EL DESCUBRIMIENTO DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

DARÍO VÉLEZ BOTERO
Profesor Jubilado Universidad de Antioquia

OLGA VARELA MACHADO
Profesora de cátedra Universidad de Antioquia

ANTECEDENTES: EL DESCUBRIMIENTO DE LOS NATURALES

En un artículo anterior[1] habíamos desarrollado la idea de que los números naturales se descubren y que la categoría «contar» – con su principio de inducción y su estructura de sistema numérico, de base 10, por ejemplo – es independiente de la mente humana, el hombre no inventa tal concepto ni sus reglas, sino que las aplica. Del hecho de que se trate de un descubrimiento se deduce que los números existen y que sus propiedades son las que caracterizan al realismo (parcialmente, como veremos) platónico.

Reiteramos que todas las civilizaciones empezaron a introducir los números cuando eran pequeños poblados o incluso ciudades; venían, desde tiempo atrás, organizando sus sistemas numéricos, pero este manejo fue empírico. Sin el «comercio» no existirían los números, por eso dijimos que la matemática, en sus inicios, fue *a posteriori* y luego derivó en *universal* y *necesaria*. Las culturas que desarrollaron sistemas numéricos: los babilonios, los egipcios, los griegos, los romanos, los chinos, los indios, los mayas, tuvieron dispositivos que fueron evolucionando en el tiempo hasta llegar a la sorprendente respuesta de que los diversos modelos no diferían en esencia, la misma estructura yacía en las variadas propuestas, que confluyeron, después de un largo período, al sistema indo-arábigo de base 10. Pero se constata en general la semejanza de las matemáticas antiguas de los diversos pueblos. Esto demuestra que las diferentes culturas no estaban inventando sus sistemas, sino que estaban reconociendo principios comunes, porque en esencia el sistema numérico es único, es decir, todos los modelos posicionales —que son los necesarios para la construcción de la matemática— son equivalentes, aunque sus bases sean diferentes. Para refrendar esa afirmación de que los números fueron descubiertos, mostramos antes[2] que las propiedades o teoremas que se derivan de ellos son *universales* y *necesarias* y, además, inmodificables en el espacio y el tiempo e independientes de la mente humana.

---

[1] VÉLEZ BOTERO, Darío. *Matemática primitiva y realismo platónico.* Publicado en la biblioteca digital de la Universidad de Antioquia. Medellín, 2014. (http://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/3122)

[2] Ibid.

LA CATEGORÍA «DEUDA» Y LOS NEGATIVOS

Pero con el desarrollo del comercio y su progresiva expansión, se empezó a introducir lentamente otra categoría, por la necesidad del manejo de créditos y de deudas. Esto se hace necesario cuando el comercio llega a intercambios cada vez más grandes. Seguramente cuando los indios desarrollaron de forma matemática esa categoría, ya se había utilizado empíricamente desde hacía mucho tiempo, y no era de extrañar que el parroquiano fuera a la tienda y fiara, aunque no llamara «menos dos» a la deuda. Y seguramente también entendían que si alguien pagaba un crédito el valor quedaba en cero, es decir, cancelado.

Ese manejo de las deudas determinó gradualmente la introducción de nuevos números: los negativos, que sin el amparo de la categoría «deuda» no habrían sido comprendidos, tal vez, porque no es fácil entender que haya números menores que cero. Entonces podríamos decir que así como de la categoría «contar» nacen los naturales, de la categoría «crédito y deuda» surgen los números negativos y quedan firmemente explicados por ella; además, derivan algunas de sus propiedades de aquella noción. De la misma manera, los negativos están asociados a la categoría «deuda» que es independiente de la mente humana, porque ella no inventó los negativos sino que los descubrió, lo prueba el carácter semejante que presenta la estructura de estos números en las diversas civilizaciones. Hoy se constata con la culminación de la obra de Brahmagupta, que los negativos obedecen universalmente a las mismas reglas, que son inmodificables. En resumen, los números positivos y negativos no engendran el comercio y los sistemas financieros de los pueblos de la antigüedad; sino que, por el contrario, el comercio -con sus categorías de «contar» y «deuda»- genera y origina los números. Por eso las categorías antes mencionadas son intrínsecamente autónomas e independientes de la mente humana. Claro está que el hombre se ocupa de la parte operativa, pero dentro de un proceso de descubrimiento y no de invención (asignación de símbolos, elección de las bases, etc.)

En las diferentes civilizaciones posteriores al avance hindú, muchas personas ilustradas rechazaron por mucho tiempo los números negativos incluso de una forma irracional, porque no los comprendían. En Europa los números negativos fueron introducidos por Leonardo de Pisa en el siglo XIII y hasta muy entrado el siglo XVIII no habían sido aceptados por muchos matemáticos destacados. Esto da una idea muy clara de que estos números no pudieron ser *inventados* por el hombre, pues aparecieron espontáneamente como parte de la estructura de los números naturales y sus ecuaciones algebraicas; y no solo los negativos sino también los imaginarios surgieron como soluciones a raíces de números negativos, principalmente, en los trabajos de los algebristas italianos del siglo XVI.

El cero aparece, como dijimos, tardíamente en las civilizaciones, sin embargo la necesidad de introducirlo estaba latente en la numeración desde el principio y en la aplicación del sistema de deudas en el comercio. Con los números naturales y las ecuaciones algebraicas elementales que formulaban las distintas civilizaciones fue surgiendo el cero por varias razones: en la estructura de los números que habían construido, específicamente las civilizaciones más avanzadas, que usaron el sistema posicional, se notaba que había un vacío necesario para distinguir cierta clase de números, por ejemplo, para el 206, dicho en nuestra moderna notación, los antiguos no tenían un símbolo para poner como el cero y necesitaban diferenciar esta cifra del 26. Algunas dejaban un espacio vacío para que se entendiera que 26 y 206 eran números diferentes, otras civilizaciones asumieron que el contexto de las operaciones permitiría deducir si las cifras escritas llevaban espacio vacío o no, pero se notaba la necesidad de solucionar este problema de la notación que venía desde muy atrás. Otro caso es el cero al final como, por ejemplo, en el 310, ahí era más difícil representar la posición vacía. Algunas civilizaciones fueron estableciendo sistemas de notación para resolver esta situación. Los babilonios, por ejemplo, usaron dos ganchos —como comillas— para representar este espacio vacío (2″6). Los griegos alejandrinos también usaron una notación para representar los espacios vacíos, pero fueron los indios los más exitosos en resolver este problema introduciendo el cero ya explícitamente a mediados del primer milenio.

Pero éste es solo un primer uso del cero, como símbolo posicional, pero la otra connotación es la del cero como número, con todas las propiedades de suma, resta, multiplicación y división. Esta connotación del cero como número ya estaba implícita en varias civilizaciones. De modo que aunque parezcan dos formas diferentes de entender el cero, ambas están correlacionadas.

BREVE HISTORIA DEL DESCUBRIMIENTO DEL CERO

Veamos un poco de historia. Tomamos como base a WIKIPEDIA (Cero) para hacer un resumen muy cercano al texto citado[3]:

Del Antiguo Egipto, Babilonia, y la Antigua Grecia se poseen documentos de carácter matemático o astronómico que muestran símbolos indicativos del valor cero; pero no supieron obtener el verdadero beneficio de este importante hallazgo.

En el Antiguo Egipto se utilizó el signo *nfr* para indicar el cero (Papiro Boulaq 18, datado ca. 1700 a. C.) El cero apareció por primera vez en Babilonia en el siglo III a. C. En tablillas datadas en el año 1700 a. C. se ven anotaciones numéricas en su particular forma cuneiforme. Los babilonios utilizaban un sistema de base 60. Con su modelo de notación no era posible distinguir el número 23 del 203 o el 2003.

Alrededor del 400 a. C., los babilonios comenzaron a colocar el signo de «dos cuñas» en los lugares donde en nuestro sistema escribiríamos un cero, que se leía «varios». Las dos cuñas no fueron la única forma de mostrar las posiciones del cero; en una tablilla encontrada en Kish, antigua ciudad de Mesopotamia al este de Babilonia, utilizaron un signo de «tres ganchos». Estas tablas están datadas en el 700 a. C. En otras tablillas usaron un solo «gancho» y, en algunos casos, la deformación de éste se asemeja a la forma del cero.

El cero también surgió en Mesoamérica y fue ideado antes de la era cristiana por la Civilización Maya.

---

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Cero

Claudio Ptolomeo en el *Almagesto*, escrito en 130 d. C., usaba el valor de «vacío» o «0». Ptolomeo solía utilizar el símbolo entre dígitos o al final del número. Podría pensarse que el cero habría arraigado entonces, pero lo cierto es que Ptolomeo no usaba el símbolo como «número» sino que lo consideraba un signo de anotación. Este uso no se difundió, pues muy pocos lo adoptaron.

La Civilización india es la cuna de la notación posicional, de uso casi universal en el siglo XXI. La palabra «cero» proviene de la traducción de su nombre en sánscrito *shunya* (vacío) al árabe *sifr* (صفر), a través del italiano. La voz española «cifra» también tiene su origen en *sifr.*

El primer testimonio del uso del «cero indio» está datado hacia el año 810. Abu Ja'far Mujammad ibn Musa (Al-Juarismi), en su obra titulada «Tratado de la adición y la sustracción mediante el cálculo de los indios» explica el principio de numeración posicional decimal, señalando el origen indio de las cifras. La décima figura, que tiene forma redondeada, es el «cero».[4] Las inscripciones talladas en roca más antiguas de dichos números indios son las de Gwalior, y están datados en 875-876.

Los árabes lo transmitieron por el Magreb y Al-Ándalus, pasando posteriormente al resto de Europa. La mayor parte de las referencias indican que el cero (llamado *zefhirum*) fue introducido en Europa por el matemático italiano Fibonacci en el siglo XII, mostrando el álgebra árabe en su *Liber abaci* (*El libro del ábaco*).

LA NATURALEZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Es muy importante reconocer que se pueden tomar los números naturales y escribir una ecuación con coeficientes enteros positivos evitando el 0, lo que nos remite a ecuaciones que se conocían desde la época más antigua y que nuestros antepasados sabían resolver en la mayoría de los casos. Por ejemplo, $x^2+2x=15$ esta ecuación tiene dos soluciones -5 y 3. O un ejemplo más sencillo $x + 2 = 1$ que tiene respuesta $x = -1$. Esta es una prueba contundente de que los números negativos y el cero estaban intrínsecamente en el sistema numérico rudimentario de la época, y que no fueron introducidos de manera forzada o artificial, sino que aparecieron naturalmente como parte de la estructura de los números naturales, no fueron inventados por el hombre. De esta manera surgieron los números negativos; y también los imaginarios, en la resolución de ecuaciones cuadráticas, pero sobre todo en el siglo XVI en la búsqueda de la solución general de la ecuación de tercer grado. Ambos números crearon desconcierto y no se comprendieron, por mucho tiempo, esta es una muestra, lo reiteramos, de que no fueron inventados por el hombre, brotaron de la estructura matemática ya conocida.

Cuando los negativos se hicieron explícitos, ya se manejaban los números naturales. Los negativos tienen como sustento básico la noción de deuda, tienen un origen empírico como los naturales. Pero el descubrimiento de los números negativos y el cero tiene otra fuente adicional: las propiedades que provienen formalmente de los números naturales, como extensión de las operaciones de sumar restar, etc. En el contexto del comercio es fácil entender las operaciones clásicas con los negativos, por ejemplo: si tengo -

2 es porque debo dos pesos o si tengo 3 + (-3) = 0 cancelé una deuda; o las operaciones de adición y sustracción como tener -5 y pagar 2 y quedar con una saldo de -3. De la noción de deuda surge el concepto de número negativo y del cero.

Las propiedades completas de las operaciones con los negativos y el cero las dio Brahmagupta en el siglo VII después de Cristo. Brahmagupta explica todas las reglas en términos de deudas y fortunas, incluso refiriéndose al cero, por ejemplo, si de *cero se resta una fortuna* queda una deuda, es decir, 0 – (+5)= -5 o, al contrario, *si de cero se resta una deuda da una fortuna* 0 – (-5) = 5. Pero las reglas son únicas, no se limitan a las aplicaciones en el comercio, sino a la forma propia de la estructura de los números negativos. Por lo que se reafirma que los números negativos deben ser explicados como un descubrimiento, pues ninguna otra civilización llegó a reglas distintas. Y nadie pudo formular condiciones diferentes de las adoptadas, pese al estrecho contacto de las civilizaciones antiguas con el cero y los negativos.

Pero ya hemos visto que las reglas de los negativos tienen un segundo origen en la existencia formal de los enteros positivos. Los naturales, por ejemplo, tienen la propiedad de la conmutatividad y la asociatividad de la suma y no se pueden construir los negativos excluyendo esta condición. Por eso debemos examinar ¿qué propiedades de los negativos son incompatibles con los naturales? El problema se presenta principalmente en la multiplicación, en la regla de los signos, veamos de cerca esta dificultad.

Recordemos la definición de la multiplicación en los naturales:

El producto 3 x 4 es tomar como sumando el 3 cuatro veces (3 + 3 + 3 + 3 = 12). En cambio, 4 x 3= 4+ 4 +4 =12.

Veamos que sucede cuando se quiere extender ese atributo a los negativos –para memorizar la multiplicación se puede recordar que el segundo factor son las "veces"-.

Entonces, (-3) x 4 = ((-3) + (-3) + (-3) + (-3))= -12. No tiene problema repetir 4 veces una deuda de 3. En cambio, (4) x (-3) es repetir <u>menos</u> tres veces una fortuna de 4, lo que no tiene sentido.

Por la uniformidad de la extensión de las leyes de la matemática se debe aplicar formalmente la conmutatividad del producto y convenir que

(-3) x (4) = (4) x (-3) = -12.

Más complicado resulta el famoso (-1) x (-1)= (+1).

Veamos lo que nos dice el profesor Bernardo Gómez[4]:

> En efecto, aceptar la existencia de cantidades menores que cero suponía una ruptura con la concepción absoluta del cero: aquello por debajo de lo cual no había nada, al hacer su aparición el cero relativo u origen, aquello que se marcaba arbitrariamente sobre un eje orientado.

---

[4] GÓMEZ, Bernardo. «La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?» En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, pp. 257-275. Granada. Universidad de Granada, 2001.

Y nos trae el profesor Gómez una descripción de cómo algunos matemáticos veían el problema:

> Euler en sus *Elementos de Algebra* (1770, p. 35) argumenta a partir de la interpretación de los negativos como deudas, considera que la multiplicación de cantidades con signo es conmutativa y razona por eliminación diciendo que *-a por -b será ab* ya que no puede ser *-ab* que es lo que vale *–a por b.*
>
> Laplace, en sus lecciones de *L'École normale de l'an III* (1795, p. 62), no logra desprenderse de la interpretación de los negativos como deudas, pero en su argumentación modifica la demostración de Euler en la línea de justificación con aspectos formales iniciada por Mac-Laurin, y recurre a la conservación de la coherencia de las operaciones: suma, multiplicación y distributividad de una con la otra.

En resumen, Euler nos dice que en vista de que (-1) x (1)= (-1) es cierta; no puede ser que (-1) x (-1) dé igual; en consecuencia, debe dar (+1)

BREVE HISTORIA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Dado que los babilonios no conocían los números negativos, ignoraban o rechazaban las eventuales soluciones negativas de las ecuaciones cuadráticas. Los griegos tampoco consideraban los números negativos o imaginarios que se presentaban en sus ecuaciones.

Brahmagupta, en el 628 de nuestra era, considera las dos raíces de las ecuaciones cuadráticas, aunque una de ellas fuera negativa o irracional. De hecho en su obra es la primera vez que aparece sistematizada la aritmética (+, -, *, /, potencias y raíces) de los números positivos, negativos y el cero, que él llamaba *los bienes (o fortunas)*, *las deudas* y *la nada*[5]. (Wikipedia)

Sabemos que hay presencia de los negativos en la época de Diofanto (s. III d.C), que no los consideraba números sino que los rechazaba.

Brahmagupta definió el cero como el resultado de restar un número de sí mismo. Él dio las propiedades de los negativos, el cero y los naturales (damos algunos ejemplos, tomados de Sanchez Risco)[6]:

> *Una deuda menos el cero es una deuda.*
> *Una fortuna menos el cero es una fortuna.*
> *Una deuda restada del cero es una fortuna.*
> *Una fortuna restada del cero es una deuda. El producto de cero multiplicado por una deuda o fortuna es cero.*
> *El producto o cociente de dos fortunas es una fortuna.*
> *El producto o cociente de dos deudas es una fortuna.*
> *El producto o cociente de una deuda y una fortuna es una deuda.*

---

[5] Números negativos, Wikipedia.

[6] SANCHEZ RISCO, José Antonio. *Las matemáticas en la India (500-1200 d.C.)* En: http://matematicas.uclm.es/ita-cr/web_matematicas/trabajos/4/4_matematica_india.pdf

El producto o cociente de una fortuna y una deuda es una deuda.

Hacemos un breve resumen del artículo de la profesora Cristina Ochoviet[7]. El primer registro conocido de resolución de problemas que involucran una ecuación de segundo grado data de 1700 a. C., aproximadamente y fue encontrado en una tabla de arcilla, redactado a través de palabras. La solución era presentada como una receta matemática y se daba solamente la raíz positiva.

Desde el siglo XVII a.C. los matemáticos de Mesopotamia y de Babilonia ya sabían resolver ecuaciones.

En el siglo XVI a.C. los egipcios desarrollaron un álgebra muy elemental que usaron para resolver problemas cotidianos que tenían que ver con la repartición de víveres, de cosechas y de materiales[8].

Los chinos utilizaban varillas negras para los negativos y rojas para los positivos. Pero no aceptaban los negativos en las soluciones de los problemas.

EL profesor Bernardo Gómez[9] nos dice que en la obra de Brahmagupta (628) aparecen de forma explícita las reglas de los negativos. Sin embargo, en el legado árabe a Occidente, a diferencia del hindú, sólo se consideran las raíces positivas; aunque conocían las reglas para operar los negativos, sólo las aplicaban a las restas indicadas con solución positiva. En el Renacimiento la actitud de los matemáticos frente al reconocimiento de los negativos fue diversa, pero lo que es seguro es que operaban con ellos de un modo cada vez más generalizado. En el período final de esta época todavía lo negativo estaba asociado a restas indicadas con solución positiva.

Del profesor Morris Kline[10] hacemos un resumen en los siguientes párrafos:

El uso del cero como número se aceptó en Europa solo después del siglo XIII por Leonardo de Pisa (llamado Fibonacci) que lo tomó de la escuela arábiga española, cuyo representante más prominente fue Juan de Sevilla. Toda la aritmética india fue independiente de su geometría. Los indios sabían que las ecuaciones cuadráticas tenían dos raíces e incluían las negativas y las irracionales[11].

---

[7] OCHOVIET, Cristina. «De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: un paso a través de la historia». *Revista digital Matemática, Educación e Internet* (www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/). Vol. 8, No 1. 2007.
[8] Ibid.
[9] GÓMEZ, Bernardo. «La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más?» En Pedro Gómez y Luis Rico (Eds.) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*, pp. 257-275. Granada. Universidad de Granada, 2001.

[10] KLINE, Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Volumen I*. Versión española de Mario Martinez, Juan Tarrés, Alfonso Casal. Alianza, Madrid, 1992.
[11] Ibid. 252.

Los árabes tomaron y mejoraron los símbolos numéricos de los indios y su idea de la notación posicional. Los árabes trabajaron libremente con los irracionales, pero rechazaron los negativos, que conocieron de los indios.

En cuanto a los números negativos, aunque conocidos en Europa a través de los textos árabes, no eran aceptados como números por la mayoría de los matemáticos de los siglos XVI y XVII. Chuquet y Stifel, en el XVI, hablaban de los negativos como números absurdos[12].

Cardano los consideraba soluciones imposibles, meros símbolos, que llamaba ficticios. Vieta los descartaba por completo. Descartes los aceptaba en parte, llamaba falsas a las raíces negativas de las ecuaciones, por pretender representar números menores que la nada. Pero encontró un método para transformar una ecuación en otra que diera raíces positivas, eso les daba cierta aceptación. Pascal, consideraba absurdo restar cuatro de cero[13].

Uno de los primeros algebristas que aceptó los negativos fue Thomas Harriot (1560 – 1621), quien los ponía en una parte de la ecuación, pero no aceptaba las raíces negativas. Bombelli dio claras definiciones para los números negativos. Stevin utilizaba coeficientes positivos y negativos en las ecuaciones, y aceptaba también raíces negativas[14].

En su obra (1629) Girard los aceptaba como a los positivos, incluso cuando la ecuación daba dos raíces negativas. Lo mismo que Harriot usaba el signo "menos" para la sustracción y para los números negativos. Había curiosas creencias sobre ellos. Wallis los consideraba mayores que infinito, pero no menores que cero[15].

En 1700 todos los miembros familiares del sistema numérico –enteros, fraccionarios, irracionales, negativos y complejos – eran conocidos. Sin embargo hubo oposición a lo largo del siglo a los tipos más nuevos de números. Francis Maseres publicó en 1759 su *Disertación sobre el uso del negativo en álgebra*, donde muestra cómo evitar los números negativos, pues muestra una profunda desconfianza hacia estos números, dice: "... Se debería desear que las raíces negativas nunca hubieran sido admitidas dentro del álgebra o que fueran, de nuevo, descartadas de ella..."[16]

Euler en la última mitad del siglo XVIII, aun creía que los números negativos eran mayores que el infinito. Carnot también mostró desconfianza hacia los negativos. De Morgan dijo "La expresión imaginaria y la expresión negativa […] cuando aparece como solución de un problema, indican alguna inconsistencia o absurdo" Da un ejemplo, entre la edad del padre y del hijo que da negativo y muestra cómo se debe cambiar la ecuación. De Morgan insistió que era absurdo considerar números menores que cero[17].

---

[12] Ibid.
[13] Ibid. 338.
[14] Ibid.
[15] Ibid. 339
[16] KLINE, Morris. *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días. Volumen II*. Versión española de Mario Martinez, Juan Tarrés, Alfonso Casal. Alianza, Madrid, 1992. (784)
[17] Ibid.

Dado que los números imaginarios fueron descubiertos por el ser humano, damos también algunas ideas del desconcierto que causaron entre los matemáticos de Europa hasta principios del siglo XIX. Fueron introducidos por los algebristas del renacimiento, quienes les asignaron propiedades místicas y descripciones como "real" o "imaginario". Hasta Leibniz estuvo confundido con estos números: "El divino creador ha encontrado ocasión de manifestar su sublime inteligencia en esta maravilla del análisis, este portento del mundo ideal, este anfibio entre el ser y el no-ser que llamamos raíz imaginaria de la unidad negativa".

También Descartes rechazó las raíces complejas, acuñando para ellas el término "imaginarias", no son números. El propio Newton desestimaba las raíces complejas: "Es de razón que las raíces de las ecuaciones sean posibles, no vaya a ser que se presenten casos de problemas que son imposibles como si fueran posibles.

ALGUNAS CONSIDERACIONES FILOSÓFICAS SOBRE LAS CARACTERÍSTICAS DEL "DESCUBRIMIENTO" EN MATEMÁTICAS

Las ecuaciones algebraicas y los números negativos

Como vimos antes, los números negativos aparecen desde tiempos muy remotos en las civilizaciones antiguas. Ya se manejaban rudimentariamente los sistemas numéricos y las ecuaciones elementales de primero y segundo grado. En estas ecuaciones surge espontáneamente una nueva clase de números, desconocida hasta entonces. Retomemos el ejemplo visto antes: la ecuación $x^2 + 2x = 15$ tiene dos soluciones $x = -5$ y $x = 3$, una de ellas negativa. La actitud generalizada fue la de rechazar esos nuevos números y eso se extendió a Europa hasta el siglo XVIII de nuestra era. Tal actitud muestra nítidamente que los negativos no fueron un invento o una creación humana, sino un descubrimiento.

Hay que aclarar cómo funcionan los descubrimientos. Hemos dicho en un artículo reciente[18], que el matemático tiene que definir los términos que sean necesarios, proponer el enunciado del problema que se va a resolver, aunque en ocasiones sean ideas vagas, demostrar que la proposición correspondiente es un teorema o una solución válida. Por ejemplo, en la geometría vimos el teorema:

> *"Las tres medianas de un triángulo –rectas que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto- se cortan en un mismo punto llamado baricentro, que dista 2/3 del vértice respectivo"*

Que le exige al matemático definir previamente los términos "triángulo", "mediana" y enunciar la proposición citada y demostrarla, en esas circunstancias el filósofo analiza -en un marco general- si el resultado es una invención o un descubrimiento, o si no se puede determinar; realmente el matemático termina su labor con la demostración, que se convierte en

[18] VÉLEZ BOTERO, Darío. «¿La necesariedad y universalidad de la aritmética?» *Revista de investigaciones en educación. Universidad La Gran Colombia*. No. 8 (2012): http://revistas.ugca.edu.co/ojs/index.php/sophia/article/view/22

condición necesaria pero no suficiente para esclarecer el dilema propuesto. Una cosa que se debe destacar es que al definir "el triángulo" y operar con él en la demostración virtualmente aparece la propiedad que se quiere probar, suponiendo que es cierta.

Los procesos de "invención" "y "descubrimiento" están estrechamente ligados; el matemático en toda su actividad tiene que desplegar una "creatividad" y una inventiva sobresaliente. En particular, está inventando continuamente signos, pero el producto formal del matemático, *el teorema,* es un descubrimiento, al menos en las ramas de la "matemática primitiva", que hemos venido considerando.

Volviendo al caso particular de las ecuaciones, encontramos un ejemplo sencillo para caracterizar la "invención" y el "descubrimiento", le compete al matemático <u>*proponer* la ecuación y *descubrir* la solución correspondiente.</u> Tomemos el caso de la ecuación de segundo grado definida por la conocida fórmula: $ax^2 + bx + c = 0$ que tiene dos soluciones: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, mientras que la elección de la ecuación es invención del matemático; la solución no depende de la voluntad del mismo *sino de la estructura de la fórmula* (Observar que la solución **x** se da en términos de los coeficientes); no hay margen, pues, para la creación humana porque la respuesta es estructural. Agregamos, de paso, que esta respuesta de la ecuación de segundo grado introduce en general la posibilidad de encontrar números negativos y también imaginarios ($\sqrt{-1}$).

Incluso las ecuaciones elementales de primer grado (modelo análogo a las de segundo o de grado n) tienen la misma connotación de descubrimiento. Tomemos $ax + b = 0$ y $a \neq 0$, la solución ($x = -b/a$) depende de la estructura y no es un invento. De hecho, aunque ahora nos parezca trivial, se tardaron 3000 años para resolverla.

Trabajando con ecuaciones rudimentarias, nuestros antepasados se toparon con los negativos, los imaginarios y los fraccionarios, por lo tanto, por tratarse de <u>solución de ecuaciones</u> tienen la jerarquía de un descubrimiento, más en su caso en que los citados números se les aparecieron y su actitud fue de rechazo e incomprensión.

Para ilustración del lector planteamos tres ecuaciones sencillas que revelan los tres tipos de números,

$X + 4 = 0$ ($X = -4$)

$X^2 + 1 = 0$ ($X = \sqrt{-1}$)

$7x - 2 = 0$ ($x = 2/7$)

En consecuencia, los negativos, el cero, los imaginarios y los racionales (quebrados) son descubrimientos y no creación humana. Como implicación, son independientes de la mente y existen con las características ontológicas que conllevaron a su hallazgo. No se puede descubrir lo que no existe y menos con propiedades ficticias que eluden las verdaderas condiciones en que surgieron a nuestro conocimiento.

En los números complejos, la raíz de -1 o raíz imaginaria la podemos considerar en principio como una invención, que permite un conocimiento rudimentario de aquella, pese a que brota espontáneamente, como una aparición, en las ecuaciones algebraicas elementales; en cambio, cuando Argand y Gauss encontraron la estructura de cuerpo para los complejos y sus propiedades hicieron un descubrimiento. Por caso, algunos o todos los pasos de una demostración pueden ser invención del matemático, pero sólo la demostración asegura el descubrimiento.

En cuanto a la categoría "deuda", se observa que en todas las culturas da soporte a la introducción de los números negativos, por ejemplo, el cero plantea los mismos problemas en las diversas civilizaciones que adoptaron sistemas numéricos posicionales. Las reglas operativas para el cero y los negativos son iguales (o llegan a serlo) e invariables en todos los pueblos. Como la categoría "contar", la cual llega a ser parte en el comercio, la categoría "deuda" es independiente de la mente humana. Es la estructura la que tiene las propiedades y no se las asigna el ser humano. Esto explica el carácter tan singular de la matemática.

Particularidades de la epistemología de las matemáticas

Se debe aclarar que, aunque el ser humano formule las proposiciones matemáticas e incluso los axiomas de una rama de la misma, eso no conlleva siempre a un acto de *invención* de los teoremas de la teoría. Ya vimos en un artículo anterior[19], que ese es precisamente el caso de la geometría euclídea. Sus axiomas fueron propuestos por Euclides (aunque podían proceder de otros geómetras), las proposiciones a demostrar fueron también elaboración de Euclides y otros, pero los teoremas, aunque probados por Euclides, son ajenos a la voluntad humana. Recordar el teorema de las tres medianas que citamos antes, en el cual la concurrencia de las rectas es inherente al triángulo y no a la intensión del hombre.

Tal vez no sea superfluo, reiterar que la matemática clásica está fuera del sujeto, en el sentido concreto y específico de que éste no puede crearla o inventarla, pero la aprehende con la demostración. Esto debilita la crítica de Alain Badiou (*Platonismo y Ontología matemática,* -sin más detalles-), que reseñamos:

> Ahora bien, esta identificación es ciertamente inexacta. Y su inexactitud remite al hecho de que presupone en el "platónico" una distinción entre interior y exterior, entre sujeto que conoce y "objeto" conocido, absolutamente extraña al auténtico dispositivo platónico.

La crítica de Badiou es parcialmente cierta, hay, desde luego, una separación inicial entre sujeto y objeto, el matemático que "busca" y el objeto que debe ser "hallado" (con sus propiedades), y el concepto unificador en la mente es la "demostración". El objeto y el sujeto confluyen mediante el desarrollo de la prueba; el matemático, en el ejemplo que hemos dado de las medianas, recibe estímulos empíricos y teóricos –teoremas anteriores estudiados-sobre la propiedad sospechada, que una vez se constata es formulada en definitiva por su cerebro; pero el cerebro

[19] VÉLEZ BOTERO, Darío. *Matemática primitiva y realismo platónico.* Publicado en la biblioteca digital de la universidad de Antioquia. Medellín, 2014. (http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/handle/10495/1969)

no puede crear la estructura que corresponde al enunciado, que depende de las características esenciales del triángulo y de las medianas, en definitiva el matemático descubre la proposición y no la inventa. Y el proceso de la demostración entronca o entrelaza el sujeto con el objeto. O añadiendo como, ejemplo, el teorema de Pitágoras, la inteligencia humana no tiene la facultad de atribuirle la conocida propiedad al triangulo, pues es intrínseca al mismo, pero su perspectiva es descubrirla.

Se pregunta, entonces, al matemático y al filósofo que si la matemática clásica elemental (de la que nos hemos ocupado) es independiente de nuestra creación por el cerebro, entonces, supuestamente preexiste al hombre y está al margen del espacio y del tiempo. Hemos visto que la matemática primitiva sigue las directrices del realismo platónico, y, en consecuencia, todas sus proposiciones demostradas son objetivamente verdaderas. Pero hay otras consideraciones, diremos que es *a posteriori* se necesita un largo período empírico para dar las bases de una estructura que deriva después en *universal y necesaria* cuando se descubre el SND. La matemática primitiva es un fenómeno social que aunque posteriormente pierde su contacto directo con la creación matemática sigue en su esencia irradiando toda la producción nueva. La matemática clásica no existe sin el hombre. En eso se diferencia de las ciencias naturales. Los fenómenos físicos son independientes de la acción humana.

El párrafo anterior pretende aclarar una cosa muy importante. Alguien podría argumentar que, por ejemplo, "el teorema de Pitágoras" es válido intemporalmente, puesto que es independiente de la mente humana. Sin embargo, no goza de libertad en las definiciones previas (como la de "triángulo rectángulo" que debe ser introducida antes), ni en los axiomas que propone el hombre, o en los teoremas que le son prerrequisitos, también en las observaciones empíricas, etc. Por todo esto no puede existir antes de su demostración, aunque virtualmente está presente donde haya un triángulo rectángulo real o hipotético.

La matemática preestablece, en general, su desenvolvimiento, no es posible que la teoría de matrices se desarrolle antes que la aritmética y el álgebra básica. Ni que la teoría de las categorías anteceda al tema de la composición de funciones. En los últimos 50 ó 60 años los matemáticos descubrieron la teoría de categorías; si nos ubicamos en el siglo XIX, donde era impensable cualquier teorema de esa rama, podemos afirmar que no existía ni en la mente ni fuera de ella –con la restricción ya anotada-, porque no había sido demostrado.

Ya hemos dicho que cuando se definen los axiomas de una teoría, como la geometría, se configuran, sin que nosotros lo sepamos, todos los teoremas posibles de la misma, lo que nos obliga a descubrirlos. Desde que se adopta el SND (con las definiciones adicionales apropiadas) quedan dados los teoremas aritméticos que dependen únicamente del principio de inducción –no estamos seguros de los que entran en el campo más amplio de la teoría de números, estilo demostración de Fermat-. Sin embargo, sin la existencia del hombre no habría matemática clásica. El hombre debe operar con los símbolos, con la parte operativa de los números en la manipulación del proceso de contar, con los axiomas de la geometría, con los métodos de demostración y con las demostraciones mismas.

Pongamos el caso del teorema de Fermat que fue formulado en el siglo XVII y demostrado a principios del actual siglo. Es absurdo pensar que en un mundo inmaterial existiera ya ese teorema antes de que lo demostrara Wiles o incluso antes de que lo formulara Fermat. Sabiendo, además, que con los métodos matemáticos existentes en la época de Fermat, era imposible hacer la demostración ¿O en ese mundo ideal cómo aparecen las proposiciones indecidibles? No, el teorema de Pitágoras empezó a existir realmente (y terrenalmente) cuando lo demostró Pitágoras, el hombre no puede elegir la proporción en la que se encuentran los lados del triángulo rectángulo, o sea $a^2 + b^2 = c^2$ **nos es dado mediante la prueba matemática**. Y lo sorprendente de todo es que el ser humano está en capacidad de demostrar algo que escapa a su control. Ahí está la confusión del *dilema de Benacerraf*, pues desconoce que podemos probar teoremas (conocer entidades abstractas) cuyo enunciado presenta una estructura que es ajena a la mente humana e inmodificable en el tiempo y el espacio, pero nosotros los aprehendemos mediante la demostración. El ejemplo de Pitágoras que traemos sirve para la ocasión. Y creemos también que, dado el carácter de descubrimiento que tiene la "Matemática primitiva", no operan para ella las restricciones que imponen los teoremas de Gödel. Pero esto exige más desarrollo.

Dado un teorema, la determinación de si se trata de una invención o de un descubrimiento trasciende los métodos matemáticos, se requiere la intuición, pero, como ésta opera en terreno limitado, no es la intuición general del tipo Gödel como base de la epistemología matemática, sino la intuición particular sobre un teorema dado. En el caso de la Matemática Primitiva, esta identificación es inmediata, como vimos en los ejemplos propuestos en ese texto.

Las consecuencias del descubrimiento matemático tienen profundas repercusiones filosóficas. No se puede descubrir lo que no existe y mucho menos con características ontológicas diferentes a las que se dieron en su hallazgo. Además, en las matemáticas clásicas, a las que nos hemos referido en particular en un artículo anterior[20], hay un profundo sentido de referencia y validez con el mundo real y ya mencionamos su característica *a posteriori.*

Otra cosa que debe ser aclarada es que en la matemática no es apropiado hablar de que está al margen del espacio y del tiempo y que es una especie de ciencia inerte. Cada teorema de la matemática tiene unas coordenadas conocidas o no que revelan su aparición en la historia, por eso es más apropiado decir que los resultados demostrados de la matemática son inmodificables en el espacio y el tiempo-por lo menos lo sabemos en la matemática clásica-. Pero los teoremas tienen una continua interacción con otros resultados anteriores o posteriores. Un teorema descubierto hoy tiene profundas conexiones con un resultado futuro o permite la creación de nuevas teorías. EL teorema de Pitágoras que da la noción de distancia euclídea, le permitió extender a Riemann aquél concepto a cualquier región del espacio.

Si bien la demostración es condición necesaria para determinar si una propiedad matemática es invención o descubrimiento (la matemática clásica

[20] Ibid.

elemental es cuasi-platónica), no es condición suficiente. Veamos el caso del famoso teorema de la diagonal de Cantor, que postula que el cardinal de los naturales es menor que el cardinal de los números reales –la recta numérica-. Eso de dar un nombre ($aleph_o$) y una "identidad al **conjunto** infinito" de los números naturales no deja de ser algo extraño a la intuición humana e inexpresable en los fenómenos de la naturaleza o de la sociedad; cosa distinta a la visión de los naturales, por ejemplo, como instrumentos esenciales del comercio. Parece que esta perspectiva cantoriana es **invención** humana y no descubrimiento. Igual ocurre con el **c** que representa el "conjunto infinito" de los reales. Y la propiedad que prueba Cantor es casi una constatación de que se trata de una creación humana. Entonces, enuncia que ($aleph_o$) < (**c**), lo que significa que los reales no se pueden contar punto a punto; o sea, que cualquier intento de numerar los reales deja siempre por fuera algunos números de aquellos sin mencionar. Quedamos, pues, con la duda de si este teorema pertenece a nuestro razonamiento (invención) o lo desborda por ser una creación ajena al espíritu humano (descubrimiento).

Especificidades de la ontología del sistema numérico decimal (SND)

El sistema numérico es esencial para el desarrollo de la humanidad y debió pasar por un largo proceso evolutivo, que debió ser muy trivial, antes de que el ser humano se asentara y abandonara su sistema de vida que hoy llamamos sociedad de "cazadores-recolectores". Lo más natural es pensar, que cada pueblo, en cierto nivel de desarrollo, se construyera y operara su propio modelo numérico, así como se elaboraron los lenguajes, pero muy pronto se reveló que eso no podía ser así, todos **necesariamente,** salvo detalles accidentales menores, debían aplicar el llamado principio de inducción –como base de la estructura de contar-, que conduciría a la construcción de uno y solo un sistema, que es el que hoy llamamos indo-arábigo. Esa característica de *necesariedad* que se resume así: tiene que haber uno y sólo un SND, le da un carácter platónico; es decir, no se trata de una invención humana. En efecto, el sistema posee el atributo de la *universalidad* de la *inmodificalidad* en el espacio y el tiempo, de la *independencia* de la mente y de la voluntad humana, pero, a diferencia de las pretensiones de algunos filósofos, establece relaciones con nosotros.

No es concebible la existencia de una sociedad desarrollada sin un sistema numérico, y mucho menos con más de uno: pues la economía no resistiría la existencia –ni las ciencias ni las matemáticas ni la vida cotidiana- de dos modelos distintos no equivalentes. Eso revela la existencia de un principio universal que explica la naturaleza del sistema numérico y aclara el papel intrínseco que le estaba reservado en la matemática y que le da su sello particular. En resumen, no podemos inventar lo que *necesariamente* nos es dado (SND).

Dada la obligada participación del hombre en el descubrimiento de la Aritmética, la Geometría y el Álgebra éstas no pueden existir sin la presencia de la sociedad, pues se trata de un fenómeno social. Esta existencia y unicidad del SND explica por qué los teoremas de la matemática primitiva son platónicos, como vimos con varios ejemplos en un artículo anterior. Así se entiende cómo las técnicas empíricas primitivas con los números pasan a convertirse en ciencias teóricas-descubiertas (SND y la Aritmética). El forcejeo de los pueblos con sistemas numéricos empíricos triviales se transforma en una estructura (SND) independiente del control humano que hemos caracterizado como *universal y necesaria e inmodificable* en el tiempo y el espacio.

Pero hay que aclarar este punto: en el descubrimiento del sistema numérico se requiere también la participación del hombre, que propone los símbolos y los nombres de los números, con la condición de que cada signo respete el sentido de la inducción matemática; cuando adopta el 9, por ejemplo, quiere representar el concepto de "8+1", y así sucesivamente con los demás. Si no propone los símbolos no se puede conformar la estructura y no tiene sentido pensar que el sistema -que existe fuera de la mente del hombre- acogió, él mismo, los signos; no, el modelo se va descubriendo paso a paso. El trabajo empieza con los babilonios (2500 años antes de Cristo), probablemente más atrás en otras culturas, y sólo concluye en el siglo XIX o XX, cuando todas las civilizaciones convergen al mismo modelo, que utilizamos actualmente, el indo-arábigo.

De muchas culturas antiguas recordamos los esfuerzos por construir sus sistemas de numeración que les permitieran *contar*, a esas estructuras les daban los símbolos y los nombres de los números; pero el ser humano tenía que aportar algo adicional para la elaboración del modelo, debía escoger la base que le permitiera representar cualquier número de la Aritmética. Para dicha decisión, la mayoría de las civilizaciones eligieron el 10 (los dedos de la mano), los mayas adoptaron el 20 (posiblemente los dedos de la mano y de los pies). Los babilonios el sesenta. Lo sorprendente es que pese a las aparentes diferencias, todos los sistemas eran equivalentes, lo que demuestra que poseían una cualidad intrínseca de carácter universal que se debía descubrir y esa propiedad es la que hemos denominado *principio de inducción*. Dado un palito, en general, que hoy llamamos "1", la propiedad de *contar* consiste en ir paso a paso agregando palitos y dándole nombres y símbolos a los resultados. O sea, I (uno, 1), II (dos, 2), III (tres, 3)…(nueve, 9). Después hubo la *imperiosa necesidad* de agregar el cero (0), que no fue opcional para el hombre, como lo vimos antes. Pero agotados los 10 signos de la base el *principio de inducción* forzaba la extensión mecánica de la estructura, imponiendo un crecimiento de 1 en 1 y de menor a mayor, como rasgo intrínseco, en el que el hombre jugaba el simple papel de operario.

Y una desviación para aclarar algo. No se debe creer que los sistemas de los antiguos llamados *aditivo*, y *mixto* son esencialmente distintos del *posicional* (el tercero), sino que los dos primeros fueron etapas necesarias en el desarrollo del modelo. El sistema aditivo y el mixto tenían que evolucionar hacia el posicional, o estaban condenados a desaparecer, puesto que aquellos no representaban la aritmética en su integridad.

Presentamos, ahora, en términos generales este modelo. Dados los signos O (cero) y 1(uno), con sus correspondientes contextos y significados, y un número determinado de signos llamado base (que incluye los dos anteriores), existe uno y solo un sistema numérico (salvo equivalencias), que permite representar de manera única cualquier número dado. La esencia del sistema es elemental se denomina *principio de inducción* y consiste en añadir paso a paso el signo 1. El sistema es un descubrimiento.

COMPARACIÓN DE SISTEMAS CON DIFERENTES BASES

NN	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14
B2	00	01	10	11	100	101	110	111							
B7	00	01	02	03	04	05	06	10	11	12	13	14	15	16	20
B4	00	01	02	03	10	11	12	13	20	21	22	23	30	31	32

Nota: Hemos utilizado la notación 00, 01, 02 etc., en lugar de 0, 1, 2, para que el lector capte fácilmente el incremento continuo en una unidad. Así llegados al 09 (que es 9 = 8 +1) sigue el 10 y en base 7, llegados al 06 sigue el 10. La construcción es mecánica.

Como se desprende del gráfico, las estructuras de las diferentes bases son equivalentes; además, se puede transformar una de ellas en cualquier otra. La equivalencia se puede formular, también, de la siguiente manera: todo número escrito en base n se puede escribir de manera única en base m y recíprocamente. Esto ratifica que el sistema numérico no es una invención humana su estructura trasciende los ejercicios convencionales.

Hay que anotar una cosa interesante: las estructuras matemáticas clásicas se diferencian notablemente de las estructuras de las demás ciencias, en especial de la física. Mientras que aquellas en general son dispositivos de símbolos *per se*, como el sistema numérico –no nos referimos al formalismo-, las de la física son la descripción matemática de fenómenos naturales, el símbolo no es consubstancial al modelo, por eso existen los fenómenos físicos con independencia de que haya vida humana o no. La matemática clásica, por su parte, es un hecho que nace con el hombre. En cambio, las *leyes físicas* se construyen como expresiones matemáticas, que juegan dos papeles: de un lado son el lenguaje de la física y del otro el instrumento esencial de su construcción.

Citemos dos ejemplos de construcciones de la antigüedad que nos pueden dar idea sobre la naturaleza de los números. Ambos están contenidos en el Boletín de divulgación matemática n°1- Departamento de matemáticas del IES de Llerena[21].

> Se conoce el descubrimiento, en Checoslovaquia, de un hueso perteneciente a un lobo joven, hueso sobre el que aparece una sucesión de cincuenta y cinco incisiones, dispuestas en dos series, por grupos de cinco. Este hueso fue descubierto en sedimentos que datan de hace aproximadamente 30000 años.
>
> Otro procedimiento, mucho más eficaz, consiste en utilizar el principio de la repetición en la numeración de los objetos contados. Por ejemplo, en base tres, los pigmeos del África emplean el sistema repetitivo siguiente: **1, 2, 3, 4, 5, 6** se corresponden **a, oa, ua, oa-oa, oa-ua, ua-ua**

[21] Sin Autor. Boletín de divulgación Matemática nº 1–Departamento de Matemáticas del IES de Llerena. Diciembre 2009: http://iesllerena.juntaextremadura.net/descargas/hojamatematica01dic2009.pdf

Ambos ejemplos dan ideas notables del principio de inducción, hasta tal punto, sobre todo el primero, que se los podría considerar como precursores de la "invención" del sistema numérico. El problema es que si una persona encuentra un modelo que es único, se dice que ha logrado una invención; en cambio, si todos o casi todos hayan el mismo sistema se afirma que se trata de un descubrimiento. Eso fue lo que sucedió con el *principio de inducción* que fue reconocido por todas las culturas antiguas y mostró que la categoría "contar" era independiente de la mente humana.

Es bueno enunciar una propiedad que descubrieron los pitagóricos (2500 años antes) y que se refiere a los números poligonales, que dispuestos de cierta manera, como puntos, dan triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, etc. Veamos el caso de los números pentagonales[22]. EL 1 se considera convencionalmente.

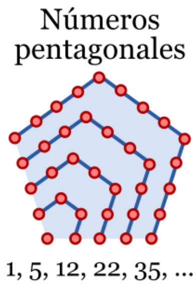
1 = 1

5 = 1 + 4 permite formar un pentágono con los cinco puntos (los vértices).

12 = 1 + 4 + 7

22 = 1 + 4 + 7 + 10

35 = 1 + 4 + 7 + 10 + 13 da el quinto número pentagonal. Ahora nos preguntan por el n-ésimo número pentagonal y la respuesta es $m = (3n^2 - n)/2$, siendo m el número poligonal requerido. Este sencillo resultado nos proporciona un ejemplo de realismo platónico. En efecto, es *universal* (nos permite calcular cualquier número pentagonal y la propiedad es reconocida universalmente) -el décimo número es $(3x10^2 -10)/2 = 145$-, es *necesaria* (no es el caso de que pueda ser de otra manera), *inmodificable* en el espacio y el tiempo y no es *invención humana* (es inherente a la estructura, en este caso, aritmético-geométrica: descubrir los números que se pueden recomponer en pentágonos[23]).



Para mostrar la compleja y armoniosa estructura de los triángulos, y su absoluta independencia de la mente humana, damos el siguiente teorema llamado "La recta de Euler", que sirve para ponerle un toque de belleza al final de este tema. Ya habíamos visto en el artículo anterior[24] que las tres medianas, alturas y mediatrices de un triángulo se cortan respectivamente

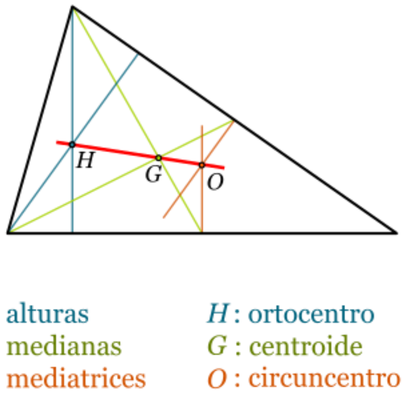
---

22 Wikipedia (Número poligonal): http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_poligonal

23 Ibid.

24 VÉLEZ BOTERO, Darío. *Matemática primitiva y realismo platónico.* Publicado en la biblioteca digital de la universidad de Antioquia. Medellín, 2014. (http://bibliotecadigital.udea.edu.co/dspace/handle/10495/1969)

en tres puntos llamados centroide (baricentro), ortocentro y circuncentro. Ahora si el triángulo no es equilátero, la “recta de Euler” pasa por esos tres puntos[25]. Si el triangulo es equilátero las nueve rectas pasan por el mismo punto.



En resumen, el sistema numérico decimal indo-arábigo, al cual confluyeron los modelos antiguos utilizados, tiene *existencia real,* no sólo conceptual sino como soporte de una rica base empírica, sobre la cual reposa la sociedad y las demás ciencias y tecnologías. El SND es *universal* porque cualquier número puede ser representado por él y por el reconocimiento de la humanidad. El SND es *necesario* porque es el único que puede ser generado por el *principio de inducción*, aunque admite presentaciones en otras bases que son **equivalentes.** El SND es *inmodificable* en el espacio y el tiempo (salvo cambios accidentales en los símbolos o en los nombres), pero admite interacciones con nosotros, mediante las demostraciones de los teoremas, cosa en la que falla el dilema de Benacerraf. Por último, en virtud de su existencia y unicidad el SND es independiente de la mente humana.

Medellín, septiembre de 2014

El correo de Darío Vélez Botero dvb1940@une.net.co

[25] Wikipedia (Recta de Euler) http://es.wikipedia.org/wiki/Recta_de_Euler