



**UNIVERSIDAD  
DE ANTIOQUIA**  
1 8 0 3

# **Universo temprano: inflación y recalentamiento.**

**Emanuel Noreña García**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:  
**Astrónomo**

Tutor:  
Ph.D. Oscar Alberto Zapata Noreña

Universidad de Antioquia  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Medellín, Colombia  
2025

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>2</b>
<b>1. Contexto.</b>	<b>6</b>
<b>2. Problemas del Big Bang Caliente.</b>	<b>11</b>
2.1. El problema de la Planitud. . . . .	11
2.2. El problema del Horizonte. . . . .	14
2.3. El problema de los Monopolos Magnéticos. . . . .	17
<b>3. Modelo Inflacionario.</b>	<b>20</b>
3.1. Inflatón. . . . .	20
3.2. Tensor Energía-Momento. . . . .	21
3.3. Ecuaciones de Movimiento del Campo Inflatón . . . . .	22
3.4. Aproximación de Slow-Roll. . . . .	23
3.5. Modelos de Inflación. . . . .	26
3.5.1. Inflación Caótica. . . . .	26
3.5.2. Inflación en la Cima de la Colina. . . . .	27
3.5.3. Otros modelos. . . . .	28
3.5.4. Desarrollo del modelo inflación caótica. . . . .	30
3.6. Solución a los problemas del BigBang caliente. . . . .	32
3.6.1. Solución al problema de la planitud. . . . .	33
3.6.2. Solución al problema del horizonte . . . . .	35
3.6.3. Solución al problema de los monopolos mediante inflación . . . . .	36
3.7. Régimen Coherente. . . . .	37
<b>4. Recalentamiento.</b>	<b>44</b>
4.1. Soluciones de las ecuaciones de Boltzmann. . . . .	45
4.2. Temperatura de recalentamiento. . . . .	46
<b>5. Problemas Abiertos y Áreas de Investigación Futura.</b>	<b>48</b>
<b>Apendice</b>	<b>50</b>
<b>A.1 Desarrollo para la mecanica del campo <math>\phi</math>.</b>	<b>51</b>
<b>A.2. Desarrollo de las ecuaciones para <math>H</math> y <math>\theta</math>.</b>	<b>53</b>
<b>A.3 Desarrollo ecuaciones regimen coherente.</b>	<b>55</b>

# Resumen.

El estudio del universo temprano ha revelado que su evolución estuvo marcada por una serie de transiciones físicas fundamentales. Entre ellas, la inflación cósmica y el recalentamiento constituyen dos procesos esenciales para comprender la estructura actual del cosmos. La inflación, una fase de expansión exponencial extremadamente rápida, resuelve problemas clave del modelo del Big Bang caliente, como el problema del horizonte, la planitud del universo y la ausencia de monopolos magnéticos. Durante esta etapa, el universo creció exponencialmente en fracciones de segundo, suavizando cualquier curvatura espacial inicial y estableciendo las condiciones para la formación de estructuras a gran escala.

Dentro del marco inflacionario, el inflatón, un campo escalar, juega un papel fundamental en la evolución del universo temprano. Su dinámica se modela bajo diferentes aproximaciones, siendo la más común el régimen de slow-roll, que permite una expansión prolongada antes de la finalización de la inflación. En esta monografía, se exploran diversos modelos inflacionarios, con énfasis en la inflación caótica, donde el inflatón sigue un potencial cuadrático. Se analizan las ecuaciones de movimiento del inflatón en este contexto, considerando la transición al régimen coherente de oscilaciones cuando la inflación llega a su fin.

El recalentamiento, por otro lado, es el proceso mediante el cual la energía del inflatón se convierte en radiación y partículas relativistas, estableciendo las condiciones iniciales para la nucleosíntesis primordial y la formación de estructuras cósmicas. Aunque este mecanismo es una consecuencia natural de la inflación, su descripción detallada sigue siendo un tema de investigación activa. En este trabajo, se aborda el recalentamiento desde una perspectiva teórica, estudiando su conexión con la dinámica inflacionaria y presentando las ecuaciones de Boltzmann que gobiernan la transferencia de energía entre el inflatón y la radiación.

Finalmente, se hace una revisión de los posibles fenómenos físicos asociados a la inflación y el recalentamiento, así como de los experimentos en curso que buscan ampliar nuestro conocimiento en esta área. Aunque no se abordan en detalle, se mencionan aspectos como la posible conexión con la producción de materia oscura, la generación de ondas gravitacionales primordiales y las observaciones futuras que podrían proporcionar restricciones adicionales a los modelos inflacionarios.

# Abstract

The study of the early universe has revealed that its evolution was marked by a series of fundamental physical transitions. Among them, cosmic inflation and reheating are two essential processes for understanding the current structure of the cosmos. Inflation, an extremely rapid phase of exponential expansion, resolves key problems of the hot Big Bang model, such as the horizon problem, the flatness of the universe, and the absence of magnetic monopoles. During this stage, the universe expanded exponentially within fractions of a second, smoothing out any initial spatial curvature and setting the conditions for the formation of large-scale structures.

Within the inflationary framework, the inflaton, a scalar field, plays a fundamental role in the evolution of the early universe. Its dynamics are modeled under different approximations, the most common being the slow-roll regime, which allows for prolonged expansion before inflation ends. In this monograph, various inflationary models are explored, with an emphasis on chaotic inflation, where the inflaton follows a quadratic potential. The equations of motion of the inflaton in this context are analyzed, considering the transition to the coherent oscillation regime when inflation comes to an end.

Reheating, on the other hand, is the process by which the inflaton's energy is converted into radiation and relativistic particles, establishing the initial conditions for primordial nucleosynthesis and the formation of cosmic structures. Although this mechanism is a natural consequence of inflation, its detailed description remains an active research topic. In this work, reheating is approached from a theoretical perspective, studying its connection with inflationary dynamics and presenting the Boltzmann equations that govern the energy transfer between the inflaton and radiation.

Finally, a review is conducted of possible physical phenomena associated with inflation and reheating, as well as ongoing experiments aimed at expanding our knowledge in this area. Although not addressed in detail, aspects such as the potential connection with dark matter production, the generation of primordial gravitational waves, and future observations that could provide additional constraints on inflationary models are mentioned.

# Introducción.

El estudio del universo temprano es fundamental para comprender las condiciones iniciales que dieron lugar a la evolución cósmica que observamos hoy. Dentro de este marco, la inflación cósmica es un modelo teórico que propone que el universo experimentó una expansión exponencial extremadamente rápida en una etapa primigenia, aproximadamente entre  $10^{-43}$  y  $10^{-37}$  segundos [2, sección: 13.2]. Este proceso proporciona una solución natural a varios problemas fundamentales del modelo del Big Bang caliente, tales como la homogeneidad e isotropía del universo, la causalidad de las regiones desconectadas y la ausencia de monopolos magnéticos en las observaciones cosmológicas.

Sin embargo, la inflación por sí sola no explica la transición entre esta fase de expansión acelerada y el estado caliente y denso descrito por la teoría estándar del Big Bang. Para ello, se requiere un mecanismo de conversión de la energía inflacionaria en partículas relativistas, proceso conocido como *recalentamiento*. Durante esta etapa, la energía almacenada en el inflatón, el campo escalar responsable de la inflación, se transfiere a un baño térmico de radiación y partículas, estableciendo así las condiciones iniciales necesarias para la formación de estructuras cósmicas y la nucleosíntesis primordial. Sin el recalentamiento, el universo permanecería en un estado frío y vacío, incompatible con las observaciones actuales [8, sección :2.3].

El objetivo de este trabajo es brindar una descripción detallada de la inflación cósmica y el recalentamiento, explorando los modelos teóricos que intentan explicar esta transición crucial en la historia del universo. Se analizará la dinámica del inflatón bajo diferentes aproximaciones, los regímenes específicos que permiten el recalentamiento, así como las principales evidencias observacionales que respaldan estos procesos. Asimismo, se abordarán los problemas abiertos en la cosmología inflacionaria y las áreas de investigación futura que buscan refinar este marco teórico.

El estudio de la inflación y el recalentamiento es clave para entender cómo se establecieron las condiciones iniciales del universo observable. Además de resolver inconsistencias del Big Bang caliente, la inflación predice la generación de perturbaciones cuánticas que pudieron haber sembrado la formación de estructuras cósmicas. Aunque no se abordarán aquí las fluctuaciones cuánticas del inflatón, es importante señalar que la inflación es el modelo más aceptado para explicar la isotropía del Fondo Cósmico de Microondas (CMB) y la distribución de galaxias en el universo.

Desde el punto de vista experimental, observaciones realizadas por satélites como COBE en 1992, WMAP en 2001 y Planck en 2013 han proporcionado evidencia sólida de la inflación. En particular, COBE detectó fluctuaciones en la temperatura del CMB con una amplitud de  $\delta T/T = 5 \times 10^{-5}$ , un resultado en concordancia con las predicciones inflacionarias. A pesar de este respaldo observacional, persisten interrogantes sobre la naturaleza del inflatón y los detalles exactos del recalentamiento, lo que motiva nuevas investigaciones teóricas y experimentales.

En el capítulo 1 se contextualiza la cosmología del universo temprano y las conclusiones del universo temprano bajo la luz de los datos disponibles del . En el capítulo 2 se expone los

problemas del bigbang caliente. El capítulo 3 introduce las ecuaciones de movimiento y la dinámica del campo escalar bajo el cual inflación se desarrolla, se da entrada a algunos modelos de inflación enfatizando el modelo de preferencia para este trabajo que es el de inflación caótica, esto porque es un modelo que expone las riquezas teóricas necesarias para explicar el comportamiento del inflatón. El capítulo 4 aborda el proceso de recalentamiento y su relevancia en la transición hacia el Big Bang caliente. Finalmente, en el capítulo 5 se discuten los problemas abiertos en la teoría inflacionaria y las direcciones futuras de investigación.

# Capítulo 1

## Contexto.

El estudio de las etapas del universo temprano es fundamental para establecer una conexión entre los procesos físicos fundamentales y las observaciones cosmológicas actuales. Dado que el Universo comenzó en un estado extremadamente caliente y posteriormente se enfrió, pudo haber experimentado una serie de transiciones en su "sopa" primordial, de manera análoga a cómo el agua pasa de vapor a líquido y luego a sólido al enfriarse bajo condiciones estándar de temperatura y presión. Un caso clave es la transición desde la inflación hasta el recalentamiento. Durante la inflación, el universo experimentó una expansión exponencial en la que la energía estaba dominada por el campo inflatón, sin embargo, una vez finalizada esta fase, la energía almacenada en el inflatón debía convertirse en radiación y partículas relativistas del modelo estándar para dar inicio al Big Bang caliente. Este proceso, conocido como recalentamiento, es esencial porque restablece el equilibrio térmico en el universo, permitiendo que las interacciones entre partículas den lugar a la evolución que culmina en la formación de los elementos ligeros durante la nucleosíntesis primordial. La forma en que se da el recalentamiento depende de la tasa de decaimiento del inflatón y de la naturaleza de sus acoplamientos con otras partículas. Un escenario plausible es que el inflatón oscile alrededor de su mínimo potencial y se desintegre en partículas relativistas, cuya termalización definiría la temperatura de recalentamiento. Aunque esto es un área de investigación activa, la comprensión detallada de esta etapa sigue siendo un desafío abierto en la cosmología moderna (ver referencia 7, capítulo: 21 para detalles técnicos).

Entre los eventos más importantes que determinan la secuencia de formación del universo se tiene:

- **Inflación:**  $T \sim 10^{16} \text{ GeV}$  [ $t \sim 10^{-34} \text{ s}$ ] [2, sección: 13.2].

La inflación se define como una era durante la cual la tasa de incremento del factor de escala se acelera, lo que corresponde a una gravedad repulsiva:

$$\text{INFLACIÓN} \iff \ddot{a} > 0. \quad (1.1)$$

A menudo se describe como una expansión extremadamente rápida, especialmente si se compara con el ritmo de expansión actual del universo.

Existe una expresión equivalente para la condición de inflación que le da una interpretación más física:

$$\text{INFLACIÓN} \iff \frac{d}{dt} \left( \frac{H^{-1}}{a} \right) < 0, \quad (1.2)$$

donde  $H^{-1}/a$  es la longitud de Hubble comóvil, la condición para la inflación es que la longitud de Hubble comóvil, que es la escala característica más importante del universo en expansión disminuye con el tiempo[7,sección:18.1].

Este régimen de expansión acelerada provoca un crecimiento exponencial en el tamaño del universo, que se cuantifica mediante el número de e-folds  $N$ , definido como:

$$N = \int_{t_i}^{t_f} H dt, \quad (1.3)$$

donde  $t_i$  y  $t_f$  representan los instantes inicial y final de la inflación, respectivamente. El número de e-folds debe ser al menos  $N \gtrsim 60$ , asegurando que las escalas observadas en el universo actual estuvieron dentro del horizonte causal antes del inicio de la inflación[8,sección:2.2.2].

- **Recalentamiento:**  $T \sim 10^{16} - 10^{15} \text{ GeV}$  [ $t \sim 10^{-32} - t \sim 10^{-30} \text{ s}$ ][3,sección:10.2].  
Etapa que ocurre cuando el tiempo de Hubble era  $H^{-1} \sim 10^{-34} \text{ s}$ . Supongamos que el universo permaneció en el estado inflacionario durante  $10^{-32} \text{ s}$ . (Esto puede parecer un tiempo corto, pero hay que recordar que la escala de tiempo relevante en cosmología es el tiempo de Hubble, por lo que la inflación duró aproximadamente 100 veces el tiempo de Hubble, es decir, 100 veces la edad del universo en el momento en que la inflación comenzó)[3,sección:10.2].

En esencia, la transición que nos interesa es saber como el inflatón, una partícula súper pesada decae en partículas relativistas que forman la materia, dando paso de la inflación al recalentamiento. Cuando la inflación terminó, la energía del vacío del campo inflatón se transfirió a partículas ordinarias, lo que provocó un recalentamiento del universo, la energía potencial del campo inflatón responsable de la expansión exponencial, se transfiere al plasma cósmico mediante su decaimiento en partículas elementales estándar de muy altas energías. Esto inicia la era de radiación, donde el universo se llena de quarks, gluones, leptones y fotones altamente energéticos[8,sección:3.1.1].

Aunque el recalentamiento marca el inicio de la era de radiación, la manera exacta en que la energía del inflatón se convierte en partículas del plasma cósmico sigue siendo una cuestión abierta. Factores como la forma del potencial inflacionario y los acoplamientos del inflatón pueden generar diferencias significativas en la evolución térmica del universo primitivo. En este sentido, el estudio de este proceso permite explorar cómo la inflación podría conectar sus predicciones con eventos observables en el universo temprano, proporcionando un marco para interpretar la transición hacia la cosmología estándar.

- **Transición electrodébil:**  $T \sim 10^3 - 10^2 \text{ GeV}$  [ $t \sim 10^{-12} - 10^{-6} \text{ s}$ ] [6,sección 1.3].  
La simetría electrodébil (EW) del Modelo Estándar se rompió durante la transición de fase electrodébil. Las fuerzas electromagnética y nuclear débil se convirtieron en entidades distintas y las partículas de materia adquirieron sus masas. Aunque los fundamentos de la ruptura de simetría electrodébil están bien comprendidos—y han sido verificados experimentalmente con el descubrimiento del bosón de Higgs (para más detalles técnicos remítase a la referencia[6,sección 1.3]). La dinámica detallada de la transición de fase EW y sus consecuencias observacionales siguen siendo un tema de investigación activa.

Por encima de 100 GeV (o un billonésimo de segundo después del Big Bang), todas las partículas del Modelo Estándar estaban en equilibrio y, por lo tanto, estaban presentes en

abundancias aproximadamente iguales. Una vez que la temperatura cae por debajo de la masa de una especie de partícula, las partículas y antipartículas comienzan a aniquilarse, mientras que el proceso inverso—la creación espontánea de pares partícula-antipartícula se vuelve ineficaz. Las primeras partículas en desaparecer del universo de esta manera fueron los quarks top (las partículas más pesadas del Modelo Estándar). Luego siguieron los bosones  $W$  y  $Z$ . Después, el Higgs, los quarks bottom y charm, y el leptón tau [6, sección 1.3].

■ **Nucleosíntesis primordial:**  $T \sim 0,1 - 1 \text{ MeV}$  [ $t \sim 1 \text{ s} - 3 \text{ min}$ ] [1, sección:9.1].

Tuvo lugar cuando las temperaturas eran lo suficientemente altas, en el rango de  $1 - 10 \text{ MeV}$ , para permitir reacciones nucleares entre protones y neutrones. A medida que el universo se expandía y enfriaba, los neutrones y protones libres comenzaron a fusionarse en núcleos ligeros. Sin embargo, este proceso se detuvo rápidamente debido a varias limitaciones fundamentales. Primero, la tasa de expansión del universo provocó una disminución rápida de la densidad y temperatura, reduciendo la probabilidad de colisiones nucleares efectivas. Segundo, la interacción débil dejó de ser eficiente cuando la temperatura descendió a aproximadamente  $0,8 \text{ MeV}$ , lo que congeló la proporción de neutrones a protones, limitando la cantidad de neutrones disponibles para la formación de elementos más pesados. Tercero, la ausencia de núcleos estables con números de masa  $A = 5$  y  $A = 8$  interrumpió la progresión de la nucleosíntesis. En particular, los núcleos  ${}^5\text{He}$  y  ${}^5\text{Li}$  son inestables y se desintegran rápidamente, evitando la formación de núcleos más masivos a partir de  ${}^4\text{He}$ , mientras que el berilio-8 ( ${}^8\text{Be}$ ) tiene un tiempo de vida extremadamente corto y se desintegra casi inmediatamente en dos núcleos de helio-4. Esta barrera estructural impidió la formación de carbono y elementos más pesados a través de reacciones nucleares directas en la BBN. Finalmente, la nucleosíntesis primordial concluyó cuando la temperatura descendió por debajo de  $10^8 \text{ K}$ , aproximadamente 20 minutos después del Big Bang, momento en el cual la densidad del universo se volvió demasiado baja para sostener reacciones de fusión nuclear significativas [1, sección:9.1]. A partir de ese punto, la producción de elementos quedó en manos de las estrellas, donde otros procesos nucleares encargados de la fusión nuclear permitirían la síntesis de elementos más pesados en etapas posteriores de la evolución cósmica.

■ **Transición de materia-radiación:**  $T \sim 0,75 \text{ eV}$  [ $t \sim 47,000 \text{ años}$ ].

La transición de materia-radiación ocurre cuando la densidad de materia  $\rho_m$  y la densidad de radiación  $\rho_r$  son iguales, es decir, cuando:

$$\rho_m(a_{\text{eq}}) = \rho_r(a_{\text{eq}}). \quad (1.4)$$

Dado que la densidad de materia evoluciona como  $\rho_m(a) = \rho_{m0}a^{-3}$  y la densidad de radiación como  $\rho_r(a) = \rho_{r0}a^{-4}$ , la condición de igualdad se expresa como:

$$\frac{\rho_{m0}}{\rho_{r0}} = a_{\text{eq}}. \quad (1.5)$$

Usando los valores observacionales actuales  $\rho_{m0} \approx 0,3\rho_c$  (densidad de materia en el presente) y  $\rho_{r0} \approx 4,2 \times 10^{-5}\rho_c$  [1, sección:5.5], se obtiene:

$$a_{\text{eq}} = \frac{4,2 \times 10^{-5}}{0,3} \approx 1,4 \times 10^{-4}. \quad (1.6)$$

Como se mostrará mas adelante, la temperatura de la radiación en función del factor de escala es  $T(a) = T_0 a^{-1}$ , por lo que en el momento de igualdad se da entonces:

$$T_{\text{eq}} = T_0 a_{\text{eq}}^{-1} = 2,725 \times (1,4 \times 10^{-4})^{-1}. \quad (1.7)$$

Para expresar la temperatura en electronvoltios, usamos la conversión  $1 \text{ K} \approx 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV}$ , así se tiene:

$$T_{\text{eq}} = 2,725 \times 10^4 \times 8,617 \times 10^{-5} \text{ eV} \approx 0,75 \text{ eV}. \quad (1.8)$$

El tiempo cósmico en un universo dominado por radiación se relaciona con la temperatura mediante[6,sección: 3.1.3]:

$$t \approx \frac{1}{H_0} \left( \frac{T_0}{T} \right)^2. \quad (1.9)$$

Tomando  $H_0^{-1} \approx 4,35 \times 10^{17} \text{ s}$  [1,sección: 4.2 ; 3,sección: 8.1]:,

$$t_{\text{eq}} = 4,35 \times 10^{17} \times \left( \frac{2,725}{0,75} \right)^2 \approx 4,7 \times 10^4 \text{ años}. \quad (1.10)$$

Esto confirma que la transición de materia-radiación ocurrió aproximadamente a  $T \approx 0,75 \text{ eV}$  y  $t \approx 47,000$  años, momento en el cual la materia comenzó a dominar la evolución del universo.

- **Desacoplamiento del CMB:**  $T \sim 0,26 \text{ eV}$  [ $t \sim 380,000$  años][6,sección:1.3].

La radiación de cuerpo negro del Fondo Cósmico de Microondas (CMB) sigue la distribución de Planck, que describe la emisión térmica de un gas de fotones en equilibrio. La Figura 1.2 representa esta radiación en función de la variable adimensional  $x = \frac{hf}{kT}$ , donde  $h$  es la constante de Planck,  $f$  es la frecuencia de la radiación,  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  es la temperatura del CMB. La intensidad normalizada de la radiación se expresa como :

$$I(x) = \frac{c^3 h^2}{8\pi k^3 T^3} B_{\nu}(T), \quad (1.11)$$

donde  $B_{\nu}(T)$  es la función de Planck. La forma de la curva se debe a la combinación del término de crecimiento  $x^3$  en la parte baja del espectro y la exponencial en el denominador que domina a altas frecuencias, lo que genera un pico característico en  $x \approx 2,82$ , correspondiente a la frecuencia máxima de emisión(Figura 1.2). Este resultado concuerda con la ley de desplazamiento de Wien, que establece que la frecuencia del máximo de emisión es proporcional a la temperatura.

El CMB es la radiación remanente del universo primitivo, emitida cuando los fotones dejaron de interactuar eficientemente con los electrones libres a través de la dispersión de Thomson, en un evento conocido como el desacople de fotones. Este proceso ocurrió a una temperatura aproximada de  $T \sim 0,1 \text{ eV}$ , durante la *recombinación*, cuando los electrones se combinaron con protones para formar átomos neutros. A partir de entonces, los fotones viajaron libremente a través del cosmos, enfriándose debido a la expansión del universo hasta alcanzar la temperatura actual de  $2,725 \text{ K}$ . El CMB constituye una

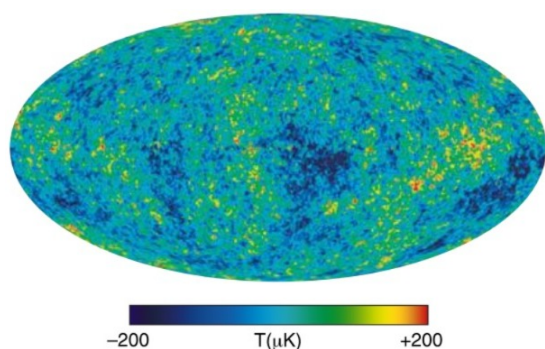


Figura 1.1: Mapa de anisotropía del CMB según WMAP, donde las variaciones de temperatura están en el orden de  $\delta T \sim 100 \mu K$  [4, sección, 1.2.5].

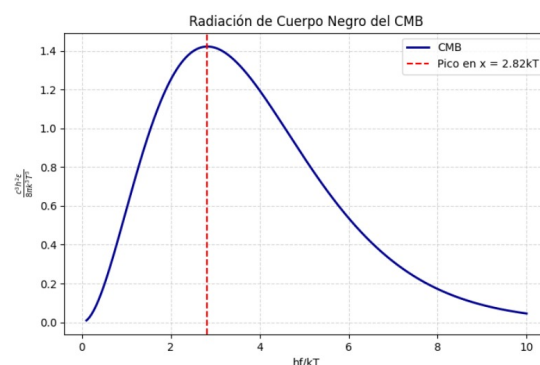


Figura 1.2: Densidad de energía de la radiación de cuerpo negro como función de la frecuencia  $f$ .

"fotografía" del universo cuando tenía aproximadamente 380,000 años, proporcionando información clave sobre las condiciones iniciales de la estructura cósmica.

La medición del CMB ha sido clave en el desarrollo de la cosmología moderna. COBE (Cosmic Background Explorer), lanzado en 1989 [1, sección: 8.1], confirmó que el espectro del CMB corresponde a un cuerpo negro con una temperatura de 2.73 K (Figura 1.2), proporcionando evidencia sólida de que el universo estuvo en equilibrio térmico en sus primeras etapas. Además, sus mediciones respaldaron la idea de que, tras la inflación, el universo experimentó una fase de recalentamiento en la que la energía del inflatón se convirtió en radiación térmica. Posteriormente, WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe), lanzado en 2001 [1, sección: 8.1], permitió una caracterización más precisa del CMB, refinando la medición de la temperatura y ayudando a establecer restricciones más estrictas sobre la duración y las condiciones del recalentamiento. Estos experimentos proporcionaron datos fundamentales para vincular la inflación con el estado termal del universo temprano y comprender los procesos que llevaron al dominio de la radiación en las primeras etapas evolutivas del cosmos.

Si bien los modelos de inflación predicen con éxito una fase de expansión exponencial, la naturaleza exacta del inflatón un campo escalar que domina la dinámica del universo durante la fase inflacionaria, y los detalles del recalentamiento siguen siendo cuestiones abiertas en la cosmología moderna. La forma del potencial inflacionario, el acoplamiento del inflatón con otras partículas y los mecanismos precisos de conversión de energía son aspectos cruciales que requieren mayor exploración teórica y observacional.

Además, la secuencia de fases abordadas en este capítulo—desde la inflación hasta la transición de materia-radiación y posterior formación del CMB, resulta fundamental para comprender la evolución del universo hasta su estado actual. Estas transiciones no solo definen el marco térmico y dinámico del cosmos, sino que también muestran una notable consistencia con el modelo inflacionario, proporcionando evidencia indirecta de que una fase de expansión acelerada precedió al Big Bang caliente. Así, el estudio detallado de estas etapas es clave para conectar la física del universo temprano con las observaciones cosmológicas actuales.

## Capítulo 2

### Problemas del Big Bang Caliente.

La cosmología del Big Bang caliente proporciona un marco sólido para describir la evolución del universo primitivo y la formación del CMB. Según este modelo, el universo en sus primeras etapas era un plasma denso y opaco compuesto por electrones, protones, neutrones y fotones en equilibrio térmico, donde la radiación interactuaba constantemente con la materia. A medida que el universo se expandía y enfriaba, la recombinación permitió la formación de átomos neutros, haciendo que el universo se volviera transparente y liberando la radiación que hoy observamos como el CMB. La temperatura y el espectro de cuerpo negro del CMB, confirmados por experimentos validando la idea de un universo en equilibrio térmico en sus primeras etapas.

Sin embargo, a pesar de su éxito en describir la evolución térmica del universo desde la nucleosíntesis primordial, con predicciones confirmadas experimentalmente a partir de esta etapa en adelante, el modelo del Big Bang caliente no proporciona un marco teórico completo para las condiciones iniciales del cosmos, entre ellas, la sorprendente homogeneidad del CMB en regiones del cielo que, según la expansión estándar, no habrían estado causalmente conectadas; la aparente planitud del universo actual, que requiere una fineza extrema en las condiciones iniciales; y la predicción de una abundancia significativa de monopolos magnéticos que no se observa en la naturaleza. Estos problemas sugieren que el universo primitivo experimentó procesos adicionales que no se explican completamente dentro del marco estándar del Big Bang.

En 1981, Alan Guth propuso la teoría de la inflación como una solución natural a estos problemas[2,sección:13.2]. La inflación postula una fase de expansión exponencial extremadamente rápida en las primeras fracciones de segundo del universo, lo que permite establecer condiciones iniciales homogéneas, resolver la cuestión de la planitud y diluir la densidad de defectos topológicos como los monopolos. En esta sección, analizaremos cómo la inflación aborda estos tres problemas fundamentales: el problema de la planitud, el problema del horizonte y el problema de los monopolos magnéticos.

#### 2.1. El problema de la Planitud.

Las ecuaciones de Friedmann describen la dinámica de la expansión del universo bajo el marco de la relatividad general. La primera ecuación de Friedmann es:

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}, \quad (2.1)$$

donde  $H$  es la tasa de expansión del universo (parámetro de Hubble),  $\rho$  es la densidad de energía,  $k$  es la curvatura espacial,  $c$  es la velocidad de la luz,  $R_0$  es la escala de curvatura actual y  $a$  es el factor de escala normalizado a  $a_0 = 1$  en el presente.

Dividiendo por  $H_0^2$ , la ecuación se reescribe como:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \Omega - \frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2 a^2}, \quad (2.2)$$

donde  $\Omega = \rho/\rho_c$  es el parámetro de densidad y  $\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$  es la densidad crítica actual.

Definiendo el valor de la curvatura como  $1 - \Omega_0$  en el presente ( $a_0 = 1$ ), obtenemos:

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}, \quad (2.3)$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la ecuación de Friedmann general obtenemos:

$$|1 - \Omega| = \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{H^2 a^2}. \quad (2.4)$$

Este valor debe ser siempre positivo, ya que define la magnitud de la curvatura del universo. En términos geométricos, la curvatura puede ser cero ( $\Omega_0 = 1$ ) para un universo espacialmente plano, positiva ( $\Omega_0 > 1$ ) para un universo cerrado con curvatura esférica, o negativa ( $\Omega_0 < 1$ ) para un universo abierto con curvatura hiperbólica. Sin embargo, la curvatura no puede cambiar de signo de manera continua en el tiempo, es decir, un universo que comienza con curvatura positiva no puede evolucionar a una curvatura negativa, simplemente porque no hay un mecanismo físico en la historia del universo que lo permita. Por lo tanto, aunque la magnitud de  $|1 - \Omega|$  puede evolucionar con el tiempo, su signo permanece constante a lo largo de la historia cósmica.

Las soluciones de las ecuaciones de Friedmann para modelos dominados por radiación y materia proporcionan las siguientes dependencias:

Para un universo dominado por radiación ( $a \propto t^{1/2}$ ):

$$H \propto \frac{1}{t}. \quad (2.5)$$

Sustituyendo en la ecuación de  $|1 - \Omega|$ :

$$|1 - \Omega| \propto \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{(1/t)^2 (t^{1/2})^2} \propto t \propto a. \quad (2.6)$$

Para un universo dominado por materia ( $a \propto t^{2/3}$ ):

$$H \propto \frac{1}{t}. \quad (2.7)$$

Sustituyendo en la ecuación de  $1 - \Omega$ :

$$|1 - \Omega| \propto \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{(1/t)^2(t^{4/3})^2} \propto t^{2/3} \propto a. \quad (2.8)$$

Observaciones actuales indican que el universo es extremadamente plano, con un valor medido de  $|1 - \Omega_0| \leq 0,005$ . Si extrapolamos esta ecuación hacia el pasado, encontramos que  $1 - \Omega$  decrece hacia el pasado sin importar si el universo es dominado por radiación o materia. Específicamente, en épocas clave tenemos:

- En la época de la igualdad radiación-materia ( $a \approx 1,4 \times 10^{-4}$ ):

$$|1 - \Omega| \approx 2 \times 10^{-6}. \quad (2.9)$$

- En la época de la nucleosíntesis primordial ( $a \approx 10^{-9}$ ), se obtiene:

$$|1 - \Omega| \approx 7 \times 10^{-16}. \quad (2.10)$$

- En la época de Planck ( $a \approx 10^{-32}$ ), se obtiene:

$$|1 - \Omega| \approx 2 \times 10^{-62}. \quad (2.11)$$

Los valores del factor de escala para la nucleosíntesis y la época de Planck pueden ser calculados y comprobados teniendo en cuenta que en un universo dominado por radiación, la ecuación de Friedmann es:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_r. \quad (2.12)$$

Para la densidad de energía de la radiación, se tiene:

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (2.13)$$

donde  $g_*$  representa el número de grados de libertad relativistas que para un valor de la temperatura mayor o igual a 173 GeV  $g_*=106.75$  y para la época de la nucleosíntesis  $g_*=10.75$ [6, sección:3.1.2].

Sustituyendo la expresión de la densidad de radiación en la ecuación de Friedmann, se obtiene:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\pi^2}{30} g_* T^4. \quad (2.14)$$

Dado que en un universo dominado por radiación la relación de Hubble es :

$$H \sim \frac{1}{t},$$

igualamos ambas expresiones:

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3} \cdot \frac{\pi^2}{30} g_* T^4. \quad (2.15)$$

despejando  $t$  se nota que:

$$t \propto \frac{1}{g_*^{1/2} T^2}. \quad (2.16)$$

Dado que en un universo dominado por radiación el factor de escala sigue la evolución:

$$a \propto t^{1/2},$$

sustituyendo la relación obtenida para  $t$ :

$$a \propto \frac{1}{T}. \quad (2.17)$$

Esto muestra que la temperatura del universo es inversamente proporcional al factor de escala, lo que significa que a medida que el universo se expande, la temperatura disminuye en la misma proporción. Con esta ecuación encontramos los valores de  $a$  dado el valor de la temperatura y encontrar el valor de la curvatura.

Los valores calculados para  $|1 - \Omega|$  son extraordinariamente pequeños en el pasado, lo que plantea una cuestión fundamental: ¿por qué el universo comenzó en un estado tan cercano a la planitud sin un mecanismo físico que lo explique? Si el universo primitivo hubiese tenido un parámetro de densidad ligeramente diferente, con  $|1 - \Omega|$  mayor que unos pocos órdenes de magnitud respecto a los valores calculados, su evolución habría sido drásticamente distinta. Un universo con una densidad inicial apenas superior a la crítica habría colapsado en una escala de tiempo muy corta, mientras que uno con menor densidad habría crecido hasta diluirse rápidamente sin formar estructuras.

El problema de la planitud, por lo tanto, no es simplemente una cuestión de ajuste fino, sino un indicio de que la evolución del universo requiere condiciones iniciales extremadamente específicas dentro del marco del Big Bang caliente. La necesidad de explicar cómo el universo mantuvo una curvatura despreciable durante toda su historia cósmica ha llevado al desarrollo de modelos que proponen mecanismos dinámicos capaces de fijar  $|1 - \Omega| \approx 0$  en el pasado, en lugar de asumirlo como una condición arbitraria. La teoría de la inflación cósmica surge precisamente como una posible solución a este problema, proporcionando un escenario en el que la expansión exponencial en el universo temprano hace que cualquier curvatura inicial se vuelva insignificante en escalas cosmológicas posteriores.

## 2.2. El problema del Horizonte.

El problema del horizonte surge en el contexto del modelo estándar del Big Bang al considerar la homogeneidad observada en la radiación cósmica de fondo (CMB, por sus siglas en inglés). En particular, regiones del universo que hoy están separadas por grandes distancias angulares en el cielo no habrían tenido tiempo suficiente para intercambiar información causal bajo un escenario puramente relativista, dada la finitud de la velocidad de la luz y el tiempo transcurrido desde el Big Bang. Este problema pone en duda

la capacidad del modelo estándar para explicar la isotropía observada en el universo sin mecanismos adicionales.

Su expresión viene dada por [6,sección:4.1.1]:

$$d_H(t) = c \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (2.18)$$

donde  $a(t)$  es el factor de escala. Para expresar esta ecuación en términos de  $a$ , usamos la regla de la cadena:

$$dt' = \frac{da}{aH(a)}, \quad (2.19)$$

lo que nos permite reescribir la distancia del horizonte como:

$$d_H(a) = c \int_0^a \frac{da'}{a'H(a')}. \quad (2.20)$$

En términos intuitivos, la **distancia de horizonte de partículas**  $d_H(t)$  representa la máxima distancia que la luz (o cualquier señal causal) ha podido recorrer desde el inicio del universo hasta un tiempo  $t$ . Es, en esencia, el **rango de comunicación causal** en un universo en expansión.

Dado que la luz viaja a velocidad finita y el espacio-tiempo está en evolución,  $d_H(t)$  nos indica qué regiones del universo han tenido tiempo suficiente para interactuar causalmente. En un universo en expansión, esta distancia depende del factor de escala  $a(t)$ , ya que el ritmo al que la luz cubre distancias varía con la historia de la expansión cósmica.

Para determinar el horizonte de partículas  $d_H(t)$  en la última dispersión, es necesario calcular la tasa de expansión de Hubble dada por:

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3} + \Omega_{\Lambda,0}, \quad (2.21)$$

En el modelo de referencia actual, las densidades normalizadas de radiación, materia y energía oscura están dadas por  $\Omega_{r,0} \approx 9,2 \times 10^{-5}$ ,  $\Omega_{m,0} \approx 0,3$  y  $\Omega_{\Lambda,0} \approx 0,7$ , respectivamente [1,sección : 5.5 ; 2,capitulo 8]. Evaluando la distancia del horizonte de partículas entre  $a = 0$  (correspondiente al Big Bang y el origen del universo) y  $a = 1$  (el presente), encontramos que su valor es aproximadamente de 14000 megaparsecs.

Para determinar el horizonte de partículas  $d_H(t_{ls})$  en la última dispersión, solo es necesario modificar los límites de integración, los cuales están definidos por el factor de escala. Sabiendo que el corrimiento al rojo en la última dispersión es  $z_{ls} = 1090$  [1,sección :8.3 ; 2,capitulo:8], podemos calcular el factor de escala usando la relación:

$$a = \frac{1}{1+z}, \quad (2.22)$$

obteniendo:

$$a_{ls} = \frac{1}{1+1090} = \frac{1}{1091} \approx 9,17 \times 10^{-4}. \quad (2.23)$$

Esto lleva a que el horizonte de partículas en ese momento, desde  $a = 0$  hasta  $a_{t_s}$  sea aproximadamente de 0,251 megaparsecs.

Lo anterior permite apreciar que la distancia entre nosotros y la superficie de última dispersión es aproximadamente 0,98 veces la distancia de horizonte. Sin embargo, surge una cuestión fundamental: ¿qué ocurre con dos puntos ubicados a una distancia de  $2d_H(t_s)$ , es decir, puntos separados por un ángulo de  $180^\circ$  en el cielo? Estos puntos, en principio, están causalmente desconectados, ya que no ha habido suficiente tiempo desde el Big Bang para que una señal de luz, o cualquier otra forma de interacción, los haya vinculado.

No obstante, al observar el fondo cósmico de microondas (CMB), encontramos que la temperatura promedio y el espectro de radiación son esencialmente los mismos en todas las direcciones, independientemente de la separación angular, incluso en escalas tan grandes como  $180^\circ$ . ¿Cómo es posible que regiones que nunca estuvieron en contacto causal compartan propiedades tan homogéneas? Esta aparente contradicción es el núcleo del problema del horizonte y plantea un desafío significativo para el modelo estándar del Big Bang sin mecanismos adicionales de homogeneización.

Para apreciar y visualizar un poco mejor la cuestión sobre la causalidad se define la distancia angular  $d_A$  es una medida cosmológica que relaciona el tamaño físico de un objeto con el ángulo bajo el cual es observado desde la Tierra. El significado físico de la *distancia angular*  $d_A$  es que representa la relación entre el tamaño real de un objeto en el universo y su tamaño aparente en el cielo. En esencia,  $d_A$  nos indica **cómo se proyecta el tamaño físico de un objeto en un espacio curvo y en expansión**, permitiéndonos inferir su distancia en un modelo cosmológico dado.

A diferencia de la distancia euclidiana intuitiva,  $d_A$  incorpora los efectos de la expansión del universo y la geometría del espacio-tiempo, lo que significa que no siempre crece con el corrimiento al rojo  $z$ , sino que puede alcanzar un máximo y luego disminuir a grandes distancias. Esto refleja la manera en que la luz viaja en un universo dinámico, afectando la percepción del tamaño angular de objetos distantes. Entonces, la distancia angular se define como[1,sección:6.3]:

$$d_A = \frac{\ell}{\delta\theta} \quad (2.24)$$

donde  $\ell$  es el tamaño propio del objeto y  $\delta\theta$  es el ángulo subtendido en el cielo.

Para a la última dispersión es aproximadamente[1,sección:8.4]:

$$d_A \approx \frac{d_H(t_s)}{\theta} \quad (2.25)$$

despejando para  $\theta$ :

$$\theta \approx \frac{0,251 \text{ Mpc}}{d_A} \quad (2.26)$$

Dado que la distancia angular a la última dispersión es aproximadamente  $d_A \approx 13,7 \text{ Gpc}$  en el modelo de referencia [1,sección:8.4], obtenemos:

$$\theta \approx \frac{0,251 \text{ Mpc}}{13,8 \times 10^3 \text{ Mpc}} \approx 1,1^\circ \quad (2.27)$$

Esta estimación muestra que el horizonte de partículas en la recombinación corresponde a un tamaño angular de  $1,1^\circ$  en el cielo. Por lo tanto, regiones separadas por más de este ángulo no habrían tenido tiempo para interactuar causalmente en el modelo estándar. Esta conexión justifica la comparación entre distancias físicas y ángulos en el análisis del problema del horizonte.

Utilizando la relación entre el tamaño físico de una región en la superficie de última dispersión y su tamaño angular en el cielo podemos apreciar la coincidencia sorprendente: en la superficie de última dispersión, regiones separadas por más de 0,251 Mpc no podrían haber estado en contacto causal en el modelo estándar. Sin embargo, al observar el CMB, encontramos que regiones separadas por ángulos superiores a  $1,1^\circ$  presentan temperaturas idénticas con fluctuaciones de solo una parte en  $10^5$ . La isotropía del CMB es aún más notable si consideramos que la superficie de última dispersión puede dividirse en aproximadamente 40,000 regiones independientes[1,sección:10.2 ; 6, sección:4.1.1], que, según el modelo estándar, nunca intercambiaron información. Aun así, comparten la misma temperatura promedio con fluctuaciones minúsculas. Este escenario desafía la intuición y sugiere que debe existir un mecanismo físico que haya permitido esta homogeneización.

Si bien en la solución de este problema la inflación es el paradigma dominante, algunas alternativas han sido propuestas, incluyendo modelos que modifican la métrica espacio-temporal o que postulan fases previas de contracción. Es esencial explorar estas opciones sin descartarlas prematuramente, dado que la inflación aún carece de una verificación experimental directa. En este sentido, estudios futuros sobre la polarización del CMB y las ondas gravitacionales primordiales pueden proporcionar evidencia clave sobre la dinámica del universo temprano.

### 2.3. El problema de los Monopolos Magnéticos.

El problema del monopolos, es decir, la aparente ausencia de monopolos magnéticos( entidades exóticas que portarían una carga magnética aislada, en contraste con los dipolos magnéticos de los imanes ordinarios.) en el universo, no es un problema puramente cosmológico, sino que surge de la combinación del escenario del Big Bang caliente con el concepto de una Teoría de Gran Unificación (GUT) en la física de partículas. GUT es una teoría de campos que intenta unificar la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear débil y la fuerza nuclear fuerte.[1,sección:10.3].

En las teorías GUT, se postula que a energías superiores a  $\sim 10^{15}$  GeV, las interacciones fundamentales—electromagnética, nuclear fuerte y nuclear débil—estaban unificadas en un solo grupo de simetría. A medida que el universo se expandía y enfriaba, ocurrieron transiciones de fase en las que se rompieron simetrías fundamentales, dando lugar a defectos topológicos. Estos defectos son configuraciones estables en los campos que describen la materia y sus interacciones, y aparecen debido a la forma en que la simetría del sistema se rompe durante la transición de fase. En la teoría de campos, los defectos topológicos surgen cuando ciertas regiones del universo quedan 'atrapadas' en diferentes

estados tras la ruptura de simetría, impidiendo una transición uniforme y dando lugar a estructuras persistentes en el espacio, para mas detalles sobre rompimiento de simetría, defectos topológicos y transiciones de fase ver referencia [7]. Este mecanismo es análogo a la formación de defectos en materiales cristalinos cuando estos se enfrían rápidamente. Un ejemplo cotidiano de este fenómeno es la congelación del agua: a temperaturas superiores a 273 K, las moléculas de agua están dispuestas de manera aleatoria, lo que implica una simetría rotacional. Sin embargo, cuando la temperatura desciende por debajo de 273 K, el agua se congela formando una estructura cristalina con ejes de simetría definidos, perdiendo la simetría rotacional global.

Las teorías GUT predicen que los monopolos deberían haberse producido con una densidad numérica del orden de un monopolo por volumen de Hubble en el momento de la transición de fase:

$$n_M(t_{\text{GUT}}) \sim \frac{1}{(2ct_{\text{GUT}})^3} \sim 10^{82} \text{ m}^{-3}, \quad (2.28)$$

donde  $t_{\text{GUT}} = 10^{-35} \text{ s}$  [1, sección: 10.3].

La densidad de energía de los monopolos en el momento de su formación es:

$$\rho_M(t_{\text{GUT}}) \sim (m_M c^2) n_M \sim 10^{94} \text{ TeV m}^{-3}. \quad (2.29)$$

Donde la masa del monopolo es  $\sim (m_M c^2) = 10^{17} \text{ GeV}$  [4, sección: 12.2.1].

Por otro lado, la densidad de energía de la radiación esta dada por (2.13):

$$\rho_\gamma(t_{\text{GUT}}) \approx \alpha T_{\text{GUT}}^4 \sim 10^{104} \text{ TeV m}^{-3}. \quad (2.30)$$

Inicialmente, la densidad de los monopolos es mucho menor que la de la radiación, por lo que la evolución del universo continuó dominada por la radiación. Sin embargo, dado que los monopolos son partículas extremadamente masivas, se vuelven no relativistas poco después de su formación y su densidad de energía comienza a escalar como  $\rho_M \propto a^{-3}$ . mientras tanto, la densidad de energía de la radiación escala como  $\rho_\gamma \propto a^{-4}$ .

Como consecuencia, aunque los monopolos fueran inicialmente subdominantes, su densidad de energía decrece más lentamente que la de la radiación, lo que implica que en algún punto de la evolución cósmica llegarían a dominar la densidad de energía del universo. Este cambio ocurriría cuando el factor de escala se hubiera incrementado en aproximadamente un factor de  $10^{10}$ , lo que correspondería a una temperatura de:

$$T \sim 10^{-10} T_{\text{GUT}} \sim 10^4 \text{ GeV}. \quad (2.31)$$

Donde la densidad de los monopolos en este momento sería aproximadamente:

$$\rho_M(T \sim 10^4 \text{ GeV}) \sim \rho_M(t_{\text{GUT}}) \left( \frac{a_{\text{GUT}}}{a} \right)^3 \sim 10^{94} \times 10^{-30} \text{ TeV m}^{-3} \sim 10^{64} \text{ TeV m}^{-3}. \quad (2.32)$$

Mientras que la densidad de la radiación en este punto sería:

$$\rho_\gamma(T \sim 10^4 \text{ GeV}) \sim \rho_\gamma(t_{\text{GUT}}) \left( \frac{a_{\text{GUT}}}{a} \right)^4 \sim 10^{104} \times 10^{-40} \text{ TeV m}^{-3} \sim 10^{64} \text{ TeV m}^{-3}. \quad (2.33)$$

Esto muestra que a esta temperatura la densidad de energía de los monopolos se vuelve comparable a la de la radiación, lo que indica que a partir de este punto los monopolos comenzarían a dominar la evolución del universo.

Sin embargo, las observaciones actuales muestran que el universo **no** está dominado por monopolos magnéticos. De hecho, no hay evidencia experimental de su existencia, y las búsquedas han establecido un límite superior en su densidad numérica [1,sección:10.3]:

$$n_{M,0} < 10^{-29} n_{\text{bary},0}, \quad (2.34)$$

en otras palabras, los monopolos son extremadamente raros en comparación con los bariones en el universo actual.

Dado que la densidad de energía de los monopolos está dada por  $\rho_{M,0} \sim m_M n_{M,0}$ , podemos estimar su contribución relativa a la densidad total del universo mediante el parámetro de densidad:

$$\Omega_{M,0} = \frac{\rho_{M,0}}{\rho_c} = \frac{m_M n_{M,0}}{\rho_c}. \quad (2.35)$$

Tomando una masa de monopolo de  $m_M c^2 \sim 10^{12}$  TeV y considerando que la densidad crítica actual del universo es del orden de  $\rho_c \sim 10^{-5}$  GeV cm<sup>-3</sup> [3,sección:6.2], obtenemos:

$$\Omega_{M,0} < \frac{10^{15} \text{ GeV} \times 10^{-29} n_{\text{bary},0}}{10^{-5} \text{ GeV cm}^{-3}} = 10^{-14} \times \frac{n_{\text{bary},0}}{10^{-5} \text{ cm}^{-3}} \approx 2,5 \times 10^{-16}, \quad (2.36)$$

con  $n_{\text{bary},0} \approx 0,25 \text{ m}^{-3}$ , definido como la densidad de bariones obtenida a partir de mediciones de la abundancia de elementos primordiales y los datos de COBE del fondo cósmico de microondas [1,sección 8.2].

Dado que este valor es muchos órdenes de magnitud menor que la densidad crítica, se concluye que los monopolos no constituyen un componente energético significativo en la evolución cósmica. En consecuencia, su ausencia observacional plantea el llamado **problema de los monopolos**, que se resume en la pregunta: *¿Dónde han ido todos los monopolos magnéticos?*

Una posible solución es que los monopolos nunca se hayan formado, lo que requeriría modificar las teorías de Gran Unificación. Sin embargo, este enfoque no resuelve otros problemas cosmológicos fundamentales, como el problema del horizonte y el problema de la planitud.

# Capítulo 3

## Modelo Inflacionario.

Hasta ahora, hemos discutido cómo el mecanismo de inflación resuelve diversos problemas conceptuales y experimentales asociados con el modelo estándar del Big Bang. Es natural preguntarse entonces: ¿qué era el universo o de qué estaba compuesto mientras ocurría la inflación?, ¿cómo la inflación explica la expansión acelerada y soluciona los problemas del Big Bang caliente de manera natural?, y ¿cómo se puede establecer la descripción de un modelo guiado por cálculos físicos y mecánicos que explique las dinámicas del universo temprano? Estas preguntas pueden resolverse definiendo el **inflatón**, un campo escalar único que permea y domina el universo durante esta época.

### 3.1. Inflatón.

Se expone el inflatón como una entidad fundamental en la descripción de la naturaleza del universo temprano, tratándolo como un solo campo cuya evolución determina la expansión cósmica, pero ¿cual es la principal motivación de usar campos escalares en este contexto? Si bien la expansión acelerada puede explicarse postulando una constante cosmológica, este enfoque resulta arbitrario y carente de un mecanismo natural que justifique tanto su origen como su desaparición al final de la inflación. Un modelo físico más robusto requiere la identificación de un campo dinámico cuya evolución determine la expansión y permita la transición hacia un universo dominado por la física de partículas.[1,sección:10.5]. Un aspecto clave del inflatón es su capacidad para inducir transiciones de fase en el universo temprano, proporcionando un marco teórico más natural para el fin de la inflación en comparación con la simple postulación de una constante cosmológica. Como se ha tratado de forma esencial una transición de fase en este contexto, donde las propiedades de un sistema cambian drásticamente bajo variaciones de temperatura o presión, en el caso que se mencionó sobre los monopolos donde se trata el congelamiento del agua. En el universo primitivo, se cree que ocurrieron múltiples transiciones a medida que la temperatura descendía, como por ejemplo la condensación de quarks en hadrones cuando el universo tenía una temperatura de 300 MeV (para más detalles ver referencias: 8,sección:3.1.5.2 ; 2,capitulo:11 ; 6,sección:1.3). En particular, los campos escalares involucrados en estas transiciones pueden ejercer una presión negativa, satisfaciendo la condición inflacionaria  $\rho c^2 + 3p < 0$  y actuando como una constante cosmológica efectiva[1,sección:10.5].

La hipótesis inflacionaria sugiere que, en una fase inicial, el inflatón quedó atrapado en

un estado cuasi-estable con energía potencial dominante, lo que generó una expansión acelerada del universo. A medida que el campo evolucionó y alcanzó el mínimo de su potencial, su energía se transfirió a partículas del Modelo Estándar en un proceso conocido como recalentamiento. De este modo, el estudio del inflatón no solo esclarece la naturaleza del universo primitivo, sino que también sienta las bases para comprender la transición hacia la era dominada por la física de partículas.

### 3.2. Tensor Energía-Momento.

Para analizar la naturaleza del inflatón, se emplea el lagrangiano, una función que describe un sistema en términos de sus coordenadas y sus derivadas temporales. A partir del principio de mínima acción, se pueden derivar las ecuaciones de movimiento sin necesidad de recurrir explícitamente a fuerzas, proporcionando una formulación matemática clara y general para la evolución de los campos, cuya estructura garantiza la compatibilidad con la relatividad y permite derivar su ecuación de movimiento.

Dado que la evolución del inflatón en un universo en expansión se basa en su densidad lagrangiana, la acción asociada se construye integrando esta densidad en el espacio-tiempo con la métrica adecuada. En el caso de un campo escalar como el inflatón, su lagrangiano se expresa como [5, sección: 16.3]:

$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi), \quad (3.1)$$

donde el primer término representa la energía cinética del campo y el segundo su energía potencial. Este lagrangiano permite obtener la ecuación de movimiento del inflatón y construir su acción,

$$S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi, \quad (3.2)$$

cuyo principio variacional, aplicando invariancia bajo transformaciones métricas, lleva a la obtención del tensor energía-momento, que describe cómo la energía y el momento del inflatón influyen en la evolución del espacio-tiempo.

A partir de los cálculos anteriores, se obtiene la expresión para el tensor energía-momento del inflatón, cuya forma específica permite describir la densidad de energía y la presión del inflatón.

$$T_{\mu\nu}^\phi = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}_\phi. \quad (3.3)$$

En un espacio-tiempo homogéneo y plano, descrito por la métrica:  $ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^i dx^j$ ; donde las componentes de  $T_{\mu\nu}^\phi$  corresponden a la densidad de energía y la presión del inflatón.

$$\rho_\phi = T_{00}^\phi = (\partial_t\phi)^2 - g_{00}L_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.4)$$

$$P_\phi = T_{ii}^\phi = (\partial_i\phi)^2 - g_{ii}L_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.5)$$

Aquí el  $a^2(t)$  desaparece para la parte espacial que da la presión, porque la presión se define en coordenadas físicas, no comóviles.

Los resultados obtenidos permiten describir la dinámica del inflatón y su influencia en la evolución del universo temprano. Para mas detalles sobre la deducción y cálculos del tensor momento energía remitirse a la referencia [8, sección:2.2.3].

### 3.3. Ecuaciones de Movimiento del Campo Inflatón

En el contexto de la inflación cósmica, la evolución del campo inflatón  $\phi$  está determinada por la ecuación de conservación de la energía para un fluido cósmico, un principio fundamental que rige la dinámica de los componentes energéticos del universo[8, sección:2.1.2.2]. La ecuación para un fluido cósmico se define como:

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + P_\phi) = 0, \quad (3.6)$$

Esta ecuación se deriva de la ecuación de conservación del tensor de energía-momento,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.7)$$

una condición fundamental en relatividad general que expresa la conservación local de la energía y el momento. En un espacio-tiempo homogéneo e isótropo, descrito por la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), la evolución de la energía de un fluido cósmico se estudia en coordenadas comóviles, donde el movimiento del fluido sigue la expansión del universo.

La ecuación de fluido cósmico revela dos mecanismos clave en la evolución del inflatón: el primero es el término de dilución,  $3H\rho_\phi$ , que representa la pérdida de energía debido a la expansión del universo, análogo a un proceso disipativo en un sistema termodinámico en expansión. Sin embargo, en relatividad general, la energía total del universo no está bien definida debido a la naturaleza dinámica del espacio-tiempo, por lo que esta "pérdida" de energía no implica una violación de la conservación, sino más bien una transferencia hacia la expansión misma del espacio-tiempo. En este sentido, la ecuación de continuidad refleja cómo la energía del campo escalar se redistribuye a medida que el universo evoluciona. En un universo en expansión, la densidad de energía de cualquier componente evoluciona de acuerdo con la ecuación de continuidad, que en su forma general se expresa como:

$$\frac{dE}{dt} + P\frac{dV}{dt} = 0. \quad (3.8)$$

Aquí, el volumen del universo  $V$  aumenta con la expansión cósmica, lo que lleva a una reducción de la densidad de energía por unidad de volumen. En términos de la ecuación de conservación de la energía, el término  $3H\rho_\phi$  aparece debido a la expansión del factor de escala  $a(t)$ , lo que implica que la energía total del sistema se distribuye en un volumen cada vez mayor.

El segundo termino de la ecuación,  $3HP_\phi$  representa la contribución de la presión del campo escalar al balance energético. En un sistema en el que el volumen cambia, la

presión puede realizar trabajo sobre el entorno, lo que modifica la densidad de energía. En un universo en expansión, el trabajo realizado por la presión del campo escalar afecta la evolución de su densidad de energía, contribuyendo a la tasa de cambio de  $\rho_\phi$ . Este término es crucial para entender cómo la ecuación de continuidad incorpora no solo la dilución de energía debido a la expansión, sino también la influencia de la presión en la dinámica del universo.

Al expresar la densidad de energía y la presión del inflatón en términos del campo escalar y su potencial en la ecuación para un fluido cósmico, se obtiene la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.9)$$

Esta ecuación también puede derivarse desde un enfoque lagrangiano, puede verse en [A.1].

La ecuación de movimiento que describe la dinámica del campo  $\phi$  es análoga a la de una bola rodando cuesta abajo en presencia de una fuerza de fricción. En este contexto, la expansión del universo, representada por el término de Hubble  $H$ , actúa como un mecanismo disipativo que frena el movimiento de  $\phi$ , similar a la forma en que una partícula en caída libre alcanza una velocidad límite bajo una fuerza de fricción proporcional a su velocidad,  $F_f = -kv = -k\dot{x}$ . Formalmente, la ecuación de movimiento para un sistema sometido a un potencial  $V(x)$  y una fuerza de fricción es  $m\ddot{x} = -k\dot{x} - \frac{dV}{dx}$ , lo que coincide exactamente con la ecuación de evolución de  $\phi$  [8,sección:2.2.4].

Físicamente, estamos en presencia de un campo que “cae” en un potencial  $V(\phi)$  con un término de fricción  $3H$ . La única diferencia con la analogía clásica de un cuerpo en caída en la mecánica newtoniana es que el parámetro de fricción no es constante, sino que depende fuertemente de la “altura” ( $\phi$ ) [8,sección:2.2.6.1]. Este fenómeno, aunque profundamente complejo, puede interpretarse mediante modelos físicos fundamentales, lo que resalta la relevancia de establecer bases teóricas rigurosas. Estas no solo facilitan la formulación e intuición de los procesos dinámicos en el universo temprano, sino que también permiten construir puentes conceptuales entre modelos simplificados y la físicas más elaboradas, proporcionando una visión más accesible y estructurada de fenómenos cosmológicos clave.

### 3.4. Aproximación de Slow-Roll.

La dinámica del campo inflatón  $\phi$  en un potencial  $V(\phi)$  está gobernada por la ecuación de movimiento, donde la expansión del universo introduce un término disipativo  $3H\dot{\phi}$ . A diferencia de la fricción en sistemas clásicos, aquí  $H$  no es constante, sino que depende del valor del campo inflatón a través de la ecuación de Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\text{total}}.$$

Dado que en el escenario inflacionario el inflatón es el único contenido energético del universo, podemos reemplazar la densidad de energía total  $\rho_{\text{total}}$  por la densidad de energía del campo, obteniendo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \right). \quad (3.10)$$

En el régimen de *slow-roll*, donde la condición  $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$  es válida, la energía del inflatón está dominada por su potencial. En esta aproximación, la ecuación de Friedmann se reduce a [5,sección:16.5]:

$$H \approx \sqrt{\frac{8\pi G}{3}V(\phi)}. \quad (3.11)$$

El mecanismo clave que prolonga la inflación radica en la forma del potencial  $V(\phi)$ . Si el potencial es relativamente plano, la fuerza que impulsa la evolución del campo inflatón,  $-dV/d\phi$ , es pequeña, lo que significa que  $\dot{\phi}$  también será pequeña. Dado que el término disipativo en la ecuación de movimiento,  $3H\dot{\phi}$ , depende directamente de la velocidad del campo, una pendiente poco inclinada implica que el inflatón desciende lentamente.

En este escenario, el campo inflatón pierde energía de manera gradual mientras el factor de escala del universo crece exponencialmente. La condición esencial para que ocurra la inflación es que la rodadura del campo sobre su potencial sea lo suficientemente lenta para que la densidad de energía se mantenga casi constante en escalas de tiempo cosmológicas. Es precisamente esta dinámica la que permite que la expansión acelerada persista durante un número significativo de e-folds.

Dado que la inflación requiere una fase en la que la densidad de energía  $\rho = \rho_\phi$  permanezca aproximadamente constante, se introduce la ecuación de estado del campo escalar[8,sección:2.2.6.1]:

$$w = \frac{P}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)}. \quad (3.12)$$

Para que se mantenga la expansión acelerada, se necesita que  $w \approx -1$ , lo que solo es posible si la energía cinética del inflatón es mucho menor que su energía potencial. Es importante notar que  $w = -1$  es la misma ecuación de estado que describe la energía oscura. Al ser esta la ecuación de estado dominante en la fase inflacionaria y resolviendo las ecuaciones de Friedmann, obtenemos un crecimiento exponencial de  $a(t)$  respecto al tiempo, lo que caracteriza la expansión acelerada del universo durante la inflación.

Para determinar cuándo este mecanismo conduce a inflación, es útil considerar la evolución de la razón de expansión  $H$ . Derivando la ecuación de Friedmann(3.10) con respecto al tiempo y aplicando la regla de la cadena, se obtiene

$$2H\dot{H} = \frac{1}{3M_p^2} \left( \dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi}\dot{\phi} \right). \quad (3.13)$$

Por otro lado, la ecuación de movimiento del inflatón está dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.9)$$

Multiplicando por  $\dot{\phi}$  y reordenando, obtenemos

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \dot{\phi}\frac{dV}{d\phi} = -3H\dot{\phi}^2. \quad (3.14)$$

Sustituyendo en la ecuación de la derivada de Friedmann, se obtiene la expresión para  $\dot{H}$ :

$$\dot{H} = -\frac{1}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{M_P^2}. \quad (3.15)$$

Dividiendo esta ecuación por  $H^2$ , definimos el parámetro de pendiente slow-roll  $\varepsilon$  [6, sección:4.3.2]:

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V}. \quad (3.16)$$

Este parámetro mide la relación entre la energía cinética del campo inflatón y la energía total del sistema. Para que la inflación ocurra, es necesario que  $\varepsilon < 1$ , lo que garantiza que la expansión acelerada se mantenga.

Es necesario visualizar el parámetro slow roll en términos del potencial  $V(\phi)$ . Para ello, consideremos la ecuación de movimiento del campo inflatón en el régimen de slow-roll, donde despreciamos la segunda derivada temporal  $\ddot{\phi}$  en (3.9):

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{dV}{d\phi}. \quad (3.17)$$

Despejando  $\dot{\phi}$ , obtenemos:

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V'(\phi)}{3H}. \quad (3.18)$$

Sustituyéndolo en la ecuación para  $\varepsilon$ , tenemos

$$\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{V'(\phi)}{3H}\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\frac{V'(\phi)}{3H}\right)^2 + V}. \quad (3.19)$$

Utilizando la ecuación de Friedmann en el régimen de slow-roll,

$$H^2 \approx \frac{V}{3M_P^2}, \quad (3.20)$$

se obtiene y se define el parámetro slow roll basado en su potencial como :

$$\varepsilon_V \equiv \frac{M_P^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V}\right)^2. \quad (3.21)$$

Esta forma es particularmente útil para analizar la viabilidad de distintos modelos inflacionarios, ya que permite evaluar la condición de inflación  $\varepsilon_V < 1$  directamente en términos del potencial  $V(\phi)$ .

Una forma intuitiva de visualizar este parámetro es en términos de una planitud relativa del potencial. No se requiere que el potencial sea completamente plano en sentido absoluto, sino que su inclinación sea lo suficientemente suave en comparación con la dinámica del campo inflatón, permitiendo así la evolución lenta característica del régimen de slow-roll.

### 3.5. Modelos de Inflación.

Diversos modelos de inflación han sido propuestos para explicar la expansión acelerada del universo primitivo. Cada modelo presenta diferentes mecanismos para mantener la inflación y condiciones para su finalización. A continuación, se presentan algunos de los principales modelos de inflación.

#### 3.5.1. Inflación Caótica.

El modelo de inflación caótica, propuesto por Andrei Linde[ 7,sección:18.7], se basa en la idea de que el campo inflatón  $\phi$  puede tomar valores iniciales aleatorios en distintas regiones del universo temprano. Cuando el universo emerge de la era de Planck ( $t \sim 10^{-43}$  s), el campo inflatón puede estar desplazado de manera caótica respecto al mínimo de su potencial. En algunas regiones, este desplazamiento es lo suficientemente grande como para que el campo ruede lentamente cuesta abajo, generando una inflación prolongada. En otras regiones, el campo puede estar demasiado cerca del mínimo, impidiendo la inflación. Como resultado, el universo presenta inhomogeneidades a grandes escalas, pero nuestra región observable se encuentra dentro de un dominio que experimentó inflación.

Una de las principales ventajas de este modelo es que la inflación puede ocurrir incluso con potenciales simples de la forma  $V(\phi) \propto \phi^n$ . Un caso común es un campo escalar con un potencial cuadrático:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2. \quad (3.22)$$

Este modelo permite la inflación sin necesidad de un equilibrio térmico en el universo temprano y puede iniciarse inmediatamente después de la época de Planck[5,sección:16.10 ; 7,sección:18.7]

Para que el slow-roll sea posible en un potencial parabólico(un ejemplo de inflación caótica) :

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2, \quad (3.23)$$

Para el potencial cuadrático, estas condiciones llevan a:

$$\epsilon = \frac{2M_P^2}{\phi^2}. \quad (3.24)$$

Esto significa que el slow-roll solo es válido cuando  $\phi \gg M_P$ , es decir, cuando el campo toma valores mucho mayores que la escala de Planck. En esta región, la pendiente del potencial es suficientemente pequeña en términos relativos para que el término de fricción  $3H\dot{\phi}$  controle la evolución, permitiendo una dinámica de slow-roll.

En inflación caótica, este requisito se satisface naturalmente debido a sus condiciones iniciales aleatorias, que pueden ubicar al campo en valores suficientemente grandes para sostener la inflación. Así, no es necesario que el potencial tenga una región completamente plana, sino que su pendiente relativa sea lo suficientemente suave en la región donde inicia la inflación.

### 3.5.2. Inflación en la Cima de la Colina.

En este tipo de inflación, el campo inflatón comienza en la cima de una colina, es decir, en un punto máximo del potencial. A diferencia de la inflación caótica, donde el campo empieza en valores muy grandes y rueda cuesta abajo de manera natural, aquí el inflatón inicia cerca del punto más alto de su potencial y se mueve lentamente hacia abajo.

Un ejemplo de este tipo de potencial es[7,sección:18.7]:

$$V(\phi) = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \dots \equiv V_0 \left( 1 + \frac{1}{2}\eta_0 \frac{\phi^2}{M_{\text{Pl}}^2} + \dots \right) \quad (3.25)$$

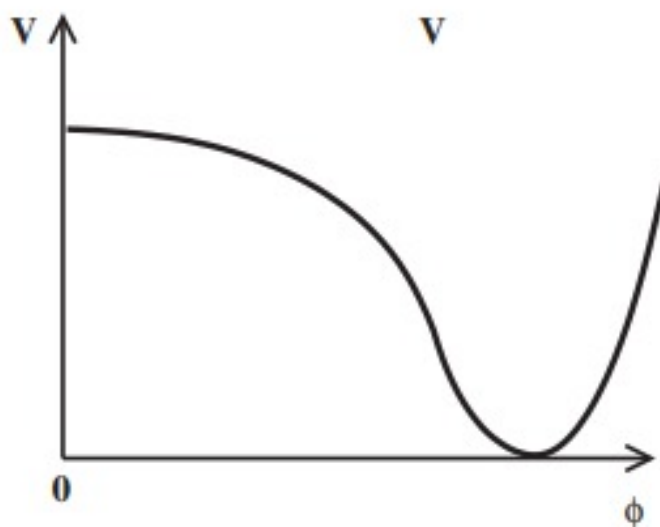


Figura 3.1: Potencial que modela la inflación en la cima de la colina[7,sección:28.5].

Donde  $V_0$  es la altura de la colina y  $\eta_0 \equiv -\frac{m^2 M_{\text{Pl}}^2}{V_0}$  cuantifica la curvatura del potencial en el máximo. Específicamente,  $\eta_0$  representa el valor del parámetro de concavidad slow-roll evaluado en la cima. De manera más general, el parámetro de concavidad en cualquier punto del potencial se define como: [6,sección:4.3.2]:

$$\eta_V \equiv M_P^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)}, \quad (3.26)$$

donde  $V''(\phi)$  representa la segunda derivada del potencial con respecto al campo inflatón, relacionada con la masa efectiva del campo inflatón a través de la relación  $m_\phi^2 = V''(\phi)$ .  $V(\phi)$  es el propio potencial y  $M_P$  es la masa de Planck. Este parámetro mide la concavidad del potencial y cuantifica qué tan rápido cambia la pendiente en comparación con la escala de energía del potencial mismo.

Cuando  $|\eta_V| \ll 1$ , la curvatura del potencial es lo suficientemente suave para que el inflatón ruede lentamente, y la fricción provocada por la expansión del universo impide que caiga rápidamente, permitiendo una fase de inflación prolongada. En el caso de la inflación en la cima de la colina,  $\eta_V$  es negativo, lo que indica que el potencial tiene

una región convexa cerca del máximo, asegurando que el campo se desacelere mientras desciende, favoreciendo el régimen de *slow-roll*.

A diferencia de los potenciales parabólicos de la inflación caótica, en este modelo el inflatón no necesita comenzar con valores muy grandes. En cambio, la clave está en que el punto inicial sea cercano a la cima de la colina, de manera que la caída sea lo suficientemente lenta para sostener la inflación antes de que el campo alcance el mínimo del potencial. Para profundizar más en este modelo de inflación remitirse a referencia [7], sección: 28.5.

### 3.5.3. Otros modelos.

La propuesta y desarrollo de la teoría inflacionaria ha llevado a la formulación de diversos modelos, cada uno con diferentes enfoques y justificaciones teóricas. Entre los más destacados se encuentran:

- **Nueva Inflación:**

Este modelo se basa en una transición de fase similar a la ruptura espontánea de simetría, (para más detalles sobre rompimiento de simetría, remitirse a la referencia [7]). El potencial del campo inflatónico tiene la forma:

$$V(\phi) = V_0 \left(1 - \frac{\phi^2}{M^2}\right)^2. \quad (3.27)$$

El campo comienza cerca de  $\phi = 0$  y desciende lentamente debido al *slow-roll*. A diferencia de la inflación caótica, la nueva inflación ocurre para valores de campo menores que  $M_{Pl}$  y finaliza cuando el campo alcanza el mínimo del potencial. Este modelo surge en el contexto de teorías de gran unificación y modelos de ruptura espontánea de simetría.

Sin embargo, la nueva inflación es menos favorecida en comparación con otros modelos debido a la necesidad de condiciones iniciales altamente ajustadas. Para que el campo inflatónico comience en la cima del potencial, se requiere un mecanismo específico que lo sitúe en  $\phi \approx 0$  con muy poca energía cinética, lo que puede resultar artificial o difícil de justificar en escenarios cosmológicos realistas. Además, la duración de la inflación en este modelo tiende a ser más sensible a la elección de parámetros, lo que lo hace menos atractivo en términos de naturalidad. Para más información sobre este modelo, ver referencias [5, sección: 16.9; 7, capítulo 28].

- **Inflación Híbrida:**

La inflación híbrida introduce un segundo campo, denominado "campo cascada" ( $\chi$ ), que desencadena el final de la inflación cuando el campo inflatónico alcanza un valor crítico  $\phi_c$ . Su potencial es:

$$V(\phi, \chi) = V_0 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 + \frac{1}{4}\lambda\chi^4 + \frac{1}{2}\lambda'\chi^2\phi^2. \quad (3.28)$$

Para  $\phi > \phi_c$ , el campo  $\chi$  se encuentra en  $\chi = 0$ , pero cuando  $\phi$  alcanza  $\phi_c$ , el campo cascada se vuelve inestable y cae a su verdadero vacío, terminando rápidamente la inflación. Este mecanismo es compatible con teorías de supergravedad y modelos de teoría de cuerdas. Para más información sobre este modelo ver referencias [7, sección: 18.27 ; capítulo: 21].

- **Inflación Estocástica:**

La inflación estocástica incorpora fluctuaciones cuánticas en la dinámica del campo inflatónico. En este modelo, la ecuación de evolución del campo incluye un término aleatorio debido a las fluctuaciones del vacío cuántico:

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{3H} \frac{dV}{d\phi} + \xi(t), \quad (3.29)$$

donde  $\xi(t)$  representa un ruido blanco gaussiano. Como consecuencia, la inflación puede prolongarse en ciertas regiones del espacio-tiempo, lo que lleva a escenarios como la inflación eterna y la formación de un multiverso. Este modelo se fundamenta en la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo.[5, sección: 16.11].

- **Inflación Natural:**

La inflación natural utiliza un potencial sinusoidal, característico de teorías con axiones pseudo-Nambu-Goldstone(para entender mas sobre los axiones ir a referencia [9, capitulo:10]):

$$V(\phi) = \Lambda^4 \left[ 1 - \cos\left(\frac{\phi}{f}\right) \right]. \quad (3.30)$$

En este caso,  $f$  representa la escala de simetría asociada al axión y debe cumplir  $f \gg M_{Pl}$  para que el modelo sea viable. El parámetro  $\Lambda^4$  determina la altura del potencial y está relacionado con la densidad de energía durante la inflación. Su valor depende de la física subyacente que da origen al potencial sinusoidal, como los axiones en teoría de cuerdas o modelos gauge en dimensiones extra. Además, se han propuesto versiones supersimétricas del modelo que exploran diferentes mecanismos para generar este potencial. Para tener una perspectiva mas amplia sobre este modelo ver referencia [7, sección: 28.13.2].

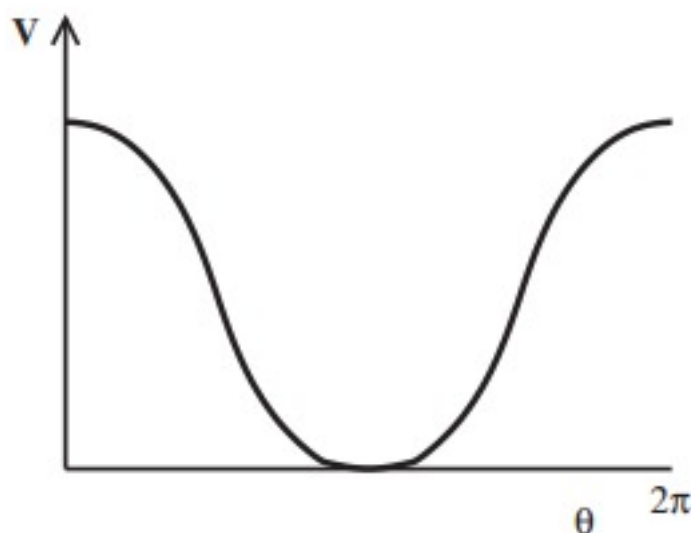


Figura 3.2: Potencial que modela la inflación natural [7,sección:28.5].

Los modelos de inflación presentados en este trabajo constituyen un bosquejo general de los distintos enfoques desarrollados para explicar la expansión acelerada del universo

primitivo. Cada uno de estos modelos se fundamenta en principios físicos diferentes, ya sea a partir de teorías de campos escalares, mecanismos de ruptura espontánea de simetría, teoría de supergravedad o incluso formulaciones inspiradas en la teoría de cuerdas. La diversidad de propuestas refleja tanto la riqueza teórica del paradigma inflacionario como los desafíos que persisten en su completa comprensión.

El análisis detallado de cada modelo requiere un estudio profundo de sus fundamentos matemáticos, de la compatibilidad con observaciones cosmológicas y de los problemas asociados a su implementación. En particular, la consistencia de la inflación con teorías de gran unificación, con la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo y con la gravedad cuántica sigue siendo un área activa de investigación. Además, si bien la inflación ofrece una solución elegante a varios problemas del modelo del Big Bang, su formulación precisa aún enfrenta cuestiones abiertas, como la elección de condiciones iniciales, la estabilidad de los potenciales y la integración de la inflación en un marco teórico más fundamental.

Las restricciones impuestas por la radiación cósmica de fondo y la estructura a gran escala del universo continúan acotando los modelos viables, favoreciendo aquellos con potenciales suaves y predicciones compatibles con las anisotropías del CMB. Sin embargo, el grado de arbitrariedad en la elección del potencial inflacionario y la ausencia de una conexión definitiva con la física de altas energías ponen en evidencia la dureza teórica de estos modelos. A pesar de sus éxitos, la inflación sigue siendo un área en constante evolución, donde futuras observaciones y avances en física teórica serán cruciales para consolidar o reformular su papel en la cosmología moderna.

Inflación es uno de los temas más enigmáticos y profundamente estudiados en la física teórica y física experimental moderna. Su análisis no solo representa un desafío conceptual, sino que también contribuye significativamente al avance y desarrollo de la ciencia contemporánea. Los modelos que describen este fenómeno han permitido un mayor entendimiento del universo temprano y proporcionan una base sólida para futuras investigaciones en cosmología y física fundamental.

### 3.5.4. Desarrollo del modelo inflación caótica.

En esta sección desarrollamos el modelo de inflación caótica, caracterizado por un campo escalar con un potencial monómico que gobierna la dinámica del universo primitivo. Partiendo del régimen de slow-roll, deduciremos la evolución del inflatón y el factor de escala, estableciendo las condiciones para el fin de la inflación. Posteriormente, aplicaremos este marco teórico a un caso específico con un potencial cuadrático, obteniendo soluciones analíticas para la evolución del campo y la expansión cósmica. Es fundamental introducir el régimen de slow-roll, del cual se obtiene el siguiente resultado de la ecuación de Friedman:

$$H \approx \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_P}, \quad (3.11)$$

Si, como antes, suponemos que al inicio el inflatón está 'cayendo' sin una gran aceleración ( $\ddot{\phi} \approx 0$ ) ni una gran velocidad ( $\dot{\phi}$  pequeña), podemos escribir según [8, sección: 2.2.8]:

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \implies H \approx \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_P}, \quad (3.31)$$

$$\ddot{\phi} \ll V'(\phi) \implies \dot{\phi} \approx -\frac{M_P}{\sqrt{3}} \frac{V'(\phi)}{\sqrt{V(\phi)}}, \quad (3.32)$$

y encontrar la solución para  $a$ :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}M_P} = \frac{d \ln a}{dt} = \frac{d \ln a}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{M_P}{\sqrt{3}} \frac{V'(\phi)}{\sqrt{V(\phi)}} \frac{d \ln a}{d\phi}, \\ \implies a &= a_i \exp\left(-\int \frac{V(\phi)}{M_P^2 V'(\phi)} d\phi\right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Considerando un potencial de la forma  $V(\phi) \propto \phi^k$ , para obtener el desarrollo de la inflación caótica, obtenemos:

$$a = a_i \exp\left(\frac{\phi_i^2 - \phi^2}{2M_P^2 k}\right). \quad (3.34)$$

Para simplificar, asumimos que al final de la inflación  $\phi = \phi_f \ll \phi_i$ , lo que nos lleva a:

$$N_e \approx \frac{\phi_i^2}{2kM_P^2}. \quad (3.35)$$

Despejando  $\phi_i$  para un número dado de e-folds  $N_e$ , obtenemos:

$$\phi_i \approx \sqrt{2N_e k M_P^2}. \quad (3.36)$$

Este resultado muestra cómo el valor inicial del inflatón  $\phi_i$  está determinado por la cantidad de e-folds necesarios para resolver los problemas cosmológicos y por el exponente  $k$  del potencial inflacionario.

Ahora, tratando con una valor de la potencial  $k$  específico, asumamos el potencial:

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \quad (3.37)$$

Para  $k=2$ . Reemplazando este valor del potencial en  $H$  slow-roll(3.31):

$$H \approx \frac{m\phi}{\sqrt{6}M_P}, \quad (3.38)$$

que se puede reemplazar en la ecuación de movimiento para obtener[8,sección: 2.2.6.2] :

$$\dot{\phi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} m M_P \implies \phi(t) \approx \phi_i - \sqrt{\frac{2}{3}} m M_P (t - t_i), \quad (3.39)$$

y como consecuencia:

$$H = H(t) = \frac{m\phi}{\sqrt{6}M_P} \approx \frac{m\phi_i}{\sqrt{6}M_P} - \frac{m^2}{3}(t - t_i). \quad (3.40)$$

Después de tener el factor  $H$ , es necesario encontrar los límites de tiempo, esto se logra dando las condiciones para que la inflación termine, sabemos que el  $t_i$  es el tiempo de Planck como se ha mencionado, ahora solo falta encontrar  $t_{\text{end}}$ . Definiendo entonces, el final de la inflación  $t_{\text{end}}$  como:

$$m\phi(t_{\text{end}}) < |\dot{\phi}|(t_{\text{end}}), \quad (3.41)$$

o en otras palabras, como el momento en el que la energía cinética comienza a alcanzar valores similares a la energía potencial, se tiene:

$$\frac{1}{2}m^3\phi^2(t_{\text{end}}) = \frac{2}{6}m^3M_P^2 \Rightarrow \phi(t_{\text{end}}) = \sqrt{\frac{2}{3}}M_P. \quad (3.42)$$

Reemplazando en la ecuación solución para  $\phi$  (3.39) evaluando en  $t_{\text{end}}$ :

$$t_{\text{end}} - t_i \approx \frac{3}{2} \frac{\phi_i}{mM_P}, \quad (3.43)$$

Otra forma de entender la condición para que la inflación termine es observar que si  $\phi(t_{\text{end}}) = 0$ , la inflación efectivamente finaliza porque  $V(\phi)$  se anula para  $\phi = 0$ , y la parte cinética  $\dot{\phi}^2$  domina sobre  $V(\phi)$ , poniendo fin al régimen de inflación de slow-roll [8, sección: 2.2.6.2].

De hecho, la solución negativa para  $\dot{\phi}$ , muestra que durante la inflación,  $\phi$  disminuirá, lo que automáticamente induce una disminución en  $V(\phi)$ , mientras la energía cinética del campo escalar,

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \approx m^2M_P^2,$$

permanece casi constante. En consecuencia, es inevitable que exista un momento en el que :

$$\dot{\phi}^2 > V(\phi),$$

marcando el final de la inflación.

En particular, el caso cuadrático ha permitido obtener soluciones analíticas para la evolución del campo y la expansión cósmica, lo que nos ha llevado a determinar el criterio para el fin de la inflación. Estos resultados muestran cómo la inflación genera una fase de expansión acelerada y proporciona un marco natural para explicar la dinámica del universo primitivo.

### 3.6. Solución a los problemas del BigBang caliente.

La teoría del Big Bang caliente enfrenta tres problemas fundamentales, los cuales pueden resolverse mediante la inflación, un período de expansión exponencial impulsado por un campo escalar en régimen de slow-roll. Durante esta fase, la inflación actúa de manera análoga a una energía oscura efectiva, dominando la dinámica del universo primitivo.

Sin embargo, la constante cosmológica observada en la actualidad no puede ser la responsable de la inflación, ya que su densidad de energía es demasiado baja para haber controlado la evolución cósmica en el universo temprano, donde la materia y la radiación desempeñaban un papel dominante.

La densidad de energía efectiva de la constante cosmológica durante la inflación está dada por:

$$\rho_{\Lambda,\text{eff}} \sim \frac{H_I^2}{3M_P^2} \quad (3.44)$$

Tomando un valor típico de  $H_I \sim 10^{-36}$  s, la densidad de energía correspondiente es aproximadamente  $10^{105}$  TeV/m<sup>3</sup>. Sin embargo, las observaciones del fondo cósmico de microondas (CMB) y las medidas de las anisotropías de temperatura imponen un límite superior para la escala de inflación. En particular, los resultados del satélite *Planck* establecen que:

$$H_I \leq 10^{13} \text{ GeV}. \quad (3.45)$$

(Ade et al. 2016, Planck Collaboration).

Por otro lado, la inflación no pudo extenderse arbitrariamente hacia el pasado, ya que en algún momento el universo tuvo que entrar en la fase de recalentamiento y evolucionar hacia un estado dominado por la radiación. El límite inferior para  $H_I$  se establece observacionalmente a partir de la nucleosíntesis primordial (BBN), que requiere que el universo haya estado dominado por radiación a partir de  $t \sim 1$  s. Esto impone que:

$$H_I \geq H(T_{\text{BBN}}), \quad (3.46)$$

con  $H(T_{\text{BBN}}) \sim 1 \text{ s}^{-1}$  para  $T_{\text{BBN}} \sim 1 \text{ MeV}$ , Que sabemos experimentalmente que para BBN el universo esta dominado por radiación *Planck (2015)* y *WMAP (2003-2012)*).

Estos límites definen un rango de valores posibles para la escala de inflación, asegurando que la expansión inflacionaria sea compatible con las observaciones cosmológicas actuales. Con esto en mente y habiendo desarrollado un marco teórico para la inflación, a continuación se analiza cómo este mecanismo proporciona una solución natural a los problemas del modelo del Big Bang caliente.

### 3.6.1. Solución al problema de la planitud.

El parámetro de densidad total del universo  $\Omega(t)$  se define en términos de la curvatura y la expansión del universo (como habíamos notado en el problema de la planitud ecuación 2.4). Para un universo dominado por la constante cosmología efectiva ( $a(t) \propto e^{H_I t}$ ):

$$H = \text{Constante}. \quad (3.47)$$

Sustituyendo en la ecuación de  $|1 - \Omega|$ :

$$|1 - \Omega(t)| = \frac{H_0^2(1 - \Omega_0)}{R_0^2(e^{H_I t})^2 c t e^2} \propto e^{-2H_I t}. \quad (3.48)$$

Esto implica que, durante la inflación,  $\Omega(t)$  se acerca rápidamente a 1. Evaluamos esta ecuación entre un tiempo inicial  $t_i$  y un tiempo final  $t_f$ :

$$|1 - \Omega(t_f)| = |1 - \Omega(t_i)|e^{-2H_i(t_f - t_i)}.$$

El número de e-foldings  $N$  durante la inflación se define como:

$$N = H_i(t_f - t_i).$$

Sustituyéndolo en la ecuación anterior:

$$|1 - \Omega(t_f)| = |1 - \Omega(t_i)|e^{-2N}.$$

Si inicialmente el universo tenía una curvatura considerable ( $|1 - \Omega(t_i)| \sim 1$ ), la cantidad de 'aplanamiento' que produce la inflación viene dada por:

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N}. \quad (3.49)$$

Por otro lado, durante la época de dominación por radiación, la evolución del factor de escala está dada por:

$$a(t) = \sqrt{2\Omega_{R,0}}H_0t. \quad (3.50)$$

Utilizando los valores actuales  $\Omega_{R,0} = 9 \times 10^{-5}$ ,  $H_0 = 14,4/\text{Gyr}$  [1,sección:2.3]. Observemos que para el tiempo se cumple :

$$N \equiv H_i(t_f - t_i).$$

Despejando  $t_f$ :

$$t_f = t_i + \frac{N}{H_i}.$$

Luego, se toma  $t_i \approx t_{\text{GUT}}$  y  $H_i^{-1} \approx t_{\text{GUT}}$ , lo que implica:

$$t_f = t_{\text{GUT}} + Nt_{\text{GUT}} = (N + 1)t_{\text{GUT}}.$$

por tanto se cumple:  $t_f = (N + 1) \times 10^{-36}\text{s}$ , reemplazando para el factor de escala se obtiene:

$$a(t_f) \approx 2 \times 10^{-28} \sqrt{N + 1}. \quad (3.51)$$

Dado que la relación entre  $\Omega$  y el factor de escala en la época de radiación se expresa como:

$$|1 - \Omega(t_f)| = \frac{(1 - \Omega_0)a_0^2}{\Omega_{R,0} + a_f\Omega_{M,0}}, \quad (3.52)$$

podemos estimar la cantidad de aplanamiento necesaria para que  $|1 - \Omega_0| \leq 0,005$ :

$$|1 - \Omega(t_f)| = e^{-2N} \leq 2,2 \times 10^{-54}(N + 1). \quad (3.53)$$

De esta manera, se obtiene que el número mínimo de e-foldings de inflación necesarios para coincidir con las observaciones es:

$$N \approx 60. \quad (3.54)$$

Finalmente, la expansión total del universo durante la inflación se estima como:

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{60} \sim 10^{26}. \quad (3.55)$$

Esto muestra que la inflación es capaz de resolver el problema de la planitud al hacer que  $\Omega(t)$  se acerque a 1 de manera exponencial.

### 3.6.2. Solución al problema del horizonte

Para comprender cómo la inflación resuelve el problema del horizonte, calculamos la distancia del horizonte antes y después de la inflación.

En un universo sin inflación, las regiones separadas del fondo cósmico de microondas (CMB) no habrían tenido tiempo suficiente para intercambiar información causal antes de la recombinación, lo que parece contradecir la homogeneidad observada. Para cuantificar este problema, analizamos la distancia del horizonte en el tiempo inicial  $t_i \sim 10^{-36}$  s, dada por la integral:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = a(t_i)c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a(t)}. \quad (3.56)$$

Dado que antes de la inflación el universo estaba dominado por radiación, su expansión seguía una ley de potencia,  $a(t) \propto t^{1/2}$ . Sustituyendo esta relación en la integral:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = a(t_i)c \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}}. \quad (3.57)$$

Evalutando la integral, se obtiene:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m}. \quad (3.58)$$

Esto indica que, antes de la inflación, el horizonte era extremadamente pequeño, lo que implica que regiones separadas en el CMB nunca estuvieron en contacto causal sin la presencia de un mecanismo adicional.

Al final de la inflación, con  $N = 65$   $e$ -folds de expansión, la distancia del horizonte se modifica drásticamente. Se descompone en dos contribuciones: una pequeña acumulada antes de la inflación y una gran contribución durante la inflación. La expresión resultante es:

$$d_{\text{hor}}(t_f) = a(t_f)c \left( \int_0^{t_i} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a(t)} \right). \quad (3.59)$$

Utilizando el crecimiento exponencial durante la inflación,  $a(t) = a_i e^{H_i(t-t_i)}$ , se obtiene:

$$d_{\text{hor}}(t_f) = a_i e^N c \left( \int_0^{t_i} \frac{dt}{a_i(t/t_i)^{1/2}} + \int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{a_i e^{H_i(t-t_i)}} \right). \quad (3.60)$$

Evalutando las integrales:

$$d_{\text{hor}}(t_f) = e^N c(2t_i + H_i^{-1}) \approx e^N 3t_i c \approx 15 \text{ m.} \quad (3.61)$$

El crecimiento exponencial de la inflación provoca un aumento significativo en la distancia del horizonte, expandiéndolo de  $\sim 10^{-27}$  m a  $\sim 15$  m. Esto implica que regiones que antes estaban separadas por distancias mayores que su propio horizonte causal han sido reintroducidas dentro de una misma región causal. En otras palabras, la inflación permite que las regiones que hoy observamos en el CMB hayan estado en contacto causal en el pasado, facilitando el equilibrio térmico previo al final de la inflación.

Si la inflación no hubiera ocurrido, el horizonte antes de la recombinación habría sido mucho más pequeño, del orden de  $\sim 10^{-28}$  m, lo que imposibilitaría la homogeneidad observada en el CMB a escalas cosmológicas. La inflación evita este problema al expandir drásticamente la escala del universo.

La distancia de partículas en la actualidad es aproximadamente:

$$d_p(t_0) \approx 14000 \text{ Mpc.} \quad (3.62)$$

Los valores de los factores de escala son:

$$a(t_f) \approx 2 \times 10^{-27}, \quad (3.63)$$

y la distancia de partículas al final de la inflación resulta ser:

$$d_p(t_f) = a_f d_p(t_0) \approx 3 \times 10^{-27} \text{ Mpc} = 0,9 \text{ m.} \quad (3.64)$$

Antes de la inflación:

$$d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) \approx 4 \times 10^{-29} \text{ m.} \quad (3.65)$$

Finalmente, la distancia del horizonte antes de la inflación concuerda con nuestro cálculo previo:

$$d_{\text{hor}}(t_i) = 2ct_i \approx 6 \times 10^{-28} \text{ m.}$$

Estos resultados muestran cómo la inflación expande drásticamente la escala del universo, resolviendo el problema del horizonte al garantizar que regiones inicialmente desconectadas puedan compartir información causal antes del desacoplamiento de la radiación. Así, se preserva la homogeneidad observada en el CMB sin necesidad de supuestos adicionales sobre condiciones iniciales.

### 3.6.3. Solución al problema de los monopolos mediante inflación

El problema de los monopolos, como se discutió anteriormente, surge debido a la alta densidad de estas partículas predicha en modelos de gran unificación. Sin embargo, la inflación cósmica proporciona un mecanismo natural para resolver este problema. Dado que el factor de escala crece exponencialmente durante la inflación:

$$a \propto e^{H_I t}$$

esto provoca una rápida dilución de la densidad numérica de los monopolos. La densidad de número de monopolos  $n_M$  se ve afectada por la expansión como:

$$n_M \propto \frac{1}{a^3} \propto e^{-3H_I t}$$

Este resultado se debe a que, en un universo en expansión, la densidad de partículas en un volumen comóvil disminuye conforme el volumen crece con  $a^3$ . En otras palabras, la inflación expande el universo de manera tan rápida que la densidad de monopolos cae exponencialmente.

Dado que previamente se calculó que la densidad de monopolos en la época de gran unificación es aproximadamente:

$$n_M(t_{\text{GUT}}) \approx 10^{82} \text{ m}^{-3}$$

podemos estimar la densidad al final de la inflación. Suponiendo que la inflación dura un período en el que el factor de escala se expande en aproximadamente  $e^{65}$ , tenemos:

$$n_M(t_f) \approx e^{-195} n_M(t_{\text{GUT}}) \approx 0,002 \text{ m}^{-3}$$

Esto significa que la densidad de monopolos se ha reducido en muchos órdenes de magnitud, pero aún no es lo suficientemente baja como para ser despreciable. No obstante, después de la inflación, el universo sigue expandiéndose de manera más moderada, lo que diluye aún más la densidad de monopolos. Extrapolando la dilución adicional desde el final de la inflación hasta la época actual, obtenemos:

$$n_M(t_0) = n_M(t_f) a_f^3 \approx 2 \times 10^{-83} \text{ m}^{-3} \approx 5 \times 10^{-16} \text{ Mpc}^{-3}$$

Este valor es extremadamente bajo, lo que implica que la probabilidad de encontrar un monopolo en el universo observable es prácticamente nula.

Como resultado, la inflación reduce la densidad de los monopolos a un valor insignificante en la actualidad, explicando por qué no observamos una abundancia de estas partículas en el universo.

Se demuestra cómo la inflación resuelve los problemas planteados por la cosmología estándar, al ser, por definición, una etapa de expansión acelerada. Se expone esta característica fundamental de la inflación proporciona soluciones naturales a los desafíos cosmológicos, abordando desde los conceptos básicos una forma accesible y sutil de entender el universo observado y su origen.

### 3.7. Régimen Coherente.

Como se ha mostrado, para que la inflación ocurra, es necesario un mecanismo que genere una forma efectiva de energía oscura que domine temporalmente el universo y luego

desaparezca. Si la constante cosmológica que conocemos hoy hubiera sido responsable de este proceso, su dominio habría sido permanente, lo que no concuerda con la evolución observada del cosmos. Por ello, se requiere un mecanismo que permita la finalización de la inflación. En este contexto, el inflatón, una partícula hipotética de masa extremadamente alta, desempeña un papel fundamental.

En el marco del modelo caótico, la masa del inflatón está relacionada con su valor inicial mediante la expresión:

$$\phi_i \approx \sqrt{2N_e k M_P^2} \approx 16M_P.$$

Dado que hemos calculado el número mínimo de e-folds necesarios para resolver los problemas cosmológicos, tomamos  $N_e = 65$  y consideramos un potencial cuadrático con  $k = 2$ :

$$\phi_i \approx \sqrt{4 \times 65 M_P^2} \approx 16M_P.$$

Este resultado muestra que el valor inicial del inflatón, expresado en unidades de la masa de Planck, depende tanto del número de e-folds requeridos como del exponente  $k$  del potencial inflacionario. En particular, para un potencial cuadrático ( $k = 2$ ) y  $N_e \approx 65$ , obtenemos un valor inicial de  $\phi_i$  que determina la 'altura' inicial del campo inflatón en el espacio de fases.

El inflatón, al ser extremadamente masivo, decae en partículas altamente relativistas. Para que la inflación haya terminado, debe existir algún acoplamiento del campo escalar inflatón con otros campos [10, sección: 4.2], incluyendo los de la materia ordinaria y la radiación, dando inicio al proceso de recalentamiento. Este mecanismo restablece las condiciones necesarias para que el universo transite hacia una fase dominada por la radiación, en concordancia con lo requerido para la nucleosíntesis primordial (BBN).

Antes de adentrarnos en un nuevo régimen, es importante desarrollar una intuición sobre el final del régimen de *slow roll*. Esto incluye comprender cómo concluye la expansión exponencial y las posibles consecuencias asociadas. Para ello, procedemos a sumar las expresiones de la densidad y la presión del inflatón, obteniendo:

$$P_\phi + \rho_\phi = 2\dot{\phi}^2.$$

Lo que muestra explícitamente que cuando la inflación termina, la energía cinética ya no es despreciable y comienza a dominar la dinámica del campo. Para inflación caótica bajo *slow roll*, al reemplazar  $\dot{\phi}$  se tiene:

$$P_\phi = -\rho_\phi + \frac{2}{3}m^2 M_P^2,$$

significa que cuando  $\phi$  disminuye a un valor cercano a  $M_P$ , la parte cinética comienza a ser importante en la ecuación de estado. Cuando la inflación llega a su fin, la expansión acelerada deja de estar impulsada por la energía potencial del inflatón. A medida que el campo  $\phi$  desciende y se acerca a valores más pequeños, la energía cinética se vuelve cada vez más relevante en su evolución. Como resultado, el régimen de *slow roll* ya no es una buena aproximación y la dinámica del campo debe tratarse en su forma completa.

En este nuevo régimen, el inflatón ya no experimenta una expansión exponencial, sino que comienza a oscilar alrededor del mínimo de su potencial. Estas oscilaciones rápidas indican una nueva fase en la evolución cósmica: la fase de oscilación coherente. En este punto, la ecuación de movimiento del inflatón ya no puede simplificarse despreciando  $\ddot{\phi}$ , pues la inercia del campo juega un papel crucial en su comportamiento.

Para analizar el efecto de estas oscilaciones en la evolución del universo, es útil promediar la ecuación de movimiento sobre un período de oscilación. Esto permite extraer una ecuación de estado efectiva que describe el comportamiento macroscópico del inflatón. Multiplicando la ecuación de movimiento (3.9) por  $\phi$  y tomando el promedio (podemos notar que, en un período,  $\langle \phi \dot{\phi} \rangle = 0$ ), obtenemos [8, sección 2.2.8]:

$$-\langle \dot{\phi}^2 \rangle + 3\langle H\phi\dot{\phi} \rangle + \langle \phi V'(\phi) \rangle = 0. \quad (3.66)$$

Resolver directamente las oscilaciones rápidas de  $\phi$  es complicado e innecesario para describir los efectos macroscópicos del campo. El promedio permite simplificar los cálculos al enfocarse en su comportamiento global. Las oscilaciones rápidas generan una densidad de energía media que domina la evolución del universo en esta etapa. El promedio permite deducir una ecuación de estado efectiva para el inflatón oscilante.

Observando que al final de la inflación, ya no es el potencial quien domina si no la energía cinética, para las ecuaciones de Hubble se tiene [8, sección 2.2.8]:

$$H \sim \frac{\langle \dot{\phi} \rangle}{\sqrt{3}M_P} \Rightarrow \langle H\phi\dot{\phi} \rangle = \frac{\langle \phi \rangle}{\sqrt{3}M_P} \langle \dot{\phi}^2 \rangle, \quad (3.67)$$

Dado que al final de inflación  $\frac{\langle \phi \rangle}{\sqrt{3}M_P} \ll 1$  podemos despreciar el término de fricción  $H$  en la ecuación (3.66). Esto no significa que la fricción desaparezca completamente, sino que su efecto es menor en comparación con la rápida variación del campo en cada oscilación. Esto implica que la dinámica del inflatón se asemeja a un oscilador armónico amortiguado débilmente, donde el término de amortiguamiento es pequeño en comparación con el término de oscilación, se obtiene entonces que:

$$\langle \dot{\phi}^2 \rangle \sim \langle \phi V'(\phi) \rangle, \quad (3.68)$$

muestra que la energía cinética promedio del inflatón está determinada por la forma de su potencial y su evolución en la fase postinflacionaria. Luego, podemos expresar la ecuación de estado mediante la relación:

$$w = \frac{P_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\langle \dot{\phi}^2 \rangle - \langle V(\phi) \rangle}{\frac{1}{2}\langle \dot{\phi}^2 \rangle + \langle V(\phi) \rangle} = \frac{\langle \phi V'(\phi) \rangle - 2\langle V(\phi) \rangle}{\langle \phi V'(\phi) \rangle + 2\langle V(\phi) \rangle} = \frac{k-2}{k+2}, \quad (3.69)$$

aplicando el promedio temporal sobre un período de oscilación rápida del inflatón y utilizando la relación entre la energía cinética y potencial, obtenemos una expresión general para el parámetro de ecuación de estado  $w$  en términos del exponente  $k$  del potencial  $V(\phi) \propto \phi^k$ . Esta ecuación es fundamental, ya que permite caracterizar el inflatón como un fluido efectivo con un  $w$  determinado por la forma de su potencial, estableciendo así su influencia en la dinámica del universo en la fase postinflacionaria.

Con el objetivo de obtener la evolución temporal de la densidad de energía del campo inflatón  $\rho_\phi$  en la fase postinflacionaria, se implementa la ecuación de continuidad para

un fluido cosmoico, reemplazando la presión usando la ecuación de estado  $P_\phi = w\rho_\phi$  con  $w$  dada por expresión anterior y haciendo el álgebra correspondiente, obtenemos la ecuación genérica para  $\rho_\phi$  [6, sección: 2.3.1]:

$$\dot{\rho}_\phi + \frac{6k}{k+2}H\rho_\phi = 0. \quad (3.70)$$

En un Universo dominado por  $\phi$ , la ecuación anterior puede resolverse respecto a el factor de escala de forma analítica, dando:

$$\rho_\phi(a) = \rho_\phi(a_i) \left( \frac{a}{a_i} \right)^{-\frac{6k}{k+2}}. \quad (3.71)$$

Esta última ecuación es muy interesante porque recuperamos que para  $k = 2$ :

$$\rho_\phi \propto a^{-3}, \quad (3.72)$$

este resultado es crucial porque confirma que, en el régimen oscilatorio posterior a la inflación, el inflatón se comporta efectivamente como un campo masivo cuya densidad de energía decrece como la de la materia. Esta equivalencia puede entenderse al notar que, en promedio, la energía total del campo escalar se distribuye en partes iguales entre sus componentes cinética y potencial, dando lugar a un parámetro de ecuación de estado efectivo

$$w \approx 0. \quad (3.73)$$

Notando que para inflación caótica para un  $k$  diferente, que para  $k = 4$ :

$$\rho_\phi \propto a^{-4}, \quad (3.74)$$

esto indica que se comporta como un fluido de radiación con un parámetro de ecuación de estado  $w = 1/3$ . Esto implica que la transición al universo dominado por radiación pudo haber ocurrido de manera eficiente sin un recalentamiento prolongado, esto se refiere a un escenario en el que la transferencia de energía del inflatón a la radiación no es inmediata, sino que ocurre de manera gradual a lo largo de un periodo extenso después de la inflación, ya que, el inflatón mismo se comporta como radiación. En un universo donde el inflatón se comporta como radiación inmediatamente después de la inflación, intuitivamente la transición al Big Bang caliente ocurre de manera más natural, ya que no se necesita un proceso adicional para generar la radiación primordial. En este caso, la expansión del universo seguiría la ley  $a(t) \propto t^{1/2}$ , típica de un universo radiativo. Además, los potenciales  $V(\phi) \propto \phi^4$  han sido fuertemente restringidos por observaciones como las de Planck, ya que predicen un índice espectral y una relación tensor-escalar inconsistentes con los datos, aunque podrían ser relevantes en escenarios donde la conversión de energía del inflatón en radiación sea eficiente y no requiera un proceso de recalentamiento prolongado.

Volviendo a nuestro modelo de preferencia, la inflación caótica con  $k=2$ , es de suma utilidad que recuperemos el comportamiento de un campo masivo para un campo oscilante. De hecho, es fácil entenderlo si interpretamos la ecuación de movimiento como la ecuación de un campo homogéneo que oscila a una frecuencia  $m$ . Puede entonces  $\phi$  considerarse como una onda coherente constituida por “partículas- $\phi$ ” u osciladores, con una

frecuencia  $m$  y con momento nulo ( $\mathbf{K} = 0$ ) que en este contexto, significa que el campo escalar  $\phi$  es homogéneo en el espacio, es decir, no hay variaciones espaciales en  $\phi$ , solo varía con el tiempo[6, sección: 2.28] .

A medida que el campo  $\phi$  oscila, su velocidad  $\dot{\phi}$  cambia de signo, lo que impulsa fluctuaciones en  $V(\phi)$  antes de que la energía del campo se redistribuya. Este comportamiento es característico de un sistema oscilante, donde la energía se transfiere periódicamente entre sus formas cinética ( $\dot{\phi}^2$ ) y potencial ( $V(\phi)$ ), de manera análoga a un péndulo que intercambia energía entre el movimiento y la altura.

Dado que  $H$  determina la tasa de expansión del universo, analizar su evolución resulta fundamental para comprender el comportamiento del campo inflatón en la fase postinflacionaria.

$$H^2 = \frac{\dot{\phi}^2 + m^2 \phi^2}{6M_P^2}, \quad (3.75)$$

podemos definir una nueva variable  $\theta$  como[8, sección :2.2.7]:

$$\dot{\phi} = \sqrt{6}M_P H \sin \theta, \quad m\phi = \sqrt{6}M_P H \cos \theta, \quad (3.76)$$

e implementarla en la ecuación de movimiento para obtener[A.2]:

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2 \theta, \quad (3.77)$$

$$\dot{\theta} = -m - \frac{3}{2}H \sin 2\theta. \quad (3.78)$$

Notando que para  $\phi \ll M_P$  (después del final de la inflación  $t_{\text{end}}$ ),  $H \sim \frac{m\phi}{M_P} \ll m$ , podemos resolver el conjunto de ecuaciones anterior [A.3]:

$$H \sim \frac{2}{3t} \left( 1 - \frac{\sin 2mt}{2mt} \right)^{-1}, \quad (3.79)$$

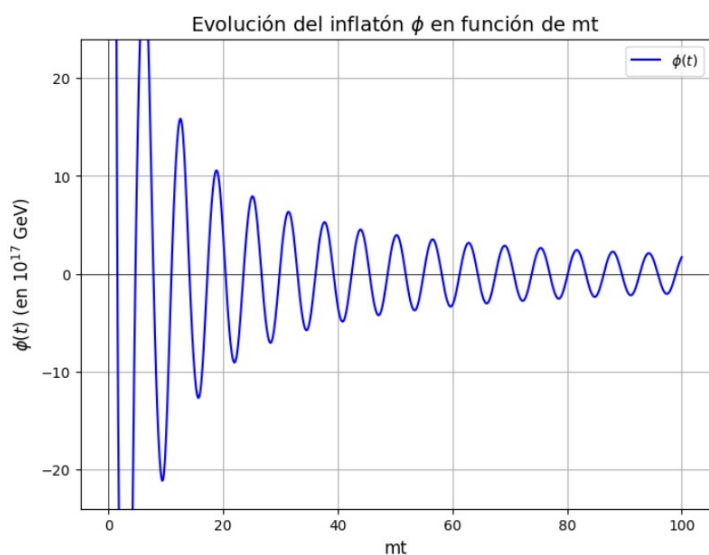
$$\theta \sim -mt. \quad (3.80)$$

Con estos elementos se demuestra que :

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}M_P \left( 1 - \frac{\sin 2mt}{2mt} \right) \frac{\cos mt}{mt}. \quad (3.81)$$

En la Figura 3.3 se aprecia la evolución de  $\phi$  como una función del tiempo normalizado  $mt$ , donde la ecuación de movimiento para el inflatón se resuelve numéricamente. Observamos claramente dos regímenes diferentes.

Primero,  $\phi$  evoluciona linealmente con  $t$ , siguiendo una pendiente de  $-\frac{\sqrt{2}}{3}M_P$ , como dio en el régimen de slow-roll (para valores bajos de  $mt$ ). Luego, al entrar en el régimen de oscilación coherente,  $\phi$  oscila con una frecuencia  $\sim m$ , de acuerdo con (3.78), mientras pierde amplitud a un ritmo  $\sim 3H$ .


 Figura 3.3: Evolución de  $\phi$ .

 Figura 3.4: Evolución de  $\phi$  en el régimen coherente.

La inflación termina cuando el tiempo  $t$  alcanza el orden de  $\tau_\phi^{-1}$ , donde  $\tau_\phi$  es la vida media del inflatón, relacionada con su tasa de decaimiento  $\Gamma_\phi$ [11]. Esta tasa está dada por:

$$\Gamma_\phi = \frac{y_{\text{eff}}^2 m_\phi}{8\pi}, \quad (3.82)$$

donde  $y_{\text{eff}}$  se denomina técnicamente acoplamiento efectivo de Yukawa, que describe el acoplamiento entre un campo escalar y un campo de materia, típicamente fermiones, descrito por la interacción[11]:

$$\mathcal{L} = y\phi\bar{f}f. \quad (3.83)$$

Durante la inflación, la dinámica del inflatón está dominada por su densidad de energía  $\rho_\phi$ , y el universo experimenta una expansión exponencial sustentada por la casi constancia de  $\rho_\phi$ . Sin embargo, cuando  $\phi$  comienza a oscilar alrededor del mínimo de su

potencial, la energía del inflatón se disipa por dos vías principales: la fricción debido a la expansión del universo sobre  $\rho_\phi$ , parametrizada por  $H$  y, su decaimiento en otras partículas regulado por  $\Gamma_\phi$ , que describe el flujo de energía hacia la radiación ( $\rho_R$ ) generada por el decaimiento del inflatón[7, sección:21.1.1].

Esto se refleja en la ecuación de continuidad modificada para  $\rho_\phi$ , que pasa de (3.44) a incluir un término de pérdida de energía[11]:

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + \frac{6k}{k+2}H\rho_\phi = -\frac{2k+2}{k+2}\Gamma_\phi\rho_\phi. \quad (3.84)$$

Esta ecuación recibe el nombre de ecuación de Boltzmann, en este caso ,ecuación de Boltzmann para el polvo (inflatón o campos relativistas), que se deriva al agregar la tasa de decaimiento en el factor de amortiguamiento en la ecuación de movimiento:

$$\ddot{\phi} + (3H + \Gamma_\phi)\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (3.85)$$

La dinámica de este proceso conecta el régimen coherente de oscilaciones del inflatón con el recalentamiento, ya que la energía perdida por  $\rho_\phi$  se transfiere a  $\rho_R$ , reponiendo el contenido térmico del universo y dando paso a la fase de evolución dominada por radiación.

Para concluir, se puede visualizar que las dinámicas asociadas al campo inflatón establecen diferentes regímenes evolutivos según el potencial específico considerado. En el caso específico del potencial con  $k = 2$ , inicialmente, se comporta como una forma de energía oscura, posteriormente, el universo en el promedio de su comportamiento, comporta como materia no relativista, y finalmente, el universo es dominado por radiación, lo que establece las condiciones necesarias para la evolución del universo tal y como lo conocemos.

# Capítulo 4

## Recalentamiento.

La inflación y el recalentamiento pueden considerarse fases plenamente contiguas en la evolución del universo temprano, sin necesidad de introducir estados o etapas adicionales para conectar ambas. Aunque entre estas dos fases pueden ocurrir diversos procesos intermedios necesarios para explicar fenómenos observados en el universo actual, la conexión directa entre la inflación y el recalentamiento ofrece un marco coherente y suficiente para describir esta transición clave en la historia cósmica.

La termalización del plasma primordial caliente y denso, producido por la desintegración del inflatón  $\phi$ , es un tema lejos de ser simple y, ciertamente, aún no completamente entendido. Esta complejidad surge de múltiples factores. El cálculo de los procesos físicos en un universo dominado por materia, gobernado por la expansión de Friedmann y mezclado con estadística no térmica, introduce un alto grado de incertidumbre teórica y suposiciones cuestionables.

Paradójicamente, una vez que el universo alcanza el estado de termalización, su descripción se simplifica considerablemente. Un baño térmico de partículas relativistas tiende a mostrar propiedades universales, facilitando su análisis. Sin embargo, las dificultades resurgen en eventos clave, como el desacoplamiento de partículas o la nucleosíntesis del Big Bang. En términos generales, estas transiciones ocurren cuando el universo se enfría y atraviesa fases de dominio mixto entre materia y radiación.

Es necesario examinar en detalle la solución de las ecuaciones de Boltzmann (ecuaciones que salen simplemente considerando la conservación de la energía) para entender cómo al final de la inflación, el inflatón decae, liberando su energía en forma de partículas que calientan nuevamente el universo. Este proceso se denominó *recalentamiento* para reflejar la idea de que el universo vuelve a alcanzar un estado caliente y energético.

Sabemos que para  $k = 2$  la ecuación de Boltzmann para decaimiento y disolución del inflatón es [11 ; 9, sección: 2.3.1.1]:

$$\frac{d\rho_\phi}{dt} + 3H\rho_\phi = -\Gamma_\phi\rho_\phi \quad (4.1)$$

Un decaimiento lento del inflatón ocurre típicamente si el acoplamiento es únicamente con fermiones. Sin embargo, si el inflatón puede decaer también en bosones, la tasa de decaimiento puede incrementarse significativamente debido a la condensación de Bose y efectos de resonancia paramétrica [11].

Como objetivo, centramos nuestra atención en el recalentamiento y decaimiento a fermiones ultra energéticos, analizamos como el inflatón transfiere su densidad de energía a la radiación del modelo estándar (SM), marcando el final del recalentamiento y el inicio de la era dominada por radiación. La densidad de energía de la radiación  $\rho_R$  está gobernada por la ecuación de Boltzmann:

$$\frac{d\rho_R}{dt} + 4H\rho_R = \Gamma_\phi\rho_\phi, \quad (4.2)$$

Esta ecuación describe cómo la energía del inflatón se transfiere al plasma de radiación del modelo estándar para  $k = 2$ , teniendo en cuenta tanto la expansión del universo ( $4H\rho_R$ ) como el calentamiento generado por la desintegración del inflatón ( $\Gamma_\phi\rho_\phi$ ).

## 4.1. Soluciones de las ecuaciones de Boltzmann.

Aunque las ecuaciones de Boltzmann puedan ser resueltas la mayoría de los casos de forma analítica, se dará una solución de forma numérica, mostrando el comportamiento de los campos de densidad bajo un factor de escala normalizado para el recalentamiento. Solucionando (4.1) y (4.2) para las densidades bajo el parámetro dinámico, conectando este parámetro al factor de escala mediante  $H$  y como se ha mencionado, este proceso es controlado por la tasa de decaimiento del inflatón, se toma  $\Gamma_\phi = 2.5\text{Gev}$  (valor usado en trabajos anteriores [11]).

Al solucionar las ecuaciones bajo estos parámetros se obtiene:

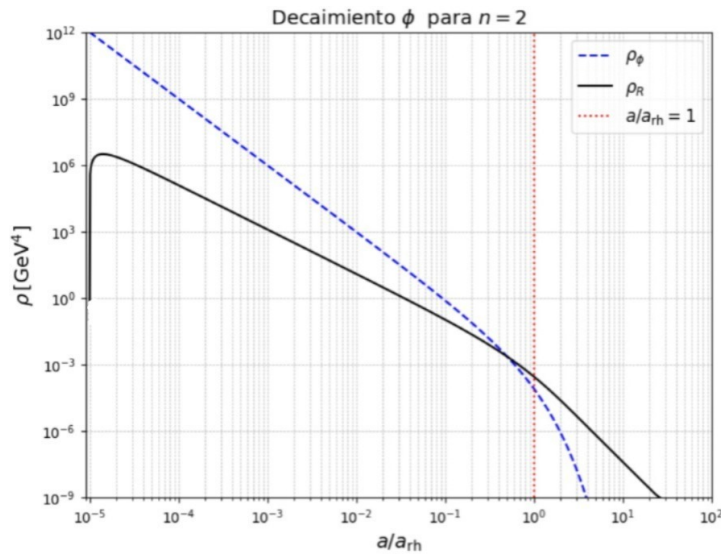


Figura 4.1: Decaimiento de  $\rho_\phi$  y comportamiento de  $\rho_R$ .

La Figura 4.1 muestra la evolución de las densidades de energía del inflatón ( $\rho_\phi$ ) y de la radiación ( $\rho_R$ ) durante el recalentamiento. Inicialmente,  $\rho_\phi$  domina, pero decrece exponencialmente debido a la combinación de su decaimiento en partículas y la dilución por la expansión cósmica. Al mismo tiempo,  $\rho_R$  aumenta rápidamente al absorber la energía liberada por el inflatón, aunque también se ve afectada por la expansión.

Un aspecto clave de esta etapa es que, durante el recalentamiento,  $\rho_\phi$  y  $\rho_R$  se igualan temporalmente en el momento de transición. Esto ocurre porque la energía transferida del

inflatón compensa las pérdidas por expansión en  $\rho_R$ , mientras que el decaimiento reduce la energía de  $\rho_\phi$ . En este punto de equilibrio dinámico, ambas densidades contribuyen de forma comparable al contenido energético total del universo, marcando el fin de la etapa dominada por el inflatón y el inicio de la etapa dominada por radiación.

## 4.2. Temperatura de recalentamiento.

La **temperatura de recalentamiento** ( $T_{RH}$ ) es un parámetro crucial que marca la transición entre el dominio de energía del inflatón y el de la radiación al final del proceso de recalentamiento. Este valor está determinado por la densidad de energía de radiación:

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_*(T_{RH}) T_{RH}^4, \quad (4.3)$$

donde  $g_*(T_{RH})$  representa los grados de libertad relativistas a dicha temperatura.

Bajo la suposición de un recalentamiento instantáneo,  $T_{RH}$  puede expresarse como:

$$T_{RH} = \left( \frac{40}{\pi^2 g_*} \right)^{1/4} \Gamma_\phi M_P, \quad (4.4)$$

Aunque esta temperatura no corresponde al valor máximo alcanzado durante el proceso de recalentamiento, sí representa el punto a partir del cual el universo comienza a comportarse como dominado por radiación.

Para que la **nucleosíntesis primordial (BBN)** sea exitosa,  $T_{RH}$  debe ser mayor que 1 MeV, lo cual garantiza que las reacciones nucleares necesarias para formar elementos ligeros puedan ocurrir. Además, es preferible que  $T_{RH}$  sea significativamente mayor para permitir procesos como la **bariogénesis**, que requieren temperaturas más altas.

En este contexto, es importante analizar cómo los parámetros  $\Gamma_\phi$  y  $g_*$  afectan  $T_{RH}$ . Por ejemplo, un aumento en  $\Gamma_\phi$  resultaría en una  $T_{RH}$  más alta, lo que influiría en la cantidad de radiación producida y en la evolución del universo temprano. Asimismo, los grados de libertad relativistas ( $g_*$ ) en el plasma primordial determinan la relación entre la densidad de energía y la temperatura.

Finalmente, comparar estos resultados teóricos con límites observacionales, como las abundancias de elementos ligeros y las restricciones en las anisotropías del fondo cósmico de microondas, puede validar las conclusiones obtenidas y proporcionar una comprensión más completa del proceso de recalentamiento en el universo temprano.

La Figura 4.2 Muestra como va el comportamiento de  $T_{RH} \propto P_R^{1/4}$ , para fermiones con un potencial cuadrático.

Se obtiene la solución a las ecuaciones de Boltzmann, demostrando cómo el decaimiento del inflatón genera fermiones a altas energías, estableciendo el recalentamiento como el proceso clave que conecta un universo dominado por el inflatón con un estado de Big Bang caliente, donde la radiación y las partículas relativistas comienzan a dominar. Este resultado subraya la importancia del recalentamiento como puente fundamental en la transición hacia la era de radiación y la evolución del universo observable.

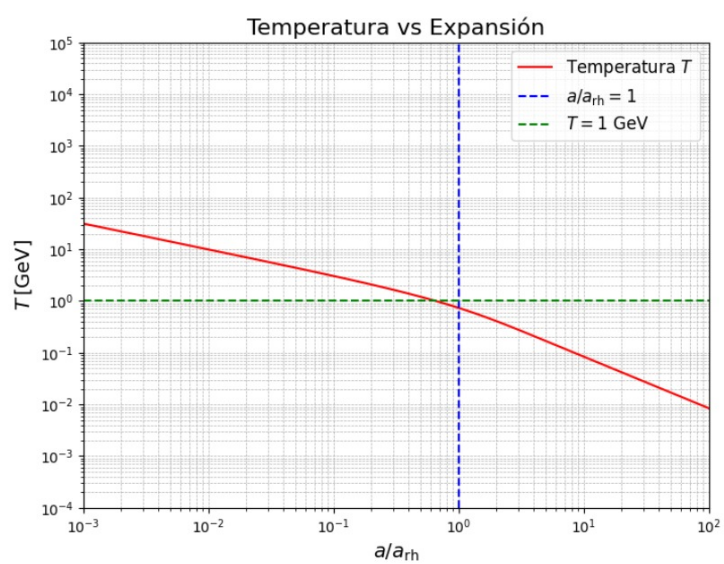


Figura 4.2: Temperatura para el recalentamiento.

# Capítulo 5

## Problemas Abiertos y Áreas de Investigación Futura.

Existen varios experimentos y colaboraciones en curso enfocada en los fenómenos dados anteriormente. Estas investigaciones son clave para comprender cómo evolucionó el universo después del Big Bang. Algunas de las áreas de investigación más importantes:

- **Ondas Gravitacionales Primordiales (PGWs):** El estudio de las ondas gravitacionales primordiales ofrece información sobre el universo temprano, especialmente durante la inflación. Nuevas restricciones sobre estas ondas se están derivando mediante mediciones del CMB, a través de colaboraciones como Planck, ACT y SPT. Estos estudios han permitido reducir el rango de señales posibles de ondas gravitacionales primordiales, lo que facilita el análisis de los modelos inflacionarios al identificar firmas en la estructura a gran escala y el espectro de materia[12].

**Materia Oscura e Inflación:** Un inflatón eléctricamente neutro y estable podría constituir la materia oscura, conectando la inflación con la formación de DM a través del portal de Higgs y acoplamiento gravitacionales. Investigaciones actuales exploran mecanismos como la producción durante el recalentamiento y el *freeze-in*, considerando distintos marcos gravitacionales y efectos multifield. La viabilidad del modelo depende de la masa de DM, con rangos prometedores entre  $10^2$  GeV y  $10^6$  GeV. Futuras pruebas astrofísicas podrían validar esta conexión entre inflación y materia oscura[13].

- **Agujeros Negros Primordiales e Inflación:**

La formación de agujeros negros primordiales en el universo temprano podría estar relacionada con la inflación. En algunos modelos, pequeñas variaciones en la densidad del universo durante la inflación pueden amplificarse lo suficiente como para dar origen a estos agujeros negros. Esto puede ocurrir en escenarios donde la inflación cambia de ritmo abruptamente o cuando interactúa con otros campos en el universo primitivo. Estudiar estos procesos ayuda a comprender mejor cómo se pudieron formar los primeros agujeros negros y cuál es su papel en la evolución del cosmos[14].

# Bibliografía

- [1] B. Ryden, *Introduction to Cosmology*, 2nd ed., Pearson, 2006.
- [2] A. R. Liddle, *An Introduction to Modern Cosmology*, 3rd ed., Wiley, 2015.
- [3] A. Goobar and L. Bergström, *Cosmology and Particle Astrophysics*, 2nd ed., Springer, 2006.
- [4] V. Rubakov, *Introduction to the Theory of the Early Universe: Hot Big Bang Theory*, 2nd ed., World Scientific, 2017.
- [5] M. P. Hobson, G. P. Efstathiou, and A. N. Lasenby, *General Relativity: An Introduction for Physicists*, Cambridge University Press, 2006.
- [6] D. Baumann, *Cosmology*, Cambridge University Press, 2021.
- [7] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation*, Cambridge University Press, 2005.
- [8] Y. Mambrini, *Particles in the Dark Universe: A Student's Guide to Particle Physics and Cosmology*, Springer, 2020.
- [9] E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe*, vol. 69, Taylor and Francis, 2019.
- [10] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [11] N. Bernal and Y. Xu, *JCAP* **12** (2022), 017, doi:10.1088/1475-7516/2022/12/017, [arXiv:2209.07546 [hep-ph]].
- [12] B. Barman, N. Bernal, S. Cléry, Y. Mambrini, Y. Xu and Ó. Zapata, [arXiv:2405.09620 [astro-ph.CO]].
- [13] J. P. B. Almeida, N. Bernal, J. Rubio and T. Tenkanen, *JCAP* **03** (2019), 012 doi:10.1088/1475-7516/2019/03/012 [arXiv:1811.09640 [hep-ph]].
- [14] O. Özsoy and G. Tasinato, *Universe* **9** (2023) no.5, 203 doi:10.3390/universe9050203 [arXiv:2301.03600 [astro-ph.CO]].

# **Apendice.**

# A.1

En este apéndice, derivamos la ecuación de movimiento del campo escalar  $\phi$  a partir de su lagrangiano. Utilizamos el principio de acción y la ecuación de Euler-Lagrange para obtener la dinámica del campo en un espacio-tiempo curvo, relevante en el contexto de la inflación cósmica.

La acción para el campo escalar está dada por:

$$\begin{aligned} S_\phi &= \int d^4x \sqrt{-g} L_\phi \\ L_\phi &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \end{aligned} \quad (1)$$

La ecuación de Euler-Lagrange correspondiente al campo escalar es:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\sqrt{-g} L_\phi) - \partial_\mu \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\sqrt{-g} L_\phi) \right) = 0 \quad (2)$$

Para resolver esta ecuación, evaluamos las derivadas correspondientes.

## 1. Derivada con respecto a $\phi$

El primer término se calcula como:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} (\sqrt{-g} L_\phi) = \sqrt{-g} \frac{\partial L_\phi}{\partial \phi} \quad (3)$$

Dado que el lagrangiano contiene el potencial  $V(\phi)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_\phi}{\partial \phi} &= -\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = -V'(\phi) \\ \frac{\partial}{\partial \phi} (\sqrt{-g} L_\phi) &= -\sqrt{-g} V'(\phi) \end{aligned} \quad (4)$$

## 2. Derivada con respecto a $\partial_\nu \phi$

El segundo término de la ecuación de Euler-Lagrange se calcula como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\sqrt{-g} L_\phi) &= \sqrt{-g} \frac{\partial L_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} \\ \frac{\partial L_\phi}{\partial (\partial_\mu \phi)} &= g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \rightarrow \frac{\partial}{\partial (\partial_\mu \phi)} (\sqrt{-g} L_\phi) = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. Derivada total con respecto a $x^\mu$

Aplicamos la derivada total al término anterior:

$$\begin{aligned}
 \partial_u \left( \frac{\partial}{\partial (\partial_u \phi)} (\sqrt{-g} L_\phi) \right) &= \partial_u (\sqrt{-g} g^{uv} \partial_v \phi) \\
 \partial_u (\sqrt{-g}) g^{uv} \partial_v \phi + \sqrt{-g} \partial_u (g^{uv} \partial_v \phi) & \\
 = 3H \sqrt{-g} \phi + \sqrt{-g} \partial_u (g^{uv} \partial_v \phi) &
 \end{aligned} \tag{6}$$

#### 4. Evaluación en el espacio-tiempo en expansión

Utilizamos la métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuyo determinante es:

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2, \quad \det(g_{uv}) = -a(t)^6 \\
 \frac{d}{dt} (a(t)^3) &= 3a(t)^2 \dot{a}(t), \quad \sqrt{-g} = a(t)^3 \\
 &= 3a(t)^3 H(t) \\
 \frac{d}{dt} (\sqrt{-g}) &= 3\sqrt{-g} H
 \end{aligned} \tag{7}$$

Dado que asumimos que el campo  $\phi$  es homogéneo, sus derivadas espaciales se anulan, dejando únicamente derivadas temporales.

Reemplazando en la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{-g} V'(\phi) - 3H \sqrt{-g} \dot{\phi} - \sqrt{-g} \partial_u (g^{uv} \partial_v \phi) &= 0 \\
 -V'(\phi) - 3H \dot{\phi} - \partial_u \partial_v \phi &= 0 \\
 V'(\phi) + 3H \dot{\phi} + \ddot{\phi} &= 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

Esta es la ecuación de movimiento del campo escalar, la cual describe su evolución en un universo en expansión y es clave para la teoría de la inflación cósmica.

## A.2

En este apéndice, derivamos las ecuaciones diferenciales para la evolución de  $H$  y  $\theta$  a partir de las ecuaciones de movimiento del campo escalar en un potencial cuadrático. El objetivo es expresar la ecuación de movimiento en términos de una nueva variable angular  $\theta$ , lo que permite describir de manera conveniente la evolución del sistema en la fase postinflacionaria.

Dado que  $H$  determina la tasa de expansión del universo, analizar su evolución es fundamental para comprender la dinámica del campo inflatónico después de la inflación. Para ello, reescribimos la ecuación de Hubble en función de  $\theta$  y obtenemos las ecuaciones de  $H$  y  $\theta$ .

Partimos de la ecuación de Hubble:

$$H^2 = \frac{\dot{\phi}^2 + m^2\phi^2}{6M_P^2}. \quad (9)$$

Definimos una nueva variable  $\theta$  de la siguiente manera:

$$\dot{\phi} = \sqrt{6}M_P H \sin \theta, \quad m\phi = \sqrt{6}M_P H \cos \theta. \quad (10)$$

Ahora, derivamos la ecuación para  $\dot{H}$ . Derivando la ecuación de Hubble con respecto al tiempo,

$$2H\dot{H} = \frac{2\dot{\phi}\ddot{\phi} + 2m^2\phi\dot{\phi}}{6M_P^2}. \quad (11)$$

Usando la ecuación de movimiento del campo escalar, sustituimos  $\ddot{\phi}$ :

$$2H\dot{H} = \frac{2\dot{\phi}(-3H\dot{\phi} - m^2\phi) + 2m^2\phi\dot{\phi}}{6M_P^2}. \quad (12)$$

Simplificando,

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2 \theta. \quad (13)$$

Ahora derivamos  $\dot{\theta}$ . Partimos de la ecuación:

$$m\phi = \sqrt{6}M_P H \cos \theta. \quad (14)$$

Derivando con respecto al tiempo,

$$m\dot{\phi} = \sqrt{6}M_P (\dot{H} \cos \theta - H \sin \theta \dot{\theta}). \quad (15)$$

Usando la definición de  $\dot{\phi}$ ,

$$m\sqrt{6}M_p H \sin \theta = \sqrt{6}M_p (\dot{H} \cos \theta - H \sin \theta \dot{\theta}). \quad (16)$$

Reorganizando los términos,

$$mH \sin \theta = \dot{H} \cos \theta - H \sin \theta \dot{\theta}. \quad (17)$$

Despejamos  $\dot{\theta}$ :

$$H \sin \theta \dot{\theta} = \dot{H} \cos \theta - mH \sin \theta, \quad (18)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{H} \cos \theta}{H \sin \theta} - m. \quad (19)$$

Sustituyendo  $\dot{H}$ ,

$$\dot{\theta} = -\frac{3H^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{H \sin \theta} - m. \quad (20)$$

Simplificando,

$$\dot{\theta} = -3H \sin \theta \cos \theta - m. \quad (21)$$

Utilizando la identidad trigonométrica  $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ , obtenemos:

$$\dot{\theta} = -m - \frac{3}{2}H \sin 2\theta. \quad (22)$$

Este resultado nos permite describir la evolución de  $\theta$  en función del tiempo, proporcionando una forma alternativa de entender la dinámica del campo inflatónico en el régimen postinflacionario.

## A.3

En el régimen oscilatorio coherente, el campo escalar oscila rápidamente en torno al mínimo de su potencial. En este caso, la frecuencia de oscilación  $m$  es mucho mayor que el término de fricción dado por la expansión del universo. Este régimen es relevante en el contexto de la teoría de la inflación y el recalentamiento del universo, ya que permite describir la evolución del campo inflatónico en las primeras etapas posteriores a la inflación. En lo que sigue, se derivan las ecuaciones que describen la evolución del campo y la tasa de expansión del universo.

Dado que el campo está en un régimen oscilatorio rápido, consideramos las siguientes aproximaciones:

$$\phi \ll M_p, \quad H \approx \frac{m\phi}{M_p} \ll m. \quad (23)$$

La fase del campo se define como:

$$\dot{\theta} = -m \Rightarrow \theta = -mt + \theta_0, \quad \text{con } \theta_0 = 0. \quad (24)$$

La evolución de la tasa de expansión del universo está dada por:

$$\dot{H} = -3H^2 \sin^2(mt). \quad (25)$$

Para resolver esta ecuación diferencial, integramos ambos lados:

$$\int \frac{dH}{H^2} = -3 \int \sin^2(mt) dt. \quad (26)$$

Utilizando la identidad trigonométrica:

$$\sin^2(mt) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2mt)), \quad (27)$$

tenemos:

$$-\frac{1}{H} = -3 \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2mt)) dt. \quad (28)$$

Resolviendo la integral:

$$-\frac{1}{H} = -\frac{3}{2} \left( t - \frac{\sin(2mt)}{2m} \right). \quad (29)$$

Por lo tanto, la expresión para  $H$  es:

$$H = \left( \frac{3}{2}t - \frac{3 \sin(2mt)}{2m} \right)^{-1}. \quad (30)$$

Reescribiendo,

$$H = \frac{2}{3} \left( t \left( 1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right) \right)^{-1}. \quad (31)$$

Finalmente,

$$H = \frac{2}{3t} \left( 1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)^{-1}. \quad (32)$$

Para obtener la expresión de  $\phi$ , usamos la relación:

$$m\phi = \sqrt{6}M_p H \cos(mt). \quad (33)$$

Sustituyendo la expresión de  $H$ :

$$m\phi = \sqrt{6}M_p \frac{2}{3t} \left( 1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)^{-1} \cos(mt). \quad (34)$$

Simplificando,

$$\phi = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \frac{M_p}{\left( 1 - \frac{\sin(2mt)}{2mt} \right)} \frac{\cos(mt)}{mt}. \quad (35)$$

Se ha demostrado que, en el régimen oscilatorio coherente, la evolución del campo escalar  $\phi$  y la tasa de expansión  $H$  siguen un comportamiento bien definido, donde el campo oscila con frecuencia  $m$  y la expansión del universo está modulada por la función trigonométrica. Este resultado es útil para describir la dinámica del universo temprano en el periodo de recalentamiento posterior a la inflación.