, por (2). Así, $f(x) \in [p, q] \subset (c, d)$, como deseábamos.

□

Ejemplo 2.2.4. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A y B subconjuntos cerrados disjuntos de X. Entonces la función $f \colon X \to [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

es una función de Urysohn. En efecto, la función f está bien definida porque $\overline{A} \cap \overline{B} = A \cap B = \emptyset$ y por tanto su denominador nunca se anula. Por otro lado, nótese que $f(x) = 0$ si, y solamente si, $x \in \overline{A} = A$, y $f(x) = 1$ si, y solamente si, $x \in \overline{B} = B$. Finalmente, f es continua porque la distancia a un subconjunto cerrado es una función continua.

Teorema 2.2.5 (Teorema de extensión de Tietze).

Sea $(X, \mathscr{T})$ un espacio topológico normal y A un subespacio cerrado de X.

(a) *Cualquier aplicación continua de A en el intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $[a, b]$.*

(b) *Cualquier aplicación continua de A en $\mathbb{R}$ se puede extender a una aplicación continua de todo X en $\mathbb{R}$*

Demostración.

La idea de la prueba es construir una sucesión de funciones continuas s_n definida sobre todo el espacio X, tal que la sucesión s_n converge uniformemente, y tal que la restricción de s_n a A se aproxime cada vez más a f a medida que n aumenta. Entonces la función límite será continua y su restricción a A será igual a f.

Paso 1. Este paso involucra un proceso inductivo, así que, para ser más precisos, tomemos el caso $f\colon A \to [-r, r]$. Afirmamos que existe una función continua $g\colon X \to [-r, r]$ tal que

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq \tfrac{1}{3}r \quad \text{para todo } x \in X, \\ |f(a) - g(a)| &\leq \tfrac{2}{3}r \quad \text{para todo } a \in A. \end{aligned}$$

La función g se construye como sigue: dividamos el intervalo $[-r, r]$ en tres intervalos de igual magnitud a $\frac{2}{3}r$

$$I_1 = \left[-r, -\tfrac{1}{3}r\right], \quad I_2 = \left[-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r\right], \quad I_3 = \left[\tfrac{1}{3}r, r\right]$$

Sean B y C los subconjuntos

$$B = f^{-1}(I_1) \quad \text{y} \quad C = f^{-1}(I_3)$$

de A. Puesto que f es continua, B y C son subconjuntos cerrados y disjuntos de A. Por tanto, son cerrados en X. Por el lema de Urysohn, existe una función continua

$$g\colon X \to \left[-\tfrac{1}{3}r, \tfrac{1}{3}r\right]$$

con la propiedad de que $g(x) = -\frac{1}{3}r$, para cada $x \in B$, y $g(x) = \frac{1}{3}r$ para cada $x \in C$. Entonces $|g(x)| \leq \frac{1}{3}r$ para todo x. Afirmamos que para cada $a \in A$

$$|g(a) - f(a)| \leq \tfrac{2}{3}r.$$

Hay tres casos: si $a \in B$, entonces $f(a), g(a) \in I_1$. Si $a \in C$, entonces $f(a), g(a) \in I_3$. Y si $a \notin B \cup C$, entonces $f(a), g(a) \in I_2$. En cada caso, $|g(a) - f(a)| \leq \frac{2}{3}r$ (ver figura 2.1)

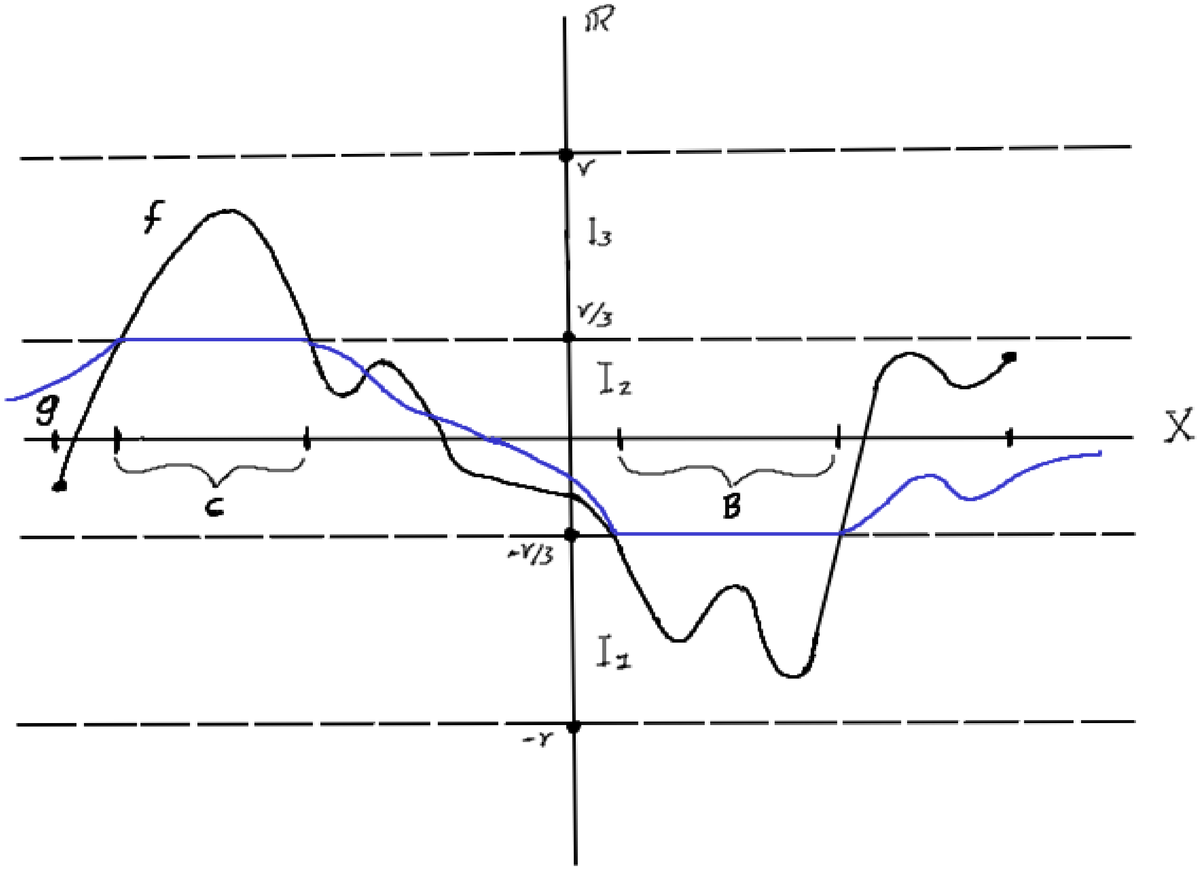

Figura 2.1: ilustración

Paso 2. A continuación probaremos la parte (a) del teorema de Tietze. Sin pérdida de generalidad, podemos sustituir el intervalo cerrado arbitrario $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ por el intervalo $[-1, 1]$. Sea $f\colon A \to [-1, 1]$ una aplicación continua. Entonces f satisface las hipótesis del *Paso 1*, con $r = 1$. Por tanto, existe una función g_1 continua con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_1(x)| \leq \tfrac{1}{3} \quad \text{para todo } \; x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a)| \leq \tfrac{2}{3} \quad \text{para todo } \; a \in A.$$

Consideremos a continuación la función $f - g_1$. Esta función aplica A en el intervalo $[-2/3, 2/3]$, por lo que podemos utilizar el *Paso 1* otra vez, haciendo $r = 2/3$. Obtenemos una función

g_2 con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_2(x)| \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right) \quad \text{para todo } x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - g_2(a)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \quad \text{para todo } a \in A.$$

Después aplicamos el *Paso 1* a la función $f - g_1 - g_2$. Y así sucesivamente. En el paso general, tenemos las funciones con valores reales $g_1, g_2, ..., g_n$, definidas sobre todo X, tales que

$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_n(a)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

para $a \in A$. Aplicando el *Paso 1* a la función $f - g_1 - \cdots - g_n$, con $r = (2/3)^n$, obtenemos una función g_{n+1} con valores reales, definida sobre todo X, tal que

$$|g_{n+1}(x)| \leq \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^n \quad \text{para todo } x \in X,$$
$$|f(a) - g_1(a) - \cdots - g_{n+1}(a)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{para todo } a \in A.$$

Por inducción, las funciones g_n están definidas para todo n.

Ahora definamos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$$

para todo $x \in X$. La convergencia de esta serie se deduce del teorema de comparación del cálculo; converge por comparación con la serie geométrica

$$\tfrac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Para probar que g es continua, debemos probar que la sucesión s_n (de sumas parciales) converge a g uniformemente, pero este hecho se sigue inmediatamente del "Test-M de Weierstrass", (ver teorema 1.6.4).

Probemos que $g(a) = f(a)$ para todo $a \in A$. Sea $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x)$, la n-ésima suma parcial de la serie. Entonces $g(x)$ es, por definición, el límite de la sucesión finita $s_n(x)$ de sumas parciales. Puesto que

$$\left| f(a) - \sum_{i=1}^{n} g_i(a) \right| = |f(a) - s_n(a)| \leq \left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

para todo $a \in A$, se sigue que $s_n(a) \to f(a)$. Por tanto, tenemos $f(a) = g(a)$, para todo $a \in A$.

Finalmente, como $(1/3)\sum(2/3)^{n-1} = 1$, se sigue que g aplica X en el intervalo $[-1, 1]$. Sin embargo, ésta es solo una casualidad, más que una parte esencial de la prueba. Si todo lo que supiéramos fuera que g aplica X en $\mathbb{R}$, entonces la aplicación $r \circ g$, donde $r\colon \mathbb{R} \to [-1, 1]$ es la aplicación

$$\begin{aligned} r(y) &= y && \text{si} \quad |y| \leq 1 \\ r(y) &= y/|y| && \text{si} \quad |y| \geq 1 \end{aligned}$$

sería una extensión de f que aplicaría X en $[-1, 1]$.

Paso 3. A continuación probaremos la parte (b) del teorema, en la que f aplica A en $\mathbb{R}$. Podemos sustituir $\mathbb{R}$ por el intervalo abierto $(-1, 1)$, ya que este intervalo es homeomorfo a $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos el homeomorfismo $\phi\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ dado por $\phi(x) = x/(1 + |x|)$. Sea $\tilde{f} = \phi \circ f\colon A \to (-1, 1)$. Nótese que $\tilde{f}$ es continua. Como $(-1, 1) \subset [-1, 1]$, por la parte (a) existe $g\colon X \to [-1, 1]$ continua tal que $g|_A = \tilde{f}$. Dado que g es continua, el subconjunto D de X, dado por $D = g^{-1}(\{-1, 1\})$ es cerrado en X. Como $g(A) = \tilde{f}(A) \subset (-1, 1)$, entonces $A \cap D = \emptyset$. Por el lema de Urysohn existe $\psi\colon X \to [0, 1]$ continua tal que $\psi = 0$ en D y $\psi = 1$ en A. Considere la función continua $h(x) = \psi(x)g(x)$ para todo $x \in X$. Afirmamos que $|h(x)| < 1$ para cada $x \in X$, en efecto: si $x \in D$, entonces $h(x) = \psi(x)g(x) = 0 \in (-1, 1)$. Si $x \notin D$, entonces $|h(x)| = |\psi(x)||g(x)| \leq |g(x)| < 1$.

Finalmente, sea $F = \phi^{-1} \circ h$ y veamos que F es la extensión requerida. Note primero que F es continua. Además, si $a \in A$, entonces $F(a) = \phi^{-1}(h(a)) = \phi^{-1}(g(a)) = \phi^{-1}(\tilde{f}(a)) = f(a)$. Por lo tanto, $F|_A = f$.

$\square$

Ejemplo 2.2.6. Mostremos que el teorema de extensión de Tietze implica el lema de Urysohn. En efecto, si A y B son subconjuntos cerrados disjuntos de un espacio normal X, definamos la aplicación $f\colon A \cup B \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x \in A \\ 1 & , \text{ si } x \in B \end{cases}$$

Claramente $A \cup B$ es cerrado en X y f es continua por el lema de pegamento, por lo tanto, por el teorema de extensión de Tietze, existe una aplicación continua $F\colon X \to \mathbb{R}$ y, esta extensión es una función de Urysohn para A y B, por definición.

Ejemplo 2.2.7. Sea (X,d) un espacio métrico. Si cada función continua real valuada en X está acotada, entonces X es compacto.

Para probar esto, supongamos que X no es compacto, entonces existe alguna secuencia (x_n) en X la cual no tiene subsecuencia convergente. Por lo tanto, toda secuencia convergente con términos en el conjunto $S = \{x_1, x_2, \cdots\}$ debe ser eventualmente constante, así que, tiene límite en S, por lo que S es cerrado. Definamos la función $f\colon S \to \mathbb{R}$ por $f(x_n) = n$, la cual es continua porque S es un conjunto discreto. Por el teorema de extensión de Tietze, podemos extender f a una función continua no acotada $F\colon X \to \mathbb{R}$.

2.3. Un teorema de extensión en conjuntos densos

Definición 2.3.1. Sea (X,d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset X$ se dice que es denso en X si $\overline{D} = X$, es decir, la clausura del conjunto D es todo el espacio X. Equivalentemente, D es denso en X si para todo $x \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $y \in D$ tal que $d(x,y) < \varepsilon$

Lema 2.3.2. *Sean (X,d_X), (Y,d_Y) espacios métricos. Si $f\colon X \to Y$ es un mapeo uniformemente continuo, entonces $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y para toda sucesión de Cauchy (x_n) de X.*

Demostración.

Sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es uniformemente continua en X, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ para todo $x, y \in X$ siempre que $d_X(x,y) < \delta$. Ahora bien, dado que (x_n) es sucesión de Cauchy en X, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d_X(x_m, x_n) < \delta$ para todo $m, n > N$. Así, por lo anterior, podemos concluir que $d_Y(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$ para todo $m, n > N$. Lo cual significa que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

□

Lema 2.3.3. *Sean (X,d_X), (Y,d_Y) espacios métricos, D un subconjunto denso en X y $f, g\colon X \to Y$ mapeos continuos. Si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$, entonces $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Demostración.

Fijemos $x \in X$. Como D es denso en X, existe (x_n) en D tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$.

Luego

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = g(x)$$

$\square$

Teorema 2.3.4. *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y $D \subset X$. Si (Y, d_Y) es completo y D es denso en X, entonces toda aplicación $f\colon D \to Y$ uniformemente continua tiene una única extensión $F\colon X \to Y$ uniformemente continua.*

Demostración.

Fijemos $x \in X$. Como $\overline{D} = X$, existe (x_n) en D tal que $x_n \to x$ en X. Ahora, dado que (x_n) es una sucesión de Cauchy en D y como f es uniformemente continua, se sigue que $\{f(x_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y, por el lema 2.3.1. Como Y es completo, existe $y \in Y$ tal que $f(x_n) \to y$.

Mostremos que el punto y es independiente de la secuencia particular $(x_n) \subset D$, la cual converge a x. Para esto, sea (x'_n) sucesión en D tal que $x'_n \to x$. Ya sabemos que $\{f(x'_n)\}$ es de Cauchy en Y y, por lo tanto, converge a algún $y' \in Y$. Consideremos ahora la sucesión (p_n) en D definida como sigue:

$$p_n\colon = \begin{cases} x_{\frac{n}{2}} & \text{, si } n \text{ es par,} \\ x'_{\frac{n+1}{2}} & \text{, si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Nótese que (p_n) también converge a $x \in X$, por lo cual, $\{f(p_n)\}$ es sucesión de Cauchy en Y; así, $\{f(p_n)\}$ converge a algún $p \in Y$. Por lo tanto, cada subsucesión de $\{f(p_n)\}$ también converge a p. Nótese además que $x_n = p_{2n}$ y $x'_n = p_{2n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego

$$y = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_{2n}) = p$$

Similarmente

$$y' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n) = \lim_{n\to\infty} f(p_{2n-1}) = p$$

Así, $y = y'$.

Ahora bien, definamos la aplicación $F\colon X \to Y$ dada por

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

donde (x_n) es una sucesión en D tal que $x_n \to x$ cuando $n \to \infty$. La aplicación F está bien definida por lo anterior y, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe.

Si $x \in D$, podemos tomar $x_n = x$ para todo n, por tanto

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

Así, F es una extensión de f a todo X.

Veamos que F es uniformemente continua. En efecto, sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es uniformemente continua en D, existe $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in D,\ d_X(x,y) < \delta \implies d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Sean $u, v \in X$ tales que $d_X(u,v) < \delta$. Entonces, existen (u_n) y (v_n) sucesiones en D, tales que $u_n \to u$ y $v_n \to v$. Por la continuidad de la función distancia, se tiene que $d_X(u_n, v_n) < \delta$ para todo n suficientemente grande. Se sigue que $d_Y(f(u_n), f(v_n)) < \varepsilon$ para $n > n_0$. Así, para $u, v \in X$ y $d_X(u,v) < \delta$ se tiene

$$d_Y(F(u), F(v)) = d_Y\left(\lim_{n\to\infty} f(u_n), \lim_{n\to\infty} f(v_n)\right) = \lim_{n\to\infty} d_Y(f(u_n), f(v_n)) < \varepsilon$$

Para probar la unicidad, sea G otra extensión uniformemente continua de f. Entonces, como D es denso en X y $G(x) = f(x) = F(x)$ para todo $x \in D$, se sigue, por el lema 2.3.3, que $F(x) = G(x)$ para todo $x \in X$. $\square$

2.4. La fórmula de extensión de Dugundji

En esta sección, presentaremos otra versión del teorema de extensión de Tietze. Estudiaremos las propiedades de una fórmula de extensión, debido a Dugundji, para mapeos continuos definidos en un subconjunto cerrado de un espacio métrico con valores en un espacio vectorial normado. Para ello, estableceremos algunos conceptos previos.

Definición 2.4.1. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ colecciones de subconjuntos de un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$.

(i) $\mathscr{A}$ es abierto si cada miembro de $\mathscr{A}$ es abierto.

(ii) $\mathscr{A}$ es localmente finito si cada punto de X tiene una vecindad que interseca solo un número finito de elementos de $\mathscr{A}$.

(iii) Si Z es un subconjunto de X, decimos que $\mathscr{A}$ es un cubrimiento de Z si $Z \subset \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$.

(iv) Decimos que $\mathscr{A}$ refina $\mathscr{B}$ o que $\mathscr{A}$ es un refinamiento de $\mathscr{B}$ si cada elemento de $\mathscr{A}$ está contenido en algún elemento de $\mathscr{B}$.

El concepto de paracompacidad fue introducido en 1944 por Jean Dieudonné como una generalización de la compacidad.

Definición 2.4.2. Se dice que un espacio topológico de Hausdorff $(X, \mathscr{T})$ es **paracompacto** si cada cubrimiento abierto de X tiene un refinamiento abierto localmente finito.

Recordemos que un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ es de Hausdorff si para cada par de puntos distintos $x_1, x_2 \in X$ existen entornos $U_1, U_2 \subset X$ tales que $x_1 \in U_1$, $x_2 \in U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Nota. El siguiente teorema 2.4.7 establece que cada cubrimiento abierto de un espacio métrico admite un refinamiento localmente finito, pero antes de conocer su prueba requerimos saber los siguientes conceptos:

Definición 2.4.3. Una relación $\preceq$ en un conjunto X se llama una relación de orden en$X$ si $\preceq$ satisface las siguientes condiciones

(1) $x \preceq x \ \forall x \in X$ (Reflexividad)

(2) $x \preceq y$ y $y \preceq x \implies x = y$ (Antisimetría)

(3) $x \preceq y$ y $y \preceq z \implies x \preceq z$ (Transitividad)

Se acostumbra decir que X es un conjunto ordenado por $\preceq$.

La expresión "$x \preceq y$" se lee como "x precede a y" o "x es menor o igual a y".

A la relación $\prec$ definida mediante $x \prec y \leftrightarrow (x \preceq y \wedge x \neq y)$ se le llama orden estricto correspondiente a $\preceq$, y "$x \prec y$" se puede leer "x precede estrictamente a y".

Definición 2.4.4. Sea $\preceq$ una relación de orden en X y sea A un subconjunto no vacío de X. Un elemento $y \in X$ se llama el primero, el menor o el mínimo de A si $y \in A$ y $y \preceq x$ para todo $x \in A$.

Es evidente que si tal y existe es único, ya que si y' también fuese un primero de A, entonces $y' \in A$ y $y' \preceq y$. Pero como también $y \preceq y'$, se sigue que $y = y'$ por antisimetría.

Definición 2.4.5. Sea $\preceq$ una relación de orden en X; se dice que X es bien ordenado por $\preceq$ (u ordinal) si todo subconjunto no vacío $A \subset X$ tiene primer elemento con respecto al orden $\preceq$.

E. Zermelo estableció en 1904 que todo conjunto puede ser bien ordenado. De hecho, tenemos lo siguiente:

Teorema 2.4.6 (Teorema del buen orden). *Todo conjunto puede ser bien ordenado, es decir, para cualquier conjunto X existe una relación de orden "$\preceq$" tal que $(X, \preceq)$ es bien ordenado.*

La demostración de este teorema no la daremos aquí; el lector interesado puede consultar [4] pág. 31-35.

Teorema 2.4.7. *Todo espacio métrico (X, d) es paracompacto.*

Demostración.

Sean (X, d) un espacio métrico y $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Luego, para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha \in \Lambda$, definamos $E_{n,\alpha} = \{x \in U_\alpha \mid d(x, X \setminus U_\alpha) \geq 1/n\}$. Nótese que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,\alpha} = U_\alpha$, ya que si $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_{n,\alpha}$ entonces existe algún $E_{n,\alpha}$ tal que $x \in E_{n,\alpha}$ y por tanto $x \in U_\alpha$. Si $x \in U_\alpha$ entonces, como $d(x, X \setminus U_\alpha) > 0$ podemos encontrar un $n > 0$ tal que $x \in E_{n,\alpha}$. De hecho, si $x \in U_\alpha$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U_\alpha$; de esto se sigue que $d(x, X \setminus U_\alpha) \geq r$, y por lo tanto $x \in E_{n,\alpha}$ si $1/n < r$. Nótese también que algún $E_{n,\alpha}$ puede ser vacío, esto ocurre si para cada $x \in U_\alpha$ se tiene que $d(x, X \setminus U_\alpha) < 1/n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, por el principio de buena ordenación, asumimos que el conjunto de índices Λ está bien ordenado por un orden $\prec$, y pongamos $F_{n,\alpha} = E_{n,\alpha} - \bigcup_{\alpha'\prec\alpha} U_{\alpha'}$. Mostremos que la colección $\mathscr{V} = \{V_{n,\alpha}\}_{\alpha\in\Lambda}$ de conjuntos abiertos $V_{n,\alpha} = \bigcup\{B(x, 1/3n) \mid x \in F_{n,\alpha}\}$ con $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in \Lambda$ es un refinamiento localmente finito de $\mathscr{U}$. Primero veamos que $\mathscr{V}$ es un cubrimiento de X. Para esto, sea $x \in X$, entonces existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in U_\alpha$ y $x \notin U_{\alpha'}$ para cada $\alpha' \prec \alpha$ (por el buen orden de Λ). Luego, como $d(x, X \setminus U_\alpha) > 0$ podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in E_{n,\alpha}$; por lo tanto $x \in F_{n,\alpha} \subset V_{n,\alpha}$, mostrando que $\mathscr{V}$ es un cubrimiento abierto de X.

Mostremos ahora que $V_{n,\alpha} \subset U_\alpha$ para todo n. En efecto, sea $x \in V_{n,\alpha}$, entonces existe $y \in F_{n,\alpha}$ tal que $d(x, y) < 1/3n$. Como $d(y, X \setminus U_\alpha) \geq 1/n > 1/3n$, debemos tener $x \in U_\alpha$. Así, $\mathscr{V}$ es un refinamiento abierto de $\mathscr{U}$.

Finalmente, mostremos que para un n fijo, $\mathscr{V}$ es localmente finita. Consideremos una bola abierta $B(x, r) \subset X$ y supongamos que contiene puntos $y \in V_{n,\alpha}$ y $z \in V_{n,\beta}$, donde $\alpha \neq \beta$.

Luego, existen $p \in F_{n,\alpha}$ y $q \in F_{n,\beta}$ tales que $d(y,p) < 1/3n$ y $d(z,q) < 1/3n$. Así, obtenemos $d(p,q) \leq d(p,y) + d(y,z) + d(z,q) < d(y,z) + 2/3n$.

Por otro lado, tenemos $\beta \prec \alpha$ o $\alpha \prec \beta$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $\beta \prec \alpha$, entonces $F_{n,\alpha} \cap U_\beta = \emptyset$, es decir, $F_{n,\alpha} \subset X \setminus U_\beta$, lo cual implica que $p \in X \setminus U_\beta$, y por tanto $d(p,q) \geq d(q, X \setminus U_\beta) \geq 1/n$. En consecuencia $d(y,z) > d(p,q) - 2/3n \geq 1/n - 2/3n = 1/3n$. Ahora bien, como $y, z \in B(x,r)$, entonces $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) < 2r$, y claramente estas dos últimas desigualdades son inconsistentes para $r \leq 1/6n$.

Por lo tanto, la bola abierta $B(x,r)$, donde $r \leq 1/6n$, debe intersecar como máximo uno de los conjuntos $V_{n,\alpha}$.

□

Lema 2.4.8. *Todo subespacio cerrado de un espacio paracompacto X es paracompacto.*

Demostración.

Sean $A \subset X$ cerrado y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de A. Esto significa que $U_\alpha = A \cap U'_\alpha$ para algún subconjunto abierto $U'_\alpha \subset X$. Luego, la colección $\mathscr{Y} = \{X \setminus A\} \cup \{U'_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ es un cubrimiento abierto de X. Como X es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de $\mathscr{Y}$ que cubre a X. Sea $\mathscr{A} = \{A \cap V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$. Entonces $\mathscr{A}$ es un refinamiento localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. En efecto, si $a \in A$, entonces $a \in V_\beta$ para algún $\beta \in \Gamma$ por que $\{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es un cubrimiento de X; así, $a \in A \cap V_\beta$, lo cual significa que $\mathscr{A}$ es un cubrimiento abierto de A. Por otro lado, como $\{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es localmente finito, para cada $a \in A$ existe alguna vecindad W_a que interseca solo un número finito de elementos de $\{V_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$. Así, $A \cap W_a$ es un entorno de a en A que interseca un número finito de elementos de $\mathscr{A}$. Además, $A \cap V_\beta \subset A \cap U'_\alpha = U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$. □

Lema 2.4.9. *Si $\mathscr{A}$ es una colección localmente finita de subconjuntos de X, entonces*

$$\bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A}$$

Demostración.

En general, siempre se tiene que $\bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A}$ ya que $\overline{A} \subset \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A}$ para cada $A \in \mathscr{A}$. Para la otra contención, sea $x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A}$. Luego, como $\mathscr{A}$ es localmente finito, existe un entorno U_x de x tal que $\mathscr{A}' = \{A \in \mathscr{A} \colon A \cap U_x \neq \emptyset\}$ es finito. De esto se sigue que $x \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'} A}$, de lo contrario $U_x \cap \bigcup_{A \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'} A \neq \emptyset$, lo cual significa que existe algún elemento y tal que $y \in U_x$ y $y \in A$ para algún $A \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'$; así, $A \cap U_x \neq \emptyset$, contradiciendo el hecho de que $A \notin \mathscr{A}'$. Ahora bien, como

$$x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}} A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}'} A} \cup \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{A}'} A}$$

entonces

$$x \in \overline{\bigcup_{A \in \mathscr{A}'} A} = \bigcup_{A \in \mathscr{A}'} \overline{A} \subset \bigcup_{A \in \mathscr{A}} \overline{A}$$

□

Definición 2.4.10. Un espacio topológico X se dice que es regular si para cada conjunto cerrado $A \subset X$ y cada $x \in X \setminus A$ existen conjuntos abiertos U y V tales que $x \in U$, $A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Proposición 2.4.11. *Todo espacio paracompacto X es normal*

Demostración.

Primero mostremos que X es regular. Para esto, sean $A \subset X$ y $x \in X \setminus A$. Luego, como X es de Hausdorff, para cada $a \in A$ existen abiertos U_x y V_a tales que $x \in U_x$, $a \in V_a$ y $U_x \cap V_a = \emptyset$. Ahora bien, como A es cerrado, entonces A es paracompacto por el lema 2.4.8, y dado que $\{V_a\}_{a \in A}$ es un cubrimiento abierto de A, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\{V_a\}_{a \in A}$ que cubre a A. Sea $V = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha$. Claramente $A \subset V$. Como cada W_α está contenido en algún V_a, se sigue que $W_\alpha \cap U_x = \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$, lo cual implica que $\overline{W}_\alpha \subset X \setminus U_x$, es decir $\overline{W}_\alpha \cap U_x = \emptyset$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y por tanto $x \notin \overline{W}_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Esto significa que $x \notin \overline{V} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{W}_\alpha$ por el lema 2.4.9. Haciendo $U = X \setminus \overline{V}$ encontramos un entorno abierto para x tal que $U \cap V = \emptyset$.

Probemos ahora que X es normal. Para esto, sean A y B subconjuntos cerrados de X. Como X es regular, para cada $a \in A$ existen conjuntos abiertos U_a y V_a tales que $a \in U_a$, $B \subset V_a$ y $U_a \cap V_a = \emptyset$. De esto se deduce que $\overline{U}_a \cap B = \emptyset$ para todo $a \in A$. Por otro lado, como $\{U_a\}_{a \in A}$ es un cubrimiento abierto de A y A es paracompacto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{W_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de $\{U_a\}_{a \in A}$ que cubre a A. Sea $U = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha$. Como $\overline{U} = \overline{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} W_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} \overline{W}_\alpha$ y cada W_α está contenido en algún U_a, concluimos que $\overline{U} \cap B = \emptyset$. Haciendo $V = X \setminus \overline{U}$ obtenemos dos conjuntos abiertos U y V tales que $A \subset U$, $B \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

En vista del teorema de extensión de Dugundji, estamos particularmente interesados en las relaciones entre la paracompacidad y la existencia de particiones de la unidad. Las particiones de la unidad permiten extender construcciones locales a todo el espacio.

Definición 2.4.12. Una familia $\mathscr{F}$ de funciones continuas en un espacio topológico $(X, \mathscr{T})$ con valores en el intervalo $[0,1]$ se dice que es una partición localmente finita de la unidad si para cada $x \in X$ existe un entorno U_x y un subconjunto finito $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ tal que

(i) $f(y) = 0$ para todo $y \in U_x$ y $f \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}'$.

(ii) $\sum_{f \in \mathscr{F}'} f(y) = 1$ para todo $y \in U_x$,

Observación 2.4.13. Si $\mathscr{F}$ es una partición localmente finita de la unidad, entonces la colección $\mathscr{U}_{\mathscr{F}} = \{f^{-1}((0,1])\}_{f \in \mathscr{F}}$ es un cubrimiento localmente finito de X. En efecto, para mostrar que cubre a X, sea $x \in X$. Luego, existe un entorno U_x de x y un conjunto finito $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ tal que (i) y (ii) se mantienen. La condición (ii) implica que existe $f \in \mathscr{F}$ tal que $f(y) \neq 0$ para todo $y \in U_x$. En particular $f(x) \neq 0$ en U_x, lo cual significa que $x \in f^{-1}((0,1])$. Por otro lado, la condición (i) nos dice que para todo $f \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}'$ y todo $y \in U_x$, $f(y) = 0$. Es decir, para todo $f \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{F}'$ y todo $y \in U_x$, $y \notin f^{-1}((0,1])$. Por lo tanto $U_x \cap f^{-1}((0,1]) = \emptyset$ si $f \notin \mathscr{F}'$. La condición (i) es equivalente a esta última expresión , lo cual es también equivalente a decir que $\{\operatorname{supp}(f)\}_{f \in \mathscr{F}}$ es un cubrimiento localmente finito de X.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Decimos que una partición localmente finita de la unidad $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ está *subordinada* a (o *dominada* por) $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ si $\operatorname{supp}(f_\alpha) = \overline{f_\alpha^{-1}((0,1])} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.

Lema 2.4.14 (Lema de contracción)**.** *Sean X un espacio paracompacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe un cubrimiento abierto localmente finito $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de X tal que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$.*

Demostración.

Como X es normal, para cada $x \in X$ existe G_x tal que $x \in G_x \subset \overline{G}_x \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$. Ahora bien, la colección $\{G_x\}_{x \in X}$ es un cubrimiento abierto de X y por tanto, existe un refinamiento abierto localmente finito $\{W_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ de $\{G_x\}_{x \in X}$ que cubre a X. De esto se sigue inmediatamente que $\{\overline{W}_\beta\}_{\beta \in \Gamma}$ es un refinamiento de $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$. Sea $V_\alpha = \bigcup_{\overline{W}_\beta \subset U_\alpha} W_\beta$.

Nótese que si $x \in X$, existe $\beta \in \Gamma$ tal que $x \in W_\beta$, y como $\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$ es un refinamiento de $\{G_x\}_{x\in X}$, existe G_y tal que $W_\beta \subset G_y$; así, $\overline{W}_\beta \subset \overline{G}_y \subset U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$, lo cual muestra que $x \in V_\alpha$. Por lo tanto $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento abierto de X.

Por otro lado, como $\overline{V}_\alpha = \overline{\bigcup_{\overline{W}_\beta\subset U_\alpha} W} = \bigcup_{\overline{W}_\beta\subset U_\alpha} \overline{W}_\beta$, obtenemos que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. La finitud local de $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ se deduce de la finitud local de $\{W_\beta\}_{\beta\in\Gamma}$.

□

Proposición 2.4.15. *Para cada cubrimiento abierto $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de un espacio paracompacto X existe una partición localmente finita de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.*

Demostración.

Sean X un espacio paracompacto y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ un cubrimiento abierto de X. Aplicando dos veces el lema 2.4.14 encontramos cubrimientos abiertos localmente finitos $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ y $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de X tales que $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ y $\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Como X es normal y $\overline{W}_\alpha \cap X \setminus V_\alpha = \emptyset$, entonces para cada $\alpha \in \Lambda$ existe una función continua $g_\alpha \colon X \to [0,1]$ tal que $g_\alpha(\overline{W}_\alpha) = \{1\}$ y $g_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$. De esto se sigue que

$$S_\alpha = \{x \in X \colon g_\alpha(x) \neq 0\} = g_\alpha^{-1}((0,1]) \subset V_\alpha$$

Por tanto $\operatorname{supp}(g_\alpha) = \overline{S_\alpha} \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$. Además, $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finito porque $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finito.

Por otro lado, como $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es un cubrimiento de X, entonces para cada $x \in X$ existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x \in W_\alpha$; así, $g_\alpha(x) = 1 > 0$ para algún $\alpha \in \Lambda$. Definamos la aplicación $g \colon X \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha(x)$. Ya sabemos que $g(x) > 0$ para todo $x \in X$. Ahora bien, como $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es localmente finito, para cada $x \in X$ existe un entorno N_x el cual interseca solo un número finito de elementos de $\{S_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$, digamos $\{S_{\alpha_1}, \cdots, S_{\alpha_n}\}$. Luego, para cada $y \in N_x$, $g(y) = \sum_{i=1}^n g_{\alpha_i}(y)$ y por tanto g es continua en N_x. Puesto que $\{N_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento de X, g es continua en X.

Ahora, para cada $\alpha \in \Lambda$ definamos una aplicación continua $f_\alpha \colon X \to [0,1]$ dada por

$$f_\alpha(x) = \frac{g_\alpha(x)}{g(x)}$$

Entonces, la familia de funciones continuas $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$.

□

Lema 2.4.16. *Sean* (X, d) *un espacio métrico y* A *un subconjunto propio cerrado de* X*. Entonces existe una familia indexada* $\{U_\alpha, a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *tal que*

(1) $U_\alpha \subset X \setminus A, \quad a_\alpha \in A \quad (\alpha \in \Lambda)$,

(2) $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ *es un cubrimiento abierto localmente finito de* $X \setminus A$*,*

(3) *si* $x \in U_\alpha$*, entonces* $d(x, a_\alpha) \leq 2d(x, A)$ *para* $\alpha \in \Lambda$*.*

Demostración.

Consideremos la colección de bolas $\mathscr{B} = \{B(x, \frac{1}{4}d(x, A))\}_{x\in X\setminus A}$. Claramente $\mathscr{B}$ cubre $X \setminus A$. Como $X \setminus A$ es un espacio métrico, existe, por el teorema 2.4.7, un cubrimiento abierto localmente finito $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de $X \setminus A$ el cual refina $\mathscr{B}$. Por lo tanto, para cada $\alpha \in \Lambda$ existe $x_\alpha \in X \setminus A$ tal que $U_\alpha \subset B(x_\alpha, \frac{1}{4}d(x_\alpha, A))$. Ahora bien, para $\alpha \in \Lambda$ elijamos $a_\alpha \in A$ tal que $d(x_\alpha, a_\alpha) \leq \frac{5}{4}d(x_\alpha, A)$ (principio de aproximación del ínfimo). Claramente la familia $\{U_\alpha, a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ satisface (1) y (2). Comprobemos que (3) también se cumple. Sea $x \in U_\alpha$. Entonces

$$d(x, a_\alpha) \leq d(x_\alpha, a_\alpha) + d(x, x_\alpha) \leq \tfrac{5}{4}d(x_\alpha, A) + \tfrac{1}{4}d(x_\alpha, A) = \tfrac{3}{2}d(x_\alpha, A)$$

Por otro lado, (usando desigualdad triangular y la propiedad del ínfimo) para $a \in A$ se tiene

$$\begin{aligned}
&d(x_\alpha, a) \leq d(x_\alpha, x) + d(x, a) \\
\Rightarrow\ &d(x_\alpha, a) - d(x_\alpha, x) \leq d(x, a) \\
\Rightarrow\ &d(x_\alpha, a) - d(x_\alpha, x) \leq d(x, A) \\
\Rightarrow\ &d(x_\alpha, a) \leq d(x, A) + d(x_\alpha, x) \\
\Rightarrow\ &d(x_\alpha, A) \leq d(x, A) + d(x_\alpha, x)
\end{aligned}$$

Por tanto

$$d(x_\alpha, A) \leq d(x, A) + d(x_\alpha, x) \leq d(x, A) + \tfrac{1}{4}d(x_\alpha, A)$$

De donde

$$d(x_\alpha, A) \leq \tfrac{4}{3}d(x, A)$$

Así

$$d(x, a_\alpha) \leq \tfrac{3}{2}d(x_\alpha, A) \leq \tfrac{3}{2}\tfrac{4}{3}d(x, A) = 2d(x, A)$$

$\square$

Definición 2.4.17. Sean (X, d) un espacio métrico y A un subconjunto propio cerrado de X. Entonces cualquier familia $\{U_\alpha, a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ satisfaciendo las condiciones (1)-(3) de el lema 2.4.16 es llamado un sistema Dugundji para $X \setminus A$.

Definición 2.4.18. Sea E un conjunto de un espacio lineal topóligo X. Se define la **envolvente convexa** de E como la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a E, es decir, el conjunto convexo más pequeño que lo contiene. Para n puntos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ su envolvente convexa viene dada por la expresión

$$\operatorname{conv}(E) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid x_i \in E, \alpha_i \in \mathbb{R}_0^+, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1\right\}$$

Teorema 2.4.19 (Dugundji)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de X y $(Y, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado. Entonces, cada mapeo continuo $f\colon A \to Y$ tiene una extensión continua $F\colon X \to Y$ tal que $F(X) \subset \operatorname{conv} f(A)$.*

Demostración.

Por el lema 2.4.16, podemos elegir un sistema Dugundji $\{U_\alpha, a_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ para $X \setminus A$. Luego, por proposición 2.4.15, existe una partición $\{b_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ localmente finita de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Mostremos que, para cada mapeo continuo $f\colon A \to Y$ la fórmula

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A, \\ \sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha(x) f(a_\alpha) & \text{si} \quad x \in X \setminus A. \end{cases}$$

define un mapeo continuo de X en Y tal que F es una extensión de f y $F(X) \subset \operatorname{conv} f(A)$. Como $\{b_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición localmente finita de la unidad de $X \setminus A$, para cada $x \in X \setminus A$ existe un entorno V_x de x y un subconjunto finito $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que $b_\alpha(y) = 0$ para todo $y \in V_x$ sii $\alpha \in \Lambda \setminus \Lambda'$. Así,

$$F(y) = \sum_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha(y) f(a_\alpha) = \sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(y) f(a_\alpha) \quad \text{para} \quad y \in V_x$$

Esto muestra que $F(X) \subset \operatorname{conv} f(A)$ (por que $\{b_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ es una partición de la unidad) y que F es continua en cada punto del conjunto abierto $X \setminus A$. Para completar la prueba mostraremos la continuidad de F en cada punto de A.

Fijemos $x_0 \in A$ y sea $\varepsilon > 0$ dado. Como f es continua en x_0, existe $\eta > 0$ tal que

$$a \in A \text{ y } d(a, x_0) < \eta \implies \|f(a) - f(x_0)\| < \varepsilon \tag{2.3}$$

Sean $\delta\colon = \eta/3$ y $x \in B(x_0, \delta)$ fijo. Si $x \in A$, se sigue de (2.3) que

$$\|F(x) - F(x_0)\| = \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Si $x \in X \setminus A$, entonces $d(x, A) \leq d(x, x_0) < \delta$. Además, $x \in U_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$; así, por la parte (3) del lema 2.4.16 se tiene

$$d(a_\alpha, x_0) \leq d(a_\alpha, x) + d(x, x_0) \leq 2d(x, A) + d(x, x_0) < \eta$$

y por tanto $\|f(a_\alpha) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

Nótese que $\Lambda' = \{\alpha \in \Lambda\colon x \in U_\alpha\}$ porque $\{b_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ está subordinada a $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. Ahora bien, como $b_\alpha(x) \geq 0$ para cada $\alpha \in \Lambda$ y $\sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(x) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(x_0)\| &= \left\| \sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(x) f(a_\alpha) - f(x_0) \right\| \\
&= \left\| \sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(x)(f(a_\alpha) - f(x_0)) \right\| \\
&\leq \sum_{\alpha\in\Lambda'} \|b_\alpha(x)(f(a_\alpha) - f(x_0))\| \\
&= \sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(x)\, \|f(a_\alpha) - f(x_0)\| \\
&< \sum_{\alpha\in\Lambda'} b_\alpha(x)\varepsilon = \varepsilon
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 3

Extensión de funciones Lipschitz

El conocido resultado de la condición de Lipschitz fue publicado por primera vez en 1868 en un volumen en honor al quincuagésimo aniversario de la Universidad de Bonn y poco después en una traducción al italiano en la revista *Annali di matematica*. Parece haber llegado por primera vez a una amplia audiencia en una traducción posterior que apareció en el boletín de Darboux en 1876. Existen dos razones para este retraso: el primero es la mayor difusión del boletín y el hecho de que Darboux llamó la atención sobre el avance de Lipschitz sobre Cuachy. El segundo tiene que ver con el hecho de que en esta época se empezó a considerar que la teoría de variable real tenía una importancia fundamental para el análisis.

Lipschitz era muy consciente del predominio anterior de la teoría de variable compleja en el análisis en general. Desde Jacobi, Lipschitz notó que, los resultados más importantes en la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales se había obtenido utilizando funciones de una variable compleja. Dado que tales funciones tienen expansiones en series de potencias convergentes excepto en ciertos puntos de sus dominios, la cuestión de la existencia de una solución se convierte así en una cuestión de si existe una serie que satisfaga la ecuación. Aquí cita la reelaboración de Briot y Buoquet del método majorante de Cuachy y el redescubrimiento de Weierstrass en 1842 del resultado de Cuachy independiente de integrales complejas, utilizando unicamente métodos de series de potencias.

En el caso de variable real, los métodos de series no sirven. El objetivo de Lipschitz en el artículo es investigar esta cuestión, que para él era novedosa. Lipschitz esencialmente redescubrió el método de Cauchy, aunque trabajó con sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (en lugar de una sola ecuación) y pudo mejorar la hipótesis sobre la acotación de la derivada con una condición de Lipschitz. En particular, si $dy/dx = (x, y)$, entonces requerimos que

$$|f(x,y) - f(x,z)| < c|y - z| \text{ donde } c < 1$$

(Para más información véase [6]). Así, Lipschitz es recordado por 'la condición de Lipschitz', una desigualdad que garantiza solución única a la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. Hoy en día estas ideas han sido extendidas a otras áreas de las matemáticas y esta condición tiene un uso más amplio debido al gran desarrollo matemático en las últimas décadas.

Estudiaremos en este capítulo las funciones Lipschitz definidas en un subespacio que pueden ser extendidas al espacio completo conservando la misma constante de Lipschitz, es decir, probaremos la existencia de extensiones de funciones de Lipschitz conservando la constante de Lipschitz.

Definición 3.0.1 (Función lipschitziana)**.**

Dados dos espacios métricos (X, d_X) y (Y, d_Y), una función $f\colon X \to Y$ es llamada Lipschitz continua (o se dice que satisface una condición de Lipschitz o que es lipschitziana) si existe una costante $L > 0$ tal que

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L d_X(x_1, x_2) \text{ para todo } x_1, x_2 \in X$$

.

Cualquier L de este tipo se denomina constante de Lipschitz para la función f y se suele decir también que f es una función L-Lipschitz. La constante de Lipschitz de una función f es a veces denotada por $L(f)$.

Ejemplo 3.0.2. La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$ es 1-Lipschitz puesto que $||x| - |y|| \leq |x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Nota. Recordemos que toda función Lipschitz continua es uniformemente continua y por lo tanto continua.

3.1. Extensión de McShane - Whitney

En uno de sus artículos pioneros sobre extensión, H. Whitney dio de pasada una fórmula simple para extender funciones de Lipschitz de valor real. El siguiente resultado es conocido como el teorema de McShane o el teorema de extensión de McShane-Whitney.

Teorema 3.1.1 (McShane-Whitney)**.** *Sean (X, d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función de Lipschitz con constante de Lipschitz L. Entonces las funciónes $F, G \colon X \to \mathbb{R}$ definidas para todo $x \in X$ por*

$$F(x) = \sup_{a \in A}[f(a) - Ld(x, a)] \quad y \quad G(x) = \inf_{a \in A}[f(a) + Ld(x, a)] \tag{3.1}$$

son extensiones de f con la misma constante de Lipschitz L y cualquier otra extensión L-Lipschitz H de f satisface la desigualdad

$$F \leq H \leq G$$

Demostración.

Para cualquier $x \in X$ y $a_1, a_2 \in A$, se tiene que

$$f(a_1) - f(a_2) \leq Ld(a_1, a_2) \leq Ld(x, a_1) + Ld(x, a_2)$$

lo cual implica que

$$f(a_1) - Ld(x, a_1) \leq f(a_2) + Ld(x, a_2)$$

Esto significa que las funciones $F, G \colon X \to \mathbb{R}$ dadas por (3.1) están bien definidas y

$$F(x) \leq G(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X$$

Mostremos ahora que F y G son extensiones L-Lipschitz de f y cualquier otra extensión L-Lipschitz H satisface $F \leq H \leq G$.

1. $F|_A = G|_A = f$. Si $x \in A$, entonces haciendo $x = a$ en (3.1) se tiene

   $$f(x) \leq F(x) \leq G(x) \leq f(x)$$

   lo cual muestra que $F(x) = G(x) = f(x)$ en A.

2. F, G son L-Lipschitz. Para todo $x, y \in X$ y todo $a \in A$ se tiene

   $$G(x) \leq f(a) + Ld(x, a) \leq f(a) + Ld(y, a) + Ld(x, y)$$

   por tanto $G(x) - Ld(x, y) \leq f(a) + Ld(y, a)$, lo cual implica, (usando propiedad del ínfimo) que $G(x) - Ld(x, y) \leq G(y)$, y así $G(x) - G(y) \leq Ld(x, y)$. Intercambiando los roles de x e y obtenemos $G(y) - G(x) \leq Ld(x, y)$; por lo tanto $|G(x) - G(y)| \leq Ld(x, y)$.

Por otro lado, también tenemos las desigualdades

$$F(x) \geq f(x) - Ld(x,a) \geq f(a) - Ld(y,a) - Ld(x,y)$$

de donde $F(x) \geq F(y) - Ld(x,y)$, así $F(y) - F(x) \leq Ld(x,y)$. Nuevamente intercambiando los roles de x e y obtenemos $|F(x) - F(y)| \leq Ld(x,y)$.

3. $F \leq H \leq G$ para cualquier extensión L-Lipschitz H de f. En efecto, para $x \in X$ y $a \in A$ se tiene

$$H(x) - H(a) = H(x) - f(a)$$

Como H es L-Lipschitz, se sigue que

$$-Ld(x,a) \leq H(x) - f(a) \leq Ld(x,a)$$

lo cual es equivalente a

$$f(a) - Ld(x,a) \leq H(x) \leq f(a) + Ld(x,a)$$

Por lo tanto, $F(x) \leq H(x) \leq G(x)$.

□

Ejemplo 3.1.2. Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subset X$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función L-Lipschitz. Entonces, x_0 es un mínimo global de f en A si y solo si x_0 es un mínimo global de G en X.

Demostración.

Sea $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) \leq f(a)$ para todo $a \in A$. Como $f(x_0) \leq f(a) + Ld(x,a)$ para todo $x \in X$ y $a \in A$, se tiene que $f(x_0) \leq G(x)$ para todo $x \in X$, (ver definición de G en (3.1)).

Recíprocamente, sea $x_0 \in X$ tal que $G(x) \geq G(x_0)$ para todo $x \in X$. Mostremos que $x_0 \in A$. Supongamos que $d(x_0, A) = r > 0$ y sea $a_0 \in A$ tal que $G(x_0) > f(a_0) + Ld(x_0, a_0) - \frac{Lr}{2}$. Como $G|_A = f$ y $a_0 \in A$, entonces $f(a_0) = G(a_0) \geq G(x_0)$. Luego, $G(x_0) > G(x_0) + Ld(x_0, a_0) - \frac{Lr}{2}$ implica que $d(x_0, a_0) < \frac{r}{2} < r$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto $r = 0$, y como A es cerrado, obtenemos que $x_0 \in A$.

□

Observación 3.1.3. El teorema de McShane implica que si (X,d) es un espacio métrico, $A \subset X$ y $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ es L-Lipschitz, entonces f tiene una extensión a una función en X

que es $\sqrt{n}L$-Lipschitz. En efecto, escribamos $f = (f_1, \cdots, f_n)$, donde $f_i \colon A \to \mathbb{R}$ para cada $i \in \mathbb{J}_n$. Si f es L-Lipschitz. entonces

$$|f_i(x) - f_i(y)| = \sqrt{(f_i(x) - f_i(y))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (f_i(x) - f_i(y))^2} = ||f(x) - f(y)|| \leq Ld(x, y)$$

Esto significa que cada f_i es L- Lipschitz; así, por el teorema de McShane, cada f_i tiene una extensión L-Lipschitz $F_i \colon X \to \mathbb{R}$, es decir,

$$|F_i(x) - F_i(y)| \leq Ld(x, y) \Longleftrightarrow (F_i(x) - F_i(y))^2 \leq (Ld(x, y))^2 \quad \text{para cada} \quad i \in \mathbb{J}_n$$

Pongamos $F = (F_1, \cdots, F_i)$. Luego

$$||F(x) - F(y)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (F_i(x) - F_i(y))^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (Ld(x, y))^2} = \sqrt{n(Ld(x, y))^2} = \sqrt{n}Ld(x, y)$$

Ejemplo 3.1.4. Sean (X, d) un espacio métrico, $S \subset X$ y $f \colon S \to \mathbb{C}$ una función L-Lipschitz. Entonces f admite una extensión de Lipschitz $F \colon X \to \mathbb{C}$ con constante de Lipschitz $\sqrt{2}L$. Para ver esto, escribamos f como $f = f_1 + if_2$, se sigue que $f_1, f_2 \colon S \to \mathbb{R}$ son ambas L-Lipschitz, de modo que tienen extensiones L-Lipschitz $F_1, F_2 \colon X \to \mathbb{R}$. Poniendo $F = F_1 + iF_2$ se sigue que $|F(x) - F(y)| = \sqrt{(F_1(x) - F_1(y))^2 + (F_2(x) - F_2(y))^2} \leq \sqrt{2}Ld(x, y)$, para todo $x, y \in X$.

Nota. Por lo general, en espacios euclideos, las funciones de Lipschitz no se extienden con la misma constante. (La fórmula de Whitney da una extensión de Lipschitz, pero no una con la misma constante a menos que $n = 1$). Para obtener una función Lipschitz con la misma constante, se requiere una construcción más elaborada.

3.2. El teorema de Kirszbraun

M. Kirszbraun probó en 1934 que, para cada subconjunto A de $\mathbb{R}^n$ y cada función Lipschitz $f \colon A \to \mathbb{R}^m$, existe una extensión Lipschitz $F \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de f tal que $L(F) = L(f)$. En 1945 Frederick Valentine generalizó este hecho para espacios de Hilbert $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ en lugar de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, y el resultado a menudo se conoce como el teorema de Kirszbraun-Valentine (véase [10]). Presentaremos en esta última parte el teorema de Kirszbraun.

Teorema 3.2.1 (Kirszbraun 1934). *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Si $f\colon A \to \mathbb{R}^m$ es una función L-Lipschitz, entonces existe una extensión $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de f la cual es también L-Lipschitz.*

Demostración.

Si $m = 1$, el resultado se sigue directamente por el teorema 3.1.1.

Supongamos que $m > 1$ y consideremos la familia $\mathscr{F}$ de extensiones L-Lipschitz de f a algún conjunto T con $A \subset T$. Esta colección es no vacía porque contiene al menos la función original f. Definimos un orden parcial en $\mathscr{F}$ como sigue: supongamos que $g_1\colon T_1 \to \mathbb{R}^m$ y $g_2\colon T_2 \to \mathbb{R}^m$ son ambos elementos de $\mathscr{F}$, entonces $g_1 \preceq g_2$ si y solo si g_2 es una extensión de g_1, es decir, $A \subset T_1 \subset T_2$ y $g_1(x) = g_2(x)$ para todo $x \in T_1$. (El mismo ordenamiento parcial se define si recordamos que una función de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ es un conjunto de elementos de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, y ordenamos parcialmente a $\mathscr{F}$ por inclusión). Por el principio maximal de Hausdorff, $\mathscr{F}$ tiene una subfamilia $\tilde{\mathscr{F}}$ maximal totalmente ordenada. Sea $\tilde{A}$ la unión de los dominios de las funciones en $\tilde{\mathscr{F}}$. Definamos la función $F\colon \tilde{A} \to \mathbb{R}^m$ por $F(x) = g(x)$ donde $g \in \tilde{\mathscr{F}}$ y $x \in \operatorname{dom}(g)$. Claramente F es Lipschitz y $L(F) = L$. Afirmamos que $\tilde{A} = \mathbb{R}^n$. Si no, entonces fijemos $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \tilde{A}$. Se llegará a una contradicción si mostramos que existe $y_0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|y - y_0\| \leq L\|x - x_0\|$ cuando $y = F(x)$ y $x \in \tilde{A}$, es decir, si mostramos que

$$\bigcap_{x \in \tilde{A}} B(F(x), L\|x - x_0\|) \neq \emptyset \tag{3.2}$$

Como (3.2) involucra una intersección de conjuntos compactos, es suficiente mostrar que cualquier intersección finita de este tipo es no vacía. Por consiguiente, sean $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \tilde{A}$ fijos. Sean $y_i = F(x_i)$, $r_i = \|x_i - x_0\|$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, y $r^* = \sup\{r_1, r_2, \cdots, r_n\}$.

Sabemos que para cualquier valor suficientemente grande de γ

$$K_\gamma = \bigcap_{i=1}^{n} B(y_i, \gamma r_i) \neq \emptyset$$

Sea

$$\gamma_0 = \inf\{\gamma\colon K_\gamma \neq \emptyset\}$$

Dado que

$$K_{\gamma_0} = \bigcap_{\gamma > \gamma_0} K_\gamma \tag{3.3}$$

y la intersección de cualquier número finito de los conjuntos en el lado derecho de (3.3) es no vacía, vemos que $K_{\gamma_0} \neq \emptyset$.

Será suficiente mostrar que $\gamma_0 \leq L$. Podemos, por su puesto, suponer $\gamma_0 > 0$. Nótese que K_{γ_0} debe contener exactamente un punto, porque si $k_1, k_2 \in K_{\gamma_0}$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{k_1 + k_2}{2} - y_i \right\|^2 &= \frac{\|k_1 + k_2\|^2}{4} + \|y_i\|^2 - (k_1 - k_2) \cdot y_1 \\
&= \frac{\|k_1\|^2}{2} + \frac{\|k_2\|^2}{2} - \frac{\|k_1 - k_2\|^2}{4} + \|y_i\|^2 - k_1 \cdot y_i - k_2 \cdot y_i \\
&= \frac{\|k_1 - y_i\|^2 + \|k_2 - y_i\|^2}{2} - \frac{\|k_1 - k_2\|^2}{4} \\
&\leq \gamma_0^2 r_i^2 - \frac{\|k_1 - k_2\|^2}{4(r^*)^2} r_i^2
\end{aligned}$$

se mantiene para $i = 1, 2, \cdots, n$, y $\dfrac{k_1 + k_2}{2} \in K_\gamma$ con $\gamma = \sqrt{\gamma_0^2 - \dfrac{\|k_1 - k_2\|^2}{4(r^*)^2}} < \gamma_0$ contradiciendo la definición de γ_0.

Trasladando el sistema de coordenadas si es necesario, podemos suponer que $K_{\gamma_0} = \{0\}$. En consecuencia, tenemos $\|y_i\| \leq \gamma_0 r_i$, para $i = 1, 2, \cdots, n$. Afirmamos que $0 \in \mathrm{conv}\{y_i \colon \|y_i\| = \gamma_0 r_i\}$. De no ser así, existiría un plano de dimensión $m-1$ separando el origen de $\{y_i \colon \|y_i\| = \gamma_0 r_i\}$, pero entonces para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tendríamos $B(0, \varepsilon)$ en el lado opuesto del plano de $\{y_i \colon \|y_i\| = \gamma_0 r_i\}$, contradiciendo de nuevo la definición de γ_0. Así, podemos elegir escalares no negativos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tales que

$$\|y_i\| < \gamma_0 r_i \implies \lambda_i = 0$$

y

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned}
0 &= 2\left\|\sum_{i=i}^{n}\lambda_i y_i\right\|^2 \\
&= 2\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j y_i\cdot y_j \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\left[\|y_i\|^2+\|y_j\|^2-\|y_i-y_j\|^2\right] \\
&\geq \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\left[\gamma_0^2 r_i^2+\gamma_0^2 r_j^2-L^2\|x_i-x_j\|^2\right] \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\left[2(x_i-x_0)\cdot\gamma_0^2(x_j-x_0)+(\gamma_0^2-L^2)\|x_i-x_j\|^2\right] \\
&= 2\left\|\gamma_0\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i-x_0)\right\|^2+(\gamma_0^2-L^2)\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\|x_i-x_j\|^2 \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

Si hubiera solo un λ_i distinto de cero, entonces el segundo término de (3.4) desaparecería y el primero sería positivo, lo cual sería una contradicción. Por lo tanto, hay al menos dos λ_i's distintos de cero y el segundo término en (3.4) debe ser no positivo, forzando $\gamma_0 \leq L$, como se deseaba.

$\square$

Bibliografía

[1] John B. Conway. *A Course in Point Set Topology*. Springer International Publishing, 2014.

[2] Alexander Pelczynski Czesla Bessaga. *Selected topics in infinite-dimensional topology*. PWN-Polish Scientific Publishers, 1975.

[3] J. Dugundji. An extension of tietze's theorem. *Pacific J. Math*, 1:353–367, 1951.

[4] J. Dugundji. *Topology*. Allyn and Bacon, Boston, 1966, 12th printing edition, 1978.

[5] María Luz Puertas Francisco García Arenas. El teorema de extensión de tietze. *Divulgaciones Matemáticas*, 10:63–78, 2002.

[6] Hans Niels Jahnke. *A History of Analysis*. spektrum akademischer verlag, 1999.

[7] James Munkres. *Topology*. Pearson Education Limited, second edition, 2014.

[8] Walter Rudin. *Principles of mathematical analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York-Auckland-Düsseldorf, third edition, 1976. International Series in Pure and Applied Mathematics.

[9] Tej Bahadur Singh. *Introduction to Topology*. Springer Nature Singapore Pte Ltd, 2019.

[10] Adriana Nicolae Stefan Cobzas, Radu Miculescu. *Lipschitz Functions*. Springer International Publishin, 2019.

[11] Harold R. Parks Steven G. Krantz. *The Geometry of Domains in Space*. Birkhauser Boston, 1999.