



**UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA**

1 8 0 3

Revisión y análisis de la física de los agujeros negros clásicos en el contexto de la relatividad general

Samuel Giraldo Builes

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Astrónomo

Tutor:
Ph.D. Oscar Alberto Zapata Noreña

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Medellín, Colombia
2025

Agradecimientos

A lo largo de este camino, no he estado solo. Quiero dedicar unas palabras a quienes, con su apoyo incondicional, han sido el pilar que ha sostenido este esfuerzo y me han acompañado en cada paso.

A mis padres, Maria Rubiela Builes Builes y Juan Manuel Giraldo Serna, además a mi hermana Adriana Salomé Contreras Builes, por darme apoyo constante y ser una fuente inagotable de amor.

También quiero expresar mi gratitud a esa familia que la vida me ha regalado: mis amigos de la universidad. Sin su apoyo y compañía, no habría logrado llegar hasta donde estoy. Aunque sería imposible mencionar a cada persona que me ha acompañado en algún momento de este proceso, quiero que sepan que llevo en el corazón un profundo agradecimiento por su presencia y por todo lo que han aportado a este viaje.

Quiero agradecer profundamente a mis grandes amigos, compañeros en incontables noches interminables donde el insomnio ha sido nuestro común denominador. Dlllds, Tablón y Vilou, ustedes han estado ahí, compartiendo desvelos, ideas y risas en esas horas en las que el mundo duerme y nosotros seguimos despiertos.

Quiero extender mi agradecimiento a mi asesor, Oscar Alberto Zapata Noreña, quien ha sido no solo una fuente invaluable de conocimiento e inspiración, sino también un gran apoyo emocional a lo largo de este camino. Su pasión y entusiasmo me genera la motivación de seguir en esto.

Por último, quiero expresar mi agradecimiento a la Universidad de Antioquia, que ha sido fundamental en mi formación y ha contribuido a moldearme en la persona que soy hoy.

Gracias a todos por su tiempo.

Resumen

En esta monografía se realiza un estudio de los agujeros negros más representativos: Schwarzschild, Reissner-Nordström (RN) y Kerr. Se abordan las propiedades fundamentales de cada tipo de agujero negro, incluyendo sus características geométricas y físicas. Asimismo, se explica de manera clara cómo construir un diagrama de Penrose, y como analizar los diagramas de Penrose asociados a cada solución, describiendo la interpretación física de sus respectivas regiones y las conclusiones sobre causalidad que se pueden extraer de estos diagramas. El trabajo se basa en las ecuaciones de campo de Einstein sin constante cosmológica, limitando el análisis a un espacio-tiempo asintóticamente plano. Este enfoque permite una comprensión precisa de las soluciones clásicas, destacando las diferencias entre agujeros negros no cargados, cargados y rotantes, y las implicaciones físicas de sus singularidades y horizontes de eventos. Además se discuten las limitaciones de cada modelo y su relevancia en contextos astrofísicos y cosmológicos.

Índice general

Resumen	3
Introducción	7
1. Agujeros Negros de Schwarzschild	9
1.1. Métrica de Schwarzschild	9
1.2. Líneas de mundo radiales para fotones	10
1.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein	12
1.4. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	16
1.5. Diagramas de Penrose	18
1.5.1. Construcción y Análisis de los Diagramas de Penrose .	19
1.5.2. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Schwarzschild .	20
2. Agujeros Negros de Reissner-Nordström	23
2.1. Métrica de Reissner-Nordström	23
2.2. Líneas de mundo radiales para fotones	24
2.3. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Reissner-Nordström .	25
2.3.1. Caso 1: $\mu^2 < q^2$	25
2.3.2. Caso 2: $\mu^2 > q^2$	26
2.3.3. Caso 3: $\mu^2 = q^2$	28
3. Agujeros Negros de Kerr	29
3.1. Métrica de Kerr	29
3.2. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Kerr	30
3.2.1. Caso 1: $\mu^2 < a^2$	30
3.2.2. Caso 2: $\mu^2 > a^2$	31
3.2.3. Caso 3: $\mu^2 = a^2$	32
4. Conclusiones	35

Introducción

Los agujeros negros han sido, desde su concepción teórica, una gran fuente de preguntas en la física. En particular, la presencia de una singularidad en su interior plantea un desafío conceptual, ya que, representa una divergencia matemática sin una interpretación física clara. Además, su horizonte de eventos, la frontera a partir de la cual ni siquiera la luz puede escapar, añade otra capa de complejidad a su estudio. Explorar la geometría de los agujeros negros es fundamental para comprender la física que los rodea, como, las posibles trayectorias que podrías seguir una partícula en el exterior e interior del agujero negro.

En este trabajo se llevará a cabo un análisis de las métricas asociadas a distintos tipos de agujeros negros, abarcando aquellos que poseen únicamente masa, conocidos como agujeros negros de Schwarzschild, también los que poseen carga eléctrica, nombrados como los agujeros negros de Reissner-Nordström, y aquellos que poseen momento angular, conocidos como agujeros negros de Kerr.

Para comprender en la estructura causal y la presencia de regiones exóticas en estos objetos astrofísicos, se emplearán los diagramas de Penrose, una herramienta fundamental en relatividad general que permite representar de manera compacta y global la geometría del espacio-tiempo en torno a un agujero negro. A través de estos diagramas, es posible visualizar la relación entre diferentes regiones del espacio-tiempo, identificando la disposición de los horizontes de evento, las singularidades y las posibles extensiones máximas de las soluciones métricas. Esto se logra mediante el análisis de las propiedades causales de los conos de luz, lo que facilita la interpretación de los caminos posibles para partículas en el entorno de estos objetos.

Capítulo 1

Agujeros Negros de Schwarzschild

1.1. Métrica de Schwarzschild

Al considerar una distribución de masa con simetría esférica, carente de momento angular y carga, se obtiene como solución a las ecuaciones de campo de Einstein la métrica de Schwarzschild, cuyo elemento de línea se expresa de la siguiente manera (Hobson, 2006, p.249):

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (1.1)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$, $\mu = GM/c^2$, siendo M la masa, y (t, r, θ, ϕ) se denominan las coordenadas de Schwarzschild.

Al analizar los factores que acompañan a los diferenciales de t y r , se observa que el elemento de línea se vuelve indefinido para $r = 2\mu$ y $r = 0$, lo que indica la presencia de dos singularidades matemáticas. A la primera singularidad mencionada se denominará horizonte de eventos (r_S), mientras que la segunda será referida como la singularidad.

Sin embargo, es importante recordar que las coordenadas son simplemente una forma de etiquetar eventos en el espacio-tiempo; las cantidades físicamente significativas son los 4-tensores definidos en cualquier punto. La curvatura del espacio-tiempo se describe de manera covariante a través de los componentes del tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y sus contracciones, que pueden calcularse de manera sencilla para la métrica de Schwarzschild (1.1). Por

ejemplo, el escalar de curvatura en cualquier punto se expresa como (Hobson, 2006, p.249) :

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48\mu^2}{r^6},$$

Aquí se puede observar que en efecto $r = 0$ representa una singularidad, mientras que r_S no lo es, ya que el escalar de curvatura no está indefinido para $r = 2\mu$, por lo que se concluye que r_S es una singularidad del sistema coordenado elegido. Por lo tanto, en las secciones 1.3 y 1.4, se realizará el cambio adecuado de coordenadas para obtener un sistema que facilite la interpretación física de estos puntos.

Conociendo la definición del horizonte de eventos, una práctica útil es calcular este horizonte para objetos que conocemos su masa. Por ejemplo, en el caso del Sol, su radio de Schwarzschild es aproximadamente $r_{S\odot} \approx 3\text{km}$, mientras que para un protón $r_S = 2,5 \times 10^{-54}\text{m}$.

Estos cálculos son relevantes porque, como se discutirá en la sección 1.4, toda partícula que cruza el horizonte de eventos de un agujero negro está destinada a alcanzar la singularidad. Por ejemplo, para que el Sol se convirtiera en un agujero negro, toda su masa tendría que comprimirse dentro de una esfera de 3km, lo que requeriría una cantidad inmensa de energía, considerando que su radio actual es de aproximadamente 696340km.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, se puede definir un agujero negro de Schwarzschild como:

“Un objeto cuya masa está completamente contenida dentro de su horizonte de eventos.”

1.2. Líneas de mundo radiales para fotones

Si en la ecuación 1.1 se considera una trayectoria radial ($\theta = cte$, $\phi = cte$), y además que pertenece a un rayo de luz ($ds^2 = 0$), se obtiene:

$$0 = \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1} dr^2,$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1},$$

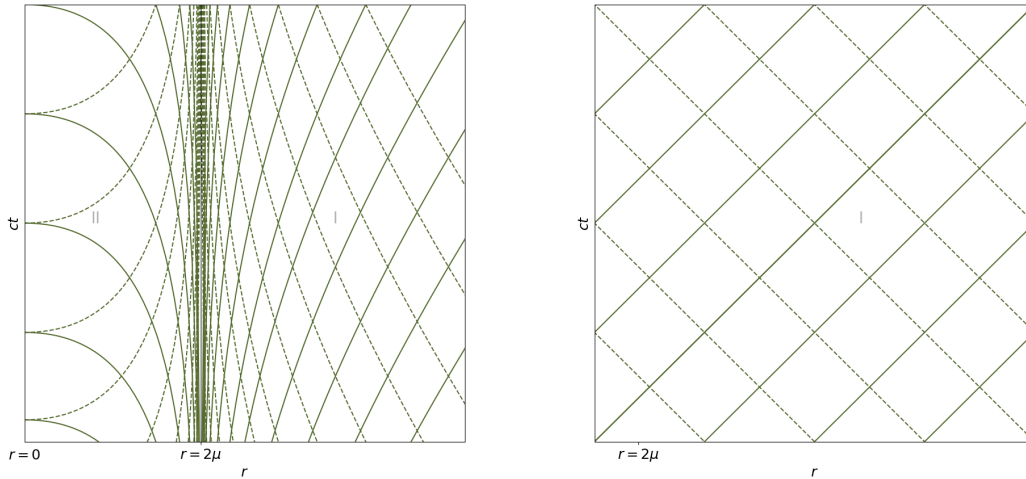
donde el signo positivo indica los fotones salientes del agujero negro, y el signo menos indica fotones entrantes al agujero negro. Integrando obtenemos:

$$ct = r + 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right| + C, \quad (\text{Salientes}), \quad (1.2)$$

$$ct = -r - 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right| + C, \quad (\text{Entrantes}). \quad (1.3)$$

Al graficar estas ecuaciones se obtiene la Figura 1.1a. Note que se está graficando para valores fijos de θ y ϕ , por lo que cada punto en la figura representa un 2-Esféra de área $4\pi r^2$.

En la Figura 1.1a se puede observar cómo las líneas de las trayectorias de los rayos de luz comienzan a distorsionarse al acercarse a $r = 2\mu$, ya que en este sistema de coordenadas se presenta una divergencia en esta superficie. Como resultado, parece que los rayos de luz entrantes tardan un tiempo infinito en cruzar el horizonte de eventos. Sin embargo, es importante recordar que esta interpretación puede ser engañosa debido a la elección del sistema de coordenadas, y no representa correctamente la realidad física, como se explicará en la sección 1.4. Afuera del agujero negro, a grandes radios, el espacio-tiempo presenta un comportamiento similar al de Minkowski (Figura 1.1b), ya que la interacción con este es tan débil que la trayectoria de los rayos de luz no se ve alterada.



(a) Rayos de luz cerca al horizonte de eventos.

(b) Rayos de luz en un lugar distante al horizonte de eventos

Figura 1.1: Trayectorias radiales de los rayos de luz. La región II corresponde al interior del horizonte de eventos, mientras que la región I representa el exterior del horizonte. Las curvas punteadas indican los rayos de luz entrantes, y las líneas sólidas representan los rayos de luz salientes.

1.3. Coordenadas de Eddington-Finkelstein

El diagrama de espacio-tiempo en la Figura 1.1a sugiere que las líneas de mundo de los fotones (también ocurre para las partículas con masa), cruzan $r = 2\mu$ cuando $t \rightarrow \infty$. Para evitar los problemas asociados con este sistema de coordenadas, es útil abordar el espacio-tiempo a través de geodésicas, que son independientes de las coordenadas y sus límites de validez. Las transformaciones que utilizaremos se centrarán en las trayectorias nulas de fotones en movimiento radial. El objetivo no es solo eliminar la singularidad en $r = 2\mu$ sino también corregir los conos de luz para que presenten las pendientes típicas de 1 y -1, lo que permitirá una mejor interpretación física de las gráficas en términos de causalidad.

Se consideran dos transformaciones, una para los rayos de luz entrantes y otra para los rayos de luz salientes. Estas transformaciones se denominan coordenadas de Eddington-Finkelstein avanzadas y coordenadas de Eddington-Finkelstein retardadas, respectivamente (Hobson, 2006, p.254).

Coordenadas Avanzadas de Eddington-Finkelstein

La transformación de coordenadas se basa en reinterpretar la constante C de la ecuación 1.2 como una nueva coordenada, denotada por p . Esta coordenada es conocida históricamente como *el parámetro de tiempo avanzado* (Hobson, 2006, p.255). Al despejar este parámetro, se obtiene:

$$p = ct + r + 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right|. \quad (1.4)$$

Al calcular su diferencial, el elemento de línea expresado en términos de esta nueva coordenada toma la forma:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) dp^2 - 2dpdr - r^2 d\Omega^2. \quad (1.5)$$

En este nuevo elemento de línea se puede observar que la singularidad en $r = 2\mu$ ha desaparecido, lo que significa que ahora es regular en el rango $0 < r < \infty$. Este intervalo corresponde a los valores de r recorridos por una geodésica de un rayo de luz que cae hacia el interior del agujero negro. A continuación, resulta pertinente calcular las trayectorias de las geodésicas nulas ($ds = d\theta = d\phi = 0$), ya que el propósito principal de esta transformación de coordenadas es corregir dichas trayectorias:

$$0 = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) dp^2 - 2dpdr.$$

Resolviendo la ecuación diferencial se obtienen dos soluciones:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} = 0, & \quad \Rightarrow \quad p = C, \\ \frac{dp}{dr} = 2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right)^{-1}, & \quad \Rightarrow \quad p = 2r + 4\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + C, \end{aligned}$$

Estas soluciones para p representan las trayectorias de los fotones salientes y entrantes, respectivamente. Dado que p es una coordenada nula, lo cual puede resultar poco intuitivo, es útil definir una nueva coordenada de tipo temporaloide, que se expresa de la siguiente manera:

$$ct' \equiv p - r = ct + 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right|. \quad (1.6)$$

El elemento de línea con t' toma la forma:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r}\right) dt'^2 - \frac{4\mu c}{r} dt' dr - \left(1 + \frac{2\mu}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.7)$$

En este nuevo elemento de línea se observa que r se mantiene regular en el intervalo $0 < r < \infty$. Las coordenadas (t', r, θ, ϕ) son llamadas las *coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein*. Como es habitual, analicemos las trayectorias de las geodésicas nulas:

$$ct' = -r + C, \quad (1.8)$$

$$ct' = r + 4\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + C. \quad (1.9)$$

La ecuación 1.8 describe los rayos de luz entrantes, mientras que la ecuación 1.9 corresponde a los rayos de luz salientes. En estas ecuaciones se observa que los rayos de luz entrantes han sido corregidos, representándose como líneas con una inclinación de -45° , tal como se ilustra visualmente en la Figura 1.2a.

Cabe destacar que al efectuar estos cambios de coordenadas se realiza una extensión de coordenadas para los rayos de luz entrantes, ya que estos no solo están definidos en el rango $2\mu < r < \infty$, sino que ahora abarcan $0 < r < \infty$. Este comportamiento se interpreta físicamente como el de un agujero negro, donde los rayos de luz pueden entrar al agujero pero no salir de él (Figura 1.2a).

Coordenadas Retardadas de Eddington-Finkelstein

La transformación de coordenadas se basa ahora en reinterpretar la constante C de la ecuación 1.3 como una nueva coordenada, denotada por q . Esta coordenada es conocida históricamente como *el parámetro de tiempo retardado* (Hobson, 2006, p.258). El proceso es análogo al de las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein, aunque con una interpretación física diferente, la cual será discutida tras ilustrar las correspondientes transformaciones de coordenadas.

Se define la coordenada q como:

$$q = ct - r - 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right|, \quad (1.10)$$

El elemento de línea en términos de la coordenada q es:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) dq^2 + 2dqdr - r^2 d\Omega^2, \quad (1.11)$$

de manera análoga al caso de las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein, la coordenada q es nula. Por ello, se introduce una nueva coordenada temporal, t^* , con el propósito de obtener una interpretación física adecuada:

$$ct^* \equiv q + r = ct - 2\mu \ln \left| 1 - \frac{2\mu}{r} \right|, \quad (1.12)$$

Ahora, el elemento de línea en términos de la coordenada t^* es:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} \right) dt^{*2} + \frac{4\mu c}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{2\mu}{r} \right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.13)$$

En este nuevo elemento se observa que r se mantiene regular en el intervalo $0 < r < \infty$. Las coordenadas (t^*, r, θ, ϕ) son llamadas las *coordenadas retardadas de Eddington-Finkelstein*. Como es habitual analicemos las trayectorias de las geodésicas nulas:

$$ct^* = -r - 4\mu \ln \left| \frac{r}{2\mu} - 1 \right| + C, \quad (1.14)$$

$$ct^* = r + C. \quad (1.15)$$

La ecuación 1.14 describe los rayos de luz entrantes, mientras que la ecuación 1.15 corresponde a los rayos de luz salientes. En estas ecuaciones se observa

que los rayos de luz salientes han sido corregidos, representándose como líneas con una inclinación de 45° , tal como se ilustra visualmente en la Figura 1.2b.

Cabe destacar que al efectuar estos cambios de coordenadas se realiza una extensión de coordenadas para los rayos de luz salientes, ya que estos no solo están definidos en el rango $0 < r < 2\mu$, sino que ahora abarcan $0 < r < \infty$. Este comportamiento se interpreta físicamente como el de un agujero blanco, donde los rayos de luz pueden salir del horizonte de eventos pero no pueden entrar a él (Figura 1.2b).

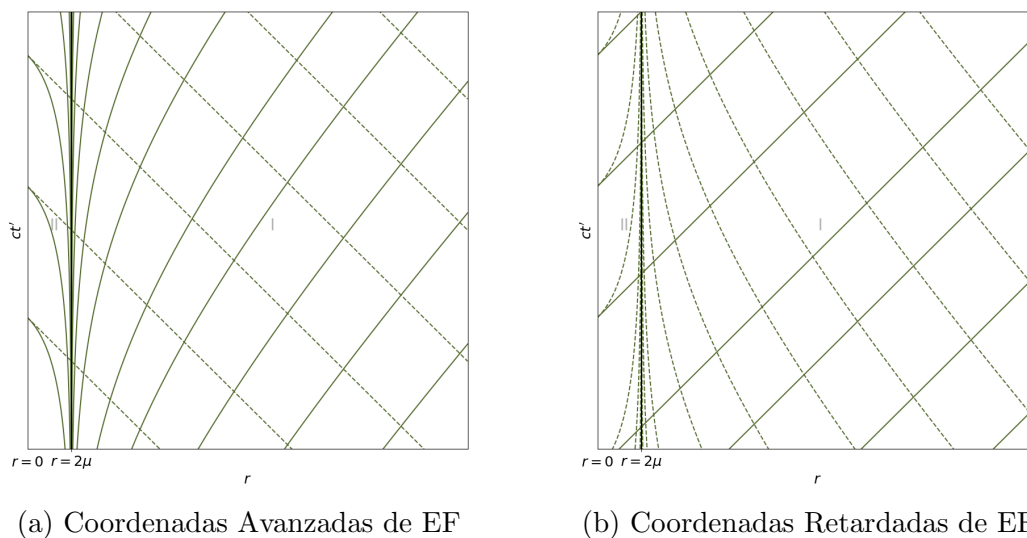


Figura 1.2: Trayectorias radiales de los rayos de luz en ambas coordenadas de *Eddington-Finkelstein*. La región II corresponde al interior del horizonte de eventos, mientras que la región I representa el exterior del horizonte. Las curvas punteadas indican los rayos de luz entrantes, y las líneas sólidas representan los rayos de luz salientes.

En conclusión, las coordenadas de Eddington-Finkelstein representan un avance significativo en la descripción de las propiedades de los agujeros negros al corregir parcialmente la representación de los rayos de luz. Las coordenadas avanzadas corrigen adecuadamente los rayos de luz entrantes, mientras que las coordenadas retardadas lo hacen para los rayos de luz salientes. Sin embargo, ninguna de estas elecciones de coordenadas proporciona una corrección completa, ya que cada una se centra exclusivamente en un tipo de trayectoria nula.

Estas coordenadas son, por tanto, un paso intermedio en el camino hacia una descripción más completa del espacio-tiempo de Schwarzschild. Su importancia radica en que permiten extender el rango de las soluciones y

eliminar la singularidad de coordenadas en $r = 2\mu$.

1.4. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

Las coordenadas de Eddington-Finkelstein representan un paso importante hacia la comprensión del espacio-tiempo de Schwarzschild, al corregir parcialmente la representación de los rayos de luz entrantes o salientes y permitir la eliminación de la singularidad de coordenadas en $r = 2\mu$. Sin embargo, estas coordenadas no ofrecen una corrección completa, ya que cada conjunto aborda únicamente un tipo de trayectoria nula como se mencionó anteriormente.

Para superar estas limitaciones y lograr una descripción integral del espacio-tiempo, se introducen las coordenadas de Kruskal-Szekeres. Estas proporcionan una extensión completa del espacio-tiempo de Schwarzschild, permitiendo interpretar de manera coherente tanto el interior como el exterior del horizonte de eventos. Además, eliminan por completo las singularidades de coordenadas, ofreciendo un marco más adecuado para analizar las propiedades físicas de los agujeros negros y sus regiones asociadas.

Tras realizar diversas transformaciones de coordenadas, incluyendo las realizadas en la sección 1.2, se obtienen las coordenadas (u, v) conocidas como las *coordenadas de Kruskal-Szekeres* (Hobson, 2006, p.268):

Para $0 < r < 2\mu$:

$$v = \left(1 - \frac{r}{2\mu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \cosh\left(\frac{ct}{4\mu}\right),$$

$$u = \left(1 - \frac{r}{2\mu}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \sinh\left(\frac{ct}{4\mu}\right),$$

Para $2\mu < r < \infty$:

$$v = \left(\frac{r}{2\mu} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \sinh\left(\frac{ct}{4\mu}\right),$$

$$u = \left(\frac{r}{2\mu} - 1\right)^{1/2} \exp\left(\frac{r}{4\mu}\right) \cosh\left(\frac{ct}{4\mu}\right),$$

Al graficar estas coordenadas se obtiene la Figura 1.3, que permite visualizar las regiones del espacio-tiempo extendido en las coordenadas de Kruskal-Szekeres. En la figura se identifican claramente las regiones I y II, previamente descritas, donde los conos de luz están corregidos y se representan como líneas

rectas con inclinaciones de $\pm 45^\circ$, lo que garantiza que las trayectorias de los rayos de luz sigan la causalidad del espacio-tiempo. El horizonte de eventos, que separa las regiones I (el exterior del agujero negro) y II (el interior del agujero negro), se representa como una línea recta inclinada. Este horizonte actúa como una barrera unidireccional: cualquier partícula o rayo de luz que cruce hacia la región II no puede regresar a I. Además, la singularidad del agujero negro está representada en el diagrama como una hipérbola en la parte superior, marcando el límite final del interior del agujero negro ($r = 0$). Este punto de curvatura infinita es inevitable para cualquier partícula que ingrese a la región II, pues al graficar un cono de luz en esta región, toda las trayectorias posibles conducen a la singularidad.

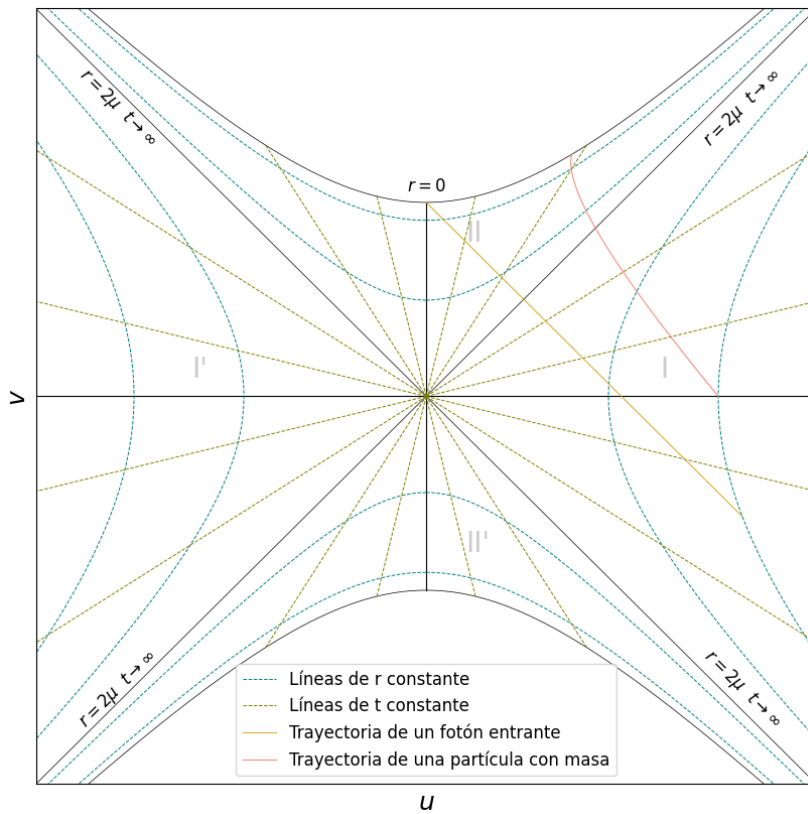


Figura 1.3: Gráfico en coordenadas de Kruskal que muestra las líneas asociadas a valores constantes de r y t , junto con las trayectorias radiales de un fotón y de una partícula con masa que cae hacia el agujero negro.

Como se mencionó previamente, al realizar las transformaciones de coordenadas pertinentes, se logra una extensión máxima de coordenadas, lo que da lugar a las regiones I' y II'. Las coordenadas en estas regiones también

son soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein, aunque su significado físico es diferente al de las regiones previamente conocidas. La región II' corresponde a un agujero blanco, una solución que presenta una singularidad en el pasado. En este contexto, cualquier objeto dentro del agujero blanco está destinado a salir hacia el exterior; este comportamiento puede deducirse al graficar un cono de luz en esta región, donde las trayectorias están destinadas a cruzar el horizonte del agujero blanco. Por otro lado, la región I' representa un universo idéntico a la región I, pero sin conexión causal directa entre ellos. Dos objetos ubicados en universos diferentes (en I e I') no pueden interactuar a menos que crucen el horizonte de eventos. Una característica destacada de este diagrama es el centro del mismo, que adopta la forma de lo que se conoce como un Puente de Einstein-Rosen, también denominado agujero de gusano. Este puente conecta las dos regiones del espacio-tiempo, pero su naturaleza exacta y su interpretación física no serán discutidas en este contexto. Para una deducción más detallada, se puede consultar (D'Inverno, 1992, p.346).

Este gráfico no solo ilustra cómo las coordenadas de Kruskal-Szekeres corrigen las dificultades asociadas con la singularidad en las coordenadas originales de Schwarzschild, sino que también proporciona una herramienta fundamental para interpretar visualmente la estructura causal del espacio-tiempo en torno a un agujero negro.

Sin embargo, es importante destacar que la singularidad misma, representada por $r = 0$ en el diagrama, sigue siendo un problema abierto en la física moderna. Las singularidades, puntos donde las cantidades físicas como la curvatura del espacio-tiempo se vuelven infinitas, son una indicación de que la teoría de la relatividad general deja de ser válida. En efecto, estas regiones gritan que algo está mal, ya que en la física las singularidades carecen de sentido práctico y conceptual. Resolver este enigma requiere una teoría cuántica de la gravedad que integre los efectos cuánticos a la relatividad general (D'Inverno, 1992, p.339).

En el siguiente capítulo, se introducirá una herramienta aún más poderosa para analizar la causalidad en el espacio-tiempo: los *diagramas de Penrose*. Estos diagramas compactifican el espacio-tiempo para revelar de manera más clara su estructura causal completa.

1.5. Diagramas de Penrose

Los diagramas de Penrose, también conocidos como diagramas conformes, son una poderosa herramienta que permite visualizar y analizar la estructura causal del espacio-tiempo. Estos diagramas se obtienen mediante una compactificación de coordenadas, lo que permite representar un espacio-tiempo

infinito en una región finita, facilitando su estudio (Infante, 2023, p.5).

Una de las principales ventajas de los diagramas de Penrose es que los conos de luz están corregidos y mantienen su inclinación de $\pm 45^\circ$ en todo el espacio-tiempo. Esto permite interpretar de manera clara las diferentes regiones del espacio-tiempo, así como las posibles trayectorias de partículas y rayos de luz. Gracias a esta representación, es posible analizar la causalidad en las distintas regiones del espacio-tiempo y determinar si es posible escapar de una región específica o si, por el contrario, enfrenta un destino inevitable.

Antes de introducir el diagrama de Penrose para el agujero negro de Schwarzschild, se dedicará una breve sección a las transformaciones necesarias para construir dicho diagrama.

1.5.1. Construcción y Análisis de los Diagramas de Penrose

Dado que la interpretación de los diagramas de Penrose se basa en la causalidad representada por los conos de luz, es fundamental que, antes de realizar las transformaciones necesarias, dichos conos de luz estén alineados con inclinaciones de $\pm 45^\circ$. En el caso de los agujeros negros, esto implica partir de las coordenadas de Kruskal.

Teniendo las coordenadas adecuadas (u, v) , ya se pueden realizar las transformaciones correspondientes para obtener el diagrama de Penrose.

Para realizar la compactificación de coordenadas se aprovecha que la función arcotangente está definida únicamente en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Como **primer** paso, el sistema se rota 45° , con el propósito de que en este nuevo sistema coordenado (X, Y) , los conos de luz estén representados por líneas verticales y horizontales.

$$X = u + v, \quad (1.16)$$

$$Y = u - v, \quad (1.17)$$

Es importante destacar que, previamente a la compactificación de coordenadas con la función arcotangente, se llevaron a cabo las rotaciones 1.16 y 1.17, debido a que la función arcotangente, por su naturaleza, no altera la orientación de las líneas verticales y horizontales; lo que es conveniente, pues se desea que los conos de luz sigan siendo líneas rectas.

Como **segundo** paso, se aplica la función arcotangente a las ecuaciones 1.16, 1.17, compactificando el sistema coordenado:

$$p = \arctan(X), \quad (1.18)$$

$$q = \arctan(Y), \quad (1.19)$$

como **tercer** paso, se realiza una nueva rotación del sistema de coordenadas para garantizar que los conos de luz queden correctamente orientados:

$$v' = p + q, \quad (1.20)$$

$$u' = p - q. \quad (1.21)$$

Con estos tres pasos, se construyen esencialmente los diagramas de Penrose, que permiten visualizar todo el espacio-tiempo en un único esquema.

1.5.2. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Schwarzschild

Una vez obtenidas las coordenadas de Kruskal, es posible construir el diagrama de Penrose (Figura 1.4)

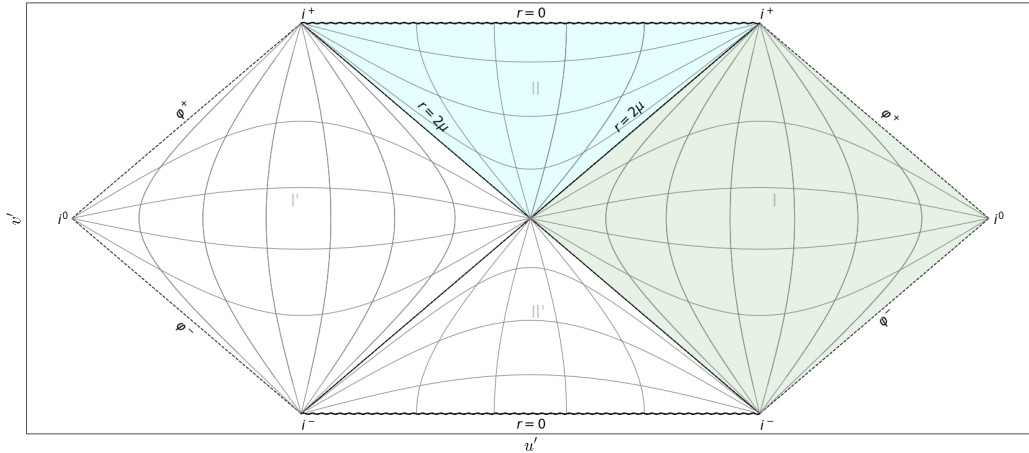


Figura 1.4: Diagrama de Penrose para el agujero negro de Schwarzschild. En él, i^+ y i^- representan la infinidad temporal futura y pasada, respectivamente; i^0 , la infinidad espacial; y ϕ^- y ϕ^+ , los puntos de origen y destino de las geodésicas nulas.

Desde el diagrama (Figura 1.4) se pueden deducir diversos fenómenos físicos. Por ejemplo, al graficar un cono de luz en la región II, se observa que su futuro converge inevitablemente hacia la singularidad, mientras que en la región II', su futuro está destinado a cruzar el horizonte de eventos, lo que ya se mencionó que se interpreta como un agujero blanco. Por otro lado, si

se grafica un cono de luz en las regiones I o I', se aprecia que existe libertad para decidir si se cruza o no el horizonte de eventos, lo que caracteriza estas regiones como zonas de libertad. Además, las regiones coloreadas representan el agujero negro sin la extensión matemática de coordenadas, facilitando así una visualización más concreta de las regiones físicas relevantes. En este contexto, se adoptará la convención de clasificar las regiones del diagrama de la siguiente manera: las regiones representadas en color verde simbolizan "libertad" en su futuro causal, mientras que las regiones en color azul indican un futuro con un destino inevitable (como alcanzar la singularidad o cruzar un horizonte de eventos). Esta distinción será empleada en adelante para facilitar la interpretación y discusión de los resultados.

Para concluir este capítulo, es importante destacar que es poco probable que los agujeros negros de Schwarzschild se formen como resultado del colapso estelar. Esto se debe a que el momento angular de las estrellas debe conservarse al final de su vida, y un agujero negro descrito únicamente por su masa no tomaría en cuenta esta característica esencial. Por lo tanto, los agujeros negros de Schwarzschild no serían una representación adecuada de los remanentes estelares. Sin embargo, un tipo de agujero negro que sí podría estar bien descrito por la métrica de Schwarzschild son los llamados agujeros negros primordiales. Estos no se forman por colapso estelar, sino que se habrían originado antes de la época de la nucleosíntesis del Big Bang debido al colapso gravitacional de fluctuaciones en la radiación primordial (Carr, 2021, p.7). A diferencia de los agujeros negros estelares, los primordiales podrían no poseer momento angular significativo, lo que los hace compatibles con una descripción basada en la solución de Schwarzschild.

Capítulo 2

Agujeros Negros de Reissner-Nordström

2.1. Métrica de Reissner-Nordström

Al considerar una distribución de masa, que posee carga, pero carece de momento angular, se obtiene como solución a las ecuaciones de campo de Einstein la métrica de Reissner-Nordström ([Hobson, 2006](#), p.300):

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

donde $q^2 = GQ^2/(4\pi\epsilon_0 c^4)$, siendo Q la carga.

Al analizar el factor que acompaña a los diferenciales de t y r , y determinar en qué condiciones se anula:

$$\Delta(r) = 1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2} = 0,$$
$$r_{\pm} = \mu \pm (\mu^2 - a^2)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Se observa que, además de la singularidad en $r = 0$, existen dos singularidades adicionales, las cuales, como se puede intuir, son singularidades de coordenadas que pueden ser eliminadas. La presencia de estas dos singularidades sugiere que este agujero negro no tiene un único horizonte de eventos, sino dos.

Como se puede observar en la ecuación [2.2](#), los horizontes dependen de la relación entre μ^2 y q^2 , lo cual será analizado en la sección [2.3](#) mediante el uso de los diagramas de Penrose.

2.2. Líneas de mundo radiales para fotones

Si en la ecuación 2.1 se considera una trayectoria radial y nula, se obtiene:

$$0 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2,$$

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{2\mu}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)^{-1} = \pm \frac{1}{c} \frac{r^2}{(r - r_-)(r - r_+)}. \quad (2.3)$$

Realizando la soluciones de las ecuaciones diferenciales se obtiene:

$$ct = r - \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| + \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| + C, \quad (2.4)$$

$$ct = -r + \frac{r_-^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_-} - 1 \right| - \frac{r_+^2}{r_+ - r_-} \ln \left| \frac{r}{r_+} - 1 \right| + C, \quad (2.5)$$

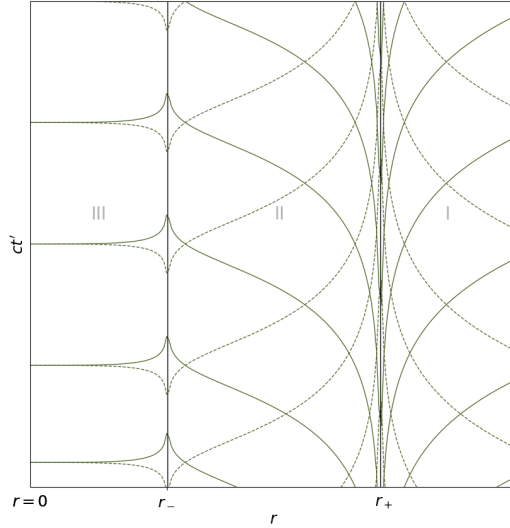


Figura 2.1: Trayectorias radiales de los rayos de luz. La región *I* al exterior el horizonte r_+ , la región *II* representa la región entre los dos horizontes de eventos $r_- < r < r_+$, mientras que la región *I* representa el interior del horizonte r_- donde se encuentra la singularidad. Las curvas punteadas indican los rayos de luz entrantes, y las líneas sólidas representan los rayos de luz salientes. Es importante aclarar que este gráfico está realizado para el caso $\mu^2 > q^2$ en el cual existen los horizontes de eventos.

Donde la ecuación 2.4 representa los rayos de luz salientes, y la ecuación 2.5 representa los rayos de luz entrantes.

Al graficar estas ecuaciones obtenemos la Figura 2.1. Note que como en el caso de Schwarzschild se está graficando para valores fijos de θ y ϕ , por lo que cada punto en la figura representa un 2-Esféra de área $4\pi r^2$.

Como se observa en la Figura 2.1, los rayos de luz no presentan el comportamiento adecuado para concluir un resultado físico. Sin embargo, la solución a este problema es análoga al caso de Schwarzschild, por lo que no se discutirá en detalle en este apartado. Para un desarrollo detallado, se recomienda consultar [2].

2.3. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Reissner-Nordström

Como se mencionó previamente, los horizontes de eventos del agujero negro dependen de la relación entre μ^2 y q^2 . A continuación, se analizarán los distintos casos y se presentarán los diagramas de Penrose correspondientes.

2.3.1. Caso 1: $\mu^2 < q^2$

En este caso, los valores de r_{\pm} son imaginarios, lo que implica que no existen singularidades de coordenadas, es decir no existen los horizontes de eventos como se observa en la Figura 2.2a. La métrica se mantiene regular para todos los valores positivos de r . Dado que la función $\Delta(r)$ siempre es positiva, la coordenada temporal t es siempre temporaloide, mientras que r permanece como una coordenada espacialoide. Esto sugiere que la singularidad en principio podría evitarse, pues al graficar un cono de luz la singularidad no se encuentra irremediamente en su futuro. Sin embargo, en ausencia de horizontes de eventos, $r = 0$ representa una singularidad desnuda (D'Inverno, 1992, p.384), visible desde el exterior, lo que puede generar efectos físicos extremos. Debido a estos efectos, Penrose propuso la existencia de una hipótesis de *censura cósmica*¹, que solo permitiría singularidades que

¹La conjetura de la censura cósmica fue propuesta por Roger Penrose en 1969 (D'Inverno, 1992, p.384). La hipótesis sugiere que, en el universo, las singularidades, como las del interior de los agujeros negros, no deberían ser observables directamente, sino que deberían estar siempre ocultas detrás de un horizonte de eventos. Esto implica que no debería haber singularidades desnudas (singularidades que no están ocultas por un horizonte de eventos), ya que su presencia en el universo causaría problemas en la física, como la posibilidad de predicciones físicas no deterministas.

estén ocultas detrás de un horizonte de eventos. Por lo tanto, el caso $\mu^2 < q^2$ no se considera físicamente realista.

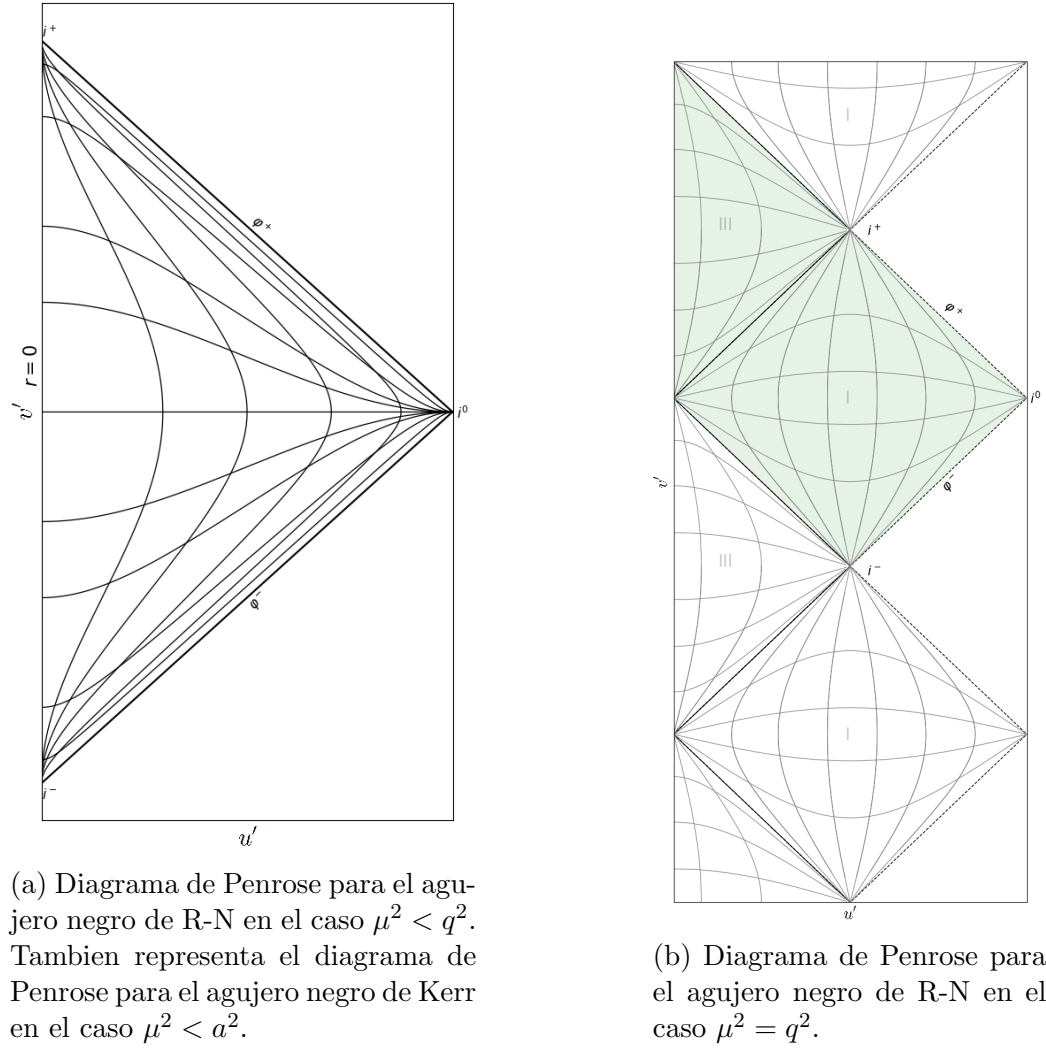


Figura 2.2: Diagramas de penrose para diferentes agujeros negros de Reissner-Nordström, dependiendo la relación entre μ^2 y q^2 .

2.3.2. Caso 2: $\mu^2 > q^2$

En este caso, los valores r_{\pm} son reales, lo que implica la existencia de dos horizontes de eventos en $r = r_{\pm}$. En la Figura 2.3, la región I, correspondiente a $r > r_+$, representa el exterior del agujero negro. La región II, que abarca $r_- < r < r_+$, es una zona donde, al graficar un cono de luz, se puede observar que su futuro está inevitablemente determinado por el cruce del horizonte en

$r = r_-$. Por otro lado, la región III, que corresponde a $r < r_-$, contiene la singularidad. Sin embargo, al graficar un cono de luz en esta región, la singularidad no se encuentra de manera inevitable en su futuro, sino que su encuentro es opcional. Las regiones I', II', y III', son las correspondientes a la extensión máxima de coordenadas.

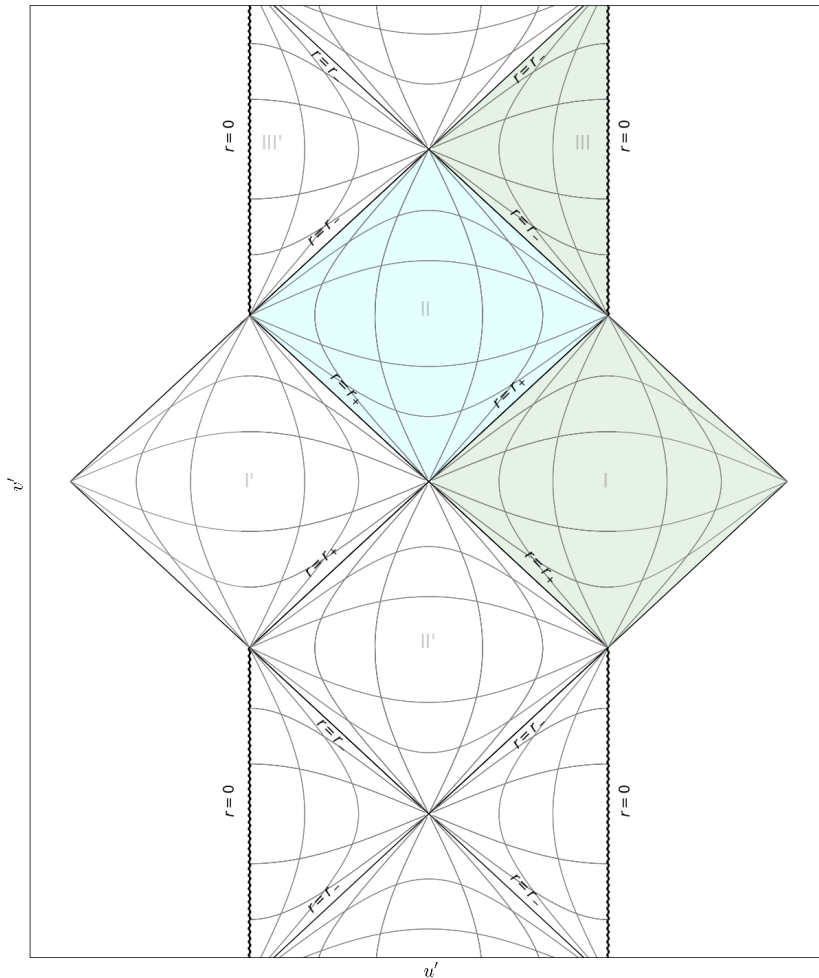


Figura 2.3: Diagrama de Penrose para el agujero negro de R-N en el caso $\mu^2 > q^2$

Un aspecto interesante ocurre cuando una partícula cruza nuevamente el horizonte $r = r_-$ desde el interior, transitando por una región II. En este contexto, $r = r_-$ funciona como un horizonte de eventos "de adentro hacia afuera". Finalmente, al ser expulsada a través del horizonte $r = r_+$, la partícula emerge en un espacio-tiempo asintóticamente plano (región tipo I) distinto al que ingresó al agujero negro, de acuerdo con la máxima extensión

analítica de la métrica.

Es importante destacar que este diagrama de Penrose se extiende infinitamente a lo largo del eje vertical. Esta configuración se adopta para preservar la causalidad de los conos de luz, permitiendo que sea posible salir de la región III y regresar a la región I de manera consistente con las propiedades causales descritas por la métrica.

2.3.3. Caso 3: $\mu^2 = q^2$

Este caso corresponde al agujero negro extremo de Reissner–Nordström, que se asemeja al caso II, pero sin incluir la región comprendida entre $r_- < r < r_+$ (Figura 2.2b). En este escenario, las dos regiones están separadas por un único horizonte de eventos. Sin embargo, la singularidad continúa sin ser un destino inevitable, ya que siempre es posible evitarla.

Para concluir este capítulo, es importante destacar que la existencia de los agujeros negros de Reissner–Nordström (RN) en la naturaleza resulta poco probable. Esto se debe a que es extremadamente difícil que un objeto de gran masa mantenga una carga eléctrica significativa, ya que cualquier desequilibrio de carga tiende a neutralizarse rápidamente debido a la atracción de partículas de carga opuesta presentes en el medio circundante. Sin embargo, el concepto de un agujero negro RN sigue siendo fascinante desde un punto de vista teórico.

Además, el estudio de estas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein abre puertas a nuevas posibilidades en nuestra comprensión de los agujeros negros y del espacio-tiempo. Aunque puedan no ser realizables físicamente, los agujeros negros RN son una herramienta invaluable para investigar escenarios extremos, como la existencia de múltiples horizontes de eventos y la relación entre las singularidades y la causalidad en el universo. Su análisis también sirve como una base para el desarrollo de modelos más complejos, como los agujeros negros de Kerr–Newman, que incorporan tanto carga como rotación.

Capítulo 3

Agujeros Negros de Kerr

3.1. Métrica de Kerr

Al considerar una distribución de masa, que posee momento angular, pero carece de carga eléctrica, se obtiene como solución a las ecuaciones de campo de Einstein la métrica de Kerr (Hobson, 2006, p.318), pero a diferencia de las dos anteriores esta tiene tres formas principales de escribirse:

$$ds^2 = c^2 \left(1 - \frac{2\mu r}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{4\mu a c r \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{2\mu r a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde $\mu = GM/c^2$, y $a = J/Mc$, donde J es momento angular. Además las funciones ρ^2 y Δ , están definidas como:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2\mu r + a^2.$$

A la ecuación 3.1 se conoce como la forma de Boyer–Lindquist, y las coordenadas (t, r, θ, ϕ) como las coordenadas de Boyer–Lindquist (Mohammad, 2022, p.59). Esta métrica se puede escribir de otras forma muy útiles, en particular si definimos la función:

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2(\theta)$$

Donde la métrica queda:

$$ds^2 = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} c^2 dt^2 + \frac{4\mu ar \sin^2 \theta}{\rho^2} c dt d\phi - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} d\phi^2, \quad (3.2)$$

También puede organizarse para que tenga la *forma* de un objeto en rotación:

$$ds^2 = \frac{\rho^2 \Delta}{\Sigma^2} c^2 dt^2 - \frac{\Sigma^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} (d\phi - w dt)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2, \quad (3.3)$$

donde $w = 2\mu cr a / \Sigma^2$. Los horizontes de eventos están dados por (Hobson, 2006, p.322):

$$r_{\pm} = \mu \pm (\mu^2 - a^2)^{1/2}. \quad (3.4)$$

En el caso del agujero negro de Kerr, la simetría esférica presente en la métrica de Schwarzschild se pierde, lo que se evidencia en los términos cruzados de la métrica. En su lugar, el agujero negro de Kerr exhibe simetría axial. Este tipo de agujero negro cuenta con dos horizontes de eventos y una singularidad, aunque, a diferencia de la singularidad puntual de Schwarzschild, la singularidad en el agujero negro de Kerr adopta la forma de un anillo situado en el centro del agujero negro.

En la ecuación 3.4, se observa una similitud con el caso del agujero negro de Reissner-Nordström, ya que los horizontes de eventos dependen de la relación entre μ^2 y a^2 . Este tema será analizado con mayor detalle en la Sección 3.2, utilizando los diagramas de Penrose como herramienta. Además, las trayectorias de los rayos de luz radiales son análogas a las mostradas en la Figura 2.1.

Para mayor detalle en los proceso en la corrección de los rayos de luz (D'Inverno, 1992, p.382)

3.2. Diagrama de Penrose: Agujero negro de Kerr

Las conclusiones para los tres casos tienen gran similitud con el agujero negro de Reissner-Nordström

3.2.1. Caso 1: $\mu^2 < a^2$

En este caso, los valores de r_{\pm} son imaginarios, lo que implica que no existen singularidades de coordenadas, es decir no existen los horizontes de

eventos como se observa en la Figura 2.2a. Sin embargo, en ausencia de horizontes de eventos, $r = 0$ representa una singularidad desnuda, visible desde el exterior, lo que puede generar efectos físicos extremos. Y como ya se mencionó este caso podría no existir dadas las complicaciones físicas como menciona Penrose en su conjetura de la censura cósmica.

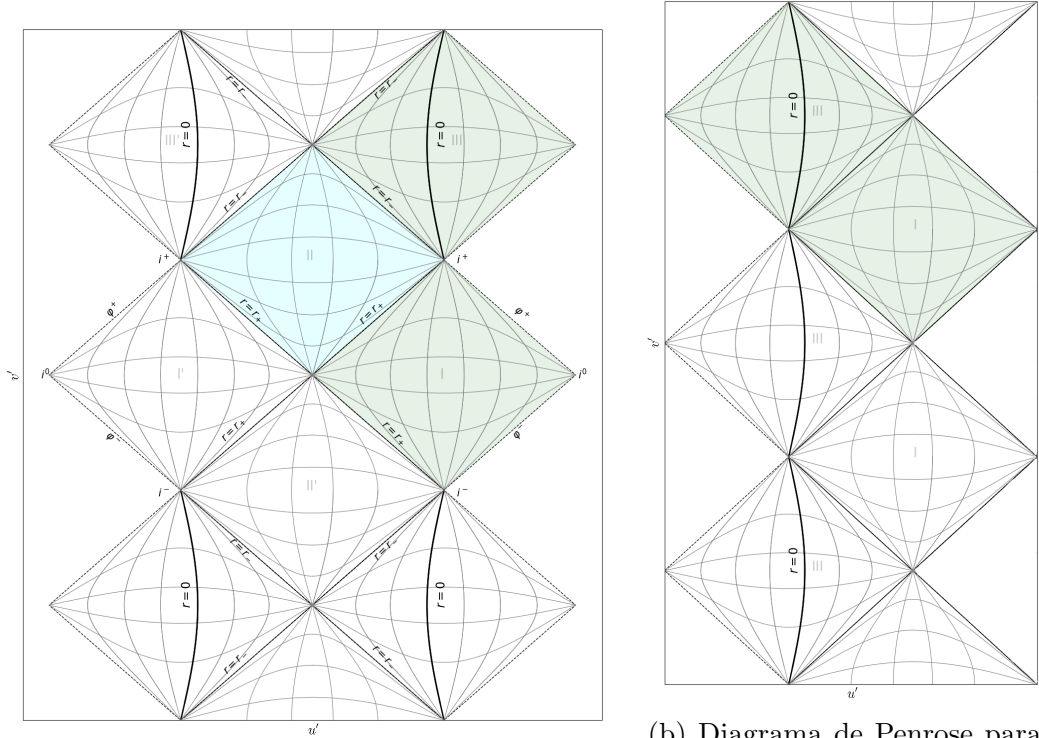
3.2.2. Caso 2: $\mu^2 > a^2$

En este caso, los valores r_{\pm} son reales, lo que implica la existencia de dos horizontes de eventos en $r = r_{\pm}$. En la Figura 3.1a, la región I, correspondiente a $r > r_+$, representa el exterior del agujero negro. La región II, que abarca $r_- < r < r_+$, es una zona donde, al graficar un cono de luz, se puede observar que su futuro está inevitablemente determinado por el cruce del horizonte en $r = r_-$. Por otro lado, la región III, que corresponde a $r < r_-$, contiene el anillo de la singularidad. Sin embargo, al graficar un cono de luz en esta región, la singularidad no se encuentra de manera inevitable en su futuro, sino que su encuentro es opcional. Las regiones I', II', y III', son las correspondientes a la extensión máxima de coordenadas.

Un aspecto interesante ocurre cuando una partícula cruza nuevamente el horizonte $r = r_-$ desde el interior, transitando por una región II. En este contexto, $r = r_-$ funciona como un horizonte de eventos "de adentro hacia afuera". Finalmente, al ser expulsada a través del horizonte $r = r_+$, la partícula emerge en un espacio-tiempo asintóticamente plano (región tipo I) distinto al que ingresó al agujero negro, de acuerdo con la máxima extensión analítica de la métrica.

Es importante destacar que este diagrama de Penrose se extiende infinitamente a lo largo del eje vertical (Como en el caso de Reissner-Nordström). Esta configuración se adopta para preservar la causalidad de los conos de luz, permitiendo que sea posible salir de la región III y regresar a la región I de manera consistente con las propiedades causales descritas por la métrica.

Dado que el anillo singular se encuentra en $r = 0$, podría pensarse que no es posible acceder a esta región, ya que implicaría valores negativos de r . Sin embargo, la coordenada r en el sistema de Boyer-Lindquist no debe interpretarse como un radio convencional en un espacio plano. La región ubicada dentro del anillo ($r < 0$) carece de una interpretación física directa en nuestro universo observable. Aunque esta solución es matemáticamente válida dentro de la métrica de Kerr, no está claro si tales regiones podrían existir realmente en la naturaleza.



(a) Diagrama de Penrose para el agujero negro de Kerr en el caso $\mu^2 > a^2$

(b) Diagrama de Penrose para el agujero negro de Kerr en el caso $\mu^2 = a^2$.

Figura 3.1: Diagramas de penrose para diferentes agujeros negros de Kerr, dependiendo la relación entre μ^2 y a^2 .

3.2.3. Caso 3: $\mu^2 = a^2$

Este caso corresponde al agujero negro extremo de Kerr, que se asemeja al caso II, pero sin incluir la región comprendida entre $r_- < r < r_+$ (Figura 3.1b). En este escenario, las dos regiones están separadas por un único horizonte de eventos. Sin embargo, la singularidad continúa sin ser un destino inevitable, ya que siempre es posible evitarla.

Para concluir este capítulo, es importante destacar que la métrica de Kerr representa un modelo más realista para describir los agujeros negros formados por el colapso gravitacional de estrellas masivas. A diferencia de la métrica de Schwarzschild, la geometría de Kerr incluye términos relacionados con el momento angular, lo que permite capturar de manera más precisa las propiedades de rotación que caracterizan a la mayoría de los agujeros negros astrofísicos. Esta rotación tiene implicaciones significativas en la dinámica

del espacio-tiempo circundante, incluyendo la formación de ergosferas y el arrastre de marcos, fenómenos que no están presentes en los agujeros negros estáticos (Mohammad, 2022, p.60). Por tanto, la métrica de Kerr no solo amplía nuestra comprensión teórica de los agujeros negros, sino que también resulta esencial para modelar procesos astrofísicos observables, como los discos de acreción y los jets relativistas asociados a estos objetos (D’Inverno, 1992, p.385).

Capítulo 4

Conclusiones

En esta monografía se ha logrado presentar un análisis de los agujeros negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström (RN) y Kerr, destacando sus propiedades físicas y geométricas fundamentales. A través de un enfoque basado en las ecuaciones de campo de Einstein en un espacio-tiempo asintóticamente plano y sin constante cosmológica, se han explorado las características distintivas de estos objetos, desde singularidades hasta la naturaleza de sus horizontes de eventos, en términos de la causalidad. El estudio de los diagramas de Penrose ha sido clave para interpretar la estructura causal de cada solución, permitiendo visualizar las trayectorias posibles de partículas y fotones en su proximidad. Esta herramienta ha facilitado comprender cómo las regiones internas de estos agujeros negros afectan la causalidad y las interacciones físicas dentro de sus horizontes. En conclusión, este trabajo ofrece una visión sobre las soluciones clásicas de los agujeros negros, sus diferencias y similitudes. Si bien las soluciones estudiadas son simplificaciones ideales, constituyen una base esencial para el análisis de fenómenos más complejos en la relatividad general y la astrofísica moderna.

Bibliografía

- [1] Hobson, M. P., Efstathiou, G., & Lasenby, A. N. (2006). *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press.
- [2] D’Inverno, R. (2022). *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University Press.
- [3] Ryder, L. H. (2009). *Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- [4] Lambourne, R. J. A. (2010). *Relativity, Gravitation and Cosmology*. Cambridge University Press.
- [5] Hartle, J. B. (2003). *Gravity: An Introduction to Einstein’s General Relativity*. Addison-Wesley.
- [6] Bambi, C. (2018). *Introduction to General Relativity: A Course for Undergraduates*. Springer.
- [7] Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- [8] Zee, A. (2013). *Einstein Gravity in a Nutshell*. Princeton University Press.
- [9] Megdi Mohammad., Grumiller Daniel (2022). *Black Hole Physics*. Springer.
- [10] Infante, A. (2023). *Estudio del espacio tiempo a través de diagramas de Penrose*. Universidad de Valladolid.
- [11] Dray, T. (2012). *The Geometry of Special Relativity*. CRC Press.
- [12] Carr, B., & Kühnel, F. (2021). *Primordial black holes as dark matter candidates*. Les Houches Lecture Notes Series.