DISEÑO DE UNA ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SUMA DE UNA SERIE VÍA ÁREAS DE FIGURAS PLANAS

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación "Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", COLCIENCIAS 1115-11-12704, y en el programa de Maestría en Educación, con énfasis en Docencia de las Matemáticas, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad Eafit

FLOR MARÍA JURADO HURTADO
RENÉ ALEJANDRO LONDOÑO CANO

Trabajo de investigación para optar al título de Magíster en Docencia de las Matemáticas

Línea de Pensamiento Matemático Avanzado

Asesor
CARLOS MARIO JARAMILLO LÓPEZ
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA
MEDELLÍN
2005

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

Acta de Aprobación de Tesis

Entre presidente y jurados del Trabajo de Investigación **"DISEÑO DE UNA ENTREVISTA SOCRÁTICA PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE SUMA DE UNA SERIE VIA ÁREAS DE FIGURAS PLANAS",** presentado por los estudiantes **René Alejandro Londoño Cano** y **Flor María Jurado Hurtado**, como requisito para optar al título de **Magister en Educación** Docencia de las Matemáticas, hemos acordado calificar este, después de su presentación y sustentación como:

Aprobado: X
No aprobado:

A los Trabajos de investigación que merecieren ser destacados, el jurado podrá recomendar las siguientes distinciones:

Sobresaliente:
Meritorio: X

Medellín, 26 de agosto de 2005

Carlos Mario Jaramillo L.
Presidente

Pedro V. Estéban D.
Pedro Vicente Estéban D.
Jurado

Andrés de la Torre
Andrés de La Torre G.
Jurado

A nuestras familias por su apoyo y comprensión durante el desarrollo del trabajo de investigación.

AGRADECIMIENTOS

Por su dedicación, apoyo y estímulo permanente, a:

Doctor Carlos Mario Jaramillo López, profesor titular de la Universidad de Antioquia, Departamento de Matemáticas. Director del presente trabajo de investigación.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1.

CONTEXTUALIZACIÓN DEL ESTUDIO

1.1 El problema

Los estudiantes de último año de la media vocacional y primeros años de universidad que han pasado por una enseñanza sistemática del concepto de límite, presentan dificultades en el razonamiento de algunas de sus manifestaciones. En este estudio se abordará al límite como la suma de una serie de términos positivos.

1.2 Objetivo general

Diseñar una entrevista de carácter socrático en el marco del modelo educativo de van-Hiele, para determinar los niveles de razonamiento sobre el concepto de suma de una serie de términos positivos, vía áreas de figuras planas.

1.3 Objetivos específicos

- Señalar las características de una entrevista de carácter socrático para el razonamiento y comprensión de un concepto matemático en particular, basadas en lo que se infiere del diálogo entre Sócrates y el esclavo en "El Menón"[1] y enmarcadas en el modelo educativo de van-Hiele.

- Diseñar una entrevista semi-estructurada de carácter socrático para el concepto de suma de una serie de términos positivos, a través de áreas de escaleras.

- Aplicar la entrevista para:
  - Mejorar el contenido y estructura del guión-entrevista

[1] PLATÓN. "Diálogos". Porrúa. México, 1996.

- Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento sobre el concepto de suma de una serie de términos positivos, vía áreas de figuras planas.
- Clasificar al entrevistado en uno de los niveles de razonamiento.

* Diseñar un test basado en la entrevista socrática acerca del concepto de suma de una serie, con el fin de comprobar que es posible la detección de los niveles de razonamiento propuestos por el modelo; al mismo tiempo que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.

1.4 ¿Por qué enmarcar el presente estudio en el modelo educativo de van Hiele?

El modelo de van-Hiele es una propuesta que parece describir con bastante exactitud la evolución desde las formas intuitivas iniciales hasta las formas deductivas finales y está adquiriendo cada vez mayor aceptación a nivel internacional en lo que se refiere a la geometría escolar. Así se confirma en los lineamientos curriculares de Matemáticas[2]. En cuanto al pensamiento matemático avanzado, en la sección 1.5.9 se expondrá con detalle la pertinencia la pertinencia de este modelo.

1.4.1 Aspectos generales de la investigación en educación matemática

En este campo, los matemáticos, sicólogos, sociólogos y pedagogos se han inquietado de manera profunda y se han referido a ella de manera diferente, pero siempre con la preocupación de que la Educación Matemática prospere a través del tiempo y permita lograr una mayor comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje y de las condiciones necesarias y suficientes para obtener una mayor eficacia en el ejercicio de la docencia de las matemáticas.

Gutiérrez (1991)[3] considera que la investigación en Educación Matemática puede ser clasificada en teórica y práctica. En lo correspondiente a las investigaciones teóricas, él señala que en ellas se enmarcan los trabajos de elaboración de teorías de enseñanza o de aprendizaje las cuales abordan las diferentes componentes matemáticas, psicológicas y pedagógicas que intervienen en los procesos de comprensión y aprendizaje de las Matemáticas: procesos y capacidades de

---

[2] MINISTERIO DE EDUCACION NACIONAL. Lineamientos curriculares de matemáticas. Santa Fe de Bogotá. 1998. p. 58.
[3] GUTIÉRREZ, A. La investigación en Didáctica de las Matemáticas. Madrid: Síntesis, 1991.

razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de comprensión, obstáculos en el aprendizaje y formación o modificación de redes conceptuales

Aparecen aquí dos clases de teorías: las específicas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Skemp, Dienes, van Hiele) y las teorías más generales como la de Piaget, constructivismo, constructivismo social, entre otras.

Con respecto a las investigaciones prácticas, Gutiérrez señala que un gran número de investigadores se dedican a ellas. En este tipo de trabajos se trata de estudiar algún tema en particular de la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas, analizando los procesos de aprendizaje de los estudiantes, sus dificultades y errores en el desarrollo de un método de enseñanza, entre otros.

1.4.2 Líneas de investigación en educación matemática

Aunque el objetivo básico de la investigacisón en Educación Matemática es conocer los procesos de aprendizaje de los estudiantes, con el fin de poder ofrecer a los profesores propuestas efectivas para desarrollar en las aulas, la actividad investigadora internacional no es monolítica y homogénea, sino diversificada y heterogénea. Ha habido algunos intentos de plantear los principales problemas de enseñanza de las Matemáticas que deberían ser resueltos, a semejanza de la famosa lista de los 23 principales problemas de las Matemáticas enunciados por Hilbert en 1900. Si bien los problemas planteados por Hilbert han marcado fuertemente las líneas de desarrollo de la investigación matemática durante este siglo, no puede decirse que haya ocurrido lo mismo en el campo de la Educación Matemática.

Un intento destacado se debe a Freudenthal[4] que plantea un grupo de problemas que se refieren al aprendizaje de algunas áreas de las Matemáticas: ¿por qué los niños no aprenden bien la aritmética? ¿Es posible basar la enseñanza de la geometría en las intuiciones espaciales de los estudiantes? ¿Cómo podemos usar calculadoras y ordenadores para mejorar la comprensión de las Matemáticas?

Otros problemas se refieren al proceso de aprendizaje: ¿cómo deberían aprender los estudiantes? ¿Cómo deben avanzar los profesores en la esquematización y la formalización durante la enseñanza de un cierto tema? ¿Cómo se pueden estimular los procesos de comprensión de las Matemáticas y de reflexión sobre las propias actividades? ¿Cómo se puede estructurar el aprendizaje de las Matemáticas de acuerdo con ciertos niveles diferenciados?

[4] FREUDENTHAL, H. Major problems of mathematics education. Educational Studies in Mathematics, vol. 12. 1981

Un tercer tipo de problemas enunciados por Freudenthal se centra en componentes efectivas del aprendizaje: ¿cómo se pueden crear actitudes positivas hacia las Matemáticas? ¿Cómo se pueden crear contextos en los que se enseñe a matematizar?

Pero estas preguntas planteadas por Freudenthal, de indudable interés e importancia, no son cuestiones investigables directamente, sino líneas de investigación en las que se debe hacer un análisis detallado, pues están formadas por numerosos problemas interconectados. Es decir, existe un hilo conductor que los integra para su respectivo desarrollo, cada uno de los cuales necesita del esfuerzo de los investigadores.

1.5 El modelo educativo de van Hiele

1.5.1 Breve reseña preliminar

Como profesores de secundaria en Holanda, Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Geldof tuvieron problemas por la manera cómo sus estudiantes se desempeñaban en geometría. Ocurrió que mientras estudiaba algunos de los trabajos de Jean Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de pensamiento en geometría. Él notó, como es evidente en algunas de las entrevistas de Piaget, que los problemas o tareas que se le presentan a los niños con frecuencia requieren de un conocimiento del vocabulario o propiedades que está fuera del alcance de su nivel de pensamiento. Si la enseñanza acontece en un nivel superior al del estudiante, el material no es asimilado propiamente en la memoria por un periodo largo de tiempo. En las palabras de Freudenthal[5]: En tanto que el niño no sea capaz de reflexionar sobre su propia actividad, el nivel alto se mantiene inaccesible. El nivel alto de operación puede entonces pensarse como un algoritmo, aunque con una consecuencia de poca duración. Esto ha sido probado debido al fracaso en la enseñanza de fracciones.

En 1957 os van Hiele, presentaron sus respectivas memorias doctorales en la Universidad de Utrecht. Sus disertaciones las acompañaron con el desarrollo de una estructura y el experimento con niveles de pensamiento, con el propósito de ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción en la geometría. P. van Hiele formuló el esquema y los principios sicólogos y D. van Hiele enfocó sus experimentos didácticos con el propósito de elevar los niveles de pensamiento de los estudiantes.

[5] FREUDENTHAL, H.: "Mathematics as an Educational Task". Dordreckt, Holland: D. Reidel Pub. Co., 1973.

La siguiente cita muestra el interés de los van Hiele por idear una forma que pudiera mejorar el nivel de razonamiento de los estudiantes.

> Había partes de la materia en cuestión que yo podía explicar y explicar, y aun así los estudiantes no entendían. Podía ver que ellos lo intentaban realmente, pero no tenían éxito. Especialmente al comienzo de la geometría, cuando había que demostrar cosas muy simples, podía ver que ellos daban al máximo de sí, pero la materia parecía ser demasiado difícil. Pero debido a que yo era un profesor inexperto, también tenía que considerar la posibilidad de yo fuera un mal profesor. Y esta última y desagradable posibilidad se afirmaba por lo que ocurría posteriormente: de pronto parecía que comprendían la materia en cuestión. Podían hablar de ella con bastante sentido y a menudo decían: "No es tan difícil, pero ¿por qué nos los explicó usted de forma tan complicada?" En los años que siguieron cambié mi explicación muchas veces, pero, las dificultades se mantenían. Parecía como si siempre estuviera hablando en una lengua distinta. Y considerando esta idea descubrí la solución, los diferentes niveles del pensamiento.[6]

El mismo van Hiele describe la formulación primitiva de su modelo de la siguiente manera[7] :

> Primero presenté mi descubrimiento de la siguiente forma:
> Puede decirse que alguien ha alcanzado un nivel superior de pensamiento cuando un nuevo orden de pensamiento le permite, con respecto a ciertas operaciones, aplicar estas operaciones a nuevos objetos. El alcance del nuevo nivel no se puede conseguir por enseñanza pero, aún así, mediante una adecuada elección de ejercicios, el profesor puede crear una situación favorable para que el estudiante alcance un nivel superior de pensamiento.
>
> Se puede ver mi intento por librarme a mí mismo de no ser capaz de dar suficiente instrucción; también se puede ver la solución: una adecuada serie de ejercicios: En realidad, se ha puesto de manifiesto que al cambiar los libros de texto todas las dificultades podían desaparecer. Así que mi introducción a los niveles no era sólo una afirmación sino también un programa.

Las cuestiones alrededor de la geometría fueron populares en Holanda en los años de 1950 y los van Hiele estuvieron activamente involucrados. Los

---

[6] VAN HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986. p. 30.

[7]VAN HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986. p. 40.

lineamientos de los niveles de pensamiento del artículo de P. van Hiele y las fases de aprendizaje atrajeron la atención inmediata de los sicólogos de la Unión Soviética.
En *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*; van Hele condujo sus metas en términos de su teoría. Estas metas son, que los estudiantes aprendan a pensar con respecto a las matemáticas (es decir, adquirir algún conocimiento matemático) y, más importante, que los estudiantes aprendan a pensar matemáticamente. Primero, él disertó sobre la adquisición del conocimiento, él cree que es mejor alcanzado a través del aprendizaje de estructuras. Segundo, él disertó sobre el desarrollo de la habilidad para pensar matemáticamente, es decir, adquirir conocimiento a través de la aplicación de pensamiento puro, de percibir una estructura matemática, de desarrollar insight.

Hans Freudenthal[8], asesor de la disertación de los van Hiele, comenta sobre el origen de la teoría de van Hiele:

> Cuando los van Hiele empezaron a enseñar no estaban preparados como sucede con muchos otros profesores; nadie les ha contado cómo hacerlo. Por supuesto, ellos pasivamente experimentaron enseñar, quizás porque observaron a sus maestros hacerlo, pero esto no era suficiente. En tanto el tiempo transcurrió, tuvieron la oportunidad de discutir su forma de enseñar con otro y otros. Ellos sometieron sus propias acciones a la reflexión. Ellos se observaron a sí mismos cuando enseñaban, recordaron lo que habían hecho y lo analizaron. De hecho el pensamiento es una actividad continua, pero existen niveles relativos a esta actividad. En el nivel más alto, la acción del nivel mas bajo se convierte en objeto de análisis. Eso fue lo que los van Hieles reconocieron como característica sobresaliente de un proceso de aprendizaje, nombrándolo de la manera como ellos lo aprendieron enseñando. Ellos transfirieron esta característica del proceso de aprendizaje, que era la meta de su enseñanza, al proceso de aprendizaje de los estudiantes quienes estaban aprendiendo matemáticas. Allí, ellos descubrieron niveles similares. Para mí, esto se parece a un descubrimiento importante.

Aquí yace el tema del esquema de nivel de van Hiele, como también la semilla de extenderlo a conceptos matemáticos avanzados.

[8] FREUDENTHAL, H.: "Mathematics as an Educational Task". Dordreckt, Holland: D. Reidel Pub. Co. 1973.

1.5.2 Descripción del Modelo

El modelo de Van Hiele se compone de tres elementos principales: **los niveles de van Hiele**, son una estratificación del razonamiento humano en una jerarquía de niveles, **las fases de aprendizaje**, son los procesos que conducen al estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente y la **percepción -insight**, que es el interés original y el tema de disertación. En la teoría está implícita la idea de que los estudiantes se encuentran con obstáculos en tanto intentan, quizás sin saberlo, el ascenso desde un peldaño al siguiente en la escalera de los van Hiele.

El modelo educativo de van Hiele, tal como se utiliza actualmente, puede enunciarse de la siguiente manera:

1. Existen diferentes niveles de razonamiento de los estudiantes referidos a las Matemáticas.

2. Cada nivel supone una forma de comprensión, un modo de pensamiento particular, de manera que un estudiante solo puede comprender y razonar sobre los conceptos matemáticos adecuados a su nivel de razonamiento.

3. Por lo tanto, el proceso de enseñanza debe adecuarse al nivel de razonamiento del estudiante. Una enseñanza que transcurra en un nivel superior al de los estudiantes no será comprendida.

4. El proceso de enseñanza debe orientarse a facilitar el progreso en el nivel de razonamiento, de forma que el progreso se haga de un modo rápido y eficaz.

Las fases de aprendizaje están orientadas desde un nivel de pensamiento a otro. van Hiele describe el paso de un estudiante de un nivel al siguiente como una función de aprendizaje, "la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje". El paso de un nivel al siguiente se produce a través de una específica secuencia de fases de aprendizaje.

1.5.3 Nomenclatura de los niveles

Los van Hiele enunciaron originalmente su modelo distinguiendo cinco niveles (Básico o nivel 0, y niveles I, II; III y IV). A través de la bibliografía sobre el tema, ellos y otros autores han ido cambiando la forma de numerar o de referirse a estos niveles. El mismo P. van Hiele, en la más notable revisión de su teoría [9], enfatiza la importancia de los tres primeros niveles, a los que se refiere como “básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico”.

En el mismo trabajo, señala que los niveles superiores a estos presentan dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico. Sin embargo, la forma más habitual de referirse a los niveles es distinguiendo cuatro niveles. Por ejemplo en Gutiérrez y Jaime[10] se denomina nivel I (de reconocimiento), nivel I (de análisis), nivel III (de clasificación), nivel IV (de deducción formal).

En Land [11] se habla de nivel 0 (básico, visual o predescriptivo), nivel I (descriptivo), nivel II (teórico) y nivel III (deductivo).

Por último, de J. Llorens[12], encontramos estos cuatro niveles añadiendo un nivel anterior, que se denomina nivel 0 o predescriptivo.

En este estudio se seguirá la nomenclatura por J. Llorens:
Nivel 0, **predescriptivo**
Nivel I, **de reconocimiento visual**
Nivel II, **de análisis**
Nivel III, **de clasificación, de relación**
Nivel IV, **de deducción formal**

Evidentemente, más que la nomenclatura, lo que importa es la descripción de estos niveles y sus características. En el siguiente apartado se hace una caracterización de cada nivel.

1.5.4 Características de cada uno de los niveles (descriptores)

Se entenderá por descriptores de los niveles de van Hiele las principales características que permiten reconocer, a partir de la actividad del estudiante, cada uno de esos niveles de razonamiento matemático. Se presentan a

---

[9] van HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986.p 47 a 51

[10] GUTIERREZ, A. Y JAIME, A.: "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de VanHiele". En Linares y Sánchez (ed.). "Teoría y práctica en Educación Matemática". Sevilla: Ed. Alfar, 1990.

[11] LAND, J. H.: “Appropialeness of the van Hiele Model for Describing Students' Cognitive Processes on Algebra Tasks as Typified by College Students' Learning of Functions”. The University of Boston. 199l

[12] LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. An Extension of van Hiele’s Model to the Study of Local Approximation, Int. J. Math. Edu. Sci. Technol. 28, No. 5, 1997. p. 713-726.

continuación algunos ejemplos de estos, cuyo enunciado se hace con referencia a aspectos geométricos. Otros descriptores de los niveles se pueden encontrar en los trabajos ya citados de Gutiérrez y Jaime y de los van Hiele.

Se destaca precisamente que el enunciado y justificación de descriptores de los niveles para otras materias distintas de la geometría se puede considerar, en general, un problema abierto. Algunos trabajos de investigación que toman su base directamente del modelo son confirmaciones de las ideas del modelo que, aplicadas a una materia concreta, han producido los resultados previstos; es decir, se han podido diferenciar y describir los niveles de pensamiento en los términos que se han señalado. Otros trabajos de investigación han hecho aportaciones más recientes, porque han extendido el modelo a ámbitos diferentes de la geometría y han obtenido descriptores de niveles de los conceptos matemáticos tratados en cada una de sus investigaciones. Entre estas investigaciones desarrolladas destacamos las siguientes: J. Land, (Universidad de Boston, 1991), J. L. Llorens (Universidad Politécnica de Valencia, 1994), P. Campillo (Universidad Politécnica de Valencia, 1999). A. de la Torre (Universidad Politécnica de Valencia, 2000), C. M. Jaramillo (Universidad Politécnica de Valencia, 2000), P. V. Esteban (Universidad Politécnica de Valencia, 2000). El presente estudio sigue esta línea de investigación

NIVEL I (DE RECONOCIMIENTO VISUAL)

- Los estudiantes reconocen las figuras geométricas por su apariencia global.

- Perciben las figuras como objetos individuales, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otras figuras del mismo tipo.

- Pueden aprender cierto vocabulario que identifican las figuras geométricas (tal como cuadrado, rectángulo y otras).

- Describen las figuras geométricas por semejanza con otros objetos que no necesariamente son figuras geométricas, ni del tipo de las que están describiendo.

- Identifican la forma de la figura o la propia figura como un todo, sin distinguir partes que la formen, ni las propiedades matemáticas que las caracterizan.

Este nivel se ilustra en el siguiente ejemplo: si se le pregunta a un niño si una figura es un rectángulo, será capaz de identificarla correctamente. Sin embargo, es muy posible que la diferencie de un cuadrado, sin ver este último como una clase de rectángulo; menos aún, el niño no será capaz de explicitar propiedades relativas a los lados del rectángulo, a sus ángulos, etc. Incluso dos rectángulos pueden ser identificados como figuras diferentes. Este nivel es por el que necesariamente debe pasar cualquier concepto en cualquier nivel educativo, pero no sería correcto asociar este nivel con el nivel educativo más elemental. Tampoco se debe suponer que todos los estudiantes alcanzan este nivel, ya que hay casos de estudiantes que no están en este nivel al comenzar un concepto, sino que se encuentran en un nivel inferior, al que se llamó nivel 0 o predescriptivo. La separación de los estudiantes ubicados en el nivel 0 y que no han alcanzado el nivel I, se podrá determinar cuando el estudiante no sabe distinguir un rectángulo en el ámbito geométrico del ejemplo.

NIVEL II (DE ANÁLISIS)

- Los estudiantes analizan las partes o elementos que componen una figura geométrica y sus propiedades.
- Por la observación de esas partes, puede deducir otras propiedades de las figuras, generalizándolas a las figuras de una determinada clase.
- No relaciona las distintas propiedades de las figura geométricas, por lo que no pueden hacer clasificaciones de esas figuras basándose en sus propiedades.
- Las deducciones y extensión de propiedades tienen un carácter informal.

Continuando con el ejemplo anterior, un rectángulo es visto ahora como una figura que tiene sus diagonales iguales y el estudiante puede percibir que un cuadrado también es un rectángulo. Un estudiante en este nivel seria capaz de describir un rectángulo enumerando las propiedades que percibe, pero no explicaría porqué las diagonales de un cuadrado se cortan formando ángulos rectos. Sin embargo, puede reconocer y explicar esa propiedad, notando su carácter general para cualquier cuadrado, independientemente de su tamaño, calidad de dibujo, color, etc. Por tanto, en el nivel II aparecen características que se identificaron como del pensamiento matemático propiamente dicho, pues a partir de la observación o de la manipulación se abstraen propiedades y se generalizan. No obstante, esa capacidad es limitada, lo que se puede manifestar en clasificaciones incorrectas, ya que las propiedades aparecen como una lista, sin relación de unas con otras.

NIVEL III (DE CLASIFICACIÓN, DE RELACIÓN)

Los estudiantes relacionan las figuras y sus propiedades. Reconocen que unas propiedades se deducen de otras y son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para conjeturar que una propiedad se deriva de otra. Sin embargo, no reconocen la necesidad del rigor, ni la relación entre lo que han aprendido con otros sistemas deductivos que pueden ser semejantes.

Pueden seguir una demostración formal, pero generalmente no son capaces de reproducirla. El tipo de argumentación es informal (aunque correcta) y, frecuentemente, recurre a argumentos basados en la experiencia. Sin embargo, pueden clasificar lógicamente y aprender relaciones entre distintas clases de figuras. Pero no comprenden la necesidad de la formalización (demostraciones generales) ni las estructuras axiomáticas.

En resumen, se puede decir que la capacidad de hacer demostraciones, deducciones, marca la frontera entre los niveles I – II y III – IV. Así, un estudiante que razone en este nivel podrá hacer conjeturas relativas a propiedades de los ángulos de un rectángulo a partir de otras propiedades referidas a sus lados; sin embargo, no es capaz de distinguir la necesidad de esas propiedades, de fijar las condiciones mínimas para obtenerlas. Las definiciones y la clasificación serán correctas pero no siempre responderán a la formalización propia del pensamiento matemático avanzado en las que determinadas propiedades pueden representar papeles equivalentes en la formulación de un sistema axiomático formal. Es aquí cuando se revela ese nivel superior que identificamos con nivel IV. Otra manifestación de ese nivel puede ser la comprensión de las técnicas que se utilizan en algunas demostraciones que, para el estudiante en el nivel III tiene un sentido meramente casual, ya que en ese nivel las conjeturas son correctas, pero no se formalizan.

NIVEL IV (DE DEDUCCIÓN FORMAL)

- Los estudiantes pueden analizar varios sistemas deductivos y relacionarlos.

- Conocen propiedades de un sistema deductivo tales como la consistencia, la independencia y la completitud de sus postulados.

- Los estudiantes conocen y valoran la importancia de la precisión al tratar con los fundamentos y con las interrelaciones de estructuras axiomáticas formales.

Una consecuencia práctica que se deduce de esos descriptores es que un estudiante en este nivel superior es capaz de llegar a plantear distintas demostraciones de algunas propiedades, o de percibir que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes. Al mismo tiempo, relacionan distintos conceptos y propiedades dentro de un área de conocimiento o de un tema más general que los englobe, captando que son manifestaciones diferentes de un mismo hecho matemático. Para este nivel IV, van Hiele[13] señaló que solamente tiene un interés teórico ya que su discernimiento presenta dificultades. Luego, según esta referencia, no se podrá distinguir este nivel; por ello, este estudio se

---

[13] Van HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press, 1986.p 47 a 51

centrará en encontrar los descriptores de los niveles inferiores I, II y III., en relación con el concepto estudiado.

1.5.5 Caracterización del modelo

Para que una clasificación en niveles pueda considerarse dentro del modelo de van Hiele, es necesario que los descriptores de los niveles cumplan con unas propiedades específicas que se enuncian a continuación. Es prudente advertir que la nomenclatura que se utiliza es la presentada por Usiskin[14] .

Propiedad 1: (**Secuencialidad fija**). Cada estudiante debe progresar a través de los niveles en una secuencialidad fija, esto es, “Un estudiante no puede estar en un nivel ***n*** de van Hiele sin haber superado el nivel ***n-1***”

Propiedad 2: (**Adyacencia**). El objeto de percepción del nivel ***n-1*** se convierte en el objeto de pensamiento del nivel ***n***

Puede interpretarse esta propiedad señalando que los niveles de van Hiele tienen una estructura recursiva, puesto que en el nivel ***n*** hay determinadas cualidades del pensamiento que se utilizan implícitamente y cuyo uso explícito se manifiesta en el nivel ***n+1***. Desde este punto de vista, el proceso de enseñanza orientado a desarrollar la capacidad de razonamiento debe centrarse en hacer consciente al estudiante de esa habilidad implícita. Para ello será necesario plantearse actividades en las que se requiera la utilización de dicha habilidad, ya que la prueba repetida y la experiencia son las que darán lugar al desarrollo de su forma de razonar. El papel de la experiencia en el aprendizaje es, por tanto, fundamental en el modelo de van Hiele.

Propiedad 3: (**Distinción)**. El nivel ***n*** requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido en el nivel ***n-1***, esto es la percepción de una nueva estructura.

Propiedad 4: (**Separación**). Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento matemático.

Propiedad 5: (**Cada nivel tiene su lenguaje**). Hay una estrecha relación entre el lenguaje y los niveles hasta el punto que cada nivel tiene un tipo de lenguaje específico, de modo que las diferentes capacidades de razonamiento asociadas a cada uno de los niveles de van Hiele, no sólo se reflejan en las formas de resolver problemas, sino que sobre todo, se manifiestan en la forma de expresarse y en el

[14] USISKIN, Z.: “Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry”. CRRSSG Report, University of Chicago, 1982.

significado que se da o se puede dar al vocabulario específico, a palabras como "demostrar" por ejemplo. Esta palabra tiene significados típicamente diferentes según el nivel de razonamiento. Como ya señalamos, sólo a partir del nivel III, "demostrar" tiene un significado semejante al que habitualmente le damos la mayoría de los matemáticos. Se hace una precisión, porque el significado de la palabra o de la idea de demostración no siempre es la misma, ni siquiera entre los matemáticos, ni ha sido igual su significado en cada época histórica. Las demostraciones formales rigurosas solamente tendrán sentido en un nivel IV. En un nivel III pueden existir demostraciones que se entienden están formadas por razonamientos lógicos, aunque los argumentos puedan ser conjeturas. En el nivel II "demostrar" tendría un significado consistente en comprobar y mostrar que una afirmación se verifica en algunos casos o, incluso, sólo en uno. En el nivel I el término aún tiene menos sentido matemático, porque el estudiante lo interpretará en una forma tan personal que puede ser impredecible.

Todo lo anterior muestra un ejemplo de la dificultad para identificar los niveles, ya que como se percibe, un estudiante puede demostrar en cualquier nivel, aunque la expresión "demostrar" tenga un sentido totalmente distinto.

También es importante no confundir nivel con la habilidad de resolver algunos ejercicios o de contestar algunas preguntas. Un estudiante puede aparentar un nivel de razonamiento superior al que realmente posee, si ha aprendido a realizar rutinariamente actividades que se pueden identificar como propias de un nivel superior. El caso típico es el que se deriva del aprendizaje memorístico de algunos estudiantes universitarios quienes saben hacer derivadas y límites, reproducir sus definiciones, pero no comprenden ninguno de los conceptos. De esta deficiencia tenemos la culpa los docentes, debido a los procesos de evaluación en los que prevalecen las habilidades rutinarias y la memoria, en vez de comprobar que se han entendido y asimilado los conceptos.

La existencia de un lenguaje especifico de los niveles, como se ha puesto de manifiesto con la palabra "demostrar" y que tiene significados distintos según el nivel de razonamiento, produce una incomunicación entre profesor y estudiante cuando se habla para diferentes niveles de razonamiento. Esto hace que el estudiante no entienda las explicaciones del profesor, y también que el profesor no pueda entender las preguntas del estudiante, que se sitúan en un nivel inferior de razonamiento. Disponer de instrumentos relativamente sencillos, que permitan al profesor conocer el nivel de razonamiento de los estudiantes es, por tanto, un objetivo importante cuando se pretende aplicar el modelo de van Hiele.

Propiedad 6: (**Consecución**). El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual. Algunos investigadores como Hoffer[15] y Fuys, Geddes, Tischler[16],

---

[15] HOFFER, A. R.: "van Hiele-Based Research". En "Acquisition of mathematical Concepts and

han desglosado cada nivel de van Hiele en varias habilidades de razonamiento, de forma que sólo se puede considerar adquirido un nivel cuando se manifiestan cada una de sus cualidades. Estas cualidades no se adquieren todas de forma simultánea, de modo que existe un periodo de transición en el que un estudiante puede manifestar simultáneamente habilidades de niveles contiguos. Algunos autores hablan de niveles intermedios que corresponderían a los periodos de transición, cuando se manifiestan propiedades de un nivel y del siguiente, pero no se ha alcanzado todavía el nivel superior. Se han realizado algunos estudios que señalan el carácter regresivo que puede manifestarse en el nivel de razonamiento, sobre todo cuando todavía no se ha adquirido plenamente un nivel; o sea, que el estudiante ante una pregunta se refugia para su respuesta en el nivel de razonamiento anterior, que tiene plenamente adquirido; esto con el fin de manifestar una sensación de seguridad en sus respuestas.

1.5.6 El proceso de aprendizaje según el modelo de van Hiele

Como se señaló anteriormente, el modelo de van Hiele no es solamente descriptivo, sino que es un modelo educativo completo, por lo que propone un plan para favorecer el progreso en los niveles: “Estos niveles son inherentes a la elaboración del pensamiento; son independientes del método de enseñanza usado. Sin embargo, es posible que ciertas formas de enseñanza no permitan alcanzar los niveles superiores, pues los métodos de pensamiento usados en esos niveles permanecen inaccesibles a los estudiantes”[17].

La idea central de van Hiele, en lo que respecta a la relación entre la enseñanza de las matemáticas y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, es que la adquisición por una persona de buenas habilidades de razonamiento es fruto de su propia experiencia. El término experiencia se utiliza aquí no sólo en su acepción de experiencia de aprendizaje, sino en su sentido amplio, de modo que no sólo se refiere a lo que se adquiere en las aulas, sino a todas las experiencias que pueden afectar a la comprensión del concepto.

van Hiele describe el paso de un estudiante de un nivel al siguiente como una función del aprendizaje: “La transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural, tomando lugar bajo la influencia del programa de enseñanza aprendizaje”. El paso de un nivel al siguiente sigue una acordada y específica secuencia de

---

processes”. Richard Lesh y Marsha Landau, ed. Academic Press, 1983.

[16] FUYS, D., GEDDES, D. Y TISCHLER-: "An investigation of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (final report)". Brooklyn College, City Univ. of N. York, 1985.

[17] FUYS, D, Y GEDDES, D.: "An Investigation of Van Hiele Levels of Thinking in Geometry among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and implications". Annual meeting of American Educational Research Association. April 27, 1984.

fases de progreso. Las fases del modelo de van Hiele son: (1) **Información**, (2) **Orientación directa**, (3) **Explicitación**, (4) **Libre orientación** y (5) **Integración**. Estas fases pueden ser comparadas con el "principio de fases consecutivas" de Polya[18], las de aprendizaje en ciclos de Dienes y la "dinámica del pensamiento matemático" de Leone Burton[19]. Con este punto de partida son posibles diferentes métodos de enseñanza que tengan como objetivo que el estudiante realice experiencias. Los métodos docentes que no serían adecuados, serán aquellos en los que el estudiante asuma una actitud pasiva.

> La maduración que lleva a un nivel superior tiene lugar de una forma especial. Se pueden revelar varias fases en ella, esta maduración debe considerarse, por encima de todo, como un proceso de aprendizaje y no como una maduración de tipo biológico, por lo tanto es posible y deseable que el profesor ayude y la acelere. El objetivo del arte de enseñar es precisamente enfrentarse a la cuestión de saber cómo se pasa a través de estas fases y cómo se puede prestar ayuda al estudiante de forma eficaz[20].

1.5.7 El Insight, las estructuras y la red de relaciones

van Hiele afirma que una persona muestra insight si:

- Es capaz de actuar en una situación no familiar.
- Actúa competentemente (correcta y adecuadamente) en los hechos requeridos en una situación.
- Aplica intencionalmente (deliberadamente y conscientemente) un método que resuelve la situación.
- Para tener insight, los estudiantes entienden qué están haciendo, porqué lo están haciendo y cuándo lo hacen.
- Los estudiantes son capaces de aplicar sus conocimientos para resolver problemas.

---

[18] POLYA, G.: "How to Solve it. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.
[19] BURTON, Leone. E*pistemology, philosophy and pedagogy of mathematics* http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome12/article1.htm.

[20] FUYS, D, Y GEDDES, D.: "An Investigation of Van Hiele Levels of Thinking in Geometry among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and implications". Annual meeting of American Educational Research Association,. April 27, 1984.

Se trata entonces de analizar la interrelación entre el insight y las estructuras de las que habla van-Hiele en su texto “Structure and Insight”.

En la psicología Gestalt se puede encontrar la siguiente proposición: “Estamos seguros de insight cuando la persona que se está estudiando se encuentra con una conclusión a causa de una estructura mental”. Van-Hiele en su disertación,*Concepción e insight* de 1957 escribió: “El insight existe cuando una persona actúa adecuadamente en una nueva situación y con intención”.

La psicología Gestalt y van-Hiele decían la misma cosa pero con diferentes palabras. Cuando la psicología Gestalt habla de una estructura, presume una expectativa sobre la fuerza con la que se es capaz de actuar adecuadamente. Con la palabra “adecuadamente” se indica la relevancia de objetividad. La psicología Gestalt habla de una estructura mental. Una persona que actúa con intención no actúa al azar, el acto es acorde a la estructura que él percibe, hay una correspondencia entre su estructura mental y la estructura esperada. Para van-Hiele, las estructuras son un fenómeno importante en la medida en que:

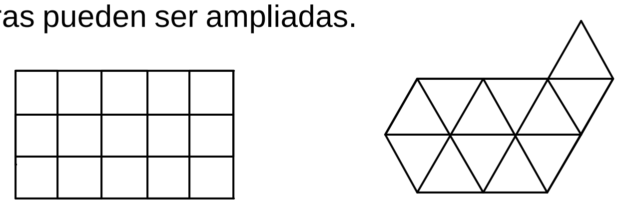
- Capacita a la persona para actuar en situaciones que no son exactamente las mismas como las que conocía antes.

- Le ahorra a la persona una vida interminable de ensayos y error.

- Capacita a la persona para comprender otras cosas. La persona ve una estructura igual y puede reconocer su armonía y extenderla de igual forma.

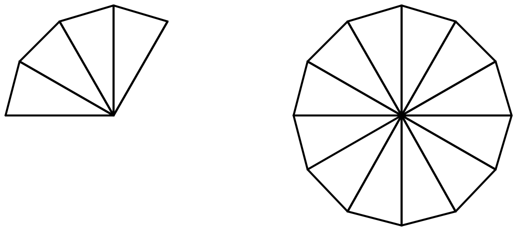
van Hiele no define lo que es una estructura, simplemente da ejemplos donde se pueden observar las propiedades de una estructura,

- Las estructuras pueden ser ampliadas.



Es muy fácil ampliar una estructura de cuadrados o de triángulos.

- No es necesario que la estructura sea infinitamente extensible.



Se pueden ir agregando triángulos hasta llegar a la figura de la derecha.

- Es posible que una estructura pueda extenderse de diferentes maneras.

En la siguiente secuencia de números dada: 1, 1-1, 1-2-1, 1-3-3-1, 1-4-6-4-1, quizás se vea el principio del triángulo de Pascal y continuaríamos con 1-5-10-10-5-1 pero hay otra posibilidad. Se puede pensar en las potencias de 11; primero 11^0, después 11^1 y así sucesivamente, y si esta es la idea continuaríamos con 1-6-1-0-5-1.

- Algunas estructuras no necesitan del lenguaje.

En el cuestionamiento a una persona para que continúe las estructuras visuales precedentes, ésta podrá tener éxito sin tener un lenguaje aprendido que acompañe la estructura.

- La apreciación de una estructura no implica comprensión de la misma.

Se puede apreciar una pieza musical sin tener mucho conocimiento sobre la música.

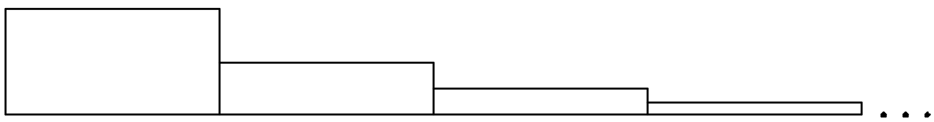
- Las estructuras pueden tener un carácter de modelo.

Hay estructuras visuales que pueden ser abstracciones muy eficientes de conceptos que de otra manera serían difíciles de comprender.

- Algunas estructuras se alcanzan a comprender a través del uso del lenguaje.

Hay estructuras visuales que sólo quienes conocen acerca del tema logran comprender y en el proceso de aprenderlas el lenguaje se hace cada vez más refinado, alejando estas estructuras de la comprensión de los novatos en el tema.

En este estudio se trabajará con estructuras visuales como:



En ésta se encuentran implícitos los conceptos de rectángulo, área, escalera, suma de áreas, infinito, entre otros, que sólo se podrán comprender después de un proceso de razonamiento el cual se llevará a cabo durante la aplicación de la entrevista socrática diseñada.

En la psicología estructural (La psicología de la Gestalt) hay cuatro importantes propiedades que gobiernan la estructura:

1. Es posible extender una estructura. Quien sabe la parte de una estructura también conoce su extensión. La extensión de una estructura está sujeta a las mismas reglas dadas en una parte de ella.

2. Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura más fina. La estructura original no está afectada por ésta: las reglas del juego no han cambiado, simplemente se aumentaron. De esta forma es posible tener más detalles que toman parte en la construcción de una estructura.

3. Una estructura puede ser vista como una parte de una estructura más incluyente. Esta estructura más incluyente también tiene más reglas. Algunas de las cuales definen la estructura original.

4. Una estructura puede ser isomórfica con otra estructura. En este caso las dos estructuras son definidas por reglas que le corresponden a cada una. De esta forma, si usted ha estudiado la estructura dada, también conoce cómo la otra estructura está construida.

Pero… ¿de qué manera se pueden relacionar las estructuras que el estudiante posee y va ampliando durante su proceso de razonamiento en torno a un concepto, con la red de relaciones que gira alrededor de éste?

Una sucesión de situaciones y conceptos vinculados entre sí es precisamente lo que se llama una red de relaciones. Como profesores, se debe recordar siempre que esta red de relaciones debería aparecer durante el proceso de aprendizaje y a partir de situaciones concretas. Sólo entonces se puede esperar el desarrollo de una estructura reversible; es decir, una estructura en la que los estudiantes puedan encontrar su camino de vuelta de relaciones abstractas a situaciones concretas. Esto es lo que se requiere si el objetivo es una comprensión del concepto.

Desgraciadamente, la enseñanza sigue con frecuencia otras vías: a menudo el profesor intenta infundir un conocimiento directo de la red de relaciones (formalización del concepto) sin haber pasado por la etapa intermedia de las situaciones concretas (que en el presente estudio serán las visualizaciones geométricas del concepto). De momento, esta forma de tratar al estudiante puede tener bastante éxito y es cierto que el conocimiento factual sobre la red de relaciones se adquiere a menudo en menos tiempo. Sin embargo, tiene la desventaja de que se ignora durante mucho tiempo el importante tema de las subestructuras básicas; la conexión analítica con las estructuras concretas (visuales) estará ausente, pues el estudiante habrá creado toda su red de relaciones mediante un proceso imitativo incitado por la exposición estructural del profesor. Como las estructuras resultantes tienen poca conexión mutua, no podemos esperar demasiada transferencia, ni en el campo estudiado ni respecto a otras esferas de actividad.

1.5.8 Diferencias entre la teoría de van Hiele y la teoría de Piaget

“Una importante parte de la raíz del trabajo puede ser encontrada en las teorías de Piaget. Es importante entonces también enfatizar las diferencias”[21].

Estas diferencias importantes para el estudio de este modelo se resumen de la siguiente manera:

1. Piaget creía que el paso de un nivel de pensamiento al siguiente era una función del desarrollo, van Hiele considera que es del aprendizaje. Entonces se plantea el problema de cómo estimular a los niños para que progresen de un nivel al siguiente en el contexto de van Hiele, no de Piaget.

2. Piaget no veía importante el papel del lenguaje para el movimiento desde un nivel al siguiente, ocasionalmente se le sugirió a él que los niños no entendían sus preguntas. Él siempre preguntó qué es lo que no entendían, él podía leer sus acciones. Pero, aunque las acciones pueden ser adecuadas, no se puede leer cuál es el nivel en que los niños pueden razonar”.

3. Piaget no veía las estructuras de un nivel más alto como el resultado del estudio de un nivel más bajo. En la teoría de van Hiele el nivel más alto es alcanzado si las reglas que gobiernan la estructura más baja se han hecho explícitas y estudiadas; por lo tanto se convierten en una nueva estructura.

Es importante dejar claro que los niveles de razonamiento de van Hiele no se asocian necesariamente a cada uno de los distintos niveles educativos; ciertamente, hay diferencias notables entre la forma como un estudiante universitario trabaja, se expresa y razona y la forma como lo hace un estudiante de los primeros cursos de educación básica.

Pero, para hablar con propiedad de los niveles de razonamiento no se puede acercar uno a los estudiantes con estereotipos. Por ejemplo, una demostración puede tener sentido en los niveles educativos básicos, aunque su expresión no coincida con la formalización que podríamos esperar en el nivel universitario. El nivel de pensamiento es algo más complejo que el nivel de desarrollo o que el nivel educativo, aunque, ciertamente, tampoco sea absolutamente ajeno a ellos. Las diferencias de nivel de pensamiento pueden presentarse entre estudiantes de

[21] van HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986.p 5.

distinto nivel educativo o entre estudiantes del mismo nivel, tal como se verá más adelante.

1.5.9 Investigaciones relacionadas con el Modelo de van Hiele en educación matemática

Desde la difusión inicial de los trabajos de van Hiele, a mediados de los años 70, el interés por este modelo ha sido creciente y se han realizado muchas investigaciones basadas en sus teorías. Existen muchos trabajos de investigación basados en las ideas del modelo de van Hiele y cuyo denominador común es la insistencia en aplicarlo a cuestiones geométricas de niveles educativos elementales o medios. En la actualidad existen líneas de investigación que siguen centradas en el estudio de problemas geométricos de mayor complejidad (utilizan un mayor número de dimensiones) que los estudiados anteriormente.

Se puede afirmar que el modelo de van Hiele supone, en su aspecto descriptivo del proceso de aprendizaje, una contribución fundamental para establecer de una forma objetiva la eficacia de ese proceso de aprendizaje. Pero esta teoría no está limitada a la geometría, también puede aplicarse en otras áreas de la matemática.

Es de especial interés ampliar su ámbito de aplicación a aquellos conceptos matemáticos más complejos y problemas de comprensión más endémicos; esto ocurre con frecuencia en el análisis matemático con los conceptos relacionados con el de límite, en donde se da una aproximación local infinita.

En la bibliografía se muestran algunos trabajos realizados a la luz del modelo de van Hiele, que aplicados a una materia concreta han producido los resultados previstos. Es decir, se han podido diferenciar y describir los niveles de pensamiento en los términos que se han señalado; así mismo, se ha comprobado la eficacia del progreso en los niveles de determinadas propuestas basadas en esas descripciones y en las fases de aprendizaje. Otras iniciativas han supuesto modificaciones curriculares derivadas de la constatación que favorecían el progreso en el nivel de razonamiento. Pero, casi la totalidad de ellos han sido enfocados desde el punto de vista exclusivamente geométrico.

A partir de 1982 comenzaron a desarrollarse alguno proyectos de investigación con el objetivo común de proponerse llevar a cabo una revisión curricular (referida a la geometría) aplicando el modelo de van Hiele. Se destacan tres proyectos llevados a cabo en EE.UU que han tenido gran difusión:

Proyecto Chicago “Van Hiele levels and achievement in secondary school geometry”. Este proyecto dirigido por Zalman Usiskin, tuvo como propósito fundamental "analizar la habilidad de la teoría de van Hiele para describir y predecir el resultado de los estudiantes de geometría en la escuela secundaria"[22]. Los resultados obtenidos más destacados fueron:

1. El quinto nivel no existe o no puede ser detectado. El mismo van Hiele indica que niveles más altos del nivel IV, son difíciles y no tienen valor práctico[23]. Es necesario resaltar que la nomenclatura de los niveles de van Hiele, cambia según los autores, y también ha sido revisada en varias ocasiones por el mismo van Hiele.

2. Lo que Usiskin llama la propiedad de "secuencia fija" de los niveles. "Un estudiante no puede estar en un nivel n de van Hiele, si no ha pasado a través del nivel n-1"[24]; esta propiedad fue verificada por el estudio de Mayberry[25].

3. "Decisiones arbitrarias respecto al número de respuestas correctas necesarias para obtener un nivel pueden afectar al nivel asignado a muchos estudiantes".[26] Un fenómeno similar fue encontrado por Burger[27] y puede ser atribuido parcialmente a los estudiantes que se encuentren en periodos entre niveles.

4. Los niveles de van Hiele pueden predecir bien los resultados actuales en geometría y pueden predecir bien resultados posteriores[28].

Proyecto Oregon ("Assessing children's intellectual growth in geometry", Universidad de Oregon, Burger, Shaughnessy, Hoffer y Mitchell). Este proyecto fue dirigido por William F. Burger de la universidad del estado de Oregon. El estudio se centró en la contestación a tres preguntas:

1. ¿Son los niveles de van Hiele útiles para describir el proceso de pensamiento de los estudiantes en las tareas de geometría?

---

[22] USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982. p. 8.
[23] VAN HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press, 1986.p 47.
[24] USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982. p. 5.
[25] USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982. p. 80.
[26] USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982. p. 80.
[27] BURGER, W.: "Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry" (Final Report of the Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry Project). Corvallis. Oregon State University, Department of Mathematics. 1986.
[28] USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982. p. 82-89.

2. ¿Pueden los niveles ser caracterizados operacionalmente por la conducta de los estudiantes?

3. Puede un procedimiento de entrevista ser desarrollado para revelar los niveles predominantes en el razonamiento en una específica tarea de geometría? El proyecto de investigación respondió afirmativamente a las tres preguntas y, además, obtuvo los siguientes resultados destacables:

- Los autores enfatizaron la utilidad de la entrevista escrita, cuidadosamente desarrollada, y el formulario de análisis para revelar los niveles de razonamiento pre-encontrados, los cuales el evaluador podía identificar con confianza.

- Según Burger y Shaughnessy "los niveles aparentan ser estructuras complejas envolviendo el desarrollo de conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchos ambientes de tareas.

- Para Burger y Shaughnessy la oscilación entre niveles de razonamiento pre-encontrados en un estudiante, presumiblemente en un periodo de transición entre un nivel y el siguiente, indica que los niveles son más bien dinámicos que estáticos, como teorizó van Hiele.[29]

Proyecto Brooklyn ("Geometric thinking among adolescents in inner city schools". Brooklyn College; Fuys, Geddes, Lowette y Tschler), se desarrolló con estudiantes de 6º y 9º grado. El proyecto fue dirigido por Davis Fuys y Dorothy Geddes del Brooklyn College. Incluía cuatro tareas a realizar:

- Traducción de los materiales, fuente de van Hiele, del alemán al inglés, y el desarrollo de documentación más detallada sobre la versión conductista de los niveles.

- Desarrollo de tres módulos de evaluación-instrucción para ser usados con sujetos en entrevistas clínicas.

- Entrevistas con estudiantes de sexto y noveno grado.

- Análisis de los niveles de razonamiento sobre material de geometría en tres series de libros de textos de EE.UU

Los resultados más interesantes de este proyecto fueron:

[29] BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M. (1986). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas.
http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v18n1p35.pdf

1. El cuarto nivel de van Hiele puede ser caracterizado operacionalmente por la conducta, y es útil para describir en los estudiantes el nivel de entrada y el "nivel potencial" del proceso de pensamiento en las tareas geométricas.

2. Existen periodos entre los niveles, y un estudiante en un periodo transicional entre dos niveles estará fluctuando entre el nivel n-1 y el nivel n de pensamiento.

3. "...los niveles parecen ser complejas estructuras que envuelven los desarrollos de ambos, conceptos y procesos de razonamiento, aplicables a muchas de las tareas".

El proyecto Chicago validó la teoría de van Hiele, mientras el proyecto Oregon y el de Brooklyn implicaban la aceptación de la validez de la teoría. Los tres proyectos relatados siguen centrándose en la geometría como marco de su investigación.

Se pueden encontrar investigaciones que se salen del ámbito de la geometría. A continuación se mencionan algunas que han servido de base para la realización del presente estudio. Estas memorias para optar al título de doctorado tienen la innovación de separarse del área de la geometría.

Memoria para optar al grado de doctor presentada por J. Land Judy Land, presentada en la Universidad de Boston con el título de "Appropiateness of the van Hiele Model for describing Stundent´s Cognitive Processes on algebra task as typified by College Students Learning of Functions" en 1991. Esta memoria ha servido de base para otras, como la de J. L. Llorens y la de P. Campillo cuyos resultados son bastante halagadores e interesantes. Abordan conceptos fundamentales del análisis matemático, como son el concepto de Aproximación Local y el de Continuidad, resaltando y concediendo un especial interés a la evolución del razonamiento del estudiante[30]. Es necesario resaltar la importancia de la tesis de J. Land por innovar en la aplicación de los niveles de van Hiele en un área diferente a la geometría. Aunque centra su estudio en destrezas, brinda un gran aporte a estudios posteriores y en especial al nuestro.

Memoria para optar al grado de doctor presentada por J. L. Llorens. "Aplicación del modelo de van Hiele al Concepto de Aproximación Local" ha servido de base tanto para el desarrollo del trabajo de P. Campillo como para este estudio. Se resalta en el trabajo de J.L Llorens como el que abrió las puertas para desarrollar el modelo de van Hiele en conceptos del análisis matemático. Su trabajo fue desarrollado y aplicado tanto en estudiantes de los últimos grados de

---

[30] LAND, J. H.: "Appropiateness of the van Hiele Model for Describing Student's' Cognitive Processes on Algebra Tasks as Typified by College Students 'Learning of Functions". The University of Boston. 199l.

secundaria como primer semestre de universidad. En su trabajo hace uso de la teoría de Vinner relacionada con la visualización de figuras geométricas[31].

Memoria para optar al grado de doctor presentada por P. Campillo Herrero. "La Noción de Continuidad desde la Óptica del Modelo de van Hiele". Esta tesis fue leída en la Universidad Politécnica de Valencia en 1999".[32]

Memoria para optar al grado de doctor presentada por C. Jaramillo López. "La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van-Hiele" es una tesis de gran aporte al presente estudio en la medida en que:

- Presenta el modelo de van Hiele como una propuesta alternativa para desarrollar estrategias que propugnen por el desarrollo de los procesos de razonamiento de los estudiantes.

- Se aborda el concepto de convergencia, debido a su importancia en el edificio del Análisis Matemático y los correspondientes currículos académicos de las universidades.

- Dada la oportunidad de desarrollarse en un ambiente geométrico con una buena dosis de visualización (noción de longitud de una curva "zig-zag"), la aplicación del modelo de van Hiele al concepto a trabajar le brinda la posibilidad al estudiante de no traer a colación ideas o conceptos que puedan entorpecer el proceso del razonamiento infinito en el desarrollo de la prueba.

- Permitió obtener y confirmar los descriptores de los niveles existentes que caracterizan el proceso de razonamiento infinito.

- Después de un estudio minucioso del concepto, se pudo comprobar que los descriptores y sus respectivas propiedades corresponden a las exigencias del modelo de van Hiele. Por ello, se pudo avanzar en ese estudio para obtener dos nuevas herramientas, la entrevista socrática y la prueba escrita, que permitieron observar la formación del concepto en la mente del estudiante, los saltos de razonamiento, como también, discriminar su nivel de razonamiento asociado al concepto objeto de estudio.[33]

---

[31] LLORENS FUSTER, José Luís. Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local. Memoria para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas. Valencia, octubre de 1994.

[32] CAMPILLO HERRERO, P., PÉREZ CARRERAS, P. La Noción de Continuidad desde la Óptica de los Niveles de van Hiele, Divulgaciones Matemáticas, v. 6, No. 1 (1998), 69-80.

[33] JARAMILLO LÓPEZ, C. M. La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele. Valencia. Tesis doctoral. Valencia. 2003.

Memoria para optar al grado de doctora presentada por A. Navarro Domínguez. "Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica" se destaca porque dota de un concepto-imagen adecuado al concepto de convergencia mediante el mecanismo de una nube de puntos.[34]

1.6 ¿Por qué diseñar una entrevista de carácter socrático enmarcada en modelo educativo de van Hiele?

El presente estudio utiliza el método de entrevista semi estructurada de carácter socrático; usada para estudiar el razonamiento que se desarrolla en las mentes de los individuos, mediante preguntas orientadas a descubrir e interpretar "lo que es". El procedimiento es hacer preguntas a un grupo piloto de estudiantes cuyas respuestas le permiten al investigador encontrar información valiosa para desarrollar su estudio. La secuencia de preguntas varía con cada entrevista, dependiendo de las respuestas del entrevistado, pero después de un largo proceso de experimentación se diseña finalmente un guión de entrevista que nos permitirá determinar su nivel de razonamiento.

Como se verá en los siguientes párrafos, la aplicación de la entrevista socrática enmarcada en el modelo de van Hiele en el proceso de enseñanza de las Matemáticas, propende por un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando y es precisamente uno de los fines de la educación colombiana: "El desarrollo de la capacidad crítica, reflexiva y analítica que fortalezca el avance científico y tecnológico nacional, orientado con prioridad al mejoramiento cultural y de la calidad de vida de la población, a la participación de la búsqueda de alternativas de la solución de problemas y el progreso social y económico del país" [35].

El artículo del doctor Andrés de la Torre *El método socrático y el modelo de van Hiele*[36] hace una buena descripción de la importancia del método socrático en el modelo educativo de van Hiele. Por su valor y pertinencia para este trabajo de investigación, transcribimos un fragmento:

[34] NAVARRO DOMÍNGUEZ, A. Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica, Tesis doctoral. Sevilla. 2002.
[35] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Ley General de Educación. Santa Fe de Bogotá. 1991. Artículo 5, numeral 9.

[36] DE LA TORRE, Andrés. El método socrático y el modelo de van Hiele. http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf

El método socrático

Cuando tuvo 70 años, en el 399 a.C., Sócrates fue sometido a juicio,en su ciudad, Atenas, bajo la acusación de no creer en la religión del Estado y de corromper a la juventud enseñándole a no reconocer los dioses de la República. Encontrado culpable por sus jueces, se le condenó a muerte por envenenamiento con un alcaloide vegetal llamado cicuta. Sócrates tomó la cicuta y pasó a la inmortalidad.

La figura de Sócrates ha sido destacada en múltiples oportunidades como una de las más altas cimas morales de la humanidad.

El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los Diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, sea éste la inmortalidad del alma o la belleza o la virtud, pero no como un resultado de la enseñanza de Sócrates sino por propia reflexión. El interlocutor debe llegar a decir, por ejemplo, qué es la justicia, dar razón de ella, encontrar el fundamento que explique por qué es como es y no de otro modo, hallar su definición universal. La fórmula racional mediante la cual se explica la justicia, es denominada por los griegos el logos de la justicia, que es lo que hoy llamaríamos el concepto de justicia.

El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción.

En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a desvelar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. Es esencial al método el empleo sistemático de la ironía socrática, que consiste en simular ignorancia sobre la materia de que se trata, con el fin de hacer aparecer la verdad, a través del diálogo entre el maestro y el aprendiz.

En el fondo del método está la doctrina socrática de la reminiscencia. De acuerdo con esta concepción, típicamente racionalista, las ideas o formas, que son objetos inaccesibles a la percepción sensorial y aprehensibles sólo mediante el pensamiento, están en el alma de cada hombre, en estado latente, como adormecidas. El papel del maestro consiste en estimular este proceso de reflexión e introspección en el aprendiz, gracias al cual llega a conocer. El acto de conocer se produce cuando las ideas se despiertan en el alma, reavivadas al contacto con el mundo sensible y mediante el recurso del diálogo.

El camino hacia el conocimiento es un proceso gradual, en el cual la opinión y la creencia constituyen etapas intermedias. El aprendiz se esfuerza y participa activamente en el proceso, que termina cuando aquel inventa o descubre la respuesta adecuada a una pregunta bien formulada.

Dice Aristóteles en la Metafísica (Met. M., 1078 b27) que a Sócrates se le atribuyen dos cosas importantes, a saber, las definiciones universales y los argumentos inductivos. Las definiciones universales dadas por Sócrates buscaban el significado de las ideas, empleando para ello las argumentos inductivos, en los cuales tomaba como punto de partida ejemplos sencillos e ilustraciones concretas. Por ejemplo, la reflexión acerca de algunos casos particulares de actos justos, conducida por el maestro, debe llevar al aprendiz a una definición universal de justicia.

La inducción en Sócrates no es un método de demostración o prueba, sino un procedimiento encaminado a sugerir el significado de una definición universal, que se presenta a la mente con fuerza y claridad. La definición, por su parte, se justifica en la medida en que las consecuencias derivadas de su adopción sean satisfactorias.

Entre los investigadores de la Educación Matemática que se han ocupado de la pertinencia del método socrático en la enseñanza de distintos conceptos de las matemáticas, se destaca Pierre van Hiele. De acuerdo con este autor, es posible emplear el método socrático, con muy buenos resultados, pero también es muy fácil fracasar en el intento. El estudio cuidadoso de la lección de Geometría que aparece en el Menón permite identificar la solución de problemas como la situación típica en que el método socrático puede ser útil. Dicha situación se caracteriza por los elementos siguientes: el maestro abre la discusión con un problema que les interese a los estudiantes, y éstos sólo pueden alcanzar la solución mediante el estudio de una cierta materia. El propósito del ejercicio es que los alumnos aprendan la materia hasta llegar a familiarizarse con los significados de sus conceptos fundamentales. van-Hiele insiste en el cuidado que debe tenerse con las premisas siguientes:

- El maestro tiene que asegurarse del interés de los alumnos en el problema y debe captar su atención desde el comienzo.

- El método socrático sólo es efectivo en la medida en que se pueda garantizar que cada uno de los alumnos alcanza la solución mediante su trabajo personal. El profesor no podrá llenarse de impaciencia ni darles la solución prematuramente.

- El trabajo de los alumnos debe ser individual y las conversaciones colectivas en el aula deberán ser guiadas por el maestro, de modo que se les permita avanzar también a los alumnos que se muevan a paso lento.

- El maestro debe calibrar acertadamente la dificultad del problema, de modo que todos los estudiantes conserven el interés hasta el fin, sin que ninguno de ellos olvide el corazón del asunto.

1.7 ¿Por qué diseñar una entrevista de carácter socrático para una manifestación de la noción de límite?

En la educación colombiana se plantea la necesidad de un manejo adecuado de las manifestaciones de la noción de límite y esta necesidad se explicita en los estándares básicos de matemáticas, donde se resalta la importancia de la noción de límite en algunos tipos de pensamiento matemático que se describen. Ellos son:

El pensamiento métrico y sistemas de medidas donde se dice: justificar resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición.

El pensamiento variacional y sistemas algebraicos analíticos, donde se dice: utilizar las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.[37]

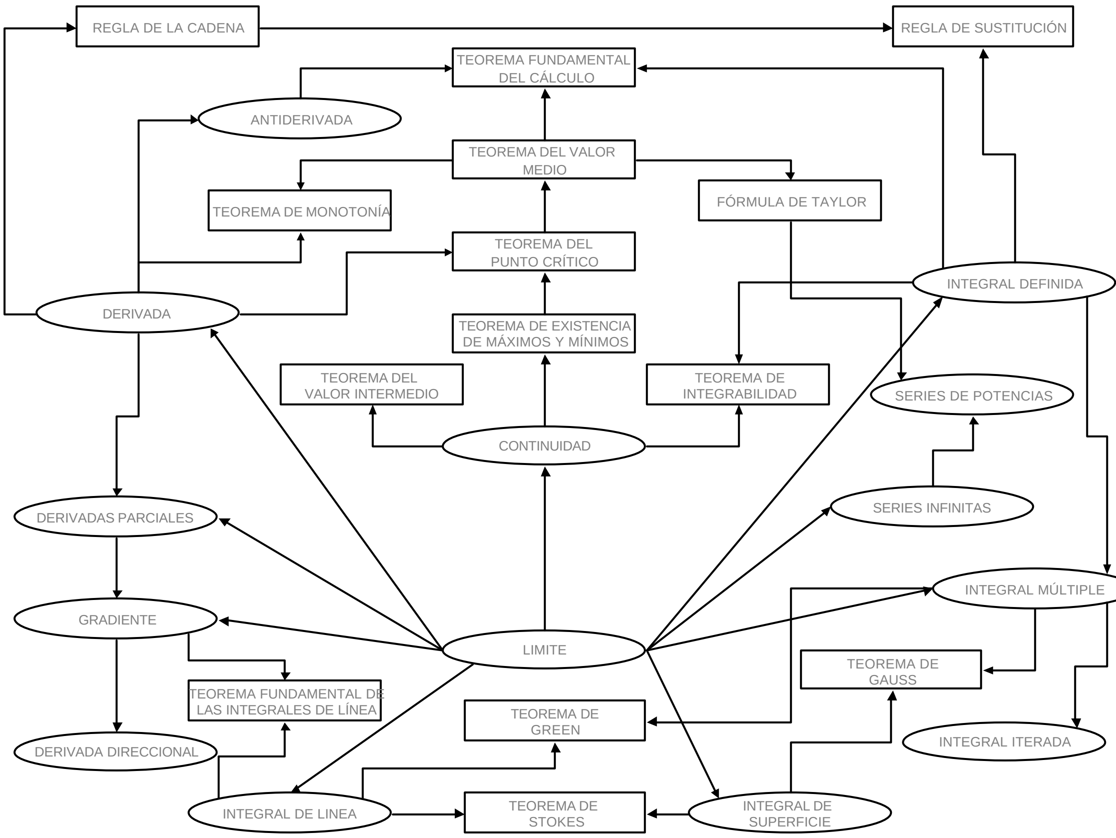
Pero la noción de límite no es sólo una idea bella y elegante de la matemática, sino que atraviesa todo el cálculo.

Bernard Cornu[38] dice que el concepto matemático de límite mantiene una posición central, ya que penetra en todo el análisis matemático como una base de la teoría de la aproximación, de la continuidad y del cálculo diferencial e integral; y es particularmente una noción dificultosa, típico de la clase de pensamiento requerido en matemáticas avanzadas.

---

[37] MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas. Bogotá. 2004.
[38] CORNU, B.: "Limits" in "Advanced Mathematical Thinking", cap. 10, p. 153 -166. Kluwer Ac. Pub. 1991.

Por otro lado, en el libro Cálculo, de Edwin J. Purcell y otros[39] se dice que hay autores que han sugerido distinguir entre el álgebra y el cálculo diciendo que el álgebra trata con *procesos finitos* (suma, multiplicación, exponenciación, etcétera), mientras que el cálculo trata con *procesos infinitos* (derivación, integración, series, etcétera). Los autores prefieren definir el cálculo como el estudio de los *límites* puesto que cada una de las ideas principales del cálculo queda determinada mediante cierto tipo de límite y presentan el siguiente diagrama que tiene la palabra *límite* en el centro y los demás conceptos asociados a él.



En la siguiente sección se considera pertinente transcribir la traducción del capítulo 10 del texto *Avanced Mathematical Thinking,* en el cual se corrobora la importancia del concepto de límite como idea central de todo el análisis matemático.

---

[39] PURCELL, Edwin J. y otros. El Cálculo. Pearson Educación, México. Octava edición 2001.

1.8 Investigaciones sobre el concepto de límite: Cornu[40]

Una de las grandes dificultades en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite no sólo consiste en su riqueza y complejidad, sino también en la medida en que los aspectos cognitivos:

- No pueden ser generados puramente de las definiciones matemáticas.

- Recordar la definición de límite es sólo un aspecto, adquirir la concepción fundamental es otro. Una faceta es la idea de aproximación, usualmente el primer pensamiento encontrado es una noción dinámica de límite, y el modo en el cual el concepto de límite es puesto a trabajar para resolver problemas reales que confían no en la definición sino en muchas diversas propiedades del concepto intuitivo.

- En la enseñanza de las matemáticas, a ciertos aspectos del concepto de límite se les da gran énfasis, los cuales son revelados por una revisión del currículo, los libros de texto, ejercicios y evaluaciones. En la primera mitad del siglo XX, los textos franceses de matemáticas usaron la noción de límite de una manera intuitiva sin una definición formal para introducir la definición de la derivada. Más tarde, en el mismo texto una definición sería dada la cuál es más una manera de explicación en una nota de pie de página. El programa oficial francés de la escuela matemática primero cita el término de límite con respecto a la derivada así como hace mucho tiempo en 1947. En 1966 la noción fue propiamente introducida en el programa. Los libros generalmente dedican un capítulo al concepto general de límite incluyendo una definición formal, una declaración de su unicidad y teoremas sobre las operaciones aritméticas aplicadas a límites. Los ejercicios sin embargo no se centraron en el concepto de límite, sino sobre desigualdades, la noción de valor absoluto, la idea de una condición suficiente y, sobre todo, sobre operaciones: el límite de una suma, de un producto, y así sucesivamente. Estos ejercicios están en alto grado más relacionados con el álgebra y las rutinas de diferenciación formal e integración que con el análisis. Ellos le asignan a esto una abrumadora importancia que en un texto cita 31 teoremas sobre operaciones con límites. Dada esta inclinación en el énfasis, es por eso que poco asombra que

[40] CORNU, B.: "Limits" in "Advanced Mathematical Thinking", cap. 10, p. 153 -166. Kluwer Ac. Pub. 1991. (Traducción libre hecha por los autores de la presente investigación).

los estudiantes adquieran creencias implícitas sobre un modo en el cual ellos están esperando operar.

Diferentes investigaciones que han sido llevadas a cabo muestran claramente que la mayoría de los estudiantes no dominan la idea de límite, incluso en los estados más avanzados de sus estudios. Esto no les impide seguir trabajando en los ejercicios, resolviendo problemas y obteniendo éxito en sus exámenes.

1.8.1 Concepciones espontáneas y modelos mentales

Para muchos conceptos matemáticos, la enseñanza no comienza en un territorio virgen. En el caso de los límites, antes de alguna enseñanza sobre este tema el estudiante ya tiene un cierto número de ideas intuitivas, imágenes, conocimientos, que llegan de la experiencia cotidiana, semejante al significado coloquial de los términos como son usados. Describimos estas concepciones de una idea, que están antes de la enseñanza formal, como concepciones espontáneas.

Cuando un estudiante participa en una lección de matemáticas, estas ideas no desaparecen, contrario a lo que puede ser imaginado por muchos profesores. Estas ideas espontáneas mezcladas con los conocimientos recién adquiridos, son modificadas y adaptadas para formar las concepciones personales de los estudiantes. Conocemos que a fin de resolver un problema, en general no llamamos únicamente una adecuada teoría científica, sino razonamientos naturales o espontáneos que están basados en estas ideas espontáneas. Este fenómeno es bien conocido en el desarrollo empírico y teórico de conceptos científicos desde Bachelard en 1930 pero sólo en la última década ha sido completamente reconocido que exactamente iguales fuerzas operan en la aparente lógica de las matemáticas.

En el caso del concepto de límite, observamos que las palabras “tender a” y “límite” tienen una significancia para los estudiantes antes de comenzar alguna lección, y que los estudiantes continúan confiando en estos significados después de que se les haya dado una definición formal.

Investigaciones han revelado diferentes significados de la expresión “tender hacia”:

- Aproximarse (eventualmente permaneciendo aparte a)
- Aproximarse sin establecer contacto
- Aproximarse justo estableciendo contacto

- Parecido a (sin alguna variación, tal como “azul que tiende hacia violeta”).

  La palabra límite en sí misma puede tener diferentes significados para diferentes individuos en diferentes momentos. Frecuentemente es considerada como un “límite impasable”. Pero esto puede también ser:

- Un límite impasable que establece contacto
- Un límite impasable que es imposible que establezca contacto
- Un punto que uno aproxima, sin establecer contacto
- Un punto que uno aproxima y establece contacto
- Un límite superior e inferior
- Un máximo o un mínimo
- Un intervalo
- Que llega inmediatamente después, que puede ser logrado
- Una restricción, una prohibición, una regla
- El final, la meta.

  De un estudiante a otro, el significado dado de las palabras varía; para un estudiante esto puede tener muchos significados, de acuerdo a la situación. Las ideas espontáneas viven por un largo tiempo; investigaciones muestran que ellas pueden permanecer con el estudiante en muchos más estados avanzados de aprendizaje. En la fase de una variedad de nociones espontáneas y en el crecimiento consciente del formalismo en el estudiante, fácilmente sucede que ideas contradictorias pueden ser retenidas simultáneamente en la mente de un individuo, llevando a un concepto-imagen global que contiene factores conflictivos potenciales en el sentido de Tall & Vinner.

  Aline Robert ha estudiado diferentes modelos que los estudiantes pueden retener de la noción de límite de una sucesión. A pesar del hecho de que a los estudiantes se les ha dado una definición formal de una sucesión, cuando se les pide que describan la noción de una sucesión, con toda seguridad ellos serían susceptibles de evocar concepciones relacionando varios aspectos de sus experiencias previas. Algunos estudiantes sugieren modelos primitivos, rudimentarios, recuerdos de estos que podrían ser evocados espontáneamente, tales como:

- Estacionario: “El término final siempre tiene el mismo valor”.
- De barrera: “El valor no puede pasar al límite”

  Además hubo más modelos que surgieron de la enseñanza formal.

- Monótona y dinámica-monótona.

-Una sucesión convergente es una sucesión creciente y limitada superiormente (o decreciente y limitada inferiormente).
-Una sucesión convergente es una sucesión (creciente o decreciente) que se aproxima a un límite.

- Dinámica.
  -"u_n tiende a L"
  -"u_n se aproxima a L"
  -"La distancia de u_n a L comienza a hacerse pequeña"
  -"Los valores se aproximan a un número más y más cerradamente"

- Estática.
  -"Los a_n están en un intervalo cercanos a L"
  -Los a_n están agrupados alrededor de L"
  -"Los elementos de la sucesión terminan por ser encontrados en una vecindad de L".

- Mezclados. Una mezcla de los anteriores.

Una vez más, Aline Robert encuentra estos modelos influenciando la manera en que los estudiantes de la universidad resuelven problemas. Hay claramente nociones no simples de límite en las mentes de los estudiantes. Esto evidencia que los estudiantes tienen una gran variedad de conceptos-imágenes. Es más, esto también evidencia que la enseñanza inicial tiende a enfatizar en el proceso de aproximaciones a un límite en vez del concepto de límite en sí mismo. El concepto imaginario asociado con estos procesos, tan ejemplificados anteriormente, contiene muchos factores que entran en conflicto con la definición formal ("aproximarse pero sin poder hacer contacto", "no puede pasar", "tiende a", etcétera.). De esta manera es que los estudiantes desarrollan imágenes de límite e infinito que relatan concepciones erróneas concernientes al proceso de "conseguir cerrarse" o "gran crecimiento" o "siguiendo para siempre".

En un estudio etnográfico de las concepciones de los estudiantes concernientes al límite y al infinito, Anna Sierpinska analizó el concepto-imagen de 31 estudiantes de Precálculo y Física de 16 años. Ella entonces los clasificó en grupos que etiquetó con nombres particulares para cada grupo:

"Michael y Christopher son infinitistas inconscientes (al menos al comienzo): ellos dicen infinito, pero piensan muy grande. Para ambos, el límite podría ser el último valor de los términos. Para Michael este último valor es cualquiera más infinito (un número infinito muy grande) o menos infinito. Esto no es así para Christopher, quien es más receptivo al cambio dinámico de los valores de los términos. El último valor no siempre tiende a infinito, puede tender a un número muy pequeño y conocer el número".

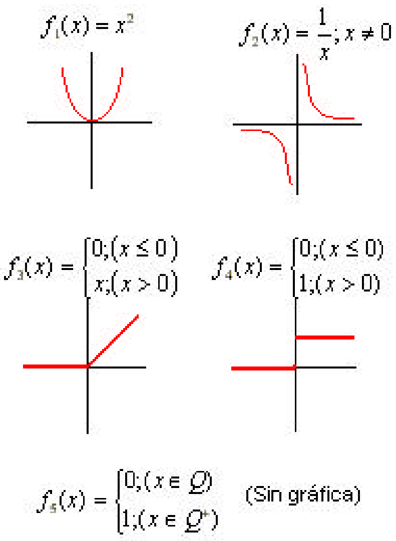
"George es un infinitista consciente: lo infinito es sobre algo metafísico, dificulta tener su definición precisa. Si la matemática es para ser una ciencia exacta entonces un evitaría hablar sobre el infinito y hablaría sobre números finitos solamente. En la formulación general de leyes uno puede usar letras denotando concreta pero arbitrariamente números finitos. En la descripción del comportamiento de una sucesión lo más importante es la caracterización del n-ésimo término escribiendo la fórmula general. Para un n dado uno puede entonces calcular el valor exacto del término o puede dar una aproximación de este valor".

"Paul y Robert son infinitistas cinéticos: La idea de infinito en ellos está relacionada con la idea de tiempo. Paul es un potencialista. Para pensar de igual forma en un conjunto o una sucesión, uno tiene que correr en el pensamiento a través de cada elemento de éste. Es imposible de este modo un número infinito de elementos. La construcción de un conjunto infinito o de una sucesión nunca puede ser completada. El infinito existe potencialmente solamente. Robert es un potencialista actual. Es posible (para él) hacer un "salto al infinito" en pensamiento: el infinito puede potencialmente ser últimamente actualizado. Para ambos, Paul y Robert, la cosa importante es ver cómo los términos de una sucesión cambian, si hay alguna tendencia a aproximarse a algún valor fijo. Para Paul, incluso si los términos de una sucesión van cerrándose y cerrándose tanto como esta diferencia es menor que algún valor dado ellos nunca harán contacto. Robert piensa que teóricamente los términos harán contacto en el infinito".

De este modo ella exhibe eternos conflictos sobre el límite y el infinito, los cuales han permanecido con nosotros desde un tiempo inmemorial y continúan presentes en nuestros estudiantes hoy.

Otros procesos relacionados con el límite, tales como el concepto de continuidad, diferenciación e integración y así sucesivamente, que en la superficie son muy diferentes, en términos cognitivos exhiben dificultades similares. Por ejemplo, la continuidad sufre de tener una concepción espontánea que es evocada a través del uso del lenguaje cotidiano en frases tales como "llovió continuamente todo el día" (significa que no hubo discontinuidad en la lluvia) o "la línea férrea es continuamente junta" (significa que no hay huecos en el riel). Este punto de vista es frecuentemente reforzado por los intentos del profesor de dar un simple insight en la noción de continuidad hablando de la gráfica "existencia en una pieza" o "dibujar sin levantar el lápiz del papel", de ese modo confundiendo la noción matemática de continuidad y conexión.

Un test aplicado a estudiantes de matemáticas en el primer año de universidad incluyó un cuestionario para investigar el concepto-imagen de continuidad de los estudiantes.



Matemáticamente f_1, f_2 y f_3 son continuas, mientras f_4 y f_5 no lo son. Pero el concepto-imagen de los estudiantes sugiere otra cosa.

Conceptos-imagen manifestados:

- Es continua porque “la función está dada por una simple fórmula”.
- No es continua porque: “La gráfica no es una pieza”
  “La función no está definida en el origen”
  “La función tiende a infinito en el origen”.

En el estado inicial de aprendizaje, por lo tanto, vemos surgir concepciones espontáneas que están en conflicto con la definición formal.

1.8.2 Obstáculos cognitivos

La noción de un obstáculo cognitivo es interesante estudiarla para ayudar a identificar dificultades encontradas por los estudiantes en los procesos de aprendizaje, y para determinar estrategias más apropiadas de enseñanza. Es posible distinguir algunos tipos diferentes de obstáculos: obstáculos genéticos y psicológicos que ocurren como resultado del desarrollo personal del estudiante, obstáculos didácticos que ocurren debido a la naturaleza de la enseñanza y del profesor, y obstáculos epistemológicos que ocurren debido a la naturaleza de los conceptos matemáticos en sí mismos. En la planeación para enseñar un concepto matemático lo más importante es determinar los posibles obstáculos, particularmente los obstáculos epistemológicos endémicos. El término fue introducido por Gaston Bachelard.

"Debemos proponer el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. No es justamente una cuestión de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la transitoriedad del fenómeno científico ni para lamentar la debilidad del sentido y el espíritu humano. Este es un acto de mejorar el conocimiento en sí mismo, para conocer íntimamente que aparece como un inevitable resultado de necesidad funcional, que retrasan la velocidad de aprendizaje y causan dificultades cognitivas. Es ahí que podemos encontrar las causas de estancamiento e incluso de regresión, donde podemos percibir las razones de la inercia, las cuales llamamos epistemológicamente obstáculos".

Él sigue diciendo:

"Encontramos nuevos conocimientos que contradicen los conocimientos previos y haciendo necesario destruir las mal formadas ideas previas".

Bachelard ha indicado que los obstáculos epistemológicos ocurren en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica educacional. Para él, un obstáculo epistemológico tiene dos características esenciales:

- Son un constitutivo inevitable y esencial del conocimiento para ser adquirido.
- Están basados, por lo menos en parte, en el desarrollo histórico del concepto.

Muchos autores han comenzado a interesarse en los obstáculos epistemológicos. Guy Brousseau define un obstáculo epistemológico como un conocimiento que funciona bien en un cierto dominio de actividad y por consiguiente comienza bien establecido, pero éste falla para trabajar satisfactoriamente en otros contextos donde funciona mal y lleva a contradicciones. Por eso comienza la necesidad de destruir la insuficiencia original, el conocimiento mal formado, para reemplazarlo con nuevos conceptos que operan satisfactoriamente en el nuevo dominio. El rechazo y la claridad de tal obstáculo es una parte esencial del conocimiento en sí mismo. La transformación no puede ser realizada sin desestabilizar las ideas originales colocándolas en un nuevo contexto donde claramente fallan. Esto de este modo requiere un gran esfuerzo de reconstrucción cognitiva.

1.8.3 Obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico

Es útil estudiar la historia del concepto para localizar períodos de lento desarrollo y las dificultades que surgieron, las cuales pueden indicar la presencia de obstáculos epistemológicos. En el caso de la historia del concepto de límite, vemos que esta noción fue introducida para resolver tres tipos de dificultades:

- Problemas geométricos (Cálculo del área, consideración de la naturaleza de la medida geométrica "exhaución")
- El problema de la suma y velocidad de convergencia de una serie
- El problema de diferenciación (que llega de la relación entre dos cantidades que simultáneamente tienden a cero).

Hay cuatro principales obstáculos epistemológicos en la historia del concepto de límite.

El fracaso para vincular la Geometría con los números

Cuando los griegos comenzaron a interesarse en las matemáticas entre el 400 a.c. y el 300 a.c. debemos preguntarnos por qué sucedió que el concepto de límite no fue clarificado en este tiempo. El problema de calcular el área de un círculo, por ejemplo, suministró una oportunidad para desarrollar una herramienta muy similar al concepto de límite. Hipócrates de Chios (430 a.c.) quiso probar que la razón entre el área de dos círculos es igual a la razón de los cuadrados de sus diámetros. Él inscribió un polígono regular dentro de los círculos y por incremento indefinido del número de lados, él aproxima el área de los dos círculos. En cada paso la razón del área del polígono inscrito es igual a la razón de los cuadrados de los diámetros, y de esto se sigue que "en el límite", esto sería verdad también para el área de los círculos.

Este pasaje hacia el límite, escasamente explicado, sería definido un año después en términos del método de exhaución acreditado a Eudoxio de Cnidos (408-255 a.c.). El método está basado en el principio de Eudoxus (Elementos de Euclides, libro 10, proposición 1) que afirma "dadas dos longitudes desiguales, si la primera longitud es la mayor y es tomada su mitad, de la otra mitad restante se toma su mitad y el procesos es repetido, entonces llegará un momento en el que el resto será menor que la segunda longitud". En otras palabras, por particiones sucesivas, podremos obtener una medida tan pequeña como deseemos. De este principio de exhaución se sigue permitirnos formular que para algún $x > 0$ existe un polígono regular inscrito en un círculo cuya área difiere de ese círculo por pequeño que sea x. Si la razón de las áreas de dos círculos es $\frac{A_1}{A_2}$ y la de los cuadrados de los radios es $\frac{r_1^2}{r_2^2}$, entonces tenemos uno de los tres posibles casos:

a) $\frac{A_1}{A_2} < \frac{r_1^2}{r_2^2}$, b) $\frac{A_1}{A_2} > \frac{r_1^2}{r_2^2}$ o c) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$

Eliminamos las primeras dos por el principio de exhaución, y por tanto deducimos la verdad de la igualdad deseada.

Sin embargo, a pesar del hecho de que el método de exhaución parece extremadamente relacionado para la noción de límite, no podemos afirmar que los griegos poseyeron el concepto moderno de límite. El método de exhaución es en esencia un método geométrico que permite la prueba de resultados sin tener que ocuparse del problema del infinito. Es aplicado para magnitudes geométricas, no para números. Cada caso se ocupa de una base individual usando un argumento específico a medida para el contexto geométrico. No hay transferencia de las figuras geométricas a una interpretación puramente numérica, así la unificación del concepto de límite de números está ausente. Vista de este modo es causante de un obstáculo que impide el paso a la noción de un límite numérico.

La noción de lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño

A través de la historia de la noción de límite encontramos la suposición de la existencia de cantidades infinitamente pequeñas. ¿Es posible tener cantidades pequeñas como para ser casi cero y aún no tener una medida específica asignable?, ¿Qué sucede en el instante en que una de estas cantidades es cero?... Tal problema filosófico tiene ocupada la atención de numerosos matemáticos quienes, como Newton, habló del “alma de cantidades que parten” en el momento en que ellas desaparecen lo incapacitan para calcular su “última razón”.

Euler usó libremente la noción de infinitamente pequeño como una cantidad que puede, cuando es apropiado, ser considerada igual a cero. D’Alembert se opuso al uso de cantidades infinitamente pequeñas y buscó removerlas del cálculo diferencial. Él razonó que una cantidad es alguna cosa o nada. Si es alguna cosa no puede hacerse cero y si no es nada, esto es ya cero. De esta manera la suposición de que hay un estado intermedio entre las dos, él lo describió como un sueño absurdo.

Cauchy también usó el lenguaje de lo infinitamente pequeño. En su "Cours d'analyse de l'Ecde Polytechnique él definió una función continua en estos términos:

"La función f(x) es continua dentro de límites, si entre estos límites un incremento infinitamente pequeño (i) en la variable x produce siempre un incremento infinitamente pequeño, f(x+i) – f(x), en la función misma".

Él explica la idea de infinitesimal como sigue:

"Uno dice que una cantidad variable parece infinitamente pequeña cuando su valor numérico decrece indefinidamente del modo como converge al límite cero".

Para Cauchy un infinitesimal es simplemente una variable que tiende a cero. La idea de un "estado intermedio" entre que es cero y no lo es frecuentemente es encontrada en los estudiantes modernos. Ellos con frecuencia ven el símbolo x como representando un número el cual no es cero, aún siendo más pequeño que algún número real positivo. De igual modo los individuos pueden creer que 0,999... es el "último número antes de 1" aún no es igual a 1. Hay una creencia correspondiente en la existencia de un entero más grande que todos los otros, el cual aún no es infinito.

El aspecto metafísico de la noción de límite

La noción de límite es dificultosa para introducirla en matemáticas porque parece tener que ver más con la metafísica o la filosofía. Los matemáticos son con frecuencia reservados para hablar de tal concepto. Desde el tiempo de los griegos desde D'Alembert quién escribió "uno puede evitar fácilmente sin hacer el soporte de toda esta metafísica del infinito en el Cálculo dieferencial". Lagrange expresó un horror similar de los aspectos metafísicos, aunque en su temprana carrera creyó poder hacer uso riguroso de los infinitesimales. Él más tarde consideró que los infinitesimales de Leibniz no tienen bases metafísicas satisfactorias y volvió a escribir las bases del Cálculo usando series infinitas en términos algebraicos. Sin embargo, esto también fue evadido, para "Cuando Lagrange intentó liberar el Cálculo de estas dificultades metafísicas recurriendo al álgebra común, evitó el remolino de Charybdis sólo para sufrir de nuevo la ruina de las rocas de Scylla. El álgebra de su día, como dada para él por Euler, fue basada en un punto de vista falso de infinito. La teoría no rigurosa de series infinitas había sido establecida".

De este modo, cualquier camino matemático pareció devolverse en el desarrollo histórico del sujeto, ellos llevan de nuevo profundas dificultades teóricas.

Los aspectos metafísicos de la noción de límite es uno de los principales obstáculos para los estudiantes de hoy. En una entrevista alguien dijo, "esto no es realmente matemáticas", porque el estado inicial del cálculo no es puramente confiable en la simple aritmética y álgebra. Los estudiantes pueden tener dificultades manejando el concepto de infinito, "esto no es riguroso pero funciona", "esto no existe", "esto es muy abstracto,", "el método es del todo correcto, dado que usted está satisfecho con un valor aproximado". Estos obstáculos hacen la comprensión del concepto de límite extremadamente dificultosa, particularmente porque un límite no puede ser calculado usando directamente métodos familiares del álgebra y la aritmética.

¿Es el límite alcanzado o no?

Esto es un debate que ha permanecido a través de la historia del concepto. Por ejemplo, Robins (1697-1751) estimó que el límite nunca puede ser alcanzado, justamente como polígonos regulares inscritos en un círculo nunca pueden ser iguales al círculo. Él afirmó "Damos el nombre de límite a la última cantidad para la cual una variable puede aproximarse tan cerca como quisiéramos, pero que no puede ser absolutamente igual". Por otro lado, Jurin (1685 – 1750) dijo que la "última razón entre dos cantidades es la razón alcanzada en el momento en que las cantidades se hacen cero", "no es cuestión de que el incremento sea cero, sino que está desapareciendo o está en el punto de desvanecimiento", "hay una última razón de incrementos que desaparecen, "un incremento por naturaleza es un incremento que empieza a existir de la nada, o el cual empieza a ser generado, pero que tiene aún que alcanzar una magnitud que puede ser concebida como tal como una cantidad pequeña". D'Alembert insistió en que una cantidad nunca podría ser igual al límite: para hablar propiamente, el límite nunca coincide o nunca es igual a la cantidad de la cual éste es el límite, pero siempre se aproxima y la diferencia puede ser una cantidad tan pequeña como uno desee. Este debate continúa vivo en nuestros estudiantes. En una discusión alguien preguntó "¿Cuando n tiende a cero, n no es igual a cero?". El siguiente diálogo entre estudiantes claramente ilustra el obstáculo epistemológico:

-Tanto más que n crece, tanto más 1/n se aproxima a cero
-¿Tanto como uno podría desear?

-No, por que en algún momento ellos se encontrarán.

Hay ciertamente muchos otros obstáculos de la noción de límite, más que estos cuatro. Los errores que los estudiantes cometen son indicadores valiosos para localizar obstáculos. La construcción de estrategias pedagógicas para la enseñanza de los estudiantes debe entonces tomarlos en cuenta. No se trata de evitarlos, sino por el contrario llevar al estudiante a conocerlos y dominarlos, mirando los obstáculos como parte constituyente de los conceptos matemáticos que están para ser adquiridos.

1.8.4 Los obstáculos epistemológicos en las matemáticas modernas

Es interesante para los matemáticos mirar atrás en la historia y notar los conflictos que dieron nacimiento a las ideas modernas, llevando al estado lógico del arte hoy. Sin embargo, el siglo XX busca una certeza basada en una base axiomática segura que comenzó con Hilbert fundamentado en el teorema de incompletez de Gödel y el principio de incertidumbre. Hanna mostró que la aceptación de una prueba en un principio depende fuertemente de su validación. La introducción del análisis de Weierstrass, depende sólo de las definiciones lógicas del concepto de número faltándole eliminar el concepto del infinitesimal que fue parte esencial de la primitiva cultura matemática. Aunque podemos formular definiciones de límites y continuidad en términos de $x - d$ aún en ocasiones usamos el lenguaje dinámico de “variables tendientes a cero”, de una manera análoga a la de Cauchy, con la resultante imagen mental vinculada a lo “arbitrariamente pequeño”.

Cognitivamente este fenómeno se espera. La idea de un número “arbitrariamente pequeño” no es más que el objeto producido por la encapsulación de los procesos de empequeñecerse en términos de la teoría de encapsulación de Dubinsky. Como Tall hipotetizó la formación del concepto mental de un “número arbitrariamente pequeño” es un concepto de límite genérico” donde el objeto encapsulado se cree que tiene las propiedades del objeto en el proceso. De esta manera el límite genérico de un conjunto de números que tienden a cero es un número arbitrariamente pequeño, aún no cero. El concepto es una consecuencia natural del modo en el que la mente hipotetiza para trabajar.

Por lo tanto, a pesar de intentar suprimir los infinitesimales del análisis moderno, continúan vivos en las mentes y comunicaciones de los matemáticos profesionales, aún si fueran eliminadas de las pruebas formales. El regreso de la lógica basada en el infinitesimal de Robinson (1966) reabre el debate, que continúa en lucha ardiente. Aunque Robinson pensó que su solución puramente lógica resolvería los 300 años de conflicto, esto prueba no ser así. Para la construcción de un sistema hyperreal de Robinson conteniendo números reales e infinitesimales depende de una versión del axioma de elección y de esta forma es no constructivo. Esto es más un hueso atractivo de disputa como la llegada de los computadores que comenzó a ser el foco de la necesidad pragmática de los matemáticos de probar algoritmos finitos para la construcción de conceptos. Por ejemplo, el teorema del valor intermedio es visto para ser construíble pero la existencia de un valor máximo de una función continua no lo es. Lo anterior afirma la existencia de un cero de una función continua entre dos puntos donde la función tiene signos opuestos y puede ser programado en un computador por un simple argumento de bisección, pero esto depende esencialmente de una prueba no construíble por contradicción. De este modo vemos la recurrencia del problema de Lagrange cuando intentó remover la ambigüedad metafísica del cálculo. Justamente fue así como la dificultad pareció ser resuelta, otros parecen figurar tomar este lugar. Esto es típico de la complejidad de las ideas en análisis y del concepto fundamental de límite.

Que el concepto de límite es esencialmente dificultoso puede ser visto en la manera en que es definido en términos de un proceso desencapsulado: "Dame un $x > 0$ y obtendré un N tal que... " mejor que como un concepto en la forma "existe un N(x) tal que... ". Esto significa que la prueba del primer teorema del álgebra de límites (que la suma, producto, etc, de los límites de dos sucesiones es la suma, producto, etcétera, de los límites) es un proceso formado en términos de la coordinación de dos procesos, mejor que como la combinación de dos conceptos. En este último caso, entonces la prueba seguiría un formato similar, pero esto tendría la ventaja de que podría ser programado en un computador y de este modo la prueba de continuidad es simplemente la operación de un algoritmo computacional. Aún esta cumbre desencapsulada de dificultad ocurre muy al comienzo de un curso de límites presentado al estudiante ingenuo. Ellos no se asombran, lo encuentran difícil.

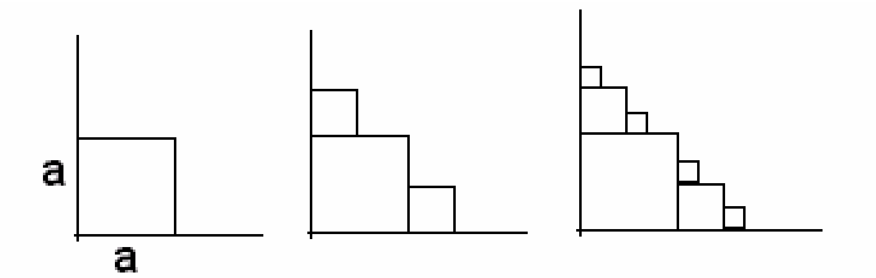
1.8.5 La transmisión didáctica de los obstáculos epistemológicos

Dada la complejidad de las matemáticas modernas y la coloración cultural en significados, no es sorpresa que tales interacciones complejas afecten a los estudiantes en su aprendizaje. En sus interacciones humanas están muy sensibles al tono de voz y a los significados implícitos y tales ideas son llevadas a ellos por sus profesores. Aunque tales significados pueden ser evitados en textos escritos, ellos pueden pasar inadvertidamente de generación en generación cuando el profesor intenta “simplificar” las complejidades para “ayudar” a los estudiantes. Cuando Orton (1980) investigó el concepto de límite en términos de una “escalera con peldaños”, él le mostró a un estudiante el dibujo de la figura siguiente y le preguntó:

¿Si este proceso es repetido indefinidamente, cuál es el resultado final?

¿Cuántos peldaños tendrán que ser colocados antes de alcanzar el “resultado final”?

¿Cuál es el área de la figura final en términos de a?, ¿Cuál es el área debajo de la escalera final?



Si un estudiante da una fórmula en respuesta a c, él pregunta:

¿Puede usted usar esta fórmula para obtener el “término final” o el límite de la sucesión?

Su justificación para usar esta terminología fue que:

La expresión “término final” fue de nuevo usada en un intento para ayudar a los estudiantes a comprender el significado de límites.

Sin embargo, a la luz de lo que ha sido dicho en este libro acerca del concepto genérico de límite, es evidente que una frase tal como “la escalera final”, lejos de ayudar a los estudiantes con la formalización, esto fácilmente crea un concepto de límite genérico en el cual los estudiantes imaginan una escalera con un “número infinito de peldaños”. Esta es precisamente la respuesta que es evocada.

De tal modo, a pesar de todos nuestros intentos de ayudar a los estudiantes a pensar las complejidades, nuestro intento para “simplificar” puede llevar directamente a los obstáculos cognitivos que nosotros hemos descrito al comienzo.

Tales obstáculos son casi ciertamente partes esenciales de los procesos de aprendizaje. Davis y Vinner sugieren que hay semejantes estados inevitables en los cuales las concepciones erróneas están sujetas a ocurrir, en línea con nuestra afirmación de que tales obstáculos requieren una reconstrucción cognitiva que está vinculada a involucrar un periodo de conflicto y confusión. Ellos también resaltan que las concepciones erróneas llegan del uso del lenguaje evocando imágenes inapropiadas en concepciones espontáneas. Incluso el pensamiento que ellos intentan enseñar en un curso en el que la palabra “límite” no fue usado en el estado inicial, ellos concluyeron que “se debe evitar apelar a tales representaciones prematemáticas mentales fragmentadas que pueden muy bien ser sin importancia”. Ellos observaron que otro problema surgió de la transparente complejidad de las nuevas ideas que no pueden aparecer “instantáneamente en completa y madura forma” y así “algunas partes de la idea conseguirán representaciones adecuadas antes que otras partes”. Ellos dan evidencia verificando la discusión de Robert y Schwarzenberger en el capítulo anterior, que ejemplos específicos dominan el aprendizaje, así que cuando las sucesiones monótonas son de carácter pesado en las experiencias tempranas de los estudiantes, esto no es sorpresa que dominen el concepto imagen de los estudiantes.

1.8.6 Hacia estrategias pedagógicas

La diversidad de concepciones, la riqueza y complejidad de las nociones, y los obstáculos cognitivos hacen el aprendizaje del concepto de límite extremadamente dificultoso; se han hecho numerosos intentos ¡y el problema sigue sin resolver!. Considerando estos intentos es posible focalizar sobre ciertos puntos fundamentales y proponer preguntas esenciales.

En primer lugar, en alto grado también muchos profesores parecen considerar que es suficiente presentar una exposición clara del concepto de límite para preparar al estudiante para la comprensión. Es en alto grado más importante que el estudiante se haga consciente de la complejidad de la noción y para reflexionar sobre sus propias ideas y obstáculos epistemológicos. Investigaciones también muestran en alto grado claramente que los estudiantes tienen sus propias concepciones muy variadas, que ellos cometen errores fundamentales y que ellos no necesariamente superan los obstáculos epistemológicos. Es necesario para la educación del maestro tomar posición para ayudar a los profesores a volverse conscientes de los problemas involucrados. Es igualmente importante para los estudiantes volverse explícitamente consientes de las dificultades esenciales. Experimentos han sido llevados a cabo, antes de comenzar una sesión sobre la noción de límite a los estudiantes les fueron dadas actividades apropiadas para ayudarlos a volverse conscientes de sus propias ideas espontáneas, imágenes, intuiciones, experiencias que ellos poseían antes y que necesariamente serían puestas en juego durante el proceso de aprendizaje. En particular, ellos se hicieron conscientes de los diferentes significados de las palabras que estuvieron siendo usadas. Esto probó ser una técnica valiosa y los preparó para construir sobre su propio conocimiento y comprensión.

Un problema adicional es el contexto en el cual el aprendizaje toma lugar. Un efectivo aprendizaje necesita tomar lugar en un contexto de resolución de problemas. La noción de límite tiene que ser usada para resolver problemas específicos. De este modo es necesario presentar situaciones en las que los estudiantes puedan ver que el límite es una herramienta útil, en la que el límite es visto como parte de una respuesta a preguntas que los estudiantes puedan tener para ellos mismos. Esto a menudo falta en la enseñanza contemporánea. Una noción de la definición de límite es dada, seguida por una serie de problemas y ejercicios, usualmente basados solamente en el manejo del álgebra del concepto de límite: el límite de una suma, de un producto, de la composición de dos funciones o de dos series... Tenemos ya visto cómo se dificulta el desencapsulamiento de la forma lógica de la definición de límite para el manejo de los expertos, mucho más para los principiantes.

Es importante considerar el orden en el que los conceptos de límite son presentados. No solamente está la búsqueda del diseño de un orden lógico de los conceptos matemáticos, sino también la adecuación cognitiva de la secuencia curricular y de los problemas para ser resueltos. Es ahora bien establecido que en la transición para el pensamiento matemático avanzado una secuencia puramente lógica de tópicos en la que los conceptos son introducidos a través de definiciones y deducciones lógicas es probablemente insuficiente.

Tall, por ejemplo, determinó que la investigación evidencia dificultades de los estudiantes con el concepto de límite hecho totalmente inapropiado para aproximarlo o a través de la definición formal o incluso (en el caso de la derivada) a través de una experiencia geométrica de una secante “tendiente a una tangente”. El hipotetizó que el proceso de límite sería usado implícitamente en el cálculo como parte de un proceso magnificativo para “ver” el gradiente de una curva y ganar experiencia del concepto en acción antes de que el concepto se vuelva el centro de la discusión formal. En este sentido él está siguiendo un camino similar al de Douady en su dialéctica “objeto herramienta” en la que el concepto es primero usado implícitamente e informalmente como una herramienta para ganar una experiencia cognitiva apropiada, antes de volverse el explícito foco de atención como un objeto matemático.

Dubinsky ha formulado la noción de una “descomposición genética” de un concepto matemático. Es decir, una colección de abstracciones reflexivas que son aproximaciones en un cierto modo para provocar el aprendizaje del concepto imaginado. De esta manera, si queremos introducir el concepto de límite de una serie, nosotros deberíamos primero intentar describir el concepto-imagen de una sucesión de construcciones mentales que son necesarias para que el estudiante haga. Como estudiantes con diferentes experiencias y diferentes estructuras cognitivas difícilmente requieren exactamente la misma sucesión, uno puede hipotetizar que es esencial que los estudiantes activamente y concientemente participen en el proceso de abstracción reflexiva para reconstruir su estructura de conocimiento y construir el concepto de límite.

CAPÍTULO 2.

SERIES Y ESCALERAS

2.1 Introducción

Motivados por problemas de cuadraturas, los pioneros del Cálculo Diferencial e Integral se verían forzados a estudiar las series infinitas, un proceso infinito de acumulación de cantidades. Su gran genio consistiría en saber qué sumas infinitas podían ser tratadas de acuerdo con las reglas de lo finito y cuáles no, gracias a una comprensión profunda de los problemas que trataban. Sin embargo, dado que una suma finita es asociativa y conmutativa y una suma infinita no tiene porque serlo, el uso indebido de las reglas de lo finito les llevaría pronto a conclusiones erróneas, por lo que se evidenciaría la necesidad de comprender de forma precisa qué significaba converger.

La respuesta proporcionada por los rigorizadores del Cálculo discurriría en dos frentes: (i) por un lado entender una sucesión como una regla con la que podemos hallar cualquier término específico de la misma (no se trata de poder calcular todo término, sino cualquiera de ellos) y considerar una serie como la suma de los infinitos términos de una sucesión asociada a ella, en donde la posible definición se aplica a la llamada "sucesión de sumas parciales" y (ii) proporcionar una definición de convergencia de una sucesión como la comparación entre los términos de la sucesión y su supuesto límite, controlando el error cometido[41].

2.2 Sucesiones y Series

En el libro Misterios Matemáticos de Calvin C. Clawson,[42], se afirma que el descubrimiento (o invención) de la sucesión de los números que utilizamos para

[41] JARAMILLO LÓPEZ, C. M. La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele. Valencia. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. 2003.
[42] CLAWSON, Calvin C. MISTERIOS MATEMÁTICOS: Magia y belleza de los números. Editorial DIANA, México. 1999.

contar es, indudablemente, uno de los más grandes descubrimientos de toda la humanidad y que se puede utilizar esta sucesión como la base para generar conceptos matemáticos aún más sofisticados; partiendo del concepto de sucesión, se puede desarrollar el concepto de límite.

¿Cuál es la distinción entre sucesiones y series?

Es necesario tener en cuenta que *Una sucesión numérica es una lista o conjunto ordenado de números dentro de llaves (tipo especial de paréntesis). El conjunto puede contener un número finito de números, como es el caso de la sucesión:* $\{1,\ 4,\ 10,\ 20\}$, *o puede contener un número infinito de números, como es la sucesión de los números naturales:* $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ldots\}$. *Cuando tratamos con conjuntos infinitos utilizamos tres puntos (llamados puntos suspensivos o elipsis) después del último número a la derecha para significar que la sucesión continúa en forma interminable. Es importante que especifiquemos que los números están en un orden determinado, ya que es este orden preciso lo que define la sucesión y le proporciona características significativas.*

Por otra parte, una serie numérica es la suma de un conjunto de números. Por lo tanto, cada sucesión numérica tiene una serie numérica asociada que es la suma de todos los números en la sucesión. Utilizamos símbolos especiales cuando sumamos los números de una sucesión numérica para formar una serie numérica. En ocasiones utilizamos una letra S *mayúscula, y si sabemos que el número de términos en la sucesión es* n, *entonces mostramos la suma como* S_n *lo que quiere decir que hemos sumado* n *números. Por lo tanto, la suma de los cinco primeros números naturales en su sucesión normal sería:*

$$S_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

En otras ocasiones utilizamos la letra griega sigma: $\sum$ *Por lo tanto, podemos mostrar la serie anterior en diversas formas:*

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

debajo de la sigma tenemos $i = 1$ *que nos indica el primer término que estamos sumando; y sobre la sigma tenemos un cinco que nos indica el último o quinto término que será sumado. En otras palabras, estamos sumando* i *cuando* i *es igual a los números del 1 al 5. Otro ejemplo del uso de la notación sigma es:*

$$\sum_{i=1}^{6} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$$

Aquí mostramos la suma de los primeros seis números naturales elevados cada uno de ellos al cuadrado. Aunque el uso de sigma puede parecer difícil de manejar al principio, finalmente resulta ser una práctica taquigráfica cuando nos referimos a series más complejas.

Podemos sumar una cantidad finita de términos en una serie y el resultado será siempre una suma o un número finito. ¿Qué es lo que sucede si intentamos sumar una cantidad infinita de términos? ¿En realidad tiene sentido hablar de sumar un número infinito de términos? Durante mucho tiempo, los matemáticos afirmaron que este concepto era ridículo"[43].

2.3 El infinito potencial

La idea de infinito potencial aristotélico es la de un proceso finito pero no acotado, es decir un proceso que puede ser efectuado tantas veces como uno quiera.

Una manifestación del infinito potencial es la sucesión de los números naturales: $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,...\}$, éstos forman un conjunto infinito en el sentido de que, dado cualquier número, siempre podemos hallar otro mayor que él. La serie asociada a la sucesión de los números naturales es $1+2+3+4+...$ que casi de manera natural se dice que es infinita. Una serie más sencilla que la serie natural es la serie $1+1+1+...$, es más sencilla porque cada término sucesor es idéntico a su predecesor incrementándose de forma regular asociándola a la sucesión de números naturales, y si se tiene un número finito n de términos se sabe que la suma es n : $\sum_{i=1}^{n} 1_i = 1_1 + 1_2 + 1_3 + 1_4 + ... + 1_n = n$; no hay problema en afirmar que la serie es infinita. En la serie asociada a la sucesión natural no es tan fácil calcular la suma del n-ésimo término: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, para esta y otras series como $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$, se hace necesario destrezas aritmético-algebraicas. Por ejemplo, para obtener que: $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$; haciendo un razonamiento finito generalizado se puede acudir al manejo adecuado del método de demostración por inducción matemática, aunque es posible el uso de otros métodos. A continuación se muestran las demostraciones de los resultados $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$

[43] CLAWSON, Calvin C. MISTERIOS MATEMÁTICOS: Magia y belleza de los números. Editorial DIANA, México. 1999. Pág. 63.

“Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es igual al semi-producto entre el último número natural considerado y su siguiente”

Matemáticamente se debe probar que: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

En primer lugar, se hará usando el método de inducción matemática:

a. Probar que se cumple para n=1.

$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ *En efecto, cumple.*

b. Se supone que se cumple para n=k

$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} = 1+2+3+...+k = S_k$ *Hipótesis de Inducción.*

c. Se demuestra que se cumple para n=k+1, esto es que $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+3+...+k+(k+1) = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Otra forma interesante de probar esta igualdad es tal y como lo hizo Gauss mientras cursaba sus estudios básicos en la clase de Matemáticas:

Sea $S = 1+2+3+...+(n-1)+n$

	1	+	2	+	3	+	…	+	(n-1)	+		n
	n	+	(n-1)	+	(n-2)	+	…	+	2	+		1
2 S =	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+	…	+	(n+1)	+	. . .	(n+1)

Luego, $S = \frac{n(n+1)}{2}$, ya que la suma se realizó en dos veces.

“Demostrar que la suma de los primeros n números potencias de 2 (concibiendo el número 1 como la primera potencia) es igual a la n-ésima potencia de 2 disminuida en 1”.

Matemáticamente se debe probar que: $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$.

a. Probar que se cumple para n=1.

$$\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 2^{1-1} = 2^0 = 1 \quad y \quad 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$ *En efecto, cumple.*

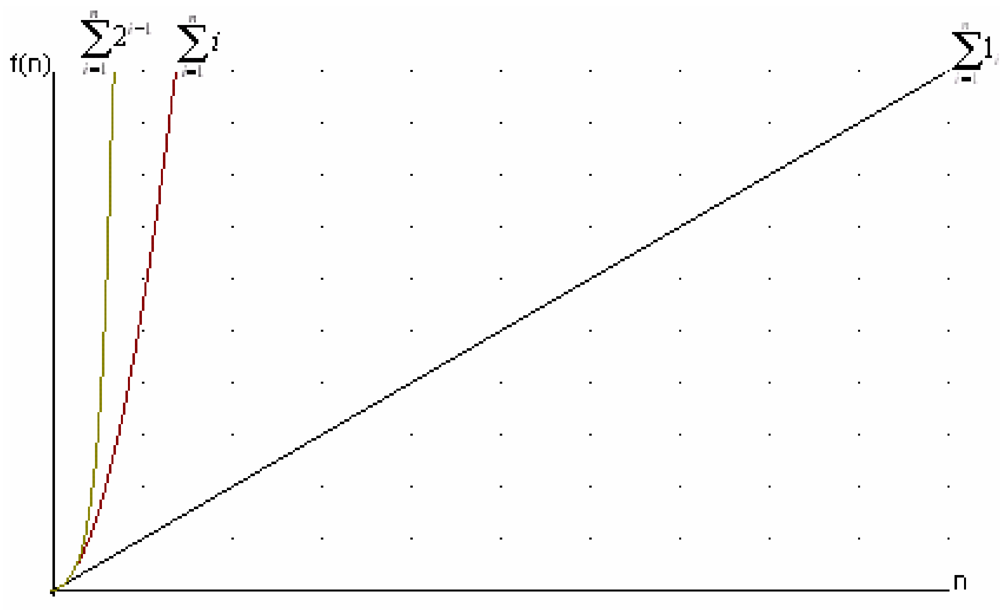
b. Suponer que se cumple para n=k

$$\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1} = 2^k - 1$$ *Hipótesis de Inducción.*

c. Demostrar que se cumple para n=k+1, esto es que $\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = 2^{k+1} - 1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} 2^{i-1} = \left(\sum_{i=1}^{k} 2^{i-1}\right) + 2^{(k+1)-1} = \left(2^k - 1\right) + 2^k ..=.. 2\left(2^k\right) - 1 ..= 2^{k+1} - 1.$$

Es preciso aclarar que el desarrollo de estas destrezas no es objeto de este estudio, lo importante es hacer notar que no hay dificultad en afirmar, que aquellas series que contienen términos individuales que aumentan sucesivamente su valor cuando se les compara con sus predecesores, son infinitas. La gráfica muestra el crecimiento de algunas series, en ella se puede observar que la serie $\sum_{i=1}^{n} 1_i$ crece con mayor lentitud que las series $\sum_{i=1}^{n} i$ y $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}$.



2.4 El horror al infinito

¿Tiene sentido hablar de sumar un número infinito de términos y obtener un resultado finito?

> Uno de los primeros en presentar su objeción fue el filósofo griego Zenón (489-¿a.C.). Hace casi 2500 años, Zenón era miembro de la escuela griega eleática, que fue fundada por Parménides de Elea (fl. 475 a.C.). Zenón, mediante argumentos contundentes, se opuso a muchas de las ideas de la escuela pitagórica. Uno de los argumentos involucraba lo absurdo de dividir el espacio en un número infinito de segmentos y después unirlos nuevamente. En su argumento sobre la flecha en movimiento, él afirma que antes de que la flecha pueda moverse desde el arquero hacia el blanco, ésta debe llegar primero al punto intermedio entre ambos. Pero antes de llegar al punto intermedio debe llegar primero al punto que marca la cuarta parte de la distancia, y así sucesivamente. Este proceso de subdividir el espacio entre el arquero y el blanco puede continuar en forma indefinida o, por decirlo en otra forma, sin terminar nunca, es decir, puede continuar una cantidad infinita de veces. Si el espacio es infinitamente divisible, entonces, para que la flecha se mueva, ésta debe moverse a lo largo de una infinidad de distancias en una cantidad finita de tiempo: ¡un absurdo!
>
> No obstante el argumento de Zenón, las flechas se las arreglan para llegar a sus blancos, y lo logran aunque el espacio pueda, al menos en nuestra imaginación, ser subdividido un número infinito de veces. Por lo tanto, la suma de esa cantidad infinita de segmentos resulta en una cantidad o distancia finita: es decir, se suman hasta ser la distancia entre el arquero y el blanco. Sin embargo, el concepto de sumar una cantidad infinita de números para obtener un resultado finito no ha dejado de incomodar a las personas desde el tiempo de Zenón hasta el presente siglo[44].

El no considerar procesos infinitos fue lo que frenó el avance de las matemáticas griegas. Todos los procesos donde aparece el infinito, aún en su modalidad potencial, contienen un obstáculo de comprensión que se resume en ese horror a admitir, esencialmente, que un proceso indefinido puede tener un final.

En cuanto al aporte medieval a la idea de que un proceso infinito puede arrojar un resultado finito, es necesario mencionar que:

---

[44] CLAWSON, Calvin C. MISTERIOS MATEMÁTICOS: Magia y belleza de los números. Editorial DIANA, México. 1999. Pág. 64.

Los filósofos y matemáticos del siglo XIV manifestaron su fascinación por las series infinitas. Como consecuencia de la superación del "horror al infinito" de los griegos, la Escolástica de la baja Edad Media recurría con frecuencia en sus especulaciones, tanto en sentido potencial como actual, esta amplitud de miras permitió desarrollar la importante innovación de los algoritmos infinitos.

En este sentido, los escolásticos son pioneros, toda vez que en la antigüedad sólo se desarrollaron algunos algoritmos reiterados, y en cuanto a series propiamente sólo Arquímedes en su Sobre la cuadratura de la parábola se aproximó al tema manejando la progresión geométrica indefinida $1+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{4^n}+...=\frac{4}{3}$, aunque sin extender la forma actual (en sentido aristotélico) la suma hasta el infinito, ya que no lo requiere así el método de exhaución, ideado precisamente para obviar la dificultad del infinito.

La aplicación concreta de las series tuvo lugar a propósito de ciertos problemas sobre la "latitud de las formas", y en los que los espacios recorridos presuponen la determinación de la suma de una serie convergente. Es preciso señalar que el manejo de las series infinitas en este período no tuvo lugar como las utilizamos hoy en el Cálculo, sino de forma retórica, con casi total ausencia de símbolos. Los resultados fueron hallados mediante la argumentación verbal o geométricamente mediante la representación de la forma, mas que mediante consideraciones aritméticas basadas en la idea del límite.

R. Swineshead, de la escuela de Merton, escribió hacia 1345 su Liber Calculationum, por lo que se le apodó Calculator, en la que además de la regla de Merton, considera y resuelve el siguiente problema de ley artificial:
Si a lo largo de la primera mitad de un cierto intervalo de tiempo, una forma se mantiene con cierta intensidad; a lo largo del siguiente cuarto de intervalo la forma se mantiene al doble de dicha intensidad; a lo largo del siguiente octavo de intervalo la forma se mantiene al triple de la intensidad, y así ad infinitum, entonces la intensidad media durante todo el intervalo será la intensidad de la forma durante el segundo intervalo (el doble de la intensidad inicial).

Se trata de una serie de movimientos uniformes tales que los intervalos sucesivos de tiempo forman una progresión geométrica de primer término y razón $\frac{1}{2}$, mientras que las intensidades de la forma son los términos de una progresión aritmética de primer término y razón 1. El resultado es equivalente (tomando como unidad el intervalo de tiempo y la intensidad inicial de la forma) a la suma de la serie aritmético-geométrica: $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+...+\frac{n}{2^n}+...=2.$

Calculator dio una prolija y confusa argumentación verbal para llegar al resultado, mientras que Oresme lo demostró de manera mucho más inteligible y sencilla a través de procedimientos gráficos.

Uno de los resultados más importantes de Oresme sobre series lo describe de forma retórica de la siguiente forma:

Si de una cierta cantidad se sustrae una parte alícuota (una k-ésima parte) y del primer resto se sustrae la misma parte alícuota, del segundo resto se sustrae la misma parte alícuota y así ad infinitum, tal cantidad será consumida exactamente, ni más ni menos, por tal modo de sustracción.

En el lenguaje literal a la cantidad de la que se parte, al sustraer la parte alícuota $\frac{a}{k}$ resulta $a\left(1-\frac{1}{k}\right)$, sustrayendo a esta cantidad su k-ésima parte resulta la cantidad $a\left(1-\frac{1}{k}\right)^2$, y así se sigue, en cada sustracción se multiplica el resto anterior por la cantidad $\left(1-\frac{1}{k}\right)$, por lo tanto el resultado es equivalente a la suma de la serie $\left(\frac{a}{k}\right)+\left(\frac{a}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)+...\left(\frac{a}{k}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right)^n+...=a$, que generaliza el resultado de la progresión geométrica utilizada por Arquímedes.

Oresme dio otros muchos resultados sobre series, pero sin duda el resultado más sorprendente y original es la primera demostración en la Historia de la Matemática de la divergencia de la serie armónica $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n}+...$, Oresme agrupa los sucesivos términos de la serie poniendo el primer término $\frac{1}{2}$ en el primer grupo, los dos términos siguientes $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ en el segundo grupo, los cuatro términos que siguen en el tercer grupo, y así sucesivamente el grupo p-ésimo contendrá 2^{p-1} términos. Oresme argumentará entonces que existiendo un número infinito de grupos y siendo la suma de los términos de cada grupo mayor o igual que $\frac{1}{2}$, sumando una cantidad suficiente de términos se podrá superar todo número prefijado.

Resumiendo, como consecuencia de las especulaciones filosóficas medievales sobre el infinito y el continuo a propósito de la "latitud de las formas", se desarrolló una actividad matemática en el terreno de lo infinitesimal, que provocó el que se atemperara el "horror al infinito" de los griegos. Por eso las contribuciones medievales no fueron una extensión de los desarrollos clásicos, sino más bien una exploración de nuevos caminos en la Matemática, con resultados muy originales y totalmente novedosos en el terreno de la Cinemática, en la consideración intuitiva del concepto de función y en el tratamiento de las series infinitas, resultados que tienen un mérito enorme porque sus cultivadores no tenían a su disposición un desarrollo geométrico considerable ni un aparato algebraico que facilitara las operaciones. Aún así la aparición de un ambiente propicio al uso y abuso de lo intuitivo en relación con el infinito influiría de forma muy positiva sobre el magnífico desarrollo de los métodos y técnicas infinitesimales del siglo XVII[45].

Otro aspecto importante a considerar es la relación existente entre el infinito y las formas indeterminadas que resultan al evaluar algunos límites. "Tengamos en cuenta que la noción de infinito no proviene ni de la observación ni de la experiencia física. El cerebro es un objeto finito y no puede contener nada infinito, aunque sí es capaz de contener nociones del infinito"[46].

Obsérvese las siguientes representaciones simbólicas en las que interviene el concepto de infinito:

1.) ∞	2.) $\frac{\infty}{\infty}$	3.) $0 \cdot \infty$	4.) 0^{∞}	5.) ∞^{0}
6.) $\infty + \infty$	7.) $\infty - \infty$	8.) 0^{0}	9.) $\frac{0}{\infty}$	10.) 3^{∞}
11.) ∞^{∞}	12.) $\infty \cdot \infty$	13.) $\frac{\infty}{0}$	14.) $\frac{0}{0}$	15.) 1^{∞}

¿Cuáles de ellas son formas determinadas y cuáles indeterminadas?

45 GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Alianza Universidad. Madrid. 1992. pág. 46.

46 PÉREZ CARRERAS. Pedro. Los conceptos matemáticos: su génesis y su docencia. Universidad Politécnica de Valencia. 2001. pág. 11.

En algunos textos de Cálculo se afirma que la expresión 0^{∞} es una forma determinada que tiende a 0 y que las formas ∞^{0} y 1^{∞} son indeterminadas. Veamos las ideas que ofrecen tales textos en torno a lo que es una forma indeterminada:

"Es una forma extraña que no presenta ni dice nada".[47]

"Es cierto tipo de expresión con un límite que no es evidente por simple inspección".[48]

"En ella, las fuerzas son opuestas y están en competencia; mientras que en una forma determinada, las fuerzas están coludidas, no en competencia"[49]

Tales ideas no le permiten al estudiante la comprensión de lo que son las formas determinadas, formas indeterminadas, ni los procesos de aproximación al límite. A continuación, se proporciona una justificación intuitiva desde el punto de vista de la idea de aproximación, para determinar cuándo una expresión es determinada o indeterminada. Obsérvense los ejemplos:

Para 1^{∞}:

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la derecha de 1, cuando el exponente se incrementa.

$$1{,}01^{100} \approx 2{,}70$$
$$1{,}01^{1000} \approx 2{,}09 \times 10^{4}$$
$$1{,}01^{10000} \approx 1{,}63 \times 10^{43}$$

Su tendencia es a ∞.

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la izquierda de 1, cuando el exponente se incrementa.

$$0{,}99^{100} \approx 0{,}36$$
$$0{,}99^{1000} \approx 4{,}31 \times 10^{-5}$$
$$0{,}99^{10000} \approx 2{,}24 \times 10^{-44}$$

[47] CENTENO, Gustavo y otros. Matemática Constructiva. Libros & Libres. Santa Fe de Bogotá, 1994.
[48] EDWARDS, C. H. y PENNEY, David E. Cálculo con Geometría Analítica. Prentice Hall México, 1994.
[49] PURCELL, Edwin J. y otros. El Cálculo. Pearson Educación, México. Octava edición 2001.

Su tendencia es a 0. Luego, como las tendencias laterales son diferentes, decimos que la forma 1^{∞} es **indeterminada.**

Para 0^{∞}:

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la derecha de 0, cuando el exponente se incrementa.

$$0{,}01^{100} \approx 0$$
$$0{,}01^{1000} \approx 0$$
$$0{,}01^{10000} \approx 0$$

Su tendencia es a 0.

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la izquierda de 0, cuando el exponente se incrementa.

$$(-0{,}01)^{100} \approx 0$$
$$(-0{,}01)^{1000} \approx 0$$
$$(-0{,}01)^{10000} \approx 0$$

Su tendencia también es a 0. Luego, como las tendencias laterales son iguales, decimos que la forma 0^{∞} es **determinada.**

Para ∞^{0}:

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la derecha de 0, cuando la base se incrementa.

$$(10^{100})^{0,01} \approx 10$$
$$(10^{900})^{0,01} \approx 10^{9}$$
$$(10^{1000})^{0,01} \approx 10^{10}$$

Su tendencia es a ∞.

Obsérvese el comportamiento de algunos valores por la izquierda de 0, cuando la base se incrementa.

$(10^{100})^{-0,01} \approx 0,1$
$(10^{900})^{-0,01} \approx 10^{-9}$
$(10^{1000})^{-0,01} \approx 10^{-10}$

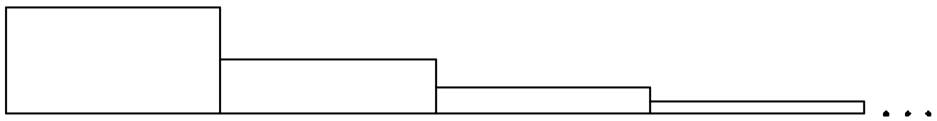
Su tendencia es a 0. Luego, como las tendencias laterales son diferentes, decimos que la forma ∞^0 es **indeterminada.**

Resulta interesante pensar en las expresiones ∞^0 y 0^∞, pues aunque contienen los mismos símbolos, su naturaleza es diferente.

2.5 Áreas de escaleras

De todas las posibles manifestaciones de la noción de límite, se ha elegido el concepto de convergencia de una serie de términos positivos, visualizada bidimensionalmente como el área de una superficie geométrica, asociando la noción de término de una serie al área de una superficie y la noción de suma de una serie al área total de la figura geométrica (si la tiene, en el sentido de la definición de convergencia), desarrollando el mecanismo de sumar áreas y comprobar si el área existe mediante escaleras.

La visualización elegida y el mecanismo utilizado están inspirados en un problema propuesto en el libro de Cálculo y Geometría Analítica de Sherman K. Stein que muestra la manera en la que "Oresme, alrededor del año 1360, sumó la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mediante el esquema de la escalera sin fin que se muestra a continuación:



En esta escalera cada escalón tiene 1 de ancho y duplica la altura del escalón inmediatamente a su derecha. Al observar la escalera de dos formas se pretende demostrar que $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots$"[50] . Antes de proceder analizar el problema y generalizar algunos resultados, se definirán algunos términos necesarios que permitirán crear un lenguaje adecuado para alcanzar el objetivo de

[50] STEIN, Sherman K. y BARCELLOS, Anthony. Cálculo y Geometría analítica. Vol. 1. Quinta edición. McGraw-Hill, México. 1996. pág. 590.

esta investigación (recuérdese que el lenguaje empleado por el estudiante es una característica fundamental para determinar el nivel de razonamiento en el que se encuentra, ver sección 1.5.5)

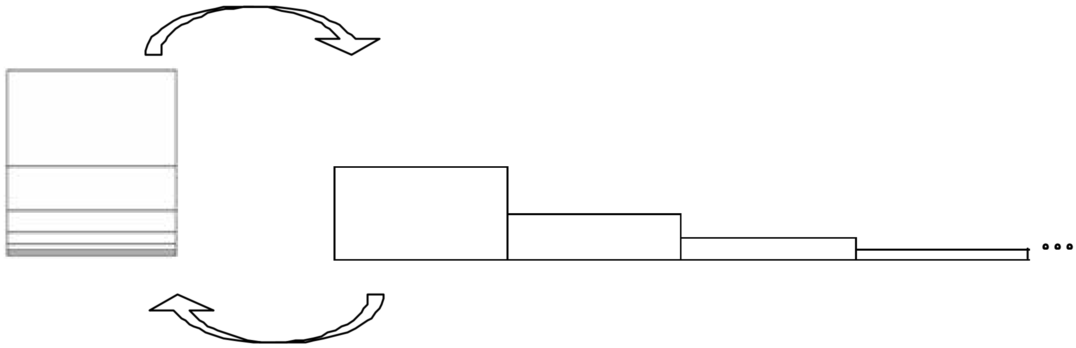
Se llamará **escalera** a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que cada rectángulo *tenga igual base* y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior se denominará **escalera creciente**, si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita creciente**. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, se denominará **escalera decreciente***,* si se compone de infinitos rectángulos, **escalera infinita decreciente***.* Así mismo, se llamará **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

Un concepto implícito en el mecanismo es el de razón. La **razón de una escalera** será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior. Por ejemplo, se dirá que la escalera usada por Oresme en el problema anterior es de razón $\frac{1}{2}$.

También el término de escalera aparece en el libro "Proofs without words" de Roger B. Nelson, con las cuales se realizan muchas demostraciones para la convergencia o divergencia de series infinitas. En otros libros de Cálculo como el de Leithold, Stewart o Edwards y Penney, las escaleras son usadas para realizar algunas demostraciones de series, aunque usan la expresión de disposición de rectángulos y no la de escalera.

Las escaleras tienen características interesantes, especialmente si se tiene en cuenta la forma de su construcción y la conexión que tienen con los conceptos de superficie y área. Entendiendo como superficie lo que se refiere a la forma y área como lo que se refiere a la cantidad de superficie encerrada, ¿Tendrán todas las escaleras infinitas una superficie finita?, ¿Tendrán todas las escaleras infinitas área finita? Para el cálculo del área de una escalera (cuando el área exista) se requiere del diseño de un mecanismo para sumar infinitas cantidades, lo cual arrojará un resultado finito o no, dependiendo de la forma en que la escalera fue construida. En el experimento educativo que se lleva a cabo, el entrevistado se moverá en el contexto de escaleras y no de series, haciendo mucho más inteligible y sencilla la obtención y la demostración de resultados, en lo que a series de términos positivos se refiere.

El ámbito histórico ha mostrado que el razonamiento acerca de procesos infinitos cuyo resultado puede ser finito, presenta grandes dificultades para su comprensión. Sin embargo, la representación geométrica bidimensional de la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$, visualizada inicialmente como un rectángulo, dividido a su vez en varios rectángulos y luego como una escalera; le permitirá conjeturar al entrevistado con mayor facilidad, que la suma de las áreas de infinitos rectángulos produce área finita.



La figura muestra dos disposiciones de rectángulos, un rectángulo dvidido en varios rectángulos (y la posibilidad de que sea infinitamente divisible) y una escalera infinita decreciente. En ambas, cada rectángulo que la conforma tiene la mitad de la altura del inmediatamente anterior. El entrevistado no tendrá dificultad en afirmar que ambas disposiciones tienen área y podrá aseverar que es la misma. Si se le presenta la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$ tendrá dificultades para afirmar que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1$, aún más, si sólo se le presenta la escalera infinita decreciente, tendrá dificultades para hacer la misma afirmación.

Antes de continuar, se define lo que es una serie geométrica.

Definición: La serie dada por $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ... + ar^n + ..., a \neq 0$, se llama serie geométrica de razón *r*.

Se puede probar así el siguiente teorema:

Teorema: Una serie geométrica de razón *r* diverge si $|r| \geq 1$. Si $0 < |r| < 1$, entonces la serie converge con la suma $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$, $0 < |r| < 1$

Demostración: Es fácil ver que la serie diverge si $r = \pm 1$. Si $r \neq \pm 1$, entonces

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$$

Multiplicando por *r* se ve que

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera obtenemos:

$$S_n - rS_n = a - ar^n.$$

En consecuencia, $S_n(1-r) = a(1-r^n)$, por lo que la n-ésima suma parcial es:

$$S_n = \frac{a}{1-r}(1-r^n)$$

Ahora bien, si $0 < |r| < 1$, se sigue que $r^n \to 0$ cuando $n \to \infty$, luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-r}(1-r^n)\right] = \frac{a}{1-r}\left[\lim_{n\to\infty}(1-r^n)\right] = \frac{a}{1-r}$$

Lo cual significa que la serie converge y que su suma es:

$$\frac{a}{1-r}$$

Si $|r| > 1$ sabemos que la sucesión $\{r^n\}$ diverge y por lo tanto el $\lim_{n\to\infty} S_n$ no existiría, de donde se deduce que la serie geométrica diverge en este caso.

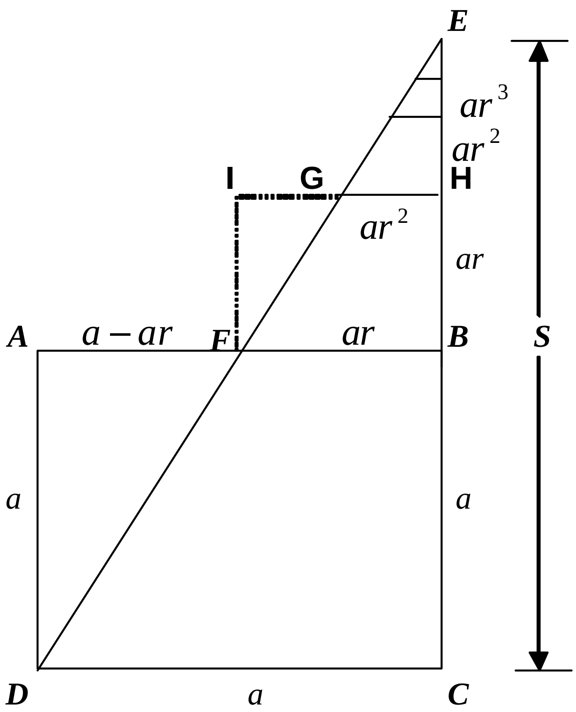
Una demostración alternativa (Visual Geométrica)[51]

Otra forma de demostrar el teorema es utilizando la siguiente figura, la cual consta del cuadrado ABCD de lado a y del triángulo rectángulo CDE cuya base también mide a (Por supuesto recto en C). La hipotenusa $\overline{DE}$ del triángulo corta al lado

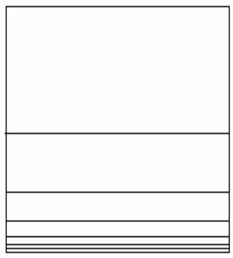
[51] KLEIN, Benjamín G. y BIVENS, Irl C. Proof Without Words. En Mathematics Magazine. Octubre 1988.

$\overline{AB}$ del cuadrado en F de forma tal que diste del vértice B ar unidades y del vértice A $a-ar$ unidades, de acuerdo a la razón elegida. Es decir, si se quiere probar la convergencia para la serie de razón ½, pues se elegirá r=1/2 y el punto de corte F estará a $a/2$ unidades del vértice B y a $a/2$ unidades del vértice A. Así mismo, si se quiere probar la convergencia para la serie de razón 1/3, pues se elegirá r=1/3 y el punto de corte F estará a $a/3$ unidades del vértice B y a $2a/3$ unidades del vértice A, y así sucesivamente. Pero nuestro propósito es probar la convergencia de la serie geométrica para cualquier razón r, tal que $0<|r|<1$. Luego, el segmento $\overline{FB}$ es la base del triángulo FBE, el cual tiene como longitud ar.

En este nuevo triángulo, trazamos el segmento $\overline{GH}$ paralelo al segmento $\overline{FB}$ de tal forma que estén a ar unidades entre sí. Se puede probar que el segmento $\overline{GH}$ tendrá como medida ar^2 unidades haciendo una semejanza entre los triángulos AFD y IGF. Si se construye un nuevo segmento paralelo a $\overline{GH}$ y a ar^2 unidades entre sí, vemos que medirá ar^3 unidades. Si se hace este proceso sucesivamente, el lado $\overline{EC}$ medirá $S=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+...$ Por último, la semejanza entre los triángulos AFD y CDE producirá la igualdad $\frac{S}{a}=\frac{a}{a-ar}$ de donde se deduce que $S=\frac{a}{1-r}$ que era lo que se quería demostrar.

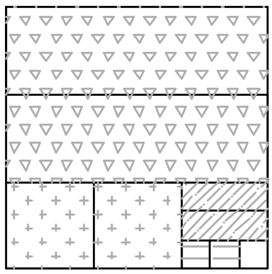


Retomando la representación geométrica bidimensional de la serie $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$, visualizada como un rectángulo dividido a su vez en varios rectángulos



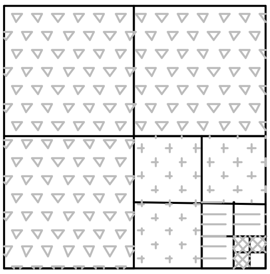
Se puede calcular otras series geométricas bajo el mismo mecanismo visual-geométrico, para luego generalizarlo:

Para la serie geométrica de razón $\frac{1}{3}$: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$



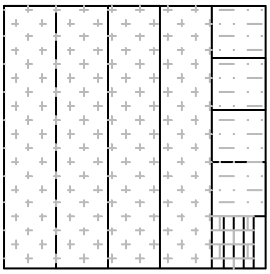
El área de cada par de rectángulos congruentes que se observan en la figura, corresponde respectivamente a un término de la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = 2\frac{1}{3} + 2\frac{1}{9} + 2\frac{1}{27} + 2\frac{1}{81} + ...$ y de acuerdo a esta visualización su suma es 1, luego $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i}$ de donde se puede deducir que $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{1}{2}$.

Para la serie geométrica de razón $\frac{1}{4}$: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}$



El área de cada tres rectángulos congruentes que se observan en la figura, corresponde respectivamente a un término de la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{4^i}=3\frac{1}{4}+3\frac{1}{16}+3\frac{1}{64}+3\frac{1}{256}+...$ y de acuerdo a esta visualización su suma es 1, luego $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{4^i}=3\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}$ de donde se puede deducir que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\frac{1}{3}$.

Para la serie geométrica de razón $\frac{1}{5}$: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{5^i}$

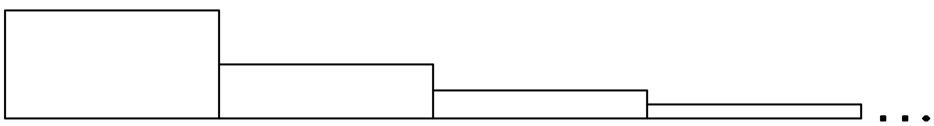


El área de cada cuatro rectángulos congruentes que se observan en la figura, corresponde respectivamente a un término de la serie infinita $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{5^i}=4\frac{1}{5}+4\frac{1}{25}+4\frac{1}{125}+4\frac{1}{625}+...$ y de acuerdo a esta visualización su suma es 1, luego $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{5^i}=4\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{5^i}$ de donde se puede deducir que $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{5^i}=\frac{1}{4}$.

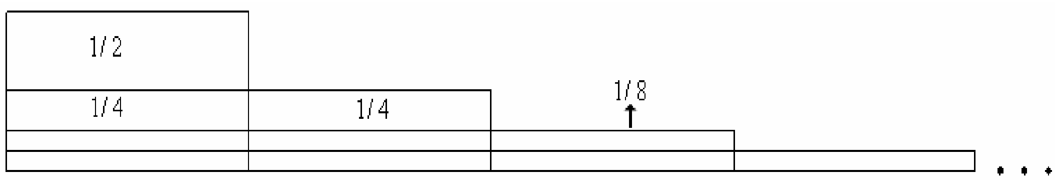
Se puede observar que para la serie geométrica de razón 1/p, con p un número natural mayor que 1, se puede conjeturar que: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p^n}=\frac{1}{p-1}$, pues la serie infinita de la forma $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^i}$ es igual a 1.

Conociendo que las series $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}$, $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^i}$ y $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{5^i}$ convergen y que sus respectivas sumas son: 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ se retoma el problema que genera el mecanismo que se utiliza en esta investigación, asociando la visualización geométrica de dividir infinitamente un rectángulo a la visualización geométrica de escaleras infinitas decrecientes, tal como se hizo con la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$.

En el problema, Oresme calculó la $\sum_{i=i}^{\infty}\frac{i}{2^i}$ con la ayuda de la escalera de razón $\frac{1}{2}$, donde cada término de la serie $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...=2$ está representando el área de cada rectángulo de la escalera.



Conociendo el resultado de la anterior sumatoria, se le traza a la escalera la continuación de las líneas de las bases superiores de los rectángulos, obteniendo la siguiente figura:



Obsérvese que el trazado geométrico anterior permite visualizar la siguiente serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots$$

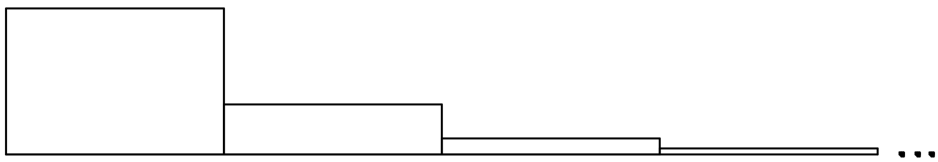
Por una transitividad entre las dos anteriores igualdades se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

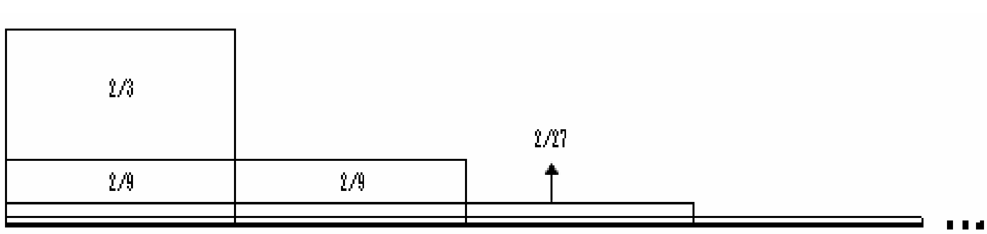
Con un tratamiento similar al anterior, se analizarán otras escaleras infinitas decrecientes de diferente razón para llegar a un interesante resultado.

Considérese la escalera de razón $\frac{1}{3}$, su área estará determinada por la serie geométrica

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



Procediendo tal y como se hizo con la escalera de razón $\frac{1}{2}$, se obtiene la misma escalera dividida así:



Obsérvese que de esta manera el área de la misma escalera resulta de la sumatoria:

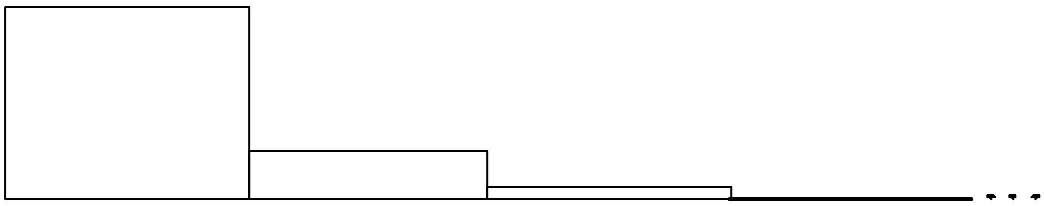
$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{3^i} = 2\frac{1}{3} + 2\frac{2}{9} + 2\frac{3}{27} + 2\frac{4}{181} + \ldots = \frac{3}{2}$$

Por una transitividad entre las dos anteriores igualdades se obtiene el siguiente resultado:

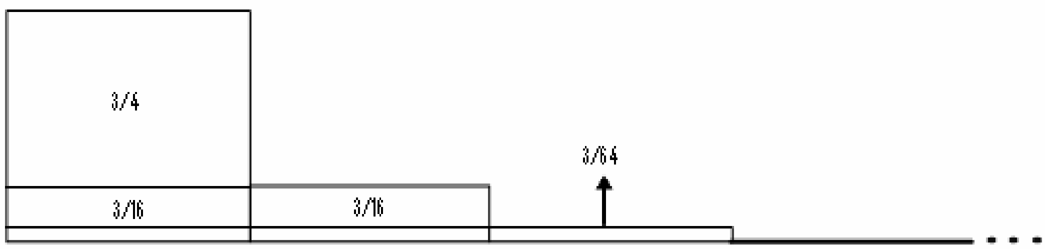
$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i}{3^i} = \frac{3}{2}$$

Considérese ahora la escalera de razón $\frac{1}{4}$; su área estará determinada por la serie geométrica:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4^i} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$



Procediendo tal y como se hizo con la escalera de razón $\frac{1}{2}$, se obtiene la misma escalera dividida así:



Obsérvese que de esta manera, el área de la misma escalera resulta de la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3i}{4^i}=3\frac{1}{4}+3\frac{2}{16}+3\frac{3}{64}+3\frac{4}{256}+...=\frac{4}{3}$$

Por una transitividad entre las dos anteriores igualdades, se obtiene el siguiente resultado:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{4^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3i}{4^i}=\frac{4}{3}$$

Así mismo, es posible repetir el mismo procedimiento la escalera de razón $\frac{1}{5}$ para probar la igualdad:

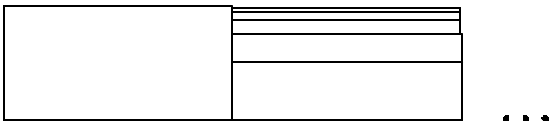
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{5^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4i}{5^i}=\frac{5}{4}$$

Generalizando, se puede conjeturar que para una escalera de razón 1/p, con p un número natural mayor que 1, se cumple la igualdad:

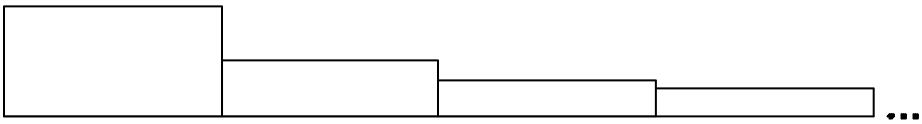
$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{p^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(p-1)i}{p^i}=\frac{p}{p-1}$$

También es importante notar que al dividir cada escalera con las líneas horizontales, cada rectángulo queda a su vez dividido en infinitos rectángulos. Luego, tanto el área de cada rectángulo como el área total de la escalera están determinadas por series infinitas.

Aunque la visualización geométrica bidimensional de una serie posibilita la demostración y generalización de muchos resultados, el mecanismo que le permitirá al entrevistado determinar si el área de una escalera es finita o no, consiste en la posibilidad de disponer los infinitos rectángulos de manera que se pueda construir una escalera infinita creciente (en la cual el área de la escalera dada será infinita), o no (en la cual el área de la esclarea será finita). Por ejemplo, la escalera de razón $\frac{1}{2}$ fue construida con rectángulos cuya altura es la mitad del rectángulo inmediatamente anterior. Cuando el entrevistado intente disponer los rectángulos para construir una escalera infinita creciente, se dará cuenta que no le es posible, como lo muestra la siguiente figura:



Otra escalera infinita decreciente, es aquella en la cual el segundo rectángulo tiene la mitad de la altura del primero; el tercero, la tercera parte de la altura del primero; y así sucesivamente, como lo muestra la figura:



Esta escalera es una representación geométrica bidimensional de la serie armónica, que ha sido objeto de estudio desde la antigüedad. La serie armónica está dada por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$$

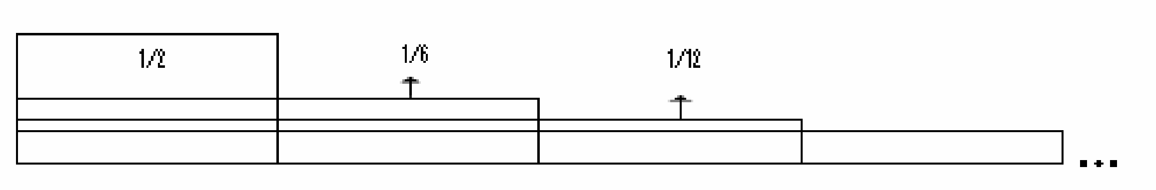
Los términos de esta serie son los recíprocos de los números naturales y corresponden a las áreas de cada uno de los rectángulos de la anterior escalera. Para efectos del presente estudio a esta escalera se le llamará **escalera armónica.**

A simple vista, la escalera armónica parecería tener área, ya que el área de cada uno de sus rectángulos disminuye continuamente. ¿Qué pasaría si se intentara realizar, para la escalera armónica, un análisis similar al que hace Oresme con la escalera de razón $\frac{1}{2}$?

El área de la escalera armónica correspondería a la suma de la serie armónica:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...$$

Procediendo tal y como se hizo con las anteriores escaleras, consideremos la escalera dividida de la siguiente manera:



Obsérvese que de esta manera el área de la misma escalera resultaría de la sumatoria:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}$$

Es decir, suponiendo que el área existe, se obtendrá por transitividad $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i+1}$, o lo que es lo mismo $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}$. ¿Será correcta esta igualdad?

Si se parte de que es correcta, entonces también sería correcta la igualdad $1+\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}=\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{i}$, de donde se deduce que 1=0 (contradicción).

Se puede concluir entonces que el procedimiento visual-geométrico que realiza Oresme con la escalera de razón $\frac{1}{2}$, no es correcto para la escalera armónica, pués se tendría que agregar como hipótesis que la escalera a la cual se le aplica el procedimiento tiene área.

La serie armónica $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ es divergente y el método utilizado para mostrar tal resultado también se debe a Oresme. Su demostración consiste en agrupar términos y usar desigualdades, así:

$$S_1=1$$

$$S_2=1+\frac{1}{2}$$

$$S_4=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=1+\frac{2}{2}$$

$$\begin{aligned}S_8&=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\&>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right)$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{4}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{4}{2}$$

De igual forma, $S_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ y $S_{64} > 1 + \frac{6}{2}$ y en general $S_{2^n} > 1 + \frac{n}{2}$.

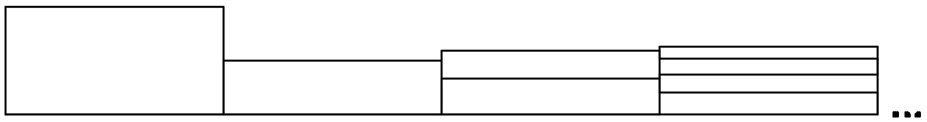
Esto demuestra que $S_{2^n} \to \infty$ cuando $n \to \infty$ y entonces $\{S_{2^n}\}$ es divergente. Por tanto, la serie armónica diverge.

Lo que resulta interesante de la serie armónica no es sólo que diverge, sino que lo hace muy lentamente. Obsérvese sus primeras 15 sumas parciales:

Número de términos	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$
1	1,00000
2	1,50000
3	1,83333
4	2,08333
5	2,28333
6	2,45000
7	2,59286
8	2,71786
9	2,82897
10	2,92897
11	3,01988
12	3,10321
13	3,18013
14	3,25156
15	3,31823

El incremento en el decimoquinto término es sólo de 0.06666 y el ritmo del incremento sigue disminuyendo conforme se incrementa el número de términos.

Analizando ahora la escalera armónica se puede observar que esta no tiene razón, pues cada rectángulo es construido con respecto a la altura del primero. Luego, será posible disponer la escalera de la siguiente manera: al lado del segundo rectángulo disponemos los dos rectángulos siguientes; luego los cuatro rectángulos que siguen, y así sucesivamente, formando una escalera infinita creciente a partir del segundo rectángulo, cuya área será infinita.



La escalera infinita creciente anterior (proveniente de la escalera armónica) permite visualizar geométricamente la demostración que realizó Oresme. Obsérvese que la suma de las áreas de los rectángulos tercero y cuarto sobrepasan el área del segundo rectángulo; la suma de las áreas de los rectángulos quinto a octavo sobrepasan el área de la suma de los dos anteriores y por ende la del segundo rectángulo; la suma de las área de los rectángulos noveno a decimosexto sobrepasan el área de los cuatro anteriores y por ende la del segundo rectángulo y así sucesivamente. Esta demostración visual geométrica es análoga a la demostración algebraica de la divergencia de la serie armónica.

En general, cuando la razón de una escalera sea menor que 1, no será posible construir una escalera infinita creciente. Las escaleras ejemplifican la naturaleza de un proceso de razonamiento infinito con plausible resultado final finito, en lo que al concepto de área se refiere. Para otras escaleras infinitas decrecientes, el entrevistado deberá confrontar el problema de determinar las condiciones para decidir cuándo una escalera tiene área y cuando no. Es decir, el entrevistado podrá afirmar sin dificultad que:

- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón, tiene área.
- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón no es posible disponerla de manera creciente.
- Toda escalera infinita que tenga área no es posible disponerla de manera creciente.

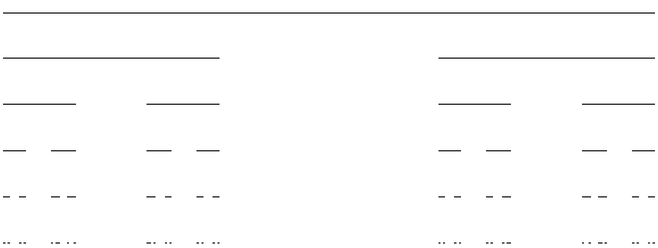
2.6 Aplicaciones de las series

A continuación se analizarán algunos problemas y se enunciarán otros, en los que se evidencia la importancia de las series infinitas y cómo la visualización permite acceder a la noción de límite, en la manifestación de suma de la serie (convergencia).

2.6.1 La carpeta de Sierpinski

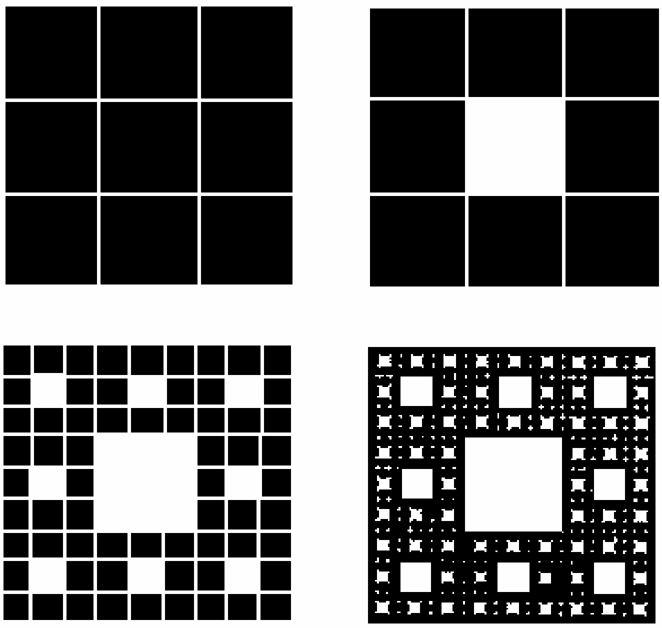
Georg Cantor (1845-1918)

El conjunto de Cantor, llamado así en honor a Georg Cantor, matemático alemán (1845-1918), se forma como sigue. Se comienza con el intervalo cerrado $[0,1]$ y se elimina el intervalo abierto $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. Con ello quedan dos intervalos $\left[0,\frac{1}{3}\right]$ y $\left[\frac{2}{3},1\right]$, a continuación se elimina el tercio medio abierto de ambos. Quedan cuatro intervalos y de nuevo se elimina el tercio medio abierto de ellos. El proceso continúa infinitamente; eliminando en cada paso el tercio medio abierto de cada intervalo que queda del paso anterior. El conjunto de Cantor consta de todos los números que quedan en $[0,1]$, después de eliminar todos esos intervalos, como lo muestra la figura. Se puede demostrar que la longitud total de los intervalos que se quitan es 1. A pesar de ello, el conjunto de Cantor contiene una cantidad infinita de números. Algunos números del conjunto de Cantor son: $0,\frac{1}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{9},\frac{8}{9},1...$



La carpeta de Sierpinski es un análogo bidimensional del conjunto de Cantor. Se forma eliminando la novena parte central de un cuadrado de área a (iteración n=1). Después se eliminan las partes centrales de los ocho cuadrados restantes (iteración n=2), que son más pequeños, y así sucesivamente (la siguiente figura muestra los tres primeros pasos de este procedimiento). Demuestre que la suma de las áreas de los cuadrados que se quitaron es a. Esto significa que la carpeta de Sierpinski tiene área 0.

Waclaw Sierpinski (1882-1969)



Solución

Para determinar el área de la carpeta de Sierpinski, considérese el área inicial del cuadrado, que es a.

Al realizar la primera iteración, el área resultante será $a-\frac{1}{9}a$,

en la segunda iteración, el área resultante será $a-\frac{1}{9}a-\frac{8}{81}a$,

en la tercera iteración, el área resultante será $a-\frac{1}{9}a-\frac{8}{81}a-\frac{64}{729}a$,

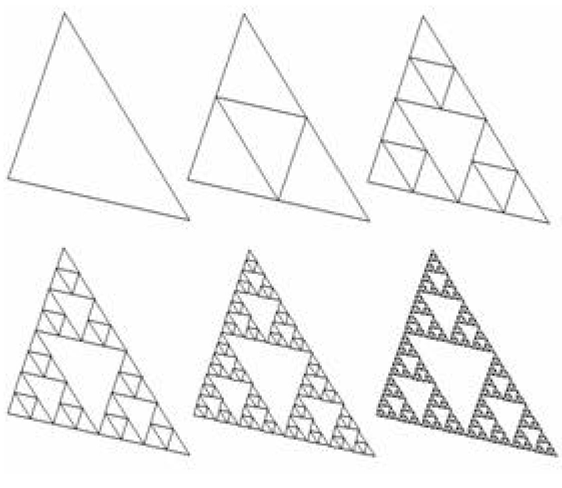
en la cuarta iteración, el área resultante será $a-\frac{1}{9}a-\frac{8}{81}a-\frac{64}{729}a-\frac{512}{6561}a$;

atendiendo a la ley de formación que se visualiza, en la n-ésima iteración el área será $a-\frac{1}{9}a-\frac{8}{81}a-\frac{64}{729}a-\frac{512}{6561}a-\ \ldots\ -\frac{8^{n-1}}{9^n}a = a-\sum_{i=1}^{n}\frac{8^{i-1}}{9^i}a$, luego, el área de la carpeta de Sierpinski equivale a:

$$a-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{8^{i-1}}{9^i}a = a-\frac{a}{8}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^i = a-\frac{a}{8}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^{i+1} = a-\frac{a}{9}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^i = a-\frac{a}{9}\left(\frac{1}{1-\frac{8}{9}}\right) = a-\frac{a}{9}(9) = 0.$$

2.6.2 El triángulo de Sierpinski

El matemático polaco Waclaw Sierpinski introdujo este fractal en 1919. Se parte (iteración n=0) de la superficie de un triángulo de área a. Seguidamente (iteración n=1) se toman los puntos medios de cada lado y se construye a partir de ellos un triángulo invertido para luego retirarlo. Ahora, (iteración n=2) se repite el proceso con cada uno de los tres triángulos que quedan. Así que se retira, esta vez, tres triángulos invertidos. En la figura, se observa hasta cinco iteraciones sucesivas. Si se repite infinitamente el proceso se obtiene una figura fractal denominada triángulo de Sierpinski.



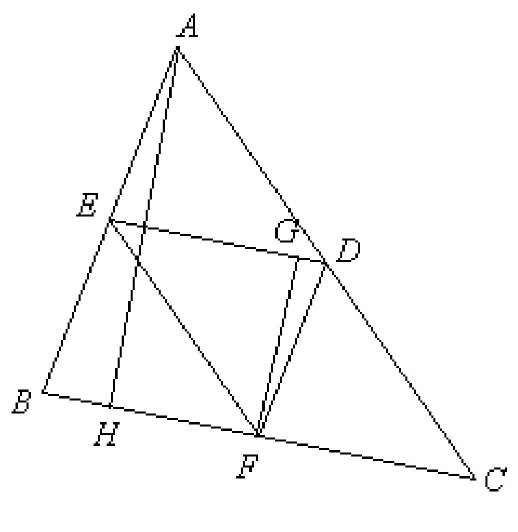
¿Cuál es el área del triángulo de Sierpinski?

Solución

Se puede probar con facilidad que el área del triángulo formado por los puntos medios de los lados de otro dado, es la cuarta parte de este último. Considérese el triángulo ABC que se muestra a continuación. En él se traza otro triángulo cuyos vértices $E,\ F\ y\ D$ son los puntos medios de $\overline{AB},\ \overline{BC}\ y\ \overline{CA}$, respectivamente. Por el teorema de la paralela media, la base $\overline{DE}$ del triángulo EDF mide la mitad de la medida de $\overline{BC}$ en el triángulo ABC.

Ahora, se traza la altura $\overline{AH}$ del triángulo ABC sobre $\overline{BC}$ y la altura $\overline{FG}$ del triángulo EFD sobre $\overline{DE}$. Obsérvese que esta última altura también mide la mitad de la altura $\overline{AH}$, pues los triángulo ABH y FDG son semejantes por el criterio ángulo – ángulo ($\angle AHB \cong \angle FGD$, definición de altura y $\angle GDF \cong \angle FBE$, ángulos opuestos en el paralelogramo $EDBF$).

Así, se cumple la proporción $\frac{ED}{CB} = \frac{FG}{AH}$. Pero $ED = \frac{1}{2}CB$ luego $FG = \frac{1}{2}AH$. De esta forma, $ABC = \frac{1}{2}AH \cdot BC$ y $FDE = \frac{1}{2}FG \cdot DE$, de donde se concluye que $ABC = 4FDE$.



Para determinar el área del triángulo de Sierpinski, considérese el área inicial del triángulo, que es a.

Al realizar la primera iteración, el área resultante será $a - \frac{1}{4}a$,

en la segunda iteración, el área resultante será $a - \frac{1}{4}a - \frac{3}{16}a$,

en la tercera iteración, el área resultante será $a - \frac{1}{4}a - \frac{3}{16}a - \frac{9}{64}a$,

en la cuarta iteración, el área resultante será $a - \frac{1}{4}a - \frac{3}{16}a - \frac{9}{64}a - \frac{27}{256}a$;

atendiendo a la ley de formación que se visualiza, en la n-ésima iteración el área será $a - \frac{1}{4}a - \frac{3}{16}a - \frac{9}{64}a - \frac{27}{256}a - \; ... \; - \frac{3^{n-1}}{4^n}a = a - \sum_{i=1}^{n} \frac{3^{i-1}}{4^i}a$, luego, el área del triángulo de Sierpinski equivale a:

$$a - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{3^{i-1}}{4^i}a = a - \frac{a}{3}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = a - \frac{a}{3}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{i+1} = a - \frac{a}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i = a - \frac{a}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{4}}\right) = a - \frac{a}{4}(4) = 0.$$

2.6.3 La mesa desaparecida de Cantor

Se explicará cómo hacer desaparecer una mesa ¡suprimiendo sólo la mitad de la mesa!

a) La mesa original tiene longitud L.

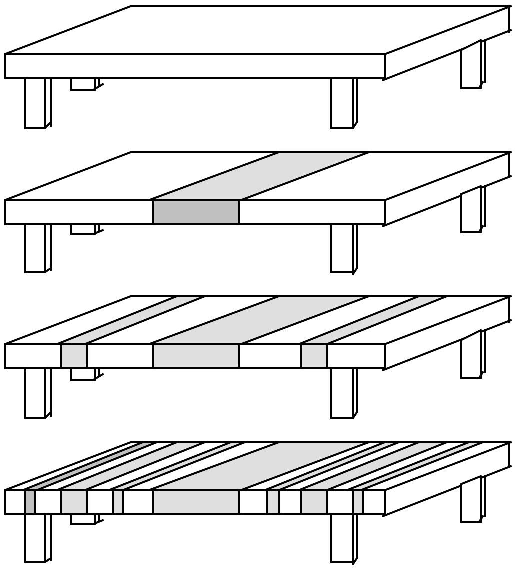
b) Eliminar $\frac{1}{4}$ de la mesa con centro en su punto medio. Cada porción restante mide menos de $\frac{L}{2}$.

c) Eliminar $\frac{1}{8}$ de la mesa suprimiendo dos trozos de $\frac{1}{16}$ de longitud centrados en los puntos medios de los dos fragmentos anteriores. Se ha eliminado $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ de la mesa. Cada trozo de los que quedan mide menos de $\frac{L}{4}$.

d) Eliminar $\frac{1}{16}$ de la mesa, suprimiendo fragmentos de longitud $\frac{1}{64}$, centrados en sus puntos medios, de cada uno de los cuatro fragmentos que han resultado del paso anterior. Se ha eliminado en total hasta ahora $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$ de la mesa.

Cada trozo de los que han quedado mide menos de $\frac{L}{8}$ de longitud.

¿Hará desaparecer la mesa este proceso, a pesar de que sólo habremos eliminado al final la mitad de la mesa? ¿Por qué?



Solución

Para determinar la parte de la mesa que queda, considérese la longitud inicial de la mesa, que es L.

Al eliminar el primer cuarto, la longitud resultante será $L-\frac{1}{4}L$,

Al eliminar los $\frac{2}{16}$ más de la mesa, la longitud resultante será $L-\frac{1}{4}L-\frac{2}{16}L$,

Al eliminar los $\frac{4}{64}$ más, la longitud resultante será $L-\frac{1}{4}L-\frac{2}{16}L-\frac{4}{64}L$,

Al eliminar los $\frac{8}{256}$ más, la longitud resultante será $L-\frac{1}{4}L-\frac{2}{16}L-\frac{4}{64}L-\frac{8}{256}L$

Atendiendo a la ley de formación que se visualiza, al eliminar por n-ésima vez partes de la mesa la longitud resultante será:

$$L-\frac{1}{4}L-\frac{2}{16}L-\frac{4}{64}L-\frac{8}{256}L-\ \ldots\ -\frac{2^{n-1}}{4^n}L=L-\frac{1}{4}L-\frac{1}{8}L-\frac{1}{16}L-\frac{1}{32}L-\ \ldots\ -\frac{1}{2^{n+1}}L$$

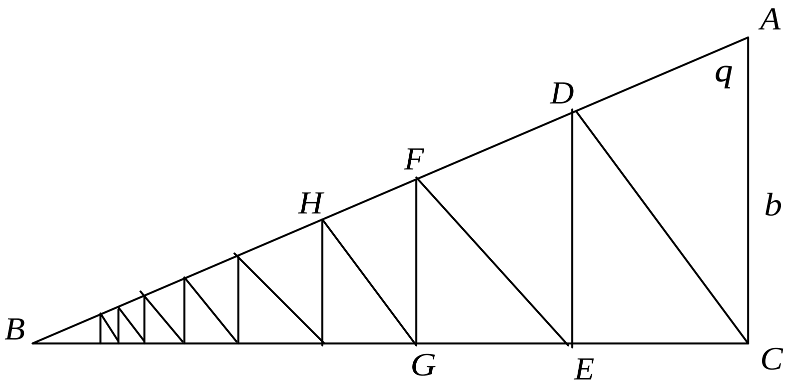
$=L-\sum_{i=1}^{n}\frac{L}{2^{n+1}}=L-\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$ luego, la longitud de la mesa de Cantor equivale a:

$$L-\frac{L}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}=L-\frac{L}{2}(1)=\frac{L}{2}.$$

Sin embargo, la mesa parece desaparecer, cuando se afirma que cada vez que se elimina una parte de ella, queda en cada trozo, menos de la mitad, menos de la cuarta parte, menos de la octava parte, y así sucesivamente.

2.6.4 Las alturas de un triángulo 30º-60º-90º

Consideremos el triángulo rectángulo ABC, recto en C, cuya medida del ángulo q es 30º y cuya medida del cateto $\overline{AC}$ es b. Se trazan las siguientes alturas: la altura $\overline{CD}$ en el triángulo ABC, relativa a la hipotenusa $\overline{AB}$; la altura $\overline{DE}$ en el triángulo BCD, relativa a la hipotenusa BC; la altura $\overline{EF}$ en el triángulo BDE, relativa a la hipotenusa $\overline{BD}$; y se continúa este proceso de manera infinita como se muestra en la figura. Encuentre la longitud total de todas las alturas trazadas.



Solución

Se debe determinar la suma de las longitudes de las alturas, la cual se representa por $CD+DE+EF+FG+GH+\ldots$

Los siguientes ángulos son congruentes por semejanza de triángulos:

$$q\cong\angle DCE\cong\angle FDE\cong\angle FEG\cong\angle HFG\cong\ldots$$

Así, en el triángulo ADC, se cumple que $senq = \frac{CD}{b}$, de donde $CD = b \cdot senq$

En el triángulo CDE, se cumple que $senq = \frac{DE}{CD}$, de donde $DE = CD \cdot senq = b \cdot sen^2 q$.

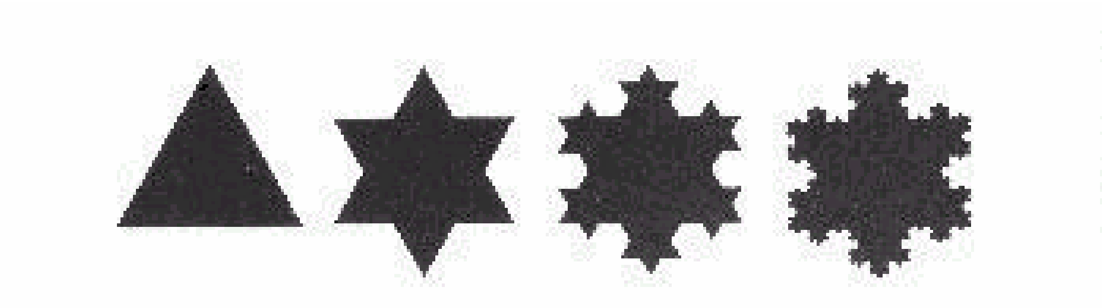
En el triángulo DEF, se cumple que $senq = \frac{EF}{ED}$, de donde $EF = ED \cdot senq = b \cdot sen^3 q$.

Así mismo, en el triángulo formado por la n-ésima altura, ésta tendrá por medida $b \cdot sen^n q$. Luego, la suma total de las infinitas alturas será $S = \sum_{i=1}^{\infty} b \cdot sen^i q$, que para este caso particular en el que $q = 30^o$, $S = \sum_{i=1}^{\infty} b \cdot sen^i 30^o = \sum_{i=1}^{n} \frac{b}{2^i} = b$

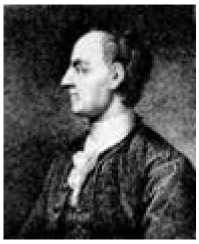
2.6.5 La curva de copo de nieve de Helge von Koch

Niels Helge von Koch (1870-1924)

Consideremos un triángulo equilátero de lado a, al que llamaremos curva 1. Sobre el segundo tercio de cada lado se construye un triángulo equilátero que apunte hacia fuera. Después se borra el interior de los segundos tercios originales. Llamaremos curva 2 a esta curva expandida. Ahora se construyen triángulos equiláteros que apunten hacia afuera sobre los segundos tercios de los lados de la curva 2. Se borran los interiores de los segundos tercios previos para hacer la curva 3. El proceso se repite, como se muestra, para definir una sucesión infinita de curvas planas. La curva limite de la sucesión es la copo de nieve de Koch, llamada así en honor al matemático sueco Helge von Koch quien la construyó en 1904. Esta curva es demasiado quebrada para tener tangente en algún punto. En otras palabras, la ecuación $F(x, y) = 0$ que la define, no define y como una función diferenciable de x ó x como una función diferenciable de y en ningún punto. Esta curva se caracteriza por tener longitud infinita, pero delimita una región con área finita. ¿Cuál es el área de la región?.

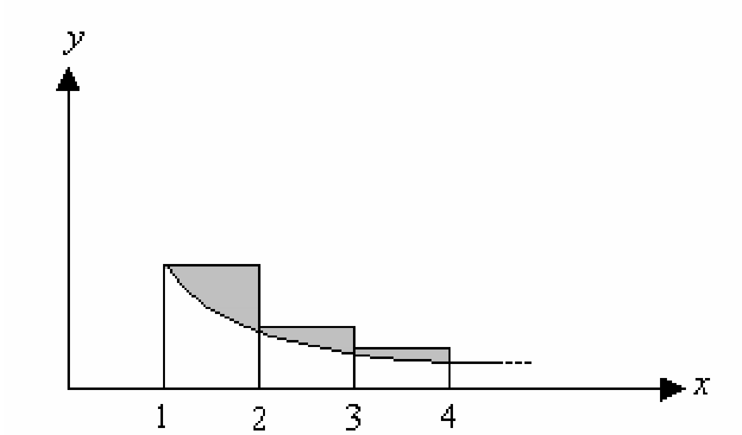


2.6.6 La constante g de Euler



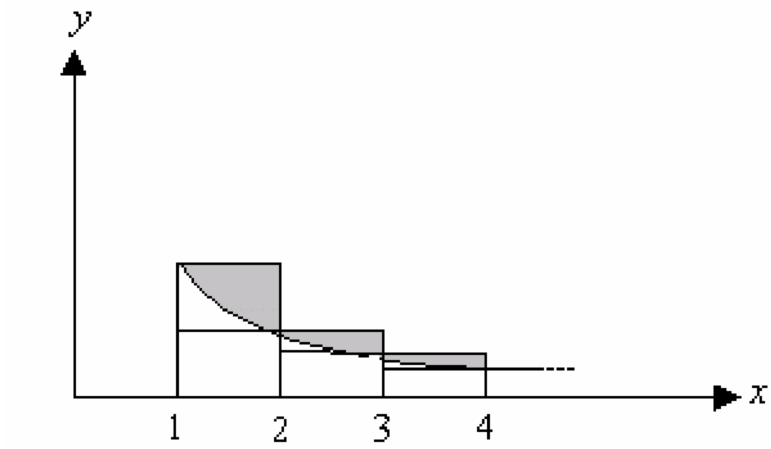
Leonhard Euler (1707–1783)

La región sombreada está limitada por la escalera armónica y la curva $y = \frac{1}{x}$. El área de esta región corresponde a una constante llamada la constante g de Euler, cuya representación decimal es aproximadamente 0,5772. En la actualidad, no se sabe si g es racional o irracional. Sin embargo, se sabe que si g fuese racional, entonces el denominador en su mínima expresión sería al menos 10^{244663}. Demuestre que esta constante está entre $\frac{1}{2}$ y 1. ¿Cómo se puede obtener g?



Solución

En primer lugar, se demuestra que g está acotada por los valores $\frac{1}{2}$ y 1. Para esto, se prolongan las bases superiores de los rectángulos en el interior del rectángulo inmediatamente anterior (sin sobrepasarlo), como muestra la figura.



Se observa que la superficie que corresponde a g está acotada por la superficie de la escalera armónica y la superficie que forman los rectángulos inferiores, en cada rectángulo de la escalera, esto es, si se considera hasta el n-ésimo rectángulo, se cumple:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\ldots\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)\geq g$$

Luego, para infinitos rectángulos $S_n = 1-\dfrac{1}{n+1} \geq g$, de donde $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = 1 \geq g$.

Entonces 1 es una cota superior de g.

Para demostrar que $\frac{1}{2}$ es una cota inferior de g, basta visualizar que el área sombreada en cada rectángulo superior es mayor que el triángulo formado por las diagonales, ya que la curva $y=\frac{1}{x}$ es cóncava hacia arriba. Entonces, se puede asegurar que hasta el n-ésimo rectángulo, se cumple:

$$g \geq \frac{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+...\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}{2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{i+1}\right)}{2}$$

Y para infinitos rectángulos $g \geq \frac{1}{2}$. Entonces $\frac{1}{2}$ es una cota inferior de g.

Antes de obtener una buena aproximación para g, se halla inicialmente una sucesión de las sumas parciales de la serie que la describe para probar que es monótona y acotada y por lo tanto convergente.

La siguiente figura muestra el área bajo la curva $y=\frac{1}{x}$ para $1 \leq x \leq n+1$, que corresponde a la integral $\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln|x|\,\Big]_1^{n+1}=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$ y por supuesto: $g+\ln(n+1)\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}$. Entonces la n-ésima suma parcial para g está dada por $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\ln(n+1)$. Visualmente, se puede observar que S_n crece a medida que lo hace n. De aquí, se puede concluir que S_n es monótona y acotada, lo que implica que es convergente.

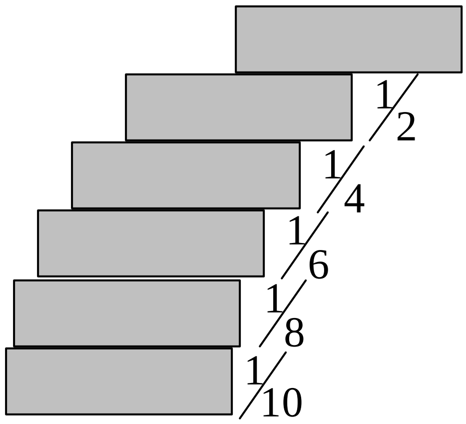
Mediante el cálculo de algunas sumas parciales, se puede aproximar el valor de g:

$$S_{10}\approx 0{,}5311,\quad S_{100}\approx 0{,}5722,\quad S_{1000}\approx 0{,}5767,\quad S_{10000}\approx 0{,}5771,\quad S_{100000}\approx 0{,}5771,$$

De donde, $g \approx 0{,}5772$.

2.6.7 El apilamiento de libros

Suponga que tiene una gran cantidad de libros, todos iguales, y los apila en la orilla de una mesa; cada libro sobresale cada vez mas del filo de la mesa. Demuestre que es posible hacer esto de tal modo que el ejemplar de arriba quede totalmente fuera de la mesa. De hecho, demuestre que el ejemplar de arriba puede sobresalir cualquier distancia de la orilla de la mesa, si la pila tiene la altura suficiente. Emplee el método de apilamiento siguiente: El libro de arriba sobresale la mitad de su longitud del segundo de abajo y el segundo hacia abajo sobresale la cuarta parte de su longitud del tercero; el tercero, la sexta parte de su longitud con respecto al cuarto, y así sucesivamente. Considere los centros de masa.



CAPÍTULO 3.

DISEÑO DE LA ENTREVISTA

3.1 Introducción

El diseño de una entrevista de carácter socrático en el marco del modelo educativo de van-Hiele, para un concepto matemático en particular, está fundamentada en el diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón acerca del cuadrado de área doble, de otro dado. En el contexto del presente estudio, la entrevista tene una doble intención, una, que el maestro reflexione sobre el concepto y las dificultades en la enseñanza-aprendizaje del mismo, de tal forma que se genere la necesidad de diseñar una red de relaciones para propiciar el acercamiento del estudiante al concepto; otra, que le permita al entrevistado progresar en el razonamiento sobre el concepto elegido.

La red de relaciones interviene durante toda la entrevista y el estudiante entrevistado razona sobre ella y la amplía, pero el refinamiento en sus razonamientos depende en gran medida del manejo adecuado por parte del entrevistador durante su aplicación, es decir, la entrevista debe estar diseñada de tal forma que no se produzca una enseñanza directa, sino más bien, una enseñanza gradual que permita que los estudiantes pasen de las situaciones concretas a las abstractas y viceversa, para así facilitar la comprensión del concepto.

La entrevista socrática que se ha diseñado en este estudio permite la detección de los niveles de razonamiento, en el contexto del modelo educativo de van Hiele y constituye una experiencia pedagógica para la enseñanza-aprendizaje de una manifestación de la noción de límite: suma de una serie, vía áreas de figuras planas.

3.2 Decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático: Características que se infieren del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón

Al momento del diseño y aplicación de una entrevista de carácter socrático, se deben tener en cuenta algunas características, las cuales se mencionan a continuación. Éstas, que son inferidas del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón, son una ampliación de las ideas propuestas por Jaramillo y Campillo en su artículo *Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele*[52] y, van acompañadas de pequeños apartes que ilustran la situación.

3.2.1 La intencionalidad de la entrevista

Una de las características fundamentales de una entrevista consiste en que el entrevistador conozca a cabalidad los objetivos que debe lograr el entrevistado en el desarrollo de la entrevista para así determinar con certeza el nivel de razonamiento del entrevistado. Además, el entrevistador deberá reconocer e identificar las ideas que se encuentran en torno al concepto objeto de estudio, teniendo cuidado con los conceptos que están inmersos en la red de relaciones, pues muchos de ellos no se deberán explicitar debido a su alto contenido matemático, que quizás pueden dificultar el discurrir de la entrevista. Tales conceptos los hemos denominado *encubiertos,* ya que durante la entrevista se tratan (pues son necesarios) pero de manera implícita, para conseguir respuestas espontáneas y con contenido matemático plausible, producto del razonamiento crítico y reflexivo.

3.2.2 El lenguaje

El lenguaje utilizado en la entrevista debe estar acorde al vocabulario común de quiénes intervienen en ella:

> *Sóc. – ¿Es griego y habla griego? 82b-pág. 303.*

Las palabras que se utilicen en la entrevista deben conseguir un diálogo que motive siempre a dar respuestas en forma espontánea y sin temor a equivocarse.

---

[52] JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario y CAMPILLO HERRERO, Pedro. Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. En: Divulgaciones matemáticas. Vol. 9. No. 1. Maracaibo, 2001. Pág 65 – 84.

Por ejemplo, palabras como “podrías”, “trata ahora de decirme”, “crees”, “si no quieres hacer cálculos, muéstranoslo en el dibujo”, hacen que el diálogo fluya con naturalidad y le den confianza al entrevistado para expresar sus respuestas.

Sóc. - ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, teniendo todas las líneas iguales como ésta? 82d-pág. 304.

Sóc. – Vamos, trata ahora de decirme cuál será el largo que tendrá cada una de sus líneas… 82e-pág. 304.

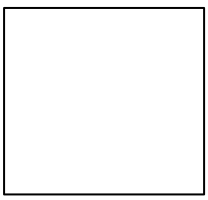
Sóc. –Pero entonces, ¿De cuál? Trata de decírnoslo con exactitud; y si no quieres hacer cálculos muéstranosla en el dibujo. 83e-pág. 308.

En el apartado 1.5.5 se menciona que el lenguaje utilizado por el estudiante entrevistado determina el nivel en que razona, por tanto, el entrevistador debe estar permanentemente atento al vocabulario que se utiliza durante la entrevista, de tal forma que fluya en el nivel correspondiente y propicie un razonamiento cada vez más refinado.

3.2.3 Los conceptos básicos

Las preguntas iniciales que el entrevistador formula al entrevistado tienen como propósito determinar, si reconoce adecuadamente los conceptos y elementos básicos usados en el discurrir de la entrevista. En el contexto de van Hiele estas preguntas permiten saber si el estudiante supera el nivel 0 de razonamiento (Predescriptivo: El mero reconocimiento de los objetos de estudio).

Sóc. – (Al servidor) Dime entonces, muchacho, ¿conoces que una superficie cuadrada es una figura así? (La dibuja) 82b-pág. 303.



Sóc. - ¿Es, pues, el cuadrado, una superficie que tiene todas estas líneas iguales, que son cuatro? 82c-pág. 303.

3.2.4 Las experiencias previas del entrevistado

El uso de preguntas inquisitivas (preguntas que conducen a la búsqueda cuidadosa de lo que se quiere conocer) acerca de situaciones, imágenes o ejemplos de la vida cotidiana, le posibilitan al entrevistado reflexionar y responder, aflorando en su mente todas las ideas que tenga alrededor del concepto, o responda lo que él cree saber. El entrevistador debe tener presente que el entrevistado posee un bagaje de conocimientos previos acerca del concepto a tratar, lo que para van-Hiele son las *experiencias previas de los estudiantes* en el primer nivel. *"El primer nivel es el nivel en el que los estudiantes piensan en su vida cotidiana, en el cual ellos tienen sus experiencias y toman sus decisiones".*[53]

Sóc. - ¿Y podría haber otra superficie, el doble de ésta, pero con una figura similar, teniendo todas las líneas iguales como ésta?
Serv. – Sí.
Sóc. ¿Cuántos pies tendrá?
Serv. – Ocho.
Sóc. – Vamos, trata ahora de decirme cuál será el largo que tendrá cada una de sus líneas. Las de ésta tienen dos pies, ¿pero las de ésa que es el doble?
Serv. –Evidentemente, Sócrates, el doble.
Sóc. -¿Ves, Menón que yo no le enseño nada, sino que le pregunto todo?. Y ahora él cree saber cuál es el largo del lado del que resultará una superficie de ocho pies, ¿O no te parece?

3.2.5 El diálogo inquisitivo

El diálogo inquisitivo le permite al entrevistado una interacción con el entrevistador y a través de un pensamiento discursivo (que hace reflexionar y razonar), él descubra, manifieste soluciones y llegue a comprender el concepto, ampliando su red de relaciones de manera espontánea.

El alumno ve relaciones nuevas que no veía antes, de ahí que se puede hablar de la formación de una estructura de pensamiento.[54]

El entrevistador no enseña nada al entrevistado (hablando de una enseñanza directa), sólo lo conduce mediante la indagación y el razonamiento. De esta forma, la entrevista de corte socrático es una estrategia que le permite al

[53] VAN-HIELE, Pierre M. Structure and Insight. 1986. Pág. 42.
[54] VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. Pág. 72. (Traducción al español realizada en 1990).

entrevistado razonar de manera adecuada sobre las ideas que pudiera tener acerca del concepto en cuestión.

Hay dos aspectos que hacen que el concepto de nivel sea tan importante. El primero es el carácter de comprensión, el hecho de que se trata de una estructura mental nueva, siendo por lo tanto imposible que el profesor ofrezca ayuda directa (una circunstancia que ya indiqué como característica de nivel). El segundo aspecto se refiere a que nos hallamos ante una ordenación mental y, en lo que respecta al primer nivel, una ordenación mental tan radical que un alumno, que todavía se encuentra en el primer estadio, sencillamente no puede seguir con el estudio de la geometría.[55]

Sóc. –… Pues, en efecto, el buscar y el aprender no son otra cosa, en suma, que una reminiscencia. 81d-pág. 302

Sóc. – ¿Ves, Menón, que yo no le enseño nada, sino que le pregunto todo…? 82e-pág. 304

3.2.6 La movilización del pensamiento

En ocasiones se hace necesario hacer una misma pregunta varias veces; en un primer momento para que el entrevistado dé a conocer lo que sabe al respecto, en momentos posteriores (preguntas de confirmación) para obtener de él respuestas más elaboradas, toda vez que haya sido sometido a un proceso de razonamiento, producto de una indagación intencionada. El diálogo inquisitivo-discursivo, pero cordial, le debe permitir al entrevistado identificar características comunes, elaborar conjeturas y modificar muchas ideas del concepto en cuestión. Para esto, se pueden emplear diferentes mecanismos como visual-geométricos, verbales o escritos, entre otros. Se puede hablar de la **movilización del pensamiento** (inferimos del texto: *Structure and Insight* pág. 28 que la movilización del pensamiento es la extensión, ampliación o modificación de nuevas estructuras sobre las cuales las concepciones nuevas que se van generando a través de la entrevista complementan las anteriores o las modifican).

Sóc. –Si este lado fuera de dos pies y este otro también de dos, ¿cuántos pies tendría el todo? Míralo así: si fuera por aquí de dos pies, y por allí de uno sólo, ¿no sería la superficie de una vez dos pies? 82c-pág. 304.

[55] VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. Pág. 88. (Traducción al español realizada en 1990).

Sóc. –..Si uno lo siguiera interrogando muchas veces sobre esas mismas cosas y de maneras diferentes, ten la seguridad que las acabaría conociendo con exactitud, no menos que cualquier otro. 85c-pág. 311

3.2.7 El aporte de información

Algunas de las preguntas que se formulan brindan información necesaria (definición de nuevos conceptos, relaciones con otras ideas afines, ampliación del vocabulario, entre otros) para que el entrevistado razone y logre la comprensión del concepto. Sin embargo, es importante advertir que la información suministrada no debe sugerir enseñanza ni explicación alguna.

Sóc. – Los sofistas la llaman diagonal, y puesto que si diagonal es su nombre, de la diagonal se llegará a obtener, como tú dices, servidor de Menón, la superficie doble. 85b-pág. 311.

Van-Hiele habla acerca de la importancia del aporte de información cuando se refiere a las preguntas-comprensión:

De ahí que tendremos que perseguir una relación profesor-alumno en que el primero no actúe como juez sino como persona en quien el alumno pueda confiar, una tarea que considerando la historia de la enseñanza no resulta sencilla. En este tipo de relación, la pregunta-comprensión adquiere un carácter muy distinto. En cuanto se establece esta confianza entre el conductor y el sujeto las preguntas-comprensión ofrecen la información deseada tanto por el conductor como por el sujeto. La pregunta-comprensión debe ser de tal manera que resulte nueva para el sujeto. Sólo así el sujeto podrá cerciorarse de su comprensión cuando el conductor califique su respuesta de correcta..[56]

3.2.8 La problematización con las ideas

La reflexión por parte del entrevistado sobre sus concepciones alrededor del concepto, le permiten hacerse conciente y enriquecer su propio saber o explicitar sus carencias o dificultades. En el último caso, el entrevistado presenta un estado de contradicción, de problematización, de conflicto interno, de confrontación con sus ideas; algunas veces sus ideas cambiarán totalmente la estructura de pensamiento que tenía del concepto (disonancia cognitiva), en otras, requerirá de la ayuda del entrevistador para elaborar, modificar o ampliar sus nuevas

[56] VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. Pág. 10. (Traducción al español realizada en 1990).

estructuras de pensamiento. El entrevistado deberá centrar su atención en el conflicto de ideas para conseguir una mayor objetividad en sus respuestas.

El entrevistador debe parecerse al pez torpedo, aquel que entorpece al que se le acerca y lo toca (vuelve añicos las creencias para racionalizar el conocimiento) para obtener del entrevistado un conocimiento racionalizado y más elaborado.

En la mayoría de los casos la situación es distinta en la enseñanza de las matemáticas. Aunque alguna vez puede ocurrir que algún conflicto desencadene la formación de comprensión, lo cierto es que esta formación no suele ser repentina sino que se alcanza tras la elaboración minuciosa de un conflicto.[57]*.*

Sóc. – Entonces de la línea de tres pies tampoco deriva la superficie de ocho.
Servidor. – Desde luego que no.
Sóc. – Pero entonces, ¿de cuál? Trata de decírnoslo con exactitud. Y si no quieres hacer cálculos, muéstranosla en el dibujo.
Servidor. - ¡Por Zeus!, Sócrates, que yo no lo sé.
Sóc. – ¿Te das cuenta una vez más, Menón; en que punto se encuentra ya del camino de la reminiscencia? Porque al principio no sabía cual era la línea de la superficie de ocho pies, como tampoco ahora lo sabe aún, si embargo, creía entonces saberlo y respondía con la seguridad propia del que sabe, considerando que no había problema. Ahora, en cambio, considera que está ya en el problema, y como no sabe la respuesta, tampoco cree saberla.84a-pág. 308

3.2.9 El paso por los tres momentos

Se considera que el entrevistado pasa por tres momentos: Creer saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas darse cuenta que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto.

Sóc. – Al problematizarlo y entorpecerlo, como hace el pez torpedo, ¿le hicimos algún daño?...

Le hemos hecho, al contrario, un beneficio para resolver como es la cuestión. Ahora, en efecto, buscará de buen grado puesto que no sabe, mientras que muchas veces antes, delante de todos, con tranquilidad, creía estar en lo cierto al hablar de la superficie doble y suponía que había que partir de una superficie del doble de largo…

[57]VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. Pág.34. (Traducción al español realizada en 1990).

¿Crees acaso que él hubiera tratado de buscar y aprender esto que creía que sabía, pero ignoraba, antes de verse problematizado y convencido de no saber, y de sentir el deseo de saber? 84b-pág. 308

3.2.10 La red de relaciones

Las preguntas deben estar formuladas de manera que el entrevistado construya una red de relaciones alrededor de un concepto, recurriendo a sus elementos sobre los cuales va a razonar. La construcción de la red se facilita mediante mecanismos concretos: visual-geométricos, verbales o escritos.

Sóc. – Entonces de la línea de tres pies tampoco deriva la superficie de ocho.
Servidor. – Desde luego que no.
Sóc. – pero entonces, ¿De cuál? Trata de decírnoslo con exactitud. Y si no quieres hacer cálculo, muéstranosla en el dibujo. 83e-pág. 308.

Por su parte van Hiele afirma:

La red de relaciones es, realmente, el objetivo al que nos dirigimos en nuestro programa. Sin embargo, como profesores, debemos recordar siempre que esta red de relaciones debería aparecer durante el proceso de aprendizaje y a partir de situaciones concretas. Sólo entonces podemos esperar el desarrollo de una estructura reversible, es decir una estructura en la que los niños puedan encontrar su camino de vuelta de relaciones abstractas a situaciones concretas..[58]

3.3. La entrevista

Se ha mencionado que la entrevista está concebida como una red de relaciones, permitiendo que detrás de cada pregunta se esconda una intencionalidad que sólo el entrevistador conoce y que a medida que se avanza en su aplicación, el entrevistado entreteja, relacione, razone, reflexione e infiera a partir de su red de relaciones. En este estudio, la red de relaciones sobre la cual el entrevistado razonará será la noción de límite. En esta red intervienen conceptos tales como área, superficie, serie infinita, aproximación y suma de una serie infinita.

Es importante resaltar que para el diseño de esta entrevista, muchos de los conceptos que gravitan alrededor de la noción de límite están implícitos o

[58]VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. Pág.144. (Traducción al español realizada en 1990).

encubiertos. Se espera que el entrevistado los relacione de forma intuitiva y espontánea (insight) para lograr que responda acertadamente las preguntas. Una vez el entrevistado haya sido sometido a esta experiencia pedagógica, se puede afirmar en términos de van-Hiele, que éste ha extendido su estructura sobre la noción de límite.

Guión de entrevista clínica de carácter socrático para una manifestación de la noción de límite en el marco del modelo de van-Hiele

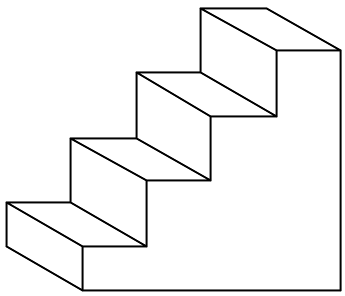
Concepto: Límite

Manifestación: El límite como suma (convergencia) de una serie infinita de términos positivos.

Mecanismo: Una componente visual-geométrica en su aspecto bidimensional como suma de áreas de figuras geométricas planas (áreas de escaleras).

Contenido del guión-entrevista:

1. En la siguiente imagen se observan superficies planas ¿puedes mencionar algunas?

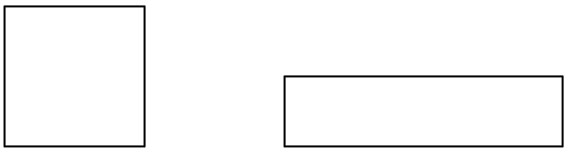


¿Cuáles?

2. Observa las siguientes figuras geométricas:

¿Consideras que estas figuras podrían tener la misma superficie y la misma área?

3. ¿Crees que estas dos figuras que se muestran a continuación podrían encerrar la misma cantidad de superficie?

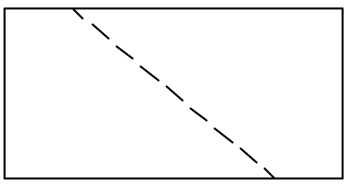


¿Por qué?

Aporte de información:

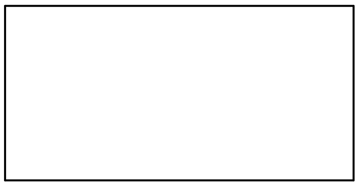
La noción de **superficie** es lo que se refiere a la forma geométrica, hay superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc.; la noción de **área** es lo que se refiere al tamaño, es la medida de una superficie (cantidad de superficie).

4. ¿Se podría decir que la siguiente superficie rectangular está dividida en dos superficies de igual área?



¿Por qué?

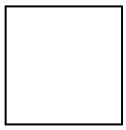
5. Dada una superficie rectangular:



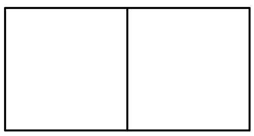
¿De cuántas maneras crees que es posible dividirla en dos superficies iguales?

Señálalas.

6. Ahora, considera la siguiente superficie:



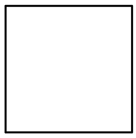
Si a esta superficie le disponemos otra igual, así:



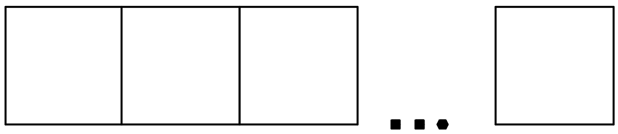
¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

¿Por qué?

7. Considera la siguiente superficie:



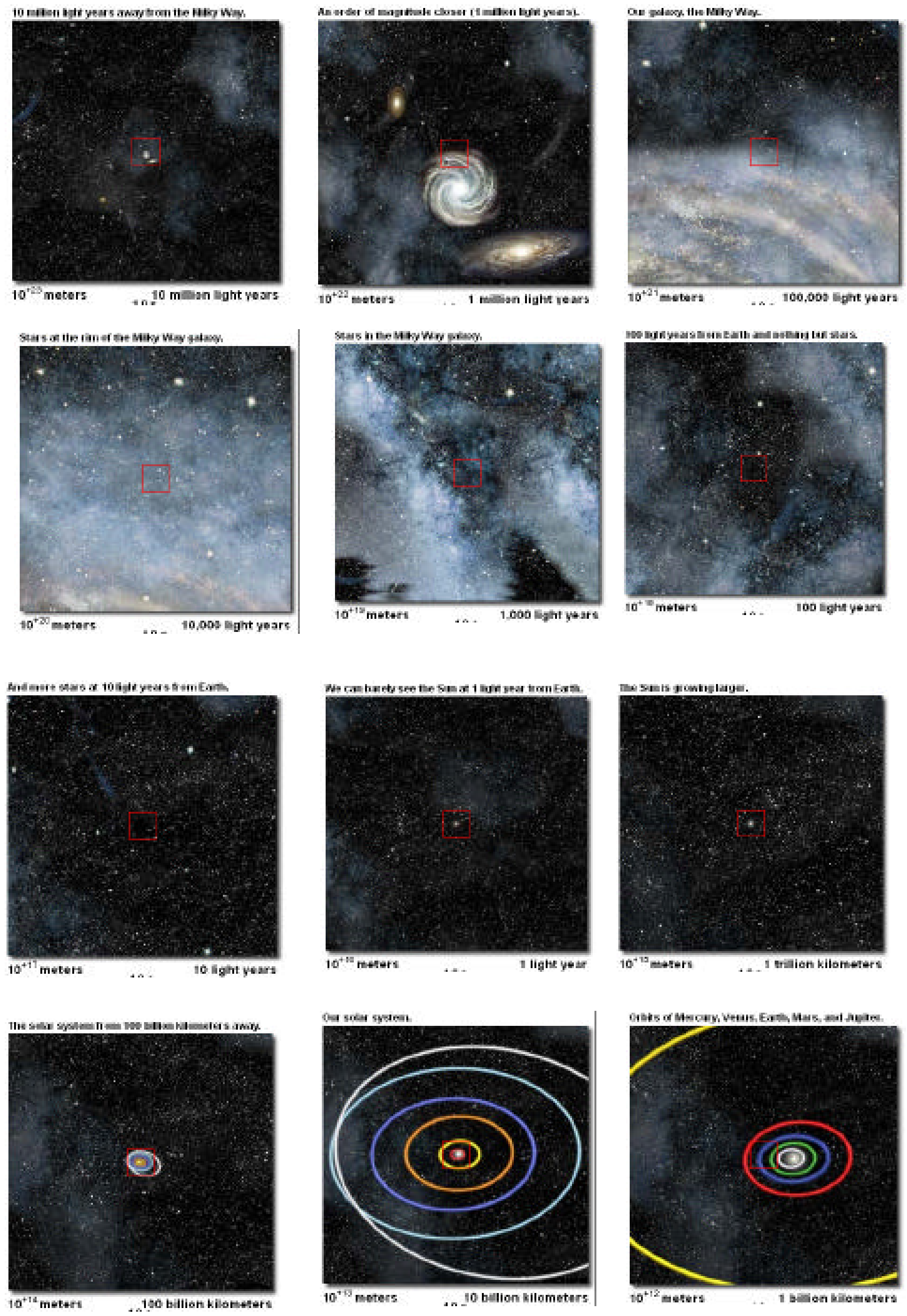
Si al lado de ésta disponemos otra igual y repetimos un número determinado de veces el proceso:

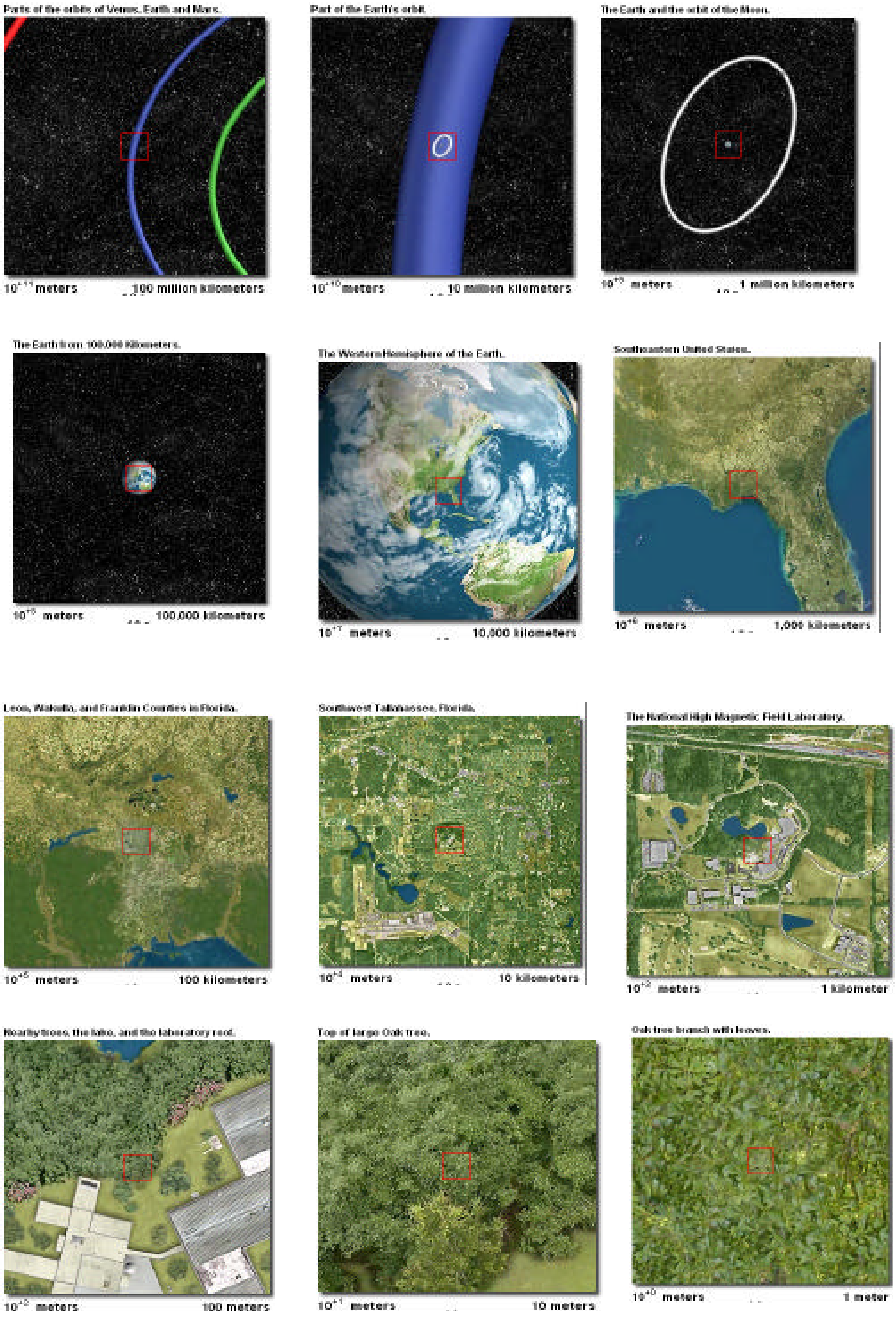


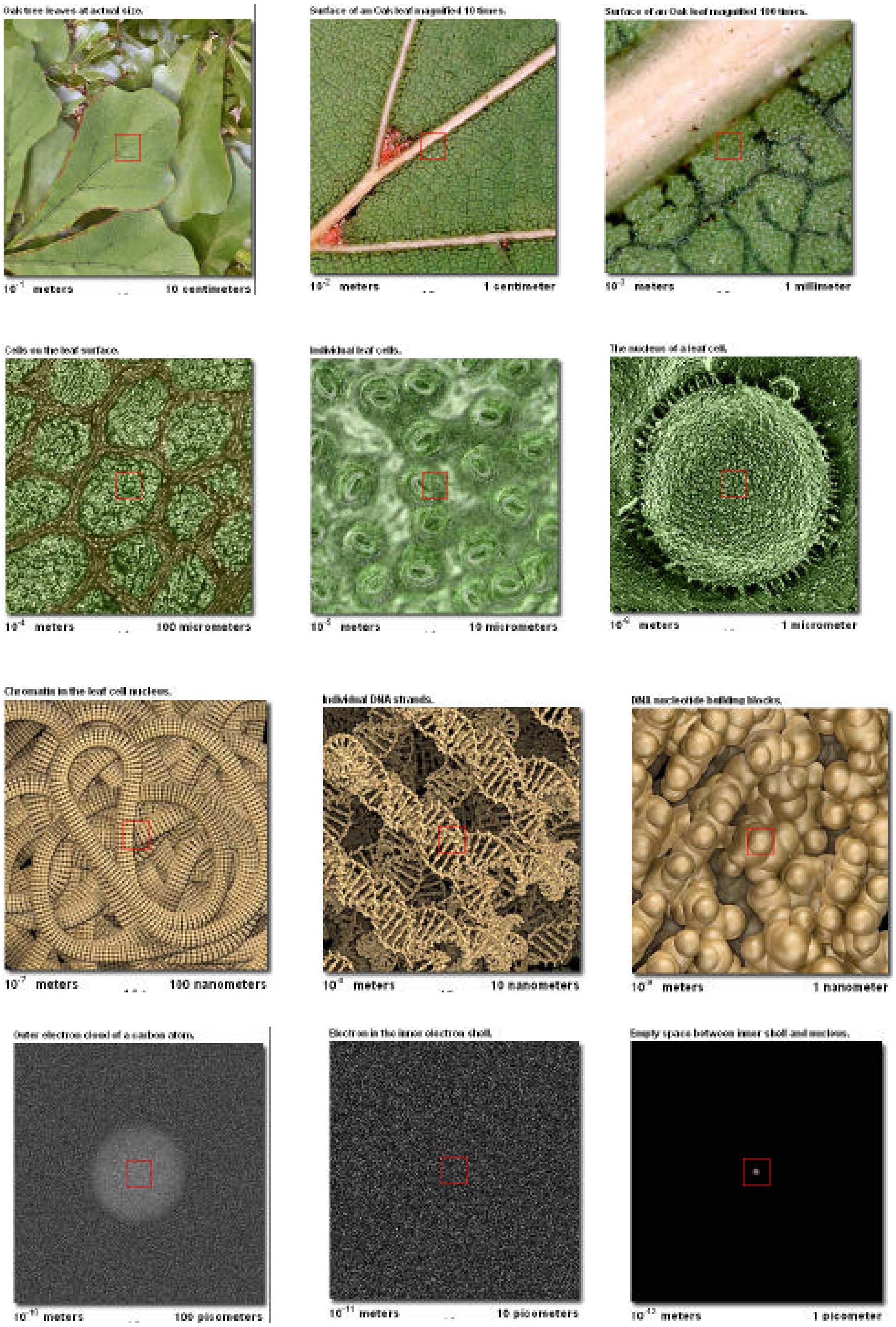
¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

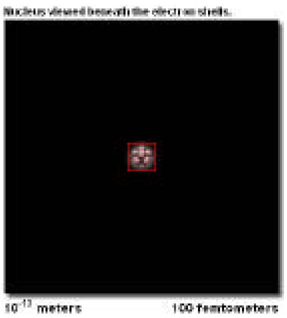
¿Por qué?

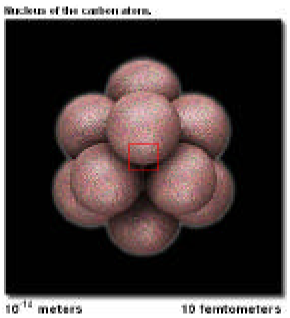
8. Observa la siguiente secuencia de imágenes

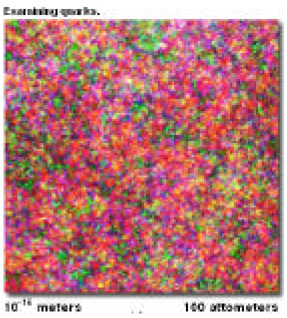



Parts of the orbits of Venus, Earth and Mars.
10^{+11} meters
100 million kilometers
Part of the Earth's orbit.
10^{+10} meters
10 million kilometers
The Earth and the orbit of the Moon.
10^{+9} meters
1 million kilometers
The Earth from 100,000 Kilometers.
10^{+8} meters
100,000 kilometers
The Western Hemisphere of the Earth.
10^{+7} meters
10,000 kilometers
Southeastern United States.
10^{+6} meters
1,000 kilometers
Leon, Wakulla, and Franklin Counties in Florida.
10^{+5} meters
100 kilometers
Southwest Tallahassee, Florida.
10^{+4} meters
10 kilometers
The National High Magnetic Field Laboratory.
10^{+3} meters
1 kilometer
Nearby trees, the lake, and the laboratory roof.
10^{+2} meters
100 meters
Top of large Oak tree.
10^{+1} meters
10 meters
Oak tree branch with leaves.
10^{0} meters
1 meter


Oak tree leaves at actual size.
10^{-1} meters
10 centimeters
Surface of an Oak leaf magnified 10 times.
10^{-2} meters
1 centimeter
Surface of an Oak leaf magnified 100 times.
10^{-3} meters
1 millimeter
Cells on the leaf surface.
10^{-4} meters
100 micrometers
Individual leaf cells.
10^{-5} meters
10 micrometers
The nucleus of a leaf cell.
10^{-6} meters
1 micrometer
Chromatin in the leaf cell nucleus.
10^{-7} meters
100 nanometers
Individual DNA strands.
10^{-8} meters
10 nanometers
DNA nucleotide building blocks.
10^{-9} meters
1 nanometer
Outer electron cloud of a carbon atom.
10^{-10} meters
100 picometers
Electron in the inner electron shell.
10^{-11} meters
10 picometers
Empty space between inner shell and nucleus.
10^{-12} meters
1 picometer



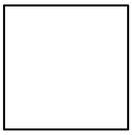




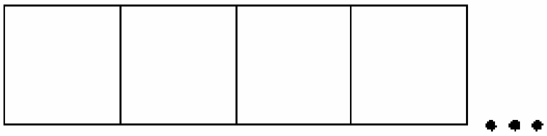
¿Cuánto más crees que nos podríamos alejar a partir de la primera imagen?

¿Cuánto más crees que nos podríamos acercar a partir de la última imagen?

9. Considera la siguiente superficie:



Si al lado de ésta disponemos otra igual y repetimos infinitamente este proceso:

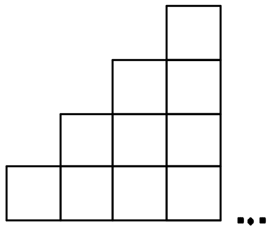


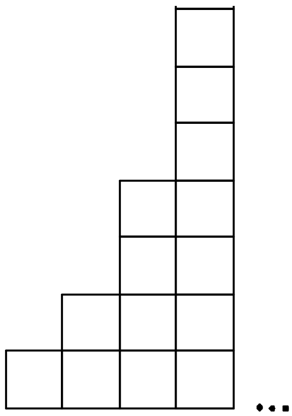
¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

¿Por qué?

10. Si se tiene una disposición de infinitas superficies iguales como muestra la figura:

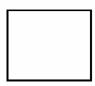
¿Crees que sería posible considerar esa disposición de estas otras maneras?



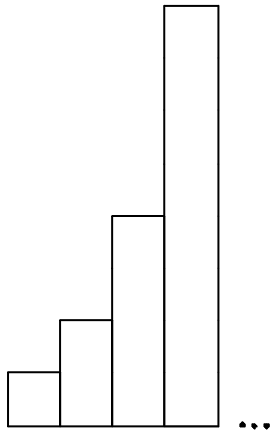


¿Por qué?

11. Considera la siguiente superficie:



Si al lado de ésta disponemos otra de igual base que el anterior, pero de doble altura y repetimos infinitamente este proceso, así:



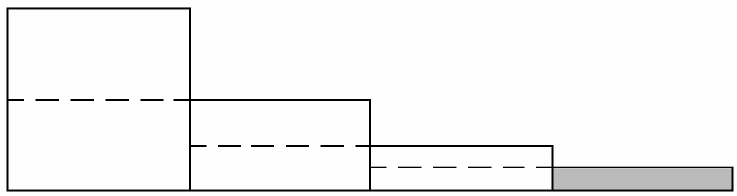
¿Cuál crees que será la suma de las áreas de los rectángulos?

¿Por qué?

Aporte de información:

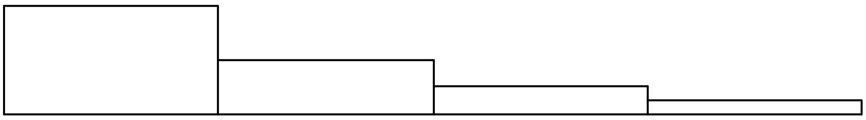
Llamaremos **escalera** a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que *tengan igual base* y estén uno a continuación de otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior la llamaremos **escalera creciente**, si se disponen infinitos rectángulos de esta manera, **escalera infinita creciente**. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, la llamaremos **escalera decreciente**, si se disponen infinitos rectángulos de esta manera, **escalera infinita decreciente**. Así mismo, llamaremos **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

12. En la siguiente escalera decreciente cada rectángulo tiene la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:



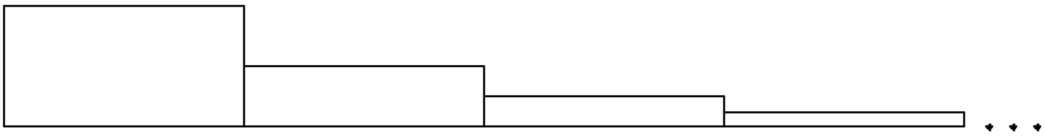
¿Cuál crees que es el área de la parte sombreada con respecto al área del primer rectángulo?

13. En la siguiente escalera finita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:



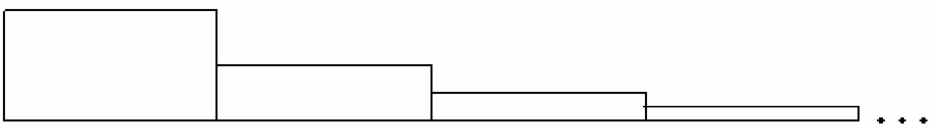
¿Cuál crees que será el área de la escalera?
¿Por qué?

14. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:



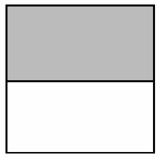
Si tomamos un rectángulo cualquiera de la escalera, diferente al primero, ¿qué área tendrá con respecto al área del rectángulo inmediatamente anterior?

15. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:

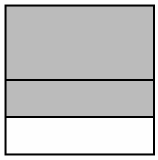


¿Cuál crees que será el área de la escalera?

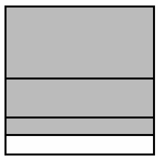
16. Si dividimos un rectángulo en dos superficies de igual área y sombreamos una de ellas, así:



Se toma la superficie que ha quedado sin sombrear y la dividimos en dos superficies de igual área sombreando una de ellas, así:

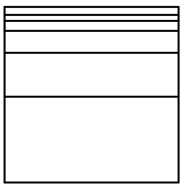


De nuevo se toma la superficie que ha quedado sin sombrear y la dividimos en dos superficies de igual área sombreando una de ellas, así:

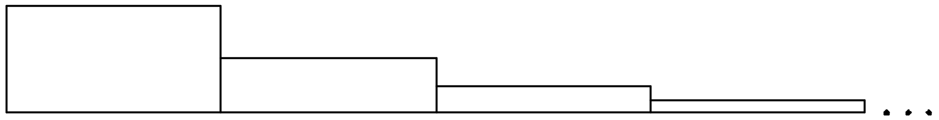


y continuamos este proceso infinitamente, ¿cuál será la suma de las áreas de las superficies sombreadas ?

17. El siguiente rectángulo se ha divido a la mitad; luego, la parte superior a la mitad; de nuevo, la parte superior a la mitad, y así sucesivamente como muestra la figura:

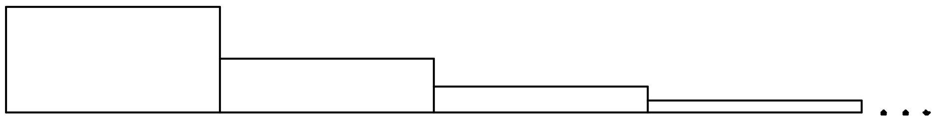


¿Crees que es posible disponer las superficies rectangulares en las que ha quedado dividido el anterior rectángulo como una escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior, como muestra la figura?



¿Por qué?

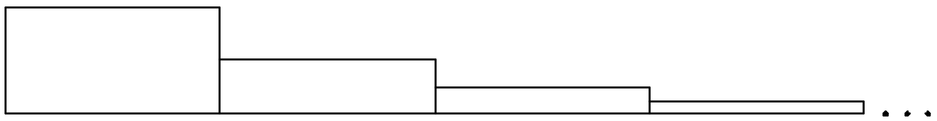
18. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior.



¿Cuál crees que será el área de la escalera?

¿Por qué?

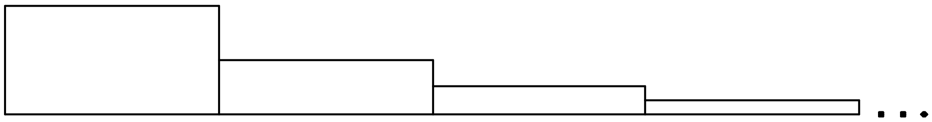
19. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que cada rectángulo tiene la mitad de la altura del anterior:



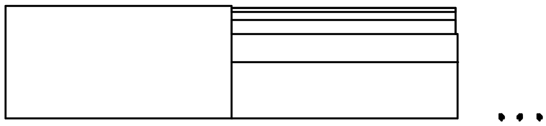
Utilizando los rectángulos de esta escalera, ¿crees que es posible a partir del primero, formar una escalera creciente?

¿Por qué?

20. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior:



Si al lado del primer rectángulo disponemos los infinitos rectángulos siguientes, así:



¿Cuál es el área de esta escalera?

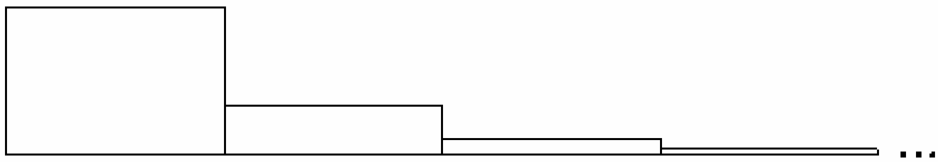
¿Por qué?

Aporte de información:

La **razón de dos áreas** es el cociente de sus valores en la misma unidad de medida. Diremos que una escalera tiene razón si la razón entre las áreas de dos rectángulos adyacentes es siempre la misma (constante).

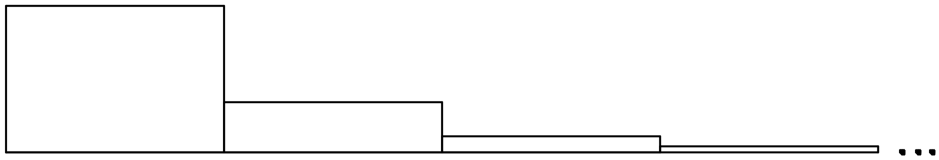
La **razón de una escalera** será el cociente entre las áreas de un rectángulo dado y el inmediatamente anterior.

21. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la tercera parte de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.



¿Cuál es la razón de la escalera?

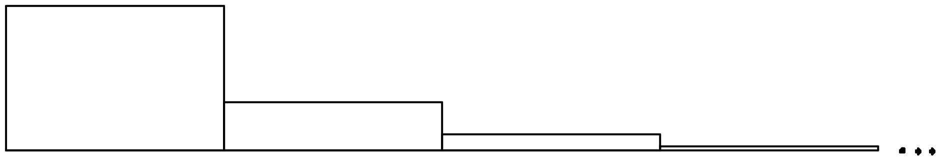
22. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la tercera parte de la altura del anterior:



¿Crees que sería posible disponer los rectángulos de esta escalera y formar una escalera infinita creciente?

¿Por qué?

23. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la tercera parte de la altura del anterior:



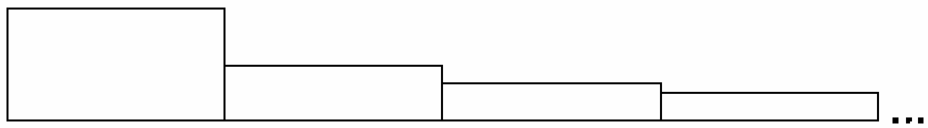
¿Crees que el área de la anterior escalera es infinita?

¿Por qué?

Aporte de información:

Llamaremos **escalera armónica** a la escalera infinita decreciente donde la altura del segundo rectángulo es la mitad de la altura del primero, la altura del tercero es un tercio de la altura del primero, la altura del cuarto es un cuarto de la altura del primero, y así sucesivamente:

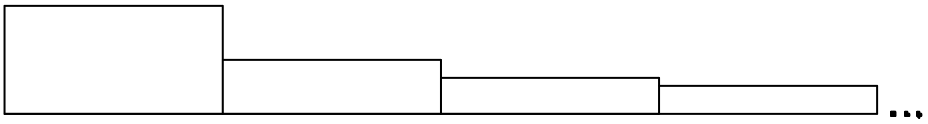
24. Considera la escalera armónica



¿Cuál es la razón de la escalera?

¿Por qué?

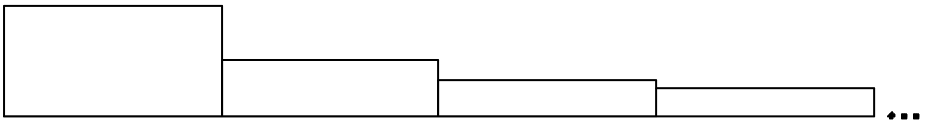
25. Considera la escalera armónica:



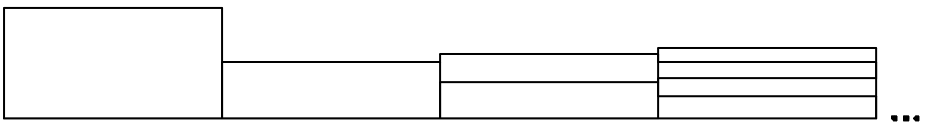
¿Cuál crees que será su área?

¿Por qué?

26. Considera la escalera armónica:



¿Crees que es posible disponer sus rectángulos de la manera como se muestra en la figura: al lado del segundo rectángulo disponemos los dos rectángulos siguientes, luego los cuatro rectángulos que siguen, y así sucesivamente formando una escalera infinita creciente a partir del segundo rectángulo?

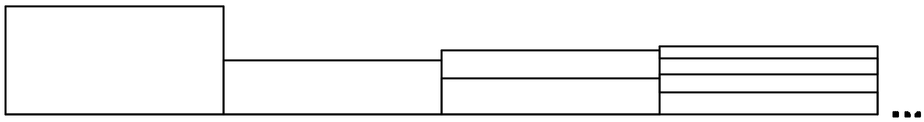


¿Por qué?

Aporte de información:

La escalera armónica se puede volver creciente.

27. Considera la escalera que se forma con los rectángulos de la escalera armónica:



¿Qué podría afirmarse con respecto al área de esta escalera?

28. ¿Crees que cualquier escalera infinita decreciente tiene área?

¿Por qué?

29. ¿Siempre es posible construir una escalera infinita decreciente a partir de un rectángulo?

¿Por qué?

30. ¿Siempre es posible construir un rectángulo a partir de una escalera infinita decreciente?

    ¿Por qué?

31. ¿Cuáles crees que serían las condiciones que se deben cumplir para que una escalera infinita decreciente tenga área?

3.4. Análisis del guión-entrevista

Se describirán las características del guión entrevista para dar una idea global de su intencionalidad. Se especificará el mecanismo a utilizar, analizando con atención la red de relaciones que hay inmersa y los conceptos encubiertos, y finalmente se detallará la manera en que los estudiantes responden cada pregunta, de acuerdo con los resultados obtenidos en su aplicación a una muestra de estudiantes de grado 11º de la Institución Educativa Concejo de Medellín y de estudiantes de Ingeniería y de Licenciatura en Educación Matemática de la U. de A. para luego hipotetizar descriptores de nivel para la noción en cuestión.

3.4.1 Manifestación de la noción tratada en el guión entrevista

Se trata de concebir la noción de límite como la suma de una serie infinita de términos positivos. Para tal efecto, se abordará en forma intuitiva y de manera encubierta con las series geométricas de razón $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y la serie armónica, utilizando el mecanismo que mencionaremos a continuación.

3.4.2 Mecanismo a utilizar en el guión-entrevista

Básicamente el mecanismo lo constituye el material (no necesariamente tangible) con que se motivará al razonamiento sobre la manifestación del límite como una suma o convergencia de una serie.

Para este caso, nuestro mecanismo será dotar la suma de una serie infinita de una componente visual-geométrica en su aspecto bidimensional, calculando el área de una escalera infinita, si existe.

3.4.3 Características generales del guión entrevista

Para el inicio de la entrevista, el entrevistado debe reconocer las ideas y conceptos de figura geométrica plana (rectángulo, cuadrado), forma, tamaño, largo, ancho y la relación parte-todo (mitad de..., tercera parte de..., cuarta parte de..., entre otras).

El guión-entrevista se ha dividido en varios bloques de preguntas, según su intencionalidad, es decir, de acuerdo a la manera de cómo el conjunto de preguntas permiten detectar cada uno de los niveles de razonamiento. A continuación se explica en forma general cada bloque de preguntas.

Primer bloque: Preguntas 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 21 y 24 (10 preguntas). En este primer bloque, el guión de entrevista está diseñado con una doble intención: por un lado, propiciar que el entrevistado responda desde su experiencia cotidiana con el fin de darle confianza, es decir, que responda con naturalidad y en forma espontánea, disminuyendo la presión que ejercen las preguntas acerca del saber matemático; por otro lado, facilitar que el entrevistado razone acerca de la relación conceptual existente entre lo que es superficie, área, razón de una escalera y el área de la misma.

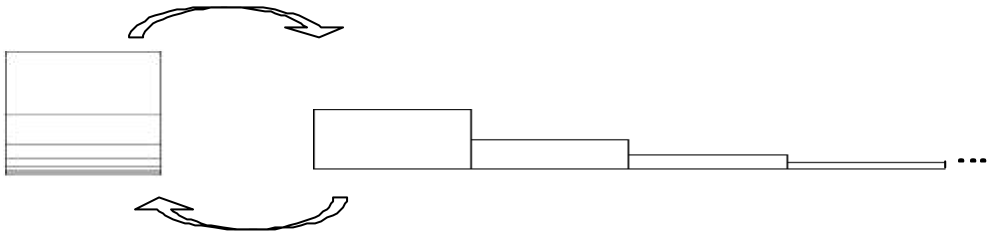
En cuanto a la relación conceptual entre superficie y área, se pretende que el entrevistado asocie la idea de *forma* al concepto de superficie y la idea de *cantidad o tamaño de una superficie* al de área. De esta forma el entrevistado deberá llegar a la conclusión de que dos figuras que representen igual superficie no implica necesariamente que tengan igual área, y viceversa, dos figuras que tengan igual área no representan igual superficie. En estas primeras preguntas los conceptos de figuras congruentes y figuras equivalentes, aunque juegan un papel importante, están encubiertos, sin embargo, es de esperar que en muchos casos el entrevistado aflore muchas conjeturas al respecto, por ejemplo: *"Figuras congruentes implican igual superficie y a su vez igual área, pero igual área no implica igual superficie y a su vez no implica congruencia de figuras".*

En cuanto a la relación entre el concepto de razón de una escalera y el área de una escalera infinita, el entrevistado evocará en su mente ciertas conjeturas al respecto: ¿qué pasa con el área de una escalera infinita si ésta carece de razón?, ¿qué pasa con la razón de una escalera si el área de esta es infinita?

Segundo bloque: Preguntas 5, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 26, 27 y 29 (10 preguntas). Se somete por primera vez al entrevistado a un proceso de razonamiento infinito mediante el uso de la relación parte-todo, dividiendo, sombreando superficies y enunciando el número de formas en que es posible dividir una superficie dada en dos de igual área. Además, la pregunta 8 muestra una secuencia de imágenes que plantean un zoom hacia dentro y hacia afuera. Las preguntas de este bloque pretenden que el entrevistado pase por los tres momentos mencionados en el decálogo (Sección 3.2.8): Creer que sabe la respuesta a la pregunta, darse cuenta que no la sabe (entorpecerlo) y por último, llegar a su comprensión mediante un proceso de razonamiento, en este caso, a través del mecanismo visual-geométrico de suma de áreas y usando el concepto de razón de una escalera.

Algunas preguntas presentan secuencias de rectángulos congruentes: un número finito de veces (proceso de razonamiento finito), luego n veces (proceso de razonamiento finito generalizado), y por último un número infinito de veces (proceso de razonamiento infinito) para que en cada caso determine, si es posible, la suma de sus áreas. Luego, con la ayuda diferentes secuencias infinitas de rectángulos, el entrevistado reconocerá que una escalera se puede obtener a partir de otra, disponiendo de diversas maneras los rectángulos que la componen, reconfirmando con esto su proceso de razonamiento infinito. Este es el momento en el que se definen las escaleras como secuencias de rectángulos adyacentes de igual base, sean crecientes o decrecientes. Luego, se le presenta una escalera infinita creciente (en la cual cada rectángulo tiene el doble de altura de su predecesor) y una escalera infinita decreciente (en la que cada rectángulo tiene la mitad de la altura de su predecesor). Se espera para cada caso que el entrevistado responda que el área de estas escaleras es infinita (haciendo uso del concepto imagen[59] con que ha venido trabajando), no siendo esto verdadero para la última escalera.

En segundo lugar, se le presenta un rectángulo en el cual el entrevistado deberá ejecutar el procedimiento de dividir a la mitad y sombrear una de ellas, repitiendo este procedimiento varias veces con la parte que queda sin sombrear. Él observará que a medida que ejecute la acción de sombrear, irá cubriendo cada vez más el rectángulo original sin rebasarlo. Se espera que relacione esta acción con el área de la escalera infinita decreciente presentada en la pregunta 13, para que conjeture si una suma infinita de áreas puede tener resultado finito (aunque en algunos casos, los entrevistados se refieren a los términos *tender o aproximarse*[60]). Se motiva el interés del entrevistado por conocer cuáles son las condiciones bajo las cuales una escalera infinita tiene área finita.



Tercer bloque: Preguntas 4, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 25 28, 30 y 31 (11 preguntas). Con este último bloque de preguntas se pretende que el entrevistado descubra las condiciones que se deben cumplir para que una escalera infinita tenga área.

Para esto, es necesario que el entrevistado razone sobre cómo fue construida la escalera infinita. Por ejemplo, si el área de cualquier rectángulo tiene o no relación constante con el inmediatamente anterior, caso en el cual se estaría tratando de manera encubierta el concepto de razón entre áreas; o si el área de cada rectángulo tiene relación sólo con el primer rectángulo de la escalera, como es el caso del análogo geométrico de la serie armónica, la cual se definió como la escalera armónica. Estos razonamientos le permitirán hacer relaciones importantes para determinar cuándo una escalera infinita decreciente tiene área y cuándo no (preguntas 19, 22 y 26), es decir, si no es posible disponer sus

[59] TALL, D. O. Y VINNER, S.: "Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limitis and continuity". Educational Studies in Mathematics vol 12 nº 2, pp. 151-169, 1981.
[60] CORNU, B.: "Limits" in "Advanced Mathematical Thinking", cap. 1 0, p. 153 -166. Kluwer Ac. Pub. 1991

rectángulos para formar una escalera infinita creciente, entonces será posible encontrar su área, de lo contrario no la tendrá.

3.4.4 Análisis de las preguntas

En esta sección se explica la intencionalidad de cada una de las preguntas, de tal forma que se logre comprender la red de relaciones que hay allí intrínseca. Será necesario entonces retomar algunos conceptos matemáticos, algunos de ellos ya analizados, que ayudarán al entrevistado a construir su red de relaciones para alcanzar un nivel de razonamiento avanzado.

El eje central del guión entrevista para la noción de límite como suma de una serie infinita es el área de una escalera, y dado que tiene una componente de manipulación aritmético-algebraica a la cual todo entrevistado intenta recurrir, pero que no es el propósito de la entrevista, se hace necesario que las preguntas estén diseñadas de tal forma que el entrevistado llegue al concepto, acudiendo sólo a la componente visual geométrica.

Para la docencia de las Matemáticas es de suma importancia disponer de una imagen intuitiva de un concepto formal no trivial; parece natural entonces plantearse una estrategia docente distinta de la habitual. En el guión entrevista se plantea una visualización geométrica que deberá permitir al entrevistado comprender y asimilar el mecanismo subyacente a la convergencia de una serie, y por tanto, el proceso de razonamiento infinito que conlleva, evitando los obstáculos de comprensión asociados a: la notación simbólica, los cálculos algebraicos, las ideas previas y las imágenes erróneas.

Pregunta 1. Se pretende inspirarle confianza al estudiante, trayendo a su mente sus experiencias cotidianas a partir de la imagen de una escalera, preguntándole por las figuras planas que él puede observar allí. Al parecer, la pregunta no sugiere en ningún momento que se trata de un test relacionado con conceptos matemáticos.

Pregunta 2. El estudiante identificará figuras geométricas planas tales como: un cuadrado, un rectángulo y un triángulo. Esto con el fin de familiarizarlo con las ideas de superficie y área, que se utilizarán a través de toda la entrevista. Inicialmente, se pretende conocer qué es lo que él cree saber acerca de estos conceptos y si evoca alguna diferencia entre ellos, o si por el contrario, manifiesta que los conceptos son equivalentes.

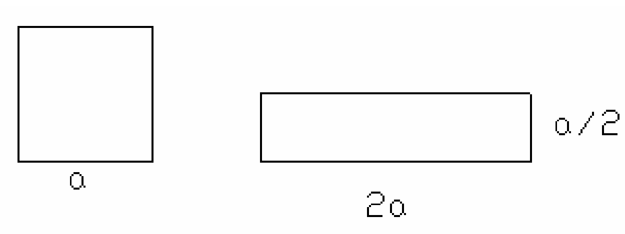
Sabemos que en algunos campos de las ciencias, por ejemplo para la Física, la diferencia entre estos dos conceptos no es importante ni necesaria para el desarrollo y comprensión de sus teorías. Sin embargo, en el campo de las

Matemáticas, específicamente en la Geometría, sí lo es, puesto que ésta exige para la comprensión y desarrollo de sus estructuras, rigurosidad y precisión a la hora de definir cualquiera de sus conceptos. Algunas de las preguntas posteriores le permitirán al entrevistado corroborar su saber o lo inducirán a razonar sobre la diferencia entre estos conceptos.

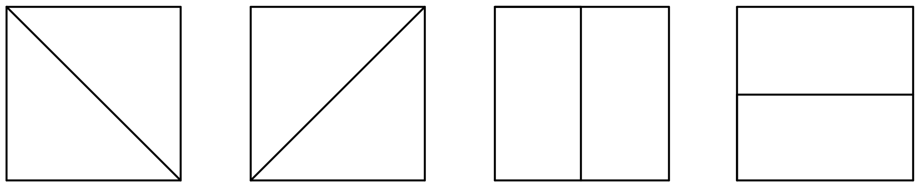
Pregunta 3. Se le presenta un cuadrado y un rectángulo no cuadrado para que manifieste, si estas figuras geométricas pueden encerrar o no la misma cantidad de superficie. Esto con el fin de que comience a asociar la cantidad de superficie encerrada con el *área*, y que ésta última es independiente de la *forma* que tengan las figuras geométricas; de esta manera la *forma* comenzará a estar asociada con la idea de *superficie.*

En caso de que el entrevistado no conteste correctamente, el entrevistador deberá intentar con otras preguntas alternas para que el estudiante establezca la diferencia entre los conceptos mediante el razonamiento, para poder proseguir con la entrevista (de aquí la importancia que la entrevista no puede ser inflexible, es decir, se trata de una entrevista semi-estructurada). La división de un cuadrado en dos superficies para luego "acoplarlas" y formar un rectángulo no cuadrado es una buena alternativa para el entrevistador y así lograr que los entrevistados puedan establecer la diferencia entre área y superficie. Sin embargo, de acuerdo a la fase de experimentación que se ha llevado a cabo, se hace necesario brindar un aporte de información para precisar estos conceptos. Por ejemplo, la mayoría de los entrevistados no percibían ninguna diferencia entre área y superficie. Sin embargo, a medida que se avanzaba en la entrevista, ellos sentían la necesidad de establecer la diferencia.

La experiencia docente ha mostrado que la cotidianidad, al parecer, no exige rigurosidad o formalismos en el uso de algunos conceptos matemáticos, o que se atribuyen propiedades a ciertos conceptos que no las tienen; tal es el caso de los estudiantes, cuando afirman que un cuadrado no es un rectángulo, o cuando asocian el concepto de unidad cuadrada a un cuadrado de lado a y no logran representarla como un rectángulo, por ejemplo, de largo 2a y ancho a/2, entre otros.

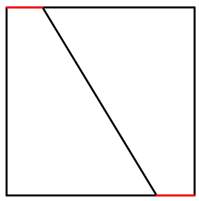


Preguntas 4 y 5. Cuando se le pide al entrevistado que divida una superficie rectangular en dos superficies de igual área, tiene la tendencia a dividirla tranzando las diagonales o uniendo los puntos medios de sus lados opuestos, así:



Estas preguntas abren la posibilidad de que el entrevistado empiece a razonar sobre procesos infinitos, pues algunos pocos contestan que hay infinitas formas de dividirlo en dos superficies congruentes.

Es importante que el entrevistado, desde el punto de vista geométrico, reconozca que el segmento de recta está compuesto por infinitos puntos, lo cual la mayoría de los entrevistados lo hace. De esta forma se pueden trazar infinitas rectas que unen los lados opuestos para dividir el rectángulo presentado en dos superficies de igual área e igual superficie (y por supuesto congruentes).



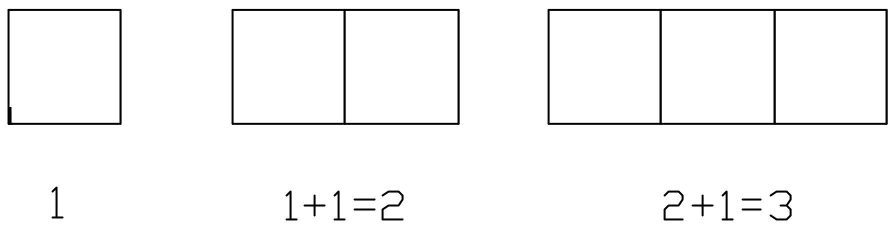
Aunque algunos de los entrevistados responden inicialmente que sólo hay cuatro maneras de realizar la división de una superficie dada en dos superficies congruentes, luego de un proceso de razonamiento geométrico, y motivados por la pregunta 4, comprenden que son infinitas las posibilidades, ya que un segmento geométrico está compuesto de infinitos puntos (componente visual-geométrica). Se espera que el entrevistado conjeture la condición de congruencia que debe cumplirse entre los segmentos en que han quedado divididos los lados opuestos, para obtener la igualdad de áreas, como se muestra en la figura anterior.

Otro concepto encubierto que hay en la pregunta, es el de *figuras planas equivalentes,* las cuales tienen igual área, independiente de su forma (superficie).

Preguntas 6, 7 y 9. Estas preguntas presentan dos escaleras de razón 1, una finita y la otra infinita. Tales escaleras corresponden a las series de términos positivos constantes $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$ y $\sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$, la primera convergente (existe su límite, el cual corresponde al área de la escalera respectiva) y la otra divergente (no tiene límite, luego su escalera respectiva carece de área).

Cuando se le solicita al entrevistado que sume unidades cuadradas iguales, una a una, que irá disponiendo en forma horizontal, un número finito de veces, luego n veces y por último infinitas veces (pasando por el proceso de razonamiento finito, finito generalizado e infinito), el entrevistado tenderá a hacer una asociación de esta secuencia a la secuencia de los números naturales, luego, cuando se le pregunta por la suma total al ejecutar el proceso de adicionarlas una a una, finitas veces, él responderá acertadamente sin necesidad de acudir a ningún cálculo aritmético complejo (sólo haciendo una correspondencia con la sucesión natural). Al preguntarle por una adición infinita de unidades cuadradas, él responderá, sin vacilación, que la suma será infinita.

De acuerdo a lo observado en la fase de experimentación, el entrevistado halla la suma de las primeras unidades cuadradas, acudiendo al concepto de suma parcial en forma implícita. Por ejemplo:



También, se observó que la mayoría de los entrevistados acuden al proceso de subitización[61] cuando se trate de sumar hasta cuatro unidades cuadradas.

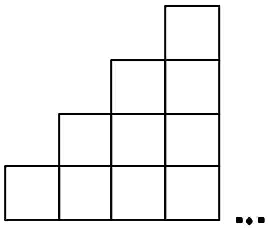
Pregunta 8. La secuencia de fotografías muestra inicialmente un punto en el espacio que representa nuestra galaxia (la vía láctea) a una distancia de 10^{23} metros (10 millones de años luz) de la superficie terrestre, y a medida que se hace

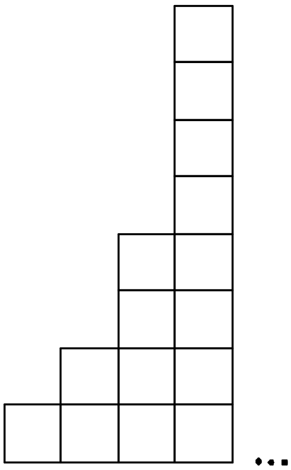
[61] Proceso de subitización. Proviene del adverbio latino "súbito". Es una técnica mediante la cual el ojo reconoce inmediatamente el número de elementos que hay en un conjunto cuando este no sobrepasa los cuatro; sin necesidad de que haya conteo. LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS. RESNICK, Lauren y FORD Wendy. Ediciones Paidós. 1ª. ed. 1990

un acercamiento a la tierra en potencias de 10, se observa el sistema solar, las órbitas descritas por los planetas, la tierra, el hemisferio occidental, el sur-este de la florida, un árbol, una de sus hojas, una de sus células, el núcleo de una célula, una cadena de DNA, un átomo de carbono, un electrón; hasta observar finalmente a 10^{-16} metros (100 attómetros) un quarks.

Con estas fotografías se quiere que el entrevistado razone acerca del infinito potencial y comience a establecer una diferencia entre lo matemáticamente posible y lo materialmente posible, preguntándole si es posible un mayor alejamiento a partir de la primera fotografía o un mayor acercamiento a partir de la última fotografía, es decir, si se puede hacer un zoom hacia adentro o hacia fuera, tanto como se quiera.

Preguntas 10 Y 11. Estas preguntas harán que el entrevistado siga razonando acerca de las sumas infinitas de áreas de figuras planas, en el que nuevamente afirmará sin vacilación que el resultado será infinito, y que dado el hecho de que se tienen inicialmente infinitas unidades cuadradas en la pregunta 10, se pueden hacer otros arreglos geométricos.

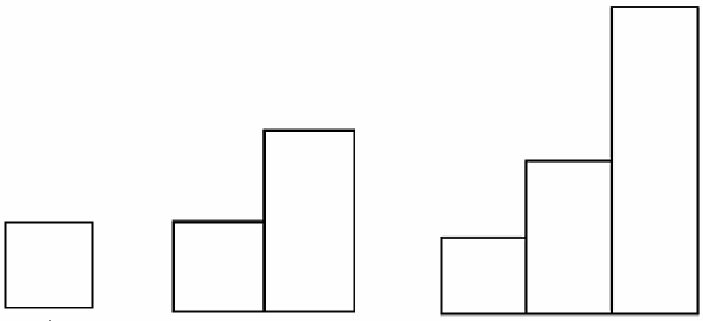




De forma encubierta, se tratan las series de términos positivos: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $\sum_{i=1}^{2} i = 3$, $\sum_{i=1}^{3} i = 6$, etc. y además $\sum_{i=1}^{\infty} i = \infty$, que corresponden a la primera disposición, y las series de términos positivos:

$\sum_{i=1}^{1} 2^{i-1} = 1$, $\sum_{i=1}^{2} 2^{i-1} = 3$, $\sum_{i=1}^{3} 2^{i-1} = 7$, etc. y además $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i-1} = \infty$, que corresponden a la segunda disposición.

En la pregunta 11, el estudiante usualmente comienza a sumar las áreas de los primeros rectángulos en cada disposición, haciendo uso de la estructura visual incorporada ya en su red de relaciones (para unos pocos rectángulos), o acude nuevamente a las sumas parciales, expresando verbalmente cálculos aritméticos simples, aunque se le pregunte por la suma de las áreas de los infinitos rectángulos.



Se le pregunta por la suma de las áreas de los infinitos rectángulos y no por la suma de las áreas de los n-ésimos rectángulos, ya que no se pretende que el entrevistado haga un análisis aritmético o algebraico, como por ejemplo, llegar a calcular las sumas: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = 2^n - 1$ que representan las áreas de los primeros n rectángulos en cada una de las disposiciones. Se aclara que antes ya se había preguntado por la suma de las áreas de finitos rectángulos.

Pregunta 12. Previamente, se le brinda al entrevistado la información relacionada con los conceptos de: escalera, escalera creciente, escalera infinita creciente, escalera decreciente, escalera infinita decreciente y área de una escalera. Tal información lo habilita del mecanismo de las escaleras, para que comience el proceso visual geométrico de reconocer cuando una escalera tiene área y cuando no.

Cabe anotar que aunque se use e forma implícita el concepto de razón de una escalera, el entrevistador le hace explícita esta información en la pregunta 20.

El objetivo de la pregunta es que el entrevistado traiga a su mente un reconocimiento simplemente visual de la relación parte-todo, a través de la presentación de la escalera finita decreciente de cuatro peldaños en la cual cada rectángulo tiene como altura la mitad del anterior (razón $\frac{1}{2}$). Entonces, se le presenta el último peldaño sombreado y se le pregunta cuál es la parte sombreada con relación al primer rectángulo de la escalera. Es necesario aclarar, que para efectos de este reconocimiento visual, no es necesario hacer todo un estudio de los números racionales. Todos los entrevistados deben lograr un reconocimiento visual geométrico de la relación parte-todo para conseguir un nivel avanzado de razonamiento del concepto objeto de estudio.

Pregunta 13. Esta pregunta le indica al entrevistado cómo está construida la escalera finita decreciente: cada rectángulo tiene la mitad de la altura del primero. Pues bien, al hacerle la pregunta de cuál es el área de la escalera, se pretende que el entrevistado recurra al aspecto geométrico, teniendo como referencia la definición de escalera (los rectángulos que la forman tienen igual base) y a la forma de cómo está construida: el área de la escalera corresponde al área del primer rectángulo, más la mitad de su área, más la cuarta parte de su área, más la octava parte de su área. Aunque el objetivo de la pregunta no es que los entrevistados recurran a cálculos aritméticos, algunos de ellos lo hacen, sin embargo, depende en gran medida de cómo el entrevistador haga la pregunta, incitando y motivando para que respondan haciendo uso sólo de la componente visual geométrica.

Pregunta 14. Se presenta una escalera infinita decreciente, en la cual cada rectángulo diferente al primero, tiene la mitad de la altura del inmediatamente anterior. Se le pregunta por el área de cada rectángulo con respecto al inmediatamente anterior. Aunque parece una pregunta con respuesta bastante evidente, ayuda a afianzar el concepto de escalera infinita decreciente y se comienza a usar en forma implícita el concepto de razón de una escalera, que más adelante se le hará explícito. Todo esto con el fin de que caracterice algunas escaleras, según su forma de construcción, para que posteriormente conjeture cuáles de ellas tienen área y cuáles no (análogos de las series convergentes y las series divergentes).

Pregunta 15. Nuevamente se le presenta la escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{2}$, pero ahora, se le pregunta por su área. Se evidencia en los entrevistados la falsa concepción de que procesos infinitos siempre arrojan resultados infinitos; pues, la mayoría de ellos contestaron que el área es infinita debido a que la superficie es infinita (ya que la escalera está compuesta por infinitos rectángulos).

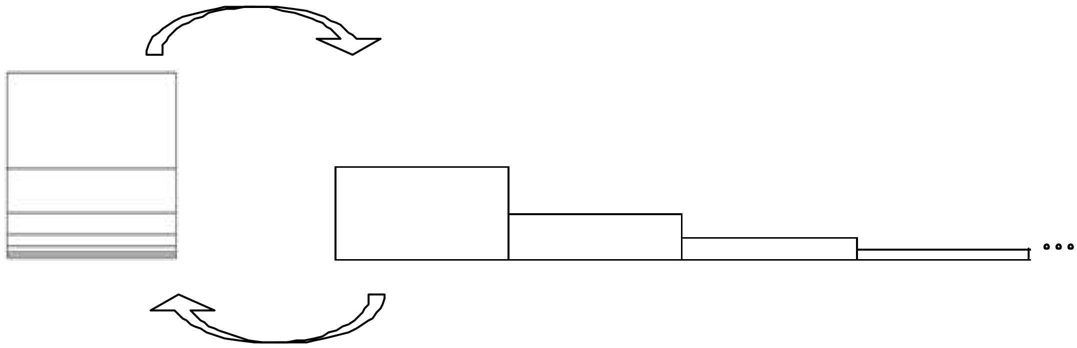
En este caso, el entrevistado pasa por el momento de creer saber la respuesta a lo que se le pregunta, pero, el entrevistador, haciendo otras preguntas, logrará , en términos de Sócrates, entorpecerlo, para así hacerle caer en cuenta de su error.

La escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{2}$ aunque tiene superficie infinita, tiene área finita que es igual a dos veces el área del primer rectángulo.

Pregunta 16. Con esta pregunta el entrevistador actúa por primera vez como pez torpedo, ya que el entrevistado razona acerca de su falsa concepción (problematizándolo) de que la suma de las áreas de un rectángulo, más su mitad, más su cuarta parte, más su octava parte, y así sucesivamente, infinitas veces, es infinita. Visualmente se puede apreciar el proceso infinito de dividir un rectángulo en dos partes iguales, sombrear una de ellas, la parte que queda, dividirla en dos partes iguales y sombrear una de ellas, y así sucesivamente, para llegar a la conclusión de que el área total sombreada es el área total del rectángulo. Se requiere que el entrevistado evoque esta idea, tratando encubiertamente el concepto de límite, pues el límite de las sumas parciales de las áreas sombreadas corresponde a la suma de la serie infinita asociada, es decir, al área total del rectángulo.

Matemáticamente, se trata de visualizar la serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ (para este caso comenzando con el término $\frac{1}{2}$).

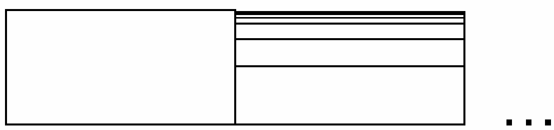
Pregunta 17. El objetivo de la pregunta es lograr que el entrevistado visualice que un rectángulo dividido a su vez en varios rectángulos (a la mitad, luego la superficie que queda a la mitad y así sucesivamente) se puede representar como una escalera infinita decreciente y viceversa; esto lo llevará una vez más a consolidar su red de relaciones y comprender que ambas superficies tienen área finita. Obsérvese que dado el rectángulo es fácil visualizar tal conjetura, sin embargo, dada la escalera infinita decreciente, le es más difícil decidir si ella tiene área o no. Algunos entrevistados empiezan a preguntarse si, ¿dada cualquier escalera infinita decreciente, ésta se podrá disponer en un rectángulo de área finita?



Pregunta 18. Recordemos que una de las características de una entrevista socrática es que su guión contenga preguntas de confirmación (ver sección 3.2.6), Una vez el entrevistador haya problematizado al entrevistado, pero también haya dado elementos para sacarlo de esa problematización, creando una ruptura en sus falsas concepciones. Esta pregunta nuevamente indaga acerca del área de la escalera de razón $\frac{1}{2}$, (la misma pregunta 15), pero ahora se espera que el entrevistador no dude en responder correctamente.

Pregunta 19. Al aplicar la entrevista se observa que la mayoría de los entrevistados reconocen que una escalera infinita creciente no tiene área, ya que sus rectángulos cada vez serán más grandes y además hay infinitos de ellos. A esta conjetura, llega inicialmente de manera visual geométrica. Es por esto que se les pregunta si la escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{2}$ se puede disponer en forma de escalera infinita creciente, a lo cual deberán responder que no es posible, ya que la primera tiene área, pero la segunda no. Pero… ¿Ninguna escalera infinita decreciente se podrá disponer en forma de escalera infinita creciente?

Pregunta 20. Esta pregunta le confirma al entrevistado que la escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{2}$ no se puede convertir en una escalera infinita creciente, ya que al disponer todos sus rectángulos, a partir del segundo, tal como lo muestra la figura, no sobrepasarán la altura del primer rectángulo. Además, también se visualiza que el área de esta disposición infinita es dos veces el área del primer rectángulo.



Pregunta 21. Previa a esta pregunta, el entrevistador hace un aporte de información acerca del concepto de razón de una escalera. Ésta pregunta ilustra tal información al presentarle una escalera de razón $\frac{1}{3}$.

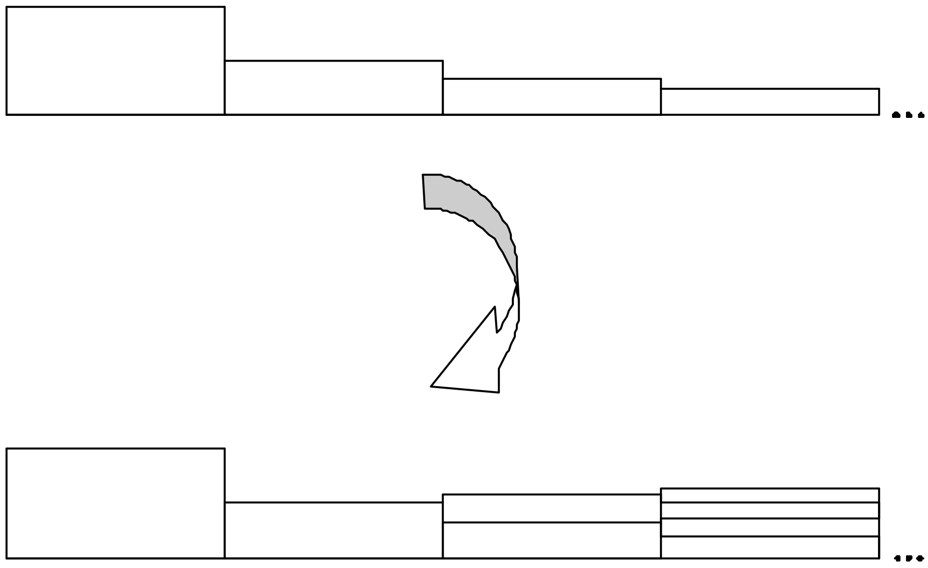
Pregunta 22. Se le pregunta al entrevistado si la escalera infinita decreciente de razón $\frac{1}{3}$ se puede disponer en forma de escalera infinita creciente. El entrevistado deberá observar que la razón de esta escalera es menor que la razón de la escalera con la que ha venido trabajando y por lo tanto, tampoco será posible convertirla en escalera infinita creciente. Esta pregunta es de confirmación.

Pregunta 23. Se pretende que el entrevistado decida si la escalera de razón $\frac{1}{3}$ tiene área o no (se asumirá que una escalera que no tiene área es una escalera de área infinita). En este caso, el entrevistado razona más acerca de su respuesta y por lo tanto le toma mayor tiempo. Se quiere que conjeture el siguiente hecho: *una escalera infinita decreciente tiene área cuando no se pueda convertir en escalera infinita creciente".*

Pregunta 24. Previamente, se brinda la información acerca de lo que es una escalera armónica: *una escalera infinita decreciente en la cual el segundo rectángulo tiene como altura la mitad del primero, el tercero tiene como altura la tercera parte del primero, el cuarto tiene como altura la cuarta parte del primero y así sucesivamente.* El entrevistado deberá observar que cada uno de los rectángulos de esta escalera está formado con respecto al área del primer rectángulo y no con respecto al área de su inmediatamente anterior. De acuerdo a esta definición, el entrevistado deduce que la escalera armónica carece de razón; él, además, se enfrenta a los siguientes interrogantes: ¿Tendrá alguna relación la razón de una escalera con su área?, ¿tendrá alguna relación la razón de una escalera con el hecho de no poderse volver creciente?

Pregunta 25. Se quiere ahora que el entrevistado decida si la escalera armónica tiene área o no. Algunos entrevistados persisten en el concepto-imagen de que todas las escaleras infinitas decrecientes tienen área, otros comienzan a establecer relaciones entre el área de una escalera, su razón y si es posible disponerla o no en forma de escalera infinita creciente. Como la escalera armónica no tiene razón, algunos entrevistados responden que no tiene área, y aunque este no es un argumento válido, la entrevista estará orientada a que el entrevistado asocie el área de una escalera infinita decreciente con el hecho de poderse o no volver creciente.

Pregunta 26. En esta etapa de la entrevista, se le muestra al entrevistado una escalera infinita creciente a partir del segundo rectángulo y se le pregunta si ella puede provenir de la escalera armónica.



Antes de la pregunta 27, se le confirma, mediante un aporte de información, que la escalera armónica si se puede convertir en una escalera infinita creciente a partir del segundo rectángulo como lo ilustra la figura anterior.

Pregunta 27. Se espera que el entrevistado conteste sin lugar a dudas que la escalera armónica no tiene área, teniendo en cuenta el aporte de información.

Pregunta 28, 29, 30 y 31. El objetivo de estas cuatro últimas preguntas es evidenciar el alcance de la integración que debe haber alcanzado el entrevistado en su red de relaciones, para poder inferir las siguientes implicaciones lógicas, sobre las cuales se ha razonado durante el discurrir de la entrevista:

- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón, tiene área

- Toda escalera infinita decreciente que tenga razón no es posible disponerla de manera creciente

- Toda escalera infinita que tenga área no es posible disponerla de manera creciente.

Es claro que el concepto de límite se encuentra inmerso en el concepto geométrico de área, en la medida en que el entrevistado comprenda que una escalera infinita decreciente puede tener como área el límite de las sumas parciales de los rectángulos que la conforman.

Algunas aclaraciones e implicaciones contrarrecíprocas de las anteriores implicaciones lógicas son:

- Si una escalera infinita decreciente no tiene área, entonces no tiene razón

- Si una escalera infinita decreciente es posible disponerla en forma de escalera infinita creciente, entonces no tiene razón

- Si una escalera infinita decreciente es posible disponerla en forma de escalera infinita creciente, entonces no tiene área

3.5. Niveles y descriptores

En concordancia con el modelo de van Hiele y fruto del trabajo realizado, se enunciarán los descriptores que corresponden a los niveles de razonamiento 0, 1, 2 y 3 en cuanto al razonamiento acerca de la noción de suma de una serie de términos positivos, vía área de figuras planas. Se aclara que el presente estudio no tiene como propósito enunciar los descriptores del nivel 4; el mismo van Hiele afirma que este nivel es difícil de detectar y sólo es de interés teórico (sección 1.5.3.).

Nivel 0. (Predescriptivo)

0.1 El mero reconocimiento de los objetos de estudio (superficie, área, relación parte-todo) constituye lo que se considera el nivel 0 o predescriptivo.

Nivel I. (Visual)

1.1 Calcula el área de un rectángulo. (El entrevistado reconoce que el área de un rectángulo está asociada a la cantidad de superficie)

1.2 Afirma con total seguridad que cualquier escalera finita tiene área

1.3 Aplica en forma visual la relación parte-todo a figuras geométricas tales como rectángulos y escaleras

1.4 Encuentra la razón de una escalera, si la tiene

Descriptor de separación del nivel II

1.5 No reconoce el infinito potencial como proceso.

Nivel II (De análisis)

2.1 Reconoce el infinito potencial como proceso, mediante situaciones concretas relacionadas con el concepto de área

2.2 Tiene claro que un rectángulo es infinitamente divisible

2.3 Reconoce que una superficie rectangular se puede representar como una escalera infinita decreciente. Empieza a percibir el dinamismo del concepto

2.4 Realiza procesos de aproximación. Consigue acumulaciones parciales de áreas de escaleras

Descriptor de separación del nivel III

2.5 Manifiesta la necesidad de saber bajo qué condiciones una escalera infinita tiene área.

Nivel III (De clasificación o relación)

3.1 Dada una escalera infinita decreciente, intenta disponerla de manera creciente para establecer si es posible calcular su área

3.2 Proporciona y aplica un método adecuado para determinar cuando una escalera infinita decreciente tiene área

3.3 Afirma sin demasiadas dudas que:

- Toda escalera infinita decreciente que tiene razón, tiene área

- Toda escalera infinita decreciente que tiene razón no es posible disponerla de manera creciente

- Toda escalera infinita que tiene área no es posible disponerla de manera creciente.

3.6 Justificación sobre la correspondencia de los descriptores con el modelo

Debido a que este estudio se encuentra enmarcado en el modelo de van Hiele, es necesario que los descriptores de los niveles de razonamiento cumplan con las propiedades que identifican los niveles (sección 1.5.5).

Propiedad 1 (secuenciabilidad fija). *Un estudiante no puede estar en un nivel n sin haber superado el nivel n-1.* Los cuatro niveles son grados de perfeccionamiento en el tipo de razonamiento matemático.

Nivel 0
El razonamiento matemático se centra en el reconocimiento los conceptos de superficie, área y relación parte-todo.

Nivel I
El razonamiento matemático se centra en determinar el área de una escalera finita, haciendo uso de la relación parte-todo en forma visual y en encontrar la razón de una escalera, si la tiene.

Nivel II
El razonamiento matemático se centra en un proceso infinito, el cual se hace plausible en el momento en el que el entrevistado acepta, que un rectángulo puede ser infinitamente dividido y puede ser representado mediante una escalera infinita decreciente

Nivel III
En este nivel su razonamiento se centra en la búsqueda de un de un método que permita determinar bajo qué circunstancias una escalera infinita tiene área o no. Esto supone el mayor grado de perfeccionamiento del razonamiento, que se intenta detectar mediante este estudio.

Propiedad 2 (Adyacencia). *El objeto de percepción del nivel n-l se convierte en el objeto de pensamiento de nivel n.*

Nivel 0
El objeto de percepción del nivel 0 son figuras geométricas como los rectángulos, observando las propiedades de superficie y área.

Nivel I
El objeto de percepción del nivel 0 se convierte en el objeto de pensamiento del nivel 1, esto corresponde al momento en que los rectángulos se usan para construir las escaleras y se pregunta por su área.

Nivel II
El objeto de percepción del nivel 1 *área de una escalera* se convierten en objeto del pensamiento del nivel II; al mostrar como, a partir de la división infinita de una superficie rectangular, se puede construir una escalera infinita decreciente.

Nivel III
El objeto de percepción del nivel II *el área de una escalera infinita decreciente se* convierte en objeto de pensamiento del nivel III, cuando se hace necesario hacer explícitas las condiciones que debe tener una escalera infinita decreciente para que posea área.

Propiedad 3 (Distinción). *El nivel n requiere una reorganización o reinterpretación del conocimiento adquirido al nivel n-1; esto es, la percepción de una nueva estructura.*

Nivel 0
Reconocimiento de la diferencia entre los conceptos de superficie y área de un rectángulo.

Nivel I
Se obtiene la nueva estructura de que una escalera puede disponerse de diferentes maneras, conservando su área.

Nivel II

Reinterpreta la idea de área de una escalera infinita decreciente, asociándola al área de un rectángulo, mediante el proceso de división infinita.

Nivel III
Se relacionan las ideas de razón de una escalera y disposición de una escalera infinita decreciente en infinita creciente, para modificar su estructura en cuanto al reconocimiento de las condiciones bajo las cuales una escalera infinita decreciente tiene área.

Propiedad 4 (Separación). *Dos personas que razonen en diferentes niveles no podrán entenderse, en lo que se refiere al objeto de su razonamiento.*

Entre Nivel 0 y Nivel I.

En el nivel 0 se piensa en los conceptos de área y superficie sin ninguna distinción entre ellos, luego, no podrá entenderse con alguien situado en el nivel I, cuyo objeto de estudio es el área de una escalera finita, la cual puede estar representada por diferentes superficies.

Entre Nivel I y Nivel II.

En el nivel I el estudiante reconoce que una escalera finita tiene área, pero se le dificulta pensar en que una escalera infinita pude disponerse de diferentes maneras, pues no reconoce el infinito potencial como proceso.

Entre Nivel II y Nivel III.

En el nivel II el entrevistado reconoce que una escalera infinita decreciente puede disponerse de diferentes maneras y que una superficie rectangular se puede disponer en forma de escalera infinita decreciente, pues reconoce el infinito potencial como proceso y el dinamismo del concepto. Sin embargo, aunque reconoce que algunas escaleras infinitas decrecientes tienen área, no es capaz de establecer con claridad las condiciones bajo las cuales se da este hecho.

Propiedad 5: (Cada nivel tiene su lenguaje). *Cada nivel tiene un lenguaje específico.*

Van Hiele dice que existe un lenguaje primitivo asociado a cada nivel y que si el estudiante no aprende el lenguaje que corresponde al nivel, no puede pasar al nivel siguiente, es decir, el nivel n tiene un lenguaje más refinado que el nivel *n-1.*

Nivel 0.

El entrevistado usa con propiedad los conceptos de área y superficie. Emplea en forma correcta las expresiones *la mitad de, la tercera parte de, la cuarta parte de, la quinta parte de,* etcétera.

Nivel I.

Usa los términos de *escalera, escalera finita, escalera infinita, escalera infinita creciente y escalera infinita decreciente* para referirse a secuencias de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que tengan igual base y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. También usa el concepto de *razón de una escalera,* para referirse al cociente entre las áreas de un rectángulo y su inmediatamente anterior. El uso de este lenguaje, propio del nivel 1, hace que conceptos iniciales que eran objeto de estudio en niveles anteriores, se usen de forma adecuada en este nuevo nivel para la comprensión de nuevos conceptos, de forma tal que el entrevistado pueda razonar sobre ellos de forma eficiente.

Nivel II.

El término *infinito,* como proceso, es una expresión propia de este nivel. Se usa además el término *área de una escalera infinita decreciente.*

Nivel III.

El entrevistado se mueve en un lenguaje de implicaciones lógicas que describen las condiciones bajo las cuales una escalera infinita tiene área. En tales implicaciones lógicas se asocian los conceptos de *razón de una escalera, escalera infinita decreciente y escalera infinita creciente.*

Propiedad 6 (Consecución). *El progreso de un nivel al siguiente se produce de forma gradual.*

Los descriptores de nivel confirman esta propiedad, ya que ciertos estudiantes presentan características que definen un nivel, pero carecen de otras, luego están en un proceso de transición entre niveles.

Nivel 0.

Algunos de los entrevistados, además de reconocer la distinción entre los conceptos de superficie y área, la explicitan con claridad si se les pide que lo hagan. Otros, en cambio, aunque reconozcan la distinción, se les dificulta verbalizarla.

Nivel I.

Todos los entrevistados calculan el área de una escalera finita, sin embargo, aunque la entrevista motiva a dar respuestas, haciendo uso de la relación parte-todo en forma visual, algunos les cuesta desligarse de los procedimientos aritméticos.

Nivel II.

Generalmente se encuentran estudiantes que utilizan el proceso de división infinita de un rectángulo en otros rectángulos, pero se les dificulta la comprensión de que un rectángulo se puede dividir en dos partes de infinitas maneras.

Nivel III.

Todos los entrevistados en este nivel reconocen las implicaciones lógicas que describen las condiciones bajo las cuales una escalera infinita tiene área. Sin embargo, algunos se les dificulta identificar la diferencia entre las condiciones suficientes y las condiciones necesarias de cada implicación.

CAPÍTULO 4.

TRATAMIENTO ESTADÍSTICO: TEST "ÁREAS DE ESCALERAS"

4.1 Descripción y estructura del test escrito

El estudio pretende determinar en un estudiante su nivel de razonamiento frente a un concepto matemático mediante la aplicación de la entrevista de carácter socrático, dadas las ventajas expuestas en el capítulo 1 (sección 1.6) y capítulo 3 (sección 3.2). Sin embargo, existen dificultades, entre ellas, el diálogo individual hace que se requiera un tiempo considerable, imposibilitando su aplicación a un gran número de individuos, lo cual es pertinente para la generalización de los resultados; y, de otro lado, está la subjetividad que pueda tener el entrevistador al evaluar las respuestas obtenidas, dado el carácter semi-estructurado de la entrevista.

Para validar los resultados obtenidos, producto de la aplicación de la entrevista de carácter socrático, se ha elegido un grupo piloto de 107 individuos para lo cual se diseñó un test escrito, denominado **ÁREAS DE ESCALERAS** y que consta de 31 preguntas, cada una con cinco opciones de respuesta, cuatro de ellas escogidas entre las más representativas y que son resultado de la aplicación de la entrevista, y una quinta opción abierta, para que puedan contestar según su propia opinión.

Se resalta el título del test, ya que este tiene el propósito de que el estudiante se despoje de ideas preconcebidas o que se predisponga a la presentación de un examen de curso, ya que a simple vista parece no tener asociado ninguna idea con el concepto de límite estudiado por los estudiantes.

Se entrega a cada estudiante un cuadernillo con las preguntas y las hojas de respuestas; en él aparecen las siguientes instrucciones:

"Cada pregunta te ofrece **cinco** opciones de respuesta (a, b, c, d y e), de las cuales deberás escoger **sólo una.** No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

En todas las preguntas, la quinta opción (marcada con la letra e) es: *Ninguna de las anteriores.* Debes seleccionar esta opción cuando no entiendas el enunciado de la pregunta o cuando te parezca que las otras opciones de respuesta (a, b, c y d) no se ajustan a lo que crees que sería correcto. En este caso debes escribir la respuesta que consideres conveniente en el cuadernillo adicional, además de marcar la opción "e" en la hoja de respuestas.

Es posible que en algunas preguntas te parezca que hay varias opciones de respuesta correctas. Escoge aquella opción de respuesta que te parezca más precisa desde el punto de vista matemático, de acuerdo con lo que piensas acerca del tema".

Se les hace notar que el test es anónimo ya que sólo se piden las respuestas y una información adicional que permite clasificar al estudiante de acuerdo a la institución a la que pertenece, su grado de escolaridad, su programa, su edad y su sexo. (En el anexo 1 se muestra la hoja de respuestas que se empleo para obtener dicha clasificación)

El test está diseñado en tres bloques de preguntas que permitirán detectar en que nivel de razonamiento se encuentra un estudiante, pero las preguntas correspondientes a cada bloque no están en secuencia numérica, pues la secuencia obedece a la estrecha relación en el razonamiento de una pregunta con su anterior o su posterior, en otras palabras, las preguntas del test están claramente diferenciadas, pero estrechamente relacionadas. Anteriormente se había descrito la red de relaciones correspondiente a cada bloque de preguntas. Un resumen de esta descripción es el siguiente:

Primer bloque: Preguntas 1, 2, 3, 6, 7, 12, 13, 14, 21 y 24 (10 preguntas). Las preguntas de este bloque le facilitan al entrevistado razonar acerca de la relación conceptual existente entre: lo que es la superficie y el área y haciendo uso de la relación parte-todo se acerca a un proceso de razonamiento infinito.

Segundo bloque: Preguntas 5, 8, 9, 10, 11, 16, 17, 26, 27 y 29 (10 preguntas). Las preguntas de este bloque pretenden que el entrevistado pase por los tres momentos mencionados en el decálogo: Creer saber la respuesta a la pregunta, luego, a través de las mismas preguntas darse cuenta que no sabe (problematizándolo) y por último, al estar en contradicción consigo mismo, se plantea la necesidad de llegar a la verdad, es decir, a la comprensión del concepto a través del mecanismo visual-geométrico de suma de áreas de rectángulos y usando el concepto de razón de una escalera. En estudios desarrollados, hasta el presente, en los que se ha ampliado la metodología del diálogo socrático, se ha observado que el entrevistado debe pasar necesariamente por estos tres momentos, y en nuestro estudio, lo hemos corroborado.

Tercer bloque: Preguntas 4, 15, 18, 19, 20, 22, 23, 25 28, 30 y 31 (11 preguntas). Con este último bloque de preguntas se pretende que el entrevistado descubra las condiciones que se deben cumplir para que una escalera infinita tenga área.

En el anexo 2 se presenta el test escrito que finalmente se obtuvo, después de haber sido rediseñado en varias ocasiones.

4.2 Análisis estadístico

Aunque el objetivo del estudio no es hacer un tratamiento estadístico exhaustivo de los resultados que se pueden obtener mediante la aplicación masiva del test, que se obtuvo producto de las entrevistas, se considera pertinente poner por escrito algunas consideraciones importantes al respecto, que validan el trabajo de investigación. Se persigue con el tratamiento estadístico corroborar las conclusiones obtenidas a través de la entrevista socrática. Esto implica evidentemente una selección de instrumentos estadísticos adecuados. Este trabajo estadístico contiene los siguientes pasos:

1. Elección de un grupo piloto de 107 estudiantes.
2. Comprobación, a través de los instrumentos estadísticos correspondientes, de la existencia de unos grupos de respuestas (patrones) suficientemente uniformes de modo que se pueda identificar con los niveles de razonamiento.
3. Diseño de un procedimiento de corrección o de valoración de la prueba, de modo que se automatice la clasificación de los estudiantes de acuerdo con su nivel de razonamiento en el concepto a trabajar.

El proceso se inicia con la aplicación del algoritmo K-medias, cuya finalidad es precisamente la determinación de la existencia de grupos, que en este estudio son tres. La tarea dispendiosa y delicada es confirmar que cada grupo representa un nivel de razonamiento. Luego, con un análisis discriminante se hace una comprobación de la robustez de los resultados obtenidos. Posteriormente, se hace una descripción tanto del algoritmo k-medias como del análisis discriminante.

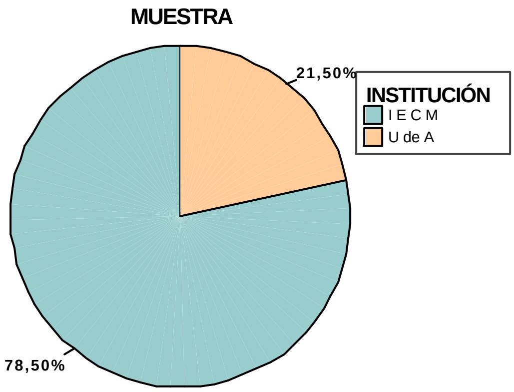
4.2.1 Recolección y codificación de los datos

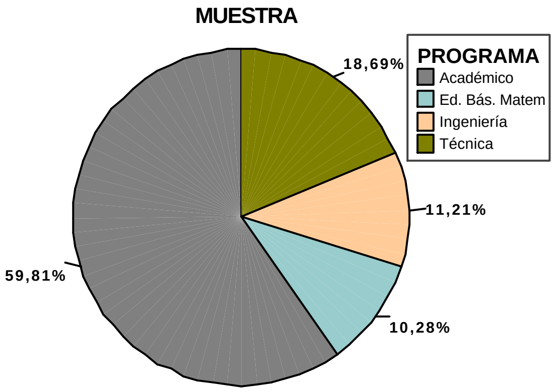
A continuación se presenta un cuadro y una gráfica que resumen la identificación y las características.

Características del grupo piloto

<table>
<tr><th>GRUPO</th><th>SUBGRUPOS</th><th>TOTALES SUBGRUPO</th><th>TOTALES GRUPO</th><th>TOTAL GRUPO PILOTO</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Universitarios Universidad de Antioquia</td><td>Facultad de Ingenierías. 1er. año (Edades entre 17 y 29 años)</td><td>12</td><td rowspan="2">23</td><td rowspan="4">107</td></tr>
<tr><td>Facultad de Educación. Lic. en Educ. Básica, énfasis en Matemáticas. 2º año (Edades entre 19 y 36 años)</td><td>11</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Último año de bachillerato Institución Educativa Concejo de Medellín</td><td>Media Técnica (Edades entre 15 y 18 años)</td><td>20</td><td rowspan="2">84</td></tr>
<tr><td>Media Académica (Edades entre 15 y 18 años)</td><td>64</td></tr>
</table>

Distribución del grupo piloto por Institución y por Programas





Dado que se debe realizar un análisis multivariado apropiado y que los datos obtenidos son de tipo cualitativo, se elaboró un patrón ideal de respuestas que corresponde a la mejor opción en cada pregunta, es decir, en una misma pregunta el estudiante, quizás pueda encontrar varias opciones que pueden parecer correctas, pero sólo una lo es, dado que se persigue una exigencia en el razonamiento sobre el concepto indagado.

La tabla siguiente muestra las respuestas correctas que corresponden a cada pregunta:

PREGUNTA	MEJOR OPCIÓN DE RESPUESTA	PREGUNTA	MEJOR OPCIÓN DE RESPUESTA
P 1	a	P 16	d
P 2	b	P 17	c
P 3	c	P 18	d
P 4	b	P 19	c
P 5	d	P 20	d
P 6	d	P 21	a

P 7	d	P 22	c
P 8	d	P 23	b
P 9	d	P 24	c
P 10	c	P 25	c
P 11	d	P 26	b
P 12	b	P 27	c
P 13	d	P 28	b
P 14	b	P 29	c
P 15	d	P 30	b
		P 31	c

Luego, se codificaron todas las respuestas obtenidas por el estudiante asignando el valor “1” en el caso de que su respuesta sea correcta y el valor de “0” en caso contrario. De esta manera, se obtuvo una matriz de datos de tipo cuantitativo con 31 variables que tomaban los valores de “0” ó “1”.

4.2.2 Análisis de clusters y descripción del algoritmo de k-medias

El análisis de clusters consiste en una técnica que se utilizan para clasificar los objetos o casos en grupos relativamente homogéneos llamados clusters o conglomerados. Los objetos en cada grupo tienden a ser similares entre sí y diferentes a los objetos en otros grupos. Este análisis se conoce también como análisis de clasificación o taxonomía numérica.

Tanto el análisis de clusters como el discriminante se ocupan de la clasificación. Sin embargo, el análisis discriminante requiere del conocimiento previo de participación en el grupo de cada objeto o caso que se incluye, a fin de desarrollar la regla de clasificación. Por el contrario, en el análisis de cluster no hay información a priori acerca de la participación en el grupo de ninguno de los objetos. Los datos sugieren los grupos y no se definen previamente.

La mayor parte de estos métodos son procedimientos relativamente sencillos, basados en algoritmos. Los estadísticos y conceptos siguientes están relacionados con el análisis de cluster:

Programa de aglomeración. Ofrece información sobre los objetos o casos que se combinan en cada etapa de un proceso de agrupación jerárquica.
Centroide de agrupamiento. El centroide de agrupamiento son los valores medios de las variables para todos los casos u objetos de un grupo particular.
Centros de agrupamiento. Son los puntos de partida iniciales en la agrupación no jerárquica. Los grupos se construyen alrededor de estos centros o semillas.
Participación en el grupo. Indica el grupo al que pertenece cada objeto o caso.
Distancias entre los centros de los grupos. Indican cuán separados están los pares individuales de grupos. Los grupos muy separados son distintos y, por tanto, deseables.

Hay dos grupos de algoritmos de clusters: los **jerárquicos,** que van creando clusters de pequeño tamaño, incluso inicialmente con un solo componente, y los van fusionando hasta obtener clusters de tamaño superior; diferentes versiones de algoritmos se diferencian por las reglas que usan para unir clusters o separarlos; el resultado final es un árbol de clusters denominado dendrograma, que muestra como los clusters se relacionan unos con otros. El clusters jerárquico se ha usado, por ejemplo, para clasificación de documentos, o incluso para clasificación en biocomputación. Por el contrario, el clusters no jerárquico calcula los clusters directamente; los algoritmos más populares, tales como el k-medias y el ISODATA son de este tipo.

El k-medias, también llamado a veces c-medias, funciona de la forma siguiente: se escoge inicialmente un número de clusters (se puede haber hallado ese número usando alguna técnica de análisis exploratorio, o, la mayor parte de las veces, a criterio del experto). Se escogen aleatoriamente el mismo número de vectores de referencia, usando alguna provisión adicional, por ejemplo, una distancia mínima entre ellos; a continuación, se asigna cada elemento de la muestra de entrada al vector de referencia más cercano. Una vez asignados todos los vectores de la muestra, se actualizan los vectores de referencia como la media de todos los vectores en un cluster. El algoritmo se repite hasta que en dos iteraciones no varíen los vectores de referencia, es decir, la distancia media de los vectores de la muestra a los vectores de referencia más cercanos o ganadores.

El algoritmo de k-medias viene incluido en el programa estadístico SPSS el cual fue desarrollado en la Universidad de Chicago y es uno de los más difundidos. La versión 12.0 es la utilizada para el análisis de los datos de esta investigación.

4.2.3 Aplicación del algoritmo al trabajo de investigación

El propósito es confirmar que en el conjunto de datos del grupo piloto se pueden distinguir tres grupos diferenciados, que están en correspondencia con los niveles de razonamiento I, II y III del modelo de Van-Hiele.

Para determinar los centros iniciales, con los cuales el algoritmo comienza, se adopta un criterio de pre-clasificación, acorde con los resultados experimentales arrojados por la aplicación de la entrevista socrática y se le llamó criterio A, el cual se describe en la siguiente tabla:

CRITERIO	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3
NIVEL 1	≥ 4	≤ 3	≤ 5
NIVEL 2	≥ 5	≥ 4	≤ 2
NIVEL 3	≥ 7	≥ 4	≥ 3

De esta manera, se logran clasificar 96 de los 107 estudiantes así: 33 de nivel I, 45 de nivel II y 18 de nivel III. Se calcula las medias de "aciertos" (coincidencias con el patrón ideal de respuestas), es decir, los porcentajes de aciertos en cada una de las preguntas y para cada uno de los tres bloques de preguntas asignadas a los niveles, para comenzar aplicar el algoritmo de k-medias.

En cada bloque de preguntas, según la tabla anterior, se exige un mínimo de respuestas correctas, de acuerdo al patrón diseñado para clasificar los estudiantes en cada nivel. Sin embargo, se hace notar que hay preguntas entorpecedoras y preguntas confirmatorias (preguntas que están directamente relacionadas con los descriptores de nivel) que, en la entrevista socrática, discriminan la asignación de los estudiantes en un nivel de razonamiento. La particularidad de las preguntas confirmatorias radica en el hecho de que se hacen después de haber propiciado un razonamiento sobre el concepto y, por tal razón, se les asignará una media de acierto mayor que la media asignada a las otras preguntas.

En la aplicación del algoritmo se trabaja sin la corrección de medias y la semilla de estas medias son asignadas de acuerdo al criterio del experto. La siguiente tabla muestra las medias asignadas en cada pregunta para cada nivel, de acuerdo al test aplicado.

Número pregunta	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Número pregunta	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3
P1	0,6061	0,7778	0,7778	P16	0,4242	0,4444	0,2778
P2	0,3333	0,6667	0,8333	P17	0,2121	0,4889	0,3333
P3	0,6364	0,6889	0,6667	P18	0,1818	0,0889	0,2778
P4	0,2424	0,1778	0,5556	P19	0,3030	0,2222	0,6667
P5	0,2121	0,5333	0,6667	P20	0,2121	0,1778	0,4444
P6	0,5152	0,7111	0,9444	P21	0,3939	0,5778	0,7778
P7	0,4848	0,6000	0,8333	P22	0,3030	0,3556	0,7222
P8	0,2121	0,7111	0,5000	P23	0,1515	0,0444	0,1667
P9	0,3636	0,7333	0,6111	P24	0,5152	0,5333	0,7222
P10	0,3030	0,5556	0,8333	P25	0,3333	0,3333	0,6111
P11	0,3030	0,5556	0,8333	P26	0,3030	0,5111	0,5556
P12	0,5152	0,4667	0,7222	P27	0,3333	0,6222	0,6667
P13	0,7273	0,6667	0,9444	P28	0,1212	0,0889	0,1111
P14	0,6364	0,8000	1,0000	P29	0,3939	0,7111	0,7778
P15	0,2424	0,1333	0,3889	P30	0,3030	0,1556	0,2222
				P31	0,3636	0,1778	0,2778

Se utiliza el método de k-medias con la opción iterar y clasificar, se pide que agrupe los datos en tres conglomerados y que tome como centros iniciales los de la tabla anterior. El algoritmo alcanza la solución en cinco iteraciones (el programa indica que la distancia máxima en la que ha cambiado cada centro en esta iteración es de 0,000, es decir, estamos en el caso en que dos iteraciones sucesivas provocan la misma partición) y proporciona la siguiente clasificación:

Number of Cases in each Cluster

Cluster	1	37,000
	2	42,000
	3	28,000
Valid		107,000
Missing		,000

Asociando cada uno de los conglomerados con el correspondiente nivel de van-Hiele, obtenemos que en nuestro grupo piloto hay 37 estudiantes en nivel I, 42 en nivel II y 28 en nivel III, para un total de 107 estudiantes clasificados. El programa también proporciona las medias finales obtenidas mediante el algoritmo:

Número pregunta	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**	**Número pregunta**	**Nivel 1**	**Nivel 2**	**Nivel 3**
P1	0,6250	0,6000	0,8846	P16	0,3929	0,5200	0,3462
P2	0,4464	0,4800	0,8077	P17	0,3750	0,4000	0,2308
P3	0,5893	0,8000	0,6538	P18	0,1607	0,2000	0,1154
P4	0,2857	0,3200	0,2308	P19	0,3571	0,0800	0,5000
P5	0,3214	0,4800	0,6923	P20	0,2143	0,3200	0,1923
P6	0,6250	0,2800	0,9615	P21	0,2143	0,8400	0,8400
P7	0,5179	0,1600	1,0000	P22	0,3571	0,2800	0,5769
P8	0,2500	0,8000	0,6923	P23	0,1607	0.000	0,1538
P9	0,4821	0,5600	0,6923	P24	0,3214	0,8400	0,6154
P10	0,3571	0,6800	0,6923	P25	0,2143	0,4800	0,6154
P11	0,2500	0,4000	0,6154	P26	0,3214	0,5600	0,5385
P12	0,2857	0,5600	0,8462	P27	0,2857	0,8000	0,7308
P13	0,6071	0,7600	0,8846	P28	0,1607	0,0800	0.0000
P14	0,5536	0,9200	1,0000	P29	0,4464	0,7200	0,8462
P15	0,1964	0,2000	0,1923	P30	0,3036	0,2000	0,0385
				P31	0,2321	0,3200	0,2692

En la siguiente tabla se señala los estudiantes que el criterio elegido por el experto ha pre-clasificado en el nivel III y se muestra la coincidencia con los estudiantes que el programa ha clasificado en el conglomerado 3, asociado con el nivel III de van Hiele.

PREGUNTAS CORRECTAS				SPSS		PREGUNTAS CORRECTAS			SPSS
TEST Nº	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3	Cluster	TEST Nº	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3	Cluster
A1	10	9	5	3	A55	5	8	3	2
A2	6	9	2	2	A56	4	6	3	2
A3	10	6	2	3	A57	9	5	3	3
A4	5	5	2	2	A58	6	4	1	2
A5	6	1	1	1	A59	8	6	2	2
A6	6	6	2	2	A60	6	5	1	2
A7	6	4	2	3	A61	4	7	3	2
A8	9	5	4	3	A62	6	1	3	1
A9	7	6	1	2	A63	8	7	3	3
A10	9	6	5	3	A64	3	4	0	1
A11	6	4	3	1	A65	6	4	2	2
A12	10	8	4	3	A66	6	8	4	2
A13	7	7	1	2	A67	7	4	2	3
A14	4	3	4	1	A68	9	5	6	3
A15	10	3	2	3	A69	6	7	2	2
A16	5	6	3	2	A70	8	3	3	3
A17	4	5	3	1	A71	8	3	5	3
A18	5	3	0	1	A72	4	4	3	1
A19	6	7	1	2	A73	7	6	5	3
A20	3	2	5	1	A74	5	7	2	2

A21	6	4	2	1	A75	6	3	3	1
A22	4	4	6	1	A76	5	3	5	1
A23	4	1	2	1	A77	5	2	4	1
A24	8	7	5	3	A78	4	1	2	1
A25	1	3	3	1	A79	10	4	2	3
A26	5	4	1	2	A80	7	5	4	3
A27	2	1	2	1	A81	6	3	4	3
A28	5	5	2	2	A82	2	3	3	1
A29	6	0	1	1	A83	5	1	2	1
A30	6	7	2	2	A84	6	8	2	2
A31	5	4	2	1	A85	7	4	6	3
A32	9	7	4	3	A86	5	5	1	2
A33	8	5	1	2	A87	7	7	1	2
A34	5	3	5	1	A88	3	6	2	2
A35	9	6	3	3	A89	8	4	1	2
A36	7	2	3	1	A90	4	3	3	1
A37	4	5	4	2	A91	5	4	1	2
A38	6	4	1	2	A92	5	3	3	1
A39	8	6	4	3	A93	3	5	4	1
A40	8	6	2	2	A94	3	4	2	1
A41	7	4	6	3	A95	4	1	4	1
A42	7	4	3	3	A96	4	6	2	2
A43	3	2	2	1	A97	6	5	3	1
A44	8	7	1	2	A98	8	8	2	2
A45	7	2	4	3	A99	5	1	1	1
A46	8	10	2	2	A100	8	6	4	3
A47	7	4	6	3	A101	7	2	0	1

A48 3	4	0	1	A102	4	7	2	2
A49 6	3	3	2	A103	9	6	1	2
A50 4	6	0	2	A104	6	7	5	2
A51 9	7	1	2	A105	7	3	1	1
A52 5	5	4	2	A106	6	4	3	1
A53 6	4	3	3	A107	8	8	1	2
A54 1	4	3	1					

4.2.4 Las preguntas discriminantes según criterio del experto y su correspondencia con los descriptores

Se puede observar en análisis estadístico que las medias iniciales y finales en las respuestas de los estudiantes del nivel III, son en la mayoría de las preguntas, medias considerablemente altas.

A continuación, se especificarán por niveles las preguntas discriminantes y sus correspondientes descriptores:

Nivel	Descriptor	Preguntas discriminantes
I	1,2	6, 7
	1,3	13
	1,4	14, 21, 24
II	2,1	9, 10, 11
	2,2	5, 16
	2,3	17, 27, 29
III	3,3	15,19, 22, 25, 28, 30, 31

4.2.5 Comparación de los distintos grupos del grupo piloto

La primera tabla de la sección 4.2.1 mostró los diferentes grupos y subgrupos de acuerdo a las instituciones y programas de procedencia de los estudiantes que conforman el grupo piloto. Dichas instituciones son la Universidad de Antioquia y la Institución Educativa Concejo de Medellín, de carácter público; la primera ofrece programas de educación superior y la segunda bachillerato académico y de media técnica (con énfasis en informática).

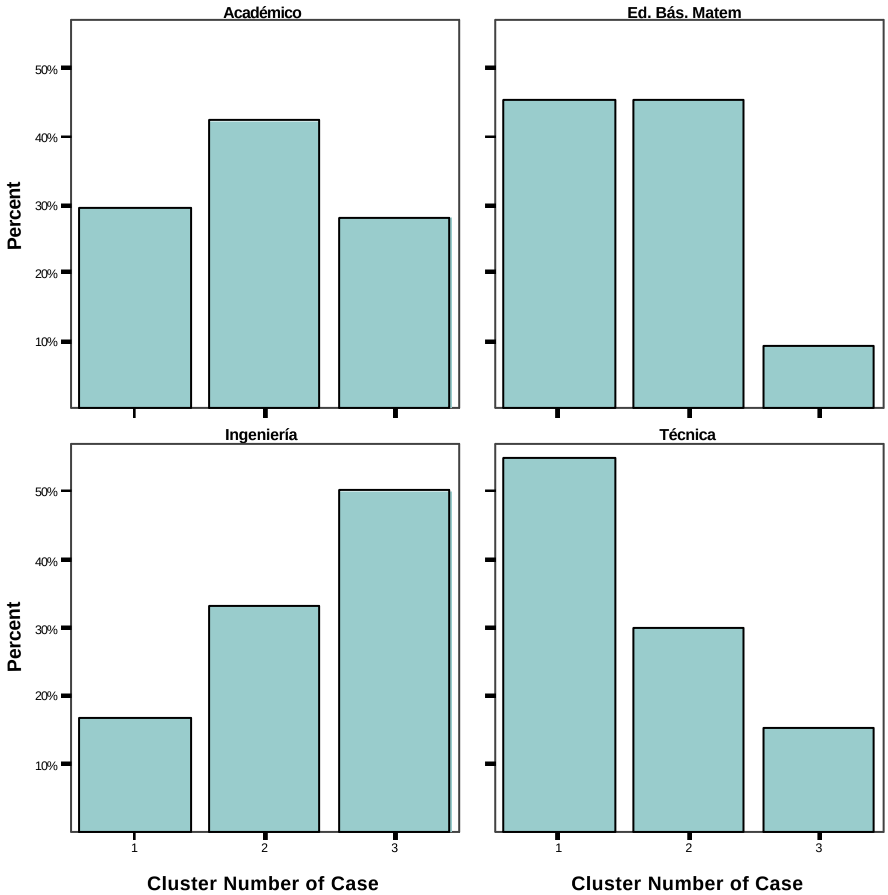
Para acceder al programa de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas y a los programas de Ingenierías, es necesario superar el examen de admisión, el cual consta de dos pruebas, una de aptitud verbal que equivale a un 50% y la otra de razonamiento lógico que equivale al otro 50%. La Facultad de ingeniería de la Universidad de Antioquia es una de las más grandes del país y ofrece los programas con mayor demanda. Los estudiantes de ingeniería tienen en su plan de estudios, el ciclo de las ciencia básicas, que hasta el primer año, consta de los siguientes cursos: Cálculo Diferencial e integral, Geometría Euclidiana, Geometría Vectorial y Analítica y Matemáticas Operativas. Por su parte, los estudiantes del segundo año del programa de Educación Básica con énfasis en Matemáticas tienen en su plan de estudios, la línea de Matemáticas que consta de los siguientes cursos: Pensamiento Matemático I (Introducción a la Aritmética), Pensamiento Matemático II (Geometría Euclidiana Plana), Pensamiento Matemático III (Geometría Euclidiana del espacio) y Seminario de Aritmética.

Los estudiantes del bachillerato académico y del bachillerato de media técnica de la institución Educativa Concejo de Medellín tienen en su línea de Matemáticas: tres horas de Cálculo y dos horas de Estadística. La diferencia entre los estudiantes del bachillerato académico y los del bachillerato de media técnica es que los primeros sólo reciben 30 horas de clase semanales, mientras que los segundos reciben 37 horas semanales; las horas de diferencia corresponden al área de informática.

La institución Educativa Concejo de Medellín siempre ha ocupado los primeros cuatro lugares de colegios oficiales en el municipio de Medellín, a nivel de pruebas Icfes (en el 2004 obtuvo la categoría de superior, la segunda categoría de seis niveles) y es una de las instituciones públicas con mayor número de estudiantes en las universidades públicas de la ciudad.

Teniendo en cuenta las características de las instituciones y programas que conforman el grupo piloto del estudio estadístico, analicemos la pertenencia de los estudiantes de cada programa a los diferentes cluster correspondientes a los niveles I, II y III de van Hiele, según la clasificación hecha por el programa SPSS:

Pertenencia de los estudiantes de cada programa a los diferentes cluster



Se puede observar que los estudiantes que han pasado por una enseñanza sistemática del concepto de límite a nivel superior (Ingenierías) obtienen mejores resultados en el test y se encuentra cerca del 50% de ellos en el nivel 3, lo que no sucede con los estudiantes de Educación Básica con Énfasis en Matemáticas ni con los estudiantes del bachillerato técnico ni académico.

No obstante, el test permite ubicar estudiantes de todos los programas del grupo piloto en el nivel III sin haber pasado por una enseñanza sistemática a nivel superior del concepto de límite, ya que el carácter socrático de sus preguntas hacen que el estudiante contraste sus ideas preconcebidas con las nuevas. El test constituye en sí una experiencia de aprendizaje para el estudiante.

4.2.6 Robustez del análisis

Dado que los resultados de la clasificación obtenidos con en el programa SPSS, mediante el algoritmo de k-medias, dependen de los centros iniciales escogidos por el experto, se consideró otro criterio de preclasificación que proporcione otros centros iniciales distintos y se observa si pequeñas variaciones en los criterios producen grandes cambios en los resultados.

Se eligió un criterio que exigiera mayor número de aciertos en las preguntas del bloque 2 y bloque 3 para el nivel III de razonamiento, se llamó criterio B y se describe mediante la siguiente tabla:

CRITERIO	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3
NIVEL 1	≥ 4	≤ 3	≤ 6
NIVEL 2	≥ 5	≥ 4	≤ 3
NIVEL 3	≥ 6	≥ 5	≥ 4

De esta manera, se logran clasificar los mismos 96 de los 107 estudiantes así: 34 de nivel I, 49 de nivel II y 13 de nivel III. Calculamos las medias de "aciertos" (coincidencias con el patrón de respuestas correctas), es decir, los porcentajes de aciertos en cada una de las preguntas y para cada uno de los tres bloques de preguntas asignadas a los niveles, para volver a aplicar el algoritmo de k-medias con las mismas especificaciones que en el criterio A, obteniendo la siguiente clasificación:

Number of Cases in each Cluster

Cluster	1	42,000
	2	31,000
	3	34,000
Valid		107,000
Missing		,000

Con esta clasificación, se analiza si los estudiantes que el criterio B ha pre-clasificado en el nivel III coinciden con los que el programa ha clasificado en el conglomerado 3, asociado con el nivel III de van Hiele.

	PREGUNTAS CORRECTAS			SPSS		PREGUNTAS CORRECTAS			SPSS
TEST Nº	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3	Cluster	TEST Nº	BLOQUE 1	BLOQUE 2	BLOQUE 3	Cluster
A1	10	9	5	3	A55	5	8	3	2
A2	6	9	2	3	A56	4	6	3	3
A3	10	6	2	3	A57	9	5	3	3
A4	5	5	2	1	A58	6	4	1	2
A5	6	1	1	1	A59	8	6	2	3
A6	6	6	2	3	A60	6	5	1	2
A7	6	4	2	3	A61	4	7	3	2
A8	9	5	4	3	A62	6	1	3	1
A9	7	6	1	3	A63	8	7	3	3
A10	9	6	5	3	A64	3	4	0	1
A11	6	4	3	1	A65	6	4	2	2
A12	10	8	4	3	A66	6	8	4	3
A13	7	7	1	2	A67	7	4	2	2
A14	4	3	4	1	A68	9	5	6	3
A15	10	3	2	3	A69	6	7	2	3
A16	5	6	3	2	A70	8	3	3	3

A17	4	5	3	1	A71	8	3	5	3
A18	5	3	0	1	A72	4	4	3	1
A19	6	7	1	2	A73	7	6	5	3
A20	3	2	5	1	A74	5	7	2	2
A21	6	4	2	1	A75	6	3	3	1
A22	4	4	6	1	A76	5	3	5	1
A23	4	1	2	1	A77	5	2	4	1
A24	8	7	5	3	A78	4	1	2	1
A25	1	3	3	1	A79	10	4	2	2
A26	5	4	1	2	A80	7	5	4	3
A27	2	1	2	1	A81	6	3	4	2
A28	5	5	2	2	A82	2	3	3	1
A29	6	0	1	1	A83	5	1	2	1
A30	6	7	2	2	A84	6	8	2	2
A31	5	4	2	1	A85	7	4	6	2
A32	9	7	4	3	A86	5	5	1	2
A33	8	5	1	3	A87	7	7	1	3
A34	5	3	5	1	A88	3	6	2	1
A35	9	6	3	3	A89	8	4	1	2
A36	7	2	3	1	A90	4	3	3	1
A37	4	5	4	2	A91	5	4	1	2
A38	6	4	1	2	A92	5	3	3	1
A39	8	6	4	3	A93	3	5	4	1
A40	8	6	2	2	A94	3	4	2	1
A41	7	4	6	2	A95	4	1	4	1
A42	7	4	3	2	A96	4	6	2	2
A43	3	2	2	1	A97	6	5	3	1

A44 8	7	1	3	A98	8	8	2	3
A45 7	2	4	1	A99	5	1	1	1
A46 8	10	2	3	A100	8	6	4	3
A47 7	4	6	1	A101	7	2	0	1
A48 3	4	0	1	A102	4	7	2	2
A49 6	3	3	1	A103	9	6	1	2
A50 4	6	0	2	A104	6	7	5	3
A51 9	7	1	3	A105	7	3	1	1
A52 5	5	4	2	A106	6	4	3	1
A53 6	4	3	2	A107	8	8	1	3
A54 1	4	3	1					

Se puede observar que todos los estudiantes que han clasificado en el nivel III de razonamiento, tanto en el criterio A como el criterio B, están incluidos en el en el conjunto de estudiantes que el programa SPSS clasifica en el conglomerado 3, no importando las pequeñas variaciones en los criterios, variaciones que cambian los centros iniciales escogidos para ejecutar el algoritmo k-medias.

La estabilidad del análisis estadístico que se acaba de mostrar confirma que en el grupo piloto hay tres esquemas de respuestas estrechamente relacionados, pero claramente diferenciados, que se han puesto en correspondencia con los niveles de razonamiento cuya existencia se confirma, y lo más importante aún es que estos niveles de razonamiento pueden ser detectados mediante el empleo de un test escrito de carácter socrático.

4.2.7 Análisis discriminante

El análisis discriminante es una técnica estadística que permite estudiar las diferencias entre varios grupos de objetos, con respecto a varias variables simultáneamente. Es una forma de clasificar y asignar individuos a grupos, conocidas sus características.

El análisis parte de una tabla de datos de **n** individuos en los que se ha medido **p** variables cuantitativas independientes o "explicativas" como perfil de cada uno de ellos. Una variable cualitativa adicional (dependiente o "clasificativa"), con dos o más categorías, ha definido por otros medios el grupo al que pertenece cada individuo. La tabla de datos será pues, una matriz de n filas y (p+1) columnas en las que cada caso figura con un perfil y una asignación de grupo.

El problema que resuelve el Análisis Discriminante puede formularse de la siguiente forma: entre todas las combinaciones lineales de variables, busca aquellas que tienen una varianza externa máxima – con el fin de resaltar las diferencias entre grupos -, y una varianza interna mínima – con el fin de que la dispersión entre las clases esté bien delimitada -. Estás combinaciones lineales serán las funciones discriminantes. Esta técnica reduce el número inicial de variables, que determinan las diferencias entre los grupos, a una, dos o más nuevas variables. Las funciones lineales discriminantes son combinaciones lineales de las anteriores, de tal manera que ellas solas son capaces de identificar o discriminar adecuadamente los grupos previamente construidos como las variables originales.

En este estudio se usará el análisis discriminante para explicar la pertenencia de cada estudiante del grupo piloto a uno o a otro grupo, en función de las variables de su perfil, y para comprobar su pertenencia o no al grupo preestablecido, es decir, al grupo en el que el algoritmo de las k-medias lo ha asignado previamente. Por otro lado, el Análisis Discriminante nos permite cuantificar el peso que cada variable (P_j) tiene a la hora de distinguir entre los grupos.

Dado que se dispone de un gran número de variables, y se quiere saber cuáles de ellas son las que mejor contribuyen a discriminar entre los grupos, se ha elegido el "Método de inclusión por pasos". Este procedimiento comienza seleccionando una única variable que es la que produce una mayor discriminación, a continuación se empareja esa variable con todas las demás para comprobar cual es el par que produce mejor discriminación. El par obtenido se combina con las restantes variables hasta obtener la mejor tripleta y así sucesivamente hasta que las variables que quedan sin seleccionar sean aquellas que no aportan nueva información o lo hagan en cantidad mínima.

Una vez seleccionadas las variables, a partir de ellas se determinan las funciones discriminantes canónicas, en el caso de que haya más de dos grupos que permitan al analista establecer las distancias entre los grupos que se están investigando.

Las funciones discriminantes canónicas pueden usarse para clasificar de nuevo los datos que hemos utilizado, basándose en las nuevas reglas de clasificación que nos proporcionan estas funciones discriminantes. El programa SPSS, versión 12.0, proporciona, como resumen de los resultados, una matriz de clasificación que sirve como indicador de la precisión del procedimiento con el que se agruparon los casos previamente, en este caso con el algoritmo de las k-medias tomando como centros iniciales los proporcionados por el criterio A.

Para realizar el análisis discriminante mediante el método de inclusión por pasos, se dio como variable de agrupación la clasificación obtenida por el algoritmo de las k-medias en el criterio A. Como resumen de los resultados se obtiene la siguiente tabla:

Classification Results[b,c]

		Cluster Number of Case	Predicted Group Membership 1	2	3	Total
Original	Count	1	35	0	2	37
		2	2	40	0	42
		3	1	4	23	28
	%	1	94,6	,0	5,4	100,0
		2	4,8	95,2	,0	100,0
		3	3,6	14,3	82,1	100,0
Cross-validated[a]	Count	1	32	2	3	37
		2	3	36	3	42
		3	2	4	22	28
	%	1	86,5	5,4	8,1	100,0
		2	7,1	85,7	7,1	100,0
		3	7,1	14,3	78,6	100,0

a. Cross validation is done only for those cases in the analysis. In cross validation, each case is classified by the functions derived from all cases other than that case.

b. 91,6% of original grouped cases correctly classified.

c. 84,1% of cross-validated grouped cases correctly classified.

En ella, se observa que la distribución por grupos que pronostica el análisis efectuado es de 38 estudiantes en el primer grupo, 44 en el segundo y 25 en el tercero, distribución similar a la obtenida con el Criterio A, mediante el algoritmo de las k-medias. También indica que hay un 91.6% de casos correctamente clasificados, según la asignación hecha por el algoritmo de las k-medias mediante el Criterio A y, si bien cambia de grupo a algunos estudiantes no hay que olvidar que este procedimiento no utiliza el número de aciertos en todas las preguntas, sino que clasifica los datos de nuevo, tomando como base solamente las variables que previamente se han incluido en las funciones discriminantes.

El programa también proporciona las variables que ha incluido en las funciones discriminantes y que en el caso de esta investigación son las siguientes:

Canonical Discriminant Function Coefficients

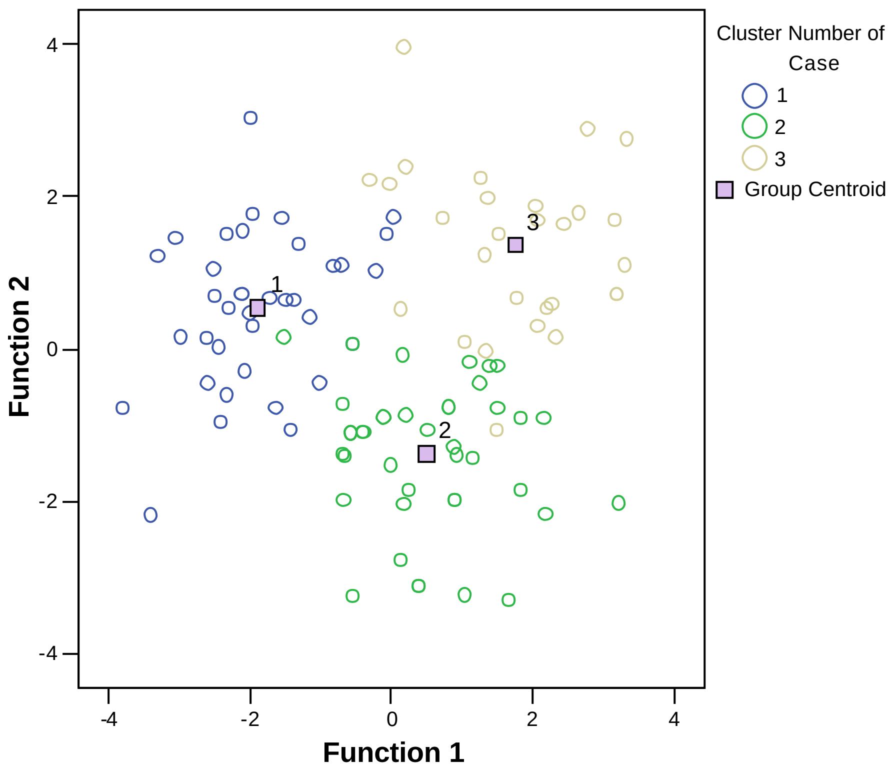
	Function	
	1	2
p4	,883	1,117
p7	1,582	,008
p8	1,016	-1,081
p9	,753	-,929
p13	-,137	1,253
p14	1,208	,325
p15	1,281	-,191
p19	,114	1,488
p22	1,256	1,074
p25	,924	,130
p27	,909	-,453
(Constant)	-4,430	-1,100

Unstandardized coefficients

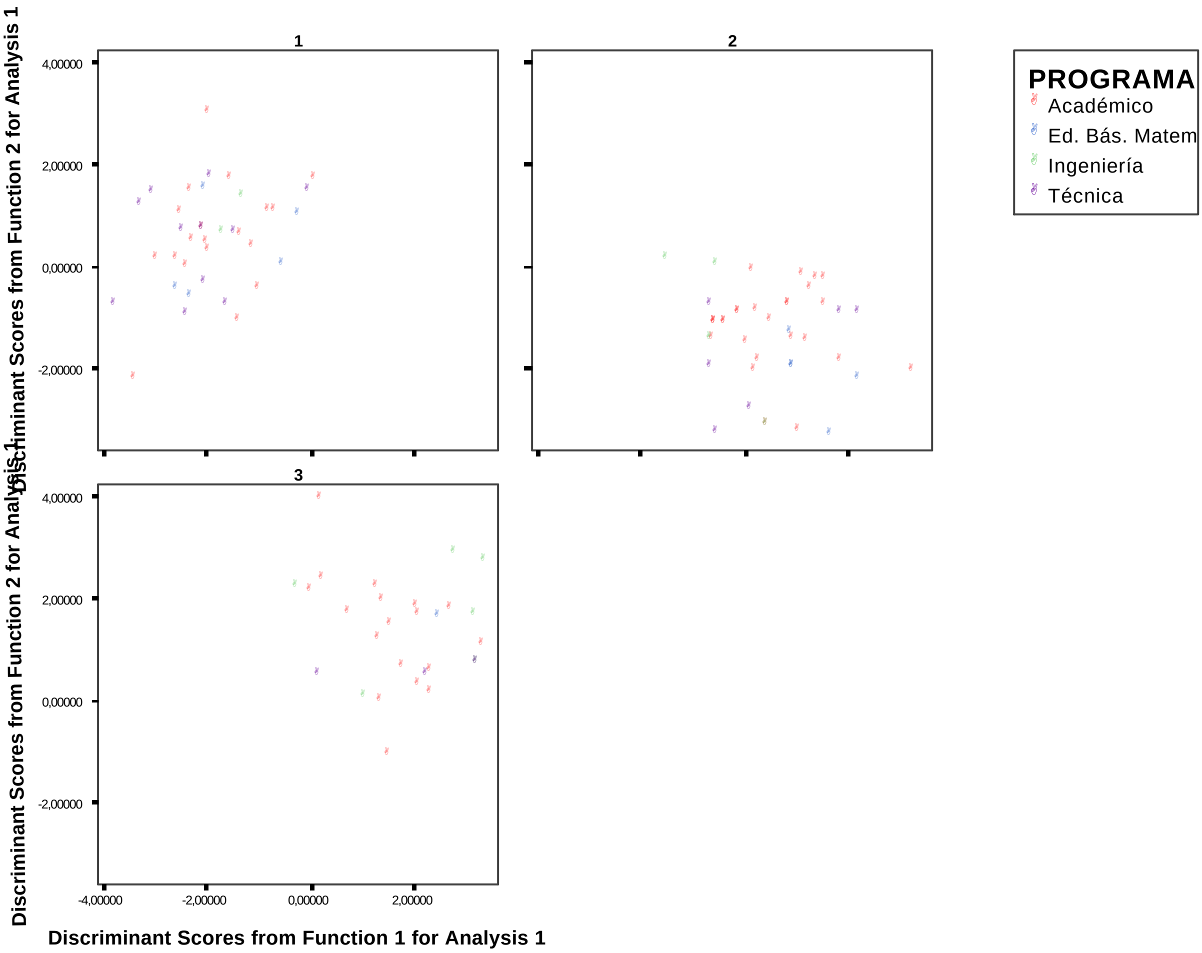
Se observa que las preguntas P7, P13, y P14 pertenecen al bloque 1 y forman parte de las preguntas que se habían incluido para determinar los descriptores del nivel I; la P9 y P27 pertenece al bloque 2 y forma parte de las que se habían incluido para determinar los descriptores del nivel II; y las preguntas P15, P19, P22 y P25 pertenecen al bloque 3 y forman parte de las que se habían incluido para determinar los descriptores del nivel III. Estos resultados confirman la idea acerca de la importancia que tienen estas preguntas para la detección de los niveles de razonamiento de los estudiantes en la detección de los niveles en los que se encuentran los estudiantes en cuanto al concepto estudiado.

Por otra parte, las funciones discriminantes utilizadas permiten establecer un sistema de coordenadas sobre el cual se sitúan las posiciones de los vectores de medias de los grupos y la posición relativa de las unidades experimentales. Esto proporciona representaciones gráficas, que indican como se distribuyen los individuos en los grupos alrededor de sus respectivos centroides. La siguiente gráfica muestra grupos diferenciados de estudiantes, de acuerdo al análisis discriminante. Estos grupos se han asociado con los niveles de razonamiento de van-Hiele I, II y III.

Canonical Discriminant Functions



Además, se puede observar la distribución de los estudiantes por programa y confirmar los resultados obtenidos bajo el algoritmo k-medias para el Criterio A (sección 4.2.5).


1
2
3
PROGRAMA
Académico
Ed. Bás. Matem
Ingeniería
Técnica
4,00000
2,00000
0,00000
-2,00000
-4,00000
Discriminant Scores from Function 2 for Analysis 1
Discriminant Scores from Function 1 for Analysis 1

CAPÍTULO 5.

CONCLUSIONES

5.1 Consecución de los objetivos

Objetivo general: Diseñar una entrevista de carácter socrático para una manifestación de la noción de límite en el marco del modelo educativo de van-Hiele que permita identificar descriptores de nivel de razonamiento en el estudiante entrevistado.

Para alcanzar este objetivo fue necesario plantear la consecución de tres objetivos específicos de carácter experimental:

1. *Señalar las características de una entrevista de carácter socrático para el razonamiento y comprensión de un concepto matemático en particular, basadas en lo que se infiere del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo en "El Menón"*[62] *y enmarcadas en el modelo educativo de van-Hiele.*

Haciendo un estudio minucioso del diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón, se infirieron diez características relevantes que se deben tener en cuenta en el diseño y aplicación de una entrevista socrática, para el razonamiento sobre un concepto matemático en particular y enmarcada en el Modelo Educativo de van Hiele. A estas características se les llamó *decálogo para el diseño de una entrevista de carácter socrático* (ver sección 3-2).

El decálogo asegura un buen diseño de entrevista, ya que las características que lo componen giran en torno al desarrollo de razonamiento, que facilita que el estudiante construya su propio conocimiento Estas características están en correspondencia con el modelo de van Hiele, en la medida que él mismo afirma en su texto Structure and Insight que los métodos socráticos propenden por el desarrollo de un pensamiento discursivo.[63]

[62] PLATÓN. "Diálogos". Porrúa. México, 1996.

[63] VAN HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986. p. 73.

2. *Diseñar una entrevista semi-estructurada de carácter socrático para la noción de límite como convergencia de una serie de términos positivos, a través de áreas de escaleras.*

El carácter de semi-estructurada (flexible) significa que el guión-entrevista no es una camisa de fuerza. Es decir, el entrevistador podrá hacer preguntas alternas, cuando lo considere necesario, con el fin de propiciar un avance en el razonamiento.

La construcción de la entrevista, bajo el modelo educativo de van Hiele, obliga a hacer un estudio minucioso del concepto: primero, para determinar el mecanismo a utilizar, y segundo, poder establecer cuáles podrían ser los descriptores de cada nivel de razonamiento que permitan observar la formación del concepto en la mente del estudiante, como también, dónde se producen las rupturas hacia un nivel de razonamiento más avanzado.

Durante el estudio del concepto, se observó como en el siglo XIV, sin tener un desarrollo algebraico ni computacional, se obtenían conjeturas interesantes sobre resultados de algunas series (ver sección 2.4). Esto motivó a elegir las escaleras como mecanismo del guión entrevista diseñado, ya que tienen características interesantes, especialmente si se tiene en cuenta que permiten manejar muchos conceptos matemáticos de manera encubierta, haciendo que el razonamiento del estudiante no dependa de su habilidad algebraica, ni del manejo de la notación simbólica del concepto, sino más bien de una visualización geométrica. Además, la riqueza en conceptos que giran en torno a la construcción de las escaleras y la conexión que tienen con los conceptos de superficie y área hacen que la red de relaciones les permita acceder a generalizaciones matemáticas (ver sección 2.5).

Teniendo en cuenta las dificultades, que a través de la historia se identifican en la construcción del concepto de suma de una serie, se pudieron determinar inicialmente ciertos descriptores que respondían a la concepción de lo finito, del infinito potencial y el infinito actual.

3. *Aplicar la entrevista para:*
   - *Mejorar el contenido y estructura del guión-entrevista*
   - *Determinar los descriptores de los niveles de razonamiento sobre el concepto de límite como una suma de términos positivos*
   - *Clasificar al entrevistado en uno de los niveles de razonamiento.*

En la aplicación de los guiones de entrevistas iniciales se evidenció que:

- Se incluían en las visualizaciones geométricas aspectos aritméticos que inducían al estudiante a hacer cálculos computacionales para dar su respuesta

- Se formulaban preguntas en las que era necesario el manejo de métodos de demostración
- La estructura del guión entrevista no permitía la fluidez de la misma haciendo que el entrevistado divagará en sus razonamientos
- Las dificultades que presentaban los entrevistados se asemejaban a las dificultades a través de la construcción histórica del concepto
- Se hacía necesario incluir otros aspectos, por ejemplo, el concepto de razón de una escalera.

Teniendo en cuenta los anteriores resultados, se diseñó un guión entrevista refinado (ver sección 3.3.1), susceptible de ser mejorado, además, se formularon los descriptores que corresponden a los niveles 0, 1, 2 y 3 en cuanto al razonamiento acerca de la noción de suma de una serie de términos positivos que permiten detectar en que nivel de razonamiento se encuentra el estudiante frente al concepto estudiado (ver sección 3.5).

4. *Diseñar un test basado en la entrevista socrática acerca de la noción de límite, con el fin de comprobar, que es posible la detección de los niveles de razonamiento propuestos por el modelo y que coinciden con los descritos, al mismo tiempo, que se automatiza la adscripción de los estudiantes en su correspondiente nivel.*

Con el análisis del guión entrevista y los resultados obtenidos al aplicar el guión se diseñó un test escrito de respuesta múltiple, denominado ÁREAS DE ESCALERAS que facilitó analizar un número considerable de estudiantes y obtener datos suficientes para corroborar los resultados obtenidos en las entrevistas con respecto a la clasificación de los estudiantes en los niveles de razonamiento. El test está diseñado en tres bloques de preguntas que permiten detectar en que nivel de razonamiento se encuentra un estudiante.

En resumen, se ha podido extender el modelo de van Hiele al estudio de una de las varias manifestaciones del concepto de aproximación, fundamental para entender otros conceptos avanzados del Análisis Matemático, como es la noción de suma de una serie de términos positivos. En este estudio, hablar de suma de una serie (convergencia) es referirse al área (si existe) de una escalera infinita como el límite de la sucesión infinita de las sumas parciales de las áreas de sus rectángulos. El análisis cualitativo llevado a cabo sugiere la existencia de niveles de razonamiento que postula el modelo de van Hiele. Por todo lo anterior, el diseño de la entrevista parece apto como propuesta metodológica.

5.2 Sobre el discurrir de la entrevista

Se procura iniciarla en un ambiente relajado, lo que es especialmente importante cuando se entrevista a estudiantes más jóvenes (de bachillerato) y, por tanto, se hace necesario dedicar el tiempo suficiente para crear ese clima, enfatizando que *no se trata de un examen.* Se explica que con las contestaciones de la prueba no se *queda ni bien ni mal,* sino que se pretende saber lo que piensa acerca de algunas situaciones sencillas. Tras esto, y con la intención de motivarlo a realizar la entrevista con interés, se le hace la observación sobre nuestra intención de apreciar su razonamiento.

Con las primeras preguntas de la entrevista se le da confianza sobre la sencillez de la prueba aunque, a medida que va evolucionando, las preguntas solicitan un mayor nivel de atención y concentración. Todos los estudiantes que se entrevistan deben colaborar voluntariamente y, en todos los casos, se pide una cierta discreción sobre el contenido de la prueba para evitar, dentro de lo posible, que se entreviste a alguien que de alguna forma ya tenga familiaridad con su contenido (se cree que, sin ser algo decisivo, es conveniente la improvisación en el entrevistado). Respecto al contenido específico, solo se les informa previamente que la prueba versa sobre áreas. Se les informa que sus datos personales van a ser confidenciales, pero que sus respuestas se usarán para un trabajo de investigación. Para diferenciar la prueba de un examen, se toma solamente el número de la entrevista para asegurar una identificación del caso. Se intenta que todas las entrevistas se hagan en condiciones bastante semejantes, aunque cada entrevista produce un diálogo peculiar entre entrevistado y entrevistador.

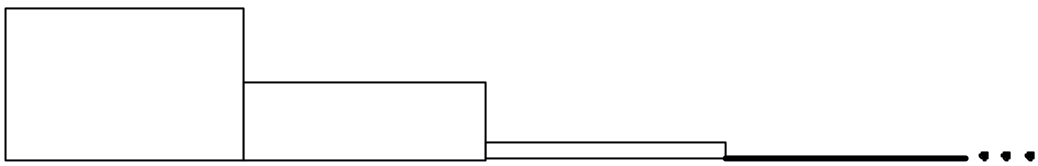
Un dato que puede resultar significativo sobre el desarrollo de la entrevista es el cansancio que manifiestan la mayoría de los estudiantes al finalizarla. El detalle parece relevante si se pone de manifiesto que se encuentran ante una prueba relacionada con el razonamiento, cuyo socratismo provoca el entorpecimiento y la obligación de evolución en el razonamiento y la readaptación de imágenes conceptuales. En este sentido se puede señalar también que, a pesar de las advertencias iniciales, algunos estudiantes preguntan, al finalizar la prueba, sobre el resultado, pues están interesados en saber si lo han hecho bien. Una vez terminada, se les da una explicación detallada de la motivación de cada pregunta, de la interpretación que se hace de sus respuestas, cómo se considera que va evolucionando su progreso hacia el entendimiento y cómo se puede detectar. Todo parece indicar que la experiencia consigue captar su interés y no les deja indiferentes.

La experiencia alerta sobre la relativa facilidad que puede darse en confundir socratismo con dirigismo, de modo que se hace necesario tener buen cuidado en no influir en las respuestas (sobre todo, cuando éstas eran manifiestamente incorrectas) atendiendo hasta detalles aparentemente menores. Es aquí donde la experiencia del entrevistador es importante, ya que le brinda fluidez a la entrevista sin obstaculizar el razonamiento del entrevistado con gestos de aceptación o negación, entre otros. La actitud general debe ser siempre tranquilizadora, coherente con lo expuesto al principio, dando predominio al diálogo frente a la búsqueda de resultados. En algunos casos, hay que redirigir las preguntas para evitar afirmaciones que no tienen que ver con el razonamiento estudiado y que impiden el progreso del mismo.

5.3 Proyección hacia el futuro

Las futuras líneas de investigación que se abren partiendo de este trabajo, podrían ser:

- Continuar con el mejoramiento del guión entrevista, incluyendo en éste un análisis de una condición adicional para que el entrevistado razone: Existen escaleras que no tienen razón, pero tienen área. Por ejemplo, la escalera en la cual el segundo rectángulo tiene como altura la mitad del primero, el tercer rectángulo tiene como altura la cuarta parte del segundo, el cuarto rectángulo tiene como altura la octava parte del tercero y así sucesivamente.



Como vemos, esta escalera infinita decreciente carece de razón, sin embargo, tiene área y está representada por la serie $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}+\frac{1}{1024}+...=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{i(i+1)}{2}}}$. En los guiones iniciales de la entrevista se evidenció la necesidad de un razonamiento más refinado (formal) que le permitiera al entrevistado afirmar con seguridad cuando una escalera infinita decreciente que no tiene razón tiene área; en la presente investigación sólo se formularon los descriptores que corresponden a los niveles 0, 1, 2 y 3 y por lo tanto se trabajó con la condición más general: lo que garantiza que una escalera infinita decreciente no tenga área es el hecho de poderse volver creciente.

- El diseño de módulos de instrucción que estén en correspondencia con las fases de aprendizaje propuestas en el Modelo Educativo de van Hiele para promover un estudiante de un nivel de razonamiento a otro superior; ya que la entrevista socrática diseñada para el concepto de suma de una serie de términos positivos es una experiencia pedagógica que permite determinar el nivel de razonamiento y motiva el avance en él.

- Extender la entrevista socrática como estrategia metodológica para acceder a otros conceptos del análisis matemático como el de continuidad, derivada, e integral, que tienen inmersa la idea de aproximación local.

- Consolidar técnicas estadísticas que correspondan de manera adecuada a resultados que se obtienen en los estudios desarrollados en el marco de van Hiele. Es conveniente mencionar la investigación de Jaramillo y Ceballos en el que se utiliza el Análisis Factorial de Correspondencias Múltiples A.F.C.M. para corroborar una vez más la importancia del Análisis multivariado para la validación de investigaciones de esta índole.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. M.: "Análisis Matemático". (2º edición). Ed. Reverté. 1979.

ARTIGUE, M.: "Ingénierie didactique a propos d'equations differentielles", Proceedings, PME -11 Congress (Vol. 1 1 l), Montreal, pp. 23 6-243, 1987.

ARTIGUE, M.: "Epistémologie et Didactique". Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 102-3. pp. 242-283. 1990.

ARTIGUE, M.: "Analysis" en "Advanced Mathematical Thinking", cap. 11, p. 167-198. Kluwer Ac. Pub. 1992.

BURGER, W.: "Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry" (Final Report of the Assessing Children's Intellectual Growth in Geometry Project). Corvallis. Oregon State University, Department of Mathematics. 1986.

BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M. "Characterizing the Van Hiele Levels of Development in Geometry". Journal for Research in Mathematics Education, 17(1), p. 31-48. 1986.

BURGER, W.F. y SHAUGHNESSY, J.M.. "Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas" http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v18n1p35.pdf. 1986.

BURTON, Leone. "EPISTEMOLOGY, PHILOSOPHY AND PEDAGOGY OF MATHEMATICS" http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome12/article1.htm.

CHEVALLARD, Y.: "La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigne". La Pensée Sauvage, Grenoble, France, 1985.

CLAWSON, Calvin C. "MISTERIOS MATEMÁTICOS: Magia y belleza de los números". Editorial DIANA, México. 1999. Pág. 64.

CORNU, B.: "Apprentisage de la notion de limite: Modeles spontanes et modeles propres" Proc. of the Fifth Conf. Int. Group of P.M.E, pp. 322-326. 1981.

CORNU, B.: "Apprentisage de la notion de limite: conceptions et obstacles". Thèse de doctorat. Univ. de Grenoble. 1983.

CORNU, B.: "Limits" in "Advanced Mathematical Thinking", cap. 10, p. 153 -166. Kluwer Ac. Pub. 1991.

DE LA TORRE, Andrés. "La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele". Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2003.

DE LA TORRE, Andrés. "El método socrático y el modelo de van Hiele". http://www.scm.org.co/Articulos/733.pdf

DREYFUS, T.: "Advanced Mathematical Thinking" in "Mathematics and Cognition", chap. 61 p. 113-134. Cambridge U.P, 1990.

DREYFUS,T.:"Advanced Mathematical Thinking Processes" in "Advanced Mathematical Thinking ", chap. 2, p. 25-41. Kluwer Ac. Pub. 1991.

DUBINSKY, E.: "Reflective Abstraction in Advanced Mathemathical Thinking" en "Advanced Mathematical Thinking", chap. 7, p. 95-126. Kluwer Ac. Pub. 1991.

DUBINSKY, E Y HAREL, G.: "The nature of the process conception of function" en "The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy", MAA Notes (v.25), pp.85 - 106, 1992.

DUBINSKY, E. Y TALL, D.O.: "Advanced Mathemathical thinking and the Computer" en "Advanced Mathematical Thinking", cap. 14, p. 231-243. Kluwer Ac. Pub. 1991.

EISENBERG, T.: "Functions and associated learning difficulties" in "Advanced Mathematical Thinking", chap. 9, p. 140-152. Kluwer Ac. Pub. 1991.

ESTEBAN DUARTE, Pedro Vicente. "Estudio comparativo del concepto de aproximación local a través del modelo de van Hiele". Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2003.

FREUDENTHAL, H.: "Mathematics as an Educalional Task". Dordreckt, Holland: D. Reidel Pub. Co., 1973.

FUYS, D, Y GEDDES, D.: "An Investigation of Van Hiele Levels of Thinking in Geometry among Sixth and Ninth Graders: Research Findings and implications". Annual meeting of American Educational Research Association. April 27, 1984.

FUYS, D., GEDDES, D. Y TISCHLER, R.: "English translations of selected writings of Dina Van Hiele - Geldof and Pierre M Van Hiele". Brooklyn College, City Univ. of N. York. 1984.

FUYS, D. Y GEDDES, D.: " The Van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents". Monograph, NCTM, 1988.

FUYS, D., GEDDES, D. Y TISCHLER-: "An investigalion of the van Hiele model of thinking in geometry among adolescents (final report)". Brooklyn College, City Univ. of N. York. 1985.

GILLMAN, L.: "Two Proposals for Calculus". Focus: Newsletter of the MAA 7. 1987.

GONDAR N, José Emilio. “Artículos estadísticos, Análisis de conglomerados”. http://www.estadistico.com/arts.html?20010723

GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro Miguel. “Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII”. Alianza Universidad. Madrid. 1992.

GRABINER, J. V.: "The origins of cauchy’s rigorous calculus". Cambridge, MA Mit Press, 1981.

GUTIÉRREZ, A. Y JAIME, A.: "Estudio de las características de los niveles de Van Hiele". Proceedings of the 11th P.M.E. p. 131-137. Montreal, 1987.

GUTIERREZ, A. Y JAIME, A.: "Bibliografía sobre el modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele". Rev. de Enseñanza de las Ciencias nº 7, p. 89-95. 1989.

GUTIERREZ, A. Y JAIME, A.: "Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de VanHiele". En Linares y Sánchez (ed.). "Teoría y práctica en Educación Matemática". Ed. Alfar. Sevilla, 1990.

GUZMÁN, M.: "Mirar y ver” Ed. Alhambra, Madrid. 1977.

GUZMAN, M. Y RUBIO, B.: "Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático, VoL 3". Ed. Pirámide. 1993.

HADAMARD, J.: "The Psychology of Invention in the Mathematics". Field Dover, New York, 1954.

HANNA, G.: “Mathematical Proof” in “Advanced Mathematical Thinking”, chap. 4, p. 54-64. Kluwer Ac. Pub. 1991.

HAREL G., Y KAPUT, J. " The Role of Conceptual Entities and their symbols in building Advanced Mathematical Concepts" in "Advanced Mathematical Thinking", chap. 6, p. 82 - 94. Kluwer Ac. Pub. 1991.

HOFFER, A. R: "Geometry, A model of the Universe". Menlo Park: Addison-Wesley Publ. Co., 1979.

HOFFER, A. R: “Geometry is More Than Proof”. Mathematics Teacher 74, p. 11-21, 1981.

HOFFER, A. R.: "Van Hiele-Based Research". En “Acquisition of mathematical Concepts and processes”. Richard Lesh y Marsha Landau, ed. Academic Press, 1983.

HUGHES, D.: " Visualization and Calculus Reform". MAA Notes n. 19, p. 121-126, 1991.

JAIME, A. Y GUTIÉRREZ, A.: “The learning of plane isometries from the viewpoint of the Van Hiele model”. Proceedings of the 13rd Intemational Conference for the P.M.E. 1989.

JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario. “La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele”. Valencia. Tesis doctoral. Publicada. Editorial Universidad Politécnica de Valencia. Valencia. 2003.

JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario y CAMPILLO HERRERO, Pedro. Propuesta teórica de entrevista socrática a la luz del modelo de van Hiele. En: Divulgaciones matemáticas. Vol. 9. No. 1. Maracaibo, 2001. p. 65 – 84.

JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario y Ceballos U. Leonardo. “Aplicación del análisis factorial de correspondencias múltiples en la validación de los niveles de razonamiento, en la noción de convergencia a la luz del modelo de van Hiele”. Informe de investigación. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Centro de investigaciones Cien. U. de A. 2002. p. 67.

JARAMILLO LÓPEZ, Carlos Mario y PÉREZ C., Pedro. “La noción de convergencia de una serie desde la óptica de los niveles de van Hiele”. En: Educación Matemática. Vol., 13. No. 1. Abril de 2001. Grupo editorial Iberoamérica. México. p. 68 – 80.

KILPATRICK, J.: "George . Polya’s Influence on Mathematics Education". Mathematics Magazine, Vol. 5. 1987.

KLEIN, Benjamín G. y BIVENS, Irl C. “Proof. Without Words”. En Mathematics Magazine. Octubre 1988.

KLINE, M.: "El fracaso de la Matemática Moderna". Ed. Siglo XXI, Madrid, 1976.

LAKATOS, I.: “Proofs and Refutations”. Cambridge Univ. Press. 1976.

LAND, J. H.: “Appropiateness of the van Hiele Model for Describing Student’s' Cognitive Processes on Algebra Tasks as Typified by College Students 'Learning of Functions”. The University of Boston. 1991.

LESH,R. Y LANDAU, M.: “Acquisition of mathematics Concepts and Processes”, Academic Press, 1983.

LLORENS FUSTER, José Luís. "Sobre la didáctica del concepto de límite". Épsilon. Granada, 1981.

LLORENS FUSTER, José Luís. "Utilización habitual de recursos informáticos en un curso de Matemáticas". Proc. de las II Jornadas de nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad, Valencia, 1993.

LLORENS FUSTER, José Luís. "Un curso de Matemáticas con DERIVE". Rev. de la S.A.E.M. Thales, v.26, 1993.

LLORENS FUSTER, José Luís. “Aplicaciones de DERIVE. Análisis Matemático-I (Cálculo)”. Serv. De Pub. de la U.P.V. Valencia, 1993.

LLORENS FUSTER, José Luís. “Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local”. Tesis doctoral. Valencia. 1994.

LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. An Extension of van Hiele’s Model to the Study of Local Approximation, Int. J. Math. Edu. Sci. Technol. 28, No. 5 p. 713-726. 1997.

LOVETT, J.: “An interpretative description of the Van Hiele model of thinking in geometry”. Psychology of Mathematics Education Workshop, Chelsea College. Londres, 1983.

MAYBERRY, J.: “the Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teacher”. Journal for Research in Math. Education. Vol. 24, 58-69, 1983.

MERRIELL, D.M.: “Suplemento al curso programado de Cálculo”. Ed. Reverté, 1973.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Ley General de Educación. Santa Fe de Bogotá. 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Santa fe de Bogotá. 1998.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Estándares Básicos de Matemáticas. Bogotá. 2004.

MORRISON, D.F.: "Multivariate Statistical Methods". 3ª. Ed. McGarw-Hill. 1990.

NAVARRO DOMÍNGUEZ, A. "Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica". Tesis doctoral. Sevilla. 2002.

NEWMAN, J.R.: "Sigma: El mundo de las Matemáticas". 8ªEd. Vol. I. Grijalbo, 1982.

NOVAK, Joseph D. y GOWIN, D. Bob, "Aprendiendo a aprender". Martínez Roca. Barcelona, 1999.

ORTON, A-: "Chords, secants, Tangents and elementary Calculus". Mathematics Teaching, p. 48-49, 1977.

PÉREZ CARRERAS, P.: "Notas de Clase: Álgebra Lineal". Serv. de Pub. de la U.P.V. Valencia, 1989a.

PÉREZ CARRERAS, P.: "Notas de Clase: Cálculo Infinitesimal". Serv. de Pub. de la U.P.V. Valencia, 1989b.

PIAGET, J.: "Development and learning", en Victor, E.; Lerner, M. (eds.): "Readings in Science Education for the Elementary School". Macmillan: N. York. 1967.

PIAGET, J. Y OTROS: "La enseñanza de las matemáticas modernas". Ed. Alianza. Madrid.1978.

PLATÓN. "Diálogos". Porrúa. México, 1996.

POLYA, G.: "Mathematics and plausible Reasoning". Princeton Univ. Press, 1954.

POLYA, G.: "How to Solve it. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1973.

POLYA, G.: "Mathematical Discovery". Wiley, N.Y. 1981.

PURCELL, Edwin J. y otros. "El Cálculo". Pearson Educación, México. Octava edición 2001.

REY PASTOR, J. Y BABINI, J.: "Historia de la Matemática". Espasa-Calpe. Buenos Aires, 1951.

RESNICK, Lauren y FORD Wendy. "LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS". Ediciones Paidós. 1ª. Ed. 1990.

ROBERT, A.: "Lacquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement superieur". Recherches en Didactique des Mathematiques, 3, p. 211 227, 1982.

ROBERT, A., Y SCHWARZENBERGER, R.: "Research in Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level" in "AdvancedMathematical Thinking", chap. 8, p. 127-13 9. Kluwer Ac. Pub. 1991.

SCHWARZENBERGER, R.L. E. Y TALL, D.O.: "Conflicts in the learning of real numbers and limits". Mathematics Teaching, 82, p. 44-49, 1978.

SEEGER; F.,H. STEINBRING, Y R. STRAESSER: "Die Didaktische Transposition". Mathematica Didactica, 12, p. 157-177, 1989.

SELDEN, J., A. MASON, Y A. SELDEN: "Can Average Calculus Students Solve Nonroutine Problems?". Journal of Mathematica Behavior, 8, pp. 45-50,1989.

SIERPINSKA, A.: "Humanities students and Epistemological Obstacles Related to Limits", Educational Studies in Mathematics, 18, pp. 371-387, 1987.

SKEMP, RICHARD R.: "The Psychology of Learning Mathematics". New York. Penguin Books, 1971.

SKEMP, RICHARD R.: "Intelligence, Learning, and action". New York. Wiley and Sons, 1979.

STEEN, LYNN A.: "Taking Calculus Seriously". Newsletter of the MAA, 6. 1986.

STEEN, LYNN A.: "Calculus for a New Century: A Pump, Not a Filter". MAA Notes No. 8. Mathematical Association of America, Washingto n, D.C. 1987.

STEEN, LYNN A.: "The Science of patterns", Science 29, April 1988.

STEEN, LYNN A.: "Living with a new Mathematical Species". En "The influence of computers and infonnatics on mathematics and its teaching". UNESCO/ICMI. 1990.

STEIN, Sherman K. y BARCELLOS, Anthony. "Cálculo y Geometría analítica". Vol. 1. Quinta edición. McGraw-Hill, México. 1996. pág. 590.

TALL, D.O.: "The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere". Mathematical Gazette, 66, p. 11-22, 1982.

TALL, D.O.: "Readings. in Mathematical Education: Understanding the calculus". Association of Teachers of Mathematics (collected articles from Mathematics Teaching), 1985-1987.

TALL, D. O.: "Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics". Doctoral Dissertation. University of Warwich, U.K. 1986a.

TALL, D.O.: "Graphic Calculus I, II, III (for BBC compatible computers) ". Glentop Press, London,1986b.

TALL, D.O.: "Lies, Damn Lies and Differential Equations". Mathemathics Teaching 114, p.54-57, 1986c.

TALL, D. O.: " Using the computer to represent calculus concepts". Actes de la 4iéme École d'Été de Didactique des Mathématiques et de l'informatique, Orléans. IMAG Grenoble, 238-264. 1986d.

TALL, D. O.: "Graphical Packages for Mathematics Teaching and learning". Informatics and the Teaching of Mathematics, Johnson, D. C. and F. Lovis (eds), North Holland, 1987.

TALL, D. O.: “Real Functions & Graphs: SMP 16-19 (for BBC compatible computers)” Rivendell Software. Cambridge University Press, 1989.

TALL, D.O. (ED.): "Advanced Mathematical Thinking". Kluwer Academic Publishers. 1991 a.

TALL, D. O.: "Intuition and rigour: The Role of Visualization in the Calculus". MAA Notes n.19, p. 105-121. 1991.

TALL, D.O.: "The transition to advanced mathematical thinking.- Functions, Limitis, Infinity, and proof'. NCTM. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, p.495-511, 1992.

TALL, D.O., P. BLOKLAND Y D. KOK: "A Graphic Approach to the Calculus (for IBM compatible computers)". Sunburst, NY, 1990.

TALL, D. O. Y VINNER, S.: "Concept Image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity". Educational Studies in Mathematics Vol. 12 nº 2, p. 151-169, 1981.

TALL, D.O. Y WEST, B.: "Graphic Insight into Mathematical Concepts". En " The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching".

UNESCO/ICMI. 1991.

TIROSH, D.: " The Role of Students'Intuitions of Infinity in Teaching the Cantorial Theory" in "Advanced Mathematical Thinking", cap. 10, p. 15 3 -166. Kluwer Ac. Pub. 1991.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA: "Proyectos de Innovación Educativa". SPUPV, 1993.

USISKIN, Z.: "Van Hiele Levels and Achievements in Secondary School Geometry". CRRSSG Report, University of Chicago, 1982.

USISKIN, Z.: "We Need Another Revolution in Secondary School Mathematics". The Secondary School Mathematics Curriculum, NCTM, pp. 1- 19, 1985.

USISKIN, Z. Y SENK, S.: "Evaluating a Test of Van Hiele Levels: A Response to Crowley and Wilson". Journal for Research in Mathematics Education, May, 1990.

VAN-HIELE, Pierre M. EL PROBLEMA DE LA COMPRENSIÓN. Tesis Doctoral. 1957. p. 72. (Traducción al español realizada en 1990).

VAN HIELE, P.M.: "De niveau's in het denken, welke van belang zijn bij het onderwijs in de meetkunde in de eerste klasse van het V.H.MO". Paedagogische Stüdien vol. XXXII (J.B. Wolters: Groningen), pp. 289-297. 1955.

VAN HIELE, P.M.: "Levels of Thinking, How to Meet Them. How to Avoid Them". NCTM meeting, Seattle, 1980.

VAN HIELE, P.M.: "Struture and insight: A Theory of Mathematics Education". Academic Press. 1986.

VAN HIELE, P.M.: "A method to facilitate the finding of levels of thinking in geometry by using the levels in arithmetic". Presentación en la "Conference on learning and teaching geometry: Issues for research and practice". Syracuse University, 1987.

VINNER, S.: "Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent". Proc. of PME 6, Antwerp, pp. 24-28, 1982.

VINNER, S.: "Concept definition, concept image and the notion of .function". Int. J. Math. Educ. Scl. technol., vol. 14, nº 3, p. 293-305, 1983.

VINNER, S.: "Continous functions - Images and reasoning in college students" Proceedings of the 11th P.M.E., p. 177-183 . Montreal, 1987.

VINNER, S.: "The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics" in "Advanced Mathematical Thinking", chap. 5, p. 65-8l. Kluwer Ac. Pub. 1991.

VINNER, S. Y DREYFUS, T.: "Images and definitions for the concept of function ". Journal for Research in Mathematics Education. Vol. 20, nº 4, p. 356-366, 1989.

VINNER, S. Y HERSHKOWITZ, R.: "On concept formation in geometry". Zenmaiblatt Dür Didaktik, p. 20-25. 1983.

ZIPPIN, W.: "Uses of infínity". Random House, 1962.

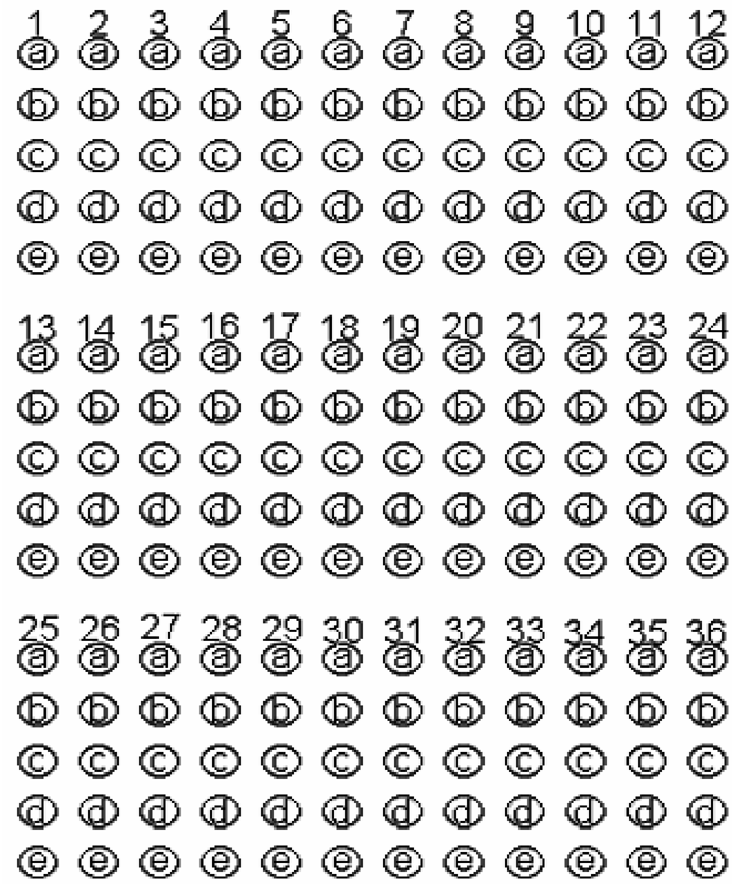
ANEXO 1

IDENTIFICACIÓN

Institución:____
Grado o semestre:____
Programa:____
Edad:____
Sexo:____

CUADRO DE RESPUESTAS Nº ___

Para cada pregunta rellene el círculo que corresponde a su elección.



ANEXO 2

ÁREAS DE ESCALERAS

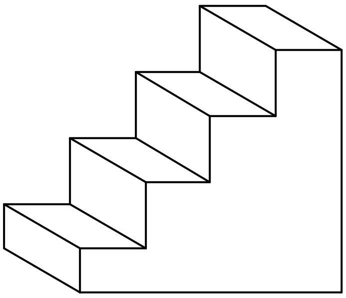
INSRUCCIONES

Cada pregunta te ofrece **cinco** opciones de respuesta (a, b, c, d y e), de las cuales deberás escoger **sólo una.** No dejes ninguna pregunta en blanco y no respondas al azar.

En todas las preguntas, la quinta opción (marcada con la letra e) es: *Ninguna de las anteriores.* Debes seleccionar esta opción cuando no entiendas el enunciado de la pregunta o cuando te parezca que las otras opciones de respuesta (a, b, c y d) no se ajustan a lo que crees que sería correcto. En este caso debes escribir la respuesta que consideres conveniente en el cuadernillo adicional, además de marcar la opción “e” en la hoja de respuestas.

Es posible que en algunas preguntas te parezca que hay varias opciones de respuesta correctas. Escoge aquella opción de respuesta que te parezca más precisa desde el punto de vista matemático, de acuerdo con lo que piensas acerca del tema.

1. En la siguiente imagen se observan superficies planas que podrían ser:



a. Una escalera
b. Rectángulos
c. Paralelogramos
d. No hay superficies planas
e. Ninguna de las anteriores.

No pases la página hasta haber contestado la pregunta

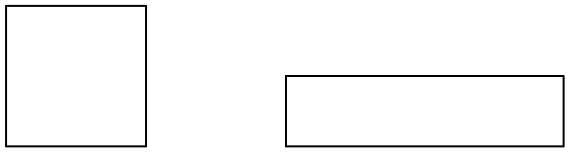
2. Observa las siguientes figuras geométricas:

¿Consideras que estas figuras podrían tener la misma superficie y la misma área?

a. No, son superficies diferentes y no tienen la misma área
b. Podrían tener igual área, pero son superficies diferentes
c. Podrían ser la misma superficie, y no tener igual área
d. Sí, son superficies iguales y tienen igual área
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

3. ¿Crees que estas dos figuras que se muestran a continuación podrían encerrar la misma cantidad de superficie?



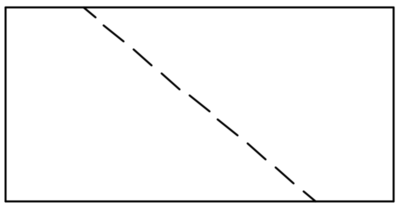
a. No, porque no tienen la misma forma
b. No, el cuadrado encierra más cantidad de superficie que el rectángulo
c. Sí, porque se podría dividir el cuadrado y disponerlo para formar el rectángulo
d. Sí, siempre un rectángulo y un cuadrado encierran la misma cantidad de superficie
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

Aporte de información:

La noción de **superficie** es lo que se refiere a la forma geométrica, hay superficies rectangulares, triangulares, circulares, etc.; la noción de **área** es lo que se refiere al tamaño, es la medida de una superficie (cantidad de superficie).

4. ¿Se podría decir que la siguiente superficie rectangular está dividida en dos superficies de igual área?



   a. Sí, siempre que las superficies resultantes tengan igual forma geométrica
   b. Sí, siempre y cuando la línea divisoria pase por el centro del rectángulo
   c. No, sólo ocurre cuando la línea divisoria es vertical, horizontal o diagonal
   d. No, el rectángulo se podría dividir en dos superficies de igual área si se conocen sus dimensiones
   e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

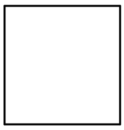
5. Dada una superficie rectangular:

¿De cuántas maneras crees que es posible dividirla en dos superficies iguales?

a. Sólo de dos maneras
b. Sólo de cuatro maneras
c. Un número finito de maneras
d. De infinitas maneras
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

6. Ahora, considera la siguiente superficie:



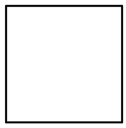
Si a esta superficie le disponemos otra igual, así:

¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

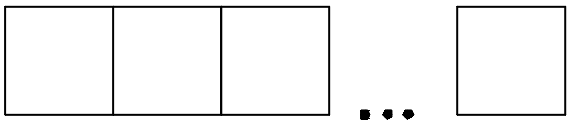
a. No es posible calcular su área ya que no se conocen las dimensiones de la superficie
b. Dos unidades cuadradas
c. Dos cuadrados
d. Dos veces la superficie inicial
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

7. Considera la siguiente superficie:



Si al lado de ésta disponemos otra igual y repetimos un número determinado de veces el proceso:

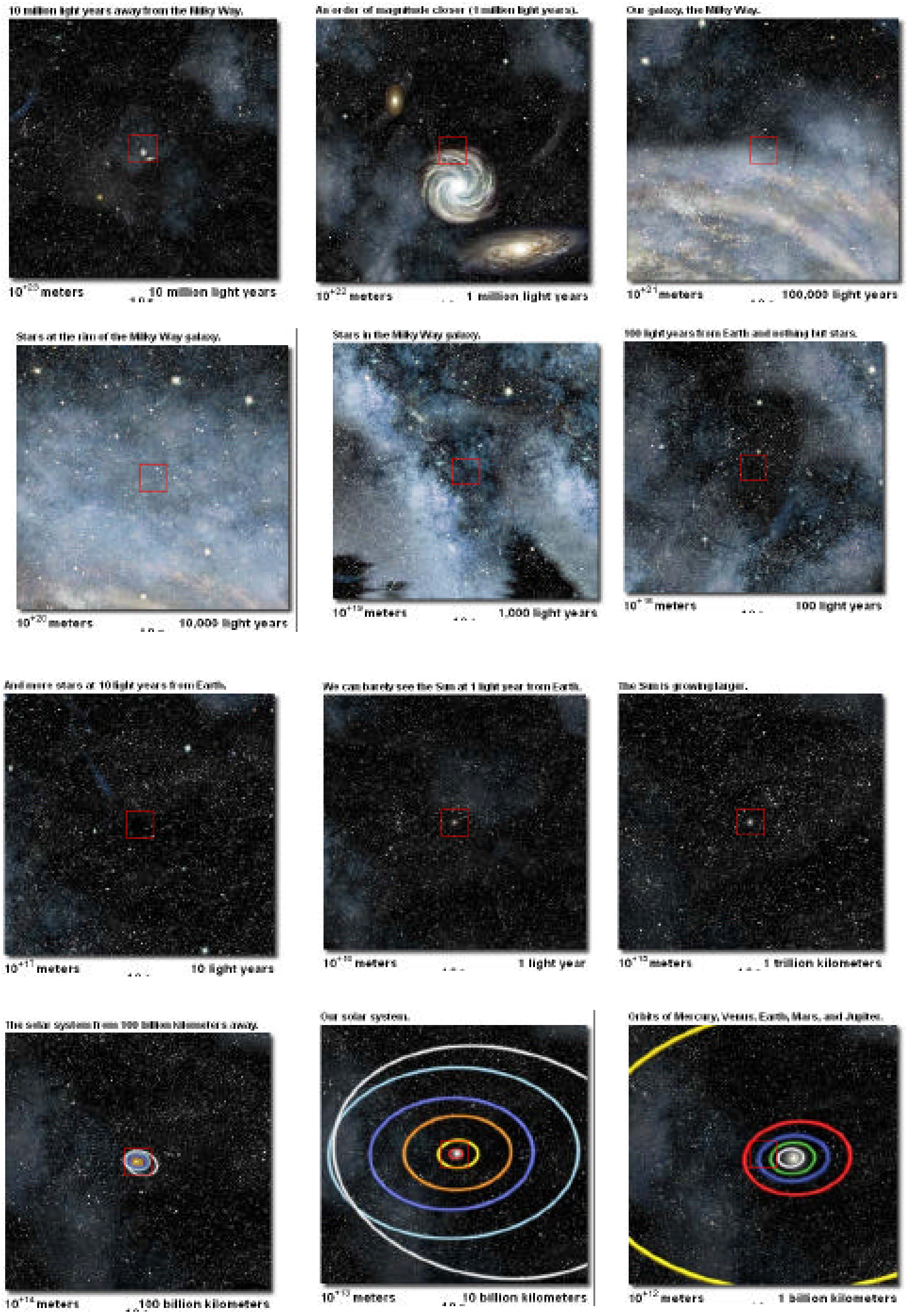


¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

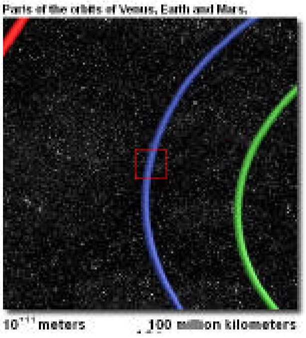
a. No es posible calcular su área, ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Tantas unidades cuadradas se hayan dispuesto
c. Tiene área infinita
d. Tantas veces la superficie inicial se haya dispuesto
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

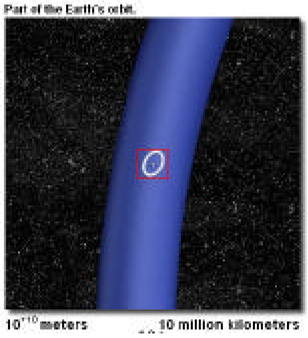
8. Observa la siguiente secuencia de imágenes



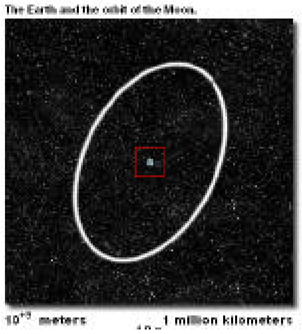
Parts of the orbits of Venus, Earth and Mars.



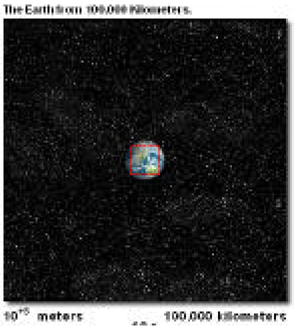
Part of the Earth's orbit.



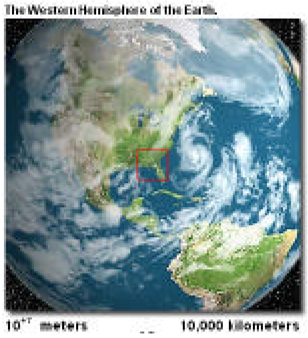
The Earth and the orbit of the Moon.



The Earth from 100,000 Kilometers.



The Western Hemisphere of the Earth.

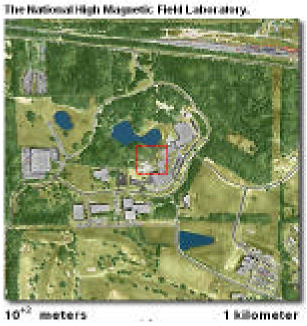


Southeastern United States.

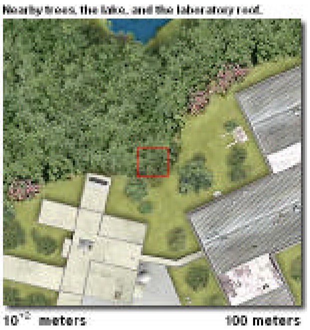
Leon, Wakulla, and Franklin Counties in Florida.

Southwest Tallahassee, Florida.

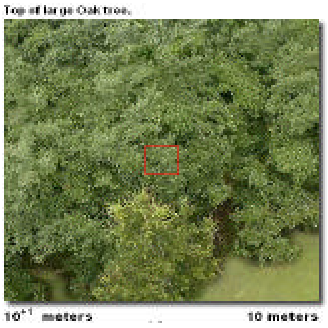
The National High Magnetic Field Laboratory.



Nearby trees, the lake, and the laboratory roof.

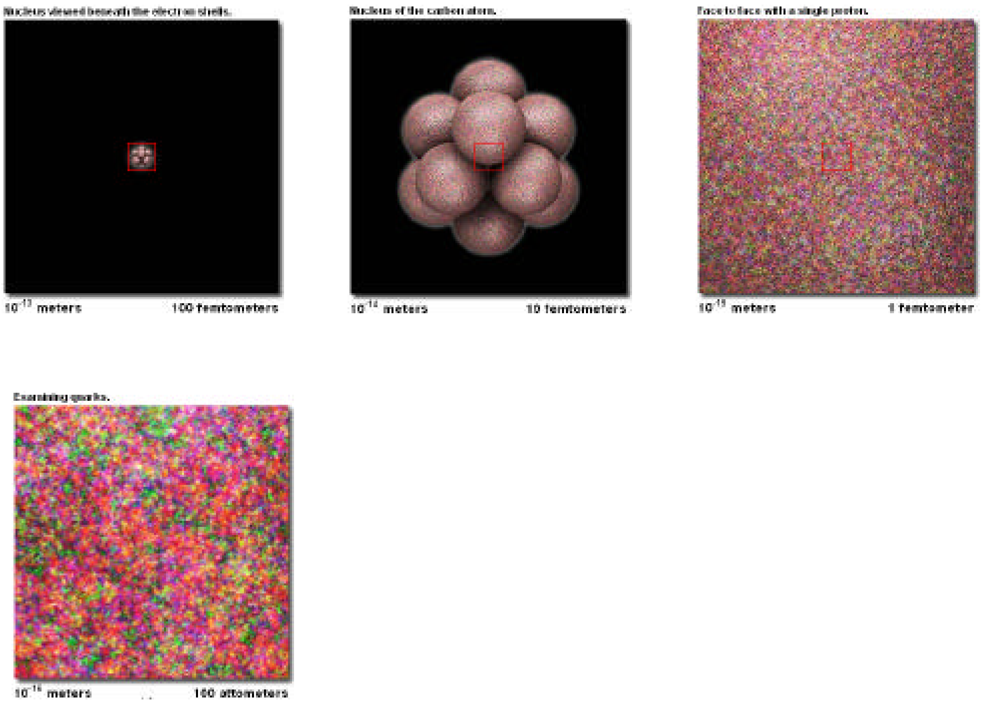


Top of large Oak tree.



Oak tree branch with leaves.


Oak tree leaves at actual size.
10^{-1} meters
10 centimeters
Surface of an Oak leaf magnified 10 times.
10^{-2} meters
1 centimeter
Surface of an Oak leaf magnified 100 times.
10^{-3} meters
1 millimeter
Cells on the leaf surface.
10^{-4} meters
100 micrometers
Individual leaf cells.
10^{-5} meters
10 micrometers
The nucleus of a leaf cell.
10^{-6} meters
1 micrometer
Chromatin in the leaf cell nucleus.
10^{-7} meters
100 nanometers
Individual DNA strands.
10^{-8} meters
10 nanometers
DNA nucleotide building blocks.
10^{-9} meters
1 nanometer
Outer electron cloud of a carbon atom.
10^{-10} meters
100 picometers
Electron in the inner electron shell.
10^{-11} meters
10 picometers
Empty space between inner shell and nucleus.
10^{-12} meters
1 picometer

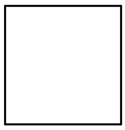


¿Cuánto más crees que nos podríamos alejar a partir de la primera imagen y cuánto más crees que nos podríamos acercar a partir de la última imagen?

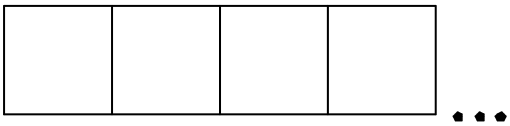
a. No es posible alejarnos más a partir de la primera imagen y tampoco es posible acercarnos más a partir de la última imagen
b. No es posible alejarnos mas a partir de la primera imagen, pero si es posible acercarnos cuanto queramos a partir de la última imagen
c. Es posible alejarnos cuanto queramos a partir de la primera imagen, pero no es posible acercarnos más a partir de la última imagen
d. Es posible alejarnos cuanto queramos a partir de la primera imagen, también es posible acercarnos cuanto queramos a partir de la última imagen
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

9. Considera la siguiente superficie:



Si al lado de ésta disponemos otra igual y repetimos infinitamente este proceso:

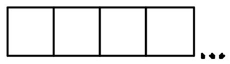


¿Cuál crees que será la suma de las áreas de las superficies?

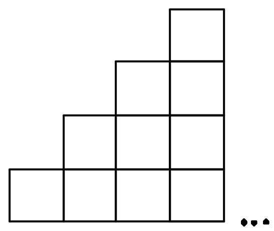
a. No es posible calcular su área, ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Tiene área finita, pero no es posible calcularla
c. Tantas veces la superficie inicial
d. Tiene área infinita
e. Ninguna de las anteriores

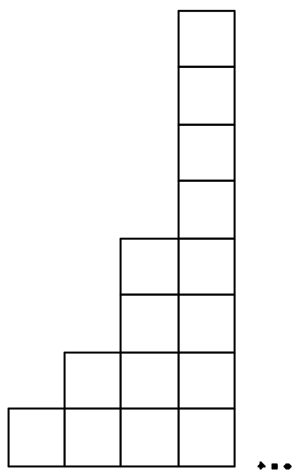
No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

10. Si se tiene una disposición de infinitas superficies iguales como muestra la figura:



¿Crees que sería posible considerar esa disposición de estas otras maneras?

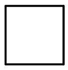




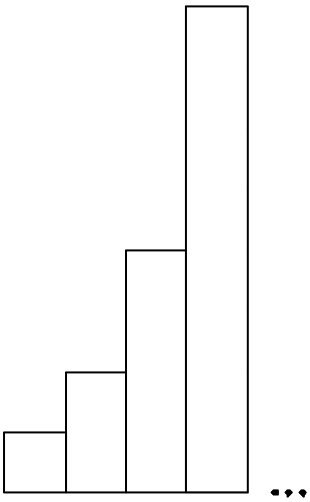
a. No, porque estas disposiciones requieren de mas superficies
b. No, porque no tienen la misma forma que la disposición anterior
c. Sí, porque hay infinitos rectángulos
d. De la primera manera si, pero no de la segunda
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

11. Considera la siguiente superficie:



Si al lado de ésta disponemos otra de igual base que el anterior, pero de doble altura y repetimos infinitamente este proceso, así:



¿Cuál crees que será la suma de las áreas de los rectángulos?

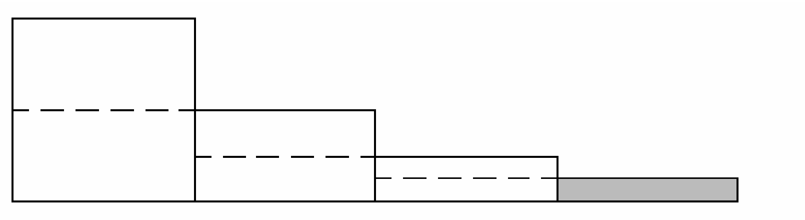
a. No es posible calcular su área ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Tiene área finita, pero no es posible calcularla
c. Tiene área finita y será un múltiplo de dos
d. Tiene área infinita
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

Aporte de información:

Llamaremos **escalera** a la disposición de rectángulos de izquierda a derecha, de forma tal que *tengan igual base* y esté uno contiguo al otro en forma horizontal. Si cada rectángulo tiene mayor altura que el inmediatamente anterior la llamaremos **escalera creciente**, si se disponen infinitos rectángulos de esta manera, **escalera infinita creciente**. Si por el contrario, cada rectángulo tiene menor altura que el inmediatamente anterior, la llamaremos **escalera decreciente**, si se disponen infinitos rectángulos de esta manera, **escalera infinita decreciente**. Así mismo, llamaremos **área de una escalera** a la suma de las áreas de los rectángulos que la conforman.

12. En la siguiente escalera decreciente cada rectángulo tiene la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:

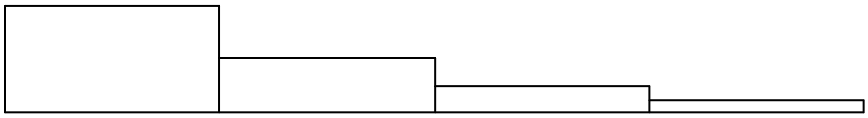


¿Cuál crees que es el área de la parte sombreada con respecto al área del primer rectángulo?

a. La cuarta parte
b. La octava parte
c. La quinceava parte
d. La dieciseisava parte
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

13. En la siguiente escalera finita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:

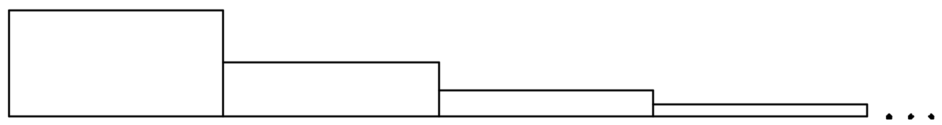


¿Cuál crees que será el área de la escalera?

a. No es posible calcular su área, ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Tiene área finita, pero no es posible calcularla
c. Tiene área infinita
d. Será el área del primer rectángulo, más su mitad de área, más su cuarta parte de área, más su octava parte de área
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

14. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:

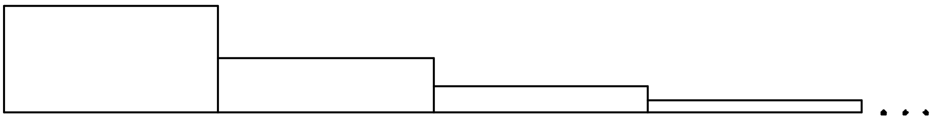


Si tomamos un rectángulo cualquiera de la escalera, diferente al primero, ¿qué área tendrá con respecto al área del rectángulo inmediatamente anterior?

a. No es posible calcular su área, ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. La mitad del área del rectángulo anterior
c. La cuarta parte del área del rectángulo anterior
d. El área de cada rectángulo no es siempre la misma parte del anterior.
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

15. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la mitad de la altura del rectángulo inmediatamente anterior:

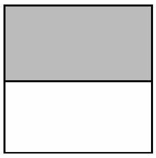


¿Cuál crees que será el área de la escalera?

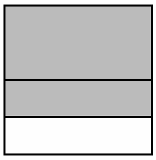
a. No es posible calcular su área ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Tiene área finita pero no es posible calcularla
c. Tiene área infinita
d. Dos veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

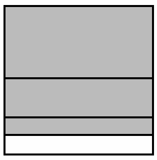
16. Si dividimos un rectángulo en dos superficies de igual área y sombreamos una de ellas, así:



Se toma la superficie que ha quedado sin sombrear y la dividimos en dos superficies de igual área sombreando una de ellas, así:



De nuevo se toma la superficie que ha quedado sin sombrear y la dividimos en dos superficies de igual área sombreando una de ellas, así:

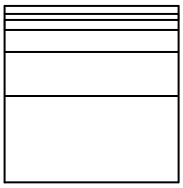


y continuamos este proceso infinitamente, ¿cuál será la suma de las áreas de las superficies sombreadas ?

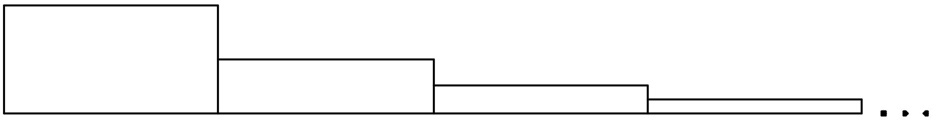
a. La suma se aproximará al área del rectángulo inicial
b. Tiene área finita pero no es posible calcularla
c. Tiene área infinita
d. El área del rectángulo inicial
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

17. El siguiente rectángulo se ha divido a la mitad; luego, la parte superior a la mitad; de nuevo, la parte superior a la mitad, y así sucesivamente como muestra la figura:



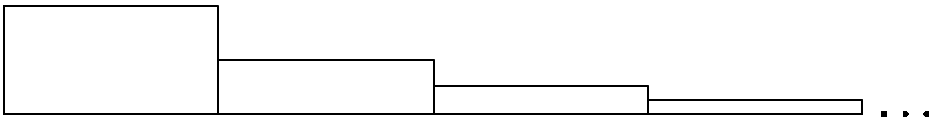
¿Crees que es posible disponer las superficies rectangulares en las que ha quedado dividido el anterior rectángulo como una escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior, como muestra la figura?



a. No, porque el área del rectángulo es finita y la de la escalera infinita
b. No, porque las disposiciones no tienen la misma forma
c. Sí, porque aunque hay infinitas superficies, el área de ambas disposiciones es finita
d. Sí, porque el área de la escalera es aproximadamente igual al área del rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

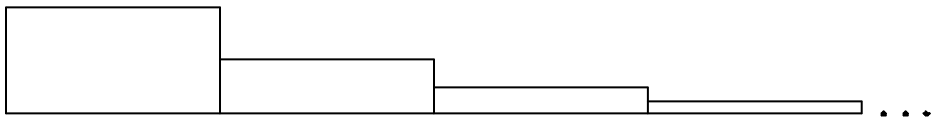
18. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior, ¿cuál crees que será el área de la escalera?



a. Se aproxima a dos veces el área del primer rectángulo
b. Tiene área finita pero no es posible calcularla
c. Tiene área infinita
d. Dos veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

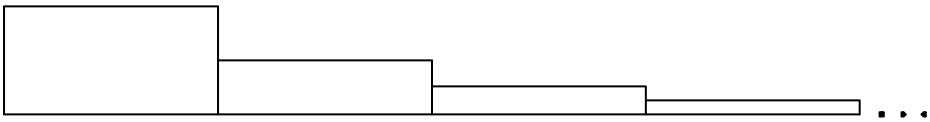
19. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que cada rectángulo tiene la mitad de la altura del anterior:



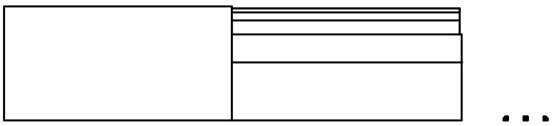
Utilizando los rectángulos de esta escalera, ¿crees que es posible a partir del primero, formar una escalera creciente?

a. Si es posible, porque hay infinitos rectángulos en la escalera dada
b. Si es posible, porque a partir de determinado rectángulo la suma de las alturas de los rectángulos que se dispongan sobrepasa la altura del anterior
c. No es posible, porque por más rectángulos que se dispongan, la suma de las alturas de éstos no sobrepasará la altura del primer rectángulo
d. No es posible. Al principio si es creciente, pero después es decreciente ya que la altura de los últimos rectángulos es muy pequeña
e. Ninguna de las anteriores

20. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la mitad de la altura del anterior:



Si al lado del primer rectángulo disponemos los infinitos rectángulos siguientes, así:



¿Cuál es el área de esta escalera?

a. Tiene área finita pero no es posible calcularla ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. El área se aproxima a dos veces el área del primer rectángulo
c. No tiene área, porque se disponen infinitos rectángulos
d. El área es dos veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

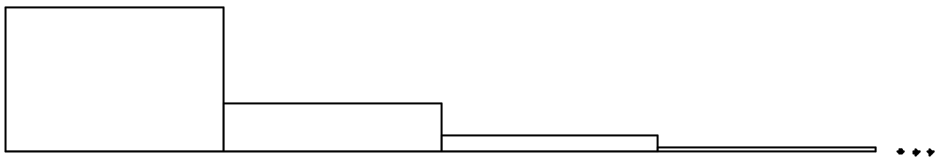
Aporte de información:

La **razón de dos áreas** es el cociente de sus valores en la misma unidad de medida

Diremos que una escalera tiene razón si la razón entre las áreas de dos rectángulos adyacentes es siempre la misma (constante).

La **razón de una escalera** será el cociente entre las áreas de un rectángulo y el inmediatamente anterior.

21. En la siguiente escalera infinita decreciente cada rectángulo tiene como altura la tercera parte de la altura del rectángulo inmediatamente anterior.

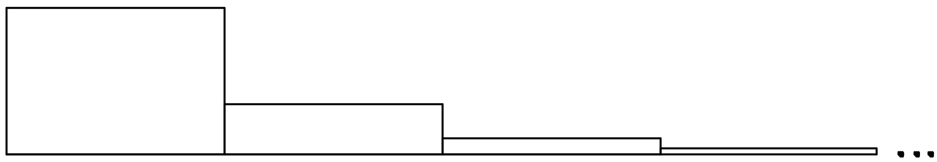


¿Cuál es la razón de la escalera?

a. La razón es un tercio
b. No es posible calcular la razón ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
c. No tiene razón ya que cada rectángulo no es siempre la misma parte del anterior
d. La razón es un noveno
e. Ninguna de las anteriores[1]

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

22. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la tercera parte de la altura del anterior:

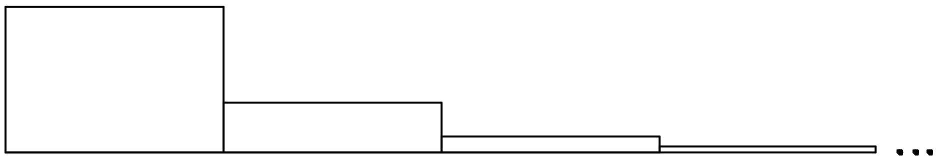


¿Crees que sería posible disponer los rectángulos de esta escalera y formar una escalera infinita creciente?

a. Si es posible, porque hay infinitos rectángulos
b. Si es posible, porque a partir de determinado rectángulo la suma de las alturas de los rectángulos que se dispongan sobrepasa la altura del anterior
c. No es posible, porque por más rectángulos que se dispongan, la suma de sus alturas no sobrepasará la altura del primero
d. No es posible. Al principio si es creciente, pero después es decreciente ya que la altura de los últimos rectángulos es muy pequeña
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

23. Considera la siguiente escalera infinita decreciente en la que la altura de cada rectángulo es la tercera parte de la altura del anterior:



¿Crees que el área de la anterior escalera es infinita?

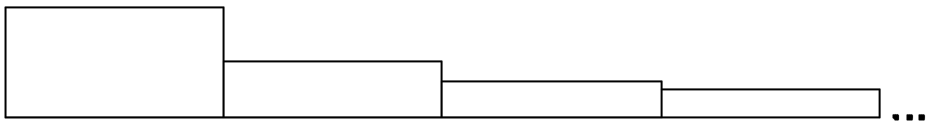
a. No se sabe, ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. No, tiene área finita ya que no se puede formar una escalera infinita creciente
c. Si, tiene área infinita ya que la escalera está formada por infinitos rectángulos
d. No, el área es tres veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

Aporte de información:

Llamaremos **escalera armónica** a la escalera infinita decreciente donde la altura del segundo rectángulo es la mitad de la altura del primero, la altura del tercero es un tercio de la altura del primero, la altura del cuarto es un cuarto de la altura del primero, y así sucesivamente:

24. Considera la escalera armónica

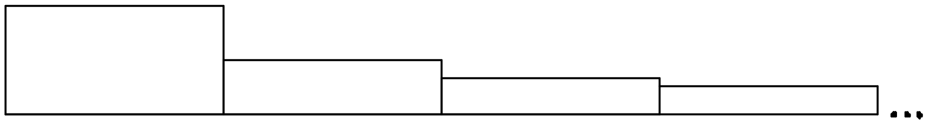


¿Cuál es la razón de la escalera?

a. La razón es un tercio
b. No es posible calcular la razón ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
c. No tiene razón ya que el cociente entre dos rectángulos adyacentes no es siempre igual
d. La razón es un medio
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

25. Considera la escalera armónica:

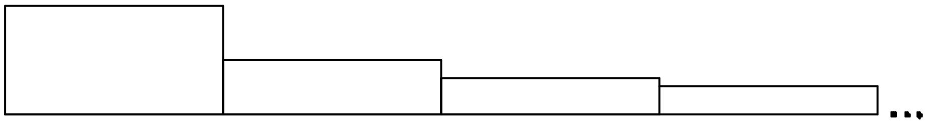


¿Cuál crees que será su área?

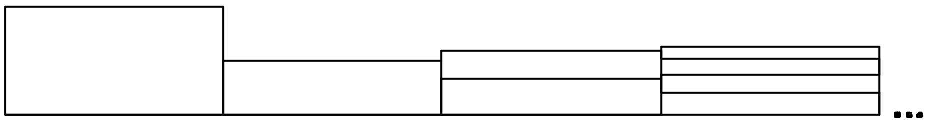
a. Tiene área finita pero no es posible calcularla ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
b. Es aproximadamente dos veces el área del primer rectángulo
c. Tiene área infinita ya que se puede disponer en forma de escalera infinita creciente
d. Es dos veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

26. Considera la escalera armónica:



¿Crees que es posible disponer sus rectángulos de la manera como se muestra en la figura: al lado del segundo rectángulo disponemos los dos rectángulos siguientes, luego los cuatro rectángulos que siguen, y así sucesivamente formando una escalera infinita creciente a partir del segundo rectángulo?



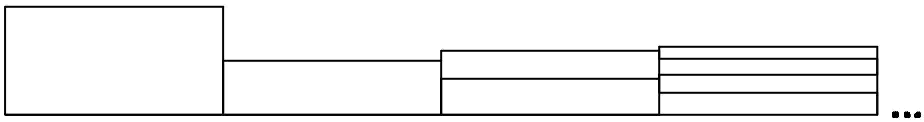
a. Si es posible, porque hay infinitos rectángulos
b. Si es posible, porque a partir de determinado rectángulo la suma de las alturas de los rectángulos que se dispongan sobrepasa la altura del anterior
c. No es posible, porque por más rectángulos que se dispongan, la suma de sus alturas no sobrepasará la altura del anterior
d. No es posible. Al principio si es creciente, pero después es decreciente ya que la altura de los últimos rectángulos es muy pequeña
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

Aporte de información:

La escalera armónica se puede volver creciente.

27. Considera la escalera que se forma con los rectángulos de la escalera armónica:



¿Qué podría afirmarse con respecto al área de esta escalera ?

a. El área se aproxima a tres veces el área del primer rectángulo
b. Tiene área finita pero no es posible calcularla ya que no se conocen las dimensiones de la superficie inicial
c. Tiene área infinita ya que después del segundo rectángulo se forma una escalera infinita creciente
d. El área es tres veces el área del primer rectángulo
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

28. ¿Crees que cualquier escalera infinita decreciente tiene área?

a. No siempre. Sólo será posible cuando la escalera tenga razón
b. No siempre. Sólo será posible cuando no se pueda disponer en forma de escalera infinita creciente
c. No es posible calcularla porque tiene infinitos rectángulos
d. Sí. todas las escaleras infinitas decrecientes tienen área
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

29. ¿Siempre es posible construir una escalera infinita decreciente a partir de un rectángulo?

a. Nunca, porque el rectángulo tiene área finita, la escalera no.
b. Nunca, porque son superficies diferentes
c. Si, porque un rectángulo puede ser dividido en infinitas superficies
d. Sí, porque ambos tienen área finita
e. Ninguna de las anteriores

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

30. ¿Siempre es posible construir un rectángulo a partir de una escalera infinita decreciente?

a. Nunca, porque el rectángulo tiene área finita, la escalera no.
b. No siempre, porque algunas escaleras infinitas decrecientes no tienen área
c. Sí, porque las escaleras decrecientes tienen área finita
d. Nunca, porque son superficies diferentes
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta

31. ¿Cuáles crees que serían las condiciones que se deben cumplir para que una escalera infinita decreciente tenga área?

a. No podría decir ninguna condición
b. Si es una escalera infinita decreciente, su área siempre será finita
c. Tendrá área finita cuando no sea posible disponerla en forma de escalera infinita creciente
d. Si es una escalera infinita, nunca se podrá hallar su área
e. Ninguna de las anteriores.

No te devuelvas. No pases la página hasta haber contestado la pregunta