

El razonamiento cuantitativo como estrategia para impulsar el cálculo mental

Hugo Ferney Chavarro Chavarro

Asesor: Edwin De Jesús Zarrazola Rivera

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas - Maestría en Enseñanza de las Matemáticas
Medellín, Colombia
Junio de 2025

Índice general

1. Preliminares **3**
- 1.1. Resumen . . . 3
- 1.2. Problema de investigación . . . 3
- 1.3. Objetivo General . . . 4
- 1.4. Objetivos Específicos . . . 5
- 1.5. Metodología . . . 5

2. Nociones elementales sobre cálculo mental **8**
- 2.1. Representantes del cálculo mental . . . 8
- 2.2. Concepto de cálculo mental . . . 9
- 2.3. El cálculo mental como herramienta de enseñanza . . . 10

3. Estrategias asociadas al cálculo mental **12**
- 3.1. Estrategias básicas . . . 12
- 3.2. Propiedades de las operaciones básicas . . . 20
  - 3.2.1. Propiedades de la suma . . . 20
  - 3.2.2. Propiedades de la resta . . . 22
  - 3.2.3. Propiedades de la multiplicación . . . 23
  - 3.2.4. Propiedades de la división . . . 24
- 3.3. Cálculos vinculados a las propiedades de las operaciones . . . 26
- 3.4. Elementos adicionales del cálculo mental . . . 28
  - 3.4.1. Identificación de patrones . . . 28
  - 3.4.2. Implementación de ecuaciones en la resolución de problemas . . . 35

4. Estrategias del método Trachtenberg **39**
- 4.1. Definiciones preliminares . . . 40
- 4.2. Estrategias para multiplicar por 11 y 12 . . . 41
- 4.3. Estrategias para multiplicar por 5 y 6 . . . 43
- 4.4. Estrategias para multiplicar por 7, 8 y 9 . . . 45
- 4.5. Estrategias para multiplicar por 2, 3 y 4 . . . 47

5. Aplicación del cálculo mental en la solución de problemas **51**
- 5.1. Situaciones nivel básico . . . 52
- 5.2. Situaciones nivel intermedio . . . 59
- 5.3. Situaciones nivel avanzado . . . 66

5.4. Resultados y análisis 74

6. Conclusiones **80**

Referencias **82**

Nota Histórica



Figura 1: Cálculo mental en la escuela pública S. A. Rachinski 1895.
Tomado de `https://es.wikipedia.org`

Muchas de las personas que son consideradas hábiles para calcular, pocas veces hacen uso de los algoritmos usuales; por el contrario, recurren a manipular los números para facilitarse la tarea. Explorar las cantidades, inspeccionar todas las posibilidades, optar por una de ellas, determinar el orden de actuación, estudiar las transformaciones más apropiadas, valorar el resultado, resolver situaciones problemáticas y la identificación de patrones matemáticos por medio de estrategias de razonamiento, se conoce como cálculo mental. [1]

A lo largo de la historia son muchos los físicos y matemáticos que han demostrado una gran capacidad para realizar cálculos mentales ágilmente, en este sentido se puede citar a Arquímedes (287 - 212 a.d. C) y a Diofanto (200 - 284), cuyas obras demuestran sin lugar a dudas su capacidad para manejar cifras enormes, aunque no ha quedado constancia de la velocidad con la que podían hacerlo. En el caso de Arquímedes, son célebres su cálculo de la aproximación de π mediante dos polígonos de 96 lados, así como su obra conocida como el Arenario, en la que ideó un sistema de grandes números para calcular la cantidad de granos de arena que podrían caber en el universo. Por su parte, Diofanto propuso y resolvió numerosos problemas relacionados con números enteros y sus potencias. [2]

El declive del Imperio Romano implicó en occidente una disminución de los avances en las matemáticas, a pesar de esto, siguió prosperando en la India y en el mundo árabe, con autores como el indio Brahmagupta (590 - 665) o el árabe Al-Juarismi (780 - 846), que como en el caso de los matemáticos clásicos grecorromanos, a juzgar por sus trabajos, contaron con una habilidad innata para hacer cálculos manejando grandes cifras.

Es solo a partir del siglo XVII que se tienen las primeras referencias bien documentadas sobre personas dotadas con habilidades excepcionales para manejar grandes números. Uno de los primeros ejemplos destacados es el del matemático inglés John Wallis (1616 - 1703), quién desde niño mostró sus extraordinarias habilidades como calculista. Durante los siglos XVIII y XIX hicieron aparición grandes genios que gracias a sus obras mostraron su asombrosa capacidad

calculista, tal es el caso de Leonhard Euler (1707 - 1783), Jedediah Buxton (1707 - 1772) y Gauss (1777 - 1855), entre otros. [3]

El caso particular de Carl Friedrich Gauss es digno de resaltar. Este brillante matemático desde temprana edad demostró habilidades para desarrollar cálculos aritméticos mentales, cuando tenía tres años descubrió un error cometido por su padre al calcular el pago de unos sueldos. Además, a los siete años, su maestro solicitó a la clase encontrar la suma de los números del uno al cien, esto con el fin de mantener ocupado a sus estudiantes, quedó asombrado cuando en poco tiempo, Gauss levantó la mano y dio la respuesta correcta. [4]

Por su parte, Jakow Trachtenberg (1888 - 1953), desarrolló un método de cálculo mental conocido como el método Trachtenberg, el cual es un sistema que consta de algunos patrones memorizables que facilitan realizar cálculos aritméticos sin ayuda de lápiz y papel. Dicha técnica fue construida mientras era prisionero en un campo de concentración nazi con el fin de mantenerse ocupado. En este método establece técnicas no convencionales para realizar multiplicaciones por números de una y dos cifras a partir de dos conceptos fundamentales: mitad y vecino de un dígito. [5]

En el contexto local, Jaime García Serrano (1956 - actualidad), es un calculista matemático colombiano quien dice ostentar seis *records guinness* mundiales. Se le acredita el cálculo más rápido de $\sqrt{13}$ con cien cifras decimales, la memorización de un número de 200 dígitos, el cálculo de calendarios de cien mil años, el cálculo de funciones trigonométricas y otras más. [6]

En la actualidad, se cuenta con una serie de estrategias de cálculo mental basadas en las propiedades de las operaciones básicas. Dichas técnicas se aplican en cierta medida en algunos contextos educativos, permitiendo la realización de operaciones aritméticas de una manera no convencional. Sin embargo, la tecnología ha adquirido un papel muy importante en la educación en general, ha proporcionado a esta muchas herramientas como las calculadoras, los computadores y los teléfonos celulares, entre otros, que pueden beneficiar al profesor y a los estudiantes; no obstante, la incorporación de estos dispositivos ha hecho que algunos procesos usualmente asociados con la educación en matemática, pierdan su importancia, por eso Alexander Aitken en 1954, decía ante la sociedad de ingenieros “es posible que, lo mismo que los tasmanos[1] o los moriori[2], los calculadores mentales estemos condenados a la extinción”. [6]

[1]Pueblo indígena extinto originario de la isla de Tasmania (Australia).
[2]Pueblo nativo de las islas Chatham (Nueva Zelanda) que sufrió asesinato masivo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Resumen

El presente estudio pretende aportar elementos que favorezcan la enseñanza de las matemáticas en la educación básica secundaria, para ello sugiere una alternativa para que los estudiantes fortalezcan y enriquezcan sus habilidades numéricas y de razonamiento al enfrentarse a operaciones aritméticas, con esta intencionalidad se pone de manifiesto la importancia del razonamiento cuantitativo como propulsor del cálculo mental. La investigación se realizó con 73 estudiantes del grado once de la Institución Educativa Jorge Alberto Gómez Gómez del municipio de Granada (Antioquia), a través de un enfoque cualitativo diseñado a partir de la investigación acción educativa-IAE, en la cual se realizó un diagnóstico para contextualizar la problemática, se elaboró un módulo de profundización y una secuencia didáctica como elementos de intervención y se validó su efectividad. Los resultados que se obtuvieron permitieron identificar que los elementos del razonamiento cuantitativo que se abordaron fortalecieron la implementación asertiva de estrategias y técnicas de cálculo mental en la realización de operaciones aritméticas y en la solución de problemas, pasando de un porcentaje de éxito del 64 % al 75 % después de la mediación pedagógica.

1.2. Problema de investigación

La Institución Educativa Jorge Alberto Gómez Gómez, donde se realizó la intervención, está ubicada en la subregión oriente del departamento de Antioquia, en el municipio de Granada, a 70 kilómetros de la ciudad de Medellín. “A nivel social, la población estudiantil que atiende esta institución se caracteriza por provenir de familias de origen mayoritariamente campesino, existe además una gran presencia de víctimas del conflicto armado que azotó a esta región”. [7]

Ante este panorama y dado el nivel actitudinal y aptitudinal que de manera particular se espera que posean los estudiantes del grado once, además de las carencias y necesidades formativas que presentan, es que se ha determinado que los alcances de este escrito vayan encaminados de forma inicial a impactar y a atender a este nivel educativo. Este grado está conformado por 73 estudiantes distribuidos en dos grupos mixtos y heterogéneos.

En este orden de ideas es importante resaltar que la Prueba Saber 11 del año 2024, para los 95 estudiantes evaluados, arroja un promedio de "53 puntos de 100 posibles en el área de matemáticas" (ICFES, 2024, p. 28). Revisando con mayor detalle dichos resultados, según el ICFES (2024), el 63 % de los estudiantes evaluados respondió de manera incorrecta en las preguntas relacionadas con validar procedimientos y estrategias utilizadas para dar solución a problemas. Del mismo modo, el 57 % de ellos no fue asertivo al afrontar situaciones que involucraban información cuantitativa y que requerían el planteamiento de estrategias que conllevaran a soluciones adecuadas, adicional a esto, solo el 7 % de los estudiantes se ubicó en el nivel 4 de desempeños del área, es decir, el más alto estipulado en el examen. [8]

En atención a lo anterior, quedan en evidencia las notorias dificultades que tienen los estudiantes al momento de interactuar con el conocimiento matemático, en primer lugar, muestran inconvenientes para planificar y ejecutar un plan que conduzca a la solución de un problema y en segundo lugar, demuestran una reducida habilidad para interpretar y utilizar datos numéricos representados de distintas maneras en el contexto matemático. Estas problemáticas hacen que surja el interrogante que moviliza a esta investigación: *¿cómo contribuir para que los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Jorge Alberto Gómez Gómez mejoren su capacidad de razonamiento y realicen cálculos aritméticos asertivamente cuando resuelven problemas?*

1.3. Objetivo General

Resolver este interrogante conlleva a la necesidad de hacer referencia al razonamiento cuantitativo, el cual gracias a sus componentes y virtudes, se muestra como una alternativa que puede ayudar a suplir en cierta medida la escasa apropiación que tienen los estudiantes de los datos numéricos que se les presentan en distintas situaciones. Por otro lado, a través del cálculo mental se exponen los mecanismos mediante los cuales es posible resolver operaciones aritméticas desde un enfoque no convencional con un alto grado de precisión.

Sumado a lo que se ha dicho, es importante brindar un enlace entre los fundamentos del cálculo mental, el razonamiento cuantitativo y la resolución de problemas, de tal manera que a partir de esta conexión se favorezca la abstracción y el análisis en búsqueda de la obtención

racional de un resultado apartado de los procedimientos mecánicos. Lo anterior se establece a manera de complemento para el estudiante, de tal forma que le suministre lo que requiera en el momento de enfrentarse al conocimiento matemático, ya sea en el quehacer diario de su realidad educativa, al abordar ciertos instrumentos de evaluación, e inclusive, al afrontar situaciones de la vida cotidiana. En este orden de ideas, *el presente estudio se realiza para potenciar el uso del cálculo mental en los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Jorge Alberto Gómez Gómez mediante el razonamiento cuantitativo.*

1.4. Objetivos Específicos

- Mostrar el concepto de cálculo mental no solo a partir de su enfoque convencional, sino también incluyendo los demás elementos que lo componen por medio de referentes teóricos que han ayudado a ampliar su definición.

- Exponer las diferentes estrategias básicas de cálculo mental y del método Trachtenberg a través de ejemplos explicados por medio de diagramas.

- Ejercitar la comprensión lectora en matemáticas y la habilidad de transformar la información textual dada en lengua común en formatos gráficos o numéricos y viceversa como mecanismos para fortalecer el razonamiento cuantitativo.

- Brindar un compendio de situaciones problemáticas que se nutran de diversos contextos y que requieran de la necesidad de hacer uso de las herramientas brindadas por el razonamiento cuantitativo y el cálculo mental para buscar una solución razonada.

1.5. Metodología

Con el fin de dar respuesta a la pregunta y al objetivo de investigación, se indica a continuación la metodología implementada, la cual se sustenta en un enfoque cualitativo, en este se someterán tanto el razonamiento cuantitativo y las operaciones aritméticas a un diseño de investigación que en unión con la intervención pedagógica en el grado once, permitirá apreciar la evolución de los estudiantes en cuanto a las temáticas sobre las que se ha profundizado. Con esta intención, se expone aquí el enfoque de investigación y su diseño, destacando los instrumentos y las técnicas que se implementarán, se hablará también de las fases de ejecución del trabajo de profundización.

Teniendo en cuenta las características de la investigación y la importancia de revisar y estudiar los resultados de la intervención pedagógica en el área de matemáticas, es necesario resaltar que el estudio se desarrolla a través de un enfoque cualitativo, en el que son muy relevantes las descripciones de situaciones, eventos, personas, interacciones, conductas observables y sus respectivas manifestaciones. En correspondencia con lo establecido por Hernández, Fernández y Baptista (2014), la práctica de exploración cualitativa busca comprender un fenómeno investigable en su entorno natural, para lo cual es indispensable "sensibilizarse con el ambiente en el cual se llevará a cabo el estudio, identificar informantes que aporten datos, adentrarse y compenetrarse con la situación de investigación, además de verificar la factibilidad del estudio". [9]

Adicional a lo anterior, la investigación cualitativa utiliza principalmente técnicas como la entrevista, la observación participante y registro estructurado de observación, el diario de campo, las conversaciones de grupo y la aplicación de talleres, esto en la opinión de Escudero y Cortez (2018) [10]. De modo especial, en este tipo de estudio "el investigador debe señalar de manera específica la secuencia que se siguió en la investigación y los resultados que arrojó su implementación" (Hernández, Fernández y Baptista, 2014, p. 459) [9], es por eso que este tipo de indagación admite que la realización de actividades en una secuencia didáctica se considera como una estrategia que fomenta interacciones que revelan el conocimiento matemático manifestado tanto en las notas de los estudiantes como en el diario de campo como forma de registro del docente investigador.

Además, a partir del objetivo de la investigación, del problema formulado y de lo indispensable que es adentrase en la práctica educativa en el área de matemáticas, se elige como diseño de investigación a la investigación acción educativa-IAE, la cual se establece como "una herramienta metodológica heurística para estudiar la realidad educativa, mejorar su comprensión y al mismo tiempo lograr su transformación" (Colmenares y Piñero, 2008, p. 5) [11]. También, en ella es posible documentar el proceso de evolución de la práctica educativa con el fin de explicar la pretensión del estudio. En consonancia con este punto de vista, la finalidad es sugerir un módulo de profundización cuya implementación haga posible la obtención de datos que puedan ser analizados bajo el enfoque cualitativo, teniendo como referencia una escala definida por los indicadores de desempeño de los estudiantes.

De acuerdo con Restrepo (2004), la puesta en práctica de la IAE le permite al maestro hacer una reconstrucción de su saber pedagógico, de tal manera que se producen nuevos conocimientos gracias a la actividad investigativa, en la cual tiene lugar la autorreflexión que busca mejorar su ejercicio pedagógico y por ende, la calidad de la educación. Para este autor, la IAE está divida en tres fases: (1) la deconstrucción de la práctica, (2) la reconstrucción de la práctica y (3) la

validación de la efectividad de la práctica alternativa o reconstruida. [12]

En la primera fase “el punto de partida es el diagnóstico acerca de la práctica social problemática” (Restrepo, 2004, p. 7) [12], es por esto que según lo establecido en la secuencia didáctica implementada, la prueba diagnóstica es considerada como el sustento para informar a la comunidad académica sobre cuáles son las dificultades y fortalezas que se evidencian en los estudiantes en relación con el pensamiento numérico, específicamente con la realización de operaciones aritméticas. Los hallazgos arrojados por la aplicación de dicho ejercicio preliminar y las perspectivas que se tengan sobre la práctica pedagógica en el grado once, son fundamentales para la realización de la contextualización del estudio.

De igual manera, en la segunda fase “se incursiona en el diseño de una práctica nueva más efectiva” (Restrepo, 2004, p. 7) [12], por lo tanto, en esta etapa se realizó la elaboración del módulo de profundización a manera de propuesta metodológica y pedagógica, de tal forma que esté en correlación directa con la pregunta de investigación y el marco teórico que busca responder a la misma. En esta fase son indispensables los cuadernos de apuntes de los estudiantes, el registro de las conductas observables de los mismos, los talleres de aplicación desarrollados y el diario de campo diligenciado por el maestro investigador.

La tercera fase tiene que ver con la “constatación de la efectividad de la práctica reconstruida para lograr los propósitos de la educación” (Restrepo, 2004, p. 8) [12], por lo tanto, en esta etapa se debe medir el nivel de eficacia logrado después de la aplicación de la intervención pedagógica, para lo cual, son muy relevantes la ejecución de la prueba final o de salida y el análisis de la información.

Capítulo 2

Nociones elementales sobre cálculo mental

2.1. Representantes del cálculo mental

No son recientes los acercamientos que se han hecho sobre cálculo mental. Calculistas prodigiosos a lo largo de la historia han mostrado asombrosas y excepcionales habilidades en este ámbito, además, sus experiencias han trascendido como un punto de referencia. Algunas de sus prácticas se mencionan a continuación.

John Wallis (Inglaterra, 1616 - 1703), estaba dotado de una extraordinaria memoria y capacidad de cálculo. Entre sus logros más destacados podemos citar la creación de un algoritmo para calcular decimales del número π. Cuenta Wallis que en una noche de insomnio llegó a calcular la raíz cuadrada de un número de 40 cifras, recordándolo y escribiéndolo al día siguiente. Se sabe que el resultado era erróneo en solo dos dígitos. Wallis también dio sentido a los números imaginarios y fue, además, el creador del símbolo con el que representamos al infinito. [13]

Jedediah Buxton (Inglaterra, 1707 - 1772), un gran fanático de la memoria y del cálculo, aprendió a calcular a la edad de 12 años, su fama lo llevó a Londres donde fue invitado a ver una obra de Ricardo III, al finalizar la obra se le preguntó si había sido de su agrado a lo que respondió que el actor había dicho 14445 palabras y dado 5202 pasos. Su gran capacidad para memorizar le permitía realizar multiplicaciones mentales de números de grandes cifras. [3]

Alexander Aitken (Nueva Zelanda, 1895 - 1967), fue un matemático con una excelente capacidad para la memorización y el cálculo mental. Entre sus hazañas se dice que sabía 2000 decimales de un número y que incluso era capaz de decir el decimal que ocupaba el lugar n. Además era capaz de hacer sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces de grandes números y se dice que podía multiplicar en 30 segundos dos números de 9 dígitos cada uno. [3]

Carl Friedrich Gauss (Alemania, 1777-1855), Con solo 3 años corregía errores de cálculo a su padre y con 19 enunció su primer teorema. Gauss fue sobre todo un niño prodigio que al crecer supo mantener activa su curiosa y extraordinaria mente. "No es el conocimiento, sino el acto de aprendizaje, no es la posesión, sino el acto de llegar a ella, lo que concede el mayor disfrute", dejó escrito. Con solo 7 años sorprendió a su profesor y compañeros al calcular, sin apenas esfuerzo y con mucha rapidez, la suma de todos los números naturales del 1 al 100, tarea que había sido asignada a toda su clase. [14]

Jakow Trachtenberg (Rusia, 1888-1953), creó el método Trachtenberg que era una herramienta de cálculo mental mientras era prisionero en un campo de concentración nazi. Dicho método se basa en procedimientos aritméticos que distan mucho de las estrategias tradicionales, en él no se usan las tablas de multiplicar, el único requerimiento es saber contar. [5]

En la actualidad los representantes más destacados de habla hispana son:

Alberto Coto (España, 1970 - actualidad), hoy en día, este español es considerado como la persona más rápida haciendo cálculos mentales, posee records guinnes mundiales por hacer la suma de 100 cifras escogidas al azar en 19,23 segundos y multiplicar dos números de 8 cifras cada uno en 56,5 segundos. Además, posee siete títulos mundiales de cálculo mental obtenidos entre los años 2004 y 2010. [6]

Jaime García Serrano (Colombia, 1956 - actualidad), es un calculista matemático colombiano que ha patentado un método, que busca fortalecer y revivir la memoria, mediante el proceso de la nemotecnia y el cálculo mental. Se le adjudican varios records guinnes gracias a su extraordinaria habilidad y agilidad mental. [6]

Como ellos, no son muchas las personas dotadas con tan extraordinarias habilidades, pero gracias a sus aportes, a quienes no pertenecemos a este selecto grupo, nos es posible hacer un acercamiento al cálculo mental, dando así paso a la posibilidad de abordar de manera alternativa, distintos problemas en variados contextos de la matemática. Por tal razón, resulta necesario hacer una aproximación a la definición de cálculo mental a partir de los enfoques dados por algunos autores.

2.2. Concepto de cálculo mental

A pesar de que el cálculo mental ha sido usado desde hace mucho tiempo y hay autores que han estudiado el tema, son pocas las definiciones que se encuentran reportadas haciendo una búsqueda exhaustiva del término, la primera definición hallada (y de hecho, más usada como referencia) la estableció Parra y Saiz quien concibe al cálculo mental como un conjunto

de procedimientos que, analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido para obtener resultados exactos o aproximados. Además Parra y Saiz (1994), mencionan que el cálculo mental no excluye la utilización de lápiz y papel, debido a que durante el proceso mental se necesita registrar los cálculos intermedios. Por otro lado, establecen que existen el cálculo mecánico o automático (utilización de un algoritmo o un material) y el cálculo pensado o reflexionado que es el que se considera como cálculo mental. [6]

Por su parte Fernández (2008) admite que el cálculo mental está basado en decisiones y elecciones de estrategias que buscan que el estudiante haga una reflexión personal, para que de esta manera pueda tomar una buena decisión en la elección de la solución adecuada para una situación. [6]

Ibañez (2012) y Ortiz y Ortega (2009) coinciden en su definición de cálculo mental al mencionar que es un cálculo de cabeza o memoria, en el que no se usan ayudas externas. Ortiz y Ortega (2009) además distinguen dos tipos de cálculo; en el primero se usa una técnica que puede llegar a olvidarse por lo que en este prima la memorización (cálculo mecánico) y en el segundo, se piensan distintas estrategias para resolver un problema y se escoge la más adecuada (cálculo reflexivo o pensado). [6]

Tomando como punto de partida los aspectos en los que convergen las definiciones anteriores y generalizando los conceptos abordados, una definición de cálculo mental que está alineada con la razón de ser de este texto es la siguiente:

> El cálculo mental es un proceso mental o cognitivo, mediante el cual se realizan operaciones aritméticas, con el fin de dar una respuesta exacta y que a su vez sea pensada y reflexionada al afrontar una situación problemática.

2.3. El cálculo mental como herramienta de enseñanza

El cálculo mental es una habilidad fundamental en el proceso de aprendizaje de los alumnos. A través de esta herramienta, los estudiantes desarrollan destrezas matemáticas, agilidad mental y capacidad de resolución de problemas de manera rápida y eficiente, además permite a los alumnos realizar operaciones aritméticas de forma mental, sin necesidad de utilizar calculadora. Esto les da la capacidad de resolver problemas de manera ágil, lo que es especialmente útil en situaciones cotidianas donde el tiempo es limitado. [15]

Reys (1984), citado por Segovia y Castro (2009), da cinco razones para defender el cálculo mental en la escuela, estas son:

- Favorece el desarrollo de la aritmética escrita.
- Es un promotor para el conocimiento de las estructuras de los números y sus propiedades.
- Es un generador de la creatividad, del conocimiento independiente e incita a los estudiantes a tener ingenio con los números grandes.
- Contribuye a la mejora en la resolución de los problemas.
- Es una base para el desarrollo de técnicas de cálculo. [16]

Además, las estrategias de cálculo mental son una herramienta que potencia el razonamiento lógico y la capacidad de abstracción de los estudiantes, les ayuda a comprender los conceptos matemáticos de manera más profunda y a aplicarlos en distintos contextos. Es importante destacar que el cálculo mental no solo se limita a las operaciones básicas como sumar, restar, multiplicar y dividir, también incluye habilidades como la estimación, la descomposición de números, la resolución de problemas numéricos y la identificación de patrones matemáticos. Integrar el cálculo mental en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es fundamental para potenciar el desarrollo de los estudiantes. Les brinda confianza en sus habilidades matemáticas y les permite enfrentar desafíos de manera autónoma y creativa [15]

La práctica del cálculo mental en el contexto educativo o en la cotidianidad, ayuda a fortalecer la mente y mejora considerablemente la productividad. Su uso constante, la implementación de técnicas mentales y el aprovechamiento de trucos matemáticos, son algunas de las estrategias que se pueden utilizar para mejorar la habilidad frente al cálculo mental.

Capítulo 3

Estrategias asociadas al cálculo mental

Como se había mencionado con anterioridad, el cálculo mental es un proceso mental o cognitivo, mediante el cual se realizan operaciones aritméticas con el fin de dar respuesta a una situación matemática y obtener un resultado exacto a partir de datos, también exactos. Por tal razón, con miras a fortalecer y a ejercitar esta actividad intelectual, a continuación se brinda al lector una recopilación de algunas técnicas y estrategias que son útiles a la hora de desarrollar el cálculo mental.

En esta sección se podrán encontrar elementos como:

- Estrategias básicas.
- Propiedades de las operaciones básicas en los números naturales.
- Cálculos vinculados a las propiedades de las operaciones básicas.
- Elementos adicionales del cálculo mental.

3.1. Estrategias básicas

Estas estrategias se destacan por su carácter intuitivo lo que favorece su apropiación por parte del lector. Las mencionadas técnicas abarcan las operaciones básicas en el conjunto de los Números Naturales, además, se sustentan en las respectivas propiedades de dichas operaciones, es por eso que las demostraciones que se enuncian de algunas de ellas, se relacionan directamente con este contenido.

Estrategia de los consecutivos

Cuando se suman 2 números consecutivos, se multiplica por 2 el número menor y se le suma 1.

Ejemplo:
Calcular $32 + 33$
Solución: 65

$$\begin{aligned} 32 + 33 &= \boxed{(2 \times 32)} + \textcircled{1} \\ &= 64 + 1 \\ &= 65 \end{aligned}$$

Figura 3.1: *Ejemplo de la estrategia de los consecutivos.*

Demostración. Sea a un número y $a+1$ su consecutivo, de tal manera que $a < a+1$. Mostremos que:

$$\boxed{a + (a+1) = 2a + 1.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + (a+1) &= a + a + 1 \\ &= (a + a) + 1 \\ &= 2a + 1, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia del número misterioso

Para sumar 2 números cuya diferencia sea 2, en medio de los cuales exista un número intermedio, se procede a multiplicar por 2 dicha cifra.

Ejemplo:
Calcular $17 + 19$
Solución: 36

$$17 + 19 = \boxed{(2 \times 18)}$$

$$= 36$$

Figura 3.2: *Ejemplo de la estrategia del número misterioso.*

Demostración. Sean a y b dos números cuya diferencia es 2, y sea c su número intermedio. Mostremos que:

$$\boxed{a + b = 2c.}$$

Como alguno entre los números a y b es más grande que el otro, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b$. Como c es el número intermedio entre a y b, entonces:

$$c = a + 1 \tag{3.1}$$

y

$$c = b - 1. \tag{3.2}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} a + b &= c - 1 + b \quad \text{(de (3.1))} \\ &= c - 1 + c + 1 \quad \text{(de (3.2))} \\ &= 2c, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia del nueve

Para sumar 9 a cualquier número, se le suma 10 y se le resta 1.

Ejemplo:
Calcular $13 + 9$
Solución: 22

$$\begin{aligned} 13 + 9 &= \boxed{(13 + 10)} - \textcircled{1} \\ &= 23 - 1 \\ &= 22 \end{aligned}$$

Figura 3.3: *Ejemplo de la estrategia de la suma del 9.*

Demostración. Sea a cualquier número. Mostremos que:

$$\boxed{a + 9 = (a + 10) - 1.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + 9 &= a + (10 - 1) \\ &= (a + 10) - 1, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia de la familia del 10

Cuando se suman varios números y algunos de ellos dan como resultado 10 o cualquiera de sus múltiplos, se agrupan con tal de resumir los cálculos.

Ejemplo:
Calcular $7 + 4 + 3 + 6 + 2 + 5 + 1 + 9$
Solución: 37

$$\begin{aligned} 7 + 4 + 3 + 6 + 2 + 5 + 1 + 9 &= \boxed{(7+3)} + \boxed{(4+6)} + \boxed{(9+1)} + 2 + 5 \\ &= \boxed{10} + \boxed{10} + \boxed{10} + 7 \\ &= 30 + 7 \\ &= 37 \end{aligned}$$

Figura 3.4: *Ejemplo de la estrategia de la familia del 10.*

Estrategia de la multiplicación por 9

Para multiplicar un número por 9, se multiplica por 10 y se le resta el mismo número.

Ejemplo:
Calcular 14×9
Solución: 126

$$\begin{aligned} 14 \text{ x } 9 &= \boxed{(14 \text{ x } 10)} - \boxed{14} \\ &= 140 - 14 \\ &= 126 \end{aligned}$$

Figura 3.5: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 9.*

Demostración. Sea a cualquier número. Mostremos que:

$$\boxed{9a = 10a - a.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 9a &= (10-1)a \\ &= 10a - a, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia de la multiplicación por 99

Para multiplicar un número por 99, se multiplica por 100 y se le resta el mismo número.

Ejemplo:
Calcular 23×99
Solución: 2277

$$\begin{aligned} 23 \text{ x } 99 &= \boxed{(23 \text{ x } 100)} - \boxed{23} \\ &= 2300 - 23 \\ &= 2277 \end{aligned}$$

Figura 3.6: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 99.*

Demostración. Sea a cualquier número. Mostremos que:

$$\boxed{99a = 100a - a.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 99a &= (100 - 1)a \\ &= 100a - a, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia de la multiplicación por 5

Para multiplicar un número por 5, se multiplica por 10 y se divide por 2.

Ejemplo:
Calcular 36×5
Solución: 180

$$\begin{aligned} 36 \text{ x } 5 &= \frac{(36 \text{ x } 10)}{2} \\ &= \frac{360}{2} \\ &= 180 \end{aligned}$$

Figura 3.7: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 5.*

Demostración. Sea a cualquier número. Mostremos que:

$$\boxed{5a = \frac{10a}{2}.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 5a &= \left(\frac{10}{2}\right) a \\ &= \frac{10a}{2}, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia de la multiplicación por 15

Para multiplicar un número por 15, se multiplica por 10 y después se suma la mitad del número que se obtuvo.

Ejemplo:
Calcular 22×15
Solución: 330

$$\begin{aligned} 22 \text{ x } 15 &= \boxed{(22 \text{ x } 10)} + \boxed{\underline{\underline{(22 \text{ x } 10)}}} \\ &= 220 + \frac{220}{2} \\ &= 220 + 110 \\ &= 330 \end{aligned}$$

Figura 3.8: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 15.*

Demostración. Sea a cualquier número. Mostremos que:

$$\boxed{15a = 10a + \frac{10a}{2}.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} 15a &= (10+5)a \\ &= \left(10 + \frac{10}{2}\right) a \\ &= 10a + \frac{10a}{2}, \end{aligned}$$

lo cual completa la demostración. ■

Estrategia de la multiplicación de un número de dos cifras por 11

Inicialmente se suman los dos dígitos del número que se quiere multiplicar por 11, según el valor obtenido, la estrategia se divide en dos casos.

Caso 1: Si la suma es menor que 10, se escribe el resultado en medio de los dos dígitos.

Caso 2: Si la suma es mayor o igual que 10, se escribe las unidades de la suma en medio de los dos dígitos y luego se adiciona 1 al dígito correspondiente a las decenas.

Ejemplo (caso 1):
Calcular 43×11
Solución: 473

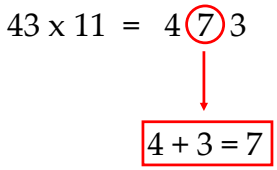


Figura 3.9: *Ejemplo del caso 1 de la estrategia de la multiplicación de un número de dos cifras por 11.*

Ejemplo (caso 2):
Calcular 84×11
Solución: 924

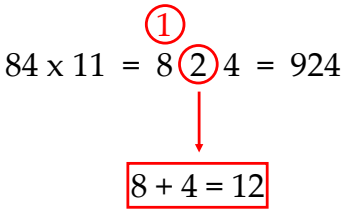


Figura 3.10: *Ejemplo del caso 2 de la estrategia de la multiplicación de un número de dos cifras por 11.*

3.2. Propiedades de las operaciones básicas

Dado que se ha tomado como punto de referencia dentro de este módulo de profundización al conjunto de los números naturales, resulta necesario en el siguiente apartado, hacer énfasis en las propiedades de las operaciones básicas en este conjunto numérico, ya que es por medio de ellas que se sustentan las anteriores estrategias y técnicas de cálculo mental.

3.2.1. Propiedades de la suma

La adición de números naturales posee varias propiedades importantes que simplifican los cálculos. Algunas de las más relevantes son:

Propiedad conmutativa

Sean a y b números naturales, entonces:

$$a + b = b + a$$

Ejemplo:

$$4 + 3 = 3 + 4$$
$$7 = 7$$

Propiedad asociativa

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Ejemplo:

$$(6 + 4) + 1 = 6 + (4 + 1)$$
$$10 + 1 = 6 + 5$$
$$11 = 11$$

Elemento neutro

Sea a un número natural y 0 el elemento neutro para la suma, entonces:

$$a + 0 = a$$

Ejemplo:

$$12 + 0 = 12$$

3.2.2. Propiedades de la resta

La resta es otra operación fundamental, aunque a diferencia de la suma, tiene sus particularidades. Esta operación consiste en encontrar la diferencia entre dos números.

No es conmutativa

Sean a y b números naturales, entonces:

$$a - b \neq b - a$$

Ejemplo:

$$5 - 2 \neq 2 - 5$$
$$3 \neq -3$$

No es asociativa

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Ejemplo:

$$(5 - 3) - 1 \neq 5 - (3 - 1)$$
$$2 - 1 \neq 5 - 2$$
$$1 \neq 3$$

Elemento neutro

Sea a un número natural y 0 el elemento neutro para la resta, entonces:

$$a - 0 = a$$

Ejemplo:

$$6 - 0 = 6$$

3.2.3. Propiedades de la multiplicación

La multiplicación es una operación que relaciona dos números denominados factores, para producir un tercer número llamado producto. Es una operación fundamental que se utiliza en muchos contextos.

Propiedad conmutativa

Sean a y b números naturales, entonces:

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo:

$$5 \times 4 = 4 \times 5$$
$$20 = 20$$

Propiedad asociativa

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

Ejemplo:

$$(3 \times 5) \times 2 = 3 \times (5 \times 2)$$
$$15 \times 2 = 3 \times 10$$
$$30 = 30$$

Elemento neutro

Sea a un número natural y 1 el elemento neutro para la multiplicación, entonces:

$$a \times 1 = a$$

Ejemplo:

$$9 \times 1 = 9$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3 \times (2 + 3) &= (3 \times 2) + (3 \times 3) \\ 3 \times 5 &= 6 + 9 \\ 15 &= 15 \end{aligned}$$

Propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la resta

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$a \times (b - c) = (a \times b) - (a \times c)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 6 \times (4 - 1) &= (6 \times 4) - (6 \times 1) \\ 6 \times 3 &= 24 - 6 \\ 18 &= 18 \end{aligned}$$

3.2.4. Propiedades de la división

La división es la operación que nos permite repartir un número, llamado dividendo, entre otro que se conoce como divisor. El resultado de esta operación se denomina cociente.

No es conmutativa

Sean a y b números naturales, entonces:

$$a \div b \neq b \div a$$

Ejemplo:

$$12 \div 3 \neq 3 \div 12$$
$$4 \neq 1/4$$

No es asociativa

Sean a, b y c números naturales, entonces:

$$(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$$

Ejemplo:

$$(12 \div 4) \div 3 \neq 12 \div (4 \div 3)$$
$$3 \div 3 \neq 12 \div 4/3$$
$$1 \neq 9$$

Elemento neutro

Sea a un número natural y 1 el elemento neutro para la división, entonces:

$$a \div 1 = a$$

Ejemplo:

$$8 \div 1 = 8$$

3.3. Cálculos vinculados a las propiedades de las operaciones

Aunque las técnicas y estrategias del cálculo mental que han sido enunciadas con anterioridad, se constituyen como un material de apoyo para realizar diferentes operaciones, las propiedades de las operaciones básicas que han sido expuestas, son consideradas en sí mismas como alternativas eficaces para realizar dichos cálculos, tal y como se muestra enseguida.

Ejemplo 1:
Calcular 12×15
Solución: 180

Esta operación puede ser abordada por medio de la estrategia de multiplicación por 15, técnica que ya fue enunciada, pero adicional a esto, puede ser solucionada por medio de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición, entre otros elementos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 12 \times 15 &= 12 \times (10 + 5) \\ &= (12 \times 10) + (12 \times 5) \\ &= 120 + 60 \\ &= 180 \end{aligned}$$

Ejemplo 2:
Calcular 13×17
Solución: 221

Al igual que en el caso anterior se puede hacer uso de la propiedad distributiva de la multiplicación, pero en esta ocasión respecto a la resta, tal como se muestra:

$$\begin{aligned} 13 \times 17 &= 13 \times (20 - 3) \\ &= (13 \times 20) - (13 \times 3) \\ &= 260 - 39 \\ &= 221 \end{aligned}$$

Ejemplo 3:
Calcular $6 + 2 + 4 + 8 + 5$
Solución: 25

Este procedimiento puede ser abordado mediante la estrategia de la familia del 10, proceso que se relaciona directamente con la propiedad asociativa de la adición, así:

$$\begin{aligned} 6+2+4+8+5 &= (6+4)+(2+8)+5 \\ &= 10+10+5 \\ &= 25 \end{aligned}$$

Ejemplo 4:
Calcular $(21)^2$
Solución: 441

El valor de esta potencia se podría interpretar como 21×21, pero dicho producto tal vez no pueda ser resuelto por el lector con mucha facilidad, dado que las estrategias sugeridas no comprenden las cantidades vinculadas, sin embargo, el número 21 se puede escribir como una suma de dos cantidades, hecho que podría ser de utilidad en compañía de la definición algebraica del cuadrado de la suma de dos términos, esto equivale a: *el cuadrado del primer término, más el doble del producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo.* Simbólicamente:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Utilizando lo que se ha enunciado en el tratamiento de la operación se tiene que:

$$\begin{aligned} (21)^2 &= (20+1)^2 \\ &= (20)^2 + 2(20)(1) + (1)^2 \\ &= 400 + 40 + 1 \\ &= 441 \end{aligned}$$

La implementación de esta alternativa resolutiva tiene como finalidad la simplificación de los procedimientos de cálculo.

Ejemplo 5:
Calcular $(17)^2$
Solución: 289

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, el número 17 se puede escribir en esta ocasión como la diferencia entre dos cantidades, por lo tanto, de manera conveniente se puede hacer uso de la definición algebraica del cuadrado de la diferencia de dos términos, esto equivale a: *el cuadrado del primer término, menos el doble del producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo.* Simbólicamente:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Aplicando lo que se ha dicho en la resolución de la operación se tiene que:

$$\begin{aligned}(17)^2 &= (20-3)^2 \\ &= (20)^2 - 2(20)(3) + (3)^2 \\ &= 400 - 120 + 9 \\ &= 289\end{aligned}$$

3.4. Elementos adicionales del cálculo mental

Las estrategias y técnicas que ya se han ejemplificado, son elementos fundamentales en procura de la apropiación del concepto de cálculo mental, pero hay que resaltar que este, no solo se limita a las operaciones básicas como sumar, restar, multiplicar y dividir, también incluye habilidades como la estimación, la descomposición de números, la resolución de problemas numéricos y la identificación de patrones matemáticos.

A continuación se abordarán algunas situaciones en las cuales se requiere la implementación de aquellos elementos adicionales del cálculo mental que han ampliado su definición.

3.4.1. Identificación de patrones

Hablar de patrones es referirse a las regularidades, las cuales están en todas partes y poder encontrarlas es una habilidad esencial. Con observar alrededor es posible reconocer conjuntos de elementos que están dispuestos de una determinada manera, siguiendo una regla [17]

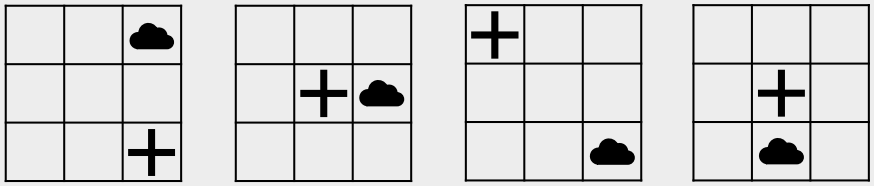
Los principales tipos de patrones que se utilizan en problemas de matemáticas son: patrones de movimiento, de repetición y recurrencia, además de las operaciones no convencionales.

Patrones de movimiento

Son aquellos en los que se requiere determinar la posición que ocuparán uno o varios elementos en una cuadrícula o en un espacio del que se pueda obtener una medida. Para encontrar estos patrones, se debe analizar para cada uno de ellos el tamaño de los movimientos y el sentido de los mismos en relación con la secuencia que se presente. [17]

Ejemplo:

Dada la siguiente secuencia:



De las siguientes imágenes:

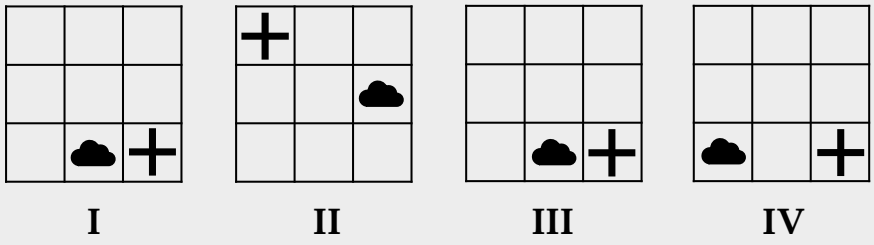


Figura 3.11: *Ejemplo de identificación de patrones de movimiento.*

La que continúa con la secuencia es:

a) I *b)* II *c)* III *d)* IV

Inicialmente se analiza el tamaño de los movimiento de cada uno de los elementos.

- La cruz: desde la esquina inferior derecha se aprecia que se mueve una unidad en cada momento de la secuencia.
- La nube: desde la esquina superior derecha se observa a lo largo de la sucesión, que el tamaño de cada movimiento es de una unidad.

Seguido a esto, se realiza un estudio sobre el sentido u orientación de los movimientos.

- La cruz: se desplaza a lo largo de la diagonal de la cuadrícula en la cual estaba inicialmente el elemento, cuando llega al final de esta, retrocede sin cambiar de dirección.
- La nube: Desde su posición inicial avanza en el mismo sentido de las manecillas del reloj, cuando llega a las esquinas, gira siguiendo la misma dirección.

En el componente que sigue de la secuencia, ambos elementos (cruz y nube), se deben comportar según los parámetros que se han detectado, así que, para encontrar la solución, se debe verificar su cumplimiento en las opciones de respuesta.

Se descarta la opción II porque ambas imágenes ocupan posiciones incorrectas, mientras que en las opciones I, III y IV, la cruz ocupa el lugar correcto, basta con validar la posición que debe ocupar la nube, concluyéndose que la respuesta es la situación IV indicada en la opción d.

A partir del ejemplo anterior, es pertinente plantear la siguiente situación:

Considere las siguientes imágenes:

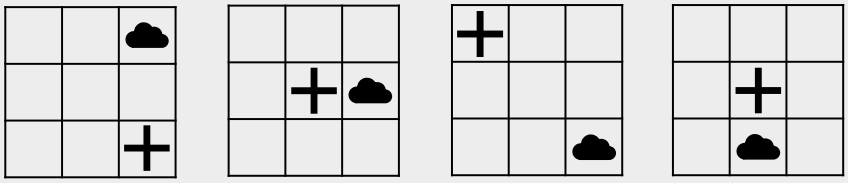


Figura 3.12: *Ejemplo de identificación de patrones de movimiento y predicción.*

Según el orden de la secuencia ¿Cuál es el primer momento en el que las dos imágenes ocupan la misma posición en la cuadricula?

a) Momento 5 *b)* Momento 7 *c)* Momento 9 *d)* Momento 10

Según el patrón de movimiento ya identificado es sencillo realizar la predicción del primer momento en el que los símbolos se encuentren en una misma posición, basta con reproducir la regularidad que presentan la cruz y la nube a partir de la secuencia sugerida, según esto, en el momento 5 la cruz estará en la esquina inferior derecha, mientras que la nube permanecerá en la esquina inferior izquierda. En el momento 6 la cruz se ubicará justo en la mitad y la nube estará en la casilla que queda a su izquierda, por lo que en el momento 7, ambas coincidirán en la esquina superior izquierda.La opción de respuesta que es correcta es la b.

Es importante tener en cuenta que la pregunta indaga por *el primer momento* en el que las imágenes coinciden de lugar, dicha distinción es muy importante ya que son infinitos los momentos en los que esto ocurre.

Patrones de operaciones no convencionales

En los problemas en los que se involucran este tipo de patrones, se debe determinar cuál es la operación o conjunto de operaciones que hacen posible la obtención de un resultado a partir de unos valores iniciales. Con frecuencia los ejercicios de este tipo se presentan por medio de tablas o a manera de listado, en todo caso, no existe una regla general para encontrar la regularidad que define a estos procedimientos. La observación y la capacidad de abstracción son fundamentales como elementos resolutivos. [17]

Ejemplo:

La operación denotada por ♣ está definida para enteros positivos. La siguiente tabla muestra el resultado de la operación para algunos enteros; por ejemplo, $5♣3 = 4$:

♣	1	2	3
4	5	4	3
5	6	5	4
10	11	10	9

El resultado de $12♣4$ es:

a) 18 *b)* 10 *c)* 8 *d)* 6

La información suministrada en la tabla sirve como punto de partida para encontrar el patrón que define a la operación ♣. Se puede empezar del hecho que $4♣1 = 5$, aquí lo importante es deducir qué operación u operaciones en las que se involucren el 4 y el 1, dan como resultado 5.

Una adición, una diferencia, un producto y una división, no arrojan el resultado indicado, lo que quiere decir, que en ♣ deben intervenir más de una de ellas. Nótese también que $4♣2 = 4$, $5♣2 = 5$ y $10♣2 = 10$, lo que implica que el primer término se mantiene invariante ante el 2, cantidad que tiene mucho que ver con la regularidad que define la operación. Con base esto, y después de varios razonamientos, se puede concluir que $a♣b = (a - b) + 2$. Es recomendable validar que el patrón encontrado se cumpla para los datos suministrados en el ejercicio.

Finalmente, $12♣4 = (12 - 4) + 2 = 10$, por lo que la solución de la operación indicada es la opción de respuesta b.

Ejemplo:

Según las siguientes expresiones, ¿cuál es el número que falta?

$25 = 75$

$13 = 43$

$62 = 82$

$81 = ?$

Esta situación hace referencia a una operación desconocida no explícita y que se manifiesta a través de una lista. Una de las primeras regularidades que se puede identificar es que en todos los resultados se conserva a la derecha el dígito de las unidades de las cantidades iniciales, lo cual es determinante. Por otro lado, se cumple también que al sumar el dígito de las unidades, con el dígito de las decenas de los números de la izquierda, se obtiene como resultado la cifra que es escribe en las decenas de los valores de la derecha. En consecuencia, se puede afirmar que $81 = 91$.

Patrones de repetición

En este tipo, los distintos elementos de una secuencia son presentados en forma periódica, por lo que es necesario visualizar la cantidad de componentes que se están repitiendo y la forma en que lo hacen. [17]

Ejemplo:

En la siguiente secuencia numérica: $1, 5, 5, 3, 0, 0, 0, 4, 1, 5, 5, 3, 0, 0, ?$

La cifra que mejor se ubica en la posición marcada con el símbolo ? es:

a) 4 *b)* 1 *c)* 0 *d)* 5

Como primera medida se debe analizar el periodo de cada cantidad, esto es, el número de repeticiones que presentan hasta completar un ciclo, es decir, hasta que inicia de nuevo la secuencia. Se puede apreciar en el ejemplo que el número 1 se repite una vez, el 5 dos veces, el 3 una vez, el 0 tres veces y el 4 una vez. Se concluye que, según lo mostrado al final de la sucesión, después de haber aparecido dos ceros, la posición que lleva el símbolo ? debe ser ocupada por el 0, ya que este se repite tres veces en cada ciclo. Por tanto, la opción c es la respuesta correcta.

Patrones de recurrencia

Son aquellos en los que la regularidad con que se presentan los elementos cambia y de ellos tiene que inferirse su regla de formación, es decir, que se puede descubrir cuál será el siguiente elemento observando el comportamiento de los anteriores [17]

Ejemplo:

En la siguiente secuencia alfabética: $d, e, f, x, g, h, i, x, j, k, l, x, m, ?$

La letra que mejor se ubica en la posición marcada con el símbolo ? es:

a) n *b)* x *c)* o *d)* p

Dada la estructura de este tipo de secuencias, se debe identificar de manera primaria, la o las letras que se repiten y que dividen a la sucesión en subgrupos, claramente se identifica a la x como el único elemento que se repite, dejando a lado y lado grupos de tres letras que están escritas en orden alfabético, estos son: d, e, f; g, h, i y j, k, l.

Justo al final de la disposición de términos, se inicia una nueva agrupación que debe estar conformada por tres letras organizadas alfabéticamente y que inicia con m, por lo que se concluye que la posición marcada con el símbolo ? debe ser ocupada por la letra n. Esto indica que la respuesta al interrogante es la opción a.

Es importante mencionar que en los problemas de patrones de recurrencia el objetivo es encontrar la regla de formación, lo cierto es que pueden haber dos o más reglas distintas que son consistentes con la información preliminar presentada, pero que anticipan resultados posteriores distintos.

Por ejemplo, en la secuencia

$$1, 2, 3, 4, ...$$

se podría anticipar que el siguiente elemento es 5, lo cual es válido si la regla de formación fuera sumar 1 al resultado inmediatamente anterior.

No obstante, también sería correcto afirmar que el siguiente elemento es 29 ya que los números de la secuencia también provienen de la expresión:

$$n^4 - 10n^3 + 35n^2 - 49n + 24$$

cuando se reemplaza n por $1, 2, 3$ y 4.

En este tipo de situación se sugiere al lector señirse a una regla de formación que arroje un resultado que haga parte de las opciones de respuesta del problema, no porque su análisis sea incorrecto, sino debido a que las sugerencias de solución de esta temática en particular, han sido construidas a partir de la regla de formación que se encuentra con mayor facilidad, situación que favorece la apropiación de los ejemplos y la posterior realización de las actividades sugeridas como práctica.

3.4.2. Implementación de ecuaciones en la resolución de problemas

Situaciones que involucran balanzas

Se pueden afrontar de diferentes maneras según el razonamiento que haga cada persona, una estrategia válida es la implementación de ecuaciones a partir de los objetos que se muestran en ellas y que conservan el equilibrio de las mismas, manteniendo la igualdad.

Ejemplo:

Las balanzas superior y central, mostradas en la figura, están en equilibrio. Los cuerpos de la misma forma y color tienen el mismo peso.

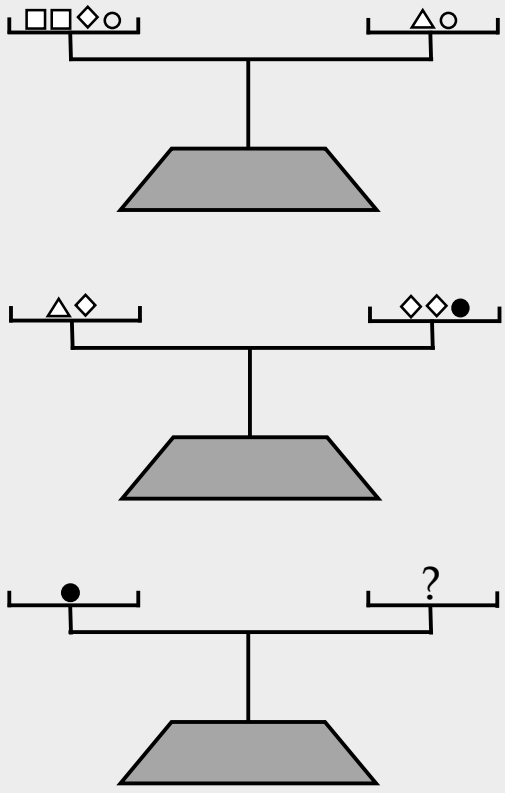


Figura 3.13: *Ejemplo de problemas en los que intervienen balanzas.*

El (los) elemento(s) que debe(n) colocarse en la balanza inferior en el platillo marcado con (?) para obtener equilibrio es (son):

a) □ *b)* □□ *c)* △◇ *d)* ◇○

Cuando se quiere solucionar la situación anterior por medio de ecuaciones se debe asignar a cada uno de los elementos que intervienen un símbolo, así:

$$\bullet = a$$
$$\circ = b$$
$$\square = c$$
$$\triangle = d$$
$$\diamond = e$$

Por lo anterior y por lo mostrado en la imagen, el problema se reduce a encontrar el valor de a.

Por cada una de las balanzas se debe construir una ecuación que represente lo que allí se indica por medio de los símbolos que se han designado.

Balanza 1:

$$2c + e + b = d + b \tag{3.3}$$

Esta expresión se puede simplificar de la siguiente manera:

$$2c + e + \cancel{b} = d + \cancel{b}$$

$$d = 2c + e \tag{3.4}$$

Balanza 2:

$$d + e = 2e + a \tag{3.5}$$

Reemplazando 3.4 en 3.5 se tiene que:

$$2c + e + e = 2e + a$$

$$2c + 2e = 2e + a$$

$$2c + \cancel{2e} = \cancel{2e} + a$$

$$a = 2c \tag{3.6}$$

Lo anterior es equivalente con $\bullet = \square\square$ concluyéndose de esta manera que la opción de respuesta correcta es la b.

Situaciones que involucran esquemas

Cuando en este tipo de problemas se vinculan dos elementos, los cuales se relacionan entre si en diferentes momentos, es necesaria la construcción de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, que al ser resuelto, una de las variables se anula, dando la posibilidad de encontrar inicialmente el valor de la otra.

Ejemplo:

¿Cuál es la altura del muro?

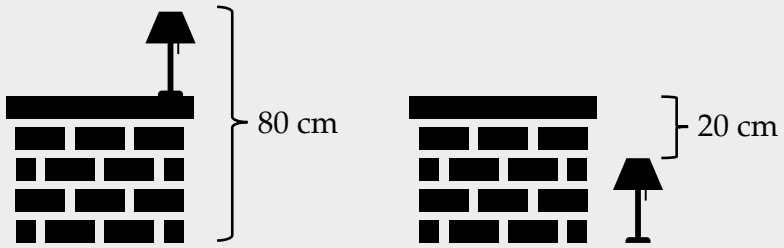


Figura 3.14: *Ejemplo de problemas en los que intervienen esquemas.*

a) 50 cm. *b)* 100 cm. *c)* 30 cm *d)* 20 cm

Los dos elementos que hacen parte de la situación son el muro y la lámpara, por tanto, se designan variables que las representen.

Sea x la altura del muro y y la altura de la lámpara. Lo que se solicita en el problema es encontrar el valor de x.

Una estrategia de solución es la construcción de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a partir de lo que ocurre en las imágenes, de la siguiente manera:

Imagen 1: cuando la lámpara está encima del muro.

$$x + y = 80 \tag{3.7}$$

Imagen 2: cuando la lámpara está en el suelo al mismo nivel del muro.

$$x - y = 20 \tag{3.8}$$

El sistema conformado por 3.7 y 3.8 se puede resolver como se indica:

$$\begin{array}{r} x + \cancel{y} = 80 \\ x - \cancel{y} = 20 \\ \hline 2x = 100 \\ x = 50 \end{array}$$

Con lo que se puede afirmar que la altura del muro es 50 cm, así que la respuesta correcta es la opción a.

Si el interrogante hubiera sido la altura de la lámpara, es decir y, bastaría con reemplazar el valor obtenido $x = 50$ en 3.7 o en 3.8 para hallar así el valor de la incógnita.

Capítulo 4

Estrategias del método Trachtenberg

El desaparecido matemático ruso Jakow Trachtenberg, fundador del Instituto de Matemática de Zurich y creador del asombroso método aritmético que lleva su nombre, sustenta la opinión que "toda persona nace con excepcionales dones naturales para el cálculo". [5]

El sistema Trachtenberg no es solamente un método rápido sino que es además muy simple, una vez que se dominan sus reglas el calcular es fácil y veloz. Las reglas del método se basan exclusivamente en sentido común y lógica. [5]

Este brillante ingeniero, poseedor de una mente vivaz creó este sistema de matemáticas simplificadas durante los largos años en que estuvo recluido como prisionero político en los campos de concentración del nazismo. Concebido trágicamente, este admirable trabajo no puede ser separado de la vida de su creador, pues es muy posible que si la vida del profesor Trachtenber hubiera transcurrido plácidamente, éste no hubiera concebido jamás su sistema que elimina la aridez tan frecuentemente asociada con la aritmética. En su cautiverio Trachtenberg creó un mundo para sí mismo, un mundo de lógica y orden, y mientras su cuerpo enflaquecía cada día más consumiéndose en el foco de pestilencia, destrucción y muerte, que lo rodeaba, su mente no se rendía y hacía desfilar hileras de números que a su mandato realizaban cálculos maravillosos. En sus momentos de tranquilidad, visualizaba mentalmente cantidades gigantescas de números para ser sumados y se obligaba a sí mismo a efectuar la operación y hallar el total. [5]

En este sistema no se usan las tablas de multiplicar, el único prerrequisito es saber contar. El método se basa en una serie de reglas o claves que deben ser memorizadas y una vez dominadas, la aritmética y sus operaciones se transforman en algo deliciosamente fácil. [5]

4.1. Definiciones preliminares

Nota: *En todas las estrategias de método Trachtenberg, para efectuar los cálculos, se agrega un cero al principio y al final del número* [5]

Vecino:

Si un número tiene varias cifras, el vecino es el dígito que se encuentra a la derecha de otro. En el caso de la cifra de las unidades, su vecino será el cero. Si un número tiene una sola cifra, su vecino también será el cero.

Por ejemplo, en el número 32185, el vecino del dígito 8 es el 5, y el vecino del dígito 5 es el 0.

En el caso de un número de un solo dígito como el 7, su vecino es el 0.

Mitad de un dígito:

La mitad de un dígito n, denotada por $mitad(n)$, es la división entera de n entre 2, es decir,

$$mitad(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par,} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Por ejemplo, $mitad(6) = \dfrac{6}{2} = 3$ y $mitad(9) = \dfrac{9-1}{2} = 4$.

Aplicando la definición anterior se tiene que:

$mitad(0) = 0$ $\quad$ $mitad(1) = 0$
$mitad(2) = 1$ $\quad$ $mitad(3) = 1$
$mitad(4) = 2$ $\quad$ $mitad(5) = 2$
$mitad(7) = 3$ $\quad$ $mitad(8) = 4$

4.2. Estrategias para multiplicar por 11 y 12

Estrategia para multiplicar por 11
El producto se obtiene sumando a cada digito su vecino, comenzando con el de las unidades. Si la suma es 10 o más se escribirá la cifra de las unidades y se "llevará" 1.

Ejemplo:
Calcular 17641×11
Solución: 194051

1)
$$\begin{array}{r} 0\,1\,7\,6\,4\,1\,0 \;\text{x}\; 11 \\ \hline \boxed{1} \end{array}$$

Figura 4.1: *Como punto de partida se agrega un 0 antes y después de la cifra que se desea multiplicar por 11, luego, se suma al dígito de las unidades su vecino que corresponde al 0, el resultado obtenido se escribe debajo de la línea horizontal.*

2)
$$\begin{array}{r} 0\,1\,7\,6\,4\,1\,0 \;\text{x}\; 11 \\ \hline \boxed{5}\,1 \end{array}$$

Figura 4.2: *Como el vecino del número 4 es el 1, se suman y el resultado se escribe en la parte inferior.*

3)
$$\begin{array}{r} \overset{\textcircled{1}}{} \\ 0\,1\,7\,\boxed{6}\,\boxed{4}\,1\,0 \;\text{x}\; 11 \\ \hline \boxed{0}\,5\,1 \end{array}$$

Figura 4.3: *La suma del 6 con su vecino 4 da como resultado 10, por lo que se escribe la cifra de las unidades, es decir 0 y se "lleva" 1, esta cantidad se encuentra indicada dentro del círculo.*

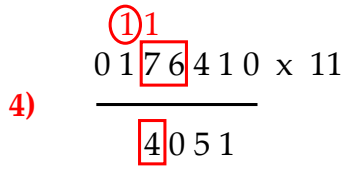


Figura 4.4: *Al sumar el 7 con su vecino 6 y con el 1 que se "llevaba" se obtiene como resultado 14, por lo que se escribe 4 y nuevamente se "lleva" 1.*

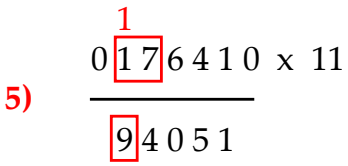


Figura 4.5: *La suma entre 1, su vecino 7 y el 1 que se "llevaba" da como resultado 9.*

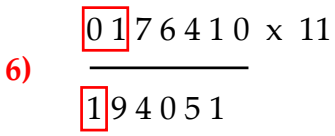


Figura 4.6: *El 0 y su vecino 1 se suman finalmente para completar el resultado de la operación.*

Estrategia para multiplicar por 12
De derecha a izquierda se duplica cada dígito del multiplicando y al resultado obtenido se le suma el vecino del respectivo dígito. Se "lleva" si la suma pasa de 10.

Ejemplo:
Calcular 32462×12
Solución: 389544



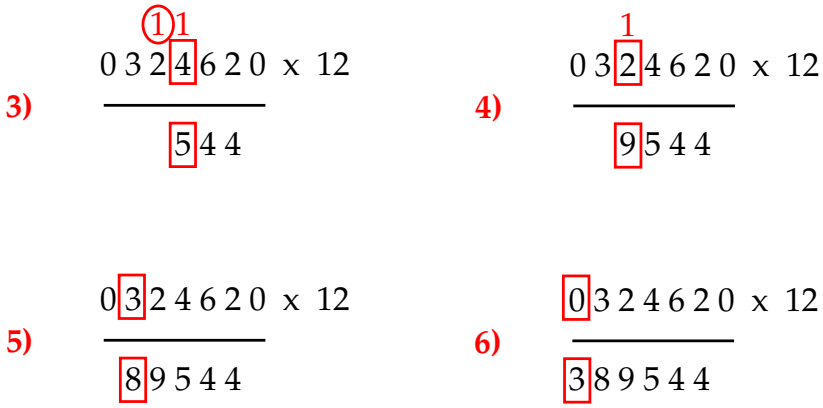
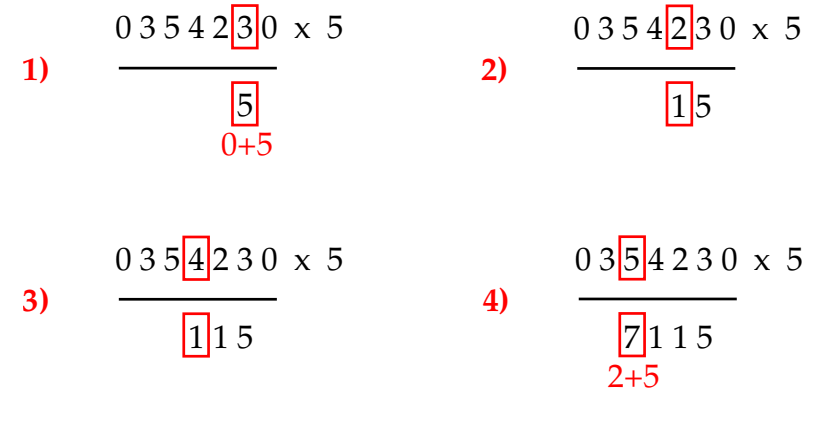


Figura 4.7: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 12.*

4.3. Estrategias para multiplicar por 5 y 6

Estrategia para multiplicar por 5
Si el dígito es par escribir debajo de él la mitad de su vecino; mientras que si el dígito es impar, escribir la suma entre 5 y la mitad de su vecino.

Ejemplo:
Calcular 35423×5
Solución: 177115



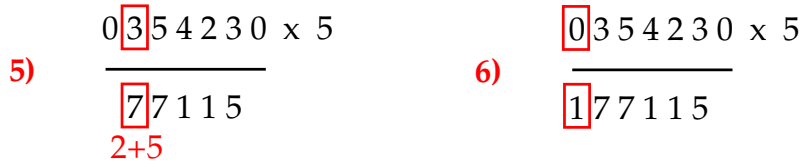


Figura 4.8: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 5.*

Estrategia para multiplicar por 6
Sumar a cada dígito par la mitad del vecino; y sumar a cada dígito impar el resultado de la suma entre 5 y la mitad del vecino.

Ejemplo:
Calcular 43052×6
Solución: 258312

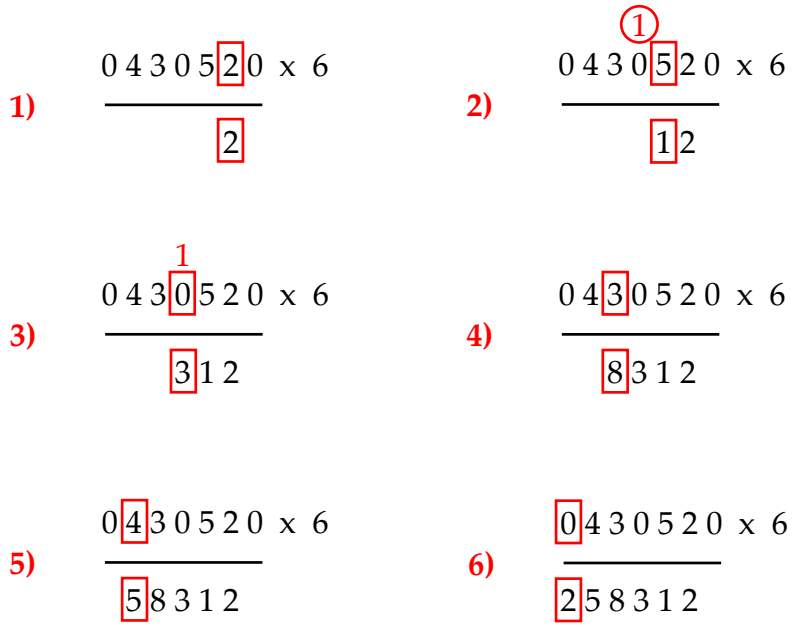


Figura 4.9: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 6.*

4.4. Estrategias para multiplicar por 7, 8 y 9

Estrategia para multiplicar por 7
Si el dígito es par duplicarlo y sumarle al resultado la mitad del vecino, cuando el dígito sea impar, realizar la suma entre 5, su duplo y la mitad de su vecino.

Ejemplo:
Calcular 36108×7
Solución: 252756

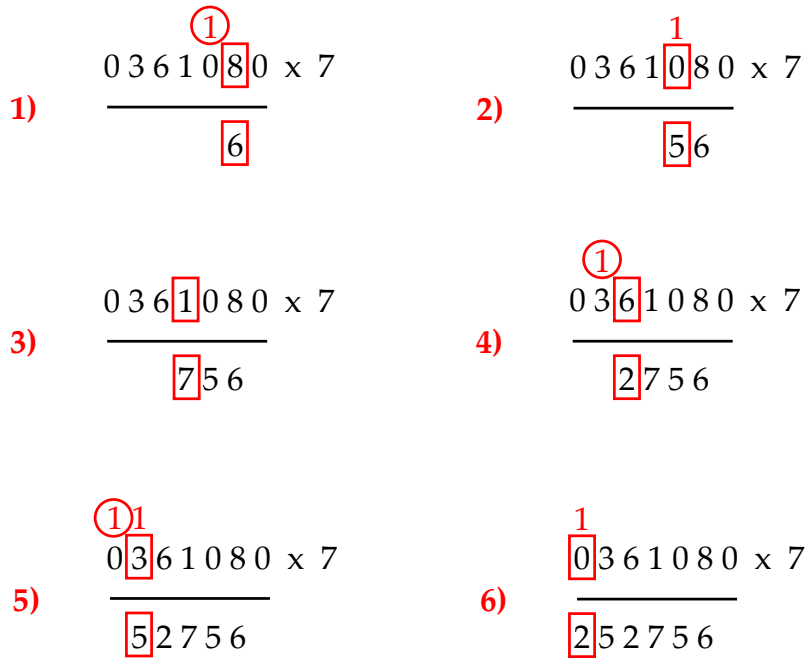


Figura 4.10: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 7.*

Estrategia para multiplicar por 8

1. La cifra de las unidades del resultado se obtiene restando de 10 el primer dígito del número dado, luego se duplica el resultado obtenido.

2. A continuación, y en forma sucesiva, cada uno de los dígitos se restan de 9, se duplica el valor obtenido y se suma con el vecino del dígito.

Estrategia para multiplicar por 8

3. Finalmente, al llegar al cero del multiplicando, se resta 2 del vecino y se coloca el resultado debajo del cero.

Ejemplo:
Calcular 54326×8
Solución: 434608

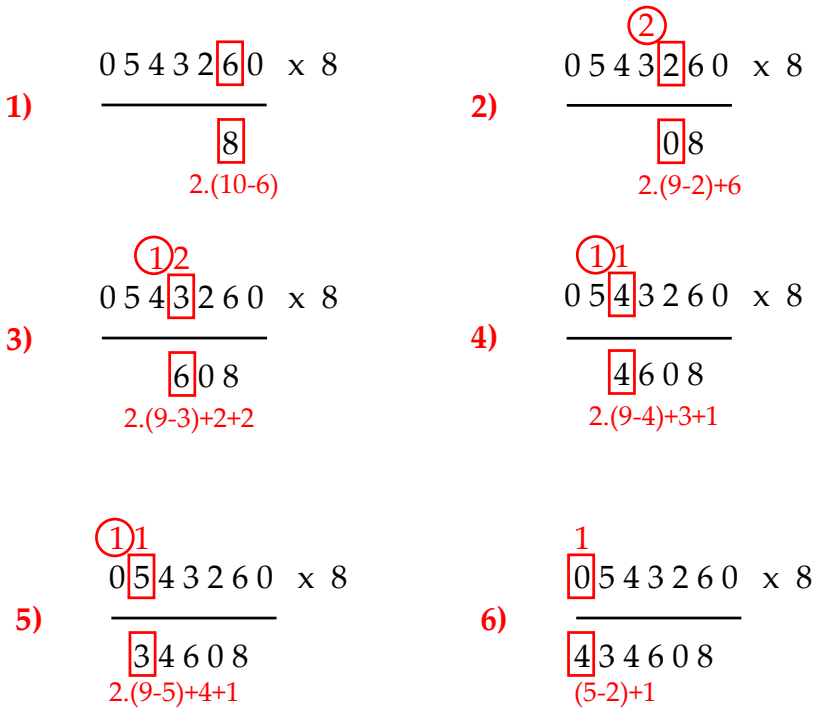


Figura 4.11: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 8.*

Estrategia para multiplicar por 9

1. La cifra de las unidades del resultado se obtiene restando de 10 la cifra de las unidades del número dado.

2. A continuación, y en forma sucesiva, cada uno de los dígitos se restan de 9 y se le suma el vecino de cada uno de ellos.

Estrategia para multiplicar por 9

3. Como último paso, al llegar al cero del multiplicando, se resta 1 del vecino y se coloca el resultado debajo del cero.

Ejemplo:
Calcular 87698×9
Solución: 789282

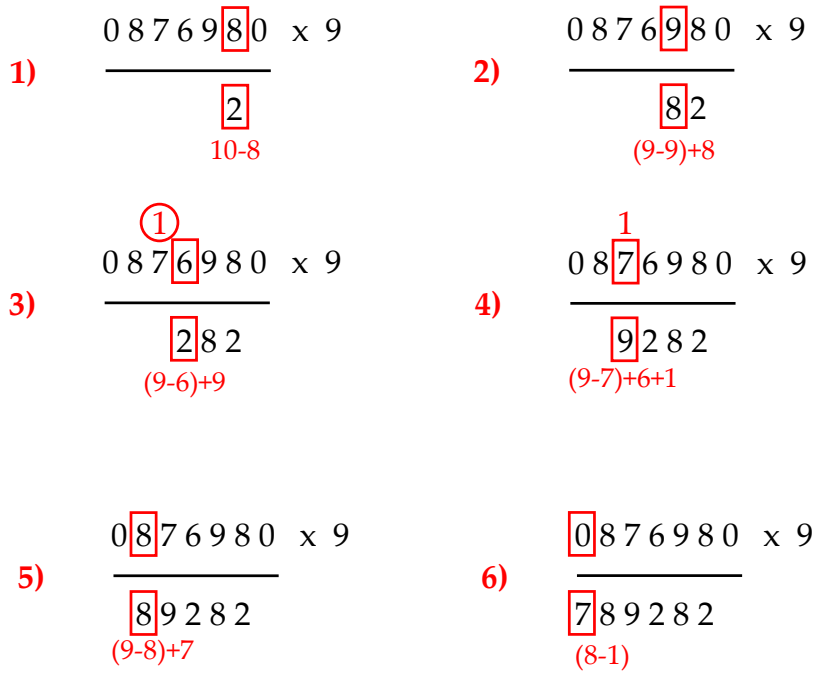


Figura 4.12: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 9.*

4.5. Estrategias para multiplicar por 2, 3 y 4

Estrategia para multiplicar por 2
Multiplicar por 2 el dígito correspondiente, iniciando con el que está ubicado en la posición de las unidades.

Ejemplo:
Calcular 461495×2
Solución: 922990

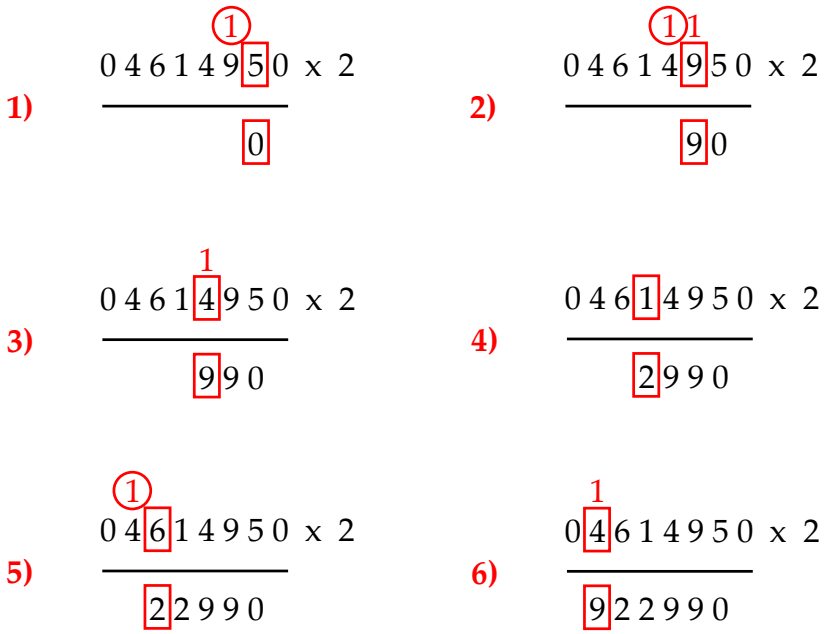


Figura 4.13: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 2.*

Estrategia para multiplicar por 3

1. Si el dígito de las unidades del número dado es par, restarlo de 10 y duplicar el resultado; si es impar, restarlo de 10, duplicar lo obtenido y sumar 5.
2. Para los dígitos intermedios, restar cada dígito del multiplicando de 9, duplicar lo obtenido y sumarle la mitad del vecino en el caso que el dígito sea par; si es impar, restarlo de 9, duplicar el resultado, y sumarlo con el valor de la adición entre 5 y la mitad del vecino.
3. Para finalizar, al llegar al cero del multiplicando, se realiza la diferencia entre la mitad del vecino y el 2.

Ejemplo:
Calcular 25883×3
Solución: 77649

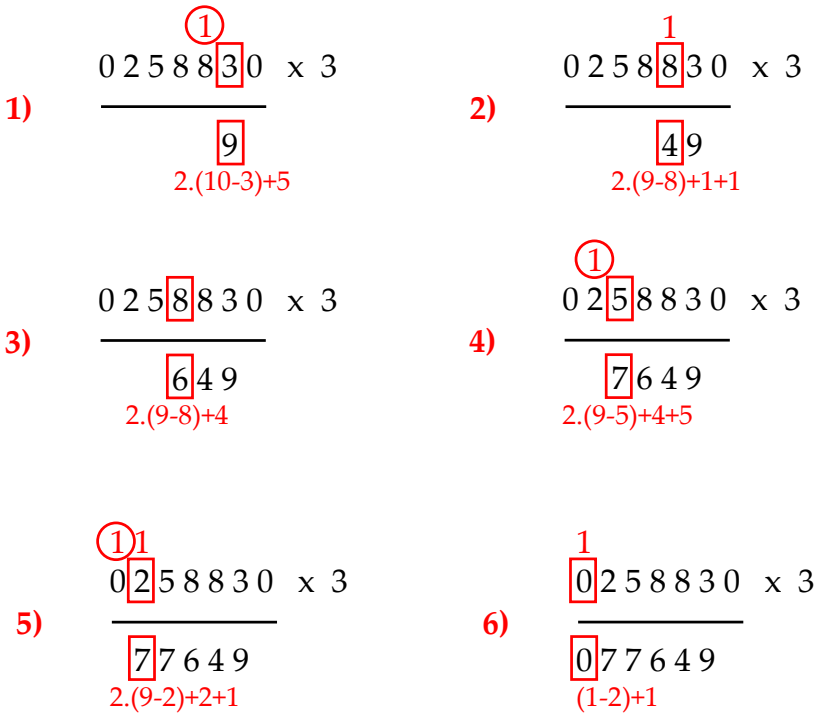


Figura 4.14: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 3.*

Estrategia para multiplicar por 4

1. Si el dígito ubicado en el lugar de las unidades del número dado es par, restarlo de 10; y en el caso que sea impar, restarlo de 10 y sumar 5 al resultado.
2. Después, de forma sucesiva, restar cada dígito del multiplicando de 9 y sumarle la mitad del vecino en el caso que el dígito sea par; si es impar, restarlo de 9, luego, se suma lo obtenido con el valor de la adición entre 5 y mitad del vecino.
3. Por último, al llegar al cero del multiplicando, se realiza la diferencia entre la mitad del vecino y el 1.

Ejemplo:
Calcular 36518×4
Solución: 146072

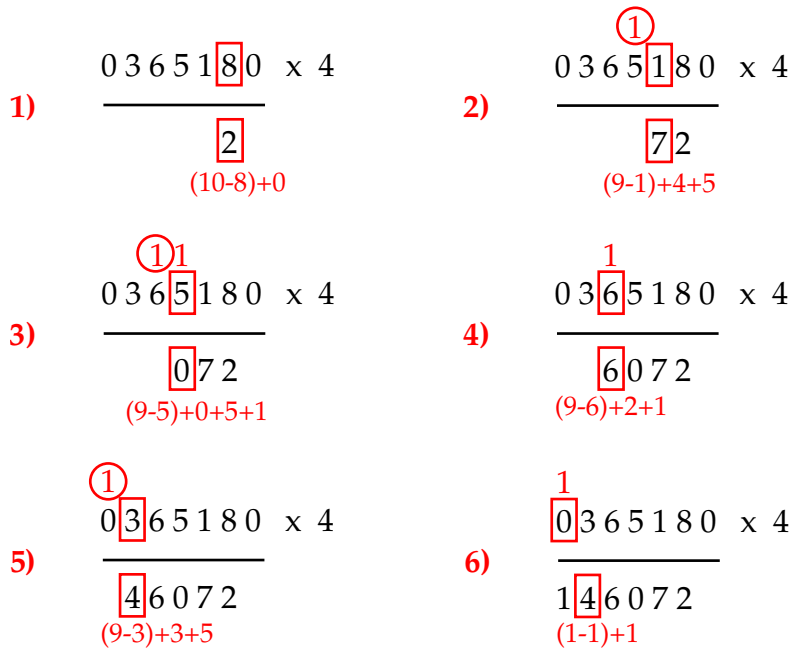


Figura 4.15: *Ejemplo de la estrategia de la multiplicación por 4.*

Capítulo 5

Aplicación del cálculo mental en la solución de problemas

Para darle un tratamiento resolutivo a las actividades que se sugieren a continuación, se recomienda tener en cuenta el material de apoyo que se expuso detalladamente de manera previa, el cual consiste en: las estrategias básicas del cálculo mental, las propiedades de las operaciones básicas, las estrategias del método Trachtenberg, las recomendaciones para el reconocimiento de patrones de diferente tipo, las operaciones no convencionales y en general, los variados mecanismos usados en la solución de problemas en distintos contextos de la matemática.

Las situaciones propuestas se clasifican en los siguientes niveles y bajo los criterios enunciados:

- **Nivel Básico:** las situaciones de este tipo se caracterizan porque para ser abordadas el tiempo requerido en su tratamiento es corto, es precisa la implementación de una o máximo dos técnicas de cálculo mental y además, hay pocas alternativas para encontrar una solución.
- **Nivel Intermedio:** los problemas que hacen parte de esta sección presentan un nivel de complejidad mayor ya que demandan la implementación de procesos de abstracción que conllevan a usar más tiempo, además, para buscar su solución es primordial vincular varias técnicas, estrategias o herramientas contenidas en el texto. Adicional a esto pueden existir varios mecanismos de resolución que conducen a un mismo resultado.
- **Nivel Avanzado:** son categorizados de esta manera por ser los más exigentes en la medida que ponen a prueba la capacidad de usar varias estrategias y mecanismos de solución que relacionen múltiples elementos y conceptos de la matemática. Para llegar a resolverlos es necesario una inversión importante en tiempo, en procesos de pensamiento, en exploración de los componentes de este texto y en el estudio de la pertinencia de los mismos.

Además de lo anterior, cada situación lleva consigo una ayuda, a través de la cual el lector puede recibir recomendaciones y sugerencias que serán de utilidad en el proceso de resolución.

5.1. Situaciones nivel básico

Situación 1

La distancia que recorre Sebastián para ir de su casa al colegio es de 210 metros. Daniel, su compañero de clase, debe recorrer diariamente el quíntuple de la distancia que transita Sebastián menos 50 metros. ¿Cuál es el espacio que debe recorrer Daniel día a día?

a) 1050 *b)* 2100 *c)* 1100 *d)* 1000

Ayuda: *en esta situación intervienen operaciones básicas entre números naturales, entre ellas destaca la multiplicación que puede ser abordada con técnicas de cálculo mental, como es el caso de la estrategia de multiplicación por 5.*

Situación 2

Un asociado a una cooperativa cuenta con un total de aportes de 12.000.000 de pesos. A mitad de año debe actualizar sus datos y con ello, requiere renovar los aportes, por tanto, debe abonar el 10 % del total del dinero ahorrado. Después de este movimiento, ¿cuánto dinero tendrá ahorrado?

a) $13.200.000 *b)* $1.200.000 *c)* $10.800.000 *d)* $12.000.000

Ayuda: *este problema está directamente relacionado con problemas de contexto, allí se requiere el uso del concepto de porcentaje, por lo que las operaciones como la multiplicación y la división con múltiplos de 10 son importantes.*

Situación 3

Laura mide 120 centímetros y su padre tiene el doble de su estatura menos 60 centímetros ¿Cuál es la estatura del papá de Laura?

a) 240 cm. *b)* 200 cm. *c)* 180 cm. *d)* 170 cm.

Ayuda: *en este ejercicio es importante la interpretación adecuada del lenguaje y de los términos allí expresados, de este hecho depende un correcto planteamiento y posterior búsqueda de su solución. La estrategia de multiplicación por el 2 puede ser de ayuda.*

Situación 4

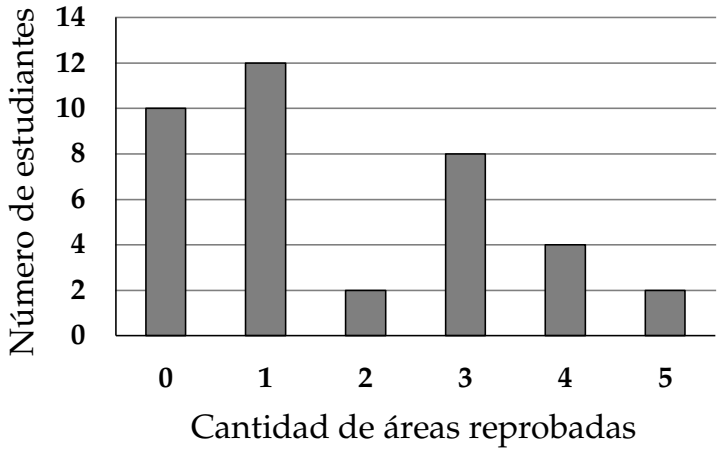
Benjamín tiene 35 cajas de lápices y en cada una vienen 11 de ellos. Si del total de lápices 55 resultaron defectuosos y tuvieron que ser devueltos a la fábrica, ¿cuántos están habilitados para ser usados?

a) 385 *b)* 330 *c)* 440 *d)* 101

Ayuda: *para afrontar esta situación basta con operar asertivamente números naturales a través de las operaciones básicas. Las estrategias de cálculo mental para multiplicar un número por 11 pueden ser de ayuda.*

Situación 5

Al finalizar el año escolar el docente encargado del grado 9B, desea resumir mediante el siguiente diagrama de barras la cantidad de áreas reprobadas por sus estudiantes:



I. La cantidad de estudiantes que hace parte del grupo en mención es:

a) 38 *b)* 15 *c)* 40 *d)* 28

II. Si se tiene estipulado que un estudiante debe repetir el grado si reprueba 3 áreas o más, entonces la cantidad de alumnos que están en esta condición es:

a) 12 *b)* 22 *c)* 8 *d)* 14

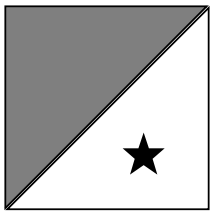
III. El promedio de áreas reprobadas en el grupo es:

a) Entre 0 y 1 *b)* Entre 1 y 2 *c)* Entre 2 y 3 *d)* Entre 3 y 4

Ayuda: *esta actividad reúne elementos básicos de representación de información a través de herramientas estadísticas, tal es el caso del diagrama de barras. Para el tratamiento de las preguntas indicadas se requiere de una adecuada ejercitación del razonamiento cuantitativo, del uso correcto de las operaciones básicas y de la apropiación del concepto de media aritmética o promedio de datos agrupados.*

Situación 6

Una bandera de forma cuadrada de 8 centímetros de lado, se encuentra dividida en dos partes como se muestra en la imagen.



8 cm

I. ¿Cuál es el área de la región sombreada?

a) 32 cm^2 *b)* 64 cm^2 *c)* 8 cm^2 *d)* 2 cm^2

II. Si el área ocupada por la estrella es de 6 cm^2, ¿cuál es el área de la región de color blanco?

a) 64 cm^2 *b)* 32 cm^2 *c)* 38 cm^2 *d)* 26 cm^2

Ayuda: *este problema geométrico requiere del uso de un concepto básico como es el área de un cuadrado, la cual puede ser hallada con alguna técnica de multiplicación del cálculo mental, además, las preguntas conllevan a la interpretación del área de cada una de las dos regiones como la mitad del área del cuadrado.*

Para el lector puede ser de utilidad recordar que:

Área del cuadrado $= l^2$ *dónde l es el lado del cuadrado.*

Situación 7

En la tabla se indica la relación entre el tiempo dedicado para estudiar para un examen por un grupo de jóvenes y la posibilidad de aprobar o reprobar.

Situación 7

	Aprobar	Reprobar	Total
Poco	20	40	60
Suficiente	50	20	70
Mucho	30	0	30
Total	100	60	160

I. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante repruebe habiendo estudiado suficiente?

a) $\frac{1}{8}$ *b)* $\frac{1}{16}$ *c)* $\frac{1}{4}$ *d)* $\frac{3}{16}$

II. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante repruebe habiendo estudiado poco?

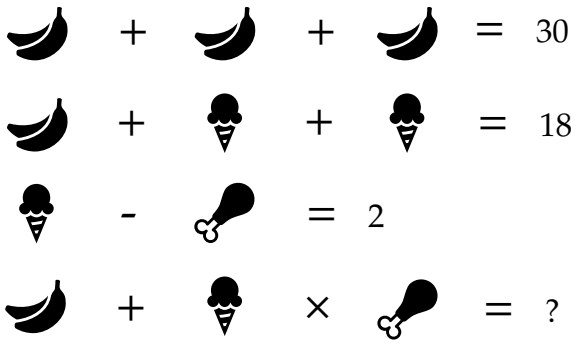
a) 20 % *b)* 16 % *c)* 40 % *d)* 25 %

Ayuda: *los cuestionamientos anteriores se resuelven por medio de la definición Laplaciana de probabilidad, además, se debe tener en cuenta la estrecha relación que hay entre una fracción y un porcentaje. Para el lector puede ser de utilidad recordar que la probabilidad de un evento A, denotada por P(A) es:*

$$P(A) = \frac{Casos\ favorables}{Casos\ posibles}$$

Situación 8

A partir de la siguiente imagen:



Situación 8

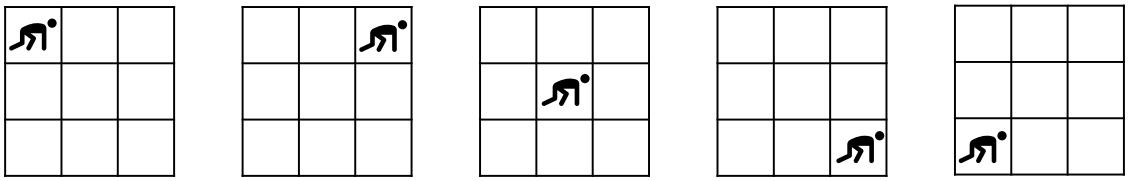
El valor que mejor se ubica en la posición marcada con el símbolo ? es:

a) 28 *b)* 16 *c)* 42 *d)* 18

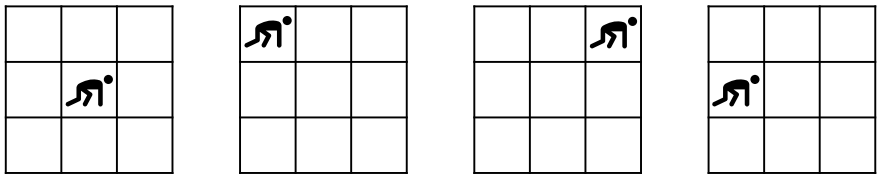
Ayuda: *este ejercicio requiere establecer una relación entre las variables representadas por medio de imágenes, las operaciones existentes entre ellas y los valores conocidos. Las operaciones básicas y las técnicas de cálculo mental son útiles para buscar la solución.*

Situación 9

Dada la siguiente secuencia:



De las siguientes imágenes:



I **II** **III** **IV**

I. La que continúa con la secuencia es:

a) I *b)* II *c)* III *d)* IV

II. ¿Cuál es la cantidad de movimientos necesarios para que la partícula regrese a la posición inicial?

a) 4 *b)* 5 *c)* 6 *d)* 7

III. La cantidad de casillas en las cuales la partícula nunca se detiene es:

a) 2 *b)* 4 *c)* 3 *d)* 1

Ayuda: *para afrontar las situaciones anteriores planteadas a partir de la información dada, se requiere de la identificación del patrón de movimiento que mantiene la regularidad de la figura. A partir de dicha regla es posible responder a los cuestionamientos que están encaminados a la predicción de lo que ocurre en la secuencia posteriormente. La habilidad para intuir y abstraer, serán de gran utilidad como elementos resolutivos.*

Situación 10

La operación denotada por $\odot$ está definida para enteros positivos. La siguiente tabla muestra el resultado de la operación para algunos enteros; por ejemplo, $2 \odot 10 = 10$:

$\odot$	4	10	5
3	5	11	6
2	4	10	5
7	9	15	10

I. El resultado de $11 \odot 3$ es:

a) 10 *b)* 14 *c)* 13 *d)* 12

II. El resultado de $19 \odot 15$ es:

a) 34 *b)* 32 *c)* 33 *d)* 30

III. El resultado de $p \odot q$ es:

a) $p+q-2$ *b)* $p+q-1$ *c)* $p-q-2$ *d)* $p+q$

Ayuda: *los ejercicios enunciados se caracterizan porque en ellos es imprescindible el establecimiento del patrón que regula la operación no convencional, además, vale la pena destacar que las habilidades de abstracción y razonamiento son muy importantes.*

Situación 11

En la siguiente secuencia alfabética:

$$a, b, y, c, d, y, e, f, y, g, h, y, ?$$

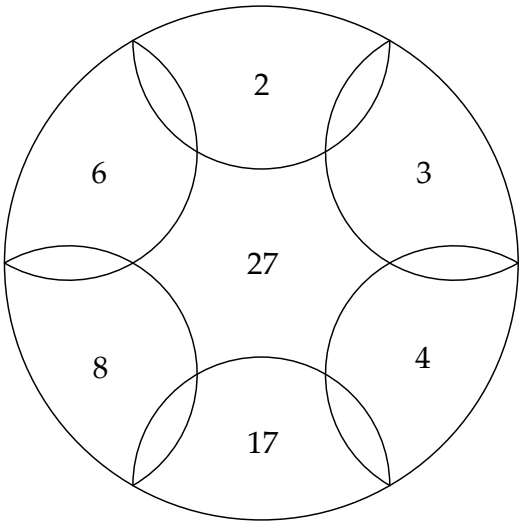
La letra que mejor se ubica en la posición marcada con el símbolo ? es:

a) i *b)* j *c)* z *d)* x

Ayuda: *este problema necesita la habilidad para determinar el patrón de recurrencia presente en la secuencia alfabética, con el fin de poder predecir que sucede en torno a sus elementos.*

Situación 12

Según la siguiente imagen calcule la diferencia entre la suma de los números que están dispuestos de forma circular y el valor central.



a) 13 *b)* 40 *c)* 67 *d)* 3

Ayuda: *en la actividad planteada la información suministrada se encuentra inmersa en un elemento geométrico (un círculo divido en varias regiones), sin embargo, la solución del problema va más allá de eso, ya que según el interrogante, lo que se debe hacer es una interpretación asertiva del texto que conducirá a la realización de una suma y una resta de números naturales. La técnica de cálculo mental llamada "estrategia de la familia del 10" permitirá hallar la solución rápidamente.*

5.2. Situaciones nivel intermedio

Situación 1

En una veterinaria se ha establecido que en el último mes 100 clientes entre hombres y mujeres fueron atendidos, los cuales llevaron a sus mascotas por alguna situación médica. En total asistieron 52 hombres, de los cuales 42 tienen por mascota un perro, por otro lado, 39 de los clientes que son mujeres tienen un gato de mascota.

	Perro	Gato	Total
Hombres	42	V	52
Mujeres	W	39	X
Total	Y	Z	100

I. ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre tenga por mascota un gato? (Valor V)

a) $\frac{1}{10}$ *b)* $\frac{21}{50}$ *c)* $\frac{1}{100}$ *d)* $\frac{39}{100}$

II. ¿Qué tan probable es que al elegir un cliente al azar sea una mujer que haya llevado a consulta un perro? (Valor W)

a) $\frac{48}{100}$ *b)* $\frac{1}{10}$ *c)* $\frac{39}{100}$ *d)* $\frac{9}{100}$

Ayuda: *para afrontar estos ejercicios se recomienda al lector realizar una adecuada comprensión lectora en matemáticas del texto y de la tabla que sirven de apoyo para que sea posible encontrar los datos faltantes antes de responder las preguntas. Adicional a esto, es pertinente revisar la definición de probabilidad dada en alguna de las situaciones del nivel básico.*

Situación 2

El dígito correspondiente a la posición 13 después de la coma del número decimal periódico: 1,042042... es:

a) 0 *b)* 4 *c)* 2 *d)* 1

Ayuda: *la solución de este ejercicio implica la comprensión de número decimal periódico y la posibilidad de predecir la aparición de sus cifras. Esto está directamente relacionado con la identificación de patrones de repetición.*

Situación 3

En la siguiente figura se muestra una piscina circular cuya área es de 160 m^2, la sección para adultos es la sombreada y la de niños es de color blanco. ¿Cuál es el área de la piscina destinada a los adultos?

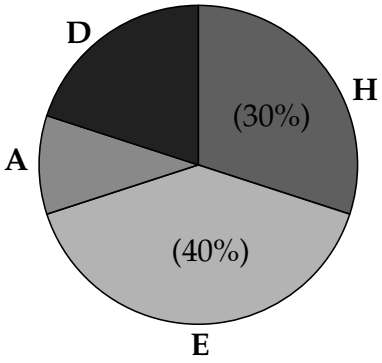


a) 120 m^2 *b)* 150 m^2 *c)* 80 m^2 *d)* 100 m^2

Ayuda: *Este problema se relacionan los conceptos de área sombreada y porcentaje. La interpretación de la zona de adultos como las tres cuartas partes del área total, es la clave para encontrar la solución. Las operaciones básicas que intervienen pueden ser abordadas por medio de las técnicas de cálculo mental.*

Situación 4

El gráfico muestra la forma como Juan invierte su salario mensual en: gastos del hogar (H), entretenimiento (E), ahorro (A) y deudas (D).



Situación 4

I. Si el salario mensual de Juan equivale a $3.000.000, ¿Cuál es la cantidad de dinero que destina para pagar los gastos del hogar?

a) $900.000 *b)* $300.000 *c)* $1000.000 *d)* $90.000

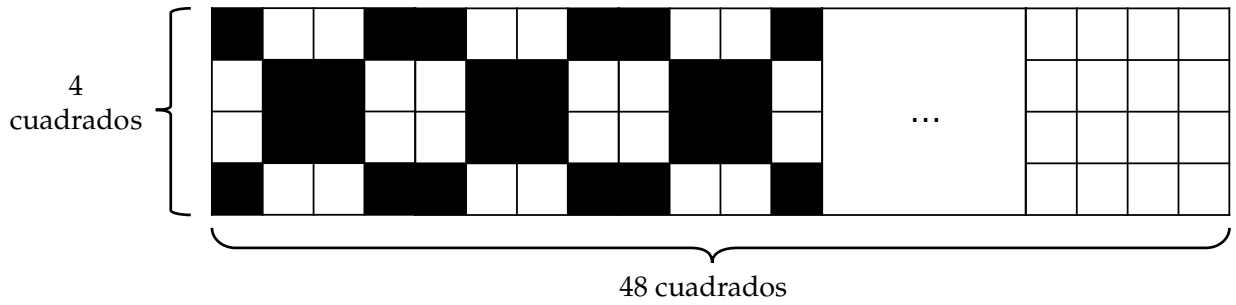
II. Si el porcentaje destinado a entretenimiento y ahorro equivale al 50 %, ¿Cuál es la cantidad de dinero que ahorra mensualmente?

a) $100.000 *b)* $1.500.000 *c)* $1.200.000 *d)* $300.000

Ayuda: *en esta situación se hace presente la interpretación de un diagrama estadístico, además, para su solución el concepto de porcentaje es de gran importancia, así como la apropiación que se haga de este y el significado que se le dé.*

Situación 5

En la figura se muestra parte de una banda cuadriculada con 4 cuadrados de alto por 48 de ancho.



I. Si se empieza a sombrear algunos cuadrados de la banda como se muestra en la imagen, y si se continúa este proceso siguiendo el mismo patrón hasta llegar al final de la banda, ¿cuántos cuadrados han sido sombreados?

a) 24 *b)* 384 *c)* 96 *d)* 186

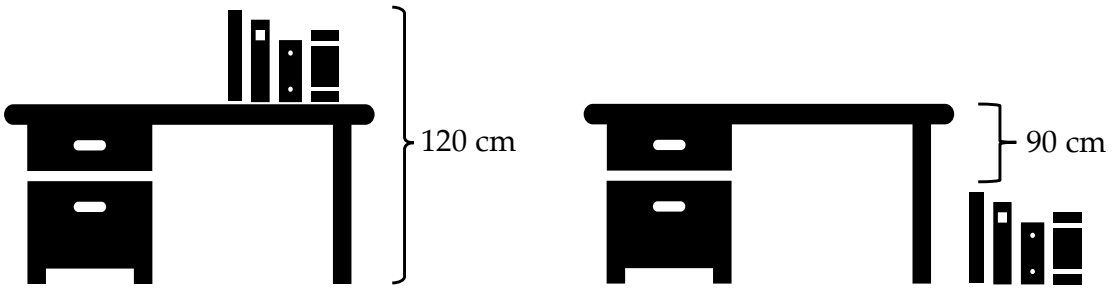
II. Según lo anterior, hasta la mitad de la banda, ¿cuál es el número de cuadrados que están sin sombrear?

a) 48 *b)* 96 *c)* 24 *d)* 36

Ayuda: *Este ejercicio relaciona el contexto geométrico con las operaciones aritméticas y el establecimiento de patrones. La construcción de conexiones entre varios elementos matemáticos es muy necesaria para responder a los interrogantes.*

Situación 6

¿Cuál es la altura de la mesa?

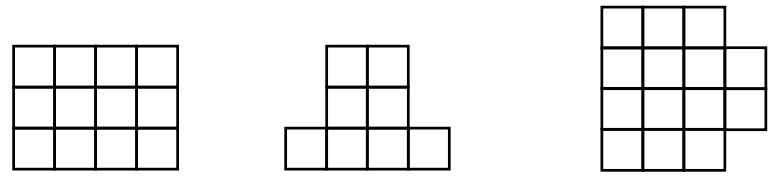


a) 210 cm. *b)* 105 cm. *c)* 15 cm. *d)* 100 cm

Ayuda: *una estrategia de solución que se puede implementar es determinar un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas a partir de los elementos gráficos y de las cantidades que se están brindando, con la particularidad que en este caso, una de las variables vinculadas en dicho sistema se estaría eliminando, facilitando así los procedimientos.*

Situación 7

Con varias cajas se construye una figura cuyas vistas desde diferentes lugares se aprecian en las siguientes imágenes. ¿Cuántas cajas hay en total?

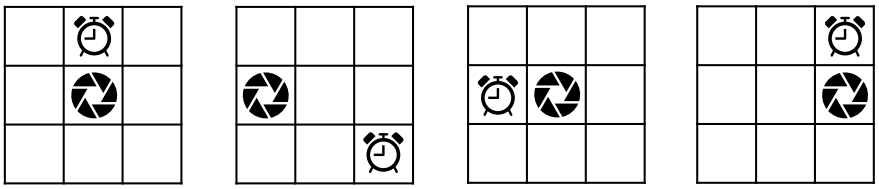


a) 42 *b)* 22 *c)* 30 *d)* 36

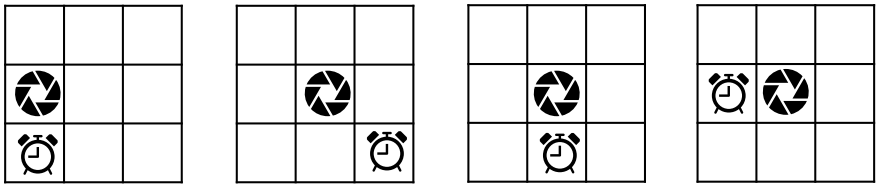
Ayuda: *en esta situación, son importantes la ejercitación del pensamiento espacial y el uso de estrategias de cálculo aritmético, pues de la construcción de una figura tridimensional a partir de las diferentes perspectivas, depende la obtención del número total de cajas que la conforman.*

Situación 8

Dada la siguiente secuencia:



De las siguientes imágenes:



I **II** **III** **IV**

I. La que continúa con la secuencia es:

a) I *b)* II *c)* III *d)* IV

II. La casilla en la que los dos elementos se encontrarán por primera vez es la que está en:

a) El centro
b) La parte derecha de la casilla central
c) La parte izquierda de la casilla central
d) Nunca coincidirán en una misma casilla

III. El reloj retornará a su posición inicial después de:

a) 8 movimientos *b)* 9 movimientos *c)* 7 movimientos *d)* 5 movimientos

Ayuda: *en este tipo de ejercicios se necesita reconocer el patrón de movimiento que define la tendencia de los objetos que realizan distintos desplazamientos. Esta regularidad permite hacer predicciones sobre el comportamiento de estos componentes.*

Situación 9

Jairo tiene 42 años y su hijo Camilo 10. ¿Dentro de cuántos años "x" la edad del padre será el triple que la de su hijo? (*Apóyese en la siguiente tabla.*)

Situación 9

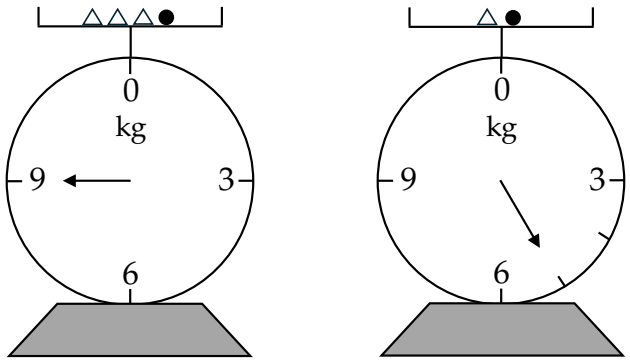
	Presente	Futuro
Jairo	42	$42 + x$
Hijo	10	$10 + x$

a) 6 *b)* 12 *c)* 3 *d)* 5

Ayuda: *para abordar esta actividad se requiere de una lectura adecuada e interpretación asertiva del texto. Como apoyo se proporciona una tabla resumen, la cual ayudará a operar las cantidades allí involucradas. Aquí son de gran utilidad los cálculos aritméticos, las estrategias de razonamiento cuantitativo y un importante grado de abstracción.*

Situación 10

Los grupos de elementos que están sobre las balanzas tienen los pesos que se indican en la imagen.



I. ¿Cuál es el valor de △?

a) 4 kg. *b)* 5 kg. *c)* 2 kg. *d)* 3 kg.

II. ¿cuál es el valor de ●?

a) 2 kg. *b)* 3 kg. *c)* 4 kg. *d)* 5 kg.

Ayuda: *en el tratamiento de este ejercicio se sugiere la construcción y posterior solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. El método de reducción puede facilitar los procesos, sin embargo, existen varias alternativas para responder a los interrogantes.*

Situación 11

La operación denotada por ♠ está definida para enteros positivos. La siguiente tabla muestra el resultado de la operación para algunos enteros; por ejemplo, $9♠3 = 5$:

♠	3	5	8
9	5	3	0
10	6	4	1
12	8	6	3

I. El resultado de $12♠2$ es:

a) 10 *b)* 9 *c)* 14 *d)* 15

II. El resultado de $x♠y$ es:

a) $x-y-1$ *b)* $x+y-1$ *c)* $x-y+1$ *d)* $x+y+1$

Ayuda: *en estos cuestionamientos es fundamental el reconocimiento de la regularidad que define la operación no convencional, además, influye el grado de abstracción y razonamiento que se tenga. En este caso en particular interviene varias operaciones básicas.*

Situación 12

Si se sabe que:

$$-m+n=6$$
$$m+n=18$$

I. ¿Cuál es el resultado de $(m+n)^2$?

a) 72 *b)* 324 *c)* 144 *d)* 576

II. ¿Cuál es el resultado de $m.n-n$?

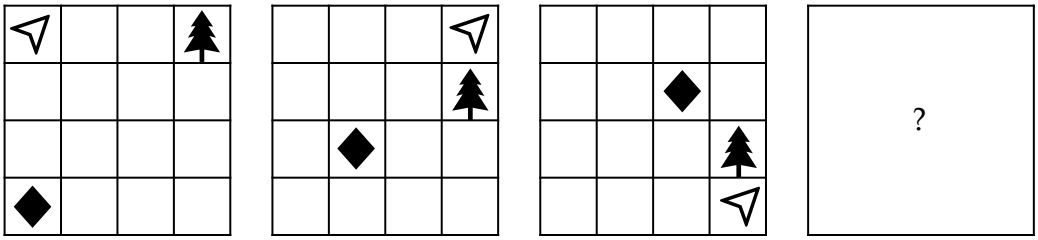
a) 60 *b)* 72 *c)* 66 *d)* 84

Ayuda: *este ejercicio requiere de la habilidad para entender los datos suministrados como un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el cual, una de las variables se anula. Con base en esto, la solución se obtiene a partir de procedimientos aritméticos, pero lo que se destaca es que lo solicitado en el problema, no es encontrar solamente los valores de m y n, es también hallar el valor de las operaciones indicadas entre ellos.*

5.3. Situaciones nivel avanzado

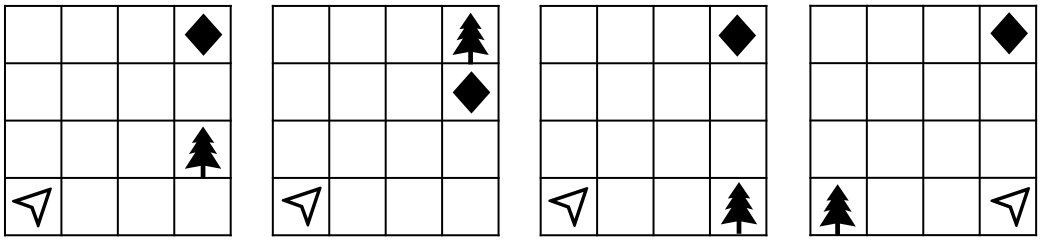
Situación 1

Con relación a las tres figuras:



Momento 1 Momento 2 Momento 3

I. La situación que completa la secuencia en el lugar marcado con (?) es:



I **II** **III** **IV**

a) I *b)* II *c)* III *d)* IV

II. Según la información dada, el primer momento en el que al menos dos de las figuras ocupan la misma posición es:

a) Momento 4 *b)* Momento 5 *c)* Momento 6 *d)* Momento 7

Ayuda: *como en situaciones similares a esta, se debe identificar el patrón de movimiento, pero a diferencia de otros casos, aquí las tres figuras presentan una regularidad distinta, por lo que la tendencia de cada una se debe analizar por separado.*

Situación 2

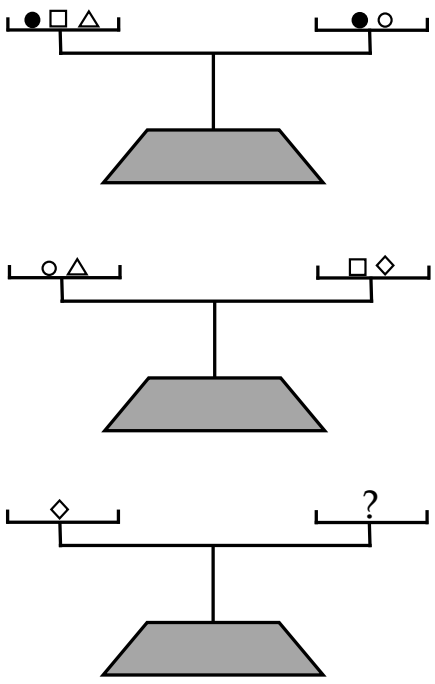
En la sucesión: 3, 5, 9, 17, ?; entre las opciones, el mejor candidato para escribir en el lugar marcado con "?" es:

a) 21 *b)* 19 *c)* 33 *d)* 29

Ayuda: *en este problema se debe determinar el término n-ésimo de una sucesión, o establecer la forma como están relacionados sus elementos. Según lo anterior, es importante realizar una observación detallada de los términos para lograr reconocer si hay alguna operación u operaciones que se aplican simultáneamente para la obtención de dichas cantidades.*

Situación 3

Las balanzas superior y central, mostradas en la figura, están en equilibrio. Los cuerpos de la misma forma y color tienen el mismo peso.



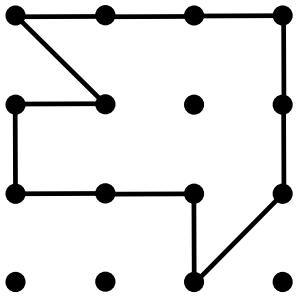
El (los) elemento(s) que debe(n) colocarse en la balanza inferior en el platillo marcado con (?) para obtener equilibrio es (son):

a) ●◇ *b)* □● *c)* △△ *d)* □

Ayuda: *este problema requiere un grado importante de abstracción, pues una alternativa para su solución, es la construcción de ecuaciones, en las cuales, cada una de las figuras se representa con una variable. También el problema se puede razonar a partir de las equivalencias en cada balanza, de modo que, de manera progresiva, se pueda llegar a nuevas equivalencias. Por lo anterior, este ejercicio es bastante retador y pone en juego múltiples habilidades en los estudiantes, dando lugar a la implementación de variadas estrategias de solución.*

Situación 4

Suponga que los puntos consecutivos de la figura se distribuyen horizontalmente y verticalmente a una distancia de 2 metros uno del otro.



El área del polígono formado es:

a) 6 m^2 *b)* 10 m^2 *c)* 24 m^2 *d)* 12 m^2

Ayuda: *para encontrar la solución de esta situación, es necesario apropiarse de los conceptos geométricos de polígono y área, además, el problema requiere de la estrategia de dividir la región en cuestión en cuadrados iguales para que así, sea más fácil el cálculo del valor del área de cada uno de ellos. En esta fragmentación de la región original, es posible la obtención de triángulos rectángulos, en este caso, se debe analizar la relación existente entre ellos y los cuadrados.*

Para el lector puede ser de utilidad recordar que:

$$\textit{Área del cuadrado} = l^2 \quad y \quad \textit{Área del triángulo} = \frac{b.h}{2}$$

Dónde l es el lado del cuadrado, b la base del triángulo y h su altura.

Situación 5

¿Cuál es el número que le corresponde a la celda en la que está ubicado el auto?

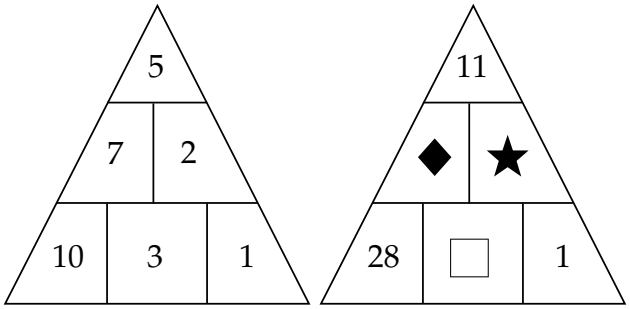
12	15	20	29		79

a) 54 *b)* 60 *c)* 38 *d)* 46

Ayuda: *para solucionar este ejercicio existen varias alternativas o caminos posibles, uno de ellos es determinar el término n-ésimo de la sucesión de los números ubicados en las celdas de parqueo. También se recomienda la posibilidad de establecer una regularidad entre dichas cantidades, por lo que se sugiere realizar una observación detallada de los términos.*

Situación 6

Dada la información dispuesta de forma gráfica:



I. ¿Cuál es el valor de $\bigstar + \square$?

a) 1 *b)* 28 *c)* 18 *d)* 17

II. ¿Cuál es el valor de $(\blacklozenge)^2$?

a) 38 *b)* 361 *c)* 152 *d)* 371

Ayuda: *para abordar este problema se debe tomar como punto de partida la imagen de la izquierda, en la cual se puede apreciar que los números de un nivel superior se obtienen restando los dos que encuentran en su base. Con el hecho anterior y con las imágenes indicadas en la figura de la derecha, se conforman ecuaciones de cuya resolución depende la obtención de las cantidades solicitadas.*

Situación 7

Se organizó un torneo de fútbol con 16 equipos. En cada partido se eliminaba de la competición el equipo perdedor (no se admiten empates). El número de partidos que debieron jugarse para determinar el campeón fue:

a) 16 *b)* 15 *c)* 14 *d)* 8

Ayuda: *esta situación puede ser abordada como un problema de conteo en el cual es fundamental tener en cuenta que cada equipo se enfrentará con un solo rival por cada una de las fases del torneo. Ante lo cual bastará con contar la cantidad de posibles partidos en cada momento del campeonato.*

Situación 8

La operación denotada por ▼ está definida para enteros positivos. La siguiente tabla muestra el resultado de la operación para algunos de ellos; por ejemplo, $4\blacktriangledown 9 = 7$:

▼	5	7	9
4	11	9	7
6	31	29	27
10	95	93	91

I. El resultado de $12\blacktriangledown 44$ es:

a) 52 *b)* 22 *c)* 112 *d)* 100

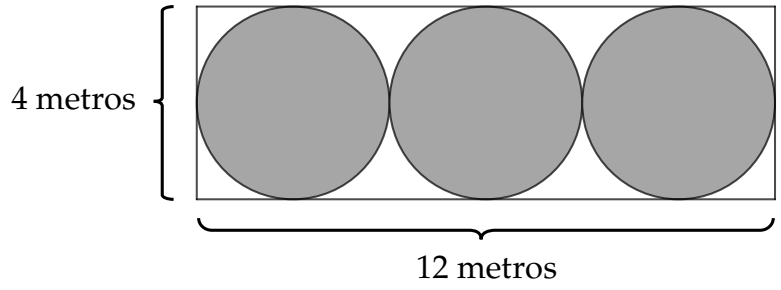
II. El resultado de $m\blacktriangledown n$ es:

a) $m^2 - n$ *b)* $m^2 + n$ *c)* $(m-n)^2$ *d)* $m - n^2$

Ayuda: *en este ejercicio la identificación del patrón que define la operación no convencional es fundamental. Dicha operación puede estar conformada por más de un proceso aritmético. Los valores dados en la tabla y un alto grado de abstracción y razonamiento, contribuyen a la resolución adecuada del problema.*

Situación 9

En la imagen se muestra una piscina de forma rectangular, dentro de la cual se encuentran tres regiones circulares cuya profundidad es de 1,80 metros. Las demás zonas de la piscina tienen 1,50 metros de hondo.



Situación 9

I. El área total de la piscina que tiene una profundidad de 1,80 metros es:

a) 48π m^2 *b)* 12π m^2 *c)* 4π m^2 *d)* 36π m^2

II. El área total de la piscina que tiene una profundidad de 1,50 metros es:

a) $16 - 36\pi$ m^2 *b)* $48 - 4\pi$ m^2 *c)* $48 - 12\pi$ m^2 *d)* $48 - 36\pi$ m^2

Ayuda: *solucionar este problema requiere relacionar el área de las regiones circulares con el área de la piscina rectangular, además de la necesidad de establecer las operaciones aritméticas involucradas en los cuestionamientos planteados.*

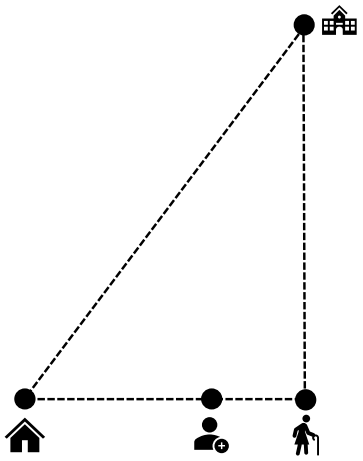
Para el lector puede ser de utilidad recordar que:

Área del círculo $= \pi r^2$ *y Área del rectángulo* $= b.h$

Dónde r es el radio del círculo, b la base del rectángulo y h su altura.

Situación 10

Al llegar a su casa, Diego recordó haber dejado en el colegio sus artículos personales por lo que debe regresar, pero antes debe ir a la casa de su amigo Jaime ubicada a 2 km al oriente de su casa, luego debe pasar por casa de su abuela ubicada a 1 km al oriente de la casa de Jaime y finalmente, el colegio queda a 4 km al norte de la casa de su abuela. Al regresar tomó una ruta directa que une al colegio con su casa sin pasar por los lugares mencionados.



Situación 10

I. La ruta directa que une al colegio con la casa de Diego tiene una longitud de:

a) 25 km. *b)* 7 km. *c)* 16 km. *d)* 5 km.

II. La distancia total recorrida por Diego en toda su trayectoria es:

a) 32 km. *b)* 12 km. *c)* 14 km. *d)* 23 km.

III. El área total en kilómetros cuadrados de la figura limitada por la trayectoria seguida por Diego, al iniciar y terminar el recorrido en su casa, es:

a) 2 km^2 *b)* 10 km^2 *c)* 6 km^2 *d)* 12 km^2

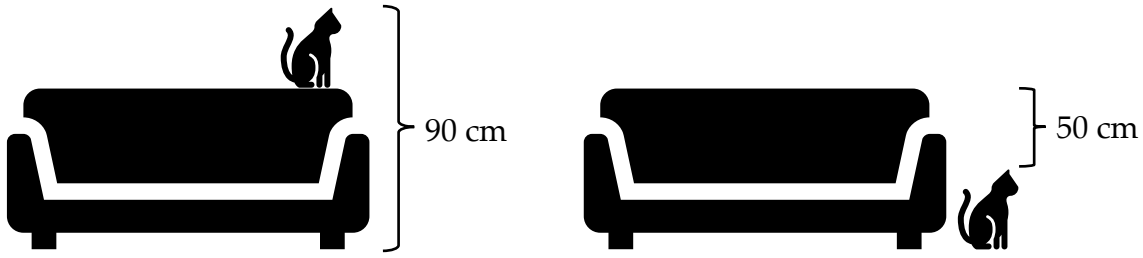
Ayuda: *Este ejercicio requiere la implementación de conceptos elementales como distancia recorrida y área. El teorema de Pitágoras hace su aparición como estrategia de solución, dada la existencia de un triángulo rectángulo en la estructura del problema. Desde luego que la interpretación del texto y los elementos que en él están presentes, son de gran importancia para responder a los cuestionamientos.*

Para el lector puede ser de utilidad recordar que el Teorema de Pitágoras establece que la hipotenusa de un triángulo rectángulo c y sus catetos a y b se relacionan a través de la expresión:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Situación 11

¿Cuál es la altura del sofá?

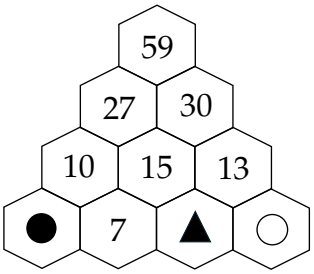


a) 20 cm. *b)* 140 cm. *c)* 40 cm. *d)* 70 cm.

Ayuda: *para el abordaje de esta situación gráfica se requiere de la elaboración de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en el que una de sus variables se anula. Lo anterior se establece como recomendación ya que el interrogante puede ser afrontado de diferentes maneras según la percepción del lector.*

Situación 12

Para responder a las preguntas que se indican, primero descubra la regla de formación que permita encontrar los números desconocidos ubicados en la base de la pirámide de hexágonos según la información dada en la siguiente imagen.



I. ¿Cuál es el valor de $\bullet + \blacktriangle$?

a) 9 *b)* 11 *c)* 10 *d)* 7

II. ¿Cuál es el valor de $\blacktriangle - \bigcirc$?

a) 1 *b)* 3 *c)* 2 *d)* 4

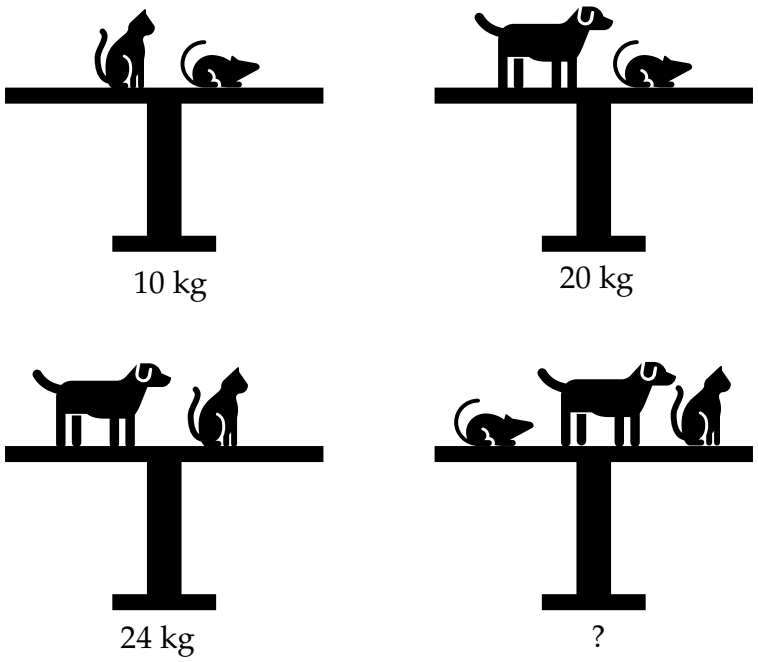
III. ¿Cuál es el valor de $(\bullet + \blacktriangle + \bigcirc)^2$?

a) 256 *b)* 169 *c)* 144 *d)* 121

Ayuda: *como lo dice el enunciado del problema, su solución se obtiene después de encontrar el patrón de obtención de las cantidades que hay en la imagen. Un manejo aritmético adecuado tanto en este proceso de indagación como en las operaciones indicadas en los interrogantes, conllevará a un asertivo tratamiento del ejercicio.*

Situación especial

El valor que mejor se ubica en la posición marcada con el símbolo ? es:



a) 27 *b)* 30 *c)* 17 *d)* 20

5.4. Resultados y análisis

Con la intención de mostrar de manera adecuada los resultados obtenidos a lo largo de la intervención pedagógica y relacionando los componentes fundamentales del estudio en todas sus fases, se han destinado cuatro tópicos o categorías de análisis que son: (1) operaciones aritméticas y estrategias de cálculo mental, (2) razonamiento cuantitativo, (3) patrones de movimiento, repetición y recurrencia y (4) operaciones no convencionales. Adicional a esto, dado el nivel de complejidad de las situaciones propuestas a los estudiantes en el transcurso de la investigación y considerando las múltiples competencias requeridas en el momento de solucionarlas, se estableció que los niveles de desempeño están categorizados de la siguiente manera: nivel Bajo si el porcentaje de éxito está comprendido entre el 0 % y el 54 %, nivel Básico entre el 55 % y el 79 %, nivel Alto entre el 80 % y el 89 % y el nivel Superior entre el 90 % y el 100 %.

Con base en lo anterior, a continuación se expondrán los hallazgos encontrados antes, durante y después de la investigación. En primera instancia, la prueba diagnóstica estaba conformada por un cuestionario de 18 preguntas las cuales se agruparon según los tópicos ya expuestos. De manera individual cada estudiante tuvo a su disposición un tiempo máximo de

120 minutos para resolver la prueba, además, no se permitió el uso de calculadoras ni de dispositivos electrónicos. Así las cosas, en la primera categoría, la cual hace referencia a la realización de operaciones aritméticas y a la posibilidad de implementar estrategias de cálculo mental en su ejecución, como las técnicas básicas y el método Trachtenberg, se obtuvo un porcentaje de éxito correspondiente al 64 %. Este resultado mostró ciertas fortalezas en cuanto a las respuestas dadas y a los procedimientos desarrollados en los ejercicios de menor complejidad, sin embargo, dadas las características de las preguntas formuladas con un mayor grado de dificultad, se apreció que en un gran número los estudiantes no fueron asertivos al realizar estas operaciones sin calculadoras, ante lo cual, manifestaron que las cifras involucradas eran muy grandes o que no recordaban con claridad algunos de los algoritmos de las operaciones.

En cuanto al segundo tópico que hace referencia al razonamiento cuantitativo, el porcentaje de éxito que se alcanzó fue del 39 %. Las situaciones planteadas aquí buscaban poner a prueba la capacidad del estudiante de reconocer, interpretar y utilizar información cuantitativa dada en diferentes contextos para solucionar problemas. El bajo rendimiento presentado obedeció según los estudiantes a que cuando la información no es del todo explícita, cuesta hacer inferencias sobre gráficos, tablas o esquemas. Esto sucede porque los estudiantes no establecen conexiones entre varios elementos matemáticos, dejando de lado el lenguaje de las representaciones e impidiendo así la exploración de variados caminos de resolución de una situación.

Por lo que se refiere a los patrones de movimiento, repetición y recurrencia, tercer aspecto estudiado y analizado en la investigación, el nivel de éxito que se consiguió fue del 30 %. Ante este desempeño tan reducido muchos de los estudiantes evaluados expresaron que los ejercicios de esta temática eran desconocidos, y que su acercamiento con ellos había sido escaso o nulo anterior a la prueba, situación validada institucionalmente ya que este componente tiene muy poca presencia en el plan de estudio.

Finalmente en el cuarto tópico denominado operaciones no convencionales, que se encuentra relacionado en cierta medida con el ítem anterior dada la necesidad de encontrar una regularidad en este caso numérica y operacional, se obtuvo un porcentaje de éxito del 16 %. Los argumentos dados por los estudiantes ante la escasa asertividad en este aspecto se relacionan directamente con lo expuesto por ellos en la tercera categoría. Es importante resaltar que esta temática requiere de habilidades como cuestionar, indagar y verificar, las cuales ayudan a desarrollar el pensamiento. Estas prácticas al estar distanciadas de los procesos tradicionales en matemáticas generan grandes dificultades en los estudiantes ya que los invita a abandonar la mecanización procedimental a la que están acostumbrados.

De manera general en dicha prueba diagnostica se alcanzó un 43 % de éxito, en la cual el 75 % de los estudiantes evaluados se ubicó en el nivel Bajo y el 25 % en el nivel Básico de los desempeños establecidos, panorama que no solo permitió hacer una adecuada contextualización, sino que también ratificó la pertinencia de la intervención pedagógica.

Con base en los resultados mencionados y tomando como punto de partida las dificultades evidenciadas en la primera fase de la investigación, se adentró en la elaboración de una práctica nueva que fuera efectiva ante las problemáticas halladas, esto es el módulo de profundización

aquí expuesto, el cual guarda una estrecha relación con los tópicos analizados en la prueba diagnóstica, con la pregunta de investigación y el marco teórico que busca responder a esta. Dicha secuencia didáctica se aplicó en 4 sesiones de 120 minutos cada una aproximadamente.

En la primera clase de la secuencia didáctica, se brindó inicialmente a los estudiantes un acercamiento al concepto de cálculo mental y a sus estrategias básicas. Para esto se sugirieron preguntas orientadoras relacionadas con el tema y se expusieron los referentes teóricos que se han mencionado, frente a estas actividades como se consignó en el diario de campo del docente investigador, hubo buena disposición de parte de la mayoría de los estudiantes, los cuales se mostraron participativos, competitivos y en ocasiones sorprendidos ya que muchas de las estrategias socializadas les permitían realizar operaciones más rápidamente de lo habitual, desligándose de los algoritmos tradicionales.

Adicional a ello, en un trabajo colaborativo en equipos, se les solicitó abordar a través de un documento lo concerniente al método Trachtenberg, este al ser menos intuitivo que las estrategias básicas, causó en un primer momento confusión en ellos, los cuales manifestaron que estas nuevas estrategias tenían muchos pasos que dificultaban su comprensión, pero cuando tuvieron claros los conceptos de vecino y mitad de un dígito que usa este método, pudieron reconocer en este, nuevas posibilidades para realizar sus operaciones aritméticas. Como está consignado en sus cuadernos de apuntes, las estrategias para multiplicar por 11, 7 y 2 fueron las que más referenciaron hasta el punto de crear ejemplos adicionales a los sugeridos en la guía de trabajo.

Después de esto se dieron a conocer las operaciones no convencionales y los patrones de movimiento, repetición y recurrencia. Según lo expresado por los estudiantes posterior a la prueba diagnóstica, este tópico era desconocido casi que en su totalidad para ellos, por lo que fue necesario destinar una hora adicional para su tratamiento. Las conductas observables registradas en el diario de campo dan cuenta de las dificultades que tienen en el momento de trabajar de manera no convencional en matemáticas, la mecanización de los procesos está tan arraigada a su forma de afrontar una situación, que les cuesta mucho reconocer una regularidad o patrón.

La primera clase de la secuencia didáctica finalizó con la realización de ejercicios individuales en los cuales los estudiantes empezaron a implementar lo trabajado en esta sesión, como consta en sus cuadernos de apuntes algunas situaciones fueron desarrolladas allí y otras lograron ser resueltas casi que de inmediato, en medio de un ambiente de participación e incluso de competencia. En las respuestas brindadas se apreció un porcentaje de éxito de alrededor del 60 % en promedio.

En la segunda clase se realizó una aproximación a la definición de razonamiento cuantitativo, destacando sus virtudes y su conexión con el cálculo mental. Dada la importancia de este referente conceptual para el desarrollo de la investigación, de manera preliminar se abordaron cuestionamientos y nociones básicas que introdujeron a los estudiantes al tema, además se escucharon sus percepciones frente a la prueba diagnóstica que particularmente en este tópico arrojó un porcentaje de éxito del 39 %. Este bajo nivel de comprensión lectora en matemáticas y de razonamiento cuantitativo estuvo relacionado con una reducida habilidad de transformar

la información textual dada en lengua común en formatos gráficos o numéricos y viceversa.

Ante este panorama, se propusieron a los estudiantes ejercicios donde aparecía información numérica usando diferentes tipos de representación. Se les sugirió abordar cada pregunta de manera individual, posterior a esto, el docente investigador realizó la respectiva retroalimentación. Según lo registrado en el diario de campo, en los ejercicios relacionados con gráficos estadísticos, tablas y textos, se evidenció mayor facilidad al momento de ser abordados, los estudiantes atribuyeron esto a que hay mayor acercamiento y familiaridad con dichos elementos.

Por otra parte, en las situaciones que contenían esquemas, mostraron mayor dificultad puesto que para su tratamiento, se requería hacer uso de estrategias como la construcción de ecuaciones. Finalizada esta sesión y con las claridades y explicaciones dadas, se apreció en los estudiantes una mejor disposición y en cierto grado, una mejoría en la manera como intentaban resolver este tipo de ejercicios. Es necesario tener en cuenta que aunque se observó avance, bajo las percepciones del docente investigador, este tópico requiere mayor grado de intervención y ejercitación a futuro.

En la tercera clase, la cual consistió en la realización del taller de aplicación, cada estudiante de manera individual afrontó el cuestionario que constaba de 20 preguntas, para solucionarlo contaron con un tiempo máximo de 120 minutos, en este espacio la aproximación conceptual de las clases anteriores fue indispensable. En términos generales el desarrollo de este taller no presentó contratiempos en cuanto al tiempo empleado y al proceso de solución que cada estudiante implementó.

Los resultados obtenidos en este taller de aplicación permitieron apreciar que el tópico que presentó un mayor porcentaje de éxito fue el de operaciones aritméticas y estrategias de cálculo mental (69 %), seguido por el de razonamiento cuantitativo (55 %), luego se ubicó el de patrones de movimiento, repetición y recurrencia (50 %) y por último el de operaciones no convencionales (48 %). Cabe resaltar que dichos porcentajes distan notoriamente de los obtenidos en la prueba diagnóstica, respecto a esta se evidencia un incremento en los puntos porcentuales de cada tópico una vez se realizaron las clases teórico prácticas relacionadas con el cálculo mental y el razonamiento cuantitativo.

Ahora, en la última sesión de la secuencia didáctica, se llevó a cabo la prueba de salida, la cual fue equivalente a la prueba diagnóstica en cuanto al número de participantes, estructura, relación con los tópicos analizados, tiempo de ejecución y condiciones para su realización.

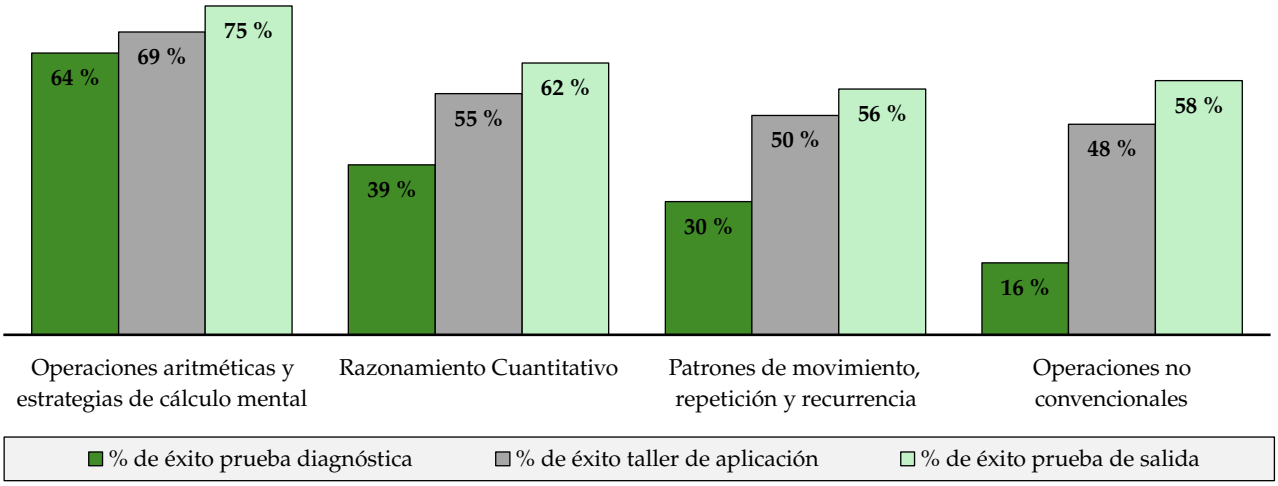


Figura 5.1: *Comparativo de los porcentajes de éxito logrados en las pruebas realizadas.*

Como se aprecia en la figura 5.1 los porcentajes de éxito de todos los tópicos analizados se incrementaron en cada una de las pruebas realizadas a lo largo de la investigación. En cierta medida, un primer seguimiento a la intervención se muestra a través de los resultados obtenidos en el taller de aplicación, allí se visualizan indicios de mejoría respecto a la prueba diagnóstica, esto pudo haber ocurrido gracias a que través de las clases programadas fueron suministrados a los estudiantes referentes teóricos que se reforzaron a través de la práctica y de la ejercitación. Dichos nuevos conocimientos en opinión de los estudiantes ayudaron a suplir ciertas falencias, a recordar situaciones olvidadas y a incursionar en temas de los que tenían poco conocimiento.

En cuanto a la prueba de salida, se aprecia que los resultados que arrojó respecto a los del taller de aplicación sufrieron un incremento, esto pudo estar relacionado con la concepción y la motivación que se generó en los estudiantes de este ejercicio como el producto final después de afrontar un proceso de formación, retroalimentación y reflexión. Dado que la prueba de salida es comparable con la prueba diagnóstica a partir de la correspondencia existente entre ellas, y teniendo en cuenta que tuvo lugar al final de la intervención, es posible que el trabajo desarrollado por medio de esta haya influido directamente en la evolución de los porcentajes de éxito alcanzados en cada tópico.

Adicional a esto, la mayor variabilidad en los porcentajes de las pruebas se presentó en los patrones de movimiento, repetición y recurrencia y en las operaciones no convencionales, esto pudo estar relacionado con el acercamiento que se brindó sobre aquellas temáticas que eran nuevas o desconocidas en la opinión de los estudiantes. En los dos primeros tópicos también hubo un avance importante, tanto en la consolidación de un buen desempeño en las operaciones aritméticas y estrategias de cálculo mental, como en la obtención de un nivel satisfactorio en el razonamiento cuantitativo, ambos componentes de vital importancia dentro del estudio.

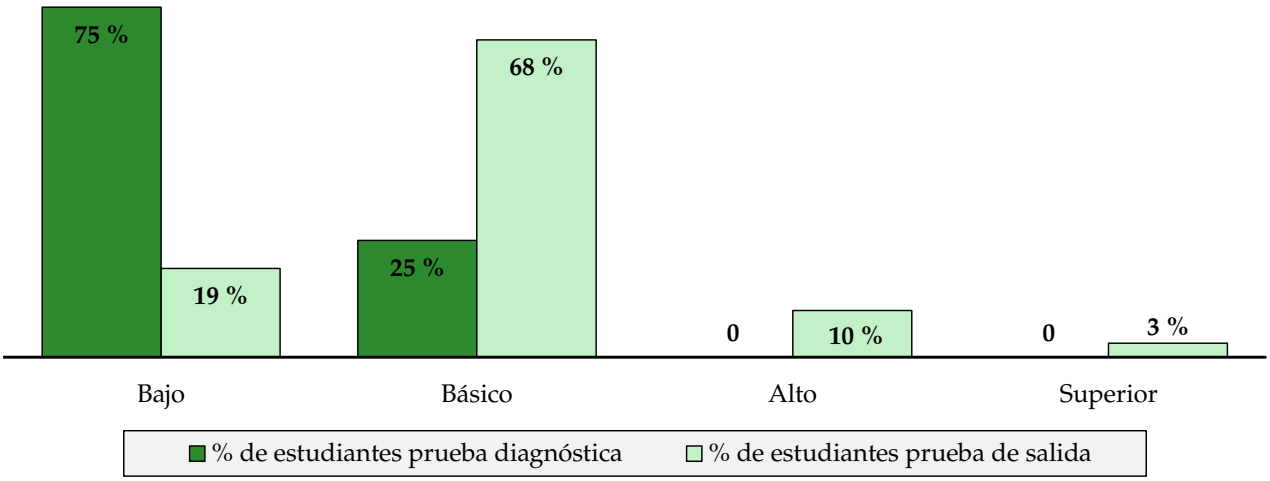


Figura 5.2: *Comparativo de los desempeños de los estudiantes en la prueba diagnóstica y de salida.*

En la prueba final o de salida en términos generales se alcanzó un 64 % de éxito, que comparado con el 47 % obtenido en la prueba diagnóstica, da cuenta de las mejoras logradas en el proceso. Como se aprecia en la figura 5.2, en el cuestionario final el 19 % de los estudiantes evaluados se ubicó en el nivel Bajo, el 68 % en el nivel Básico, el 10 % en el nivel Alto y el 3 % en el nivel Superior de los desempeños establecidos. Estos hallazgos revelan también progreso en atención a que se redujo considerablemente el porcentaje del nivel Bajo y se incrementó el de los niveles Básico, Alto y Superior en comparación con lo sucedido en la prueba diagnóstica.

Capítulo 6

Conclusiones

- La apropiación, ejercitación y puesta en práctica de las estrategias, técnicas y componentes del cálculo mental y del razonamiento cuantitativo por medio de situaciones en las que se presentó información cuantitativa a través de variadas representaciones, contribuyó a que los estudiantes del grado once de la Institución Educativa Jorge Alberto Gómez Gómez, mostraran progreso al realizar razonamientos y cálculos aritméticos involucrados en la resolución de problemas.

- El afianzamiento de competencias básicas del razonamiento cuantitativo como la comprensión lectora en matemáticas y la habilidad de transformar información textual en formatos gráficos y viceversa, ayuda al fortalecimiento del cálculo mental como una alternativa resolutiva no convencional que le permite al estudiante no solo encontrar el resultado de algunas operaciones explícitas, sino también, resolver problemas de manera racional.

- Poner en práctica la implementación del cálculo mental en la enseñanza de las matemáticas, supone desligarse del simple hecho de realizar cálculos aritméticos de manera ágil y poco convencional, requiere también dar a conocer y promover el uso de otros de sus componentes como lo son los patrones de movimiento, repetición y recurrencia y las operaciones no convencionales, los cuales invitan a los estudiantes a abandonar la mecanización procedimental favoreciendo así el desarrollo del pensamiento.

- Tras el análisis y la discusión de los resultados, se pudo comprobar que estrategias como: brindar información cuantitativa a través de distintas representaciones, facilitar referentes teóricos que permitan diseñar y ejecutar diversas estrategias resolutivas y someterlas a la refutación o al respaldo una vez hayan sido aplicadas en la solución de un problema, ayudan a impulsar, fortalecer y desarrollar el razonamiento cuantitativo, situación que se evidencia con la evolución del 39 % de porcentaje de éxito en la prueba diagnóstica a un 62 % en la prueba de salida en este tópico.

- Por medio de la investigación se observó que en gran medida la imprecisión y la falta de asertividad que presentan los estudiantes al momento de realizar operaciones aritméticas, están vinculadas con el uso excesivo de calculadoras y aparatos electrónicos que no les permiten razonar, pensar, ni actuar de manera reflexiva, ante esta situación, las técnicas

básicas del cálculo mental y el método Trachtenberg ayudaron a suplir la ausencia de estos dispositivos, contribuyendo al mejoramiento del desempeño que tuvieron los estudiantes en el tópico de operaciones aritméticas y estrategias de cálculo mental, pasando de un porcentaje de éxito de 64 % en la prueba diagnóstica a un 75 % en la prueba de salida.

- El estudio realizado permitió explorar un contexto educativo en particular, dando como resultado el hallazgo de una problemática que pudo ser atendida gracias a la intervención pedagógica en la cual fueron de gran importancia la secuencia didáctica y el módulo de profundización, destacándose este como una nueva práctica cuya efectividad quedó demostrada en los resultados expuestos, ya que a través de todas las fases de su aplicación se apreció progreso en todos y cada uno de los tópicos y componentes analizados.

- Los tópicos donde menor porcentaje de éxito se alcanzó una vez finalizada la intervención pedagógica fueron: patrones de movimiento, repetición y recurrencia (56 %), seguido de las operaciones no convencionales (58 %), lo que indica que el nivel alcanzado aquí es Básico, resultado que es inferior a lo esperado. En contraposición a esto, en los mismos componentes se presentó el mayor incremento porcentual en comparación con la prueba diagnóstica, por lo que a criterio del docente investigador, y con la intención de aumentar la mejoría presentada se considera necesario continuar fortaleciendo el trabajo en estas temáticas.

- Uno de los principales limitantes del estudio tiene que ver con los resultados obtenidos en cuanto al escaso porcentaje de estudiantes que se ubicó en los niveles Superior y Alto, si bien es notoria la mejoría en todos los tópicos evaluados, hay que resaltar que los procesos adquiridos como consecuencia de este estudio deben ser continuos a lo largo del tiempo para que las intervenciones que de ellos se deriven alcancen niveles mayores de efectividad.

- Las propuestas metodológicas que se construyan tomando como punto de referencia esta temática, deben hacer trascender sus alcances a la educación básica primaria, básica secundaria y por qué no, a la educación superior, pero no desde un enfoque netamente expositivo, sino tratando de vincular variados elementos y representaciones matemáticas que estén encaminadas primero que todo, a satisfacer la ineludible necesidad de enseñar a pensar a los estudiantes, gran desafío que lleva consigo el ser docente de esta área.

- Se recomienda tener en cuenta para la elaboración de trabajos futuros en este tema, la implementación de una metodología activa y participativa que involucre no solo los respectivos referentes teóricos, sino también la posibilidad de aplicarlos de manera continua en variados escenarios problematizadores de su contexto, para que el conocimiento matemático adquirido tenga un sentido y un significado especial para los estudiantes.

- Trabajos de esta naturaleza mejoran la motivación, la disposición y la autoestima en los estudiantes, ya que al observar el avance obtenido en las diferentes fases de la intervención, se potencia en ellos la confianza y una actitud más propositiva al momento de enfrentarse a nuevos conocimientos.

Bibliografía

[1] (Arnaiz E.). *Potenciando el cálculo mental en educación primaria a través del juego y los materiales didácticos: una perspectiva innovadora*, Valladolid, (2024), recuperado de https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/75398/TFG-O-2826.pdf?sequence=1

[2] (Parra E.). *Arquímedes: su vida, obras y aportes a la matemática moderna*, San José (Costa Rica), (2009), recuperado de https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/ContribucionesV9_n1_2008/Arquimedes1.pdf

[3] Bell E. *Los grandes matemáticos: su vida y sus obras*, Buenos Aires, (1937), recuperado de https://www.academia.edu/33232853/Los_Grandes_Matematicos_E_T_Bell

[4] Rufián A. *La teoría de números Gauss: si los números pudieran hablar*, Sevilla (España), (2012).

[5] Julio Gerardo Otero. *Sistema rápido de matemáticas básicas - Tablas o no tablas*, San Juan de Pasto, (1996), recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2793981

[6] Pardo A. *¿Y qué del cálculo mental?*, Bogotá, (2016), recuperado de http://repositorio.pedagogica.edu.co/bitstream/handle/20.500.12209/2158/TE-19412.pdf?sequence=1

[7] Palacio N. *Sentipensarte, propuesta de intervención para el fortalecimiento de los procesos de inclusión de estudiantes con discapacidad psicosocial de básica secundaria de la institución educativa Jorge Alberto Gómez Gómez del municipio de Granada, Antioquia*, Medellín, (2022), recuperado de https://repository.upb.edu.co/bitstream/handle/20.500.11912/10643/Sentipensarte.%20Propuesta%20de%20intervenci%c3%b3n%20para%20el%20fortalecimiento.pdf?sequence=1&isAllowed=y

[8] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES]. *Informe de establecimientos educativos Saber 11*, Bogotá, (2024)

[9] Hernández R., Fernández C., Baptista M. *Metodología de la investigación.*, México D.F., (2014)

[10] Escudero C., Cortez L. *Técnicas y métodos cualitativos para la investigación científica.*, Machala (Ecuador), (2018)

[11] Colmenares A., Piñero M. *LA INVESTIGACIÓN ACCIÓN. Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socioeducativas*, Caracas, (2008)

[12] Restrepo B. *La investigación-acción educativa y la construcción de saber pedagógico.*, Medellín, (2004)

[13] Coto A. *Entrenamiento mental*, Madrid, (2021), recuperado de https://1library.co/article/prodigios-calculo-dentro-prodigios-calculo-ejemplos-matematicos-pastores.zxxn47oz

[14] Mota E. *Johann Carl Friedrich Gauss, el niño prodigio que sabia de todas las matemáticas*, México D.F., (2021), recuperado de https://www.azulweb.net/johann-carl-friedrich-gauss-el-nino-prodigio-que-sabia-de-todas-las-matematicas/

[15] Apolonio. *La importancia del juego y el cálculo mental*, Madrid, (2015), recuperado de http://apolonio.es/por-que-es-importante-trabajar-el-calculo-mental/

[16] Porres M. *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías*, Valladolid, (2011), recuperado de https://1library.co/document/myjg205y-integral-definida-calculo-mental-y-nuevas-tecnologias.html

[17] Smartick. *¿Qué son los patrones matemáticos: tipos y ejemplos?*, (2019), recuperado de https://www.smartick.es/blog/matematicas/logica/patrones-matematicos/