A PROPÓSITO DE LA HIDROSTÁTICA: UNA REORGANIZACIÓN CONCEPTUAL DESDE LA PERSPECTIVA EULERIANA

YIRSEN AGUILAR MOSQUERA

Tesis de grado presentada como requisito
Parcial para optar al título de
Magíster en Docencia de las Ciencias Experimentales

Director: ÁNGEL ROMERO CHACÓN

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
FACULTAD DE EDUCACIÓN
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES
MEDELLÍN
2006.

Esta generalización que concibo, lejos de Oscurecer la realidad, por el contrario nos Revelerá las leyes de la naturaleza en todo Su esplendor, dándonos una razón más para Maravillarnos ante su belleza y sencillez.

EULER

INDICE

Introducción 5

Capitulo I. Enseñanza y formalización de los fenómenos físicos 7

Sobre la enseñanza y aprendizaje de la física 7

Usos de la historia y epistemología de la física en la educación en física 10

Sobre los procesos de matematización y construcción de fenomenologías 14

El concepto de presión en el contexto de la enseñanza 21

Capitulo II. El equilibrio de los fluidos en la perspectiva euleriana 24

La formalización del estado de equilibrio de los fluidos: El caso de la presión interna 24

Algunos presupuestos epistemológicos y la formalización de la presión interna en el análisis de la hidrostática 25

El calculo diferencial y la construcción de magnitudes físicas en los procesos de formalización 27

Análisis a partir de la determinación de un elemento fluido 36

Determinación de la masa fluida y las componentes de la fuerza motriz 40

Determinación de las fuerzas debidas a la diferencia de presión 41

Condiciones para que la masa fluida pueda estar en equilibrio bajo la acción de las fuerzas P,Q y R 45

Capitulo III. Relación física matemática 52

El uso del calculo diferencial en la formalización de los fluidos: Una forma de mostrar la relación física matemática 52

Representación de las variables físicas: El caso de la presión interna

representada por la altura 57

Representación y medición de las variables intensivas: El caso de la presión interna 58

La presión interna como variable de estado 67

Variables de estado y variables de proceso 68

Análisis por estados y transformaciones 72

Capitulo IV. Actividades de análisis 77

Actividad experimental: Determinación del estado de presión como campo de presiones y en función de la profundidad 79

Taller N° 1. El equilibrio de los fluidos con la fuerza gravitacional como prototipo en el análisis 80

Taller N° 2. Variación del estado de presión de un fluido con la altura (profundidad) 82

Taller N° 3. Determinación de los estados de presión en términos de la densidad del fluido y de la altura 84

Conclusiones 86

Bibliografia 96

A PROPÓSITO DE LA HIDROSTÁTICA: UNA REORGANIZACIÓN CONCEPTUAL DESDE LA PERSPECTIVA EULERIANA

INTRODUCCIÓN

Este informe de tesis hace parte de los resultados parciales de la investigación, *"Sobre los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos",* que se realiza en un convenio entre la Universidad de Antioquia y la Universidad Pedagógica Nacional, investigación que está siendo financiada por estas dos universidades y COLCIENCIAS

El uso de la historia y la epistemología de las ciencias en la enseñanza de física que aquí se propone, es considerado como posibilitador de reconstrucciones y reorganizaciones conceptuales: un uso que obedece a una intencionalidad específicamente pedagógica en el sentido que los análisis hechos, en la perspectiva de Euler; pretenden aportar elementos en la construcción de rutas conceptuales alternativas para la enseñanza de los fenómenos hidrodinámicos. Se realiza un análisis histórico epistemológico de la manera como L. Euler configura y presenta su concepto de presión interna, expuesto en su memoria titulada Principes géneraux de l'equilibre des fluidos (1757). En este análisis, que tiene pretenciones pedagógicas, se muestra cómo Euler diferencia los conceptos de presión interna y fuerza, considerando la presión como una variable de estado que da cuenta de la condición mecánica en la cual se encuentra una masa fluida en un momento dado. Se analiza además cómo el uso del cálculo diferencial parcial en la organización de los fenómenos hidrostáticos, permite a Euler *dar forma* a esta clase de fenómenos, aspecto por el cual se constituye en una fructífera manera de significar la relación entre la física y las matemáticas.

Para materializar la intencionalidad pedagógica que se tiene en esta investigación, se presentan cuatro capítulos en los cuales se precisa sobre lo siguiente:
En primer capitulo se adelanta una reflexión que posibilita realizar aproximaciones sobre los problemas de enseñanza y la formalización de los fenómenos físicos. Se pretende contextualizar el uso de la historia y la epistemología en la enseñanza de la física, igualmente se resalta la importancia que tiene el análisis de las obras originales en aras de la construcción de rutas alternativas en la solución de los problemas de la enseñanza de la física.

En el capítulo dos se hace un análisis de la perspectiva euleriana centrado en su propuesta sobre el equilibrio de los fluidos. En éste se profundiza sobre algunos aspectos relacionados con la formalización del estado de equilibrio de los fluidos y el análisis del fluido a partir de una discretización en su interior.

En el capitulo tres se trata sobre la relación física matemática. Se examina como a través del uso del cálculo diferencial, Euler puede mostrar una forma de significar una relación de constitución entre la física y la matemática. En este aspecto se resalta lo que significa representar una magnitud física, al igual que las características y significados de las variables de estados. Además, se aborda una forma de significar la presión como la variable de estado la cual permite caracterizar la condición en la que se puede encontrar una masa fluida.

Finalmente se presenta el capitulo cuatro con el cual se pretende empezar una aproximación y profundización en la propuesta de abordar la Hidrostática asumiendo la presión como variable de estado. Para este propósito se diseñan unas guías que pueden posibilitarle al estudiante la apropiación de los conceptos que involucra este nuevo enfoque.

CAPITULO I: ENSEÑANZA Y FORMALIZACIÓN DE LOS FENÓMENOS FÍSICOS

1.1 Sobre la enseñanza y aprendizaje de la física

Múltiples investigaciones en educación en ciencia, resaltan la dificultad que presentan los estudiantes para pasar del conocimiento común al conocimiento científico (Pozo, 2000)[1]. En este sentido Pozo afirma que las dificultades de aprendizaje que encuentra el estudiante están determinadas por la forma en que organiza su conocimiento a partir de sus propias teorías implícitas. De esta manera la comprensión de la física implicaría superar las restricciones que imponen las propias teorías de los alumnos.

Por otra parte, usualmente en la enseñanza de la física se asume el aspecto metodológico independiente del aspecto disciplinar, de allí que numerosas investigaciones se centran sólo en el componente metodológico porque se considera que el problema de la enseñanza de la física es un problema centrado en la organización de contenidos, es decir, un problema sólo de orden didáctico y no en relación con el pensar la física, que posibilite una reorganización conceptual.

Consecuente con lo anterior, en la enseñanza se asume una relación unidireccional entre el significado y el uso de los conceptos, en el sentido de que se considera que la forma de significar los conceptos determina el uso de los mismos. A esta linealidad, en la forma de significar tal relación, subyace, igualmente, una manera particular de entender la relación entre la forma de significar la física y la enseñanza de la misma. En tal sentido, el problema de la enseñanza de la física se puede reducir a la mera organización de conceptos o a

[1] POZO, M. J. El aprendizaje de la física. En: Aprender y enseñar ciencia. Ed. Morata, Madrid, 2000. Pp. 204-262.

la búsqueda de un lenguaje apropiado para transmitirlos, lo cual pone en evidencia la clara separación que tradicionalmente se hace entre los aspectos disciplinar, conceptual y metodológico; separación que en algunos casos motiva a abordar los problemas de la enseñanza de la física sólo desde el componente metodológico.

Sin embargo, sobre el problema de la enseñanza de la física surgen alternativas que consideran que la forma de significar la física es determinante en la forma de enseñarla, en el sentido de que el problema de la enseñanza debe abordarse, en la didáctica, conjuntamente desde lo disciplinar, lo conceptual y lo metodológico. Es precisamente en este sentido que se considera que un análisis histórico y epistemológico, puede aportar en la construcción de rutas alternativas para la solución de algunos problemas latentes en la enseñanza de la física, sobre todo si se tiene en cuenta que el carácter histórico de significar la física está ligado a contextos y problemas particulares. Lo anterior implica que la forma de entender y significar un concepto físico determina su uso, al igual que el uso transforma la forma de significarlo, como también, es a través del uso del concepto que se hace explícito la forma de significarlo. (Paty, 1999) [2].

En tal sentido, tal como se ha mencionado, la forma como se entiende y se significa la física determina una forma particular de enseñanza, y es precisamente en la enseñanza que se hace explícito una forma de significar lo que es la física, al igual que a través de esta actividad se propician cambios en la forma de significarla. Esta manera de ver los significados y usos de los conceptos y de la física, posibilita un tipo de organización particular en la enseñanza, en el sentido de que el aspecto metodológico surge, precisamente, en las reflexiones conceptuales que se adelantan, es decir, desde el pensar la física se plantean

[2] PATY, Michael. La idea de cantidad en el origen de la legitimidad de la matematización en física. *Conferencia en la filosofía de Marx Wartofsky,* Nueva York, Universidad New School, 5-6 marzo 1999 (Marzo 6)

estrategias metodológicas. En este contexto, el problema de la enseñanza no solo es visto como un problema de organización de contenidos, ni como un problema centrado en la búsqueda de formas adecuadas (uso adecuado de lenguaje, lo que llaman transposición didáctica) de transmitir, sino que por el contrario, es un problema que debe abordarse desde la reflexión disciplinar en aras de la reorganización conceptual. Bajo estas circunstancias es de resaltar entonces que, el problema de esta investigación está centrado en la enseñanza de la física, y se propende por la construcción de rutas alternativas de solución desde el pensar de la física, ya que se considera que la concepción que se tiene sobre lo que es la física determina el qué y cómo enseñarla. En este sentido, se considera que realizar un análisis histórico y epistemológico de las obras originales de los autores, puede aportar significativamente en posibles soluciones al problema de la enseñanza de la física.

Por otra parte, la Historia de las Ciencias como campo disciplinar específico muestra que no existe un único modo de historiar el pasado de la actividad científica sino que, por el contrario, se cuenta con una variedad de historia de las ciencias, cada una de las cuales agencia una cierta concepción de ciencia y de la dinámica científica. En este sentido, desde el desarrollo del campo de la Historia de la Ciencia como disciplina diferenciada se pueden identificar distintos enfoques sobre la dinámica científica: la historia de las ideas y conceptos científicos, los estudios de los contextos sociales y su relación con el conocimiento científico, los estudios de la difusión y recepción de las teorías científicas y su relación con la conformación de comunidades científicas, entre otros (Shortland & Warwick, 1989).

A pesar de esta diversidad de enfoques históricos de las ciencias y de justificaciones de su uso, algunos estudios han resaltado un uso generalizado Historia de la Enseñanza de la Ciencia en la educación: se trata de aquellos enfoques que asumen el desarrollo de la Ciencia como de hecho histórico, es

decir, que conciben la dimensión histórica como natural en intrínseca al conocimiento científico mismo (Romero y Rodríguez, 2000).

1.2 Usos de la historia y epistemología de la física en la educación en física

En las tres últimas décadas es creciente el consenso de la comunidad internacional en cuanto a los aportes importantes que hacen la historia y la epistemología de las ciencias a la enseñanza de la ciencia. En particular, es cada vez más frecuente el reclamo de la necesidad de una enseñanza "contextualizada" de la ciencia, que destaque los aportes de la historia y la epistemología de la ciencia en el mejoramiento de la enseñanza (Matthews, 1994; Shortland & Warwick, 1989; Romero y Rodríguez, 2000; Ayala, 2000). Estos requerimientos se justifican por que se considera que el uso de la historia y la epistemología en la enseñanza: Motiva y despierta el interés por la ciencia; proporciona una mejor comprensión de los conceptos científicos mostrando su desarrollo y dinámica de construcción; propicia la comprensión de cómo se generan y validan los diferentes productos de la actividad científica; permite establecer relaciones entre los contenidos científicos y los intereses éticos, culturales y políticos de los contextos donde se produjeron (Matthews 1994)[3]. A demás, es pensable que el uso de historia y epistemología de las ciencias en la enseñanza, puede iluminar ideas y métodos olvidados, los cuales pueden contribuir a resolver problemas tanto de orden científico, conceptual y metodológico. Kuhn considera que: "en la educación en ciencias raramente se anima a los estudiantes de ciencias para lean los clásicos históricos propios de sus campos, trabajos en los cuales podrían descubrir otras maneras de considerar los problemas que aparecen en sus libros de texto, normas de solución que, dentro del campo de sus respectivas

[3] MATTHEWS, M. R. Citado por ROMERO et all, en: ROMERO et all. Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos: El caso de los fenómenos mecánicos. Investigación, Universidad de Antioquia, 2002

profesiones, han sido descartados y sustituidos por otros"[4]. En este sentido se puede decir que un enfoque histórico y epistemológico que posibilite recrear los problemas que inicialmente se han planteado en la física no sólo posibilita una reflexión conceptual desde los problemas originales sino que igualmente posibilita una reorganización conceptual desde diferentes enfoques, fortaleciendo tanto el aspecto disciplinar como el componente pedagógico – didáctico, ya que pueden surgir enfoques diferentes en la solución de un mismo asunto.

A pesar del consenso que se tiene sobre estas consideraciones, es necesario percatarse que existen diversos modos de significar la historia (Carr, 1983)[5]. Desde una primera significación, con la historia de la disciplina se reconstruyen los datos y sucesos del pasado tal como acontecieron. Desde tal perspectiva, la historia es considerada como un cúmulo de datos o hechos del pasado, al historiador sólo le queda organizarlos sin que sufran alteración alguna, de modo que el proceso receptivo del sujeto sea pasivo, ya que, los datos hacen la historia por que ellos hablan por sí solos. En este sentido Carr considera que a esto se le puede llamar sentido común de la historia, ya que, bajo estas circunstancias, la historia consiste en un cuerpo de hechos verificados.

En otro modo de significar la historia se considera que la necesidad de fijar los datos básicos no se apoya en ninguna cualidad de los hechos mismos, sino en una decisión que formula el historiador a priori. En este sentido los datos no hablan por sí solos; los hechos sólo hablan cuando el historiador apela a ellos. Bajo estas circunstancias, su condición de hecho histórico dependerá de una cuestión de interpretación (Carr, 1983). De esta manera, el modo de significar la historia está ligado a interpretaciones y a contextos particulares.

---

[4] KUHN, Thomas S. La Tensión Esencial. Fondo de Cultura Económica, Mexico, 1982.

[5] CARR, Eduar H. El historiador y los hechos. Tomado de: ¿Qué es la historia? Ed. Ariel, Barcelona, 1983, pp. 49-76.

Teniendo en cuenta lo anterior puede decirse que a cada modo de significar la historia subyace un modo particular de significar la ciencia. En tal sentido, y siguiendo a Ayala, consideramos en esta investigación, que la forma más adecuada en la enseñanza, es considerar la historia como la construcción del hombre a partir de sus interpretaciones, lo cual permite que los profesores de ciencias se vinculen a procesos de "recontextualización de saberes", que exija de ellos la elaboración de criterios de selección de un campo problemático, la toma de posición acerca de los fenómenos que intenta organizar (inquietudes, comprensión que tiene de ellos, etc) y que tenga en cuenta los aportes que al respecto han hecho otros autores; proceso en el cual el papel de la historia y epistemología de las ciencias es determinante (Ayala, 2000)[6].

Según estos autores, y tal como lo señala Kuhn (1982), a pesar de las evidentes ventajas del sistema de enseñanza a través de libros de texto, este sistema comparte ciertos dogmatismos de base. Los conceptos y principios o se discuten o se aceptan y se hacen operativos; en este sentido el retorno a las fuentes contribuye a:

- Entender que los conceptos que finalmente fueron decantados en un paradigma, y que son presentados de manera acabada y precisa en los libros de texto, tuvieron una génesis y un proceso de desarrollo; entender esto posibilita enriquecer el concepto, flexibilizarlo y sugerir nuevos significados y relaciones.
- Identificar las problemáticas que originalmente motivaron la elaboración de un conocimiento particular y, en muchas ocasiones, las contradicciones y los debates entre posturas contrapuestas; problemáticas y debates que, en general, no aparecen en los libros de texto.

[6] AYALA, M. Mercedes, *Historia de las Ciencias y la Formación de Profesores de Física*. Relatorio Final de la VII Conferencia Interamericana sobre Educación en Física, Portoalegre (Canela)-Brasil, julio 2000, págs-75-78.

- Responder adecuadamente a preguntas que se suelen hacer los estudiantes sobre el origen y fundamentación de los principios básicos de la física.
- Entender, por comparación, los procesos de recontextualización que se operan en los libros de texto. Es decir, resulta posible tomar conciencia de los cambios en el significado de los conceptos y en la articulación respectiva, de las transformaciones en la formulación de los problemas, en el lenguaje, en las formas de argumentación y en los criterios de coherencia y de rigor.

La recontextualización de saberes es, entonces, una actividad constructiva y dialógica en busca de elementos para la elaboración o solución de un problema o la construcción de una imagen de una clase de fenómenos, que depende inevitablemente de los intereses, conocimiento y experiencia de quienes la realizan; vivencia que aporta, además, elementos para la identificación de situaciones problemáticas relevantes para los sujetos que se inician en esta actividad de construcción de representaciones del mundo natural y de la ciencia (Romero, 2002).

En este contexto de significación, por una parte, se puede ver una vez más la importancia que tiene para nuestra investigación el uso de obras originales para abordar el problema del equilibrio de los fluidos. Por otra parte, un enfoque histórico epistemológico, puede permitir ver cómo los diferentes modos de significar la física están ligados a contextos particulares y a problemas propios de ese contexto, lo que posibilita significar la física como una disciplina históricamente constituida.

1. 3 Sobre los procesos de matematización y construcción de fenomenologías

Usualmente en la enseñanza de la física, la forma tradicional de significar la formalización de los fenómenos físicos se ha reducido sólo al uso de algoritmos y símbolos matemáticos, situación que se materializa en la poca reflexión de los fenómenos físicos para la construcción de los conceptos físicos.

Esta situación se evidencia en el fracaso académico de los estudiantes de física, al punto que se puede afirmar que uno de los factores incidentes es el uso de las matemáticas que hace el profesor de física en las didácticas, en las cuales no solo se confunden los procesos de formalización de los fenómenos físicos con los procesos de matematización, sino que estos últimos se reducen a la aplicación de fórmulas y algoritmos.

La forma usual de significar y justificar la matematización en física, se expresa en términos universales e intemporales, es decir, se considera que tanto el modo de significar la matematización como su justificación, es independiente de un contexto y de unos problemas que han surgido en momentos particulares (Paty, 1999)[7]. A este respecto resulta lícito pensar que, tal universalización puede resultar problemática en la enseñanza de la física, ya que las explicaciones en física, igualmente, tendrían que ser en términos universales y no ligadas a unos contextos particulares. De este modo la enseñanza se centra en la mera transmisión de conocimientos que ha creado una comunidad científica y no en la organización de experiencias o construcción de fenomenologías. En este sentido, es importante resaltar que el modo de significar la relación física matemática es de

[7] PATY, Michael. La idea de cantidad en el origen de la legitimidad de la matematización en física. *Conferencia en la filosofía de Marx Wartofsky,* Nueva York, Universidad New School, 5-6 marzo 1999 (Marzo 6)

carácter histórico, en donde el contexto y los problemas tratados han jugado un papel importante.

Bajo estas circunstancias se considera que adelantar un análisis histórico crítico, ayuda a explicitar si existen diversos modos de asumir la relación entre la matemática y la física, al igual que el significado de lo que es la matematización. Puede decirse que a la forma de significar el matematizar en física, subyace una forma de significar la física y la enseñanza de la misma. Si la matematización se reduce a la aplicación de ecuaciones para obtener números, el objeto de la física igualmente se reduce a la asignación de números a los fenómenos físicos, lo cual se materializa en la separación entre teoría y experiencia. Esta situación indudablemente resulta problemática en la actividad de enseñanza de la física si se tiene en cuenta que todo proceso de formalización está mediado de modo simultáneo por un proceso de teorización y uso de la experiencia. En este sentido, la problemática es de un orden complejo, situación que motiva a plantear, en la enseñanza de la física ¿cómo potenciar el desarrollo de los procesos de matematización de los fenómenos físicos en los estudiantes? Sobre esta pregunta, se puede decir que se presentan varias vías, sin embargo en esta perspectiva se opta por la que permita a los estudiantes establecer relaciones entre variables, como alternativa para la construcción de fenomenologías.

En el análisis que se hace de algunos textos de nivel universitario, en el de Zemansky por ejemplo, y de la básica, se puede ver como la forma de significar la matematización en física se reduce a la mera aplicación de algoritmos a las situaciones físicas, limitándose el trabajo en la física a la simple aplicación de fórmulas matemáticas, sin reflexión alguna en el aspecto fenomenológico. En estos términos puede pensarse que formalizar es aplicar una ecuación matemática a una situación particular de la física. Esto muestra el uso que hace el profesor de física de las matemáticas en las didácticas tradicionales, en donde se confunde no sólo los procesos de formalización de los fenómenos físicos con los procesos

de matematización, sino que estos últimos se reducen a la aplicación de fórmulas y algoritmos, con la intención de que el estudiante resuelva satisfactoriamente ejercicios y problemas propuestos en los libros-texto (Romero, 2003)[8].

Esto justifica la importancia de adelantar reflexiones que permitan asumir que el matematizar un fenómeno, debe significarse de un modo más general, de modo que no se limite, en la actividad de la enseñanza, a sobreponer el componente matemático al fenómeno, al respecto Romero considera:

> *El papel que juega la experimentación es de fundamental importancia en la enseñanza de la física. Por medio de un análisis de los procesos de cuantificación de magnitudes físicas como la velocidad instantánea y la temperatura, se ha mostrado que las prácticas experimentales se encuentran en estrecha relación con las construcciones conceptuales. Medir una magnitud física no es un problema meramente empírico relacionado con el uso de instrumentos para la obtención de datos; tampoco es un problema teórico relacionado con la asignación arbitraria de cifras a las propiedades y su posterior manipulación a través de algoritmos: se trata, ante todo, de un problema de adecuación entre las formas de razonamiento –como son el pensamiento numérico o el geométrico– y las fenomenologías identificadas en los respectivos procesos o transformaciones*[9].

Sin embargo, tal como se ha mencionado, se debe reconocer el papel importante que desempeñan las matemáticas en la física, sobretodo si se tiene en cuenta que la física, puede asumirse como una actividad de conceptualización y matematización, es decir, una actividad atravesada simultáneamente por un proceso de construcción conceptual y de matematización; esto adquiere mayor

[8] Ibidem
[9] ROMERO, et all. Los procesos de matematización de los fenómenos físicos.

interés si se hacen consideraciones como las siguientes: “En la física, los fenómenos son representados a través de conceptos que son expresados en forma de magnitudes o cantidades, dotados de definiciones exactas en una forma matemática. Las relaciones de conceptos físicos son relaciones entre estas magnitudes que toman generalmente forma de ecuaciones o de proposiciones cuantitativas como principios...” (Paty, 1999)[10].

En particular, en la enseñanza de la física se presenta un amplio reconocimiento de la relación existente entre la física y la matemática, lo cual motiva a adelantar reflexiones entorno a tal relación, ya que es lícito pensar que reflexionar en este sentido puede minimizar los fracasos que por décadas se han tenido en el intento de la enseñanza de la física en nivel medio. A este respecto se puede decir que los resultados que se obtienen en la enseñanza de la física muestran que una de las asignaturas de mayor dificultad, en la enseñanza media, es la física; igualmente, investigaciones en enseñanza de la física han mostrado las grandes deficiencias que persisten en los estudiantes después de culminar todo el ciclo, bien sea del nivel medio o universitario (Halloun, 1996)[11] . Consideraciones y análisis importantes a este respecto hechos por Halloun y Hammer, permiten afirmar que entre las dificultades presentadas, se puede destacar la forma de significar la relación entre la matemática y la física, relación que en la mayoría de los casos privilegia los algoritmos matemáticos dejando de lado la fenomenología de la situación física, es decir, la actividad física se reduce sólo a resolución de problemas matemáticos (sólo algoritmos) sin posibilidad de la reflexión conceptual. Este privilegio que se da al algoritmo hace que el estudiante después de completar los cursos introductorios de física termine creyendo que la física consiste sólo en símbolos y fórmulas matemáticas (Halloun, 1995; Hammer, 1989, 1994). Se puede pensar que, sobreponer la estructura matemática a la fenomenología ha generado,

[10] PATY, Michael. La idea de cantidad en el origen de la legitimidad de la matematización en física, 1999.
[11] Halloun, I., Schematic Modelling for Meaningful Larning of Physics. Journal of Research in Science Teaching, 1996, Vol. 33, No. 9, pp. 1019-1041.

en los estudiantes de física, cierta apatía que no favorece la pretensión que se tiene en la enseñanza, la cual debe estar centrada en la organización de la experiencia y construcción de explicaciones por parte de los estudiantes.

A pesar del reconocimiento de la estrecha relación existente entre la física y las matemáticas, pocas veces se reconoce que a cada forma de significar tal relación subyace una concepción de lo que es la física y su enseñanza y lo que es la ciencia en general. En este sentido, entender tal relación en términos de adecuación o constitución, puede favorecer la implementación de estrategias de enseñanza.

Tal como lo considera Romero [12], en la enseñanza de la física a nivel medio y universitario, la forma de plantear y abordar esta relación más difundida es aquella por la cual se considera a las matemáticas como *lenguaje* de la física. Es por esto que tradicionalmente se asume que la introducción de la técnica matemática en la física, ha propiciado un progreso importante, ya que significa la aparición del rigor y la exactitud, conceptuales o numéricas, y, en consecuencia, una considerable extensión de las posibilidades de acción. Sin embargo, esta forma de significar tal relación es la que posibilita ver la física como la simple aplicación de ecuaciones matemáticas. Si bien es importante reconocer la legitimidad de la matemática en la física, esto no resta validez a cuestionamientos como, ¿cuál es el papel de las matemáticas en la física?, ¿sólo se trata de asignar rigor a las explicaciones físicas?

Resulta adecuado pensar que esta forma de significar las matemáticas, como lenguaje de la física, tomado del contexto matemático, condiciona el papel que debe desempeñar el sujeto en el proceso de formalización, al igual que un

[12] ROMERO et all. Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos: El caso de los fenómenos mecánicos. Investigación, Universidad de Antioquia, 2002

condicionamiento entre el lenguaje del individuo y los hechos, en el sentido de que es un lenguaje ya dado y acabado por los matemáticos y el papel del sujeto, en la física, sólo se limita al uso de dicho lenguaje sin posibilidad alguna de adaptarlo a situaciones nuevas que se puedan presentar en la organización de fenomenologías.

Al asumir las matemáticas como lenguaje de la física, surgen dos formas de justificarlo(Romero, 2003)[13]. En primer lugar, las matemáticas son indispensables para el trabajo en la física por que son el lenguaje de la naturaleza. En este sentido, el papel del sujeto puede reducirse sólo a descubrir dicho lenguaje, de este modo la actividad de la física se centra en la mera apropiación de un lenguaje inalterable de la naturaleza. En esta forma de ver las matemáticas en la física, el papel del sujeto está centrado en descubrir los fenómenos de la naturaleza que están escritos en un lenguaje matemático, de modo que, en todo caso, se trata de representar la naturaleza con las ecuaciones matemáticas. Bajo estas circunstancias, matematizar se reduce a la aplicación de unos algoritmos matemáticos, y lo interesante es sobre poner la construcción matemática a las fenomenologías identificadas. En segundo lugar, las matemáticas resultan indispensables en la física por que son el lenguaje del individuo con el cual explica las interacciones que tiene con el mundo. De esta manera lo considera Heisenberg[14], el papel de las matemáticas en la física no se centra en la aplicación de fórmulas matemáticas para representar la naturaleza, sino en el conocimiento que de ella poseemos. De esto se puede decir que, como el conocimiento que se tiene de la naturaleza es matemático, igualmente, se sobrepone el algoritmo sobre las fenomenologías identificadas. En los dos casos planteados las matemáticas se constituyen en el método universal para representar la naturaleza y la

[13] ROMERO et all. Los procesos de formalización y el papel de la experiencia en la construcción del conocimiento sobre los fenómenos físicos: El caso de los fenómenos mecánicos. Investigación, Universidad de Antioquia, 2002

[14] Heisenberg. Citado por: Jean Marc Lévy - Leblond

enseñanza de la física se centra en el adiestramiento del estudiante en el uso de algoritmos matemáticos.

Puede pensarse que en cada uno de estos polos subyace una forma de ver el papel de la matemática en la física. En primer lugar, si se busca, con la actividad física, comprender lo real en términos exactos, seguramente, por la objetividad que se pretende y por la forma como es asumida la relación entre la matemática y la física, se termina considerando la formalización como el mero hecho de aplicar la técnica matemática como el componente objetivo y como aquel que posibilita el "pensamiento puro". En segundo lugar, otra opción es considerar la posibilidad de la acción sobre la realidad mediante un lenguaje matemático. En tal caso, el pensamiento numérico es el que posibilita la explicación objetiva de lo que sucede independiente del hombre.

En los dos casos planteados, el lenguaje ya está dado, el papel del hombre se centra en descubrirlo y hacer uso de él. En estas circunstancias no es posible determinar la naturaleza de la relación entre la matemática y la física y tal como se ha expresado a esto subyace una forma de significar la física.

El análisis hecho hasta aquí muestra la importancia que tiene, para la enseñanza de la física, adelantar reflexiones sobre ¿Cuál es la naturaleza de la relación entre las matemáticas y la física? A este respecto, en primer lugar, por las implicaciones mencionadas en la enseñanza de la física, no resulta adecuado pensar tal relación, como una relación de aplicación, es decir, una relación instrumental, en donde las matemáticas como un instrumento o herramienta es tomada de otros contextos independientes del contexto físico en el cual interviene.

Como alternativa a tal situación, algunos análisis históricos- epistemológicos de la física han mostrado que el matematizar depende tanto de las estructuras de los

sistemas matemáticos como de los conceptos y las magnitudes físicas en consideración. En tal sentido, matematizar un fenómeno físico no consiste en sobreponer un aparato matemático al fenómeno; se requiere, ante todo, construir la posibilidad misma de matematizarlo, es decir, de construir las magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representarlo y cuantificarlo (Malagón, 1988).

En este sentido, es adecuado plantear que el papel de las matemáticas no se reduce esencialmente al cálculo numérico, es decir, a la manipulación de lo cuantitativo:

> *Es importante que la distinción entre un concepto físico y su matematización no se conciba como una simple diferencia estática. Un concepto físico no es concepto matemático más «otra cosa». El concepto matemático no es ni un esqueleto al que la física le presta la carne, ni una forma abstracta que la física se encarga de llenar de un contenido concreto: es esencial que la relación entre las matemáticas y la física se piense en términos dinámicos*[15]

Resulta pertinente pensar entonces que, adelantar reflexiones entorno a los aspectos que tratan, conjuntamente, la matemática y la física, puede orientar la construcción de algún tipo de significado a tal relación.

1.4 EL CONCEPTO DE PRESIÓN EN EL CONTEXTO DE LA ENSEÑANZA

En las consideraciones hechas se ha mostrado que la tradicional manera de significar los procesos de formalización en la enseñanza de la física ha hecho que

[15] Levy-Leblond, J-M. Física y Matemáticas. En Apéry, R et al, Pensar la matemática. Tusquets Editores, Barcelona, 1988.

el componente matemático se sobreponga a las fenomenologías identificadas, no dejando ver la formalización como aquella actividad que posibilita la construcción de explicaciones en la enseñanza de la física.

Podría pensarse que la forma de significar la matematización en física se pone de manifiesto en la enseñanza de la Hidrostática. Es el caso del concepto presión, el cual es definido y abordado a partir del concepto fuerza, en donde se asume que la *presión p* en un punto es la fuerza normal por unidad de área, es decir, la razón de $P = \frac{F_{\perp}}{A}$, siendo $F_{\perp}$ la fuerza normal neta sobre un lado de la superficie. En este sentido se expresa que la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las paredes del fluido y a las paredes del recipiente. Se puede decir que la anterior forma de significar la presión, además de propiciar una confusión entre el concepto de presión y el concepto de fuerza, refleja una particular manera de asumir los procesos de formalización en su relación con la organización de los fenómenos físicos: en tales procesos formalizar el concepto presión se reduce al uso del algoritmo.

En este caso particular de la enseñanza de la Hidrostática, estos usos han llevado a que los estudiantes confundan los conceptos de fuerza y presión, conceptos físicos que deben asumirse de modo diferente. Sobre este particular se puede ver como en los textos, el concepto de fuerza está relacionado con acciones y del mismo modo se relaciona el concepto presión con acción: "la presión que un bloque ejerce sobre una mesa es simplemente el peso del bloque dividido entre su área de contacto. Análogamente, en el caso de un liquido en un recipiente cilíndrico, la presión que el líquido ejerce contra el fondo del recipiente es el peso del líquido dividido entre el área del fondo del recipiente"[16]. Esta es una situación común en la enseñanza del concepto presión, en donde además de ser la presión una acción, la solución de los problemas que involucran este concepto, solo se

[16] HEWITT, Paul G. Física Conceptual. México: Pearson Educación, 1999.

reduce a la aplicación del algoritmo $P = \frac{F_{\perp}}{A}$, poniendo en juego la forma de significar el uso de las matemáticas en la solución de los problemas físicos. Por una parte, si en la enseñanza de la física las acciones entre cuerpos son asociadas a fuerzas entre ellos, entre la presión como acción y la fuerza como acción, en principio no habría distinción alguna. Además, si se asume que $P = \frac{F_{\perp}}{A}$, es una definición del concepto presión, en esta asunción se sugiere una manera particular de resolver problemas relacionados con la hidrostática, la solución de tales problemas sólo se podría reducir a la aplicación de tal ecuación, sin adelantar ningún tipo de reflexión sobre el fenómeno en cuestión.

Por otra parte, a esta forma de resolver los problemas de la Hidrostática subyace una forma particular de significar la relación entre lo teórico y lo experimental: lo experimental no implica reorganización conceptual sino simplemente la verificación del componente teórico.

Con la intención de construir rutas conceptuales alternativas para la enseñanza de los fenómenos hidrodinámicos se realiza un análisis histórico epistemológico de la manera como L. Euler configura y presenta su concepto de presión interna, expuesto en su memoria titulada “Principes géneraux de l’equilibre des fluidos” publicada originalmente en mémoires de l’academie des Sciences, Berlín, XI, 1755 (1757b), pp. 274 – 315. Opera omnia, ser 2, XII, pp. 2 – 53. Comentario 225 indis Enestroemiami. En este análisis se muestra cómo Euler diferencia los conceptos de presión interna y fuerza, considerando la presión como una variable de estado que da cuenta de la condición mecánica en la cual se encuentra una masa fluida en un momento dado. Se analiza además cómo el uso del cálculo diferencial parcial en la organización de los fenómenos hidrostáticos permite a Euler *dar forma* a esta clase de fenómenos, aspecto por el cual se constituye en una fructífera manera de significar la relación entre la física y las matemáticas.

CAPÍTULO II: EL EQUILIBRIO DE LOS FLUIDOS EN LA PERSPECTIVA EULERIANA

2.1 LA FORMALIZACIÓN DEL ESTADO DE EQUILIBRIO DE LOS FLUIDOS: EL CASO DE LA PRESIÓN INTERNA

A partir de análisis históricos como los de Elkana (1974), Truesdell (1975), Cross (1983), Blay Michel (1992), se pueden identificar diferentes perspectivas para abordar y representar los fenómenos hidrostáticos, es el caso de las propuestas de Arquímdes (287-212- A.C), Stevin (1548-1620), Newton (1643-1727), Bernoulli (1700-1782) y Euler (1707-1783). En cada una de estas perspectivas se presenta una forma particular de organización de los fenómenos relacionados con la Hidrostática. Sin embargo, en esta investigación optamos por la perspectiva euleriana por considerar que su enfoque nos permite construir una significación de la formalización como un proceso simultáneo de matematización y construcción de fenomenologías. En tales análisis se puede ver que aunque se presentan trabajos importantes en los fluidos como los de los Bernoulli, las exposiciones de sus ideas en algunos casos resultan confusas; problemas que enfrenta Euler, comenzando por axiomatizar y sistematizar la hidrostática, mostrando su aplicación a muchas situaciones de interés fundamental (Truesdell, 1975). Es precisamente en este proceso de axiomatización que se puede ver una forma, particular, de significar la formalización en Euler, con el uso que éste hace del cálculo en la matematización (axiomatización) y la construcción de las fenomenologías en términos del análisis conceptual.

Se puede decir entonces que el método seguido por Euler en sus investigaciones más fructíferas, fue enteramente matemático, pero los resultados no se pueden calificar de matemática pura, pues la experiencia fue guía constante. Tanto la experiencia física como la experiencia procedente de la acumulación de

conocimientos teóricos (Truesdell, 1975). Es por esta razón que en los trabajos de Euler se reflejan aspectos importantes como:

- El papel asignado a la experiencia en su relación con los principios metafísicos y los presupuestos epistemológicos en los cuales fundamenta su cosmovisión,
- Los conceptos físicos creados para abordar el análisis de la Hidrostática
- La forma como explicita la relación física – matemática.

En tal sentido, al tratarse de un trabajo en la hidrostática, nuestra reflexión se centra en un análisis de los presupuestos epistemológicos, y la relación física matemática, puesta en juego en la matematización que él hace del estado de equilibrio de los fluidos.

El propósito central de Euler, es el de desarrollar un principio de la hidrostática para los fluidos tanto compresibles como incompresibles, al igual que la determinación de todas las fuerzas que pueden actuar en un fluido cuando se pretende analizar el estado en el cual se encuentra. Los fluidos incompresibles se analizan con densidad constante y en los compresibles el análisis se hace cuando la densidad es función de la presión o bien está en relación con la elasticidad.

2.1.1 ALGUNOS PRESUPUESTOS EPISTEMOLÓGICOS Y LA FORMALIZACIÓN DE LA PRESIÓN INTERNA EN EL ANÁLISIS DE LA HIDROSTÁTICA

Es bueno empezar resaltando que para Euler la naturaleza de los fluidos es diferente a la de los cuerpos sólidos, razón por la cual plantea que no es posible explicar la naturaleza de los fluidos a partir de una representación con sólidos, considera que el modelo corpuscular no resulta adecuado cuando se trata de explicar tal naturaleza. Es precisamente esto lo que lleva a plantear la necesidad

de establecer y profundizar en la naturaleza de los fluidos, la cual considera en los siguientes términos:

> *En tanto que esta propiedad esencial de los fluidos debe establecer los principios de la Hidrostática, no la encuentro más que en aquella cualidad por la que sabemos que una masa fluida no estaría en equilibrio a menos que ella sea solicitada en todos los puntos de su superficie por fuerzas iguales y perpendiculares a la superficie.*[17]

En este contexto euleriano, ¿cuál es el papel de la experiencia, de los principios metafísicos y los presupuestos epistemológicos en el proceso de formalización de la presión interna, y la determinación del estado de equilibrio de los fluidos? Tal como se puede interpretar, para Euler la primera idea sobre la que han de estar fundados todos los razonamientos en Hidrostática es la idea de la *naturaleza de la fluidez* en general. Es por esta razón que él pretende establecer un principio general que le permita evidenciar la naturaleza de los fluidos, es decir, establecer unos principios a partir de los cuales se pueda dar cuenta de la fenomenología de los fluidos. Para la axiomatización realiza una discretización en el fluido (determinación de una masa fluida) identifica unas variables, tales como la altura (profundidad) determinada por un punto de coordenadas *x, y, z*, la densidad y su elasticidad, las cuales hacen posible la construcción del concepto de estado de equilibrio (equilibrio asociado con permanencia en el tiempo) del fluido, permanencia que se representa con la presión como variable de estado. En tal sentido resulta pertinente analizar ¿cómo se comporta la masa fluida cuando está actuada por fuerzas externas?

---

[17] EULER, Leonhard.Principes géneraux de l´equilibre des fluides. En mémoires de l´academie des Sciences, Berlín, XI, 1755 (1757b), pp. 274-315. Opera omnia, ser 2, XII, pp.2-53. Commentatio 225 indis Enestroemiami.

Se puede decir que en la perspectiva de Euler, hablar de masa fluida implica delimitación en el fluido y el equilibrio está asociado con la permanencia, condición o estado en la cual se encuentra la masa fluida. Bajo estas circunstancias, reflexionar sobre la pregunta anterior obliga examinar, ¿qué significa referirse a una masa fluida? y ¿qué se entiende por estado de una masa fluida?

2.1.2 EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y LA CONSTRUCCIÓN DE MAGNITUDES FÍSICAS EN LOS PROCESOS DE FORMALIZACIÓN

Es de resaltar que en el siglo XVIII, surge una relación entre la física y la matemática ejemplificada a través de la constitución y uso del cálculo diferencial y la organización de fenomenologías, lo que empieza a significarse como el matematizar en física. Además de tal relación, simultáneamente con el cálculo surgen reconstrucciones conceptuales y nuevos conceptos. Tal es el caso, de la velocidad la cual adquiere con la simbología y conceptualización del cálculo diferencial una significación diferente a la significación intuitiva considerada por Galileo, definiéndose matemáticamente en los términos dx/dt y la aceleración en términos de la segunda diferencial dx/dt^2. Este tipo de definiciones, propias del cálculo, son las que posteriormente utilizará Euler en la formalización de los fluidos.

Por otra parte, resulta oportuno resaltar que en este siglo (XVIII) se genera un cambio de rumbo en las explicaciones que se construyen del mundo, la noción de sustancia es sustituida por la permanencia en las relaciones, es así como la física se centra esencialmente en las relaciones de las cantidades físicas, expresadas matemáticamente, o sea que, el objeto de la física es reformulado y constituido por las relaciones (Paty, 1999). Este replanteamiento posibilita que determinadas ecuaciones representen lo que hay verdaderamente constante en las cosas y que, por tanto, si hay algún elemento de la experiencia al que puede atribuirse verdadera sustancialidad son precisamente a estas relaciones constantes. Esta

nueva perspectiva señala un cambio de rumbo de orden metodológico en la teoría física, generándose lo que algunos historiadores han denominado el enfoque operatorio. Es así como para Euler, la permanencia de ciertas relaciones entre las magnitudes que posibilitan la organización de algunos fenómenos naturales posibilitan su comparación e incluso, la definición de algunas de ellas en términos de las otras. Es precisamente a través de éste procedimiento de la medida de unas magnitudes físicas en términos de otras que Euler resuelve las exigencias de la dimensionalidad (Romero, 2005). Es en este sentido que se puede plantear la construcción de las magnitudes físicas, entendidas como el resultado de la construcción de relaciones. Se puede decir entonces que, es en esta parte donde juega un papel importante, para Euler, la matemática en la construcción de los principios de los fluidos y su relación con la experiencia: por un lado Euler, identifica la idea de estado de presión con una magnitud o cantidad, por otro lado tal cantidad es presentada por una longitud a través de una situación fenoménica prototipo. Además es de resaltar que en su propósito de matematizar el fenómeno del equilibrio de los fluidos, Euler considera que el fluido puede ser analizable a través de un elemento de volumen infinitesimal. A partir de estas consideraciones Euler plantea que cuando la masa se encuentra en un estado de presión, es decir, si su estado de equilibrio permanece en el tiempo, la masa debe estar actuada por todas partes por fuerzas:

> *... todas las partículas del diafragma soportarán también fuerzas que responderán a la misma altura p. De modo que se sigue, que cada elemento de la masa fluida Ikki será por todas partes actuado por fuerzas semejantes; o bien todas las partículas del fluido serán presionadas unas contra otras por fuerzas que responderán a la misma altura p...*[18]

[18] ibid.,p.222

En este planteamiento, Euler utiliza el termino altura (profundidad) como una forma de representar el estado de presión de un fluido, la cual está referida a la altura de una columna de una materia homogénea: cuando el estado de presión de un elemento de fluido es expresado por la altura p, es necesario entender que cada cara ds^2, de este elemento es presionada por una fuerza que es igual al peso de un cilindro de una materia homogénea, cuya base es ds^2 y la altura p. Esta altura p representa, entonces la fuerza con la que todos los elementos vecinos del fluido actúan sobre un elemento particular y, a la vez, la fuerza con la que el elemento en consideración resiste a la compresión, si se encuentra en un estado de equilibrio,

> *Por esto se está en buen orden de tomar una justa idea de aquello que llamo el estado de presión de un fluido; y esta presión no debe estar mejor representada que por una cierta altura que se relaciona con la gravedad de una materia homogénea, que se considerará como la más conveniente para emplear esta medida. Así, cuando digo que el estado de presión del elemento de fluido Jkki es expresado por la altura p, es necesario entender que cada cara de este elemento, que sea* ds^2*, es actuada por una fuerza que es igual al peso de un cilindro de esta materia homogénea cuya base es =* ds^2 *y la altura = p. Esta altura p expresa pues la fuerza con que los elementos vecinos del fluido actúan de todas partes sobre el elemento Jkki, y en consecuencia este elemento reaccionará sobre aquellos. Es también por esta misma fuerza que el elemento Jkki resiste a la compresión, por la que sería reducido a un menor volumen, de suerte que si su resistencia es más pequeña, él será reducido realmente.*[19]

Es bueno precisar que aquí Euler determina un punto en el espacio que ocupa el fluido y dicho punto representa el elemento *JKki* de volumen infinitesimal. Bojo

estas circunstancias, al tomarse la altura como la unidad patrón, entonces se puede ver cómo a cada unidad de altura corresponde una unidad de estado de presión. En este sentido se puede afirmar que a toda igualdad de alturas se le asocia una igualdad de presiones, de modo que si a la altura p_1 le corresponde un estado de presión P_1 y a la altura p_2 le corresponde un estado de presión P_2 ; si dichas alturas son iguales, es decir, si $p_1 = p_2$ entonces se puede concluir que se presenta una igualdad en los estados de presión, es decir, $P_1 = P_2$.; del mismo modo, si las alturas son diferentes, o sea que $p_1 > p_2$, se puede deducir que la presión correspondiente a la altura uno es mayor que la presión correspondiente a la altura dos, estoes, $P_1 > P_2$ y viceversa, conocida la relación entre los estados de presión, se puede establecer la relación entre las alturas correspondientes.

Se muestra, entonces, como para Euler formalizar el estado de presión de un fluido utiliza una variable altura que puede ser conocida en el fluido. En este sentido, para establecer el estado de presión de una masa fluida es suficiente conocer la altura p a la cual se encuentra dicha masa, ya que a partir de esta altura podemos determinar los pesos (como fuerza prototipo) que serían equivalentes a las fuerzas actuantes en todas las caras del fluido.

Por otra parte, es de resaltar que, en interpretaciones que se hacen en la perspectiva de Euler, se puede ver que para abordar el problema del equilibrio de los fluidos es necesario que el sujeto realice una discretización en éste de modo que pueda centra la atención solo en una parte de él y , es precisamente en esta porción del fluido, la cual llama diafragma inmaterial, que él construye la fenomenología que le posibilita la formalización, a partir de la identificación de variables como densidad, elasticidad, altura del fluido, de la relación entre estas variables y de la relación entre fuerzas y superficies, euler empieza a dar cuenta del estado del fluido en términos de la presión como variable de estado. Situación planteada por Euler cuando escribe: "… para conocer el estado de presión por la

[19] ibid.,p223

que una masa fluida es mantenida en equilibrio, es suficiente conocer esta altura p, que es común a todos los cilindros formados de esta materia grave homogénea…".[20] Lo anterior muestra cómo para Euler la presión es una condición en la que se encuentra la masa fluida. Y es ésta una de las razones por la cual es licito afirmar que el concepto presión en la perspectiva euleriana supera las ideas que al respecto proponía Daniel Bernoulli relacionadas con la presión como la fuerza ejercida por un fluido sobre las paredes del recipiente que lo contiene y cuya medida se identificaba con el peso de la columna de fluido en el punto correspondiente:

> *La Hidrodinámica de Daniel Bernoulli contiene el primer análisis de la presión y la velocidad de un fluido en movimiento. Por presión se entiende en esta obra la fuerza ejercida por el fluido sobre las paredes del tubo o recipiente que lo contiene, y como medida de esta presión se toma la altura de una columna de fluido en reposo, que era la manera en que desde antiguo se medía la presión de un fluido en equilibrio*[21]

Sin embargo Euler, en sus primeras investigaciones de hidrostática que comienza desde 1738, hace notar que para fluidos incompresibles en reposo con respecto de la superficie de la tierra, bastaba el único axioma de que el estado de presión en el fluido es normal a la superficie sobre la cual actúa el fluido, y este estado de presión es independiente de la geometría y orientación de dicha superficie. Pero Euler además tuvo la intuición de integrar todas las ideas de Bernolli, creando así el concepto más general de *presión interna*, según el cual la fuerza ejercida por un fluido sobre cualquier superficie es equivalente a un campo de presiones normales a la superficie, cualquiera que sean su geometría y la posición que ocupe dentro del fluido (Truesdell, 1975).

[20] Ibid

[21] TRUESDELL, C., *Ensayos de historia de la mecánica, Op.cit 331*.

Otra razón importante, para afirmar que el concepto de presión interna en la perspectiva de Euler supera a la de Bernoulli, está relacionada con el planteamiento de la presión como el estado generado en un elemento del fluido, por la acción ejercida por el fluido que rodea tal elemento, es decir, un estado de presión generado en el elemento del fluido por la acción de elementos vecinos. Con esta idea Euler empieza a formalizar el concepto de presión interna el cual, tal como se ha mencionado, se constituye en un concepto más general que el propuesto por Bernoulli.

Resulta entonces interesante enfatizar en las consideraciones teóricas que hace Euler sobre lo que experimenta el elemento fluido, en términos de que éste se encuentra en un estado de presión por la acción de elementos vecinos pero a su vez los elementos vecinos experimentan igualmente acciones de éste, generando del mismo modo un estado de presión en ellos. Lo anterior permite afirmar que la fuerza ejercida por un fluido sobre cualquier superficie frontera imaginaria en el seno del mismo es equivalente a la acción de un campo de fuerzas normales a la superficie, cualquiera que sean su geometría y la posición que ocupe dentro del fluido.

Al hecho de considerar que estas fuerzas sean normales o perpendiculares a las superficies de la masa fluida en consideración, subyacen dos principios de la perspectiva de Euler: uno en relación con la impenetrabilidad y el otro con el principio de mínima acción. Por una parte, debido a la impenetrabilidad del fluido pueden surgir fuerzas tan grandes o pequeñas según lo exijan las circunstancias, que son suficientes para impedir la penetración del fluido, es decir, estas fuerza impiden que dos masas fluidas ocupen el mismo espacio en el mismo tiempo. A este respecto Euler considera:

Así en el choque de los cuerpos su impenetrabilidad no desarrollará siempre más que la más pequeña fuerza que es capaz de protegerlas de la penetración, y es sin duda sobre esta circunstancia que se fundó este principio general, que todos los cambios en el mundo son producidos a los menores gastos que es posible[22]

Es por eso que, en el proceso de formalización de Euler, se perciben aspectos relevantes que permiten caracterizar el concepto de presión interna: uno en relación con la acción ejercida perpendicular a la superficie por un medio fluido sobre un elemento discretizado al interior del fluido (imaginario), independiente de su posición y forma, acción que genera una condición en el fluido y en las paredes del recipiente. Otro está en relación con la presión como condición o estado en la que se encuentra la masa fluida, debida a las acciones externas que se ejercen sobre la masa fluida en consideración, y otro relacionado con la diferencia de estados y el origen de fuerzas: debido a la diferencia de presiones existente entre un elemento del fluido y una región vecina a éste, surgen fuerzas motrices que deforman al fluido y cambian el estado de las partes interactuantes, de tal manera que se tiende a anular la diferencia de presiones.

Con la intención de seguir dando forma (formalizando) al concepto de presión interna Euler considera un fluido contenido en un recipiente y plantea que cuando un fluido en el interior de un recipiente se encuentra en un determinado estado de presión por la acción de una fuerza cualquiera, no solamente los elementos del recipiente soportan el estado de presión, sino que de igual forma todos los elementos del fluido mismo se encontrarán en el mismo estado de presión. Como todas las partes del fluido experimentan el mismo estado de presión, para mantenerlo en equilibrio al interior del recipiente, se requiere que las paredes de éste ejerzan sobre las porciones del fluido fuerzas, que deben mantener con la

[22] EULER, Leonhard. Recherches sur l'origen des forces. Opera Omnia II5, Commentationes mechanicae, p.110

fuerza considerada la misma proporción que la establecida entre las superficies en contacto del recipiente y el fluido en consideración. Lo anterior implica que si en cualquier parte del recipiente se realiza un orificio, por éste el fluido sale inmediatamente. Esta situación resulta similar cuando la masa considerada no se encuentra en un recipiente, sino rodeada de modo general por fluido. La porción considerada se encuentra en un estado de presión al igual que los elementos vecinos y al presentarse una diferencia de presiones se da lugar a las fuerzas.

A este respecto Euler considera:

> *...los fluidos se hallan en un tal estado de presión por la acción de cualquier fuerza PM = aap, no solamente todos los elementos de los vasos sostienen las presiones, que responden a la misma altura p, sino también todos los elementos del fluido mismo se encontrarán en el mismo estado de presión. Concibamos en el interior del fluido, un diafragma inmaterial EjiB; que reduce la masa del fluido en una porción cualquiera AEFB; y, si esta porción está en equilibrio, todas las partículas del diafragma soportarán también fuerzas, que responden a la misma altura p. De donde se sigue, que cada elemento de la masa fluida Ikki será por todas partes actuado por las* fuerzas semejantes; o bien todas las partículas del fluido serán *presionadas unas contra otras por todas las fuerzas que responden a la misma altura p; es pues la igualdad de todas estas fuerzas, lo que constituye el estado de equilibrio, suponiendo siempre, que de ningún modo existirán fuerzas particulares, como la gravedad, que actúen sobre las partículas del fluido.*[23]

En este orden de ideas, es de resaltar que en esta perspectiva el interés se centra no en la presión en si misma sino en la comparación de estados de presión, y tal

como se ha planteado, solo la comparación de los estados de presión es lo que da la posibilidad de pensar y hablar de fuerzas, situación diferente a lo tradicionalmente planteado en el análisis de los fluidos, en donde es a partir del concepto fuerza que se posibilita explicar el concepto de presión. Sobre el particular Euler escribe:

> *He aquí donde consiste la naturaleza de la fluidez, una masa fluida no podría estar en equilibrio, a menos que esté actuada en todas las partes por fuerzas iguales y perpendiculares a la superficie. De este modo, si una masa fluida, ABCDEF, es actuada en un lugar AB, por una fuerza cualquiera PM, donde la dirección es perpendicular a la porción de la superficie AB sobre la que ella actúa, y si concebimos otra porción cualquiera CD, para que el fluido se mantenga en equilibrio, se requiere que esta porción CD sea también actuada perpendicularmente por una fuerza QN, que ha de tener con PM, la misma razón, que aquella que subsiste entre las superficies CD & AB. Si una de esas fuerzas es menor según esta proporción, no sería suficiente para resistir la acción de la otra, y por tanto el equilibrio sería perturbado. Ocurre lo mismo en todas las otras porciones de la superficie de los fluidos, haría abstracción de la gravedad, y de otras fuerzas, que podrían actuar inmediatamente sobre las partículas del fluido*[24].

Lo anterior se puede expresar en los siguientes términos:

$\frac{QN}{FM} = \frac{CD}{AB}$, o bien si QN = F_1, y FM = F_2; CD = ds_1^2 y AB = ds_2^2, entonces:

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{ds_1^2}{ds_2^2}$.

[23] ibid.,p.222
[24] Ibid.,p.220

De esta expresión surgen dos situaciones importantes. Una está relacionada con la manera (metodología) como Euler da forma (formaliza) al concepto de presión interna. En donde el uso de la experiencia (se apela al conocimiento que se tiene sobre algunos aspectos y no a la experiencia empírica) y su relación con los principios como la impenetrabilidad, el principio de mínima acción y el de la inercia son importantes: una masa fluida no hace nada por sí sola para cambiar el estado de presión en la cual se encuentra; es precisamente, por el principio de mínima acción y por la impenetrabilidad de los elementos de fluido que se presentan las deformaciones y los diferentes estados de presión dando lugar a las fuerzas perpendiculares.

2. 2 ANÁLISIS A PARTIR DE LA DETRMINACIÓN DE UN ELEMENTO FLUIDO

Las consideraciones anteriores llevan a Euler a plantar un problema que contiene toda la teoría del equilibrio de los fluidos y posibilita explicitar la relación tributaria entre la física y la matemática a partir de la axiomatización y construcción de la fenomenología del equilibrio del fluido:

> *Las fuerzas, con las que todos los elementos del fluido son actuados (sollicitées), siendo dadas con la relación que subsiste en cada punto, entre la densidad y la elasticidad del fluido; encontrar las presiones que tendrán lugar en todos los puntos de la masa fluida, por la que se encuentra el equilibrio.*[25]

A partir de este problema central, se puede establecer que analizar el equilibrio de una masa fluida consiste en determinar el estado o condición de presión en la cual se encuentra la masa fluida, condición que como se ha dicho se puede determinar en términos de la variable altura. Lo anterior muestra con cierta claridad como para Euler el problema del equilibrio del fluido está dado en términos de la presión.

Es por esta razón que para abordar este problema Euler considera, al interior de una masa fluida, un punto Z de coordenadas x, y, z y selecciona a partir de él un elemento de fluido en forma de paralelepípedo rectangular de lados dx, dy, dz. Luego descompone la fuerza aceleratriz que actúa en el punto Z según los tres ejes coordenados, OA, OB, y OC, perpendiculares entre sí en el punto O. Estas tres coordenadas determinan: OX = x, XY = y, YZ = z.

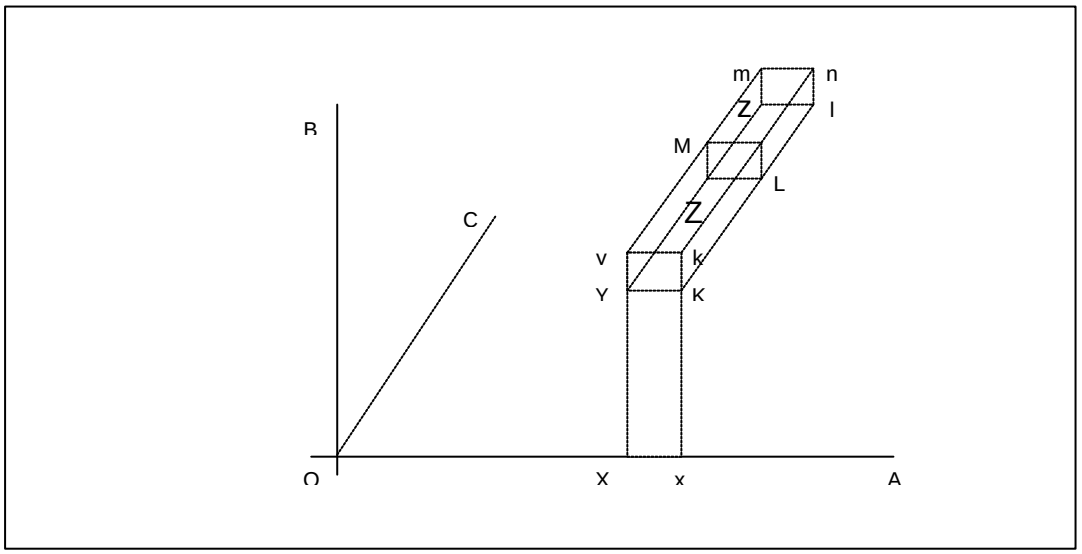


Figura 1. Masa fluida en forma de paralelepípedo ubicada en el punto Z

Estas fuerzas que actúan sobre las partículas del fluido, son parecidas a la de la gravedad, por lo tanto ellas actúan proporcionalmente a la masa que se encuentra en Z, es decir, si la masa que está en Z es doble la fuerza motriz igualmente será doble, esto implica que la fuerza motriz es proporcional a la masa. Situación que no ocurre con la fuerza acelerativa, ya que su magnitud no depende de la masa identificada en Z. Sin embargo esta fuerza acelerativa que actúa en Z se puede descomponer en la dirección de los tres ejes de coordenadas:

Una componente que actúa según ZL, paralela a OA = P

[25] ibid.,p.227

Una componente que actúa según ZM, paralela a OB = Q

Una componente que actúa según Zz, paralela a OC = R

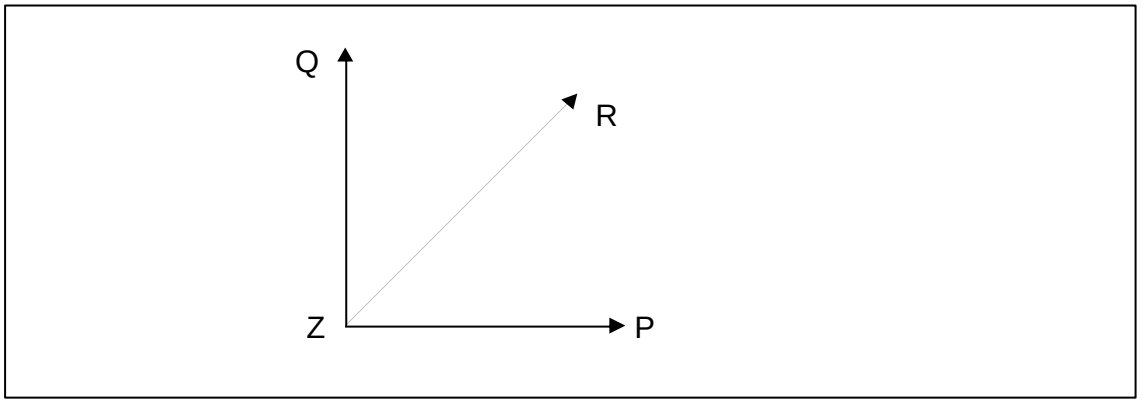


Figura 2. Fuerzas motrices en el elemento fluido ubicado en el punto Z

Lo anterior se puede precisar diciendo que: la fuerza P actúa siguiendo la dirección ZL (+X), R actúa según la dirección Zz (+Z) y Q actúa según la dirección ZM (+Y). Las magnitudes de las fuerzas P, Q y R son funciones de las variables x, y, z, lo que implica que la cuantificación de estas fuerzas aceleralivas se da en términos de la posición que ocupa la masa fluida.

Lo antes referenciado, muestra un aspecto interesante en la perspectiva de Euler, y está relacionado con la brillantez con la que determina cada elemento del fluido a través de la definición de tres coordenadas x, y, z en relación a tres ejes fijos y perpendiculares entre si: en primer lugar se debe resaltar el hecho de que el punto Z representa las características de una masa fluida, ya que posee volumen al ser un punto tridimensional del espacio, en segundo lugar, tal determinación puede ser aplicada a cualquier punto del espacio ocupado por el fluido. Esta situación se ve con cierta claridad la relación establecida por Euler entre las características de un espacio geométrico y las características de una parte del medio que analiza. Es

entonces importante resaltar el aspecto característico de la perspectiva euleriana: dos puntos arbitrarios Z, z del espacio definen unívocamente un elemento volumétrico de fluido cuyo volumen corresponde al volumen del paralelepípedo construido con las distancias entre Z y z como diagonal. Este hecho, que inicialmente puede aparecer inadvertido, refleja tanto el objeto de análisis que se está abordando como la forma de hacerlo a través de una metodología geométrica y a la vez analítica con el uso del cálculo diferencial (Romero, 1996).

Además de lo interesante del componente metodológico, en la perspectiva eulerina, surge otro aspecto de interés relacionado con la presión como variable de estado, y es en este sentido lo planteado por Romero cuando se refiere que en la perspectiva de Euler la presión, la velocidad y densidad son consideradas como funciones de estado:

> *...la velocidad, la presión y la densidad empiezan a ser consideradas por una parte, teniendo un valor determinado para cada punto del fluido, es decir, como funciones que dependen de la posición del elemento particular del fluido y, por otra parte, como medio, es decir como variables de estado para las diversas configuraciones que puede tomar el medio fluido*[26]

De lo anterior se deduce que la variable presión no solo permite dar cuenta de la estructura del medio sino que además permite dar cuenta de la condición en la cual se encuentra un elemento del fluido. Es en este sentido que Romero considera que la presión pasa de ser una relación entre fuerzas y unidades de superficie y se convierte en una función de estado, de modo que deja de asumirse como la acción que se ejerce sobre una superficie del elemento fluido, y se

[26] ROMERO, A. E.. La mecánica euleriana: una mecánica del continuo. Tesis de grado Maestría en Docencia de la Física, U.P.N., Bogotá, 1996.

concibe como una magnitud que da cuenta de la condición o estar de una región determinada del fluido. (Romero, 1996)

Bajo estas condiciones, es lícito plantear que al ser la presión una función de estado, no importa los valores particulares que ésta función pueda tomar en cada punto del espacio sino la diferencia de tales valores. Y tal como se ha venido planteando esto es una muestra clara de que para Euler, las fuerzas son el resultado de una diferencia de presiones en el caso particular de los fluidos.

Por otra parte, relacionar la estructura del espacio con la estructura del medio de análisis muestra como en la perspectiva de Euler el componente matemático emerge en la construcción de la fenomenología del fluido.

2. 2. 1 DETERMINACIÓN DE LA MASA FLUIDA Y LAS COMPONENTES DE LA FUERZA MOTRIZ

Para tener en cuenta la masa en el análisis del fluido, Euler considera que la masa depende del volumen y de la densidad conjuntamente, con la cual determina el peso como prototipo de las fuerzas. La densidad del fluido en Z se denota con q, y también está en función de las variables x, y, z. Si el fluido no es compresible la magnitud de la densidad del fluido es una constante, es decir, el fluido es homogéneo ya que en cualquier punto de él dicha magnitud toma el mismo valor. Si por el contrario el fluido es compresible, la densidad se constituye en una variable que debe estar en función de x, y, z.

En este sentido Euler plantea que conociendo la densidad del fluido en el punto Z, resulta fácil determinar la masa que se sitúa en él. Para tal fin se considera un elemento fluido con forma de paralelepípedo rectangular de lados dx, dy, dz, los cuales representan las tres variables x, y, z, de modo que el volumen (V) del elemento fluido determinado se puede expresar en los siguientes términos: como

V = xyz, entonces dv = dxdydz. Al tomar la densidad del fluido como q, entonces la masa (m) del fluido está dada en los siguientes términos: m = qdxdydz. Esta expresión muestra que al igual que la densidad la masa también está en función de la posición del punto Z, es decir, el punto Z presenta las mismas características que presenta la masa fluida, lo que indica que la estructura del espacio geométrico puede ser atribuible al medio fluido. Además, es de resaltar la estrategia de expresar la masa en función de los diferenciales de posición, estrategia que caracteriza la perspectiva euleriana en cuanto a su componente matemático fundamentado en coeficientes diferenciales.

Es, precisamente, a partir de la determinación de la masa que Euler descompone la fuerza motriz que actúa en el punto Z, considerando que las fuerzas aceleratrices así obtenidas P, Q, R, son igualmente funciones de x, y, z. Bajo estas circunstancias el elemento fluido determinado (masa fluida), será sometido por una fuerza motriz cuyas componentes son:

Pqdxdydz, la cual actúa según la dirección ZL (+X)
Qdxdydz, la cual actúa en la dirección ZM (+Y) y
Rqdxdydz, actuando en la dirección Zz (+Z)

2. 2. 2 DETERMINACIÓN DE FUERZAS DEBIDAS A LA DIFERENCIA DE PRESIONES

La diferencia de presiones entre dos caras opuestas de un paralelepípedo imaginario aislado, producen una fuerza que tiende a mover la partícula de fluido, perpendicularmente a sus caras, fuerza que debe equilibrar las fuerzas aceleratrices con las que la partícula es animada.

Tal como lo hace con la masa, para determinar las fuerzas asociadas a la diferencia presión, Euler considera que la presión p del fluido en Z es una función

desconocida de las coordenadas x, y, z, cuya diferencial tendrá la forma *dp = Ldx+Mdy+Ndz*. Cualquiera que sea la presión sobre uno de los lados del elemento fluido, por ejemplo ZMzm (ver figura uno), la presión en el otro lado opuesto LNln excederá el incremento de la altura dp = Ldx. A este respecto se puede decir, entonces, que el término Ldx expresa el incremento de presión que experimenta el elemento fluido, a lo largo del eje x debido a que las caras del paralelepípedo en esta dirección están separadas un diferencial dx. Situación similar ocurre con los otros lados opuestos, donde Mdy y Ndz representan los incrementos de presión debidos a la separación de las caras en los diferenciales dy y dz a lo largo de los ejes Y y Z respectivamente. Lo anterior implica que cada una de las caras sería empujada por una fuerza en los siguientes términos: En el lado de área dydz, el elemento fluido es empujado según la dirección LZ (-X) por la fuerza de magnitud Ldxdydz. De igual manera el lado que presenta el incremento Mdy (en el eje Y) el elemento será empujado en la dirección MZ (-Y) por la fuerza de magnitud Mdxdydz; la cara que presenta el incremento Ndz (en el eje Z), el elemento será empujado en la dirección zZ (-Z) por la fuerza de magnitud Ndxdydz. De esta manera Euler determina todas las posibles fuerzas que pueden actuar sobre una masa fluida.

Estas fuerzas motrices no son las únicas que actúan sobre el elemento diferencial del fluido, pues dicho elemento es también actuado por la acción del fluido del cual es rodeado. Esta situación Euler la analiza a partir de un razonamiento geométrico, idéntico al realizado para determinar la masa fluida. En cuanto al surgimiento de fuerzas debidas a la diferencia de presión y a las fuerzas en general que pueden actuar en una masa fluida Euler considera:

> *Las otras determinaciones deben ser deducidas de la consideración de las fuerzas a las que cada partícula es sujeta: ahora bien, a demás de las fuerzas aceleratrices P, Q, R que actúan sobre el elemento del fluido en Z, también actúa sobre él la acción de todas partes del fluido. de la*

combinación d estas dobles fuerzas aceleratrices según las direcciones de los ejes, y ya que se puede señalar las aceleraciones mismas por la consideración de las velocidades u, v, w, deducimos las tres ecuaciones, que junto a la que hemos encontrado, referirán todo lo que se observa del movimiento del fluido, de suerte que tendremos entonces los principios generales y completos de toda la ciencia del movimiento de los fluidos[27].

Tal como se ha señalado, en la perspectiva euleriana cobra gran interés el hecho de considerar que debido a la diferencia de presiones entre un elemento de fluido y otro elemento cualquiera (región vecina), surgen fuerzas motrices que cambian el estado mecánico de las partes interactuantes.

Estas tres fuerzas son contrarias a las fuerzas motrices, representadas en la figura dos; el estado de equilibrio exige que sean iguales entre sí, obteniendo de esta manera las condiciones generales para que una masa fluida pueda estar en equilibrio, condición que se puede plantear en los siguientes términos:

Recordemos que las componentes de las fuerzas actuantes en el eje X son: la componente de la fuerza motriz Pqdxdydz y la componente de la fuerza debida a la diferencia de presiones es Ldxdydz, como estas fuerzas son iguales por estar el elemento fluido en equilibrio se tiene que Pqdxdydz = Ldxdydz, al despejar L de esta expresión se tiene: L = Pq (1). En el eje Y las fuerzas actuantes son: la componente de la fuerza motriz Qdxdydz y las debidas a la diferencia de presión Mdxdydz, y tal como se plantea en el eje x en el eje Y se tiene: Qqdxdydz =

[27] EULER, Leonhard.Principes géneraux du mouvement des fluides. En mémoires de l´academie des Sciences, Berlin, XI, 1755 (1757a), pp. 217-273. Opera omnia, ser 2, XII, pp.54-91. Commentatio 225 indis Enestroemiami.

Mdxdydz; al despejar M, se tiene que M = Qq (2); de igual manera en el eje Z se tiene que: Rqdxdydz = Ndxdydz, obteniendo N = Rq (3).

Tal como se ha expresado, Euler considera que la expresión que da cuenta del estado de presión del fluido es *dp = Ldx+Mdy+Ndz*, si reemplazamos (1), (2) y (3) la expresión adquiere la siguiente forma:
dp = Pqdx +Qqdy + Rqdz, al factorizar q; dp =q(Pdx + Qdy + Rdz). Esta expresión además de permitir dar cuenta del estado de presión en la cual se encuentra una masa fluida, muestra el estado de presión como una función de la posición del fluido.

Al analizar el planteamiento de Euler en cuanto al surgimiento de las fuerzas debidas a la diferencia de presión, al igual que la anterior expresión que da cuenta del estado de equilibrio del fluido resultan aspectos relevantes que permiten caracterizar el concepto de presión interna en Euler:

1. Para que la masa fluida ubicada en Z permanezca en equilibrio las fuerzas que actúan en dicha masa deben anularse entre sí.
2. La diferencia de presiones a la que están sometidas las caras de la masa fluida es lo que da origen a las fuerzas que tienden a mover una partícula de fluido al centro de dicha masa, es decir, tienden a reducir su volumen, las cuales deben anular las fuerzas aceleratrices que actúan sobre la masa, como condición para que ésta permanezca en equilibrio.
3. La acción ejercida por un medio fluido sobre una superficie imaginaria interior a este fluido, independiente de su geometría y ubicación, es perpendicular a esta superficie en cada punto.
4. El estado de presión no se analiza en términos de una fuerza y un área, sino en términos de la relación de varias fuerzas y sus respectivos diferenciales de superficie.

5. La expresión dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) representa el carácter espacial tanto de la fuerza como del estado de presión.

2. 2. 3 CONDICIONES PARA QUE LA MASA FLUIDA PUEDA ESTAR EN EQUILIBRIO BAJO LA ACCIÓN DE LAS FUERZAS P, Q y R

Para que la masa fluida pueda estar en equilibrio la expresión dp =q(Pdx + Qdy + Rdz), debe ser integrable, es decir, debe cumplir las condiciones de las formas diferenciales[28].

En este sentido es lícito afirmar que dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) es integrable si es exacta, es decir, es necesario que P, Q y R sean respectivamente las derivadas parciales respecto a x, y, z de una función f que representa el punto z determinado al interior del fluido:

---

[28] Sea *P* un conjunto abierto de R^2. Se llama forma diferencial a una aplicación w que, a todo punto (x, y) de P, asocia, no un número, sino una forma lineal en R^2. La aplicación w se puede expresar de manera única en la forma: w = Mdx + Ndy, donde *M* y *N* son dos funciones numéricas definidas en P"[28]. Para que esta forma diferencial sea integrable debe ser exacta, es decir, es necesario que *M* y *N* sean respectivamente las derivadas parciales respecto a *x* y a *y* de una función *f*:

$M = \frac{\partial f}{\partial x}$, $N = \frac{\partial f}{\partial y}$ y por tanto se debe cumplir que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Ver a este respecto (QUINET, j, 1983)

$p = \frac{df}{dx}$, $Q = \frac{df}{dy}$, $R = \frac{df}{dz}$ y por tanto se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$\frac{\partial(Pq)}{\partial y} = \frac{\partial(Qq)}{\partial x}; \ \frac{\partial(Pq)}{\partial z} = \frac{\partial(Rq)}{\partial x}; \ \frac{\partial(Qq)}{\partial z} = \frac{\partial(Rq)}{\partial y}$$

“Sin estas condiciones es imposible que la masa fluida pueda jamás ser reducida al equilibrio por las fuerzas actuantes P, Q, R. Si tales casos fueran por otra parte posibles, serían bien notables, porque el fluido no podrá alcanzar jamás el equilibrio, debiéndose encontrar en una agitación continua; y por consiguiente contener un verdadero movimiento perpetuo.”[29]

De modo general Euler plantea algunas posibilidades para establecer el estado de equilibrio de los fluidos:
Cuando el fluido es incompresible y
Cuando el fluido es compresible

Cuando el fluido es incompresible resultan dos condiciones: si el fluido es homogéneo, la magnitud de la densidad no depende de la altura y en tal caso la densidad es constante en todo el fluido. si el fluido no es homogéneo, o sea que está compuesto de partículas con diferentes densidades, la densidad q en el punto Z es función de las variables x, y, z, las cuales determinan a cada partícula, en tal sentido el equilibrio será posible si la expresión dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) es integrable, es decir, el equilibrio se puede determinar si es posible establecer la densidad en la partícula en la cual se analiza el estado de equilibrio. De no ser integrable es por que se están presentando cambios en la disposición de las partículas y el fluido se encuentra en un estado de perturbación, pero una vez q

[29] EULER, op cit.,p.230

obtenga un valor determinado la ecuación dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) será integrable y se podrá determinar el estado de equilibrio de la masa fluida.

Si el fluido es compresible, la elasticidad p dependerá de la densidad q, lo cual posibilita que consideremos a p como función de x, y, z, las cuales igualmente determinan el punto Z. Si es posible expresar la densidad o la elasticidad como función de estas variables (x, y, z), la ecuación dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) es integrable y en tal caso el estado de equilibrio será determinado, pero si no es posible establecer tal relación, es porque el fluido se encuentra en un estado de perturbación y el equilibrio será imposible de establecer.

Estas consideraciones encierran de modo completo el problema de la determinación del estado de equilibrio de los fluidos. Consideraciones que contemplan la posibilidad de determinar para cada punto, el estado de presión, la elasticidad o la densidad del fluido, para lo cual Euler ha construido la ecuación dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) que contiene toda la solución del problema. Sobre este particular Euler resalta que cuando las fuerzas P, Q, R son reales (e.i. fuerzas centrales), la relación Pdx + Qdy + Rdz expresará un diferencial real, que resulta de una cantidad finita, función de las coordenadas x, y, z. En tal caso la integral dará cuenta del esfuerzo de las fuerzas actuantes en el fluido.

Por otra parte, se puede decir que al analizar la expresión dp =q(Pdx + Qdy + Rdz), el problema del equilibrio de los fluidos cobra interés es en determinar la diferencia de presiones no en términos de una fuerza, como usualmente se hace, sino de varias fuerzas por los respectivos diferenciales de distancia y su integral representa lo que para Euler es el esfuerzo o eficacia de las fuerzas actuantes ($\int$ pdz). En este sentido, resulta interesante resaltar la relación que surge entre el estado de presión y el esfuerzo como una posibilidad de determinar el estado de equilibrio de los fluidos. Esto implica la deformación del fluido a demás de indicar

el surgimiento de fuerzas debido a la impenetrabilidad, posibilita también la determinación del estado o condición de presión en la cual se encuentra el fluido.

Si definimos a S como la integral de Pdx + Qdy + Rdz, la ecuación general del equilibrio de los fluidos toma la forma dp = qds, siendo S función de las coordenadas x, y, z. La expresión dp = qds es integrable (el fluido está en equilibrio) si q es constante o es función de S, de p o de S y p conjuntamente, de lo contrario el equilibrio es imposible y las partes del fluido se encuentran en movimiento. Sobre este particular Euler considera.

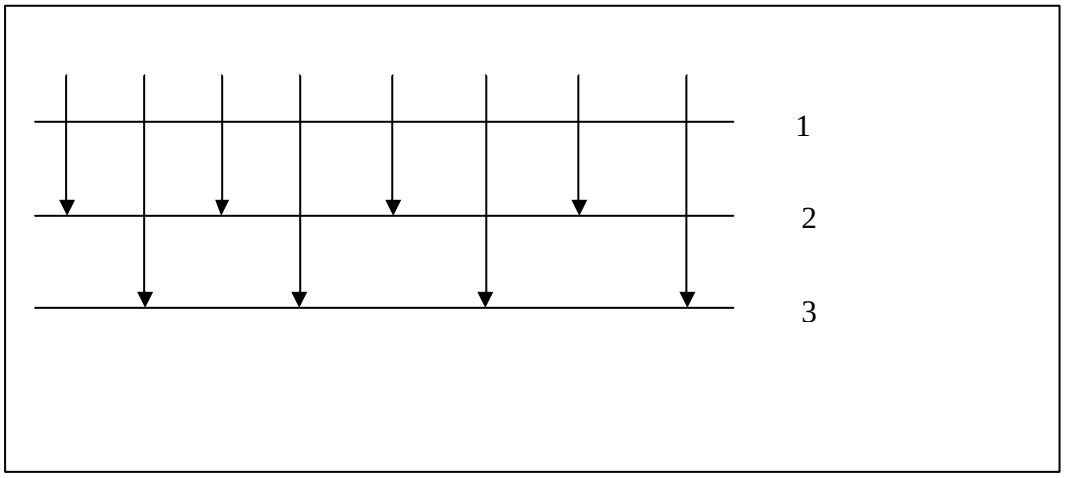
> *"…convendrá distinguir toda la masa fluida por medio de capas, cada una de las cuales pasa por todos los puntos donde la cantidad S, o el esfuerzo total de las fuerzas actuantes, es la misma (…) Ahora bien, habiendo establecido todas estas capas, la formula dp = qdS hace ver que el equilibrio no tendrá lugar, a menos que en cada capa el fluido tenga en todo lugar la misma densidad y el mismo grado de calor; o bien será necesario que las partículas de cada capa sean perfectamente homogéneas entre ellas. Y entonces la elasticidad p será también la misma por todo el recorrido de cada capa"*[30]

De lo anterior se puede inferir que S representa la sumatoria (esfuerzo total) de todas las fuerzas actuantes en el elemento fluido, cantidad que posibilita determinar el estado o condición de equilibrio mecánico del fluido siempre y cuando el fluido tenga densidad y temperatura definida, es decir con valores constantes. Estas condiciones en las que el equilibrio es posible de establecer se pueden precisar en los siguientes términos:

1. Si el fluido no es compresible, es decir, si la densidad q no depende de la presión p, el equilibrio será posible cuando la densidad es constante o cuando depende únicamente de la cantidad s.

2. Si el fluido es compresible, el equilibrio tendrá lugar en el caso de que la densidad q sea función sólo de la presión p; en tal caso la ecuación será integrable pues se reducirá a dp/q = ds.
3. Si la presión depende, además, de otra variable como la temperatura, el equilibrio no tendrá lugar a menos que dicha variable dependa únicamente de la cantidad s, es decir, que las partículas del fluido tengan el mismo valor de dicha variable en aquellos lugares que corresponden al mismo valor de s.

Con la intención de seguir profundizando sobre las condiciones que se deben cumplir para que el equilibrio tenga lugar, Euler plantea que es conveniente determinar la masa fluida por capas, en las cuales el valor de S es el mismo. En el caso de las fuerzas actuantes con naturaleza parecida a la de la gravedad las capas son paralelas y horizontales, en tal caso será posible determinar el estado de equilibrio del fluido ya que ds y dp serían igual a cero, lo que implica que la capa se encuentra en el mismo estado de presión, con densidad y elasticidad constantes. En este sentido Euler no solo propone una noción de presiones sino que además busca encontrar una función escalar que solo dependa de la posición para, a partir de ella, derivar la fuerza.



[30] Ibid.,p.234

Figura tres. Fluido determinado por tres capas homogéneas y paralelas, en cada una de ellas el esfuerzo total es cero.

En la figura la presión, densidad y elasticidad a lo largo de cada capa es la misma pero se presenta una diferencia de presiones entre las capas 1, 2 y 3.

Por otra parte, cuando las fuerzas actuantes están dirigidas hacia un centro, fijo, figura cuatro, las capas adquieren una forma esférica y concéntrica, alrededor del centro de las fuerzas, la expresión dp = qds permite concluir que el equilibrio no tendrá lugar a menos que el fluido no tenga por todas partes la misma densidad y la misma temperatura, es decir, que las partículas de cada capa sean homogéneas entre ellas y la elasticidad p tome un valor constante a lo largo de cada capa.

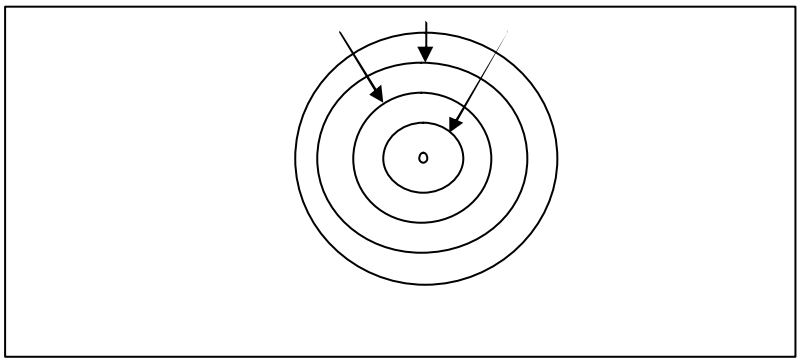


Figura cuatro. Capas del fluido cuando las fuerzas tienden hacia un centro con densidad constante

Un análisis más en detalle de la naturaleza de los fluidos a través de las capas, permite precisar en lo siguiente:

1. Si la masa fluida es homogénea y no compresible y la densidad q es constante, entonces la integral de dp = qds es equivalente a $p = (s \pm a)$, siendo *a* la constante para cualquier estado del fluido, por la cual se presenta un estado de presión en una capa determinada, de aquí conocemos la presión que tendría lugar a lo largo de otras capas, puesto que a lo largo de capa la presión es la misma.
2. Si el fluido es incompresible pero compuesto de partículas con densidad diferente, si el fluido puede llegar al estado de equilibrio, entonces cada capa contiene partículas con la misma densidad q la cual está en función de s y la integral $p = \int qds$ permitirá determinar la presión del fluido en cada capa.
3. Si el fluido es elástico y compresible y la elasticidad depende únicamente de la densidad q, la cual es expresada en función de la elasticidad p, la ecuación dp = qds es integrable y será equivalente a $s = \int \frac{dp}{q}$
4. Si el fluido es elástico, pero la elasticidad p depende de la densidad y la temperatura del fluido, la cual hace que el fluido sea variable, el equilibrio no tendrá lugar a menos que la temperatura a lo largo de cada capa sea la misma.

Tal como lo plantea Romero, buscar establecer la condición de equilibrio mecánico de una masa fluida implica establecer las condiciones a partir de las cuales la expresión dp/q = dS sea integrable (Romero, 1996). Sobre este particular Euler considera:

> *Es claro que esta ecuación dp = qdS no podrá ser real a menos que q sea (o constante) o función de sólo la cantidad S, o solo de p, o de las cantidades S y p en conjunto, en fin cuando la ecuación no se refiera más que a las dos variables p y S. en todos los otros casos, donde la*

densidad q no dependa puntualmente solo de las cantidades p y S sino que además entra alguna otra variable en su determinación, el equilibrio será posible y las partes de un fluido tal estarán necesariamente puestas en movimiento[31].

Lo anterior muestra como para establecer el equilibrio se requiere que si en el fluido se presentan otras variables determinantes éstas deben estar en función de S. en este sentido Romero resalta que el análisis del equilibrio de los fluidos que hace Euler, además de condensar su perspectiva del mundo al considerar conceptos como el de presión y esfuerzo, implican tanto estrategias como formalismos matemáticos propios de esa forma de ver el mundo físico (Romero, 1996).

CAPÍTULO III: RELACIÓN FÍSICA MATEMÁTICA

3.1 EL USO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN LA FORMALIZACIÓN DE LOS FLUIDOS: UNA FORMA DE MOSTRAR LA RELACIÓN FÍSICA MATEMÁTICA

El establecimiento de los principios generales de la hidrostática, realizados por Euler coinciden con el momento histórico (siglo XVVIII) en donde los trabajos son orientados a organizar y formalizar las teorías establecidas en el siglo XVII, en principios generales. En este sentido, tal como lo plantea Romero, más que el interés por la extensión y aplicación de los conocimientos ya constituidos y el afán por alcanzar nuevas metas, la preocupación se centra en la indagación por la posibilidad del establecimiento de líneas directrices que permitan fundamentar y perfilar la dirección de la propia actividad: la pretensión está centrada en el análisis del fundamento general de los fenómenos (Romero, 1996). Es precisamente en este siglo (XVIII) que se obtienen las leyes de la mecánica de fluidos, como resultado del trabajo con el cálculo diferencial, y la invención y

[31] ibid.,p.233

utilización de las derivadas parciales; obra iniciada por D' Alembert y continuada por Euler (Paty, 1994).

En este momento histórico se pude ver como el uso del calculo diferencial implica una nueva etapa de la matematización en física, la cual encuentra en la mecánica de fluidos un terreno fértil que posibilita el establecimiento de principios generales, tales como los postulados por Euler.

Según algunos análisis históricos (Paty, 1994), la matematización de la hidrodinámica es iniciada por D'Alembert a través de la invención y uso del cálculo de ecuaciones diferenciales, propiciando con su trabajo rutas alternativas, que son retomadas por Euler, estableciendo los principios delos fluidos. A este respecto D' Alembert considera:

> *Las ciencias llamadas fisico- matemáticas (...) consisten en la aplicación del cálculo al fenómeno natural (...) la invención del cálculo integral y diferencial nos ha permitido de alguna forma el movimiento de cuerpos en sus elementos o partículas... Es sólo con la ayuda de estos cálculos que podemos penetrar dentro de los fluidos y descubrir el papel de sus partes, las acciones que mutuamente ejercen, entre ellos, estos innumerables átomos de los cuales un fluido está compuesto, y parece al mismo tiempo unido y dividido, dependiente e independiente entre ellos. Es así porque el mecanismo interno de los fluidos es tan pobremente análogo a aquel de los cuerpos sólidos que tocamos, y sigue leyes que son muy diferentes*[32]

[32] D'Alembert, ( ). Citado por: PATY, M.. La idea de cantidad en el origen de la legitimadad de la matematización en física, 1999.

Lo propuesto por D'Alembert muestra el papel que desempeña la invención y uso del calculo dferencial en la formalización de los principios de los fluidos. Y es precisamente con el uso del cálculo que Euler hace un análisis del medio fluido, propiciando nuevas representaciones en términos del nuevo análisis (cálculo diferencial) que permite pensar el medio fluido a partir de la formalización y establecimiento de estos principios: la conceptualización física de algunos fenómenos como el equilibrio de los fluidos es hecha posible por el uso sistemático de la simbología y significación del cálculo diferencial leibniziano que Euler ya en esta época bien conocía a través de sus maestros y coterráneos Jacob y Joahan Bernoulli quienes, junto con Pierre Varignon y Guillaume - Francois de L' Hospital, desarrollaron y difundieron el cálculo leiniziano en el continente. En particular, Euler utiliza el símbolo "d" para el operador de diferenciación, con la misma significación que Leibniz, el diferencial dx de la magnitud x, es otra magnitud que tiene la misma dimensión que x, y por tanto con la que se puede componer. Esta concepción analítica de los fenómenos es precisamente la que permite a Euler la natural utilización de la simbología y sentido del cálculo diferencial. (Romero, 2005).

De manera análoga Euler lo hace con la presión, el diferencial dp (diferencial de presión) una magnitud que tiene las mismas dimensiones que *p.*

A este respecto Romero considera:

> *Es de resaltar, no obstante, una diferencia fundamental del uso y conceptualización euleriano del cálculo diferencial respecto a la forma inicial como fue propuesta y practicada por Leibniz. Mientras que para Leibniz y sus primeros seguidores el análisis no puede ser entendido sin referencia a su interpretación geométrica, en el sentido que se concibió como directamente relacionado con el estudio de curvas y con las relaciones entre magnitudes geométricas variables involucradas en*

una curva, para Euler el análisis no es una herramienta para el estudio de las curvas sino para el estudio de las fórmulas y las relaciones entre magnitudes; es decir, se trata de la ciencia que estudia las cantidades abstractas en general, entendiendo por cantidad abstracta una cantidad genérica cuya naturaleza no es especificada más que por sus relaciones operacionales con otras cantidades abstractas[33]

En este contexto de significación, para Euler la presión, más que ser una magnitud primitiva, es concebida como una función del fluido en un punto Z, función desconocida de las coordenadas x, y, z, cuya diferencial tendrá la forma $dp = Ldx+Mdy+Ndz$.

De lo anterior se pueden inferir dos aspectos importantes, uno en donde se ve como para Euler es indispensable conocer la disposición de las partículas que componen el fluido. Conocer el estado de presión es, para Euler, determinar su densidad y posición del elemento fluido. De esta manera se puede decir, que el enfoque de Euler, para el análisis de los estados de presión, consiste en lo siguiente: dado un punto geométrico fijo en el espacio, establecer el estado de presión del fluido en un punto, implica determinar dicho estado en función de la posición del punto. Este hecho de determinar cada punto o cada elemento del fluido a través de las distancias x, y, z, tomadas respecto a tres ejes coordenados fijos y perpendiculares entre sí, posibilita, al dar a tales coordenadas todos los valores posibles, recorrer todos los puntos del espacio infinito y por tanto, también todos los puntos ocupados por el fluido en cada instante. Es en este sentido que la presión y la densidad pueden ser consideradas, por una parte teniendo un valor determinado para cada punto del fluido, es decir, como funciones que dependen de la posición del elemento particular del fluido y, por otra parte, como magnitudes que dan cuenta de la disposición tanto espacial como temporal del medio, es decir, como variables d estado para las diversas configuraciones que pueden

[33] ROMERO, Op cit., p.4.

tomar el medio fluido. Esta situación posibilita que el estado de presión en el cual se encuentra el fluido sea representado por la variable altura (profundidad) y posibilita además, el uso del cálculo diferencial en expresiones como $p = p(x, y, z)$.

El otro aspecto a resaltar en la expresión $dp = Ldx+Mdy+Ndz$ está en relación con la naturaleza de ciertas magnitudes físicas, construidas a través de la relación entre variables con el uso del calculo diferencial y ala vez se puede ver como éste adquiere otra significación en la construcción de tales magnitudes, es decir el la construcción de las magnitudes físicas abstractas le posibilita a Euler poner en juego otra forma de significar el cálculo diferencial. Esta situación permite pensar que la invención y uso del cálculo determinan un tipo de relación entre la matemática y la física: una relación en donde surge tanto el cálculo como la organización y construcción de magnitudes físicas, es decir una relación de constitución tributaria entre la matemática y la física:

> *…la creación matemática es directamente el fin de la consideración de los fenómenos físicos, los cuales se engastan en retomar para establecer un tanto de la ciencia. Podemos entonces hablar de una doble y recíproca constitución, del análisis de las diferenciales parciales y de la teoría de la hidrodinámica. Esta reciprocidad, está marcada en un período, año de oro de los trabajos de los matemáticos y de los físicos donde las interpretaciones de una empujan a la otra, este beneficio nos muestra como naturalmente el concepto matemático y su forma entran en la construcción misma del concepto físico...*[34]

[34] PATY, M.. Le caractere historique de l'adéquation des mathématiques a la physique, 1994.

En el mismo orden de análisis, lo anterior muestra como tanto el concepto matemático como el concepto físico se construyen simultáneamente de modo que se presenta una relación tributaria en dicha construcción, tanto el componente matemático como el físico potencian tal construcción. Esta situación es la que posibilita significar la relación entre la matemática y la física como una relación de constitución.

3.2 REPRESENTACIÓN DE LAS VARIABLES FÍSICAS: EL CASO DE LA PRESIÓN INTERNA REPRESENTADA POR ALTURA

Tal como lo plantea Guidoni, toda nuestra actividad cognoscitiva y operativa está basada sobre sistemas de representaciones del mundo y de las relaciones que se establecen cuando se pretende construir algún tipo de explicación. Esto implica que las explicaciones que construye el sujeto son, precisamente, a través de las representaciones y en este sentido las representaciones imponen una doble necesidad: por un lado exige adherir a la estructura formal intenciones y fines de la representación utilizada; por otro lado, exige la imposición de significados en correspondencia a lo que del hecho es representado, necesariamente diverso de aquello que se percibe, ya que no es posible pensar las cosa independiente del sujeto que las construye. Esta situación obliga a que quien produce la representación y quien la utiliza deben compartir criterios de producción e interpretación culturalmente establecidos (Guidoni, Arca, 1987). Lo anterior permite pensar que tanto las representaciones como los criterios de interpretación y construcción están determinados por contextos particulares en los cuales emergen dichos criterios y la intencionalidad misma de construcción de tal representación. Bajo estas condiciones, la construcción de una representación tiene sentido si tal construcción está determinada por una intención o fin, lo cual debe materializarse en la asignación de significados de unos hechos que

igualmente son el resultado de construcciones del sujeto. Esto permite afirmar que la representación de las variables físicas además de estar determinadas por los contextos, son las que posibilitan asignar significados a los fenómenos físcos.

En el caso particular de los fluidos, es importante analizar la estrategia utilizada por Euler en la formalización de la hidrostática, en la cual la presión es asumida como magnitud intensiva, además de ser variable de estado que caracteriza la condición del fluido en un momento dado, representada por la variable altura.

3.2.1 REPRESENTACIÓN Y MEDICIÓN DE LAS VARIABLES INTENSIVAS: EL CASO DE LA PRESIÓN INTERNA

Como se sabe, una variable intensiva no se puede medir a través de operaciones de equivalencia entre el sistema considerado y un número entero (Guidoni, Arca, 1987; Arons, 1997; Campbel, 1921). Sin embargo existen diversas estrategias para asignar números enteros o racionales a las diversas variables intensivas, entre otras la presión interna. Por ejemplo se pueden construir escalas en los cuales los números adquieren significados de orden, resultando importante el término *grado* cuando se trata de interpretar dicha ordenación. En este sentido se puede apelar a fenomenologías que posibilitan una correlación entre las variables intensivas y extensivas: los cambios de una variable intensiva como la temperatura del sistema que se analiza, corresponde sistemáticamente a una particular variable extensiva como la longitud de una columna de mercurio en un termómetro. De este modo se puede medir el cambio de temperatura, asignando al cambio un valor numérico, de modo que la temperatura o los cambios de temperatura son representados por la variable longitud.

De manera análoga se puede interpretar la representación de los posibles estados de de presión de un fluido, interpretación que es posible en la perspectiva euleriana, en la cual se determina como situación prototipo una columna

infinitesimal homogénea de fluido hipotético (es decir, de igual densidad) asumido como incompresible. En esta situación, tal como se ha referenciado, la profundidad de un fluido no solo representa la elasticidad y densidad de los fluidos sino que también representa el estado de presión de una masa fluida. En este sentido, a cada estado de presión se le asigna una y solo una altura (profundidad). Bajo estas circunstancias, una vez definido el cambio de longitud (cambio de altura) que corresponde al cambio de presión de un grado, llega a ser automático el modo de asignar números a la presión (medir estados de presión). Esta situación implica que un cambio doble, triple... de longitud (variable observable y posible de determinar en la experiencia) corresponde siempre un cambio doble, triple en el estado de presión (variable transferida). Es de resaltar que la variable presión debe considerarse como variable autónoma que caracteriza la condición en la que se encuentra la masa fluida y los cambios de profundidad (que pueden ser asociados con la longitud) y presión son siempre proporcionales entre sí, es decir que la variable altura depende en modo lineal de la variable presión, tal como ocurre con la temperatura y la longitud.

A este respecto es de resaltar que en la perspectiva de Euler las magnitudes físicas fundamentales y primitivas, tales como la presión y la fuerza, no son susceptibles de comparación entre sí, razón por la cual se hace necesario su redefinición en términos de otras variables. En este sentido Romero considera.

> *"Para Euler, junto con la extensión espacial, el tiempo, la velocidad y la fuerza son magnitudes físicas fundamentales y primitivas de la mecánica y, como tales, no son susceptibles de comparación entre sí. No obstante, la permanencia de ciertas relaciones entre estas magnitudes observada en algunos fenómenos naturales posibilitan su comparación e, incluso, la redefinición de algunas de ellas en términos de las otras... Tal es el caso, por ejemplo, de la altura de caída libre como medida fundamental de la velocidad o de la altura de una*

columna de fluido incompresible y homogéneo para representar la presión en un punto al interior de un fluido cualquiera"[35]

Resulta entonces interesante resaltar que Euler, el estado de presión es representado por la variable altura como magnitud que puede ser medida directamente y su sentido físico ser transferido a la variable presión.

En el mismo sentido lo plantea Guidoni cuando considera:

Muchas variables intensivas y extensivas, que nos parecen perceptivamente como características de objetos, o de sistemas, o de materiales o de situaciones, pueden ser identificadas por reacciones definidas por otras variables. Así peso y volumen (variables extensivas)son entrecruzadas por una operación de relación, matemáticamente idéntica pero con diverso significado físico, para construir variables intensivas como peso específico y concentración; así a través de espacio y tiempo (variables extensivas) se construyen velocidad y aceleración (variables intensivas), así diversas longitudes (extensivas) son variadamente entrecruzadas para construir superficies y volúmenes (variables extensivas)...Precisamente sobre esta posibilidad de empalmar variables para construir y representar significativamente nuevas variables complejas se basa el trabajo de la formalización...[36]

Se puede decir entonces que lo susceptible de representar por la longitud son los "cambios" de la magnitud, no los valores mismos de ella ya que las variables intensivas como la presión, la temperatura no pueden medirse asignando una

---

35 ROMERO A. Physique et analyse : la formalisation de la mécanique chez Euler. Presentaciónen el marco del Seminario: Mathémtique et fondements de la physique aux XVIII et XIX siécles. REHSEIS, París, febrero 20 de 2006.

36 GUIDONI, P. & ARCÁ, M Op cit., p.38.

unidad, sino eligiendo una escala. En este sentido, es lícito afirmar que cuando los fluidos son organizados desde la perspectiva de estados y transformaciones la relación entre profundidades (alturas) se hace importante para identificar los estados de presión o los cambios de dichos estados.

Ejemplos de tales representaciones se pueden ver en el siglo XVIII, siglo en el cual por el momento intelectual que se vive (preocupación por la profundización de las explicaciones físicas) surgen razones para construir representaciones de cantidades físicas en teorías matemáticas particulares: la velocidad instantánea pudo ser medida por una longitud de caída, pequeños intervalos de tiempo fueron medidos por una longitud o una columna de mercurio, o en mecánica de fluidos, por la altura de una columna equivalente de fluido (Ravetz, 1961). En este momento histórico, de la misma manera como se representa el tiempo la velocidad, Euler representa el estado de presión con la variable altura.

En este contexto, otro aspecto a resaltar de orden metodológico, en Euler, está relacionado con la discretización que él hace en el fluido, en donde analiza el fluido en sus partes, buscando establecer un modelo, para explicitar como se puede organizar la complejidad fenomenológica de los fluidos en general, en la cual identifica interacciones internas (relacionada con las fuerzas que ejerce el elemento fluido sobre los elementos vecinos) y externas (relacionadas con fuerzas que ejercen los elementos vecinos sobre el elemento de análisis). Esta situación Euler la pone en juego en el siguiente contexto:

> *Esta altura p expresa pues la fuerza con que los elementos vecinos del fluido actúan de todas partes sobre el elemento Jkki, y en consecuencia este elemento reaccionará sobre aquellos. Es también por esta misma fuerza que el elemento Jkki resiste a la compresión, por la que sería*

reducido a un menor volumen, de suerte que si su resistencia es más pequeña, él será reducido realmente[37].

Lo anterior posibilita plantear que la relación del elemento fluido es tal con el resto de los elementos vecinos del fluido, que una modificación (perturbación del equilibrio) que suceda en este elemento puede repercutir con alteración en el resto del fluido, es decir, con alteraciones en el equilibrio del fluido en general, situación propia de los medios continuos.

Es por esta razón que resulta pertinente analizar el fluido determinando al interior de él una masa fluida, la cual se mantiene en un estado de equilibrio solo si es accionado perpendicularmente, de igual modo, por todos los elementos de superficie, de tal forma que se presente una relación proporcional entre las fuerzas actuantes y las superficies correspondientes, solo bajo estas condiciones se puede mantener en equilibrio la masa fluida. Lo anterior permite pensar que, tal como lo considera Truesdell, la raíz del éxito de Euler en la formalización de los fluidos se encuentra en el análisis de los conceptos (Truesdell, 1975). Esto muestra lo importante que es en la perspectiva euleriana el aspecto analítico, situación que pone en evidencia cuando estructura las fenomenologías generales del fluido a partir de estructuras particulares.

Se muestra, entonces, como para Euler formalizar el estado de presión de un fluido utiliza la variable altura que puede ser conocida en el fluido. Es por esta razón que, para conocer el estado de presión de una masa fluida es suficiente conocer la altura *p* a la cual se encuentra dicha masa, ya que a partir de esta altura podemos determinar los pesos (como fuerza prototipo) que serían equivalentes a las fuerzas actuantes en todas las caras del fluido. Es oportuno precisar que Euler utiliza la variable altura en un contexto muy particular: para representar la presión por la variable altura toma una columna de fluido

[37] Euler, Op Cit. p. 234.

homogénea de área infinitesimal. Sin embargo, tal como se ha planteado, al considerar la presión en función de un punto del fluido con coordenadas (x, y, z), la presión la representa por la variable altura (profundidad), de modo que resultan intercambiables los significados de la altura y la presión.

> *... si conocemos la presión en un punto de la superficie del fluido, se conocerá al mismo tiempo las presiones sobre todas las partes de la superficie, que son requeridas para el equilibrio. De este modo se pone la base AB = aa, y la fuerza donde ella está presionada = P, otra base cualquiera CD = cc será actuada por la fuerza =* $\frac{cc}{aa}$*P. Esta regla sería más simple, si expresamos la fuerza P por el peso de un cilindro de una materia homogénea grave, donde la base es = aa, es decir aquella sobre la que la fuerza actúa; ese cilindro estará entonces en una cierta altura, que sería = p : y por lo tanto la fuerza P será igual al peso de una masa de la materia homogénea, donde el volumen es = aap, o bien podrá colocarse P = aap: la fuerza que debe actuar sobre la base CD = cc, es =* $\frac{cc}{aa}$ *P vendrá a ser = ccp, o será igual al peso de un cilindro de la misma materia homogénea, donde la base es = cc, y la altura la misma que antes = p. Por la misma razón toda la otra porción de la superficie = ff de esta masa fluida,, sostendrá una fuerza = ffp.*[38]

En lo anterior Euler plantea que para conocer el estado de presiones, por la que es mantenida una masa fluida en equilibrio, es suficiente conocer la altura p, que es común a todos los cilindros formados de esa materia grave homogénea, y con la relación de los pesos de dichos cilindros se pueden determinar las fuerzas actuantes en cada una de las caras de la masa fluida.

[38] ibid.,p.220

Tal como se ha mencionado, en lo anterior se puede interpretar la estrecha relación entre los estados de presión y la variable altura, de modo que a cada unidad de altura corresponde una unidad de presión. Se puede decir entonces que esta actividad de hacer corresponder la presión con la altura, se ve cómo el uso de la experiencia, relacionada con traer a colación lo ya conocido (magnitudes dadas) y no la experiencia empírica (es el caso de la altura), es importante en los proceso de formalización. Esto muestra, una vez más, el papel asignado, por Euler, a este tipo de experiencia, relacionada con lo ya conocido y con el dato sensible y, su relación con el principio de la Hidrostática que Euler construye para el análisis del equilibrio de los fluidos.

Por otra parte, hacer corresponder la altura con un estado de presión, lleva a Euler a una definición de los fluidos compresibles y no compresibles, para los cuales es importante establecer bajo qué condiciones se puede presentar el estado de equilibrio. En este sentido él muestra como la altura, cualquiera sea el caso, sigue siendo una variable que posibilita la determinación del estado de equilibrio;

> *Esta consideración nos lleva a la definición de los fluidos elásticos y no elásticos, o comprensibles y no comprensibles, cualquier estado de equilibrio, que nosotros debemos explicar, se entiende igualmente en los unos como en los otros. Porque si el fluido contenido en el vaso ABCDEF es elástico o comprensible, la fuerza P = aap, que actúa sobre el pistón AB reducirá el fluido a un tal grado de compresión, donde se hallará en equilibrio; y entonces comprendemos que la elasticidad del fluido es precisamente igual a la fuerza comprimente, o bien la altura p servirá también de medida a la elasticidad del fluido. Si la elasticidad es más grande que la altura p, el pistón será rechazado, casi al estado del equilibrio; y si es más pequeña, el pistón entrará más profundamente: como el fluido no estará ni se extenderá a lo infinito, ni*

se reducirá en un espacio desvanecido, siempre habrá un caso, donde el equilibrio debe tener lugar.[39]

En lo anterior, resulta interesante ver como la altura no solo se relaciona con el estado de presión sino que también se relaciona con la elasticidad del fluido y con su densidad. A partir de esto, Euler establece una relación directa entre la elasticidad y la densidad, lo que hace posible establecer el estado de equilibrio no sólo en términos de la altura sino también en términos de la densidad y la elasticidad. A este respecto se plantea que si una masa fluida se encuentra en equilibrio, y el estado de presión es expresado en términos de la altura, esta altura permite determinar también la elasticidad del fluido; y por la relación que subsiste entre la densidad y la elasticidad, se podrá determinar también la densidad, y así recíprocamente.

Por otra parte, en este contexto de significación, también se justifica el hecho de plantear tales magnitudes físicas como el resultado simultaneo de conceptualización y matematización, ya que, conceptualizar y matematizar pueden constituir lo que se denomina la formalización en física. De igual manera esto constituye otra forma de justificar la relación entre la matemática y la física, ya que se puede significar la física como un proceso de conceptualización y matematización simultáneo. En este sentido Paty expresa:

En la física, los fenómenos son representados a través de conceptos que son expresados en forma de magnitudes o cantidades, dotados de definiciones exactas en una forma matemática. Las relaciones de conceptos físicos (por ejemplo distancia y coordenadas de espacio, duración y tiempo, fuerza, etc) son relaciones entre magnitudes que toman generalmente forma de ecuaciones o de proposiciones

[39] ibid.,p.223

cuantitativas, como principios (de inercia, de relatividad,... o principio de conservación) las ecuaciones son expresiones matemáticas de leyes (leyes de movimiento, leyes de la naturaleza...)y los principio, formulados como generales, aseguran propiedades de fenómenos físicos, proveyendo la condición para expresar matemáticamente magnitudes y sus relaciones.[40]

Lo anterior permite afirmar que la organización de los fenómenos determina el tipo de relación a establecer, organización que propicia el surgimiento de la matematización y formalización, materializada en el establecimiento de leyes o principios.

En este orden de ideas, es pensable que esta forma de asumir la matematización en física, compartida por la mayoría de los científicos del siglo XVIII, entre ellos Euler, formulada con cierta claridad por D'Alembert está guiada por la concepción cartesiana en cuanto a la relación física – geometría; se considera, tal como lo hace Descartes, que las matemáticas sirven como modelo y como garantía en el aseguramiento de enlaces de proposiciones que se construyen en los procesos de formalización y que además orientan la forma de expresar las magnitudes con las que representamos el mundo(Paty, 1999). Es en este sentido surge una nueva justificación de la matematización en física centrada en la pretensión de inteligibilidad, pretensión que toma gran fuerza en los trabajos de Euler, Clairaut, D'Alembert, Lagrange, Laplace y otros. Es de resaltar entonces, que con el la invención y uso del cálculo surge un nuevo propósito en la organización de los fluidos: la inteligibilidad de las leyes, principios y explicaciones físicas.

[40] PATY, M.. La idea de cantidad en el origen de la legitimadad de la matematización en física, 1999.

Todo lo anterior, permite afirmar que en este contexto, la constitución y uso del cálculo en la construcción y formalización de las magnitudes físicas, muestra una forma particular de significar la relación física matemática: una relación de constitución.

3. 3 LA PRESIÓN INTERNA COMO VARIABLE DE ESTADO

Teniendo en cuenta las consideraciones en el análisis hecho hasta ahora, la hidrostática puede ser pensada desde una perspectiva de estados, contexto en el cual la presión adquiere la significación de variable de estado y como tal se constituye en una variable que caracteriza la condición o estado en el que se encuentra una masa fluida. De este modo el análisis del fluido obliga centrar la atención en la variable presión como la posibilitadota de dicho análisis.

En tal sentido cuando se pretende un análisis desde esta perspectiva, se busca en todos los casos establecer si una masa fluida permanece en un estado de presión, o bien si cambia dicho estado y cuando œurre este último se torna importante analizar la forma en que ocurre dicho cambio. Bajo estas circunstancias es importante realizar una aproximación a lo que se entiende por estado, cambios de estados (transformaciones) e identificar las características que poseen las variables que permiten dar cuenta de los estados o permanencias, al igual que las variables que posibilitan describir las transformaciones o cambios.

En este contexto cobra gran interés las propiedades estructurales de los sistemas y en consecuencia, las representaciones para tratar dichas estructuras, destacando las pautas y regularidades que subyacen al sistema en análisis.

3. 3. 1 VARIABLES DE ESTADO Y VARIABLES DE PROCESO

Cuando se hacen discretizaciones entre dimensiones del espacio abstracto en el que se manifiestan las variables y sus enlaces, determinados por relaciones, se pueden definir elementos, relaciones entre elementos y estructuras de relaciones que permiten representar aspectos de la realidad en el espacio abstracto. A esta estrategia cognitiva es a la que se le denomina *ver por variables.*

En este sentido, cuando se ve por espacios abstractos de sistemas, simultáneamente se ve por espacios abstractos de variables, donde en estos modos de ver, a su vez, subyacen otros modos de ver como son, un modo de ver por estados y un modo de ver por transformaciones. Estos modos de ver están íntimamente relacionados, tal como lo considera Guidoni cuando afirma: "... *no se alcanza a ver por sistemas sin ver también por variables y viceversa (análogamente son correlativos los modos de ver por estados y transformaciones...)"*[41]

Consecuente con lo anterior, se puede decir que cuando se busca construir relaciones entre sistemas o entre partes de un sistema, es necesario determinar las variables que describen y representan explícitamente la interacción en forma definida. En tal sentido, al presentarse invariabilidad en la estructura determinada por unas variables, se puede identificar la condición en la que se encuentra un sistema, siendo posible especificar unos atributos que dan cuenta del estar o condición del sistema, es decir, es posible identificar una característica de identidad de la condición del sistema que se conserva estable durante cierto intervalo de tiempo. A esta situación se ha denominado *estado del sistema*. En

1. GUIDONI, Paolo y ARCA, María. Sistemas y variables. Seminario dictado de la Facultad de las Ciencias. Universidad de Nápoles, Italia. Traducción: Maria Mercedes Ayala y Priscila de Castro. Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Tomado del Módulo del seminario de Fundamentación Didáctica, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. p. 5.

este sentido, podemos decir que el estado del sistema es una configuración exacta que el sistema adquiere en el espacio abstracto de sus variables en ausencia de interacciones.

El estado del sistema puede ser descrito a través de unas variables de estado, es decir, a través de aquellas variables cuya interrelación define la configuración del sistema. Estas variables son tales que cambian con el cambio de estado del sistema y permanecen si dicha configuración o estado del sistema permanece. La ecuación que relaciona las variables de estado suele llamarse *ecuación de estado*. Así que cada sistema se describe por una ecuación de estado en la cual están explícitas variables y parámetros ligados según una forma característica. Una ecuación de estado caracteriza la totalidad de las posibles transformaciones de un sistema. (GUIDONI y ARCA, 1990; ARONS, 1997). Bajo estas circunstancias, la predicción del estado de un sistema, implica determinar el comportamiento de las variables que caracterizan al estado, por ejemplo, dadas dos propiedades intensivas independientes como la presión y el volumen específico, se desea conocer la temperatura, para lo cual se puede plantear la siguiente ecuación: f(p, v, T), denominada ecuación de estado. Teniendo en cuenta el análisis hecho, en cuanto a la presión y la densidad como funciones de un punto cualquiera del fluido, en el caso particular de la hidrostática, si se toma el fenómeno prototipo planteado por Euler, la ecuación de estado que permite determinar el estado de presión en función de la densidad y la altura sería *P(h, d),* siendo *h* altura y *d* densidad, o bien el estado de presión de una masa determinada en un espacio tridimensional, estaría dada por: *p(x, y, z)* siendo p la presión, *x, y & z* las coordenadas que determinan la masa fluida.

Otra situación que ejemplifica lo que en este contexto se denomina estado de un sistema se puede interpretar en los fenómenos termodinámicos:

La descripción completa de la condición o estado de un sistema en un instante dado se hace a través de sus propiedades termodinámicas. Por consiguiente, el estado de un sistema queda identificado por el conjunto de valores que tienen las propiedades termodinámicas en ese instante. Por otra parte, el sistema se encuentra en estados idénticos, si las propiedades son las mismas en dos estados de tiempo diferentes... dos propiedades intensivas independientes son suficientes para determinar el estado termodinámico... Generalmente la presión y la temperatura, la presión y el volumen específico, o la temperatura y el volumen específico son propiedades que se utilizan para definir un estado[42]

En lo anterior además de ejemplificar lo que se significa como estado termodinámico se puede interpretar como las variables que permiten caracterizar el estado mecánico de un sistema (variables de estado) son las propiedades intensivas, es decir aquellas que son independientes de la cantidad que constituye el sistema, es el caso de la presión, la cual es de carácter intensivo y desde luego puede ser asumida como variable de estado:

...las propiedades intensivas... son característica de la sustancia (o sustancias) existente, y son independientes de su cantidad (o cantidades). La temperatura y la presión son propiedades intensivas, así como también el índice de refracción, viscosidad, densidad, tensión superficial, etc. Debido a que la temperatura y la presión son propiedades intensivas, independientes de la cantidad de materia presente en el sistema, es por lo que se usan frecuentemente como variables para describir el estado mecánico de un sistema[43]

[42] MANRIQUE, José y CARDENAS, Rafael. Termodinámica. Ed. Tec-Cien LTDA. México, 1976
[43] GLASSTONE, Samuel. Termodinámica para Químicos. Editorial Aguilar S.A. Madrid, 1963

Es lícito plantear entonces, que para el caso de los fluidos y en particular en la Hidrostática, la presión como propiedad intensiva, igualmente se constituye en la variable que permite caracterizar o describir el estado de equilibrio mecánico de una masa fluida, razón por la cual puede ser asumida como variable de estado en el análisis de la Hidrostática.

En otro orden de ideas, es pertinente afirmar que al presentarse diferencias entre las estructuras de relaciones, se identifican estados diferentes que se pueden relacionar entre sí a través de los *cambios* o *transformaciones,* el tiempo es un referente importante ya que se hace alusión a que el cambio de variable es respecto al tiempo. Bajo estas circunstancias se tiene otro modo de análisis estrechamente correlacionado con el análisis por estados, en donde adquiere gran importancia el espacio multidimensional en el que se representan las transformaciones. De este modo los estados pueden verse como el inicio o el resultado de una transformación y las transformaciones como la conexión entre estados. En este sentido, la variación en la (s) variable(s) de estado debida a una variación en el estado (equilibrio) depende únicamente de los estados inicial y final del sistema. Asumir de esta forma las transformaciones de los sistemas implica que toda transformación puede ser vista como una sucesión de estados, es decir como una sucesión de configuraciones "estables instantáneamente" y, por tanto, como una serie de situaciones de *equilibrio instantáneo*.

En este contexto de significación, se puede decir que un sistema se encuentra en un estado de equilibrio mecánico si es incapaz de experimentar espontáneamente algún cambio de estado, es decir, un sistema se encuentra en equilibrio mecánico, si al ser aislado (no interactúa con otros sistemas), no experimenta ningún cambio de estado, esto es, si las propiedades que lo identifican (representadas por las variables de estado) permanecen invariables con el tiempo. Esto implica que la variable o variables que caracterizan el estado toman el mismo valor en todo el sistema.

Por otra parte, se puede decir que una transformación ocurre cuando un sistema pasa de un estado a otro. Estas transformaciones (cambios) del estado de un sistema sólo suceden debido a interacciones del sistema con otros sistemas, de modo que estos cambios resultan ser la evidencia de las interacciones entre sistemas. En este sentido se debe tener en cuenta que un sistema no puede hacer nada por sí mismo para cambiar el estado en el cual se encuentra. Bajo estas circunstancias es de resaltar que los cambios no se dan de modo gratuito, es decir, los cambios no resultan de la nada y cuando en el sistema se presentan éstos es por que en alguna parte tuvo que haber sucedido también un cambio, o sea, si el sistema gana algo es porque en otra parte se perdió eso que él ganó.

3. 3. 2 ANÁLISIS POR ESTADOS Y TRANSFORMACIONES

Teniendo en cuanta las consideraciones anteriores los estados de un sistema pueden ser analizados en términos de relaciones constantes entre variables (variables de estado) que caracterizan dichos estados. En tal sentido, se puede decir que la variable que representa tal relación o configuración determinada (entrecruce de variables) permanece en el tiempo y es la que en lo sucesivo denominamos variable de estado. Complementariamente al análisis por estados, donde las configuraciones se mantienen en el tiempo, se pueden identificar configuraciones (relaciones) que cambian el tiempo, a estos cambios se denominan transformaciones. Las variables que caracterizan los cambios cambian en el tiempo y se denominan variables de procesos o de transformaciones. Lo anterior permite afirmar que mientras los estados duran en el tiempo las transformaciones se desarrollan en el tiempo; bajo estas circunstancias, una transformación puede ser analizada en términos de cambios en el tiempo de las variables que la caracterizan y un estado puede ser analizado en términos de

relaciones constantes entre las variables que lo caracterizan. En este sentido Guidoni afirma:

> *... Se pueden en efecto captar configuraciones de aspectos y de relaciones invariables (o casi invariables) en el tiempo y caracterizarla como estados. Por contraste, se pueden captar configuraciones temporales de cambios parciales o totales e indicarlos generalmente como transformaciones.*
>
> *... flotar e ir al fondo es una transformación; tener pulmonía es un estado, coger la pulmonía o curarla es una transformación; ser de hierro es un estado, oxidarse, llegar a ser oxido de hierro es una transformación que envuelve el hierro y el oxigeno del aire*[44]*.*

Teniendo en cuenta lo anterior, puede decirse, entonces, que en el análisis por transformaciones lo importante en las variables de estado son sus variaciones, ya que son estas variaciones las que dan cuenta de las transformaciones del sistema

Consecuente con lo anterior, ¿en que sentido la presión interna puede ser una variable de estado? Cuando se analizan los fluidos se puede determinar en ellos condiciones estables en el tiempo o bien nuevas condiciones debidas a las acciones que se ejercen en un momento dado, esta situación permite considerar las diferentes condiciones posibles que pueden relacionarse con nuestra experiencia, y buscar establecer una relación entre estas condiciones y la variable que caracteriza dichas condiciones o estados. Estas condiciones estables o condiciones de equilibrio son catalogadas como estados de la masa fluida, estado que puede ser descrito como un estado de presión; en tales circunstancias la presión se constituye en una variable de estado ya que posibilita describir la condición de equilibrio en la que se encuentra la masa fluida. En este contexto de

[44] GUIDONI, P. & ARCÁ, M. Guardare per sistemi, guardare per variabili. Emme Edizioni, Torino, 1987.

significación la presión se constituye en un idea base o estructurante de los posibles estados de una masa fluida. En tal sentido la presión es un eje organizador en la descripción de los fluidos, ya que esta forma de asumir la presión como variable de estado posibilita dar cuenta de la condición en la que se encuentra una masa fluida en un intervalo de tiempo dado (finito o infinitesimal). En tal sentido la presión es un modo de estar del fluido (condición del fluido); de este modo, la presión se constituye en la característica o cualidad que puede ser asignada a una masa fluida en el mismo sentido que se puede afirmar que moverse con 10 grados de velocidad durante cierto tiempo es un estado(estado de movimiento), en este caso la velocidad caracteriza los grados o intensidad del movimiento; cuando nos referimos al estado térmico hablando de grados de temperatura (de tener más o menos grados de temperatura). De la misma manera, es posible distinguir en el fluido "grados" de presión y pensar entonces en una diversidad de estados de presión en los que se puede encontrar una masa fluida en diferentes momentos.

Por otra parte, se puede afirmar que una masa fluida por si sola no puede cambiar el estado de presión en el que se encuentra (cualquiera que sea éste), es entonces natural que la masa fluida permanezca en el estado en el que se encuentra; lo que requiere de una causa o una razón no es la permanencia en el estado sino el cambio de estado. Es por esta razón que en el análisis del equilibrio y movimiento de los fluidos el concepto de estado de presión y sus cambios adquiere fundamental importancia.

¿Cómo caracterizar el estado de presión de un fluido?, ¿cómo saber si dos masas fluidas experimentan o no el mismo estado de presión? De acuerdo con el análisis adelantado, se puede afirmar que dos masas fluidas se encuentran en el mismo estado de presión si al permitírseles interactuar no se afectan sino que permanecen en sus estados iniciales de presión.

¿Cómo medir la variable asociada (presión) al estado del fluido? Usualmente en la enseñanza de la física el concepto de presión es definido y abordado a partir del concepto de fuerza, aspecto por el cual este concepto se asume como la *acción* ejercida sobre una superficie determinada, o sobre un fluido: "la presión aplicada a un fluido encerrado se transmite sin disminución a todas las partes del fluido y a las paredes del recipiente"[45]. De esta forma, el uso del concepto de presión en el análisis y organización de los fenómenos hidrodinámicos se reduce a la mera aplicación del algoritmo P = F/A en la solución de problemas particulares. Este hecho, además de propiciar la confusión del concepto de presión con el concepto de fuerza, refleja una particular manera de asumir los procesos de formalización en su relación con la organización de los fenómenos físicos: en tales procesos formalizar se reduce al uso de algoritmos y simbolismos matemáticos.

En este sentido para determinar el estado de presión de un fluido, es necesario medir primero fuerza, áreas y luego hacer uso de la expresión P = F/A y de esta manera el problema queda resuelto, al menos en la teoría. Sin embargo, tal como se ha mencionado, de esta manera de cuantificar la presión surge el problema de asignar a la misma variable dos significados distintos, uno en términos de fuerza y otro como presión, lo cual permite confundir el concepto fuerza con el concepto presión y viceversa. Esta situación puede ser superada si la presión es asumida como una condición o estar de la masa fluida y la fuerza como aquella magnitud que surge en las interacciones precisamente debido a una diferencia de presiones. Es por esta razón que resulta lícito afirmar que todo cambio en el estado de presión significa interacción entre la masa fluida con otra parte del continuo, lo cual implica que los cambios observados en una región del fluido es indicio de cambios en otra región del mismo. De igual manera sucede con otros fenómenos que sean analizados desde la perspectiva de estados y transformaciones: un cuerpo no cambia su estado de movimiento a menos que interactúe con otro cuerpo que se encuentre en un estado de movimiento diferente; un cuerpo no varía su estado térmico (temperatura) a menos que interactúe con otro que se

[45] SEARS, Francis y ZEMANSKY, W. Física Universitaria. México: Addison Wesley Longman S. A, 1999

encuentre en otro estado térmico diferente, es decir con otro grado de temperatura, en una masa fluida no cambia el estado de presión a menos que interactúe con otra masa que se encuentra en otro estado de presión diferente.

Sin embargo, en esta perspectiva, para determinar el estado de presión o los cambios acaecidos en los estados de presión en una masa fluida, Euler propone un fluido prototipo en el cual es suficiente conocer la altura (profundidad), para luego transferir el significado físico a los estados de presión, es decir, cuantificando alturas (profundidades) o cambios de altura, es posible cuantificar los estados de presión o los cambios en los estados de presión.

Es en este contexto donde surge la importancia de la expresión $dp = q(Pdx + Qdy + Rdz) = qds$. Por otra parte, la expresión muestra que en el análisis del equilibrio de los fluidos el interés está centrado en la comparación de los estados donde la diferencia de presiones se hace importante, por otra parte, la presión como función de la posición, está determinada por las coordenadas x, y z, de modo que ésta caracteriza la condición del fluido en un punto cualquiera del espacio, constituyéndose en una variable de estado.

CAPÍTULO IV: ACTIVIDADES DE ANÁLSIS

En el intento de realizar algunas actividades prácticas en esta perspectiva, a continuación se presentan unos talleres que pueden permitir una introducción en los aspectos relacionados con el análisis de la Hidrostática a partir de la presión como variable estado.

Inicialmente se propone una actividad experimental que tiene como propósito realizar una aproximación al estado de presión como campo de presiones, determinando la condición en la que se encuentra la masa fluida. Estado que puede ser descrito a través de la variable altura.

Con el primer taller se pretende realizar un análisis del equilibrio de los fluidos a partir de la fuerza gravitacional como prototipo y la formula general que Euler propone como posibilitadora para el análisis. De esta manera empieza a configurar lo propuesto por Euler en cuanto a la presión representada por la variable altura.

Con el diseño del segundo, se busca establecer una relación entre los estados de presión de una masa fluida y la profundidad a la cual se encuentra. La principal intención se centra en identificar que a pesar de ser la presión y la longitud dos magnitudes de características diferentes es posible la transferencia del significado físico para la determinación del estado de presión de una masa fluida.

Finalmente, se propone un tercer taller, con el cual se pretende seguir profundizando en la conceptualización de la presión interna. Se analiza el estado de presión en un punto y su relación con las acciones ejercidas por el resto del fluido. Para tal fin se consideran dos fluidos con diferentes densidades contenidos en un recipiente. La principal intención se centra en poner en juego lo propuesto por Euler en cuanto a la relación entre la densidad, la altura y los estados de presión.

ACTIVIDAD EXPERIMENTAL: DETERMINACIÓN DEL ESTADO PRESIÓN COMO CAMPO DE PRESIONES Y EN FUNCIÓN DE LA PROFUNDIDAD

MATERIALES: Cubeta, probeta, tubo de vidrio, sifón, embudo, regla de un metro, soporte universal, nueces doble, papel milimetrado, anilina, papel cartulina, tijeras

Con estos materiales realice un diseño en el cual debe depositar agua en la cubeta, colocar el embudo en un extremo del sifón para luego introducirlo en el agua, del mismo modo el otro extremo del sifón debe fijarlo a la regla de modo que pueda determinar una escala. Teniendo en cuenta estas orientaciones, organice el diseño y describa un procedimiento que permita reflexionar sobre las siguientes situaciones:

Proponga otra actividad experimental donde pueda expresar el estado de presión en términos de la altura (profundidad) y donde además se evidencie la presión como un campo de presiones.

¿Cómo es la presión en la medida que aumenta la profundidad? ¿Como se manifiesta físicamente tal situación en el montaje realizado? Describa tal situación física y los procedimientos realizados.

¿Podrá el estado de presión, considerarse como un campo de presiones? ¿cómo se evidencia esta situación física en el montaje realizado? Describa la situación física y los procedimientos realizados.

¿Cómo es el estado de presión en diferentes puntos del fluido que se encuentran a la misma profundidad?

Realice un gráfico de p contra h si:

h es constante

h varía

TALLER NÚMERO UNO: EL EQUILIBRIO DE LOS FLUIDOS CON LA FUERZA GRAVITACIONAL COMO PROTOTIPO EN EL ANÁLISIS

Primera parte

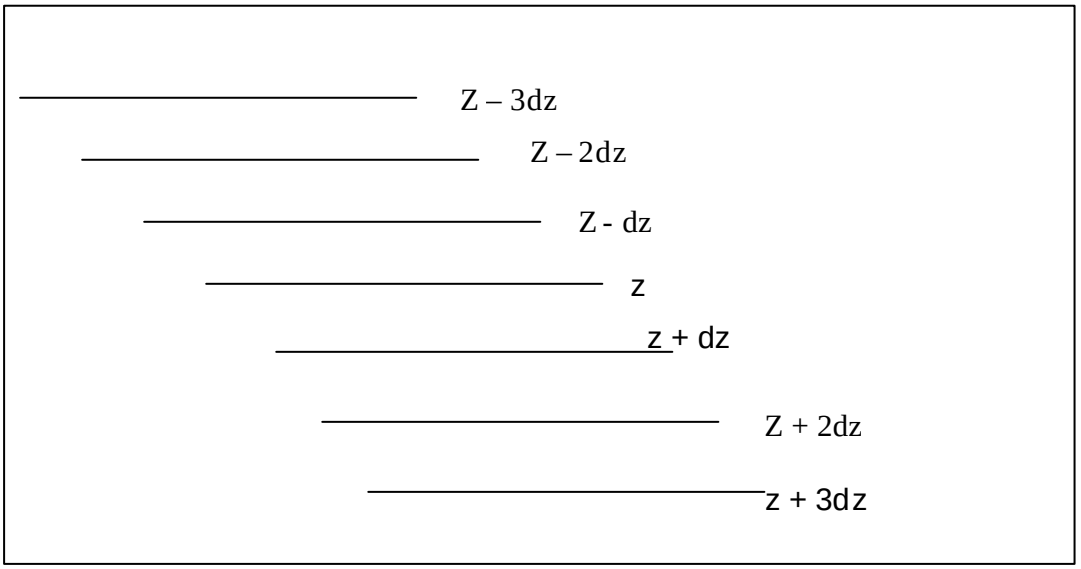
Se tiene un fluido homogéneo (igual densidad) y se determina un punto Z que se encuentra a una profundidad h. Si a esta profundidad se le asocia un estado de presión P:

Qué relación se puede establecer entre el estado de presión en h y los estados de presión en otro punto *Y* del mismo fluido, si éste se encuentra a la profundidad de: 1h, 2h, 3h, 4h, 5h

Si se tiene una masa fluida y la diferencia entre las caras o superficie que la limitan del resto del fluido es de 2h, ¿Qué relación se puede establecer entre los estados de presión en cada cara de la masa fluida?

Teniendo en cuenta lo anterior, ¿Qué relación se puede establecer entre los estados de presión y la profundidad en la que se encuentra una masa fluida?

Si la masa fluida está determinada por capas, tal como lo ilustra la figura



La figura representa una masa fluida determinada pos capas

¿Cómo es el estado de presión entre las capas con diferente densidad?

¿Qué relación se puede establecer entre los estados de presión de la capa z y las otras capas?

¿Cómo cambia el análisis anterior si el fluido se considera en un lugar donde la fuerza gravitacional es igual a cero?

Segunda parte

Para el análisis de los fluidos Euler propone la formula general *dp =q(Pdx + Qdy + Rdz),* siendo *P, Q, R* las fuerzas aceleratrices en un plano tridimensional y q la densidad del fluido.

¿Que consideraciones se deben hacer, en cuanto a las fuerzas, si el análisis del fluido se hace en un plano horizontal (se analiza una lámina horizontal del fluido) y sólo se tiene en cuenta la fuerza gravitacional como prototipo de dichas fuerzas actuando en el plano vertical y asignándole la unidad como valor?

¿Cómo se expresaría la ecuación general en este caso particular?

Si ahora la densidad es tomada también como prototipo asignándole la unidad como valor, ¿qué transformaciones sufre la expresión anterior?, ¿qué significado físico tiene la expresión obtenida? Explique ampliamente

Teniendo en cuenta las dimensiones usuales ques e conocen, verifique si *dp =q(Pdx + Qdy + Rdz),* es una expresión correcta para determinar el estado de presión en un fluido

Teniendo en cuenta el análisis anterior, ¿será adecuado expresar la presión como la altura (profundidad)? Explique claramente.

TALLER NÚMERO DOS: VARIACIÓN DEL ESTADO DE PRESIÓN DE UN FLUIDO CON LA ALTURA (PROFUNDIDAD)

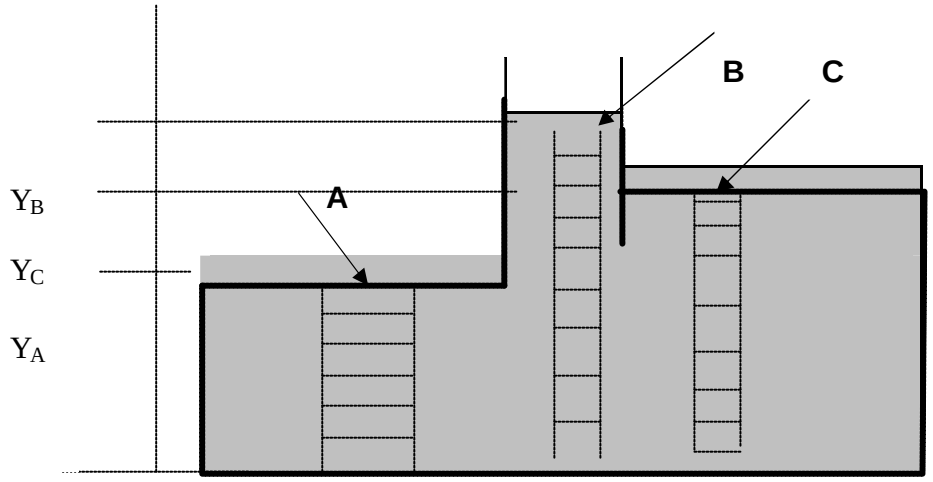
Primera parte

Teniendo en cuenta la expresión dp = q(Rdz) como caso particular de la expresión general del equilibrio de los fluidos- dp =q(Pdx + Qdy + Rdz)- siendo q la densidad del fluido y R la fuerza gravitacional actuando en el plano vertical con un valor patrón de la unidad y además la densidad q igual a la unidad:

Deduzca la expresión para calcular la presión en cualquier punto del fluido.
Si en un punto cualquiera Z del fluido el estado de presión es p
¿cuál será la presión en otro punto del fluido z + dz y, z – dz
si en la superficie del fluido se asume que Z = 0 y la presión en ese punto es la presión atmosférica, ¿Cuál es la diferencia de presión en otro punto del fluido donde Z toma valores diferentes de cero?
Realice un gráfico de z contra p que ilustre las situaciones anteriores.
Si el fluido es compresible y la densidad y la presión están en función de la altura y tanto la presión como la densidad se pueden expresar en términos de la altura ¿cuál es la solución de la integral dp = q(Rdz)? ¿Cuál sería el grafico de z contra p?, ¿cuál es el significado físico de dicho gráfico?

Segunda parte

El diagrama representa un recipiente que contiene un fluido de densidad *d*. Imaginemos que podemos "extraer" desde el interior del fluido tres columnas denotadas con A, B y C. Denotamos el área de sección transversal de las dos columnas con los símbolos $S_{A,}$ S_B y S_C y sus alturas Y_A, Y_B y Y_C respectivamente. Denotamos la presión atmosférica con P_0.



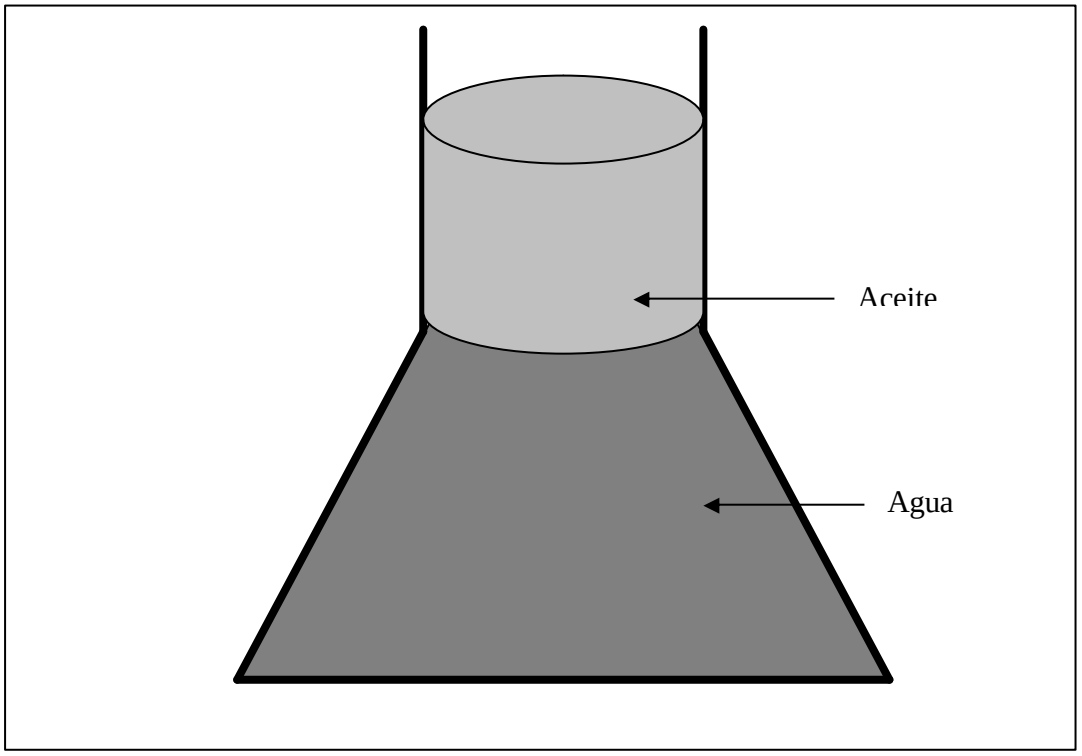
¿Qué relación se puede establecer entre las presiones en cada base de las columnas?

¿Es la presión igual en el fondo del recipiente?, ¿mediante que procedimiento puede determinar la presión en el fondo del recipiente?

Supongamos que se hace un orificio en la parte superior de la columna B, ¿Qué pasaría? Explique. Suponga que igualmente se hace un hueco en la parte superior de la columna A, ¿qué pasaría? Analice la misma situación pero ahora el hueco se hace en la columna C. Explique la situación física que espera debe ocurrir.

TALLER NÚMERO TRES: DETERMINACIÓN DE LOS ESTADOS DE PRESIÓN EN TÉRMINOS DE LA DENSIDAD DEL FLUIDO Y DE LA ALTURA

La figura representa un recipiente que contiene una mezcla de aceite y agua que inicialmente se encuentra dispersa uniformemente en todo el recipiente. Con el transcurso del tiempo se genera una separación de los fluidos según su densidad ya que éstos no son misibles.



El diagrama muestra los fluidos definidos según la densidad

¿Cuál es el estado de presión en el fondo del recipiente en el instante en que la mezcla se encuentra uniformemente dispersa en el recipiente?

¿Cuál es el estado de presión en el fondo una vez los fluidos se separan según sus densidades?

Compare los estados de presión en los casos anteriores, ¿Qué relación se puede establecer entre estos estados de presión? Describa lo más ampliamente posible tal relación

¿Qué condiciones considera usted se deben establecer para establecer el estado de presión de un fluido en un momento dado?

CONCLUSIONES

El presente trabajo ha sido un intento por construir una ruta conceptual alternativa para la enseñanza de los fenómenos hidrodinámicos, se realiza un análisis histórico epistemológico de la manera como L. Euler configura y presenta su concepto de presión interna, expuesto en su memoria titulada Principes géneraux de l'equilibre des fluidos (1757). En este análisis se muestra cómo Euler diferencia los conceptos de presión interna y fuerza, considerando la presión como una variable de estado que da cuenta de la condición mecánica en la cual se encuentra una masa fluida en un momento dado. Se analiza, además, cómo el uso del cálculo diferencial parcial en la organización de los fenómenos hidrostáticos permite a Euler *dar forma* a esta clase de fenómenos, aspecto por el cual se constituye en una fructífera manera de significar la relación entre la física y las matemáticas.

1. Los procesos de formalización y enseñanza de la física

En este trabajo, es de destacar los aportes que hace el análisis histórico-epistemológico en la actividad de la enseñanza de la física. En primer lugar, con estos análisis se vislumbra la dinámica de la actividad científica en los procesos de construcción de conocimiento. En segundo lugar, se identifica una ruta alternativa en la consideración de los problemas que se abordan en la enseñanza de la física. De esta manera se resalta que los enfoques históricos posibilitan recrear los problemas que inicialmente se han planteado en la física, generan contextos de reflexión conceptual desde diferentes enfoques, lo cual favorece tanto lo disciplinar como el componente pedagógico- didáctico. De igual manera, se puede afirmar que un enfoque histórico epistemológico, permite ver como los diferentes modos

de significar la física están ligados a contextos particulares y a problemas propios de dicho contexto, lo posibilita significar la física como una disciplina históricamente constituida.

En cuanto a la formalización, es resaltar que asumir el formalizar como la actividad de dar forma definida y esquematizada a un fenómeno, más que ser la formulación matemática de los conceptos físicos, es un proceso cognitivo a través del cual, como su nombre lo indica, se da forma a los modos de conocer y de postular el mundo, en donde se involucran dos procesos estrechamente relacionados: los procesos de matematización y los procesos de construcción de fenomenologías en la organización de la experiencia. Esta asunción permite afirmar que todo proceso de formalización está mediado de modo simultáneo por un proceso de teorización y uso de la experiencia. En este sentido, el matematizar depende tanto de las estructuras de los sistemas matemáticos como de los conceptos y magnitudes físicas en construcción. Matematizar un fenómeno físico no consiste en sobreponer un aparato matemático al fenómeno; se requiere, ante todo, construir la posibilidad misma de matematizarlo, es decir, de construir magnitudes, relaciones y procedimientos apropiados para representar los fenómenos y cuantificarlos.

Se destaca que a cada forma de significar la relación entre la física y la matemática subyace una concepción de lo que es la física y su enseñanza. Entender tal relación en términos de adecuación o constitución, favorece la implementación de estrategias de enseñanza, en el sentido construir contextos que permitan una reflexión de orden fenomenológico y a partir de dicha reflexión emerge el componente matemático, del mismo modo, la organización de la fenomenología se configura en los procesos de axiomatización.

Al considerar que la forma de asumir la física es determinante en la forma de enseñarla y que en la enseñanza se hace explicito la forma de significarla, se establecen condiciones particulares para abordar los problemas de la enseñanza

de la física, en el sentido de asumir que el aspecto metodológico debe surgir en las reflexiones conceptuales. De esta manera el problema de la enseñanza no solo puede ser visto como un problema de organización de contenidos, ni como un problema centrado en la búsqueda de formas adecuadas de transmitir, sino que por el contrario es un problema que debe abordarse desde la reflexión disciplinar en aras de una reorganización conceptual.

2. La formalización de los fluidos en la perspectiva euleriana

En el análisis que se hace de la memoria de Euler, es de destacar aspectos importantes en el componente metodológico:

- El papel asignado a la experiencia en su relación con los principios metafísicos y los presupuestos epistemológicos en los que fundamenta su cosmovisión.
- Los conceptos físicos creados para abordar el análisis de la Hidrostática
- La forma como explicita la relación física matemática a través del uso del cálculo diferencial.

Euler considera que la primera idea sobre la que han de estar fundados todos los razonamientos en Hidrostática es la idea de la naturaleza de la fluidez en general, naturaleza que no concibe en si misma sino en términos de relaciones. Para Euler la naturaleza de los fluidos es diferente a la de los cuerpos sólidos, razón por la cual asume que no es posible explicar la naturaleza de los fluidos a partir de una representación con sólidos, considera que el modelo corpuscular no resulta adecuado cuando se trata de explicar tal naturaleza. Es precisamente esto lo que lleva a plantear la necesidad de establecer y profundizar en la naturaleza de los fluidos. Considera que esta propiedad esencial de los fluidos debe establecer los principios de la Hidrostática. Naturaleza que permite a firmar que una masa fluida se encuentra en equilibrio siempre y cuando se encuentre actuada en todos los puntos de superficie por fueras iguales y perpendiculares a la superficie.

Es precisamente con la intención de poner en juego este enunciado que Euler empieza a dar forma al concepto de *estado de presión*. Al interior del fluido identifica una masa fluida y considera que ésta es presionada en uno de sus lados por una fuerza cualquiera cuya dirección es perpendicular al elemento de superficie sobre el que actúa. Para que la masa fluida se mantenga en equilibrio se necesita que otro elemento de superficie sea también actuado perpendicularmente por otra fuerza, que ha de tener con la anterior la misma razón que la que subsiste entre las superficies de los elementos respectivos; si alguna de estas fuerzas fuera menos según esta proporción, no sería suficiente para resistir a la acción de la otra, y por tanto el equilibrio sería perturbado. De esta manera si se conoce el estado de presión en un punto de la superficie del fluido, se conocerá al mismo tiempo los estados de presión sobre todas las partes de la superficie que son requeridas para el equilibrio:
Esta situación se puede expresar en los siguientes términos:

$\frac{QN}{FM} = \frac{CD}{AB}$, o bien si QN = F_1, y FM = F_2; CD = ds_1^2 y AB = ds_2^2, entonces: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{ds_1^2}{ds_2^2}$.

Cuando un fluido en el interior de un fluido se encuentra en un determinado estado de presión por la acción de una fuerza cualquiera, no solamente serán los elementos del recipiente los que soportan tal presión, sino que de igual forma todos elementos del fluido mismo se encontrarán en el mismo estado de presión. Esta situación la explicita cuando al interior del fluido determina un diafragma inmaterial en equilibrio y considera que todas las partículas del diafragma soportarán también fuerzas que responderán a la misma altura p. de donde se sigue, que cada elemento de la masa fluida IKki será por todas partes actuada por fuerzas semejantes; o bien todas las partículas del fluido serán actuadas unas

contra otras por fuerzas que responden a la misma altura p: es pues la igualdad de todas estas fuerzas lo que constituye el estado de equilibrio, suponiendo siempre que de ningún modo existan fuerzas particulares, como la gravedad, que actúen sobre las partículas del fluido

El término altura al que Euler hace referencia es una forma de representar los estados de presión de un fluido, referida a la altura de una columna de una materia homogénea. Esta altura p representa, entonces, la fuerza con la que todos los elementos vecinos del fluido actúan sobre un elemento particular y, a la vez, la fuerza con la que el elemento en consideración resiste a la compresión, si se encuentra en estado de equilibrio. En este sentido plantea que la presión es función de la posición de coordenadas x, y, z, lo que permite identificar a la presión como una variable de estado que da cuenta de la condición del fluido.

Las consideraciones anteriores llevan a Euler a plantear un problema que contiene toda la teoría del equilibrio de los fluidos y posibilita explicitar la relación tributaria entre la física y la matemática a partir de la axiomatización y construcción de la fenomenología del equilibrio del fluido. Sobre el problema plantea que: siendo dadas las fuerzas con la relación que subsiste, en cada punto del fluido, entre la densidad y la elasticidad del fluido, determinar el estado de equilibrio del fluido implica encontrar las presiones que tendrán lugar en todos los puntos de la masa fluida, es decir, establecer el equilibrio de una masa fluida es determinar el estado o condición de presión en la cual se encuentra la masa fluida, condición que como se ha dicho se puede determinar en términos de la variable altura. Lo anterior muestra con cierta claridad como para Euler el problema del equilibrio del fluido está dado en términos de la presión.

Para abordar este problema Euler considera, al interior de una masa fluida, un punto Z de coordenadas x, y, z y selecciona a partir de él un elemento de fluido en forma de paralelepípedo rectangular de lados dx, dy, dz. Luego descompone la

fuerza aceleratriz que actúa en el punto Z según los tres ejes coordenados, OA, OB, y OC, perpendiculares entre sí en el punto O. Estas tres coordenadas determinan: OX = x, XY = y, YZ = z.

Estas fuerzas que actúan sobre las partículas del fluido, son parecidas a la de la gravedad, por lo tanto ellas actúan proporcionalmente a la masa que se encuentra en Z, es decir si la masa que está en Z es doble la fuerza motriz igualmente será doble, esto implica que la fuerza motriz es proporcional a la masa. Situación que no ocurre con la fuerza acelerativa, ya que su magnitud no depende de la masa identificada en Z. Sin embargo esta fuerza acelerativa que actúa en Z se puede descomponer en la dirección de los tres ejes de coordenadas:

Una componente que actúa según ZL, paralela a OA = P
Una componente que actúa según ZM, paralela a OB = Q
Una componente que actúa según Zz, paralela a OC = R
La fuerza P actúa siguiendo la dirección ZL (+X), R actúa según la dirección Zz (+Z) y Q actúa según la dirección ZM (+Y). Las magnitudes de las fuerzas P, Q y R son funciones de las variables x, y, z, lo que implica que la cuantificación de estas fuerzas aceleratrices se da en términos de la posición que ocupa la masa fluida.

Estas fuerzas motrices no son las únicas que actúan sobre el elemento diferencial del fluido, pues dicho elemento es también actuado por la acción del fluido del cual es rodeado. Esta situación Euler la analiza a partir de un razonamiento geométrico, idéntico al realizado para determinar la masa fluida.

La diferencia de presiones entre dos caras opuestas de un paralelepípedo imaginario aislado, producen una fuerza que tiende a mover la partícula de fluido, perpendicularmente a sus caras, fuerza que debe equilibrar las fuerzas aceleratrices con las que la partícula es animada.

Para determinar las fuerzas asociadas a la diferencia presión, Euler considera que la presión p del fluido en Z es una función desconocida de las coordenadas x, y, z, cuya diferencial tendrá la forma *dp = Ldx+Mdy+Ndz*. Cualquiera que sea la presión sobre uno de los lados del elemento fluido, por ejemplo ZMzm, la presión en el otro lado opuesto LNln excederá el incremento de la altura dp = Ldx. A este respecto se puede decir, entonces, que el término Ldx expresa el incremento de presión que experimenta el elemento fluido, a lo largo del eje x debido a que las caras del paralelepípedo en esta dirección están separadas un diferencial dx. Situación similar ocurre con los otros lados opuestos, donde Mdy y Ndz representan los incrementos de presión debidos a la separación de las caras en los diferenciales dy y dz a lo largo de los ejes Y y Z respectivamente. Lo anterior implica que cada una de las caras sería empujada por una fuerza en los siguientes términos: En el lado de área dydz, el elemento fluido es empujado según la dirección LZ (-X) por la fuerza de magnitud Ldxdydz. De igual manera el lado que presenta el incremento Mdy (en el eje Y) el elemento será empujado en la dirección MZ (-Y) por la fuerza de magnitud Mdxdydz; la cara que presenta el incremento Ndz (en el eje Z), el elemento será empujado en la dirección zZ (-Z) por la fuerza de magnitud Ndxdydz. De esta manera Euler determina todas las posibles fuerzas que pueden actuar sobre una masa fluida.

Estas tres fuerzas son contrarias a las fuerzas motrices, representadas en la figura dos; el estado de equilibrio exige que sean iguales entre sí, obteniendo de esta manera las condiciones generales para que una masa fluida pueda estar en equilibrio, condición que se puede plantear en los siguientes términos:

Las componentes de las fuerzas actuantes en el eje X son: la componente de la fuerza motriz Pqdxdydz y la componente de la fuerza debida a la diferencia de presiones es Ldxdydz, como estas fuerzas son iguales por estar el elemento fluido en equilibrio se tiene que Pqdxdydz = Ldxdydz, al despejar L de esta expresión se

tiene: L = Pq (1). En el eje Y las fuerzas actuantes son: la componente de la fuerza motriz Qdxdydz y las debidas a la diferencia de presión Mdxdydz, y tal como se plantea en el eje x en el eje Y se tiene: Qqdxdydz = Mdxdydz; al despejar M, se tiene que M = Qq (2); de igual manera en el eje Z se tiene que: Rqdxdydz = Ndxdydz, obteniendo N = Rq (3).

Al que la expresión que da cuenta del estado de presión del fluido es $dp = Ldx+Mdy+Ndz$, y remplazando (1), (2) y (3) la expresión adquiere la siguiente forma:
dp = Pqdx +Qqdy + Rqdz, al factorizar q; dp =q(Pdx + Qdy + Rdz).

Al analizar el planteamiento de Euler en cuanto al surgimiento de las fuerzas debidas a la diferencia de presión, al igual que la anterior expresión que da cuenta del estado de equilibrio del fluido resultan aspectos relevantes que permiten caracterizar el concepto de presión interna:

Para que la masa fluida ubicada en Z permanezca en equilibrio las fuerzas que actúan en dicha masa deben anularse entre sí.
La diferencia de presiones a la que están sometidas las caras de la masa fluida es lo que da origen las fuerzas que tienden a mover una partícula de fluido al centro de dicha masa, es decir, tienden a reducir su volumen, las cuales deben anular las fuerzas aceleratrices que actúan sobre la masa, como condición para que ésta permanezca en equilibrio.
La acción ejercida por un medio fluido sobre una superficie imaginaria interior a este fluido, independiente de su geometría y ubicación, es perpendicular a esta superficie en cada punto.
El estado de presión no se analiza en términos de una fuerza y un área, sino en términos de la relación de varias fuerzas y sus respectivos diferenciales de superficie.

La expresión dp =q(Pdx + Qdy + Rdz) representa el carácter espacial tanto de la fuerza como del estado de presión.
En general, se puede afirmar que asumir la presión como estado o condición en la que se encuentra una masa fluida, permite superar la dificultad centrada en asignar a la misma acción un carácter de fuerza y a la vez de presión. La condición caracteriza la identidad del fluido, mientras que las acciones (fuerzas) son ajenas a dicho fluido.

3. La relación física matemática

El establecimiento de los principios generales de la hidrostática, realizados por Euler coinciden con el momento histórico (siglo XVVIII) en donde los trabajos son orientados a organizar y formalizar las teorías establecidas en el siglo XVII, en principios generales. En este contexto más que el interés por la extensión y aplicación de los conocimientos ya constituidos y el afán por alcanzar nuevas metas, la preocupación se centra en la indagación por la posibilidad del establecimiento de líneas directrices que permitan fundamentar y perfilar la dirección de la propia actividad: la pretensión está centrada en el análisis del fundamento general de los fenómenos. En este siglo se obtienen las leyes de la mecánica de fluidos, como resultado del trabajo con el cálculo diferencial, y la invención y utilización de las derivadas parciales.

En este momento histórico se pude ver como el uso del cálculo diferencial implica una nueva etapa de la matematización en física, la cual encuentra en la mecánica de fluidos un terreno fértil que posibilita el establecimiento de principios generales, tales como los postulados por Euler.

La matematización de la hidrodinámica a través de la invención y uso del cálculo de ecuaciones diferenciales, propicia rutas alternativas, que posibilitan a Euler, el establecimiento de los principios de los fluidos.

Este trabajo muestra el papel que desempeña la invención y uso del cálculo diferencial en la formalización de los principios de los fluidos. Y es precisamente con el uso del cálculo que Euler hace un análisis del medio fluido, propiciando nuevas representaciones en términos del nuevo análisis (cálculo diferencial) que permite pensar el medio fluido a partir de la formalización y establecimiento de estos principios.

Es de resaltar que las conceptualizaciones físicas de Euler son hechas posibles por el uso sistemático de la simbología y significación del cálculo diferencial leiniziano que Euler ya conocía a través de sus maestros. Utiliza el símbolo "d" para el operador de diferenciación de modo que el diferencial dp, de la magnitud p, es otra magnitud que tiene la misma dimensión que p y, por tanto con la que se puede componer.

Para Euler la presión, más que ser una magnitud primitiva, es concebida como una función del fluido en un punto Z, función desconocida de las coordenadas x, y, z, cuya diferencial tendrá la forma $dp = Ldx+Mdy+Ndz$. esto muestra con cierta claridad como la naturaleza de ciertas magnitudes físicas es construida a través de la relación entre variables con el uso del calculo diferencial, pero a la vez se puede ver como éste adquiere otra significación en la construcción de tales magnitudes, es decir el la construcción de las magnitudes físicas abstractas le posibilita a Euler poner en juego otra forma de significar el cálculo diferencial. Esto permite afirmar que la invención y uso del cálculo determinan un tipo de relación entre la matemática y la física: una relación en donde surge tanto el cálculo como la organización y construcción de magnitudes físicas, es decir una relación de constitución tributaria entre la matemática y la física.

Bibliografía

ARONS, Arnold. Teaching Introductory Physics. New York: Sohn Wiley and Sons, 1997.

•AYALA, M. Mercedes, *Historia de las Ciencias y la Formación de Profesores de Física.* Relatorio Final de la VII Conferência Interamericana sobre Educação em Física, Portoalegre (Canela)-Brasil, julio 2000, págs-75-78).

•CARR, E., 1991*. ¿Qué es la historia?* (Ariel S.A.: Barcelona).

•CASSIRER, Ernst. El problema del conocimiento. Fondo de Cultura Económica, México, 1986, tomo IV, pp. 102-145

CASSIRER, Ernst. Fin y método de la Física teórica. En: El problema del conocimiento, V.4. México: Fondo de cultura económica, 1986.

DUCHSL, R.A. (1994) "Research on the history and philosophy of science". En D. Gabel (ed) Handbook of research on science teaching and learning. N. York: Macmillan.

•EULER, Leonhard.Principes géneraux de l´equilibre des fluides. En mémoires de l´academie des Sciences, Berlin, XI, 1755 (1757b), pp. 274-315. Opera omnia, ser 2, XII, pp.2-53. Commentatio 225 indis Enestroemiami.

•EULER, Leonhard.Principes géneraux du mouvement des fluides. En mémoires de l´academie des Sciences, Berlin, XI, 1755 (1757a), pp. 217-273. Opera omnia, ser 2, XII, pp.54-91. Commentatio 225 indis Enestroemiami.

EULER, Leonhard.Mechanica sive motus scientia analytice exposita, 2 vol., Pétersbourg, 1736.

EULER, Leonhard. Recherches sur l'origen des forces. Opera Omnia II5, Commentationes mechanicae, p.110

GLASSTONE, Samuel. Termodinámica para Químicos. Editorial Aguilar S.A. Madrid, 1963

GUIDONI, P. & ARCÁ, M. Guardare per sistemi, guardare per variabili. Emme Edizioni, Torino, 1987.

GUIDONI, Paolo y ARCA, María. Sistemas y variables. Seminario dictado de la Facultad de las Ciencias. Universidad de Nápoles, Italia. Traducción: Maria Mercedes Ayala y Priscila de Castro. Departamento de Física, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Tomado del Módulo del seminario de Fundamentación Didáctica, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia. p. 5.

HALLOUN, I.. Schematic Modelling for Meaningful Larning of Physics. Journal of Research in Science Teaching, 1996, Vol. 33, No. 9, pp. 1019-1041.

HEISENBERG, W.. La imagen de la naturaleza en la física actual. Ediciones Orbis S.A., Barcelona,1985

KUHN, Thomas, S. La Tensión esencial. Fondo de Cultura Económica, México, 1977.LEVY-LEBLOND, J-M.. *Física y Matemáticas*. En Apéry, R et al, Pensar la matemática. Tusquets Editores, Barcelona, 1988.

MALAGÓN, J. F. (1988). La relación física y matemáticas en Galileo. Tesis de Maestría en Docencia de la Física. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

MANRIQUE, José y CARDENAS, Rafael. Termodinámica. Ed. Tec-Cien LTDA. México, 1976

MATAIX, Claudio. Mecánica de fluidos y Máquinas Hidráulicas. Oxford, Newyork, 1982.

MATTHEWS, M. R. 1994. Historia, filosofía y enseñanza de las ciencias: la perspectiva actual. *Enseñanza de las Ciencias*, 12 (2), pp. 255-277.

PATY, M.. La idea de cantidad en el origen de la legitimadad de la matematización en física, 1999.

PATY, M.. Le caractere historique de l'adéquation des mathématiques a la physique, 1994.

POZO, M. J. El aprendizaje de la física. En: Aprender y enseñar ciencia. Ed. Morata, Madrid, 2000.

QUINET, J. Ecuaciones diferenciales en: Curso de Matemáticas superiores. Ed. Paraninfo, S.A., Madrid (España). 1983.

RAVEZ,B y J. The Representation of Physical. Quaities in Eighteenth-Century Mathematical Physics. Tomado de: Isis, 1961,52:7-20.ROMERO, A. E.. La

mecánica euleriana: una mecánica del continuo. Tesis de grado Maestría en Docencia de la Física, U.P.N., Bogotá, 1996.

ROMERO, A. y RODRÍGUEZ, L. D. La construcción de la historicidad de las ciencias y la transformación de las prácticas pedagógicas.

ROMERO, A. et al. (2002). *La matematización de los fenómenos físicos: el caso de los fenómenos mecánicos y térmicos. Análisis conceptuales y elementos para propuestas didácticas. Informe de investigación*. Informe final. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación -CIEP, Escuela Normal Superior María Auxiliadora.

_____. La formalización de los conceptos físicos. El caso de la velocidad instantánea*. En: *Revista Educación y Pedagogía*. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. En prensa.

ROMERO A. E. Physique et analyse : la formalisation de la mécanique chez Euler. Presentaciónen el marco del Seminario: Mathémtique et fondements de la physique aux XVIII et XIX siécles. REHSEIS, París, febrero 20 de 2006.

SEARS, Francis y ZEMANSKY, W. Física Universitaria. México: Addison Wesley Longman S. A, 1999

THOM, René. Matemática y teorización en física. en: pensar la matemática. Seminario de Filosofía y matemática de la Escuela Normal Superior de París, Tusquets Editores, 1998. Pp.139-163.

TRUESDELL, C., *Ensayos de historia de la mecánica,* Ed. Tecnos. Madrid, 1975.