

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS EN UN CONTEXTO CAFETERO

JORGE DIDIER OBANDO MONTOYA

JOHN FREDY SÁNCHEZ BETANCUR

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN REGIONES

PRIMERA COHORTE

2014

CONSTRUCCIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS EN UN CONTEXTO CAFETERO

JORGE DIDIER OBANDO MONTOYA

JOHN FREDY SÁNCHEZ BETANCUR

Trabajo de investigación para optar al título de Magister en Educación.

Línea en Educación Matemática.

Asesores:

Mg. Lina María Muñoz Mesa

Dr. Jhony Alexander Villa-Ochoa

Grupo De Investigación En Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN AVANZADA

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN REGIONES

PRIMERA COHORTE

2014

Agradecimientos:

Queremos agradecer en primer lugar a Dios que nos ha permitido alcanzar un logro más en nuestras vidas.

Nuestra gratitud de forma muy especial a los cinco estudiantes que participaron en el proyecto, al igual que sus padres que les permitieron ser parte de la investigación.

A nuestros asesores: Magister Lina María Muñoz quien con su experiencia, conocimiento y dedicación nos ayudó a sacar adelante esta investigación y al Doctor Jhony Alexander Villa Ochoa que nos orientó en momentos difíciles.

A los cinco estudiantes que sin esperar nada a cambio decidieron colaborarnos con la investigación.

A nuestras familias que nos apoyaron incondicionalmente.

Nota de aceptación

Presidente del Jurado

Jurado 1

Jurado 2

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE ILUSTRACIONES.....	7
ÍNDICE DE TABLAS.....	9
RESUMEN.....	10
INTRODUCCIÓN	12
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	15
1.1 Una reflexión desde el aula de clase.....	15
1.2 Revisión de la Literatura	16
1.2.1. Aportes de algunas investigaciones sobre la desarticulación entre la matemática escolar y contexto.....	16
1.2.2. Aportes de algunas investigaciones sobre modelación matemática	19
1.2.3. Aportes de algunas investigaciones sobre modelos matemáticos	22
1.3 Formulación del Problema	29
1.4 Objetivo.....	30
1.5 Objeto de investigación.....	30
2. Referentes Teóricos	31
2.1. Consideraciones teóricas sobre la modelación matemática.....	31
2.1.1 Proceso de modelación.....	35
2.1.2 Perspectivas de la modelación	38
2.2 Modelo Matemático: desde una mirada educativa.....	43
2.3 Contexto	46
2.4 Algunas consideraciones sobre función exponencial.....	49
3. Metodología de investigación	52
3.1 Enfoque de Investigación.....	52
3.2 Método de Investigación	54
3.3 Diseño de Estudio	54
3.3.1 El contexto.....	55
3.3.2 Los participantes	55
3.3.3 Fuentes de recolección de datos.....	56
3.4 Fases de intervención con los estudiantes	59
3.5 Análisis de la Información	62

3.6 Escrito del informe final.....	64
3.7 Validez del estudio.....	66
4. La Modelación Matemática en el Contexto del Cultivo de Café.....	68
4.1 Construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero.....	68
4.1.1 Proceso de modelación basado en fragmento del artículo de Bustillo (2006) sobre la reproducción de la broca	70
4.1.2 Validación de modelos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto.....	100
4.2. Validación de los modelos construidos por un especialista	112
5. CONCLUSIONES.....	120
5.1. Alcance del objetivo	120
5.2 Etapas que surgen en el proceso de modelación desde la investigación	124
5.3 Aportes de la investigación para los docentes sobre la implementación de la modelación matemática en el aula de clase	129
5.4. Futuras investigaciones	131
5.5. Divulgaciones	132
6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	133
7. APÉNDICE.....	141
Anexo 1: Consentimiento de Participación.....	141
Anexo 2: Documento escrito otorgado por los extensionistas del comité de caficultores a los campesinos	143
Anexo 3: Guía 1, Cosecha Cafetera.....	144
Anexo 4: Guía 2, Nutrición del Cafeto	145
Anexo 5: Guía 3, Sobre la Fertilización en la Etapa Joven del Cafeto.	148
Anexo 6: Guía 4, La Broca	150
Anexo 7: IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas	152
Anexo 8: 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	154
Anexo 9: V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas.....	155
Anexo 10: 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa	157
Anexo 11. Identificación de la situación que más afecta al café.....	158

TABLA DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1. Modelo construido desde el proceso de modelación. Biembengut y Hein (2002, p. 32).....	24
Ilustración 2. Modelo que surge de un proceso de modelación. Villa-Ochoa (2007, p. 81)	25
Ilustración 3. Modelo construido del proceso de modelación. (Londoño y Muñoz, 2011, p.164)	26
Ilustración 4. Modelo construido en el proceso de modelación.....	27
Ilustración 5. Figura presentada para apoyar la construcción de un modelo. (Berrío, 2012, p. 71)	28
Ilustración 6. Modelo re-construido por los estudiantes. (Berrío, 2012, p.74).....	28
Ilustración 7. Modelo de la Federación de Cafeteros. (Berrío, 2012, p. 71).....	28
Ilustración 8. Gráfica creciente(a) y decreciente (b) de la función exponencial. (Zill y Wrigth, 2011, p.49)	50
Ilustración 9. Fotografías del proceso de la contextualización. Mayo (2012)	69
Ilustración 10. Fotografía del proceso de experimentación. Junio (2013).....	69
Ilustración 11. Fotografías sobre la afectación del grano. Agosto (2013)	75
Ilustración 12. Fragmento Ciclo Biológico de la Broca. Bustillo (2006) (citado en Sánchez et al., 2013, p.534)	80
Ilustración 13. Datos simplificados del artículo. Bustillo (2006)	85
Ilustración 14. Proceso de potenciación realizado por Ernesto para representar el número de hembras en ocho generaciones.	88
Ilustración 15. Escrito realizado por Ernesto donde explica la razón para utilizar la potenciación.	88
Ilustración 16. Modelo sobre la reproducción de la broca hembra construido por los estudiantes: A. Bernardo, B. Ernesto, C. Antonio, D. Carlos, y, E. José.	93
Ilustración 17. A. Potenciación realizada por Ernesto., B. Potenciación realizada por José.....	95
Ilustración 18. Modelo sobre la reproducción de la broca macho construido por los estudiantes: A. Antonio, B. Carlos, C. Ernesto, D. José, y, E. Bernardo.	99
Ilustración 19. Fotografías de los estudiantes Bernardo y Ernesto en el proceso de experimentación.	102
Ilustración 20. Fotografía de los estudiantes Antonio y José en el proceso de experimentación.	104
Ilustración 21. Fotografías de las brocas machos identificadas por los participantes. Agosto-Septiembre, 2013.	106
Ilustración 22. Matematización de la reproducción de las brocas hembras. Realizada por Ernesto	107
Ilustración 23. Modelo sobre la reproducción de la broca hembra construido desde la experimentación por los estudiantes: A. Ernesto, B. Bernardo, C. Carlos, D. José y E. Antonio	108
Ilustración 24. Generalización del modelo de la reproducción de la broca hembra realizado por Ernesto.	109

Ilustración 25. Matematización de la reproducción de las brocas machos. Realizada por Ernesto	109
Ilustración 26. Modelo sobre la reproducción de la broca macho construido desde la experimentación por los estudiantes: A. Ernesto, B. Bernardo, C. Carlos, D. José y E. Antonio.....	111
Ilustración 27. Proceso de modelación que surge en la investigación.	125

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Perspectivas de modelación. Kaiser y Schwarz (2010)	40
Tabla 2. Concepciones sobre Modelo Matemático.	44
Tabla 3. Clasificación de modelos según la función.	45
Tabla 4. Votación por actividades de mayor dependencia económica en las familias.	60
Tabla 5. Momentos en que se dividió el primer tema de la investigación.	64
Tabla 6. Número de brocas y larvas en el lote 1 y 2.	104
Tabla 7. Algunos significados de palabras coloquiales utilizadas por los estudiantes que participaron en la investigación.	124

RESUMEN

En la investigación reportamos un estudio realizado con estudiantes de grado décimo del municipio de Andes Antioquia, en el cual implementamos la modelación matemática como una herramienta que permitió modelar el proceso mediante el cual, los estudiantes articularon los conocimientos aprendidos en clase de matemáticas con situaciones del contexto extraescolar.

En este sentido la investigación tuvo como finalidad abordar una situación del contexto de interés para los estudiantes, en el caso particular la reproducción de la broca, situación de relevancia en la caficultura por su relación directa con la economía de las familias de la región.

El interés de los estudiantes por responder a cada una de las preguntas relacionadas con la situación reproducción de la broca, sus ideas, proceso y reflexiones de forma individual y grupal, nos permitieron emprender un proceso de modelación que posibilitó la descripción de la construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero.

La investigación por lo tanto estuvo enmarcada por la modelación, modelo y contexto lo cual está en concordancia con los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998), los Estándares Básicos (Colombia, 2006), Villa-Ochoa y Ruíz (2009), Berrío (2012) y Londoño y Muñoz (2011) los cuales pretenden que los docentes implementen la modelación en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes que les permita relación sus conocimientos con situaciones de la vida cotidiana.

El método que se ajustó a la investigación fue el estudio de caso tipo instrumental el cual nos permitió utilizar el caso particular reproducción de la broca como un instrumento para llevar a cabo el proceso de modelación con los estudiantes.

Finalmente el proceso de modelación lo dividimos en dos momentos, el primero enfocado en el trabajo de los estudiantes con base al fragmento del artículo de Bustillo (2006) y el segundo en relación con la validación de los modelos obtenidos por medio de la construcción experimental en el contexto cafetero cercano a los estudiantes, proceso de modelación que se realizó según las etapas de Biembengut y Hein (2004).

Palabras claves: Modelación matemática, modelo, cafetero, reproducción, broca, función exponencial, contexto.

INTRODUCCIÓN

La educación, desde la representación de la escuela, debe cumplir, entre otras funciones, aquellas que atañen a la preparación de los estudiantes para la vida y, por ende, debe involucrar procesos sociales, económicos, políticos y culturales en relación a la enseñanza y aprendizaje; sin embargo, según Ramos y Font (2006) existe un problema en la transferencia de un conocimiento aprendido en la escuela a las situaciones de la vida cotidiana, esto se evidencia en una desarticulación entre la matemática enseñada en clase y la que utilizan los estudiantes para solucionar problemas de su contexto, situación que ha sido también reportada por investigadores como Villa-Ochoa y Ruíz (2009), Berrío (2012), Londoño y Muñoz (2011) entre otros.

Teniendo en cuenta que existe cierta desarticulación entre la matemática que se enseña en clase y los contextos extraescolares en los que se desenvuelve cada persona, nuestra investigación se centró en uno de los contextos cercanos a los participantes, el cafetero, ya que fue desarrollada con algunos estudiantes del municipio de Andes (Antioquia), región que se distingue por una alta actividad en este producto.

La cercanía de los estudiantes con el contexto cafetero nos condujo al análisis de algunos fenómenos que se presentan allí como excusa para articular la matemática escolar con los contextos extraescolares. Desde esta mirada, implementamos la modelación matemática como uno de los procesos generales propuestos por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (Colombia, 1998), ya que en este documento el Ministerio de Educación Nacional declara que la modelación conlleva a una mejor comprensión e interpretación de los fenómenos en cada uno de los contextos sociales, culturales, familiares y escolares que se pueden representar a través de procesos y análisis matemáticos.

En la idea de establecer la relación de la vida cotidiana de los estudiantes y la modelación matemática como proceso general que permite ésta relación, desarrollamos una investigación con cinco estudiantes del grado decimo de una Institución Educativa del municipio de Andes Antioquia, bajo el método de estudio de caso en el paradigma cualitativo. Este método nos permitió realizar un análisis con mayor detalle de los procesos que emergen en la construcción de modelos matemáticos sugiriendo respuestas a fenómenos como producto del análisis del contexto cafetero desde la mirada y necesidades de los estudiantes e investigadores integrantes de la investigación.

El documento se compone de cinco capítulos, en el primer capítulo presentamos el planteamiento de problema y lo fundamentamos desde una revisión de la literatura; desde allí, estructuramos algunos aportes de autores que hacen referencia a la desarticulación entre la matemática escolar y contexto. Seguidamente mencionamos otras investigaciones donde se ha tratado la modelación matemática y algunos modelos que han emergido a partir de situaciones particulares en el contexto, finalizamos el capítulo con la delimitación del problema a través de una pregunta, objetivo y objeto de investigación.

En el segundo capítulo presentamos el marco teórico, el cual se centró en elementos como modelación, modelo y contexto, los cuales permitieron el análisis de los resultados desde la idea de la modelación matemática y la incorporación de contextos cercanos a los estudiantes.

En el tercer capítulo describimos los elementos metodológicos abordados para responder a la pregunta de investigación focalizada en un objeto de estudio alrededor de la construcción de modelos matemáticos que emergen del contexto cafetero.

El cuarto capítulo presentamos los resultados observados en el trabajo de campo, dando respuesta a la pregunta de investigación planteada desde la mirada de la modelación matemática (proceso general que deben desarrollar los estudiantes) y la significación impuesta por el contexto a la construcción de modelos matemáticos.

En el capítulo final recogemos las conclusiones que se describen de la investigación; en dicho capítulo resaltamos la importancia de la construcción (social, matemática, personal, grupal) realizada por los estudiantes bajo el proceso de modelación matemática en el contexto cafetero.

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo presentamos en primer lugar algunas reflexiones desde el aula sobre la problemática de implementar la matemática escolar en contextos extraescolares. En segundo lugar, abordamos la revisión de la literatura centrándonos en la desarticulación entre el contexto escolar y el contexto extraescolar seguido de algunos referentes teóricos sobre la modelación y su implementación para relacionar situaciones de contexto con la matemática. Finalmente mencionamos algunas investigaciones recientes de corte nacional como Bustamante (2012), Londoño y Muñoz (2011), Berrío (2012) e internacional como Biembengut (2002), donde algunos docentes en compañía de sus estudiantes han reconstruido modelos que relacionan el contexto extraescolar con la matemática.

1.1 Una reflexión desde el aula de clase

La educación centrada en la escuela, debe ser reflexionada por los docentes, investigadores y demás actores educativos en pro de atender a la consecución de los objetivos trazados por el Ministerio de Educación Nacional en cuanto a los procesos de enseñanza y la influencia de estos en el aprendizaje.

En nuestra práctica docente hemos observado que los estudiantes para resolver situaciones del contexto cercano que involucre matemática, requieren de la explicación previa del docente de matemática sobre los procesos que se implementan para la solución de cada una de las situaciones que pretenden dar respuesta los estudiantes.

Los diálogos y reflexiones construidas con otros colegas de matemáticas en la institución educativa en torno a las actividades con los estudiantes donde deben involucrar la matemática para resolver situaciones de su contexto cercano, nos han permitido determinar que no todos los

estudiantes implementan los procesos matemáticos y razonamientos coherentes para llegar a soluciones de situaciones emergentes de su vida cotidiana.

A continuación, presentamos investigaciones que sustentan y describen algunas de las ideas mencionadas en el apartado anterior.

1.2 Revisión de la Literatura

Con el fin de hacer una revisión minuciosa de las investigaciones y contenidos relacionados con el estudio que reportamos en este documento, hicimos un rastreo bibliográfico, el cual presentamos de la siguiente manera: inicialmente mostramos algunos aportes de autores que hablan de la desarticulación entre la matemática escolar y el contexto, seguidamente mencionamos otras investigaciones donde han tratado la modelación matemática y finalmente algunas investigaciones en las que se construyeron modelos en contexto.

1.2.1. Aportes de algunas investigaciones sobre la desarticulación entre la matemática escolar y contexto

La idea de la desarticulación de los conocimientos matemáticos impartidos a los estudiantes en el aula de clase con los saberes que se emplean en la solución de los problemas de la vida cotidiana, ha sido abordada por varias investigaciones Red y Lave, (1981), Nunes, Schliemann y Carraher, (1993), Jurdak y Shahin,(2001), Diez, (2004). En general, en la mayoría de estos trabajos puede determinarse que es necesario pensar la educación matemática desde diferentes mecanismos de acercamiento de las clases con los contextos cercanos, donde el uso de la matemática debe ser un asunto espontáneo y práctico desde la idea de la transferencia de los elementos matemáticos aprendidos en clase a las situaciones de la vida cotidiana de los estudiantes.

Font (2007) ha retomado investigaciones con ejemplos concretos donde muestran una brecha importante entre las matemáticas que se explican en la escuela y las que utilizan las personas en la vida cotidiana, entre ellos, presentamos a D'Amore y Pinilla (2001) quienes concluyen que la existencia de esta brecha es uno de los motivos que explican las actitudes negativas que muchas personas desarrollan hacia la matemática.

Font (2007) además plantea un problema abierto para la investigación en didáctica de las matemáticas, la transferencia del conocimiento usado o generado de un contexto a otro diferente y más en concreto, el problema de la transferencia del conocimiento aprendido en la escuela a situaciones prácticas de la vida cotidiana y viceversa.

Otros autores, expresan la importancia de implementar en el aula de clase situaciones que no sean simuladas, es decir que puedan ser re-significadas por los estudiantes desde sus vivencias y análisis. En este sentido, Pérez, Valle, Zolkower y Bressan (2000) mencionan que en la escuela, y específicamente en los libros de texto suelen ser escasos los contextos en que las situaciones problema funcionan como objeto del quehacer matemático de estudiantes y docentes, apareciendo más bien situaciones camufladas en enunciados verbales fuertemente relacionados con un tipo de proceso, donde el contexto es irrelevante para la comprensión y resolución del problema.

Igualmente Pérez et al (2000) se refieren a que ante la solución de situaciones problema, los estudiantes se empeñan en adivinar o descifrar cuál es la operación que deben de realizar, apelando a formas de razonamiento repetidas o formuladas sin poner en juego su sentido común y lo que saben acerca de cómo son las cosas fuera del ámbito de la escuela.

Con relación a las formas repetidas en que los estudiantes basan sus soluciones, podemos hablar de unos problemas que llevan a la rutina, entendiendo ésta como un proceso frecuente, en donde los estudiantes adolecen de conexiones coherentes entre las matemáticas que fueron enseñadas y las matemáticas que requiere para solucionar determinado problema, empleando procesos que fueron ejercitados e incorporados desde la repetición y no desde el razonamiento.

De acuerdo a esto, Díaz y Poblete (2001) señalan que para resolver problemas no rutinarios se necesita que el estudiante evoque un conjunto de conocimientos y experiencias previas con el fin de solucionar situaciones de contexto, mientras que los problemas rutinarios necesitan de instrucciones ya practicadas con anterioridad.

La desarticulación entre la matemática escolar y el contexto extraescolar es un tema pertinente de analizar, puesto que es una necesidad que los estudiantes puedan aplicar la matemática requerida para resolver problemas presentados en un contexto natural y espontáneo (vida cotidiana). Por lo tanto, se hace prioritaria la idea de incorporar en el aula procesos que generen lazos entre lo que se enseña y las situaciones de la vida cotidiana del estudiante. En este sentido, los Lineamientos Curriculares (1998) mencionan que es necesario utilizar los intereses de los estudiantes desde el contexto que los rodea, siendo el docente quien aproveche estos intereses como un recurso en el proceso de enseñanza que permita generar preguntas y situaciones incentivadoras en el proceso de aprendizaje de la matemática.

En la búsqueda de relaciones entre el contexto escolar y las matemáticas escolares, encontramos la modelación matemática como uno de los procesos generales citados por documentos rectores colombianos. Es así como en esta investigación proponemos el proceso de modelación como objeto para describir los posibles modelos que emergen del contexto cafetero

cercano a los estudiantes, pretendiéndose generar la articulación entre los conocimientos matemáticos aprendidos en clase y el contexto cercano a los estudiantes.

A continuación, presentamos algunas investigaciones sobre la modelación matemática, en donde se evidencia la importancia de integrar este proceso como eje articulador entre la matemática escolar y las situaciones que se presentan en la vida cotidiana de los estudiantes.

1.2.2. Aportes de algunas investigaciones sobre modelación matemática

La modelación en las últimas décadas ha tomado importancia, muestra de ello son las diferentes comunidades y eventos especializados a nivel internacional como:

ICTMA (*International Community on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*); CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática); RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), donde a partir de RELME 23 se creó un grupo de modelación y tecnología que tiene como propósito investigar sobre modelación en la enseñanza de matemática.

A nivel nacional, la modelación es vista desde nuestros documentos rectores, como uno de los procesos generales que el estudiante debe desarrollar con base en la propuesta curricular planteada para matemáticas. Consecuentemente con esta idea de proceso general, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas de Colombia (2006), expresa que:

“En una situación problema, la modelación permite decidir que variables y relaciones entre variables son importantes, lo que posibilita establecer modelos de diferentes niveles de complejidad...” (MEN, 2006, p.8). Es desde esta idea de modelación matemática que resaltamos la necesidad de fomentar procesos que redunden en construcciones abstractas (modelo), en cuanto a su estructura, pero dotadas de significados desde la concepción que surge del análisis de

una situación no fabricada (desde el contenido), sino desde las necesidades e intereses de los estudiantes.

A través de la revisión de literatura encontramos algunos autores que resaltan la modelación matemática como una actividad que posibilita la motivación en cuanto al aprendizaje de las matemáticas. En este sentido, Blomhøj (2004) expresa:

Las actividades de modelación pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar a establecer raíces cognitivas sobre las cuales construir conceptos matemáticos. Así mismo, la modelación tiene como finalidad describir y analizar algún fenómeno de la vida diaria con el fin de motivar el trabajo con la matemática. (Mina, p.145.Trad).

La modelación matemática toma importancia cuando su implementación permite al profesor considerar el contexto extraescolar y social para abordar situaciones problema que afrontan a diario los estudiantes, es decir, el profesor tendrá en esta actividad muchas opciones que le puedan ayudar a relacionar los conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los estudiantes puedan observar y otorgar una mayor importancia a las matemáticas escolares (Castro y Castro, 2000).

Autores como Gabardo (2006) y Villa-Ochoa, Rojas y Cuartas (2010) han resaltado que la modelación se ha venido consolidando como herramienta de enseñanza y aprendizaje en varios niveles educativos, ya que promueve el análisis, comprensión, aplicación de los conceptos matemáticos y desarrolla capacidades en los estudiantes para posicionarse de manera crítica ante las diferentes situaciones sociales permitiendo interpretar y resolver situaciones problema de una realidad en la que participan profesores y estudiantes.

Las actividades de modelación matemática realizadas en torno a problemas de contexto vinculados con la realidad, posibilita que los estudiantes lleguen a soluciones creativas y consensuadas, convirtiéndose en una manera para la reconstrucción de significados matemáticos. En este sentido, Arrieta, Canul y Martínez (2005) resaltan que la modelación permite construir un contexto donde los estudiantes y profesores proponen argumentos, herramientas y significados de un fenómeno analizado desde los conceptos matemáticos.

En concordancia a lo anterior, D'Ambrosio (2009) resalta que la modelación proporciona la creación del conocimiento, permitiendo validar y hacer predicciones sobre el comportamiento de la situación real que se modela, dotando de significado el contexto en el que se da la situación. Bajo esta misma idea Villa-Ochoa, Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo (2009) explicitan que "... al abordar situaciones reales del contexto sociocultural al interior del aula de clase, la modelación se convierte en una herramienta que permite resignificar dichos contextos" (p.169). Otras investigaciones desarrolladas a nivel nacional, manifiestan la necesidad de relacionar las matemáticas escolares con otros contextos, fenómenos o situaciones de la cotidianidad, focalizándose particularmente en los entornos propios de la cultura y sociedad de los estudiantes, de ahí que Londoño y Muñoz (2011), Berrío (2012), Bustamante (2012) y Villa-Ochoa (2012/2013) indagan por la manera en que los estudiantes reconstruyen modelos, afirmando que la implementación de este proceso de modelación permite ampliar los conceptos matemáticos y profundizar en el reconocimiento de algunas características de los contextos involucrados.

A través de algunas investigaciones indagadas en esta revisión, se deja abierta la propuesta de continuar implementando la modelación matemática desde el ámbito educativo, como una de las maneras que permite relacionar los contextos cercanos a los estudiantes con las matemáticas escolares. De la misma manera, nuestra investigación posibilita el análisis de un contexto que

aporta a los estudiantes e investigadores, reflexiones y experiencias que aportan a la enseñanza y aprendizaje de la matemática, cuando se utiliza el proceso de modelación como una estrategia o proceso en el aula de clase.

A continuación, complementamos nuestra revisión de la literatura en cuanto a la necesidad de implementar el proceso de modelación desde la idea de construir modelos, donde éstos describen estrategias y relaciones matemáticas coherentes pertinentes en la solución del problema planteado en la clase de matemáticas.

1.2.3. Aportes de algunas investigaciones sobre modelos matemáticos

La implementación de la modelación matemática posibilita no solo la articulación del contexto escolar con el contexto cercano del estudiante, sino la construcción de modelos representando la realidad mediante símbolos matemáticos. A continuación mostramos algunas investigaciones que presentan modelos surgidos en el trabajo desarrollado desde el proceso de modelación.

En este proceso, gracias al conocimiento del contexto, los estudiantes tienen la oportunidad de significar sus conjeturas y verificar sus formulaciones. En palabras de Jiménez y Perales (2002), la construcción de modelos y el trabajo con los mismos en torno a una actividad en el aula de clase puede fomentar la creatividad, la imaginación y la capacidad para relacionar variables que hacen parte del contexto particular que se estudia, es decir, los modelos constituyen en sí, las diferentes formas de representar los fenómenos observados y explicarlos.

Los modelos que surgen del análisis, la simplificación y el trabajo matemático son el producto de una propuesta para la solución de la situación problema emergente en el contexto cercano al estudiante, es por esto que los modelos pueden ser considerados representaciones que simplifican

los fenómenos y una de las formas de dar solución a una pregunta que se formula desde el contexto elegido en un proceso de modelación matemática. En palabras de García (2011), “... La construcción de modelos posibilita encontrar relaciones ocultas dentro del contexto de estudio que enriquecen y robustecen los conocimientos sobre los fenómenos y conducen al investigador a caracterizarlo de forma más precisa y profunda”. (p.26)

El análisis de los fenómenos que rodean al estudiante y son susceptibles de ser modelados en el aula clase, posibilitan encontrar representaciones simples o complejas, según el caso, que relaciona el fenómeno con un lenguaje matemático (gráficas, tablas, expresiones algebraicas, entre otras). En este sentido podríamos decir que la matematización de la situación coloca al estudiante en la tarea de identificar variables y establecer relaciones entre ellas.

Los modelos que surgen desde la idea de la modelación matemática, pueden ser representados de diversas maneras, en esta caracterización, podemos establecer aquellos que son contruidos por los estudiantes en el aula y los contruidos fuera del aula para ser empleados dentro de ésta en la solución de determinados problemas simulados. Desde esta idea, Justi y Gilbert (1999) expresan que el uso de modelos ya contruidos implica la posibilidad de interpretar fenómenos y resolver problemas, pero la construcción de éstos por parte de los estudiantes puede permitir la adquisición y desarrollo de capacidades para comprender mejor los conocimientos matemáticos más allá del aprendizaje de modelos formales e instruccionales planteados desde la planeación de un currículo.

En esta misma idea, Musantes (2006) establece que es importante que a través del proceso de modelación se invite a los estudiantes a crear sus modelos, siendo esto una actividad que toma tiempo, compensándose el esfuerzo con los resultados del proceso de enseñanza. En este sentido,

citamos algunos modelos que fueron contruidos por los estudiantes en diversas investigaciones y en condiciones particulares.

$$P(d) = 125 \times \frac{840 - 600(0,8)^{2d-2}}{8d}$$

Ilustración 1. Modelo construido desde el proceso de modelación. Biembengut y Hein (2002, p. 32)

Biembengut y Hein (2002) determinan un modelo el cual se muestra en la ilustración 1, este se relaciona con la plantación de manzanos y surge como respuesta a la pregunta: “... ¿Cuál es la distancia ideal entre un manzano y otro, en la misma (fila) para que se tenga una máxima producción?” (p.30). En el proceso de modelación que llevó a la construcción de este modelo hubo un recorrido que inicio con un reconocimiento y familiarización de la situación problema, seguido de una conformación de supuestos relacionados con el proceso de cultivo de manzana que emergieron de la situación particular, entre ellos mencionamos “... relación entre el espacio observado entre manzanos de la misma calle (distancia en metros)” (Biembengut y Hein, 2002, p.31) simbolizado la distancia con la letra (d) y la producción simbolizada con la letra (P), la cual es, según el texto “... directamente proporcional a la cantidad de manzanas e inversamente proporcional a la distancia entre dos plantas consecutivas en la misma calle”. (Biembengut y Hein, 2002, p.32).

El proceso de construcción del modelo anterior, permitió que los estudiantes asociaran problemas sociales y culturales conllevando a la transmisión de un legado de conocimientos a las siguientes generaciones como medio para la continuidad de la cultura (Biembengut y Hein, 2002).

A nivel nacional mencionaremos algunos autores como: Villa-Ochoa (2007), Londoño y Muñoz (2011), Berrío (2012), quienes en trabajo conjunto con los estudiantes han construido modelos matemáticos que se relacionan con situaciones problema del contexto cercano.

Describimos a continuación de forma simplificada el modelo que presenta Villa-Ochoa (2007), el cual es construido con sus estudiantes, y surge del análisis de la siguiente situación problema relacionada con la economía (mercadeo y consumo) “... ¿Cuál de las propuestas existentes en el mercado de las comunicaciones será la más conveniente para las diferentes necesidades de los compañeros del grupo?”. (Villa-Ochoa, 2007, p.75).

Partiendo de este interrogante se desarrolla un proceso de modelación, del cual producen el siguiente modelo:

$$C(x) = \begin{cases} 7.500 & \text{Si } x \leq 5 \\ 7.500 - 1.300(x - 5) & \text{Si } x > 5 \end{cases}$$
$$C(x) = \begin{cases} 16.500 & \text{Si } x \leq 20 \\ 16.500 + 1.300(x - 20) & \text{Si } x > 20 \end{cases}$$
$$C(x) = 27.000$$

Ilustración 2. Modelo que surge de un proceso de modelación. Villa-Ochoa (2007, p. 81)

Villa-Ochoa (2007) especifica que (C) representa la variable costo de consumo en el plan, y (x “*equis*”) el consumo, relacionándose en el modelo anterior para llegar a considerarse que el costo del consumo en el plan está en función del consumo, denotado como $C(x)$.

En este proceso, no solo se construyó un modelo algebraico que describiera relaciones establecidas en el análisis de situación problema, sino que se abre un camino para que los estudiantes elaboren nuevos modelos, interpreten y confronten los resultados matemáticos con la situación particular modelada (Villa-Ochoa, 2007).

En la misma línea, Londoño y Muñoz (2011) en su tesis de maestría muestran un modelo construido por los estudiantes de undécimo, el cual surge del análisis realizado en el contexto del sistema masivo de transporte: Metro de Medellín. En esta investigación se les presentó a los estudiantes una publicidad que aparece en una página de internet, la cual dice: "... La administración municipal de Medellín... sí contribuye con el ahorro de su familia. ¡Utiliza el tiquete estudiantil!" A partir de esta invitación se desarrolla un proceso de modelación con los estudiantes para verificar dicho lema, del cual surge el siguiente modelo:

$A = (V_p - V_e)t$ $A = \text{Ahorro}$ $V_p = \text{Valor pasaje}$ $V_e = \text{" " estudiantil}$ $t = \text{\# viajes}$	$A\% = \frac{A \cdot 100}{V_p \cdot t}$
--	---

Ilustración 3. Modelo construido del proceso de modelación.
(Londoño y Muñoz, 2011, p.164)

Es importante destacar como lo expresa Villa-Ochoa (2012/2013) que este proceso de modelación enmarcado en un escenario social y cultural para los estudiantes y comunidad en general, posibilitó que los participantes cuestionaran algunos elementos de orden político que atraviesan la situación y que de alguna manera generan críticas desde su comprensión.

En la idea de la construcción de modelos, es importante generar en los estudiantes la posibilidad de validar los modelos que construyen. Bustamante (2012) presenta una de estas validaciones, donde se recurre al modelo para dar respuesta a la pregunta:

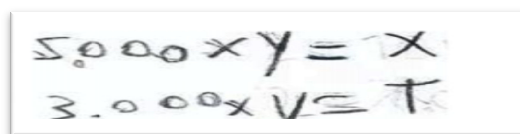

$$\begin{array}{l} 5.000 \times Y = X \\ 3.000 \times V = T \end{array}$$

Ilustración 4. Modelo construido en el proceso de modelación.
(Bustamante, 2012, p.137)

¿Cómo haríamos para calcular el dinero que le ingresa al teleférico¹ durante un domingo, teniendo en cuenta que el valor que se cobra es \$5000 a turistas y \$3000 a las mismas personas del pueblo?

El trabajo sobre modelación matemática realizado por Bustamante (2012) surge como una manera de atender a las dificultades que se observan en la producción significativa de los “símbolos algebraicos” inmersos en algunas ecuaciones lineales. Los estudiantes consiguieron identificar variables e invariantes con los cuales hicieron “proposiciones generales”, incursionando en un razonamiento algebraico. En palabras de Villa-Ochoa (2012/2013) el aporte más significativo de este trabajo de investigación fue la manera no lineal en que las expresiones algebraicas (lineales) fueron surgiendo como una forma de representar algunos aspectos de su contexto.

Por último citamos una de las formas de tomar los modelos dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje, esta consiste en retomar modelos ya construidos y re-construirlos con los estudiantes bajo el análisis de un contexto o fenómeno. Este es el caso de Berrío (2012) quien en su investigación propone que “... intenten plantear un modelo matemático para siembra de forma

¹ Sistema transporte que en el municipio de Jardín se le da un doble uso: el primero uso es turístico y el segundo como transporte de las personas que viven en la vereda la linda del municipio (lugar de arribo del teleférico), además se utiliza una tarifa diferenciada de acuerdo a cada caso; dichas tarifas son las que se manejaban para ese momento de manera oficial, las cuales eran de común conocimiento por toda la comunidad, por lo tanto se trabajó la situación en base a las tarifas reales de \$5.000 para turistas y \$3.000 para habitantes del municipio. (p. 136)

cuadrada que permita calcular la cantidad de árboles que caben en un terreno rectangular determinado con inclinación (Apóyate en la trigonometría)” (p.71).

Además el docente les proporciona la siguiente figura:

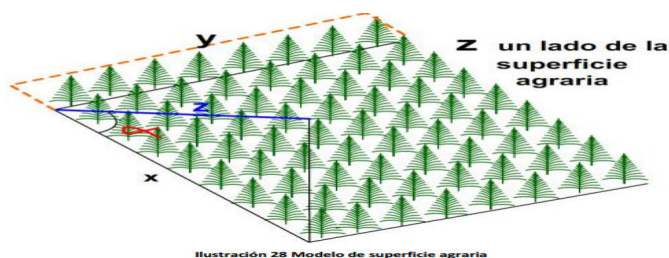


Ilustración 28 Modelo de superficie agraria

Ilustración 5. Figura presentada para apoyar la construcción de un modelo. (Berrío, 2012, p. 71)

En la idea de proponer una solución para un terreno Inclinado, el docente les proporcionó el modelo establecido por la Federación de Cafeteros y con base en éste los estudiantes exponen sus ideas y establecen un modelo para el terreno inclinado.

$$D = \frac{\cos \alpha \cdot xy}{d_1 * d_2}$$

Ilustración 6. Modelo re-construido por los estudiantes. (Berrío, 2012, p.74)

$$\frac{10.000 \text{ m}^2}{d_1 * d_2}$$

Ilustración 7. Modelo de la Federación de Cafeteros. (Berrío, 2012, p. 71)

En la anterior propuesta, vemos como los modelos re-construidos están dotados de una significación la cual es proporcionada por el contexto o fenómeno del cual se parte. Como evidencia de lo anterior resaltamos una de las relaciones encontradas, la cual considera que “a mayor área corresponde mayor cantidad de árboles” (independiente de la inclinación). Desde esta idea se significa su respuesta partiendo del modelo re-construido y se utilizan algunas nociones (geometría euclidiana, proyecciones ortogonales) que apoyaron las relaciones de dependencia o no entre las variables que se tuvieron en cuenta en el análisis de la situación. En

palabras de Villa-Ochoa (2012/2013) los estudiantes no solo interpretan modelos matemáticos, sino que también reconstruyen sus consideraciones frente al fenómeno mismo, convirtiéndose en un factor de importancia hacia la transformación que tienen los estudiantes de su contexto cafetero.

Concluimos entonces, que la modelación matemática posibilita la construcción y reconstrucción de modelos que favorecen la puesta en escena de relaciones con una lógica, que si bien parte del contexto, permite también hacer significaciones desde la matemática escolar.

Teniendo en cuenta la revisión presentada en párrafos anteriores, consideramos que es necesario, que los docentes de matemáticas vinculen a sus estudiantes en procesos matemáticos en torno a situaciones reales, donde se posibilite la relación de los conocimientos enseñados en clase con su contexto cercano, lo cual les permita comprender mejor los conocimientos matemáticos aplicados a un contexto de interés.

1.3 Formulación del Problema

La descontextualización de la enseñanza de la matemática ha sido una de las problemáticas que concluyen algunas investigaciones, además de representar para nosotros una de las razones por las cuales emprendimos esta investigación que tuvo como una de las finalidades, la articulación del contexto cercano (cafetero) al estudiante con las matemáticas escolares.

Desde nuestra experiencia docente observamos que los estudiantes aplican algunas de las fórmulas relacionadas con la temática tratada en clase a problemas simulados, pero, basados en la instrucción y repitiendo los pasos enseñados por el docente. Los estudiantes muestran tener una buena comprensión del contexto cercano que los rodea, pero se les dificulta articular la

matemática que aprenden a situaciones reales. En este sentido quisimos acercarnos al contexto cafetero partiendo de los intereses de los estudiantes y planteamos la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo los estudiantes de grado décimo construyen modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero?

De esta pregunta de investigación, focalizamos la atención en el siguiente propósito y eje de estudio.

1.4 Objetivo

Describir el proceso de modelación matemático realizado por los estudiantes de la reproducción de la broca en el contexto cafetero.

1.5 Objeto de investigación

Proceso de construcción de modelos matemáticos que emergen de la reproducción de la broca.

2. Referentes Teóricos

En éste capítulo exponemos algunas consideraciones teóricas sobre las diferentes concepciones que se tienen sobre modelación matemática, perspectivas de modelación, modelo y contexto, adoptándose de cada uno, los conceptos en los cuales se enmarcó la investigación.

2.1. Consideraciones teóricas sobre la modelación matemática

En los últimos años investigadores como Biembengut y Hein (2006), Bassanezi y Biembengut (1997) han adelantado investigaciones en relación con la modelación matemática en el aula de clase implementándola como método para la enseñanza y aprendizaje, propiciando espacios creativos, de interpretación de contextos, de prácticas descriptivas e interpretativas, las cuales posibilitan la construcción del modelo de una situación real.

La modelación matemática viene siendo defendida en varios países como método de enseñanza, por lo que comunidades matemáticas como ICTMA ((International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications), RECOMEN (Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática), CIAEM (Conferencia Interamericana de Educación Matemática), afiliados al ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), han celebrado congresos internacionales para su debate, sin embargo, como lo expresan Kaiser y Sriraman (2006) en las discusiones a nivel internacional se ha demostrado que no existe una comprensión y conceptualización homogénea en el significado de ésta.

Las diferentes definiciones que existen sobre modelación han permitido que algunos autores como Blomhøj (2004), Biembengut y Hein (2004), Nagle, Saff y Snider (2005), MEN (Colombia, 1998, 2006) la describan como una práctica de enseñanza, proceso y estrategia de

aprendizaje entre otras. De esta manera, Blomhøj (2004) afirma que la modelación es una “(...) práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje” (p.20). Biembengut y Hein (2004) también nos dicen que es un “(...) proceso involucrado en la obtención de un modelo” (p.106). Nagle (2005) expresa que es un “(...) proceso de imitación de la realidad mediante el lenguaje de las matemáticas” (p.87), y el MEN (Colombia, 1998) puntualiza que la modelación “(...) es el proceso completo que conduce desde la situación problemática real original hasta un modelo matemático” (p.77).

Otros autores como Burak y Brandt (2010), Villa-Ochoa, Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo (2008) describen la modelación desde la idea de herramienta y metodología. Burak y Brandt (2010) mencionan que la modelación puede ser implementada como una metodología alternativa para la enseñanza de las matemáticas. Por su parte, Villa-Ochoa, Bustamante, Berrío, Osorio y Ocampo (2008) nos especifican que la modelación es una “(...) herramienta para el aprendizaje de las matemáticas ya que proporciona una mejor comprensión de los conceptos matemáticos al tiempo que permite constituirse en una herramienta motivadora en el aula de clase” (p.4).

Además de las concepciones de modelación mencionadas en los párrafos anteriores, hay autores que le han dado significado bajo la comprensión de procesos cognitivos. Villa-Ochoa (2007) expresa que la modelación matemática es “(...) más que una herramienta para construir conceptos, se convierte en una estrategia que posibilita el entendimiento de un concepto matemático inmerso en un “micromundo” (contexto dotado de relaciones y significados) que prepara al estudiante para ir desarrollando una actitud diferente de preguntar y abordar los problemas de un contexto real” (pp.70 -71). Es decir, la modelación matemática le permite al

estudiante vincular las matemáticas con los contextos, además de brindarle habilidades que le permiten desarrollar sus conocimientos, para así abordar problemas del entorno que lo rodea.

Barbieri y Burak (2005) nos dicen que “(...) la modelación matemática busca trabajar los contenidos matemáticos de una manera que permita la construcción de conceptos matemáticos, en busca de sus relaciones con la aplicación del día a día, uso e importancia” (p.2), y desde los Estándares Básicos en Competencias Matemáticas (Colombia, 2006) se mencionan que la “(...) modelación puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten en las situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” (p.53). Lo que nos permite deducir la modelación matemática como un proceso que posibilita la construcción de modelos que relacionan de forma clara y precisa la matemática enseñada en clase con el contexto cercano.

Teniendo presente que, en ésta investigación pretendíamos indagar por ¿Cómo los estudiantes de grado décimo construyen modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero?, abordamos la modelación como un proceso que permitió la construcción del modelo matemático de la reproducción de la broca mediante la observación y descripción de las características más importantes tal y como se dan en su contexto natural para luego analizarlos; descripción que según Biembengut y Hein (2006) “(...) es un método de enseñanza y de investigación que se vale de la esencia de la modelización matemática, la cual consiste en el arte de traducir un fenómeno determinado o problemas de la realidad en un lenguaje matemático: el modelo matemático”, (p.1). Se toma como método de enseñanza e investigación porque a partir de análisis particulares se determinan regularidades de contenidos matemáticos, facilitando procedimientos generales determinados. Biembengut y Hein (1997) consideran que la modelación matemática es un proceso mirado desde lo intuitivo:

“(…) ya que para elaborar un modelo, además del conocimiento matemático, el modelador debe tener una dosis significativa de intuición-creatividad para interpretar el contexto, discernir qué contenido matemático se adapta mejor y tener sentido lúdico para jugar con las variables involucradas” (Biembengut y Hein, 1997, p.2).

Atendiendo la idea de la modelación como proceso, Biembengut y Hein (2004) plantean algunas ventajas de la modelación matemática desde el campo educativo, estas son:

- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento;
- Interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad;
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos;
- Capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema;
- Creatividad en la formulación y resolución de problemas;
- Habilidad en el uso de la tecnología (calculadora gráfica, computadoras);
- Capacidad para actuar en grupo;
- Orientación para la realización de la investigación;
- Capacidad para la redacción de esa investigación. (p.108)

Consecuentemente con lo anterior, Kaiser y Schwarz (2010) aducen la importancia de llevar la modelación al aula, retomando el estudio de las pruebas PISA donde se enfatiza como meta de la educación matemática, desarrollar en los estudiantes la capacidad de aplicar las matemáticas en su vida presente y futura. En este sentido Kaiser y Schwarz (2010) expresan que retomar ejemplos de modelación contribuye a que:

Los estudiantes comprendan la importancia de la matemática en la vida diaria, en el contexto y en las demás ciencias y adquieran competencias que les permita solucionar

problemas matemáticos reales, incluyendo los de la vida diaria, el entorno y en las ciencias.

(p.52)

En Colombia, hace cerca de tres lustros el MEN (Colombia,1998) recomendó la implementación de la modelación matemática como un proceso general, el cual debe ser desarrollado en las aulas escolares para “(...) el aprendizaje de las matemáticas, que permite a los alumnos observar, reflexionar, discutir, explicar, predecir, revisar y de esta manera construir conceptos matemáticos en forma significativa”(p.80), requiriendo para este fin que los docentes realicen actividades donde los estudiantes necesiten experimentar procesos de matematización implementando cálculos numéricos, algebraicos y gráficos, que conduzcan a la creación de modelos representativos de situaciones de la vida cotidiana para una mejor comprensión de los conceptos enseñados en el aula de clase.

En definitiva, buscamos en esta investigación que los estudiantes bajo el esquema de situación cercana – matematización (con significado) puedan construir modelos que respondan a una coherencia dada por los análisis de las variables que han encontrado (los estudiantes) en su relación con el contexto y con lo enseñado en las aulas en las clases de matemática.

Teniendo claridad sobre la mirada de modelación matemática en esta investigación, mostraremos a continuación las etapas a seguir para llevar a cabo un proceso de modelación matemática.

2.1.1 Proceso de modelación

En el proceso de modelación se desarrollan capacidades y habilidades matemáticas que ayudan a la aprehensión, tal como lo afirma Biembengut y Hein (2006) “como método de

enseñanza de matemática tiene por objetivo proporcionar al alumno una mejor aprehensión de los conceptos matemáticos” (p.4), de esta manera consideramos que es necesario en la investigación implementar unas etapas para traducir la situación en el contexto cafetero por medio de los conceptos y procesos matemáticos aprendidos en clase.

El MEN (Colombia, 1998) menciona que un proceso de modelación permite de forma simplificada “(...) crear un pedazo de la realidad” (p.77), pero también considera que dentro de esta creación de la realidad es necesario unas etapas que permitan observar el problema, expresar relaciones, hacer un puente entre el problema real y un problema matemático, entre otras.

Siendo la modelación pertinente para implementar en el aula de clase porque posibilita relaciones, según MEN (Colombia, 2006)

(...) de una situación real para reducirla a una situación ya conocida, de tal manera que se pueda detectar fácilmente qué esquema se le puede aplicar, cómo se relaciona con otras y qué operaciones matemáticas pueden ser pertinentes para responder a las preguntas que suscita dicha situación. (p.53)

En la investigación abordamos las etapas para relacionar las situaciones cotidianas cercanas a los estudiantes en el contexto cafetero con los procesos y conceptos matemáticos aprendidos en clase, basándonos en Biembengut y Hein (2004). Estas permiten observar la manera como los profesores tendrían la posibilidad de realizar un proceso de modelación con sus estudiantes, las cuales hacemos alusión a continuación:

- 1) Exposición del tema.
- 2) Delimitación del problema.
- 3) Formulación del problema.

- 4) Desarrollo del contenido programático.
- 5) Presentación de ejemplos análogos.
- 6) Formulación de un modelo y resolución del mismo a partir del modelo.
- 7) Interpretación de la solución y validación del modelo. (p.109)

Haciendo una descripción de las etapas según Biembengut y Hein (2004), encontramos que la etapa, ***exposición del tema***, hace relación con el comienzo de la clase, donde el investigador realiza preguntas para que los estudiantes formulen preguntas sobre el tema abordado. Esta etapa es seguida de una ***delimitación del problema*** donde se selecciona una o más preguntas que le permitan solucionar la situación planteada. Si es necesario se propone al estudiante que profundice por medio de bibliografía o especialistas sobre la situación abordada.

Teniendo profundidad en los conocimientos sobre la situación que se pretende indagar dentro de la clase, tanto desde la experiencia como a través de datos teóricos, se ***formula un problema***, construyendo hipótesis, planteando ecuaciones y organizando los datos, aunque para su resolución se requiere del ***desarrollo de contenido programático***, que hizo alusión a los conceptos, definiciones y datos relevantes que se relacionan con la pregunta que generó el proceso.

Luego, se continúa con la ***presentación de los ejemplos análogos*** con el fin de ampliar el abanico de aplicaciones que se relacionan con la situación tratada dentro de la clase, enfatizando en el uso de las tecnologías.

Para finalizar se realiza la ***formulación de un modelo matemático y resolución del problema a partir del modelo*** donde se propone a los estudiantes que vuelvan a la situación problema que

generó el proceso, resolviéndolo, proceso seguido de la *interpretación de la solución y validación del modelo* esto permite la comprensión del estudiante tanto de la matemática empleada como de la situación particular que representaba de forma simplificada a través del modelo matemático.

La modelación tiene diferentes finalidades y según esta intención presenta algunas perspectivas que han sido abordadas por diferentes autores. En consecuencia mostraremos algunas de ellas, resaltando aquellas que se relacionan con el ámbito educativo en su eje central.

2.1.2 Perspectivas de la modelación

La modelación en el ámbito escolar no se basa en un paradigma de investigación único. Por el contrario, es posible identificar diferentes enfoques y perspectivas aplicables en la educación matemática enfatizando una modelación desde la enseñanza y el aprendizaje, procesos que dependen de un sistema educativo que proporcione al estudiante elementos que le permitan pensar crítica y analíticamente.

Desde la revisión de la literatura, hace aproximadamente veintiséis años, según el trabajo de Kaiser-Messmer (citado por Kaiser y Sriraman, 2006), existían dos perspectivas fundamentales. Perspectiva Pragmática, centrada en fines utilitarios, donde se mide la capacidad del estudiante para aplicar matemática en la solución de problemas prácticos; y la otra es la perspectiva Científico-Humanista donde la matemática es tomada como una ciencia, con ideales humanistas, con la intención de crear relaciones entre esta y la realidad.

Más adelante los trabajos de Kaiser y Schwarz (2010), muestran los desarrollos que se han dado en la modelación, presentando siete perspectivas. Esta clasificación fue realizada teniendo

en cuenta algunas de las perspectivas previamente desarrolladas en educación matemática, los fines con los cuales se implementa en el aula de clase y los progresos en las discusiones del estudio ICMI de modelación en matemática educativa; todas representan diferentes puntos de observación de la investigación en la enseñanza y aprendizaje de la modelación en matemática, las cuales no necesariamente cubren todos los frentes de una investigación. En la siguiente tabla² clasificamos las siete perspectivas basándonos en los apuntes de Kaiser y Schwarz (2010), donde especificamos algunas de sus características más relevantes.

Perspectiva	Características relevantes
Realista	Define la modelación como el proceso de transformación de una situación en contexto real, mediante interpretaciones, abstracciones y simplificaciones, en un modelo matemático a profundidad. Se caracteriza porque debe tener sentido práctico para los estudiantes y pretender que desarrollen herramientas para comprender el contexto en que viven.
Contextual	Define la modelación como actividad que induce a la resolución de problemas del contexto real y por lo tanto los aspectos psicológicos son la base para entender las dificultades de aprendizaje relacionadas con el modelo matemático teniendo en cuenta que éste puede ser representado por el lenguaje hablado, lenguaje escrito, diagramas, entre otros.
Eliciting	Define la modelación como una actividad para la solución de problemas, usando principios específicos de diseños instruccionales en los cuales los estudiantes le dan sentido a situaciones donde inventan, extienden y refinan sus propias construcciones matemáticas.
Socio-crítica	Define la modelación como la dimensión sociocultural de las matemáticas, donde se capacita a los estudiantes en el uso de modelos matemáticos para reflexionar críticamente sobre situaciones sociales, determinados procesos y aplicaciones del modelado matemático en situaciones de la vida real. Su objetivo es crear en los estudiantes una reflexión crítica sobre cuestiones sociales y sobre los procesos de modelado matemático.
Epistemológica	Define la modelación como un instrumento de construcción y articulación de la actividad matemática que parte de situaciones

² Tabla elaborada por los investigadores, teniendo en cuenta la traducción propia del texto original.

	problemáticas que se plantea una comunidad de estudio.
Cognitiva	Define la modelación como la búsqueda de habilidades cognitivas activadas mediante la utilización del modelado. Sus intereses son de tipo psicológico, es decir, el análisis de los procesos mentales que tienen lugar durante la modelación.
Educativa	Define la modelación como medio para el aprendizaje de la matemática y como un objetivo claramente pedagógico. Su enfoque esta puesto en los procesos de aprendizaje y en el fomento de la comprensión de conceptos.

Tabla 1. Perspectivas de modelación. Kaiser y Schwarz (2010)

La tabla anterior nos conllevó a no centrar el trabajo de investigación bajo alguna perspectiva, ya que observamos que el contexto real es una característica inherente a la realista, contextual, socio-crítica y educativa, es decir, es transversal. En esta investigación el contexto seleccionado por los estudiantes es el cafetero y de éste es elegida la reproducción de la broca para el proceso de modelación.

En el proceso de modelación, al solucionar una situación del contexto real existen características que no necesariamente son transversales como son: el trabajo con estudiantes bajo un currículo, tener inmersas relaciones de enseñanza y aprendizaje e implementación de las etapas propuestas por Biembengut y Hein (2004) con fines educativos, estas son características de la perspectiva educativa. Igualmente la intencionalidad de la investigación fue que mediante un proceso los estudiantes relacionaran elementos relevantes de la situación del contexto con elementos matemáticos enseñados en clase, características que hacen alusión a la perspectiva educativa y que se alejan de la contextual, realista y socio-crítica en las cuales se procura resolver un problema del contexto real o social.

Otras características que permiten acercar la investigación que realizamos a la perspectiva educativa sin desconocer su relación ya sea de forma somera con características de la

perspectiva contextual y realista las podemos observar según Blomhøj (2004), quien plantea que existen tres argumentos principales para la enseñanza de la modelación como un elemento integrador en la matemática en general bajo el punto de vista educativo, estos son:

- 1) Los modelos matemáticos son el puente entre la experiencia de vida real de los estudiantes y las matemáticas, motivando para el aprendizaje, ayudando a la aprehensión de los conceptos y situando las matemáticas en la cultura como un medio para describir y comprender situaciones de la vida real.
- 2) En el desarrollo de las sociedades altamente tecnológicas, con competencias para analizar y criticar los modelos matemáticos creando oportunidades y desafíos en la educación.
- 3) Los modelos matemáticos juegan papeles importantes en el funcionamiento y la formación de las sociedades basadas en altas tecnologías. (p.32)

El primer argumento de Blomhøj (2004) nos permitió apoyar nuestra investigación bajo la perspectiva de modelación educativa porque se evidenció la posibilidad de generar un proceso de modelación que fuera el puente entre las situaciones de contexto cercano a los estudiantes y los conceptos matemáticos enseñados en el contexto escolar.

Igualmente Blum y Niss (1991) nos muestra cinco argumentos sobre la relación que existe entre resolución de problemas, modelación y aplicaciones en la enseñanza de las matemáticas, estos son:

1. *El argumento formativo:* Fomenta las capacidades creativas y la resolución de problemas, es así como en la investigación observamos las estrategias utilizadas por los estudiantes para la solución del problema en particular.

2. *El argumento de competencia crítica:* Muestra al estudiante la importancia de prepararse para vivir y actuar como ciudadano. Los estudiantes intentan solucionar problemas socialmente activos, en este caso, la rápida propagación de la broca.
3. *El argumento de utilidad:* La enseñanza de las matemáticas debe permitir la utilización de la modelación en el aula con una gran variedad de problemáticas de la vida real, es decir la matemática debe resolver situaciones extra-matemáticas.
4. *El argumento de la imagen de las matemáticas:* La modelación matemática posibilita que los estudiantes tengan una imagen amplia y positiva de la matemática, en esta investigación vimos la articulación de la matemática con la biología, en especial el ciclo biológico de la reproducción de la broca.
5. *El argumento de promover el aprendizaje de las matemáticas:* La enseñanza de la matemática mediante la modelación ayuda al aprendizaje de los conceptos y motiva al estudiante.

En la modelación educativa se resaltan unas etapas planteadas por Bassanezi y Biembengut (1997) con fines exclusivamente didácticos cuya intención es el aprendizaje de los estudiantes.

Igualmente en el trabajo de investigación además de tener como intencionalidad acercarse a la perspectiva educativa a través del proceso de modelación donde se pretendió que los estudiantes reconocieran conscientemente los temas de matemáticas que tenían relación con la situación reproducción de la broca, posibilitándose ciertas regularidades que permitieran articular elementos relevantes del fenómeno con la matemática mediante la construcción de modelos, pudo vislumbrarse durante el proceso alguna característica desde la perspectiva

contextual o realista, enfoques a los cuales el trabajo de investigación que realizamos no tuvo intencionalidad de acercarse debido a que difiere de la perspectiva realista en que no se pretendió desarrollar en el alumno herramientas para comprender el contexto en que viven, la intención de nuestro trabajo fue conllevar a los estudiantes a relacionar los elementos matemáticos escolares con el contexto extraescolar como una herramienta para el aprendizaje de la matemática.

Además, difiere de la perspectiva contextual en que la situación problema (reproducción de la broca) no es una necesidad a resolver atendiendo a la búsqueda de los problemas psicológicos que tienen los estudiantes para llegar a construir un modelo que represente la situación real.

A continuación presentamos algunas posturas de modelo desde algunos autores y definimos en cual estuvo enmarcada nuestra investigación.

2.2 Modelo Matemático: desde una mirada educativa

En el mundo real se presentan abstracciones que conllevan a situaciones problema o preguntas que requieren de soluciones y algunas de éstas involucran operaciones matemáticas elementales, otras requieren de un mayor análisis de las variables presentes, en especial porque se encuentran unidas a otras áreas del conocimiento, sea cual sea el caso, la solución o análisis de muchas de estas alternativas se centra en la formulación de un modelo o relaciones de tipo matemático.

El término modelo matemático se presenta como un concepto polisémico, apareciendo diversidad de concepciones en la literatura, en la siguiente tabla hicimos alusión a algunas de estas:

Autor(es)	Concepciones
Biembengut y Hein, (2004)	“Es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que representa, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. El modelo permite no sólo obtener una solución particular, sino también servir de soporte para otras aplicaciones o teorías”. (p. 106)
Blomhøj (2004)	“Es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática”. (Mina, p.21. Trad.)
Ortiz, Rico y Castro, (2010)	“(…) un constructo de carácter dinámico que resulta de la matematización de la realidad, además conserva un isomorfismo con la realidad de la cual procede” (p.82).
Estándares Básicos de Competencias Matemáticas (2006)	“(…) como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible” (p. 52).
Villa-Ochoa et al (2009)	“Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p.162).
Córdoba (2011)	“Es un sistema (físico o teórico) que sirve para presentar un objeto, situación o fenómeno del mundo real en el cual se utilizan relaciones y conceptos matemáticos y cuya utilidad está dada en términos de ser una herramienta para interpretar, transformar y predecir el fenómeno y su comportamiento”. (p.10)

Tabla 2. Concepciones sobre Modelo Matemático.

Estas definiciones reconocen en el modelo un carácter representacional de la realidad a través de una estructura matemática en la que existen relaciones y símbolos de un fenómeno en particular. En este sentido nuestra investigación se centró en la idea expuesta por Villa-Ochoa et al. (2009), concibiendo el modelo como el “Conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación” (p.162).

Los modelos matemáticos mirados desde su intencionalidad, pueden ser clasificados según la siguiente tabla, para la cual nos basamos en Gómez, Amicarelli, Álvarez y di Sciascio (2004) y García (2011).

Clase de modelo	Características
Explicativo	Estos modelos buscan incrementar el entendimiento de las causas del fenómeno, buscando conocer el comportamiento de una situación específica y las razones del porque un fenómeno ocurre de una manera y no de otra (Gómez et al., 2004). “Un modelo explicativo requiere de la utilización de analogías para demostrar o facilitar la interpretación de una teoría” (García, 2011, p.33).
Descriptivo	Un modelo descriptivo persigue representar adecuadamente una situación (Gómez et al., 2004). “Un modelo descriptivo está caracterizado por un alto grado de analogías entre el modelo y el objeto modelado” (García, 2011, p.33).
Predictivo	Son modelos obtenidos empíricamente los cuales se sintetizan en una estructura sencilla las dinámicas de la situación (Gómez et al., 2004). “Es aquel a través de cual se puede realizar predicciones sobre el posible comportamiento de las variables incluidas en un fenómeno” (García, 2011, p.33).

Tabla 3. Clasificación de modelos según la función.

La anterior clasificación, nos permite ubicarnos en una función que depende del análisis y desarrollo que presenta el proceso de modelación en el contexto que le dio significado. En este sentido, es necesario consolidar algunas características que tienen los contextos como insumo para la definición de la clase de modelo que se requiere desde la solución.

Si el modelo representa a una situación particular observada en un contexto, es pertinente determinar cuál es la idea de contexto que relaciona al estudiante inmerso en él, a la estructura matemática que lo describe y a la idea de modelación desde una perspectiva educativa. En concordancia con lo anterior especificamos algunas ideas que describen el contexto bajo una mirada escolar, es decir un contexto relacionado profundamente con los estudiantes desde los ámbitos sociales, económicos, políticos, familiares, entre otros.

2.3 Contexto

Según el MEN (Colombia, 2006), menciona que el contexto de aprendizaje es el lugar sociocultural donde se le da sentido y significado a las actividades y contenidos matemáticos, por lo tanto identifican tres clases de contexto:

- 1) Contexto inmediato o contexto de aula: conformado por el espacio físico (salón), las normas explícitas e implícitas y por la situación problema preparada por el docente.
- 2) Contexto escolar o contexto institucional: conformado por los escenarios de las distintas actividades diarias, edificio escolar, el personal de la institución educativa, el PEI, las normas de convivencia y currículo institucional.
- 3) Contexto extraescolar o contexto sociocultural: conformado por la comunidad local de la región, país y mundo, no se reduce solo al vecindario.

En la anterior categorización, el MEN (Colombia, 2006) diferencia los contextos por su cercanía o grado de relación con los estudiantes, es decir, un contexto que implica el aula y la relación directa con el estudiantes, un contexto cercano, pero, no de dependencia directa con el estudiante y por último un contexto que describe elementos generales y fuera del ámbito escolar, donde el estudiante no necesariamente interviene directamente en él.

En misma línea de los documentos rectores de la Educación Colombiana a través del MEN (Colombia, 1998), citamos a continuación otra definición de contexto desde el ámbito escolar y descrito de forma más general:

El contexto tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que le da sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (p. 19).

Desde esta idea, el MEN (Colombia, 1998) quiere establecer una relación directa entre la planeación de “experiencias didácticas” y los entornos que rodean a los estudiantes, centrando su idea en la relación que debe existir entre lo escolar y la vida (diferentes ámbitos), propuesta que surge como respuesta a la necesidad de dar sentido a las matemáticas que se aprenden.

Igualmente Font (2007) muestra que el término contexto se refiere al entorno, el cual permite ubicar al objeto matemático en un lugar, situación o marco donde suceden los hechos y que mediante situaciones extra matemáticas puede ser resaltado trabajando problemas del mundo real.

Otros autores, retoman elementos más amplios de contexto, esta es la idea de Villa-Ochoa et al. (2009a) donde retoman aspectos socio-culturales que permean la vida del estudiante. En esta investigación, le damos vida al contexto cafetero en el ámbito escolar, por lo cual centramos su interés en la exploración y análisis que hicieron los estudiantes de la reproducción de una plaga, la “broca”. Desde esta idea definimos el contexto como:

“(…) aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, y a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución”. (Villa-Ochoa et al. 2009a, p. 170).

En la anterior definición resaltamos la importancia de la toma de datos y la identificación que realiza el estudiante del contexto al que se enfrenta, proporcionándonos alternativas de análisis desde la experiencia hacia una construcción de alternativas y relaciones matemáticas que conduzcan a la creación de un modelo matemático.

En la idea de modelo como una estructuración matemática emergente del contexto, los estudiantes construyen relaciones que son enmarcadas en conceptos y teorías desde el ámbito matemático. En este sentido es relevante retomar algunos aspectos conceptuales que surgieron en la construcción de los modelos, los cuales los enmarcamos en el desarrollo de la teoría de las funciones, en especial de las exponenciales. Teniendo en cuenta que los modelos construidos por los estudiantes fueron funciones exponenciales, a continuación describimos algunas precisiones sobre la función exponencial.

2.4 Algunas consideraciones sobre función exponencial

La matematización en el proceso de modelación, supone el desarrollo de unas nociones matemáticas que permean la construcción de modelos. Estos modelos se convierten en una manera de solucionar o llegar a una respuesta en un problema planteado, dándose en diversas formas de representación e interpretación. Bajo esta mirada el MEN (Colombia, 2006), expresa que: “La modelación puede hacerse de formas diferentes, que simplifican la situación y seleccionan una manera de representarla mentalmente, gestualmente, gráficamente o por medio de símbolos aritméticos o algebraicos, para poder formular y resolver los problemas relacionados con ella” (p.53).

Algunas situaciones cotidianas, en el caso particular de las investigaciones que se relacionan con el crecimiento y decrecimiento de una plaga o población de insectos, han sido representadas por medio de fórmulas, esquematizaciones gráficas, con miras de comprender la dimensión del fenómeno natural, fue abordada en el trabajo de García (2012) donde se plantea la situación con el ánimo de que sus estudiantes construyan el modelo sobre la reproducción en una colmena, implementándose para su representación la función exponencial, cuya fórmula general $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$.

Autores como Zill y Wright (2011) describen aspectos generales de la función exponencial detallando cada una de sus partes y resaltando algunas propiedades características como se muestra a continuación:

La función exponencial en base b y *exponente* x , es implementada en matemática de forma algebraica por medio de la fórmula general $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$.

Algunas de las propiedades generales de la función exponencial que permiten identificarla y caracterizarla dentro de una situación de aplicación son:

- “El dominio de la función f es el conjunto de los números reales; es decir, $(-\infty, \infty)$.
- El rango de f es el conjunto de los números reales positivos; es decir, $(0, \infty)$.
- La intersección y de f es $(0,1)$. La gráfica no tiene intersección en x .
- La función f es creciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $b > 1$ y decreciente sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ para $0 < b < 1$.
- El eje x es decir $y = 0$, es una asíntota horizontal para la gráfica de f .
- La función f es uno a uno”. (p.49)

Además de las propiedades que definen una función exponencial es necesario que conozcamos las gráficas que permiten representar situaciones de crecimiento y decrecimiento donde se observa la transformación de la variable dependiente (y) la cual depende de la variable independiente (x) en cada situación particular, siendo creciente o decreciente la representación gráfica según los siguientes criterios:

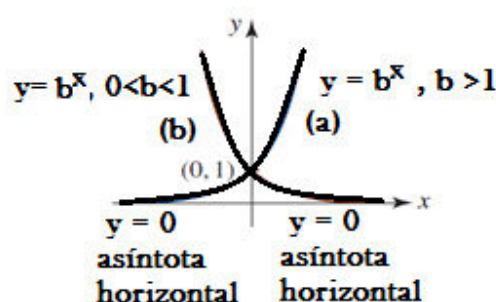


Ilustración 8. Gráfica creciente(a) y decreciente (b) de la función exponencial. (Zill y Wrigth, 2011, p.49)

En el hecho de representar algunas situaciones cotidianas por medio de la fórmula general de la función exponencial $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$, requiere de comprender en la

situación particular que hay un elemento que se repite de forma constante (b), Martínez (2006) menciona que en la construcción de la noción de exponente existe una convención matemática para simplificar la escritura de una multiplicación reiterada de la cual surge (b) como constante elevada a una variable independiente (x), de tal forma que al variar el valor del exponente (x), cambia el valor de la variable dependiente (y).

3. Metodología de investigación

En este capítulo recogimos la fundamentación metodológica en cuanto al desarrollo de la investigación.

El enfoque de investigación que elegimos fue de tipo cualitativo, el cual nos permitió hacer una descripción del proceso de modelación de la reproducción de la broca realizado por los cinco estudiantes en el contexto cafetero.

El método que se ajustó a la investigación fue el estudio de caso, el cual nos permitió estructurar un camino hacia el logro de los objetivos propuestos, ya que según Yin (1984) citado por Sandoval (2002), un estudio de caso analiza un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes y en los cuales existen múltiples fuentes de evidencia que pueden usarse.

Por medio del diseño describimos: las fases, instrumentos de recolección de la información, selección de los participantes, proceso del análisis de datos y demás elementos implicados en el diseño de la investigación.

3.1 Enfoque de Investigación

El enfoque en la investigación que realizamos fue de tipo cualitativo, debido a que no recolectamos datos numéricos, sino que implementamos las observaciones, entrevistas, documentos escritos, reflexiones y discusiones de los cinco estudiantes, para llevar a cabo un proceso de modelación que permitió la construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero. De esta manera, Flick (2002) nos dice que “La

investigación cualitativa se orienta a analizar casos concretos en su particularidad temporal y local, y a partir de las expresiones y actividades de las personas en sus contextos locales”. (p. 27)

Es así como la investigación cualitativa nos permitió mostrar un conglomerado de prácticas que transformaron y convirtieron una situación cotidiana (la reproducción de la broca en el contexto cafetero) en una serie de representaciones contextuales en la cual se hizo posible introducir el proceso de modelación matemática. Por lo tanto, el proceso de modelación con los estudiantes en el contexto cafetero cercano estuvo enmarcado bajo un enfoque cualitativo que permitió según Rodríguez, Gil y García (2006):

Estudiar la realidad en su contexto natural, tal como sucede, intentando sacar sentido de, o interpretar los fenómenos de acuerdo con los significados que tienen para las personas implicadas. La investigación cualitativa implica la utilización y recogida de una gran variedad de materiales...que describen la rutina y las situaciones problemáticas y los significados en las vidas de las personas. (p.32)

La situación que fue escogida por los cinco estudiantes (reproducción de la broca de café en el contexto cafetero) representó en la investigación un caso, que permitió el reconocimiento de la situación particular y la implementación del proceso de modelación matemático para relacionar los conocimientos matemáticos con los aprendidos en el contexto cafetero cercano a los estudiantes.

De esta manera la investigación tuvo como método el estudio de caso de tipo instrumental el cual permitió describir de forma particular el proceso de modelación, en el que cinco estudiantes construyeron modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero.

En ese orden de ideas, algunos elementos característicos del estudio de caso como el método que se adoptó en esta investigación se esclarecen a continuación.

3.2 Método de Investigación

En la actual investigación decidimos elegir el estudio de caso como nuestro método de investigación fundamentado en la teoría de Stake (2007), el cual expresa que es “el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p.11).

El estudio de caso en la investigación partió de la reproducción de la broca en el contexto cafetero, bajo el cual se implementó la modelación como proceso que permitió a cinco estudiantes describir la construcción de modelos matemáticos bajo este fenómeno, siendo este proceso nuestro caso de interés particular.

Dentro de la variedad de estudio de casos, nos enmarcamos en el estudio de casos instrumental citado por Stake (2007) donde especifica que un estudio de caso de tipo instrumental se evidencia en las investigaciones cuando la finalidad del caso no se enfoca solamente en la comprensión del caso particular, sino que este sirve de instrumento para estudiar el objeto de estudio, finalidad de la investigación.

3.3 Diseño de Estudio

El diseño de la investigación se fundamentó en las orientaciones de algunos autores, principalmente en Stake (2007) en cuanto a los contextos, los participantes, las herramientas

utilizadas para la recolección de datos, las fases en el trabajo de campo, las estrategias de análisis y la validez durante la investigación.

3.3.1 El contexto

Nuestra investigación se desarrolló en el contexto cafetero del municipio de Andes (Antioquia), en una finca cafetera cercana a los estudiantes.

El municipio de Andes se encuentra ubicado entre las vertientes de las cordilleras Central y Occidental que conforman el cañón del río Cauca y la cuenca del río San Juan, limita por el norte con los municipios de Betania, Hispania y Pueblo Rico, por el este con los municipios de Jardín y Jericó, por el sur con el departamento de Risaralda y por el oeste con los departamentos de Chocó y Risaralda. Su cabecera dista 126 kilómetros de la ciudad de Medellín, capital del departamento de Antioquia, posee una extensión de 444 kilómetros cuadrados y cuenta con 60 veredas donde uno de sus principales cultivos es el café.

3.3.2 Los participantes

Los participantes del estudio fueron cinco estudiantes de grado décimo, los cuales interactuaron constantemente con los investigadores, tanto de forma presencial como virtual (el chat), aspecto que fue relevante en la conformación de un grupo de trabajo, en palabras de Guba y Lincoln (2002)

(...) la naturaleza transaccional de la investigación requiere de un diálogo entre el investigador y lo investigado; ese diálogo debe ser de una naturaleza dialéctica para transformar la ignorancia y los conceptos erróneos (p.127).

Seleccionamos estos estudiantes teniendo en cuenta su facilidad para trabajar en grupo, su disponibilidad para trabajar en horas extra-clase, su interés por aprender, su responsabilidad, su calidad humana, compromiso para con el área y por tener contacto directo o indirecto con las actividades de caficultura a través de padres y familiares; criterios que nos permitieron tener mayor objetividad con el proceso de modelación.

La identidad de los cinco estudiantes fue protegida por ser menores de edad entre los 15 y 17 años, además de ser autorizados de forma escrita por sus padres para participar en el proceso de la investigación (ver anexo 1). Con la misma intención de preservar la identidad de los participantes se emplearon los seudónimos Ernesto, Bernardo, Carlos, Antonio y José, los cuales fueron elegidos por ellos y fueron empleados a lo largo de los análisis.

3.3.3 Fuentes de recolección de datos

Como lo explicita el enfoque cualitativo, la información puede ser de diferente naturaleza y utilizada con diferentes fines. En esta perspectiva describiremos a continuación las fuentes empleadas en este estudio para recolectar la información.

3.3.3.1 Observación directa

Según Stake (2007) durante la investigación cualitativa, la observación realizada por el investigador en un estudio de casos, registra lo mejor posible los acontecimientos para dar a conocer una descripción detallada confiable, posteriormente analizada para ser parte del informe final. En la investigación que realizamos, las observaciones de campo recolectadas nos condujeron hacia una mejor comprensión del caso, logrando identificar los elementos centrales de la situación (reproducción de la broca en el contexto cafetero).

Otro de los aspectos destacados al realizar una observación es la variedad de datos que se pueden percibir por el investigador, Schaub y Zenke (2001) citado por Díaz, Mendoza y Porras (2011), escriben al respecto:

La observabilidad del objeto/sujeto de investigación permite, por lo general, la observación de una multiplicidad de factores o variables que son importantes para dar respuesta a las cuestiones que se plantean en las investigaciones descriptivas o para el examen de hipótesis analíticas. (p.4)

En la investigación realizamos una confrontación permanente entre la información obtenida mediante la observación y el diálogo con una revisión de la literatura, dando de esta manera una credibilidad a lo que se está obteniendo en relación con el objeto investigado.

De acuerdo a lo anterior, en nuestra investigación se tuvo en cuenta de manera biunívoca la relación entre el investigador y el investigado de forma permanente dentro de un enfoque cualitativo. Desde esta perspectiva, Hays (2004) señala que la interacción de los individuos no podrá ser entendida sin la observación. Sin duda alguna, las observaciones permiten un contacto directo entre los participantes del proceso de investigación, y en especial con el contexto en el cual se desenvuelve el trabajo de campo, situación que fue importante en la investigación que realizamos.

De esta manera la observación en la investigación nos permitió en cada uno de los estudiantes, acceder a sus expresiones verbales, comprender los procesos matemáticos que escribieron en los documentos escritos, con los cuales pretendieron relacionar sus conocimientos sobre la reproducción de la broca con la matemática, además de su interacción constante con la situación particular del contexto en las salidas que tuvimos al campo.

3.3.3.2 Entrevista

Según Stake (2007) la entrevista es el cauce principal para llegar a las realidades múltiples, porque esta nos permitió realizar descripciones e interpretaciones detalladas las cuales nos condujeron a descubrir y reflejar en la investigación que realizamos la visión del caso particular, debido a que todos no ven los fenómenos de la misma manera.

Por su parte, Hays (2004) sustenta que la entrevista es una de las fuentes más ricas de datos en un estudio de caso, puesto que proveen al investigador de una variedad de información y perspectivas.

Las entrevistas que realizamos en la investigación fueron semiestructuradas, lo cual permitió a los estudiantes la posibilidad de compartimos todas sus reflexiones y conocimientos sobre la reproducción de la broca, posibilitándonos aclarar las ideas en el momento indicado, en ese instante que el estudiante aún conservaba la idea, a lo que hace referencia Stake (2007) cuando argumenta que “normalmente no es muy importante disponer de las palabras exactas del entrevistado, lo que importa es lo que quería decir, por eso antes que grabar o escribir, es preferible escuchar, tomar unas cuantas notas y preguntar para aclarar.”(p.64).

De acuerdo a lo anterior, las entrevistas nos facilitaron conocer las perspectivas de los estudiantes, es decir, comprender sus interpretaciones y percepciones sobre la situación particular reproducción de la broca.

3.3.3.3 Documentos escritos

En este caso los documentos escritos examinados fueron los realizados por los estudiantes al analizar los diferentes fenómenos ocurridos en el contexto con relación a la broca, al igual que algunos documentos otorgados por los extensionistas cafeteros acerca de la plaga (ver anexo 2).

Según Sandoval (2002) a través de los documentos escritos es posible recabar información personal sobre los conocimientos previos y dificultades que posee en este caso los estudiantes, información que fue muy valiosa para nosotros en la descripción de los acontecimientos así como de los problemas y reacciones más usuales de las personas analizadas. Igualmente estos documentos fueron una fuente confiable y práctica para revelar los intereses, evolución y trabajo de los estudiantes en las diferentes secciones que realizamos en la investigación.

3.4 Fases de intervención con los estudiantes

El trabajo de campo en la investigación fue desarrollado en cuatro fases las cuales describimos a continuación.

Fase1, Exploración del contexto cafetero: En esta fase 35 estudiantes de grado décimo de un colegio urbano del municipio de Andes, hicieron un listado de las principales actividades del municipio con las cuales tuvieran mayor dependencia económica ellos y sus familias.

Actividad	Número de votos
Cultivo de café	34
Cultivo de plátano	22
Cultivo de banano	13
La minería	11
Cultivo de yuca	11
Comercio (banco)	6
Ganadería	5
Cultivo de tomate	4

La rama de la construcción	3
Empresa recolectora de basuras	3
Cultivo de caña	2
Cultivo de cebolla (de rama)	2
Cultivo de mango	1
Empresas transportadoras	1
Distribuidora de carnes	1
Cultivo de papa	1
Cultivo de maracuyá	1
Cultivo de cidra	1

Tabla 4. Votación por actividades de mayor dependencia económica en las familias.

En vista de los resultados obtenidos, observamos cómo un buen número de estudiantes votaron por la caficultura, refiriéndose a ella como una actividad de la cual dependen la mayoría de sus familias económicamente, situación que nos llevó a decidimos por el contexto cafetero para realizar la investigación.

Después de realizar la elección del contexto, se eligió a cinco estudiantes del grupo de 35 para que continuaran con la investigación, esta selección se dio por los aspectos ya mencionados la sección 3.3.2.

Fase 2, Simplificación del fenómeno: Por medio del análisis de una entrevista realizada a los cinco estudiantes donde se les preguntaba por conocimientos generales sobre el contexto cafetero, observábamos como emergían unas situaciones de relevancia, estas eran: *Cosecha cafetera, nutrición del cafeto, fertilización en la etapa joven del cafeto, broca y valor del grano.*

A partir de esta información, decidimos realizar cuatro guías (ver anexo 3, anexo 4, anexo 5 y anexo 6) que inicialmente contenían información sobre cada situación y finalmente una serie de preguntas con las cuales se pretendía que respondieran utilizando los datos suministrados, sus conocimientos y procesos matemáticos.

Los estudiantes en el desarrollo de las guías de forma individual hicieron hincapié en las plagas, la falta de fertilizantes y el clima como situaciones que están inmersas en su contexto particular causando pérdidas económicas a sus familias en la producción del cultivo de café.

Observando cómo dichos fenómenos influían en la economía de los estudiantes, se hizo una entrevista a Ernesto, la cual fue filmada en video y mostrada a los demás participantes, luego fueron entrevistados Bernardo, José, Antonio y Carlos, donde se determina que las plagas son la causa principal en la pérdida de valor económico del cultivo de café, en especial la broca.

En concordancia con lo anterior evidenciamos el interés por conocer más sobre dicha plaga, por lo que se les programó una entrevista cuyo tema principal sería la broca, con el fin de percibir los conocimientos que tenían sobre dicha situación, en la cual mostraron respuestas con conocimientos basados en la experiencia, aprendidos a través del encuentro cercano con el contexto cafetero, además de lo que escuchaban de sus familiares y amigos.

Pretendimos que ampliaran sus conocimientos sobre la broca con el fin de que comprendieran la situación de interés de forma más clara, por lo que procuramos que discutieran y reflexionaran en torno a un fragmento de un artículo escrito por Bustillo (2006) y que tiene como título “Una revisión sobre la broca del café, *Hypothenemus hampei* (Coleoptera: Curculionidae: Scolytinae), en Colombia” (ver ilustración 12). El desarrollo de esta actividad permitió que emergiera una nueva fase, la cual partió de una pregunta que conllevó a un proceso de matematización realizado por los cinco estudiantes, utilizando algunas variables que emergieron del fragmento del artículo anteriormente mencionado, relacionándolas con procesos matemáticos.

Fase 3, Modelos emergentes a partir del fragmento del artículo de Bustillo (2006) “Una revisión sobre la broca del café, *Hypothenemus hampei* (Coleoptera: Curculionidae: Scolytinae), en Colombia”:

Como mencionamos en la fase anterior, con base a la lectura del fragmento del artículo (Bustillo 2006), realizamos a los estudiantes la pregunta *¿Cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año, si se inicia con una sola broca hembra?*, la cual los conllevó de forma individual a realizar un proceso de matematización donde implementaron las variables relacionadas con la reproducción de la broca que emergieron del fragmento de la lectura, además de sus conocimientos del contexto y procesos aritméticos, algebraicos, para construir dos funciones asumidas por sus características como función exponencial, sin ser reconocidas por los estudiantes como tal, que permitieron mostrar la reproducción de la broca hembra y macho en ocho generaciones.

Fase 4, Determinación de modelos emergentes a partir de la experimentación en el contexto cafetero cercano a los estudiantes: Con la experiencia alcanzada en la construcción de modelos a partir del fragmento del artículo (Bustillo, 2006), decidimos con los estudiantes realizar un proceso de construcción de modelos en forma experimental, los cuales fueron el resultado de una inmersión en el campo, mediante la recolección de granos, determinación de número de brocas hembras, machos que conllevó a la construcción de dos modelos que tenían similitud a los producidos con base al fragmento del artículo (Bustillo, 2006).

Dicha similitud estuvo dada por los procesos aritméticos que utilizaron los estudiantes en las dos fases, además por la expresión final a la que llegaron, modelos que se enmarcaron en la función exponencial.

3.5 Análisis de la Información

Según Stake (2007) el análisis de la información consiste en “dar sentido a las primeras impresiones y no existe un momento determinado para realizarse” (p. 67). En este análisis e

interpretación escribimos las impresiones y observaciones que dieron sentido a la investigación, es decir, organizamos y seleccionamos la información recogida por los estudiantes para así sacar relaciones, observaciones, comparaciones, distinciones o conclusiones.

Desde otra perspectiva, Hernández, Fernández y Baptista, (2006) afirman que “(...) en la investigación cualitativa la recolección de datos y el análisis se dan en paralelo y no existe una forma estándar para todas las investigaciones cualitativas” (p. 623), por lo que se sugiere un proceso de análisis, no con el ánimo de estandarizar todas las investigaciones, sino más bien son directrices y recomendaciones que cada investigador podrá o no utilizar de acuerdo a las circunstancias.

Es así como en la recolección de datos, el proceso esencial consistió en que recibimos datos no estructurados, los cuales eran muy variados, pero, en esencia eran narraciones de los participantes (documentos escritos, entrevistas, observaciones) que nos conllevaron a reflexiones y discusiones en relación con el proceso de construcción de modelos con los cinco estudiantes.

Después de que recolectamos los datos los codificamos por temas iniciando por las entrevistas, los documentos escritos y las observaciones, para luego confrontar las diferentes fuentes teniendo en cuenta que pretendíamos era responder la pregunta de investigación mediante la descripción del proceso de modelación realizado por los cinco estudiantes.

3.6 Escrito del informe final

En la elaboración del informe final tuvimos en cuenta la descripción de todo el proceso de construcción de modelos matemáticos a partir de la broca realizado por los cinco estudiantes, además del diálogo con la literatura y referentes teóricos. Para responder a la pregunta de investigación *¿Cómo los estudiantes de grado décimo construyen modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero?* y presentamos los resultados a partir de los temas:

Primero: *construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero*

Segundo: *validación de los modelos con un especialista.*

El primer tema, *construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero* lo dividimos en dos momentos, como se muestran en la tabla 5, con el fin de enmarcar los procesos de construcción de modelos matemáticos que emergen del contexto cafetero a través de los momentos más representativos, generados por los estudiantes en el trabajo de campo.

TEMA	
Construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el contexto cafetero.	
MOMENTOS	
1) <i>Proceso de modelación basado en fragmento del artículo de Bustillo (2006) sobre la reproducción de la broca</i>	2) <i>Validación de modelos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto.</i>

Tabla 5. Momentos en que se dividió el primer tema de la investigación.

El primer momento se centró en la descripción de la influencia en la economía y producción del grano de café que expresan los estudiantes, además de los conocimientos previos mostrados como respuesta a las preguntas que les planteamos sobre la reproducción de la broca, las cuales nos conllevó a ampliar sus conocimientos por medio de una lectura del fragmento del artículo (Bustillo 2006).

Con base al fragmento del artículo (Bustillo, 2006) realizamos la siguiente pregunta *¿Cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año, si se inicia con una sola broca hembra?*, la cual nos permitió que bajo un proceso de matematización por parte de los estudiantes rodeado de discusiones y reflexiones, relacionaran las variables que emergieron del fragmento del artículo (Bustillo, 2006) antes mencionado de forma individual, con procesos aritméticos, luego algebraicos, conllevándolos a la construcción de dos modelos que permitieron determinar a través de una función exponencial la reproducción de la broca en las diferentes generaciones para la broca hembra y macho.

De forma análoga al primer proceso de modelación mencionado en el párrafo anterior, los estudiantes en forma grupal construyeron en el segundo momento (*Validación de modelos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto*), modelos que representaron la reproducción de la broca hembra y macho de forma experimental, donde relacionaron variables que esta vez emergieron de su contexto cafetero cercano mediante procesos aritméticos y algebraicos implementados en la construcción de los modelos en el primer momento a partir del fragmento del artículo (Bustillo, 2006).

Para el segundo tema, *validación de los modelos con un especialista* se realiza una visita al Comité de Cafeteros del municipio de Andes, donde se entrevista a un extensionista, quienes son considerados en la región como los especialistas en el tema del café.

3.7 Validez del estudio

En la investigación que se realizó se pretendió obtener la mayor cantidad de datos provenientes de diferentes métodos como los documentos escritos, entrevistas y observaciones, los cuales hicieron parte del proceso de modelación realizado por los cinco estudiantes. El hecho de implementar diferentes métodos de recolección de datos en la investigación se le llama triangulación. Es así como Hernández et al. (2006), definen la triangulación:

En la investigación cualitativa poseemos una mayor riqueza y profundidad en los datos si éstos provienen de diferentes actores del proceso, de distintas fuentes y al utilizar una mayor variedad de formas de recolección de datos. Al hecho de utilizar diferentes fuentes y métodos de recolección se le denomina triangulación de datos. (p. 623)

En nuestra investigación utilizamos estrategias tales como la observación, la entrevista y la documentación escrita que nos facilitaron el estudio de un mismo fenómeno desde diferentes puntos de vista, por lo que se hizo necesaria la triangulación para su mejor entendimiento, análisis, descripción y en especial interpretaciones complementarias.

Además comparamos los modelos obtenidos en la actividad experimental con los datos encontrados en documentos escritos proporcionados por los extensionistas³ del comité de

³ Extensionista: Persona capacitada que participa como agente de cambio en la zona cafetera, que contribuye a los procesos productivos del café y al bienestar de los cafeteros y sus familias.

cafeteros, para así identificar fortalezas, debilidades, necesidades de aprendizaje, aciertos o desaciertos en el desarrollo de los modelos.

Desde otro aspecto, los estudiantes a través de una discusión grupal establecieron consensos logrando evidenciar que el proceso realizado durante la investigación fue el más acertado, permitiéndole así la resignificación de los conocimientos matemáticos escolares, además de compartir las experiencias y la evaluación del trabajo realizado.

4. La Modelación Matemática en el Contexto del Cultivo de Café

En este capítulo mostramos los resultados sobre el proceso de modelación matemática llevado a cabo por cinco estudiantes de Educación Media a quienes denominamos con los seudónimos de: Ernesto, Carlos, Bernardo, Antonio y José.

Como producto del análisis emergieron dos temas o categorías, las cuales hacen referencia a:

- *Construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero.*
- *Validación de los modelos construidos por un especialista*

A través del primer tema mostramos los procesos efectuados en las distintas fases en que se buscó construir un modelo sobre la reproducción de la broca en el contexto cafetero, donde inicialmente tuvimos en cuenta los conocimientos previos, que luego fueron puestos en común mediante la literatura con el fragmento del artículo de Bustillo (2006) y más tarde efectuamos la experimentación tal como se muestra en la ilustración 10.

En el segundo tema pretendimos mostrar la validez de los modelos hallados tanto desde la literatura como desde la experimentación en el contexto cafetero cercano a los estudiantes a través de una entrevista realizada a un extensionista del comité de cafeteros.

4.1 Construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero

El proceso de construcción de modelos matemáticos en la investigación tuvo su génesis en una serie de cuestionamientos (ver anexo 11) que los investigadores propusieron a los estudiantes

en torno a situaciones que afectan la producción del grano de café en el contexto cafetero. Esto nos permitió espacios de discusión y reflexión, los cuales estuvieron circundados inicialmente por ideas basadas en los conocimientos adquiridos por los estudiantes a través de la experiencia dentro de las prácticas realizadas en el cultivo de café, además de los transmitidos por sus padres y familiares; argumentos que nos permitieron observar la relación que tenían los cinco estudiantes con el contexto cafetero cercano al estar en contacto constante con el cultivo del café.

Contextualización

Los estudiantes visitan una de las fincas del municipio, con el fin de familiarizarse con el contexto previamente a la elección de la situación.

Ilustración 9. Fotografías del proceso de la contextualización. Mayo (2012)

Experimentación

El estudiante busca determinar la cantidad de brocas que se reproducen en cada uno de los granos de café en dos actividades de laboratorio (junio, agosto), con la intención de encontrar un modelo que describa la proliferación de la broca en la zona donde vive.

Ilustración 10. Fotografía del proceso de experimentación. Junio (2013)

Es así, como el proceso implementado para la construcción de modelos matemáticos lo efectuamos en dos momentos, los cuales hacen alusión a:

- *Proceso de modelación basado en fragmento del artículo de Bustillo (2006) sobre la reproducción de la broca.*
- *Validación de modelos teóricos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto.*

El primer momento tuvo como objetivo principal, la descripción desde la delimitación de la situación particular reproducción de la broca en el contexto cafetero hasta la lectura que se llevó del fragmento del artículo de Bustillo (2006), del cual surgieron unas variables utilizadas por los estudiantes para realizar un proceso de modelación en el cual se construyeron modelos matemáticos de la reproducción de la broca hembra y macho.

En el segundo momento analizamos el proceso de modelación que parte de la experiencia, es decir, los estudiantes conjuntamente con los investigadores nos acercamos al contexto cafetero cercano, centrándonos en el análisis de la broca como una de las plagas que más afectan el cultivo de café. Es importante resaltar la influencia que los estudiantes tuvieron del anterior proceso (fragmento de Bustillo (2006)), para construir los modelos que describían el proceso de reproducción de la broca.

4.1.1 Proceso de modelación basado en fragmento del artículo de Bustillo (2006) sobre la reproducción de la broca

La reproducción de la broca ha sido uno de los problemas que enfrenta el contexto cafetero, es por esto que algunos investigadores como Bustillo (2006), Franqui y Medina (2013), Fernández y Cordero (2007) han publicado textos que contribuyen al estudio de esta plaga y por ende a la proyección de algunas soluciones frente a su proliferación.

A continuación analizamos la manera cómo se llevó a cabo el abordaje de un fragmento sobre la reproducción de la broca en el artículo de Bustillo (2006) desde dos fases: la primera se centró en la indagación a los cinco estudiantes sobre lo que saben de la broca (saberes previos) y en una segunda fase la confrontación de lo que saben sobre la broca con lo expresado en el fragmento de Bustillo (2006).

4.1.1.1 Indagación de saberes previos sobre la broca

En los diferentes momentos que abordamos a los estudiantes en el contexto cafetero, surgieron determinadas ideas acerca de los fenómenos que afectan la producción y las consecuencias que estos traen para los campesinos y habitantes del municipio en general. En concordancia con lo anterior, presentamos algunos de los planteamientos que los estudiantes manifestaron de forma escrita a preguntas que buscaban determinar sus conocimientos sobre el cultivo de café:

1. Ernesto	<i>El cultivo de café en la región es la base de la economía, si en este pueblo no hay cosecha de café prácticamente todo se va al suelo⁴, mucha gente ha llegado a decir que si en este pueblo se acabara el café, que ya no habría con que remplazarlo, es más, las personas ya casi no realizan quemas por miedo a que el suelo pierda su fertilidad y por ende el cultivo no tenga la misma eficiencia, ganancia y calidad.</i>
2. José	<i>Éste necesita de un cuidado para poder que éste bien. Hay que desyerbarlo, abonarlo y echarle fertilizante para que tenga una buena producción y haya una mayor calidad de café, por lo tanto hay que estar pendiente del cultivo porque fácilmente le pueden dar plagas afectando el precio, por lo que habría pérdida económica.[sic]</i>
3. Antonio	<i>Al café entre más nutrientes, luz solar y agua se le dé, mejor será la calidad y el tamaño de la planta y del grano de café, por lo tanto se vendería mejor.</i> <i>La producción de café se ve afectada por varios fenómenos, pero los que se</i>

⁴ Suelo: Bajan los ingresos en los hogares, no habría empleo en las fincas cafeteras.

4. Carlos	<i>pueden decir que causan más daño; son los fenómenos o cambios climáticos constantes porque no permite desarrollar el fruto en su totalidad y muchas veces el café por las lluvias elevadas termina cayéndose de los palos acción que afecta la producción porque se está perdiendo el café. Otro fenómeno que afecta la producción del café es la propagación de las plagas en su cultivo porque el producto pierde calidad, merma su producción pero afecta a las familias en cuanto a los elevados costos que traería producirlo.</i> <i>Existen otros fenómenos que podrían afectar la producción del café y afectar económicamente a las familias andinas, porque el precio del café baja, pero los costos de producción aumentan y muchas familias viven económicamente del café y en general la economía de nuestro pueblo es cafetera en su mayoría entonces todos nos veríamos afectados.[sic]</i>
5. Bernardo	<i>La producción de café es atacada por plagas como la broca, la araña roja, el cambio climático y demás, que afectan la calidad y cantidad en la producción del café y así las familias andinas que subsisten de este obtendrán menos ingresos y subsistir será más difícil.</i>

El reconocimiento del café como una actividad económica destacada en la región, promueve en los estudiantes reflexiones que giran en torno al análisis de aspectos como la producción, los costos, gastos y otros elementos que determinan el progreso de una población. Ernesto en el episodio anterior (línea 1.) manifiesta “*El cultivo de café en la región es la base de la economía, si en este pueblo no hay cosecha de café prácticamente todo se va al suelo (...)*” De este modo resaltamos que abordar discusiones desde el ámbito escolar (relacionados con el ámbito extraescolar) permite incentivar en los estudiantes ideas críticas que surgen de la discusión; en palabras de Herminio y Borba (2010) lo más importante de que el estudiante haya elegido el tema es que lo convierte en un participante activo al usar un tema de su interés.

En la idea del progreso de la región, los estudiantes realizan en su discurso elementos descriptivos de una cultura en términos de una actividad económica. En este sentido Ernesto (línea 1.) manifiesta “*(...) mucha gente ha llegado a decir que si en este pueblo se acabara el café, que ya no habría con que remplazarlo (...)*” La actividad del café es tomada aquí por el estudiante como una herencia que determina la existencia de una población y es reconocida por

él como una de las motivaciones para que las personas adquirieran conciencia y proyección de las acciones que perjudican a largo plazo esta actividad.

En consecuencia con lo anterior, la producción de café puede ser afectada positiva o negativamente a nivel económico, cultural, familiar, entre otros, aspectos que pueden ser previstos o no por las personas. Para los estudiantes es relevante resaltar dentro de las afecciones que tiene el cultivo tres aspectos: los cambios climáticos, la carencia de nutrientes y las plagas.

Los cambios climáticos bruscos son considerados por los estudiantes como uno de los fenómenos que ocasionan una variación notoria en la producción del café, tal como lo afirma Carlos (línea 4.) “(...) *los cambios climáticos constantes porque no permite desarrollar el fruto en su totalidad y muchas veces el café por las lluvias elevadas termina cayéndose de los palos acción que afecta la producción (...)*” igualmente lo asevera Bernardo (línea 5.), aunque ésta situación es impredecible para los caficultores.

La falta de nutrientes (segunda afección) puede ocasionar que la flor se caiga antes de dar origen al grano o que el grano sea pequeño y de una calidad inferior, por lo tanto es necesario proporcionar suficiente abono para obtener un grano grueso tal como lo afirma Antonio (línea 3.) “*Al café entre más nutrientes, luz solar y agua se le dé, mejor será la calidad y el tamaño de la planta y del grano de café*”, situación que es manejada por los campesinos dependiendo de los recursos que poseen, tal como lo expone Bernardo (línea 4.) en el siguiente fragmento de entrevista:

1. Investigador	<i>¿Qué cantidad de abono se le echar a cada árbol de café?</i>
2. Bernardo	<i>A los 2 y 3 meses serían 25 y 30 gramos por palo, a los 5 y 6 meses pongámosle aproximadamente 45 gramos.</i>

3. Investigador	<i>¿La cantidad de abono es variable?</i>
4. Bernardo	<i>Sí, porque no es que se incremente mucho y con relación a la edad no es que se incremente mucho y con respecto de un palo a otro en distintas fincas puede ser que se incremente mucho, porque es dependiendo de los recursos que tengan, hay unos que tienen más dinero, por lo tanto pueden ponerle más abono del que necesite.</i>

En la última afección, las plagas, los estudiantes se refieren a éstas como uno de los aspectos que más influye negativamente a la producción, decidiendo retomarla como uno de los fenómenos que al ser estudiados genera conciencia y aportes para la prevención desde la reflexión escolar.

Entre las plagas que intervienen en la baja producción de café pueden considerarse la roya, la araña roja, la mancha de hierro y la broca. Esta última fue considerada por los participantes como una de las más reconocidas en el medio por su rápida proliferación y el daño que ocasiona en el grano, específicamente en el municipio de Andes, ésta es la que más se presenta en la región. En esta idea se les preguntó a los estudiantes sobre sus saberes, en el siguiente cuadro presentamos algunas respuestas sustentadas por los estudiantes al ser indagados sobre la broca:

1. Investigador:	<i>¿Cuál es la plaga que afecta más al café en esta zona?</i>
2. José:	<i>La que más asusta al caficultor es la broca⁵, en este tiempo es la más fuerte.</i>
3. Investigador	<i>¿Qué conoces acerca de la broca?</i>
4. José	<i>Es una plaga que en la actualidad tiene afectados a los caficultores, ya que su reproducción es muy rápida y abundante. Este insecto hace que los frutos de café a la hora de recolectarlos no sirvan para nada y esto hace que la economía de estos agricultores baje.</i>
5. Ernesto	<i>Es un pequeño insecto que se alimenta de los nutrientes del grano por lo que pudre el fruto.</i>

⁵ “lo que más asusta al caficultor es la broca”: los estudiantes conocen que la broca es una plaga que requiere de atención por los caficultores debido a lo perjudicial que es para el grano. Conocimiento adquirido gracias a la interacción con el cultivo de café.

6. Antonio	<i>La broca en la región ha representado un gran problema y una inminente amenaza para los cafeteros ya que hace varios años los que tenían cultivos de café caturro⁶ perdieron la producción y por ello muchos quedaron en la quiebra o quedaron al borde de esta.</i> <i>Es una plaga que ataca los cultivos de café, esta tiene un proceso de perforación en los granos, cuando el grano está en un punto de crecimiento la broca ataca pero no perfora el grano hasta estar gecho⁷. A esta se le hace un seguimiento para hacer la fumigación, cuando ella está en un punto de entrar al grano se le hace la primera fumigación luego se hace un seguimiento al cultivo para observar si es necesario hacer una segunda fumigación. [sic]</i>
7. Carlos	<i>Esta plaga es un problema para los cafeteros ya que es una plaga de fácil propagación y muy rápida.</i>

Teniendo en cuenta las ideas de los participantes, podemos notar que esta clase de coleópteros que normalmente afecta una de las dos almendras presentes en el fruto, se alimenta hasta devorarla por completo, tal como mostramos en la Ilustración 11. Esta idea se afirmó por el estudiante José (línea 4.) “*Este insecto hace que los frutos de café a la hora de recolectarlos no sirvan para nada*”, ocasiona un gran daño en la producción, siendo una de las plagas más perjudiciales presente en la caficultura Colombiana.



Grano perforado por la broca, donde se ve una almendra afectada y la otra intacta.

Ilustración 11. Fotografías sobre la afectación del grano. Agosto (2013)

⁶ Variedad de café originario del Brasil, mutación del borbón, de tronco grueso y poco ramificado, inflexible.

⁷ Gecho: Grano de café que tiene la almendra totalmente formada y que le faltan pocos días para madurar.

En consecuencia con lo anterior, no siendo una pérdida total del grano al afectar una sola almendra, ocasiona pérdidas económicas directas e indirectas para cada una de las familias de la región tal como lo expresa el estudiante Ernesto (línea 5.) ... *perdieron la producción y por ello muchos quedaron en la quiebra o quedaron al borde de esta.*

Las pérdidas surgen gracias a la proliferación de la plaga, la cual se da de una forma controlable, pero inacabable, ocasionando que los participantes (José, Carlos en las líneas 4. y 7.) se expresen hacia ella como: “... *su reproducción es muy rápida y abundante...*” y que de igual manera produzca curiosidad en cuanto a la cantidad de reproducción. El siguiente episodio se convierte en evidencia de este hecho.

1. Investigador	<i>Si el árbol de café tiene broca ¿cómo crees que se podría determinar el número de insectos que se encuentran dentro del grano?</i>
2. Ernesto	<i>Bueno tengo entendido⁸ que por cada broca hembra son cuarenta y tres larvas, se podría sacar como un promedio en cierta cantidad de granos y de ahí de acuerdo con lo encontrado realizar una operación para calcular la cantidad de brocas.</i>
3. Investigador	<i>Me podría explicar eso?</i>
4. Ernesto	<i>Sacar cierta cantidad de granos, a esos granos, mirarles cuantas brocas tienen y por cada broca multiplicar por cuarenta y tres, que es más o menos la cantidad base que tiene para sacar el promedio de cuantos podría tener.</i>
5. Investigador	<i>Según lo mencionado por Ernesto en el video⁹ dice que por cada hembra broca son 43 larvas que pueden dejar en cada grano. ¿Usted qué puede decir sobre esto?</i>
6. Bernardo	<i>Yo tengo entendido que son por ahí treinta larvas que puede dejar en cada grano, y luego, puede seguir reproduciendo más larvas, hasta llegar a un promedio de setenta.</i>

⁸ Información que el estudiante dio a conocer desde sus conocimientos previos del cultivo del café.

⁹ Video realizado a Ernesto sobre los fenómenos que afectan la economía de la región (plagas, falta de fertilizantes y el clima).

7. Investigador	<i>¿Podrías plantear una ecuación o una representación matemática en cuanto a lo que me acabas de decir?</i>
8. Bernardo	<i>Sí, una broca da origen a setenta larvas, las cuales serían por grano y así sucesivamente, entre más larvas, va incrementando.</i>
9. Investigador	<i>Si fueran dos brocas, ¿cuántas larvas serían?</i>
10. Bernardo	<i>140</i>
11. Investigador	<i>Entonces, ¿cuántas serían por grano?</i>
12. Bernardo	<i>Por grano las misma 30, pero, podrían ser 15, en promedio serían 15 por cada broca.</i>
13. Investigador	<i>¿Qué conoces acerca de la broca?</i>
14. Antonio	<i>(....)Si no se hacen estos tipos de fumigación esta podría acabar con la cosecha, la broca tiene una propagación muy ligera. Tengo entendido que una broca pone hasta 13 y de estos saldrían o 26 cuando no se hacen estos debidos procesos el grano cuando es procesado es donde aparece la pasilla.</i>
15. Investigador	<i>Sabes cuantas brocas se reproducen en un grano</i>
16. José	<i>No se, lo único que puedo decirle es que en enero uno recoge los granos que los trabajadores dejaron regados y la mano se le llena a uno de brocas.</i>

En la situación anterior, la pregunta efectuada en la línea 1., nos permitió que los estudiantes mostraran los conocimientos adquiridos a través de su experiencia en las prácticas que realizan en el cultivo de café, contacto con la cultura cafetera y sus potencialidades para “activar” algunos procesos matemáticos (suma, multiplicación y promedios), notándose en las respuestas de cada estudiante resultados diferentes en el número de reproducción de la broca (líneas Ernesto 2., Bernardo 8., Antonio 16., y José 18.), a pesar de pertenecer al mismo contexto cafetero.

Los estudiantes mostraron sus conocimientos sobre el contexto cafetero y de forma particular sobre la reproducción de la broca; ese saber, también fue producto de la difusión de medios de

comunicación o información a la cual acceden a través de técnicos de las empresas caficultoras (Comité de Cafeteros y Cooperativa de Caficultores), familiares y se van transmitiendo entre ellos mismos. Sin embargo, este conocimiento, no es lo suficientemente “preciso” como para generar acciones y tomar decisiones frente a los aspectos que intervienen en el contexto.

La indagación por los saberes previos de los estudiantes sobre el cultivo de café, los cuales fueron evidenciados en párrafos anteriores, tuvieron en común que fueron el resultado a las preguntas que conllevaron a los estudiantes a dar respuestas, donde se evidenciaron sus conocimientos sobre el cultivo de café y factores que lo afectan, perjudicándose la economía. También se observaron respuestas que obtuvimos de los estudiantes, donde implementaron operaciones aritméticas para representar los conocimientos sobre la situación que se enmarcó en cada pregunta.

Tanto las respuestas verbales por medio de las entrevistas, como también los procesos aritméticos (líneas Ernesto 4. y Bernardo 6.) que pretendían dar respuesta a las preguntas que planteamos sobre el cultivo de café y situaciones que son relevantes para los estudiantes como clima, nutrición y plagas, estuvieron acordes con unos saberes de su contexto cafetero cercano, que surgieron como ya se había mencionado, desde la experiencia que adquirieron sobre el cultivo cafetero al igual que los conocimientos transmitidos por sus familiares.

Estas ideas son coherentes con lo expuesto por D’Ambrosio (2006) en su *dimensión conceptual* que se relaciona con los conocimientos acumulados por los grupos culturales, los cuales le ayudan a comprender la realidad que se manifiesta a través de los sentidos y abstracciones mentales, como también con la *dimensión los desafíos de la vida cotidiana* que

hace alusión a cómo la matemática permite analizar los factores ambientales y culturales de una región que influyen en la vida de un grupo social.

Nuestra siguiente intención como investigadores fue incentivar en la búsqueda de documentos que permitieran afirmar, robustecer, ampliar los conocimientos que habían mostrado hasta el momento los estudiantes sobre el cultivo de café, para que en próximas reflexiones y discusiones, los estudiantes tuvieran además de sus conocimientos desde la experiencia, ideas más coherentes y relacionadas con la situación reproducción de la broca en el contexto cafetero.

Este nuevo paso dentro del proceso de modelación se abordó en el siguiente aparte y está de acuerdo con Biembengut y Hein (1997) en una de sus etapas del proceso de modelación como lo es *interacción con el asunto* el cual se divide en:

(...) reconocimiento de la situación problema y familiarización con el asunto que va a ser modelo-investigación. En esta etapa se requiere que una vez simplificada la situación se realice una investigación sobre el asunto en dos sentidos, a través de libros y revistas especializadas o a través de datos experimentales obtenidos con especialistas del área, permitiéndose de esta manera el reconocimiento de la situación problema a medida que se conocen más datos de forma clara. (p.3)

Desde esta perspectiva, los autores nos corroboran que el reconocimiento de un contexto permite especial participación de los estudiantes con otras personas, en nuestro caso serían los expertos y artículos de revistas especializadas, quienes contribuyen a fortalecer los conceptos que subyacen en el campo de la experiencia y la cotidianidad.

4.1.1.2 Construcción de un modelo que surge de datos teóricos

Con el ánimo de trascender la información que los estudiantes poseían frente al fenómeno de reproducción de la broca, se invitó a que indagaran en diferentes medios al respecto. Como resultado se trajo a colación la siguiente información derivada del fragmento de Bustillo (2006) el cual se presenta en el siguiente recuadro:

En Colombia se han realizado varios estudios sobre el ciclo biológico de la broca (...). Aunque los datos obtenidos presentan algunas diferencias, esto se debe a las condiciones ambientales donde se han realizado, en especial, la temperatura. La hembra después de salir de la pupa está lista para aparearse y la oviposición la inicia tres días más tarde. Cada hembra pone entre 2 y 3 huevos por día por un periodo de 15 días, es decir un promedio de 43 huevos por postura. El ciclo total de huevo (incubación, larva, pre-pupa y pupa) a adulto en Colombia se estima en 27,5 días; sin embargo, el tiempo generacional, o sea el tiempo que tarda en iniciarse otra generación del insecto, se estima en 45 días a 22°C, por lo tanto, en aquellos cultivos cuya producción es todo el año, la broca puede superar las 8 generaciones por año. La relación de sexos es de un macho por cada 10 hembras. En cada grano la supervivencia de la descendencia está constituida por 25-30 individuos en todos los estados de desarrollo.

Ilustración 12. Fragmento Ciclo Biológico de la Broca. Bustillo (2006) (citado en Sánchez et al., 2013, p.534)

Conforme mencionan en Sánchez, Obando, Muñoz y Villa-Ochoa (2013) ante este tipo de situaciones los estudiantes por medio de nuevos datos teóricos relacionados con la situación de interés, amplían los conocimientos adquiridos a través de la experiencia en el cultivo del café.

En concordancia con lo expuesto, a continuación mostramos una conversación que realizamos con los estudiantes, la cual hace referencia a su postura ante estos nuevos conocimientos:

1. Investigador	<i>¿Conocías estos datos?</i>
2. Ernesto	<i>Sí señor, ya tenía algunos conocimientos previos sobre éstos.</i>
3. José	<i>No, pero, sabía que era muy mala y que daña mucho la cosecha, pero estos datos no.</i>

4. Bernardo	<i>Era algo muy básico lo que sabía sobre la broca, no conocía datos como son la cantidad de huevos, el tiempo, la cantidad de brocas hembras y machos.</i>
5. Carlos	<i>Sí, ya tenía algunos conocimientos sobre esa información.</i>
6. Investigador	<i>¿En qué se asemeja o se aleja la información del artículo, asociándolo con la realidad que presentan las fincas que conoce?</i>
7. Ernesto	<i>Pues, la verdad, así los datos a primera vista y de una forma general, se aplican mucho, aunque ya de los datos exactos como el número de huevos, lo de la temperatura, y eso no sé si allá aplica esto ya que no se realizan estudios, ni nada, pero en cuanto a lo de la broca más o menos la cantidad y el proceso, y eso se puede observar en algunos cultivos como la broca se propaga rápidamente.</i>
8. José	<i>Se asemejan mucho ya que en estos momentos la broca está por ahí en un 30% o sea que hay mucha en nuestros cafetales y aquí nos dan unas cifras muy elevadas de procreación, más o menos como está en los cafetales.</i>
9. Bernardo	<i>Tiene mucha relación con los datos, pues he visto que en un grano de café se alcanza a ver los rastros que deja la broca con las brocas que a un siguen allí y la cantidad es muy relacionada con la cantidad que se produce por broca hembra que deja sus huevos en el grano.</i>
10. Carlos	<i>Se asemeja mucho debido a que son conocimientos muy generales y en el caso de las fincas que conozco aplica mucho.</i>

La pregunta ¿conocías estos datos?, la hicimos con el objetivo de verificar que información asimilaron de la lectura. Necesitábamos estar seguros de que entendieron la lectura y la interiorizaron, aunque nos encontramos con respuestas cortas, por lo que realizamos una segunda pregunta *¿En qué se asemeja o se aleja la información del artículo, asociándolo con la realidad que presentan las fincas que conoce?* Con el fin de motivar a los estudiantes a la confrontación de sus conocimientos previos, con las nuevas ideas sobre la reproducción de la broca que emergieron de la lectura del fragmento especializado (Bustillo,2006)

Igualmente con esta segunda pregunta pretendimos observar que tanto aprobaron o desaprobaron la información aportada por el especialista. Esto nos permitió encontrar que

tomaron la información específica y la llevaron a lo general, es así como José en la línea 8, plantea “(...) *hay mucha en nuestros cafetales y aquí nos dan unas cifras muy elevadas de procreación, más o menos como está en los cafetales*” y Carlos en la línea 10, “*Se asemeja mucho debido a que son conocimientos muy generales*”.

Así mismo, se muestra en el episodio, los conocimientos adquiridos por los estudiantes en su vida cotidiana, no fueron olvidados o remplazados por los datos teóricos, si no que la experiencia de lectura les sirvió como un medio para relacionarse más con la situación problema.

Por medio de las respuestas de los estudiantes también se evidenció que el fragmento presentado en la Ilustración 12, sobre la broca (Bustillo, 2006), les permitió además de comprender una nueva información, robustecer sus conocimientos, permitiendo contextualizarse más con la reproducción de la broca, donde asumieron que muchos de los valores sobre número de brocas, huevos y larvas se asemejan con los datos que conocen (líneas 7. Ernesto, 8. José y 9. Bernardo), pero que no son iguales, conllevando a determinar que el número de brocas dentro de cada cultivo puede tener valores diferentes sin que los estudiantes a través de sus conocimientos o por medio de los expuestos en el anterior episodio dieran las razones por las cuales puede suceder este hecho.

La nueva información no solo permitió que los estudiantes e investigadores generaran reflexiones con relación a los datos de dominio común, sino que a través de un cúmulo de conocimientos desde la experiencia y la teoría, observaron que dichos fenómenos del contexto cafetero y de manera particular -la broca- son susceptibles de estudiar implementando la modelación matemática como medio para encontrar respuestas a la situación elegida.

Con base a la experiencia de lectura de los cinco estudiantes, nos fue posible indagar sobre la procedencia de la información pensando en que los datos técnicos y científicos tienen una historia y que reconstruirla ayuda a ver o crear visiones sobre cómo es ésta actividad en espacios relacionados con la modelación, donde seres humanos han construido a través de investigaciones nuevos modelos que son falibles, siendo éstos productos que pretenden mostrar ciertos patrones y tendencias.

De allí, surgió la necesidad de abrir un nuevo espacio de discusión con los estudiantes donde se les pidió dar respuesta a la pregunta *¿Cómo crees que los investigadores llegaron a esas afirmaciones vistas en el artículo?*, del cual se genera el siguiente episodio:

1. Investigador	<i>¿Cómo crees que los investigadores llegaron a esas afirmaciones vistas en el artículo?</i>
2. Ernesto	<i>Creo que estas personas debieron analizar primero teorías sobre el café y comenzar con el estudio de uno o varios árboles de café teniendo en cuenta todos los aspectos posibles, características de las hojas, frutos, tamaño del árbol, en general, todo lo que pueda afectar al café.</i>
3. Carlos	<i>Creo que los investigadores para sacar esas conclusiones tuvieron que hacer un trabajo de análisis, investigación y observación en diferentes cultivos, diferentes climas, campos y también tener presente las características de la propagación de la plaga.</i>
4. José	<i>Acá nos dieron muchos detalles, me imagino que miraron la temperatura de varias zonas, separaron un tajo, un lote y teniendo en cuenta cómo se encontraba el clima miraron como era la propagación de la broca, dependiendo si era tierra fría o caliente para ver donde se propagaba más y me imagino que así ellos sacaron las conclusiones.</i>
5. Bernardo	<i>Creo que la base de toda conclusión que se saque tiene que ver con la observación, seguimiento y análisis de lo que se observe, pues a partir de esto es donde salen todos los datos e informaciones que se puedan sacar con respecto a algo.</i>
6. Investigador	<i>¿Cuáles son los “supuestos” que tuvieron en cuenta los investigadores en el artículo para realizar dichas afirmaciones?.</i>

7. Ernesto	<i>Me imagino que tuvieron en cuenta la temperatura, la tierra, porque hay tierras que favorecen la producción y en otras que si es como complicado el cultivo, hay tierras muy húmedas, ellos se debieron pegar también de la variedad de café, las plagas que pueden afectar al cultivo, porque no a todos los tipos de cafés los afecta la misma plaga. Por ejemplo, según lo que he oído la broca afecta más al Caturro que a los otros tipos de cafés.[sic]</i>
8. Carlos	<i>Tuvieron que tener en cuenta las características de la plaga, las condiciones para que éstas se propaguen, el clima, las condiciones del terreno, el tipo del cultivo.</i>

Analizando las respuestas dadas a la pregunta de la línea 1., se puede evidenciar que los participantes están partiendo de sus conocimientos previos para llegar a un fin, es decir, están pensando en lo que harían (teniendo en cuenta sus conocimientos) para llegar a la información aportada por el fragmento. Es así como José en la línea 4., plantea “(...) *separaron un tajo, un lote y teniendo en cuenta cómo se encontraba el clima (...)*” claramente se observa su pensamiento sobre lo que él haría para encontrar la información.

Además es interesante observar que Ernesto toma información acerca de las afecciones que sufre el café por las diferentes plagas y las lleva a la evaluación, considerando cuál es la más dañina, esto se puede ver en Ernesto, línea 2., “(...) *características de las hojas (...)*” las hojas son afectadas por las plagas la mancha de hierro, el minador, la gotera y la roya, más no influye en la broca. Igualmente en la segunda respuesta Ernesto, línea 7., plantea “*la tierra, porque hay tierras que favorecen la producción*” nuevamente la tierra afecta la producción debido a falta de nutrientes o plagas como la *Llaga macana* y la *Palomilla*.

La manera como inicialmente buscamos que los cinco estudiantes se involucraran en un proceso de matematización de los datos relevantes de la lectura del artículo (Bustillo, 2006) con el fin de posibilitarse la creación de un modelo matemático de la reproducción de la broca, tuvo

que ver con la formulación de una nueva pregunta que los indujera a relaciones matemáticas y por lo tanto susceptibles de ser llevadas al álgebra.

Es así como planteamos la siguiente pregunta invitando a cada uno de los cinco estudiantes a reflexionar y discutir sobre dicha situación, *¿Cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año, si se inicia con una sola broca hembra?*, pregunta pensada con la intención de vincular en su estructura la palabra “cantidad” que se relaciona con la situación particular proyectada a un año y que permitiera unas respuestas más de carácter cuantitativo que cualitativo.

Como discutimos en Sánchez et al., (2013) en el diálogo generado entre investigadores y estudiantes, se les preguntó por los datos relevantes que simplificaban el fragmento del artículo (Bustillo, 2006), considerando los mostrados en la Ilustración 13, susceptibles de ser analizados y reflexionados para dar respuesta a la pregunta anterior.

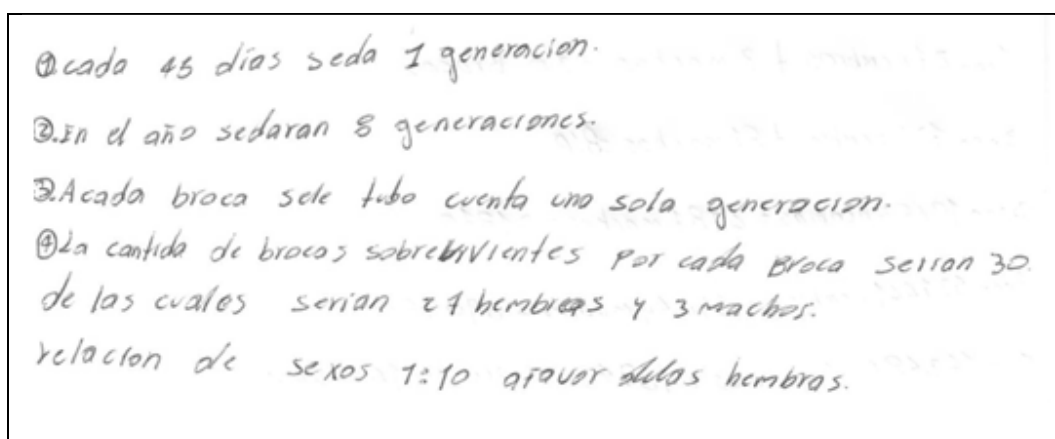


Ilustración 13. Datos simplificados del artículo. Bustillo (2006)

La extracción de elementos relevantes en el fragmento del artículo de Bustillo (2006) es similar al proceso utilizado por Biembengut y Hein (2002) *en el proceso de modelación sobre la producción de manzanas*, Bassanezi y Biembengut (1997) *en el problema de formación de una*

colmena, donde toman datos experimentales sacados de la literatura especializada que pueden ayudar en la presentación de la situación particular de estudio.

De manera similar, después del proceso de investigación, cuatro de los cinco estudiantes presentes en este día (en el colegio) comenzaron un proceso de matematización de variables relevantes, tal como lo afirma los Lineamientos Curriculares (1998)...”una vez el problema ha sido transferido a un problema más o menos matemático, éste problema puede ser atacado y tratado con herramientas matemáticas” (p. 77), donde relacionaron ideas que describen la situación sobre la reproducción de la broca de manera cualitativa y cuantitativa como se muestra en el siguiente fragmento escrito por los estudiantes:

1. Ernesto	<i>Empieza una hembra, para la primera generación sería 27 hembras que nacen, luego en la segunda generación, cada una de estas 27 hembras tiene 27 hembras, sería 27 por 27, que daría 729, lo escribo así o en potencia 27^2.</i>
2. Antonio	<i>En la segunda generación sería 27 hembras, que sería un total de 810 huevos, de esos 810 salen 729, porque 27 por tres da 81 y 810 menos 81 machos es igual a 729 hembras.</i>
3. José	<i>En la segunda generación sería 27 por 30 es 810, a 810, lo dividí por 10 y me da 81 que son los machos. A 810 le resto los 81 machos y me dio 729 hembras.</i>
4. Bernardo	<i>Ah, entonces la primera generación serían las 30 brocas, de las cuales hay 27 hembras, ahora en la segunda generación sería las 27 hembras que ya tengo por 27 hembras que producen cada una, lo que me da 729 hembras en la segunda generación</i>

En el proceso realizado por Ernesto y Bernardo (líneas 1. y 4.) observamos que limitaron su cálculo para hallar el número de hembras en cada generación, al no tener en cuenta los machos en el proceso de multiplicación realizado.

A diferencia de los demás estudiantes, Ernesto (línea 1.) utilizó la potenciación para expresar el número 729 como 27^2 brocas hembras.

El proceso llevado a cabo por Antonio (línea 2.) para determinar el número de hembras involucró no solo la operación aritmética de la multiplicación, sino que iniciando su proceso con el cálculo total de brocas, necesitó al final una resta, que le permitió quitarle al total calculado el número de machos.

José (línea 3.), además de la multiplicación y resta, utilizó la división para hallar el total de brocas macho en la segunda generación, el cual, bajo un proceso similar al de Antonio, restó al total de brocas, para hallar finalmente el número de hembras.

Es importante aclarar que a pesar de que todos estaban intentando dar solución a la misma pregunta *¿Cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año si se inicia con una sola broca hembra?*, lo hicieron de forma individual y por procesos diferentes, mostrando diversidad de razonamientos. Esta diversidad se debe al dominio que presenta cada estudiante de las operaciones aritméticas en la solución de situaciones problema, en este caso la reproducción de la broca en el cultivo del café.

Como se mencionó anteriormente, Ernesto tuvo la idea de utilizar la potenciación para resumir el valor de la reproducción de la broca hembra hasta la segunda generación. Partiendo de esta idea inicial, quiso seguir un proceso similar de forma organizada para las ocho generaciones correspondientes a un año, dándose como resultado la siguiente situación:

Generación cero	27^0
Primera generación	27^1
Segunda generación	27^2
Tercera generación	27^3
Cuarta generación	27^4
Quinta generación	27^5
Sexta generación	27^6
Septima generación	27^7

Ilustración 14. Proceso de potenciación realizado por Ernesto para representar el número de hembras en ocho generaciones.

La razón por la cual Ernesto luego de utilizar la multiplicación para expresar la cantidad de hembras en la etapa de reproducción, decidió utilizar la potenciación. Esta idea se muestra en el siguiente aparte:

* Teniendo en cuenta que cada hembra engendra otras 27 fui multiplicando este valor por las hembras de cada generación y al ir obteniendo los resultados me di cuenta que estos se podían expresar por medio de esta potencia.

Ilustración 15. Escrito realizado por Ernesto donde explica la razón para utilizar la potenciación.

La situación anterior nos conllevó a determinar que efectivamente hay un conocimiento aritmético en juego, pero los estudiantes comenzaron a ver otro tipo de variación de unas situaciones iniciales de reproducción de la broca a través de la potenciación, donde la variable toma la forma de exponente, lo cual está en los cimientos de una función exponencial (Ferrari, s.f.).

Esto permitió una vez más generar ideas sobre cómo la modelación matemática en los procesos de enseñanza en el aula de clase requiere que los docentes involucren a los estudiantes

en una situación problema de su interés basados en artículos especializados donde se invite a que implementen la modelación para la construcción del conocimiento matemático (Cordero, 2004) .

En el proceso realizado por los estudiantes también se observó que los términos relacionadas fueron: generación, broca hembra y broca macho, en las cuales normalmente no utilizaron símbolos de representación que les permitieran mostrar una expresión algebraica relacionada con la reproducción de la broca, sin dejar de pensar que un modelo verbal podría también responder como comprensión de la situación particular *la reproducción de la broca*.

Esta situación está en coherencia con Bressan (2005) quien menciona que la representación de modelos externos se pueden dividir en “(...) enunciados verbales (orales o escritos), como también en organizaciones visuales gráficas que muestran conceptos o estructuras conceptuales, además de expresiones simbólicas que representan estructuras matemáticas para comprender conceptos, operaciones y relaciones” (p.1).

De acuerdo a lo anterior observamos que los modelos no solo son conjuntos de sistemas de ecuaciones, sino diversos tipos de expresiones verbales, algebraicas y gráficas que modelen y permitan llegar a la comprensión de la situación particular del contexto de forma simplificada.

Los términos que relacionaron los estudiantes para describir la reproducción de la broca en ocho generaciones como ya se había dicho fueron: generación, broca hembra, broca macho, con los cuales pretendíamos en una nueva sesión dotada de preguntas que las relacionaran con los conocimientos ya adquiridos en clase (variable), posibilitándose una representación más simplificada y enmarcada en expresiones algebraicas, evidencia de dicho proceso se muestra en el siguiente episodio en el que transcribimos el procedimiento realizado por los participantes.

1. Investigador	<i>¿Qué relación ve entre la generación uno, la dos, la tres. . .?</i>
2. Bernardo	<i>Que el aumento tiene que ver en proporción con la cantidad de hembras que producen los huevos, entonces a partir ya de esto se puede llegar a la fórmula matemática teniendo en cuenta la cantidad en que suben las hembras.[sic]</i>
3. Ernesto	<i>A medida que cambia el número de la generación el valor se aumenta.</i>
4. José	<i>Que va aumentando a medida que transcurre el tiempo.</i>
5. Carlos	<i>Que se incrementan los valores de broca a medida que aumenta la generación.</i>
6. Antonio	<i>Se ve que aumenta y mucho.</i>
7. Investigador	<i>¿Qué es lo que está variando?</i>
8. Bernardo	<i>La variable, o lo que cambia constantemente, es la generación,[por ejemplo] si es la primera generación se reemplaza por uno, en la segunda generación se reemplaza por dos y así sucesivamente.</i>
9. Ernesto	<i>La generación cambia.</i>
10. José	<i>La generación, pero el 27 queda constante.</i>
11. Investigador	<i>Será que ¿puede intentar llevarla a la función?</i>
12. Bernardo	<i>El número de hembras sería igual al número de hembras con el que se empieza que se va a simbolizar por una x por 27 que es la cantidad de hembras que produce cada una, de esta simple forma se llega al número de hembras que se necesita saber, para saber cuántas hembras se producen en esta generación. Entonces, se sabe que las 27 son las hembras que produce cada hembra al salir de los huevos y la x es la cantidad de hembras que se tienen en esa generación para poderse hacer la multiplicación y saber cuántas hembras vendrán en la siguiente generación.</i>
13. Bernardo	<i>O sea que se pondría 27 elevado a la equis, entonces sería $f_{(x)} = 27^x$.</i>
14. Antonio	<i>Me da haber, pero tuve primero que multiplicar y comprobar 27^x.</i>
15. José	<i>Me da 27^x.</i>
16. Carlos	<i>Creo que así da, espere remplazo $f(x) = 27^x$.</i>
17. Ernesto	<i>A la final me da $F(x) = 27^x$ con $0 \leq x < 8$.</i>

Después que realizamos la pregunta *¿Cuál es la cantidad de brocas hembras que nacen durante un año, si se inicia con una sola broca hembra?* Observamos que encontraron el número de brocas para la primera y segunda generación, con cierto análisis, para la tercera ya empieza a verse el proceso de forma “mecanizada” o repetitiva, por lo que optamos por realizarles la pregunta *¿Qué relación ve entre la generación uno, la dos, la tres. . .?* donde percibimos un cambio de un proceso aritmético para encontrar el número de brocas en cada generación, a una primera idea de dependencia entre las variables que se representaban en ocasiones de forma numérica (generación y numero de brocas), evidencia de ello lo encontramos en las respuestas de Bernardo en la línea 2., *“Que el aumento tiene que ver en proporción con la cantidad de hembras que producen los huevos.... se puede llegar a la fórmula matemática...”*, en esta respuesta vemos que Bernardo nos está hablando en términos matemáticos “proporcionalidad” el cual no indagamos en el momento.

Así mismo vemos que Ernesto en la línea 3., nos habla de *“A medida que cambia el número de la generación el valor se aumenta”* ya identificó lo que cambia, aunque no tal como lo esperábamos, con el nombre matemático “variable”. Y Carlos en la Línea 5., nos esboza *“A medida que cambia el número de la generación el valor se aumenta”*, es decir, tímidamente se nota unas relaciones entre magnitudes como camino a la determinación de una posible función.

Luego, con el fin de que identificaran la variable como tal y se dieran cuenta de la función, realizamos la pregunta *¿qué es lo que cambia?*, Bernardo en la línea 8., nos habla de la variable y de los valores concretos que toma la variable, es decir, ya se refiere una relación funcional que cobra significado a la luz del análisis de la situación de la broca.

En general, en el episodio los estudiantes tomaron el proceso anterior donde calcularon el número de brocas hembras por medio de la multiplicación y comenzaron a determinar de qué dependía el aumento del número de brocas, llegando a concluir que lo que varía es el número de generaciones al remplazar la variable (x) por diferentes valores, obteniendo de esta manera una expresión que permitió determinar su reproducción en cada generación.

Por otro lado, observamos que los estudiantes tuvieron diferentes formas de aproximarse a la función, unos se fijaban en la dirección de cambio (aumentando una variable cuando la otra aumente), otros se fijaron directamente en las relaciones aritméticas y establecieron un modelo de tipo exponencial expresado algebraicamente, esto nos muestra según Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, y Hsu (2003), diferentes formas de razonamiento covariacional que emerge de este tipo de experiencia.

En la Ilustración 16, se evidencia el modelo construido por cada uno de los estudiantes, los cuales llegaron a la misma expresión. Esto se debe a que los estudiantes trabajaron inicialmente la potenciación, notando que la variación se da en el exponente, por lo que es cambiado por la expresión número de generación, tal como se ve en el modelo A. La construcción de los modelos por los cinco estudiantes sobre la reproducción de la broca hembra nos permitió indagar por el reconocimiento del tema relacionado con la expresión, que según los estudiantes se trató de una función.

El trabajo realizado por los estudiantes nos permitió mostrar un proceso de matematización que según Aravena y Caamaño (2007) es describir en términos matemáticos una situación real, proceso que contiene “(...) la descripción de relaciones matemáticas que interpretan el proceso y formulación del modelo matemático que se aproxima a la situación planteada” (p.11), siendo uno de los aspectos claves en la modelización.

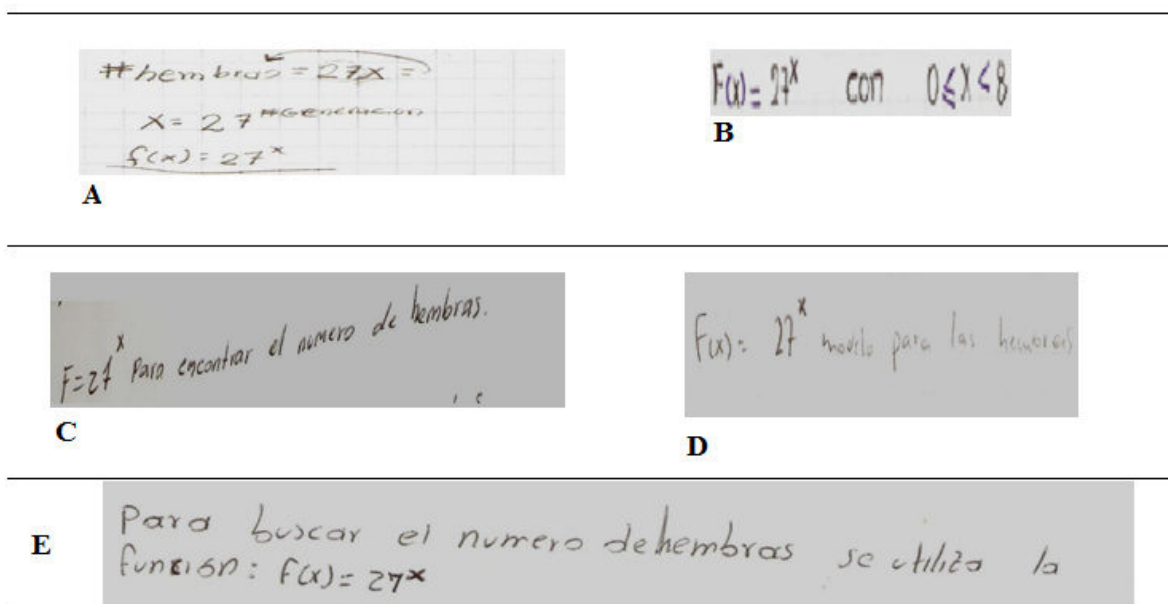


Ilustración 16. Modelo sobre la reproducción de la broca hembra construido por los estudiantes: A. Bernardo, B. Ernesto, C. Antonio, D. Carlos, y E. José.

Conforme mencionamos en Sánchez et al. (2013), la participación de los estudiantes en el estudio de las situaciones de modelación en el aula, ya sea de su interés por la cercanía que tienen con su contexto cercano o de una motivación inicial para la actividad matemática, posibilita comprender mejor los contextos en los que se desenvuelven, reconociendo la modelación como un proceso que permite relacionar los conocimientos matemáticos enseñados en clase con el contexto extraescolar.

Los modelos en la Ilustración 16, fueron contruidos a partir del reconocimiento de un patrón y de su respectiva generalización para todo el proceso de reproducción de la broca hembra en cada generación. La escritura algebraica se derivó de las experiencias previas que tenían los estudiantes con respecto al uso del lenguaje algebraico para representar variables que se relacionan. Los estudiantes si bien reconocen que su modelo es una función, no logran enmarcarlo como una función exponencial natural debido a que los temas que habían estudiado

hasta ese momento solo habían correspondido a la definición de función, más aún no habían visto la clasificación de funciones.

La situación donde los estudiantes utilizan algunas ideas previas aprendidas en clase y luego las emplean de forma similar para resolver otras situaciones que demandan procesos semejantes se observaron en la Ilustración 17, donde utilizaron los modelos ya construidos de la reproducción de la broca para comenzar un nuevo proceso de matematización, empleando procesos aritméticos análogos a los utilizados anteriormente para construir un nuevo modelo, que representó de forma simplificada la reproducción de la broca macho con base al fragmento del artículo de Bustillo (2006).

El proceso que siguen los estudiantes para construir este nuevo modelo nos permitió observar hasta qué punto utilizan procesos análogos en relación con el modelo construido de la reproducción de la broca hembra.

El empleo de procesos análogos está en relación con Blank (2001) el cual menciona que dos modelos serán semejantes siendo necesario que se comparta con el original no solo un conjunto de rasgos o una proporcionalidad directa de magnitudes sino, más exactamente, la misma estructura y patrón de relaciones, las cuales podemos observar en la ilustración 17 (progresión geométrica y función exponencial).

Presentamos a continuación una transcripción de uno de los procesos realizados por el estudiante Ernesto en la construcción del nuevo modelo para la reproducción de la broca macho.

Teniendo en cuenta que son 30 huevos serían 3 machos y 27 hembras, entonces en la primera generación sería 0 machos, ya que el ciclo lo inicia una broca hembra. En la segunda generación ya serían 3 machos, porque de esta hembra nacen 3 machos. En la tercera generación ya se complica un poquito, porque entonces ya sería, vea, de la generación anterior nacen 27 hembras y cada una tiene 3 machos, o sea que sería 27 por tres, es decir que en la tercera generación serían 81 machos. En la cuarta generación ya sería 19683 hembras o sea 27 a la tres, entonces serían y cada una de esas 19 mil hembras tiene 3 machos, sería un total de 59 mil ¿y esto por qué se duplica tanto?

En el episodio se muestra como Ernesto realiza un proceso similar al utilizado en la construcción del modelo reproducción de la broca hembra basado en multiplicaciones, seguido de la potenciación ahora implementada por él y José como una variación de un proceso aritmético antes utilizado, situación que se observa en la Ilustración 17.

A	30 brocas 3 machos 27 hembras <table> <tr><th colspan="2">generación</th><th></th></tr> <tr><td>0</td><td></td><td>0</td></tr> <tr><td>1era</td><td>"</td><td>3</td></tr> <tr><td>2</td><td>"</td><td>81</td></tr> <tr><td>3</td><td>"</td><td>2187</td></tr> <tr><td>4</td><td>"</td><td>59.049</td></tr> <tr><td>5</td><td>"</td><td>1'594.323</td></tr> <tr><td>6</td><td>"</td><td>43.046.721</td></tr> <tr><td>7</td><td>"</td><td>1'162.261.467</td></tr> </table>	generación			0		0	1era	"	3	2	"	81	3	"	2187	4	"	59.049	5	"	1'594.323	6	"	43.046.721	7	"	1'162.261.467	B
generación																													
0		0																											
1era	"	3																											
2	"	81																											
3	"	2187																											
4	"	59.049																											
5	"	1'594.323																											
6	"	43.046.721																											
7	"	1'162.261.467																											
	9) 27⁰ 1) 27¹ + 3¹ 2) 27² + 3⁴ 3) 27³ + 3⁷ 4) 27⁴ + 3¹⁰ 5) 27⁵ + 3¹³ 6) 27⁶ + 3¹⁶ 7) 27⁷ + 3¹⁹ 8) 27⁸ + 3²²																												

Ilustración 17. A. Potenciación realizada por Ernesto., B. Potenciación realizada por José.

La actividad realizada por los estudiantes donde retomaron procesos similares a los ya utilizados y los relacionaron con otra situación como la reproducción de la broca macho, nos permitió determinar que los estudiantes utilizaron un “razonamiento similar, por medio del cual se genera una construcción de similitudes entre el nuevo y lo ya conocido.

Los procesos análogos para la construcción de modelos solo se pudo dar como se observó en los procesos aritméticos llevados a cabo, además, identificaron en cada modelo algo en común, como lo es una base constante y ésta elevada a un exponente, que si bien contenía cada generación no era igual por las características que determinan el ciclo biológico de la broca hembra en relación con la broca macho ilustradas en el fragmento del artículo de Bustillo (2006).

Observamos también que la actividad de construcción del modelo llevado a cabo por los estudiantes no fue memorístico, porque se evidenció a través del proceso realizado, razonamientos donde se relacionó la información nueva con conocimientos ya existentes y que fueron relevantes para dar respuesta a la situación de estudio (González, 2002).

La construcción del nuevo modelo requirió como lo menciona Biembengut y Hein (1997) en la etapa *construcción matemática* del proceso de modelación, la intuición y creatividad de los cinco estudiantes para la traducción de la situación particular a una representación simbólica que permitiera recrear la reproducción de la broca macho en cada generación, donde cada estudiante hizo el proceso por separado.

En el siguiente episodio mostramos momentos relevantes de dicho proceso:

1. Investigador	<i>Hasta el momento han realizado un proceso similar al utilizado en el modelo anterior, si fueran a construir un modelo para la reproducción de la broca macho ¿Qué tendría en común con el anterior modelo?</i>
2. Bernardo	<i>Ya no sería veinte siete sino tres.</i>
3. José	<i>En este caso sería tres en vez de veinte siete el número que se eleva.</i>
4. Carlos	<i>Cambio el 27 por el tres elevado a la x.</i>
5. Antonio	<i>Sería tres elevado a la x.</i>
6. Ernesto	<i>No, sería 3 elevado a la x, no concuerda con lo que hice hace un momento.</i>

7. Investigador	<i>¿Cómo harían para llegar a la expresión que les permita determinar el número de brocas macho en cada generación?</i>
8. Antonio	<i>Yo comenzaría a cambiar números en el exponente y remplazar por otros.</i>
9. Investigador	<i>Cada uno de forma separada, traten de hallar la expresión.</i>
10. Antonio	<i>Listo, esta como complicado.</i>
11. Ernesto	<i>Seria 3^{2x-1}, ha pero no me da para ninguna generación.</i>
12. Bernardo	<i>El exponente debe ser sumando [por aumenta] a la "x", 3^{x+3}.</i>
13. José	<i>Creo que estoy cerca seria 3^{3x-3} ...ah no es así.</i>
14. Ernesto	<i>Listo la expresión es $F(x) = 3^{(3x-2)}$, me da los resultados hallados cuando multiplique.</i>
15. Bernardo	<i>Remplazo y no me da será que es $f(x) = 3^{(x+3)}$, espere yo remplazo.</i>
16. Carlos	<i>Pongámosle un poco de sentido común a ver si lo logro.</i>
17. José	<i>Listo casi que no humm, $f(x) = 3^{3(x)-2}$.</i>
18. Antonio	<i>Casi termino de último $F=3^{3x-2}$.</i>
19. Carlos	<i>Parece que fui el último pero bueno me da $f(x) = 3^{3x-2}$.</i>

En el episodio evidenciamos que la construcción del modelo que permitió determinar el número de brocas macho en cada generación requirió un mayor tiempo que el empleado para los modelos mostrados en la Ilustración 16, sobre la reproducción de la broca hembra, es decir, no fue de forma espontánea como si lo fue la implementación de las operaciones aritméticas para comenzar a calcular los valores en cada generación.

Estos modelos creados e interpretados a partir de la realidad estuvieron en concordancia con las ideas de Pino (2010) que asume al modelo como una forma representacional el cual no

proporciona el medio para interpretar sistemas formales, sino que lo ve más como una herramienta para representar al mundo, es decir, los modelos no representan la realidad, representan un fragmento de ella, o mejor, representan lo que los humanos hacen consciente de la realidad. Igualmente los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) plantean que los modelos matemáticos estructuran y fragmentan la realidad, con el fin de satisfacer los intereses e intenciones de quien los requiere, en este caso vemos como los estudiantes representan en funciones exponenciales la forma como se reproduce la broca.

El proceso de modelación de la broca macho se efectuó a través de la investigación como un proceso que requirió mayor tiempo, evidenciando en los estudiantes la necesidad de conocer previamente las nociones de las temáticas que se pueden abordar en la matematización de las variables que emergen de la situación particular, ya que como lo plantean Biembengut y Hein (2006) “(...) el alumno pasa a ser corresponsable por su aprendizaje y el profesor, un orientador” (p.3), razón por la cual el docente al ser guía debe también tener claro las situaciones del contexto que se manifiestan alrededor y cómo estas pueden ser modeladas, encauzando al estudiante a través de preguntas, guías, documentos escritos, discusiones y reflexiones a la construcción de los modelos.

En la siguiente ilustración mostramos los modelos construidos por los estudiantes para representar la reproducción de la broca macho.

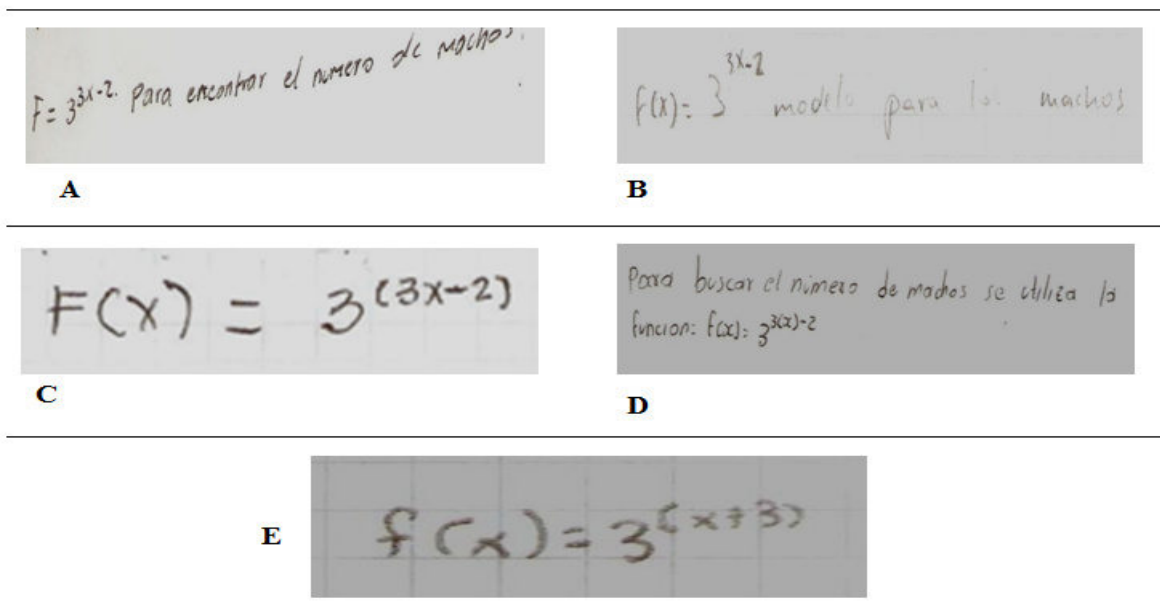


Ilustración 18. Modelo sobre la reproducción de la broca macho construido por los estudiantes: A. Antonio, B. Carlos, C. Ernesto, D. José, y, E. Bernardo.

En la construcción de los modelos evidenciamos el papel protagonista de los estudiantes, quienes de acuerdo con sus necesidades e intereses identificaron en el contexto, fenómenos o situaciones sobre las cuales realizaron el proceso de modelación tal como lo afirma Villa-Ochoa (2012).

Lo mencionado en el párrafo anterior nos permitió determinar que la manera como los estudiantes y el autor del artículo (Bustillo, 2006) asumen la reproducción de la broca tiene sentido desde cada contexto particular, donde las variaciones de clima, nutrientes, reproducción de broca son particulares, sin dejar de reconocer en común el crecimiento exponencial de la plaga.

La idea anterior nos condujo a la búsqueda de una confrontación entre un modelo que surgió de la teoría donde se abordó una situación particular - la broca- desde otros contextos cafeteros con los cuales los estudiantes no interactúan de forma directa, y el modelo que emergió a partir

de las relaciones entre variables de la situación particular - la broca- en el contexto cafetero cercano a los estudiantes.

4.1.2 Validación de modelos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto

La situación experimental la realizamos con el fin de obtener parámetros que nos permitieran verificar los modelos creados desde la teoría, garantizando así al menos una relación en algunas de las pautas utilizadas, para así validar el modelo que posiblemente se genere desde contexto natural.

Esta situación experimental nos sustentó la afirmación de Bassanezi y Biembengut (1997) cuando expresan que “(...) la recogida de datos también puede realizarse por medio de una experimentación directa o de investigaciones estadísticas” (p. 16). En concordancia con lo anterior en el proceso de experimentación realizado por los estudiantes se incluyeron datos recolectados directamente de los cafetales (cantidad de brocas) y otros basados en la literatura (promedio de vida de las brocas en días, la relación de proporcionalidad en cuanto a los sexos y número de días para el ciclo biológico).

Para el acopio de los datos, nos acompañó inicialmente Antonio y José en la recolección de los granos, quienes mediante un diálogo pausado van dando a conocer algunos conocimientos previos, tal como se muestra a continuación:

1. Antonio	<i>Profe, si quiere que encontremos broca, solo recojamos los que hay en el piso.</i>
2. Investigador	<i>Pero, también hay que llevar los brocados que hay en los árboles.</i>
3. José	<i>En esos granos encuentra solo la hembra que está perforando.</i>
4. Investigador	<i>De todas formas llevemos de los dos lados [del árbol y del piso]</i>

En el diálogo anterior visualizamos que fuera de los conocimientos sobre reproducción de la broca, poseen una intuición del lugar donde reside la plaga que no fue tomada en cuenta por la literatura, es así como Antonio dio una recomendación “acerca de una mayor reproducción” (...) *“si quiere que encontremos broca, solo recojamos los que hay en el piso”*, es decir, *“la broca se reproduce más en el suelo que en los árboles”*. De lo anterior surgen preguntas como ¿por qué se fumiga el árbol en vez de fumigar el piso?, ¿qué hace que la broca permanezca más tiempo en el grano cuando se encuentra en el piso?, ¿a qué se debe que la broca aumente la reproducción cuando el grano está en el piso?

En el episodio anterior observamos, como los estudiantes poseen unos conocimientos que se sustentan desde la experiencia y desde sus familias, y que además influyen sus actuaciones en una situación determinada. En términos de la dimensión conceptual, que según D'Ambrosio (2001) hace referencia a que los grupos sociales influyen en el comportamiento de los individuos creando una serie de modelos para interpretar la realidad. Es así como los estudiantes tienen conocimientos compartidos por los miembros de la comunidad, en este caso, la broca aumenta su reproducción cuando se encuentra en granos que se encuentran sobre el suelo.

Los estudiantes Ernesto y Bernardo son los encargados de buscar la broca dentro del grano (en este caso no estuvieron con los dos que asistieron a la recolección de los granos), es de aclarar que no estuvieron presentes en el diálogo anterior. Sin embargo, estas son sus apreciaciones acerca de la búsqueda:

1. Ernesto	<i>En unos granos se encuentran muy pocas brocas debido a que no son de Caturro, que es la variedad [de café] que más broca le da, además también depende de que tan viejo esté el cafetal.</i>
2. Investigador	<i>Estos granos son de dos terrenos, pero ambos son de variedad Catimore.</i>

3. Bernardo	<i>(...) pero, también depende si hay granos del piso o del árbol, porque a los del piso, no les cabe más una broca, en especial cuando son granos secos.</i>
--------------------	---

Este episodio nos mostró que para ellos continúa siendo fundamental lo aprendido en el campo y que adquieren relevancia a diario por ser asimilados en el contexto cercano, en palabras de Bassanezi y Biembengut (1997) “(...) los datos provenientes de costumbres de una comunidad que los utiliza sin preocuparse del carácter científico de su origen” (p.16), en este caso vemos como Bernardo sin haber estado en el diálogo con Antonio coincide en sus apreciaciones (*también depende si hay granos del piso o del árbol, porque a los del piso, no les cabe más una broca*).



Ilustración 19. Fotografías de los estudiantes Bernardo y Ernesto en el proceso de experimentación.

Una segunda recolección de granos brocados se realizó mes y medio más tarde donde igualmente nos acompañaron los estudiantes Antonio y José, quienes además serían los encargados de buscar las brocas internas en el grano. En esta ocasión los estudiantes adujeron:

1. José	<i>Demás que en esta ocasión no se va a encontrar tanta broca como en los granos que llevó la vez pasada.</i>
2. Investigador	<i>¿Por qué?</i>
3. Antonio	<i>Porque ya por acá se inició con los primeros graneos que son los que más</i>

	<i>brocas tienen.</i>
4. Investigador	<i>Esta vez solo recolectaremos de los árboles.</i>
5. José	<i>Menos que se va a encontrar.</i>
6. Investigador	<i>Busquen los granos más maduros que haya.</i>

Nuevamente observamos cómo los conocimientos previos de José y Antonio se ponen en juego, aspecto que se relaciona con los conocimientos previos que surgieron desde la experiencia de los estudiantes. En este sentido D'Ambrosio (2002) afirma que “(...) al centrarse en la dignidad individual, reconociendo el conocimiento previo de la persona y de su cultura, podemos preparar el terreno más fértil para la creación de nuevo conocimiento” (p. 9). Es decir, si respetamos los conocimientos culturales que tienen instaurados los estudiantes y les damos la oportunidad de confrontarlos con la realidad habrá un nuevo mundo de oportunidades para replantear o reafirmar sus saberes como conocimientos.

Esta nueva recolección de granos se dio a los quince días de haber recogido los primeros graneos ¹⁰(recolección de la mayor parte de granos infestados), con el fin de confrontar la teoría expuesta en el artículo de (Bustillo,2006), donde según el ciclo de vida de la broca, a los 15 días la nueva generación de brocas debe estar en estado de larvas, razón que los participantes no tuvieron en cuenta al afirmar “(...) *en esta ocasión no se va a encontrar tanta broca como en los granos que llevó la vez pasada*”. Al final la diferencia con los granos anteriores fue mínima, para sorpresa de los estudiantes. En lo anterior se pudo observar que los estudiantes están en la etapa de comprensión de la situación.

¹⁰ Graneos: es la recolección de granos que se da antes o después de la cosecha. En este caso se refiere a los granos que maduran, al inicio de la cosecha.



Ilustración 20. Fotografía de los estudiantes Antonio y José en el proceso de experimentación.

La cantidad de brocas extraídas por los estudiantes, quienes examinaron 20 granos de café de dos lotes diferentes, son:

Lote 1 (brocas y larvas)	Lote 2 (brocas y larvas)
17.....primera recolección	17.....primera recolección
63.....primera recolección	15.....primera recolección
25.....primera recolección	12.....primera recolección
16.....primera recolección	22.....primera recolección
16.....segunda recolección	21.....segunda recolección
22.....segunda recolección	23.....segunda recolección
22.....segunda recolección	20.....segunda recolección
21.....segunda recolección	22.....segunda recolección
18.....segunda recolección	23.....segunda recolección
23.....segunda recolección	21.....segunda recolección
Total: 243	Total:196

Tabla 6. Número de brocas y larvas en el lote 1 y 2.

Con el ánimo de simplificar y estructurar la situación, los estudiantes observaron que la cantidad de brocas para los dos cultivos era semejante, la diferencia más marcada en el proceso de extracción fue el grano que tenía 63 brocas (según Bernardo lo más seguro es que ese grano

fue recogido del piso), lo que les permitió obtener un promedio de 22 brocas y trabajar con este número como si se tratara de un solo cultivo.

De la tabla 8, los estudiantes aducen que el promedio de brocas en la zona (de 22 brocas) es inferior al promedio encontrado por los investigadores de CENICAFÉ, el cual es de 25 a 30, esto se debe a las diferencias climáticas o a los controles efectuados por parte de los campesinos.

Para determinar el número de machos y hembras de cada uno de los granos recolectados sometieron la muestra a la observación con el microscopio, permitiéndoles identificar posibles características que diferenciaron a hembras y machos, siendo los últimos más pequeños y con alas membranosas cortas, tal como lo afirma Franqui y Medina S. (2003).

Durante la actividad, teniendo en cuenta el tamaño de la broca, se logró reconocer en algunos granos: dos machos, un macho y en otros ninguno (debido a que todos se encontraban en el estado de larva).

La búsqueda de las brocas machos la realizamos con el fin de obtener la mayor parte de información desde el propio territorio, evitando al máximo tener que sacar datos desde la literatura, situación que no fue posible, puesto que en todos los granos no se encontraron los machos. Como evidencias están las fotografías tomadas por los estudiantes, las cuales se pueden observar en la ilustración 21.



Ilustración 21. Fotografías de las brocas machos identificadas por los participantes. Agosto-Septiembre, 2013.

Para la matematización los estudiantes realizaron el mismo proceso de la modelación bajo la literatura, el cual consistió en buscar la cantidad de brocas hembras que eclosionan en un año a partir de una hembra, es decir, la actividad anterior en la que obtuvieron modelos de las brocas hembras y machos les sirvió de analogía para este nuevo modelo, en palabras de Bassanezi y Biembengut (1997) “(...) el profesor debe presentar otros problemas que estén en correlación o no con el tema en cuestión” (p. 16).

A continuación se muestran los resultados obtenidos en la construcción del nuevo modelo a partir de las condiciones iniciales: un promedio de 22 brocas por grano (dato encontrado como promedio en la experimentación), con una relación de género de diez brocas hembras por cada broca macho y 45 días entre una generación y la siguiente, tal como lo afirma el fragmento del artículo de Bustillo (2006).

Promedio de 22 brocas			
2 machos		20 hembras	
Generaciones para las hembras			
Generación	cero	20^0	1
Generación	uno	20^1	20
Generación	dos	20^2	400
Generación	tres	20^3	8000
Generación	cuatro	20^4	160.000
Generación	cinco	20^5	3'200.000
Generación	seis	20^6	64'000.000
Generación	siete	20^7	1'280.000.000
Generación	ocho	20^8	$2,56 \times 10^{10}$

Ilustración 22. Matematización de la reproducción de las brocas hembras. Realizada por Ernesto

Al igual que en el modelo desde la literatura se pudo observar la progresión geométrica: 1, 20, 400, 8000,..., con razón igual a 20, empleada por todos los participantes por medio de la multiplicación y la analogía con respecto al primer modelo, lo cual es válido según Bassanezi y Biembengut (1997) donde muestra la importancia y el poder de las matemáticas como lenguaje común que los identifica y hace que el nuevo modelo sea muy sencillo para ellos.

Posteriormente, la progresión geométrica fue llevada a la función exponencial mediante procesos similares a los efectuados con los modelos hallados mediante el fragmento del artículo de Bustillo (2006) , que les permitió llegar de forma experimental al modelo de las hembras que eclosionan durante un año, a partir de una broca hembra.

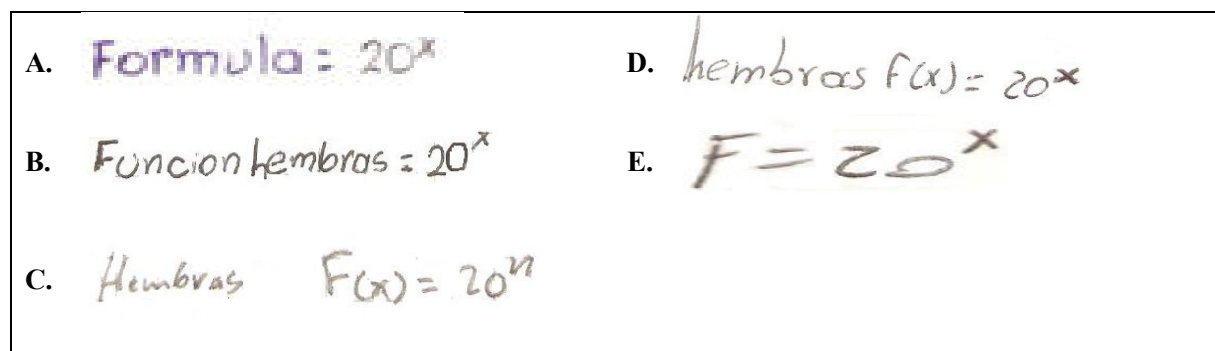


Ilustración 23. Modelo sobre la reproducción de la broca hembra construido desde la experimentación por los estudiantes: A. Ernesto, B. Bernardo, C. Carlos, D. José y E. Antonio

Desde los modelos realizados por los estudiantes se demostró lo contrario a lo expresado por Bassanezi y Biembengut (1997), que mencionan, si se recurre a los datos estadísticos o si se recolectan directamente, lo más probable es que hayan similitudes con el modelo, caso contrario a lo observado en la investigación que realizamos, ya que no se encontraron similitudes, sino que los estudiantes las supusieron en relación con los procesos realizados en los primeros modelos, lo cual les permitió la construcción de los modelos de forma experimental.

En cuanto al modelo de las hembras, los estudiantes encontraron características generales dentro de los dos modelos hallados a través de la teoría y de forma experimental en el contexto cafetero cercano, que les permitió llegar a la generalización del modelo para hallar el número de brocas hembras en las diferentes generaciones. En el momento que le solicitamos a los estudiantes llevar las funciones $f(x) = 27^x$ y $f(x) = 20^x$ a una función general, observaron que al comparar ambas funciones la base solo cambiaba al modelar la reproducción de la broca en diferentes contextos cafeteros, pero que su comportamiento dentro la función era constante, lo cual les permitió generalizarla con la letra “a” y “x” que representó el número de generaciones que calcularon, por lo tanto la función exponencial generalizada fue $f_{(x)} = a^x$ con $a > 1$ y $0 \leq x < 8$

En la siguiente Ilustración 24 mostramos evidencias de la generalización realizada por el estudiante Ernesto.

Esta fórmula se puede generalizar llevando toda la expresión a términos algebraicos.

$$F(x) = a^x \text{ con } a > 1 \text{ y con } 0 \leq x < 8$$

Donde a representa el promedio de brocas hembras en la zona y x es el número de la generación.

Ilustración 24. Generalización del modelo de la reproducción de la broca hembra realizado por Ernesto.

Posteriormente, elaboraron el modelo de eclosión para los machos, el cual resultó más significativo debido al reto ante el que se veían expuestos, es decir, que la analogía aplicada al modelo anterior no se veía tan correlacionada; a continuación se muestra evidencia del proceso realizado en la matematización:

Generaciones para los machos	
Generación uno	2
Generación dos	40
Generación tres	800
Generación cuatro	16.000
Generación cinco	320.000
Generación seis	6'400.000
Generación siete	128'000.000
Generación ocho	2'560.000.000

Ilustración 25. Matematización de la reproducción de las brocas machos. Realizada por Ernesto

El proceso de matematización de la cantidad de brocas macho, no marcó inicialmente un inconveniente, debido a que ya habían elaborado un modelo desde la literatura y se pudo evidenciar a través de este nuevo proceso que les sirvió para sacar la progresión geométrica 2,

40, 800,..., la dificultad se dio en el momento de realizar el modelo de nacimiento de las brocas macho en un año a partir de una broca.

Inicialmente, los estudiantes recurrieron a las analogías, las cuales contribuyeron al cambio en la metodología tanto de enseñanza como de aprendizaje, puesto que establecieron relaciones de semejanza enriqueciendo la comprensión de los temas, aunque en este día pese a la utilización de ellas no encontraron los modelos, que según Cisterna (2010), las analogías pueden ayudar a hacer comprensibles los nuevos contenidos que se abordan comparándolos con contenidos que son familiares para los alumnos, pero, no desaparece la complejidad del modelo, razón por la cual se deben citar otro día para buscar nuevamente el modelo.

Al día siguiente, Ernesto, Bernardo, Carlos, José y Antonio, llegaron a unos posibles modelos. Según el MEN (Colombia, 1998) el modelo se produce al operar transformaciones o procedimientos experimentales sobre unas situaciones en particular, lo que indica que el modelo no siempre va a dar válido.

En la ilustración 26 mostramos los modelos de la reproducción de las brocas machos de forma experimental, determinados por los estudiantes.

A. Formula: $20^{(x-1)} \times 2$
 $F(x) = 2 \times 20^{(x-1)}$ con $x \geq 1$

B. Funcion machos = $\frac{\# \text{hembras}}{10} \Rightarrow \frac{20^x}{10} \rightarrow f(x) = \frac{20^x}{10}$ con $x \geq 1$

C. Machos = $2(H)$

D. machos = $2H$

E. machos = $2h$

Ilustración 26. Modelo sobre la reproducción de la broca macho construido desde la experimentación por los estudiantes: A. Ernesto, B. Bernardo, C. Carlos, D. José y E. Antonio.

Según los modelos planteados por los estudiantes, percibimos que el estudiante Ernesto tiene habilidades en la potenciación, lo que le permite trabajar procesos exponenciales con mayor rapidez; el estudiante Bernardo nos muestra en este modelo que depende mucho de los modelos análogos, en este caso el de la hembra, aunque finalmente da un modelo que es igual de válido al de Ernesto. Carlos, José y Antonio, por el contrario, intentaron mediante las analogías y no lograron llegar a un modelo que representara en forma simplificada la reproducción de la broca macho de manera experimental.

Esta construcción de modelos la hicieron inicialmente de forma individual, para ser socializado. Luego se les pidió que seleccionaran uno de los modelos para la reproducción de los machos, tres estudiantes eligieron el de Ernesto, utilizando las siguientes posturas:

1. Carlos	<i>Me quedo con el modelo de Ernesto porque éste se asemeja más al encontrado anteriormente con la literatura, se parece más a la función anterior, y el modelo mío no da.</i>
2. José	<i>El de Ernesto está como más bacano¹¹.</i>
3. Antonio	<i>Yo también estoy con el de Ernesto que es el exponencial.</i>

Bernardo y Ernesto también estuvieron de acuerdo acomodándose a lo expuesto por Carlos, José y Antonio.

Al intentar llegar a una relación más estrecha entre los dos modelos (con base a la literatura y de forma experimental), se encontraron con dos funciones muy diferentes, que hacían referencia a un crecimiento exponencial, pero a diferencia de lo que pasó con los modelos de las brocas hembras, no encontraron una relación que les permitiera generalizarlo en una sola función exponencial.

Concluimos que las analogías realizadas por los estudiantes en el proceso de matematización de los modelos con base al fragmento del artículo de Bustillo (2006) tuvieron influencia dentro del proceso de modelación experimental.

Teniendo en cuenta que habíamos alcanzado el objetivo de la modelación mediante la experimentación, en el contexto cafetero cercano a los estudiantes, decidimos continuar con la validación de los modelos encontrados ante los expertos en el tema.

4.2. Validación de los modelos construidos por un especialista

Se realizó la visita al Comité de Cafeteros del municipio de Andes, donde se encuentran los extensionistas o prácticos cafeteros, con los cuales esperábamos obtener la información necesaria

¹¹ Es una manera de expresar algo magnífico o fabuloso.

para validar los modelos encontrados desde la literatura. A continuación mostramos los apartes de la entrevista realizada a uno de los funcionarios:

1. Ernesto	<i>¿Qué información dan a los campesinos acerca de la broca?</i> <i>Al campesino se le da a conocer la información necesaria en el manejo integrado de la broca, es decir, se explica el control cultural, control biológico y el control químico.</i> <i>Para el control químico se le recomienda al agricultor realizar una evaluación para obtener el porcentaje de infestación.</i>
2. Extensionista	$\% \text{ de infestación} = \frac{\text{cantidad de frutos brocados} \times 100}{\text{total de granos}}$ <i>La carga de café pergamino a la hora de la venta debe contener máximo un 2% de broca, es decir, si una finca posee en sus cafetales un 5% de broca, en el momento de la venta lo más probable es que su porcentaje de infestación será del 2% a 2,5%, debido a que normalmente la broca afecta solo una de las dos almendras del grano.</i>
3. Ernesto	<i>¿Qué información suministran a los campesinos sobre la reproducción de la broca?</i>
4. Extensionista	<i>Se les habla sobre la relación de sexos 10:1 a favor de las hembras; las hembras vuelan de grano en grano, los machos permanecen en el grano hasta su muerte, en verano se reproducen más rápido, puesto que la broca es muy susceptible a la humedad.</i>
5. Ernesto	<i>¿Tienen información sobre cuántos huevos deposita una broca en un grano?</i>
6. Extensionista	<i>La cantidad de huevos depende de la temperatura, a mayor temperatura, mayor cantidad de brocas, según la última revista de CENICAFE, Bustillo escribe que cada hembra pone por día de 2 a 3 huevos por 20 días continuos. La broca no depende de la variedad de café, solo depende de la temperatura. Lo que sí puedo afirmar, es que he visto hasta 30 brocas adultas en un grano.</i>

En la pregunta ¿qué información dan a los campesinos acerca de la broca? De la línea1., esperábamos obtener información sobre la reproducción, el control y afectaciones económicas. Es así, como el extensionista inicia con el control de la broca, donde confirma que esa es la información que se le da al campesino, las indicaciones sobre reproducción y afectaciones económicas son someras.

Debido a la poca información aportada sobre la reproducción de la broca, se le realiza una segunda pregunta línea 3., ¿Qué información suministran a los campesinos sobre la reproducción de la broca?, el interrogante tiene como objetivo confrontar la información aportada por el fragmento del escrito de Bustillo (2006) con el aportado por el extensionista, donde se esperaba que esta información estuviese más relacionada con la experiencia de la región, igual que en la anterior respuesta la información es mínima.

A la pregunta de la línea 5., sobre la cantidad de huevos que deposita la broca en el grano de café nos dio información sobre las actualizaciones realizadas por Bustillo, pero, al final nos aclara que *“la broca no depende de la variedad de café, solo depende de la temperatura”*, es decir, Ernesto debió revisar sus conocimientos previos, puesto que en un diálogo anterior aseguró que la broca dependía de la variedad de café, además nos dio a conocer que para la región no es tan irracional el número de brocas encontrado en el primer modelo, cuando afirmar que *“he visto hasta 30 brocas adultas en un grano”*.

Por lo tanto, en el anterior episodio evidenciamos que al igual que el primer modelo, la información que los extensionistas poseen sobre la broca es la de los investigadores de CENICAFÉ, razón por la cual los estudiantes se ven en el mismo punto en que iniciaron y concluyen que según lo dicho por el extensionista no es posible validar el modelo elaborado por ellos.

En la entrevista, observamos que los extensionistas manipulan la ecuación para el control de la broca $\% \text{ de infestación} = \frac{\text{cantidad de frutos brocados} \times 100}{\text{total de granos}}$, ecuación netamente estadística a diferencia de nuestro estudio que estuvo relacionado con los modelos algebraicos, los cuales son deterministas y para lo cual nos surgió el siguiente interrogante:

1. Investigador	<i>¿Por qué crees que los extensionistas solo se interesan en conocer el porcentaje de infestación de la finca en general y no la cantidad de brocas que hay en el cultivo?</i>
2. Ernesto	<i>Porque estas personas se interesan por datos generales y no específicos, además para determinar una cantidad exacta de insectos se necesita un proceso y los extensionistas no serían capaces de realizarlo por cuestiones de tiempo y de preparación.</i>
3. Bernardo	<i>Porque es más fácil para ellos un estudio a nivel general del cultivo y no un estudio a nivel individual de cada grano para conocer el número o cantidad de brocas exactas en el cultivo, pues esto ocupa más trabajo y tiempo[sic].</i>
4. Carlos	<i>Al extensionista le interesa más el porcentaje de infestación para promediarlo con el total del cultivo y así poder ayudar a determinar la producción positiva del cultivo. En pocas palabras, lo que busca con el porcentaje de infestación es mirar alternativas que se puedan llevar a cabo en el cultivo para disminuir dicho porcentaje y evaluar la producción que va a tener el cultivo en cosecha y con este porcentaje también determinar la velocidad con la que se propaga la plaga sobre el cultivo.</i>
5. José	<i>Para eso la gente no los llaman, pues en la finca se fumiga cuando toda la vereda fumiga, a ellos los agricultores los buscan cuando tienen que hacer un préstamo.</i>
6. Antonio	<i>Eso es así como dice José, es que hay muchos campesinos que no creen en ellos, y hablando sobre la pregunta, es que para ellos, eso es más fácil.</i>

No es de ocultar que tanto el álgebra como la estadística han jugado papeles primordiales en el desarrollo de la sociedad. La estadística en especial ha proporcionado herramientas para estudios de investigaciones y para la toma de decisiones en momentos de confusión, dando resultados bastante confiables. Razón por la cual para los extensionistas son suficientes los estudios estadísticos, tal como lo afirma Bernardo “(...) porque es más fácil para ellos un estudio a nivel general del cultivo y no un estudio a nivel individual de cada grano para conocer el número o cantidad de brocas exactas en el cultivo”.

Los extensionistas realizan un estudio a nivel general debido a que su trabajo necesita de agilidad y rapidez, esto porque intervienen muchas fincas, las cuales deben ser atendidas con prontitud.

Otra de las razones por las cuales se puede dar solo el uso de la estadística por parte de los extensionistas es que el porcentaje de infestación se saca con datos reales sin suposiciones (en una parcela de 60 árboles de ancho por 60 árboles de largo, se le cogen todos los granos a un surco al azar y luego se escogen los granos brocados), en cambio en los cálculos efectuados mediante el álgebra se deben realizar algunas suposiciones (promedio de brocas, número de brocas machos,..)

Igualmente, se puede llegar a la cantidad de brocas que existen en un determinado terreno teniendo a mano el porcentaje de infestación, ya que este porcentaje es obtenido del número de granos infectados, en los cuales se puede determinar la cantidad de brocas, por lo que se puede asegurar en palabras de Carlos *“Al extensionista le interesa más el porcentaje de infestación para promediarlo con el total del cultivo y así poder ayudar a determinar la producción positiva del cultivo”*

Luego retornamos al tema con el fin de mostrarle el modelo al que habíamos llegado para que él nos diera una opinión.

1. Ernesto	<i>¿Conoce alguna fórmula matemática sobre la reproducción de la broca?</i>
2. Extensionista	<i>No conozco ninguna fórmula matemática sobre la reproducción de la broca, porque nuestro trabajo solo tiene que ver con dar la información necesaria sobre el manejo integrado de la broca, la experimentación no hace parte de nuestro trabajo, pues mantenemos mucho trabajo para ponernos a experimentar. Ese trabajo con fórmulas le corresponde a CENICAFE.</i>
3. Ernesto	<i>Teniendo en cuenta los dos modelos que hemos elaborado (se le muestra los dos modelos: desde la literatura y desde la experiencia) ¿qué nos puedes decir?</i>

4. Extensionista	<i>¿Por qué trabajan con 20 sabiendo que una broca pone 3 huevos diarios por 20 días?</i>
5. Ernesto	<i>Nosotros nos torturamos¹² abriendo granitos y encontramos en un grano 63 brocas, en los otros entre 16 y 23, luego hallamos el promedio, y nos dio 22.</i>
6. Extensionista	<i>Muy bien, ya entendí, me parece que está bien, pues el promedio de brocas adultas por grano está entre 20 y 30 en esta zona y yo creo que se puede reproducir así, es que eso aumenta muy rápido. Y ¿por qué elevado a la 0, 1, 2...?</i>
7. Ernesto	<i>Porque cada 45 días hay una camada, entonces los exponentes son las generaciones que pueden salir en un año.</i>
8. Extensionista	<i>En tiempo de verano, y habiendo grano gecho sí, puesto que en temperaturas bajas no se reproduce tan rápido y por lo que veo para el pueblo está bien, eso es más o menos así.</i>

Teniendo en cuenta que en la literatura trabajada hasta ahora nos habíamos encontrado fórmulas que nos permitía confrontar nuestro modelo, se le hace la pregunta si él las conoce, donde nos da a entender que la única fórmula matemática que conoce es la de la infestación de los cultivos, por lo que decidimos mostrarle los modelos sin realizarle más preguntas.

Al final el extensionista aprueba el modelo, línea 8 “*por lo que veo para el pueblo está bien, eso es más o menos así.*”, los estudiantes asumen, que los modelos emergentes son válidos para su contexto cafetero cercano.

Los modelos construidos desde la literatura y la experimentación permitieron modelar cada situación particular de la reproducción de la broca de forma simplificada por los estudiantes. Este hecho fue mediado por un proceso largo de modelación pero que al final nos fue satisfactorio al observar la comprensión que adquirieron los estudiantes de su contexto cafetero y de la situación reproducción de la broca. Según los Lineamientos Curriculares (Colombia, 1998) “(...) si se

¹² Torturar: Someter a esfuerzos de sufrimiento físico (abrir las almendras de café con las uñas)

consigue un modelo satisfactorio, éste se puede utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problemática real u objeto modelado para tomar decisiones y para emprender acciones” (p.77).

Lo interesante del ejercicio fue que los estudiantes reconocieron el conocimiento del extensionista, pero, concluyeron que para la investigación los aportes son mínimos en cuanto a los modelos construidos para la situación particular del contexto cafetero cercano, y a la vez son enriquecedores en cuanto al conocimiento que les aportó. Igualmente la entrevista les sirvió para encontrar respuesta a dos interrogantes planteadas con anterioridad:

1. Ernesto	<i>¿Qué variedad de café es más atacada por la broca?</i>
2. Extensionista	<i>A todas las ataca por igual, solo hay cambios debido a la temperatura y el control cultural.</i>
3. Ernesto	<i>¿Por qué en los granos que se encuentran en el piso la broca es más abundante?</i>
4. Extensionista	<i>No es que se reproduzca más rápido, solo que los granos del piso ayudan a la infestación. En el piso de pronto hay factores que ayuden a la propagación como son la temperatura y la humedad, pero no hay estudios al respecto. Más que todo se debe a que en el piso no hay un control cultural, entonces las condiciones se dan para que se propague sin control, por este motivo se pueden encontrar más brocas que en el árbol que es donde se recoge cada determinado tiempo.</i>

¿La broca se reproduce más rápido en los granos que están en el piso? Entre los campesinos hay un conocimiento aportado por la experiencia que les muestra que los granos que se encuentran en el piso son portadores de gran cantidad de brocas, saber que ha sido transmitido a los estudiantes y que ahora el especialista les ha dado una respuesta (...) *en el piso de pronto hay factores que ayuden a la propagación como son la temperatura y la humedad, pero no hay estudios al respecto (...)*, la cual les da la posibilidad de continuar con sus conocimientos previos sobre la reproducción de la broca hasta tanto no se realice un estudio que demuestre lo contrario.

En cuanto a la segunda pregunta ¿depende la reproducción de la broca de la variedad del grano? La respuesta del extensionista convenció a Ernesto, “*la broca no depende de la variedad de café, solo depende de la temperatura y humedad*” en especial porque en ningún momento dudo de sus conocimientos, seguridad que fue bien tomada por los estudiantes.

En síntesis, los extensionistas utilizan un modelo estadístico de forma general para determinar los porcentajes de infestación de la broca en cualquier finca cafetera, sin importar el clima, la variedad de café y la edad de los árboles, en cambio los modelos construidos en la investigación por los estudiantes no se pueden generalizar sino que modelan de forma simplificada la reproducción de la broca en la situación particular.

5. CONCLUSIONES

Este apartado hace referencia a las conclusiones que surgieron en el desarrollo de la investigación. Las conclusiones se centraron en el alcance del objetivo, el proceso de modelación llevado a cabo en el trabajo de campo, del cual emergieron nuevas etapas a las mencionadas por Biembengut y Hein (2004) y algunos aportes para los docentes con respecto a la modelación como una herramienta para implementar en los procesos de enseñanza y de aprendizaje en el aula, donde buscamos estrategias para que los estudiantes relacionen el contexto extraescolar con la matemática enseñada en la escuela.

5.1. Alcance del objetivo

Esta investigación se propuso como objetivo *describir el proceso de modelación matemático realizado por los estudiantes de la reproducción de la broca en el contexto cafetero*. Para su consecución se plantearon dos temas o categorías: *construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero y validación de los modelos construidos por un especialista*.

La *construcción de modelos matemáticos de la reproducción de la broca en el cultivo cafetero* se dividió en dos momentos, *Proceso de modelación basado en el fragmento del artículo Bustillo (2006) sobre la reproducción de la broca y validación de modelos de la reproducción de la broca mediante la experimentación desde el contexto*.

El proceso de modelación realizado por los estudiantes con base al fragmento del artículo Bustillo (2006) y validación de los modelos mediante la experimentación en el contexto cafetero cercano, comenzó con la visita a la zona rural, donde los estudiantes dialogaron con un

agricultor sobre los procesos de cultivo de café que se llevan en la finca, en el cual reafirmaron y adquirieron nuevos conocimientos.

La salida al campo en la investigación constituyó un factor importante en miras que los estudiantes distinguieran situaciones cercanas a su contexto que fueran factibles de estudiar por la importancia que radican para la economía de la región y sus familias. El interés por alguna de estas situaciones en el caso particular la reproducción de la broca fue uno de los factores que también permitió que los estudiantes estuvieran atentos a los encuentros con los investigadores que conllevó a un proceso de modelación el cual se dio para el primer momento más de forma individual y para el segundo momento (experimentación en el contexto cafetero cercano) de forma grupal.

La delimitación que se realizó en el trabajo de campo, como parte del proceso de modelación, donde los estudiantes reconocieron algunas situaciones relevantes en el contexto cafetero y en particular su interés por la situación (reproducción de la broca), además de la intención de los investigadores por describir el proceso realizado por los estudiantes, utilizando los datos que emergieron a través de los métodos como entrevistas, observaciones y documentos escritos, fueron elementos claves para el alcance del objetivo en la investigación.

Los nuevos conocimientos que adquirieron los estudiantes en la salida al campo, la lectura del fragmento del artículo de Bustillo (2006), además de los elementos sobre la reproducción de la broca aportados por cada uno de los estudiantes como parte de los saberes adquiridos a través de la experiencia en el cultivo e información suministrada por los familiares, formaron un compendio de ideas que les permitió dentro de un proceso de matematización, relacionar sus conocimientos de la reproducción de la broca con procedimientos aritméticos, luego algebraicos

posibilitándose seguir con un proceso de modelación que dio como resultado modelos matemáticos que representan de forma simplificada la situación particular reproducción de la broca con base en la teoría y de forma experimental en el contexto cafetero cercano.

En la validación de los modelos contruidos por un especialista se pudo vivenciar según Polya (1988) dos caras de la matemática. La primera a través de la fórmula que utilizan los extensionistas para calcular el porcentaje de infestación de la broca en cualquier finca cafetera, donde implementan un proceso sistémico que los conduce de una fórmula general a una conclusión particular para cada situación de invasión que investigan en cada cultivo de café y desde los modelos contruidos por los estudiantes que fueron parte de un quehacer matemático y solo se aplicaron para representar la reproducción de la broca en el contexto cafetero cercano bajo unas situaciones ambientales y de infestación particulares, dicho proceso mirado como educativo, porque fue realizado con cinco estudiantes, donde estuvo inmerso un currículo y un aporte a la enseñanza - aprendizaje.

El trabajo de investigación además, estuvo permeado por características desde la perspectiva contextual, socio-crítica y realista, por estar inmerso un contexto real en la investigación que realizamos, además de un proceso en el cual se reflexionó, se discutió y hubo críticas que permitieron robustecer la comprensión de los estudiantes sobre la situación reproducción de la broca.

Igualmente se debe tener en cuenta otras características que no pertenecen a las perspectivas contextual, socio-crítica y realista gracias a que la intencionalidad de la investigación no fue resolver un problema real o buscar la manera del cómo mejorar la economía del contexto

cafetero al comprender la reproducción de la broca si es mirada como una situación que afecta la sociedad.

Si bien los modelos contruidos por los estudiantes no representaron para el extensionista una manera válida de determinar la reproducción de la broca para el cultivo del café en toda la zona, si tuvieron validez para los estudiantes y sus familias, ya que representaron en su construcción de forma simplificada el legado de conocimientos que los estudiantes y sus familias han adquirido sobre dicho fenómeno a través de su experiencia en la producción del cultivo de café, es decir, los modelos no contienen un estudio riguroso de la situación reproducción de la broca y por lo tanto no simbolizaron de forma precisa la situación, alejándose bajo esta idea de la perspectiva realista donde los modelos requieren un estudio profundo del fenómeno para su validez desde la realidad.

En la investigación se observó que los estudiantes en las entrevistas y documentos escritos al referirse a situaciones relacionadas con la reproducción de la broca o el cultivo de café, usaron un lenguaje con algunos términos propios de la caficultura, utilizándolos en ocasiones dentro de la solución a situaciones problema que se presentan dentro de su contexto cafetero.

Evidencia de este hecho en la investigación que realizamos se presenta en la Tabla 7, donde relacionamos algunos términos empleados por los estudiantes en el contexto cafetero cercano con su significado o explicación formal.

Nombre común para los caficultores	Significado formal del término
Caturro	Se dice formalmente Caturra y hace alusión a una variedad de café originario del Brasil, mutación del borbón, de tronco grueso y poco ramificado e inflexible.
Gecho	Hace referencia a la almendra de café ya formada y a punto de madurar para ser recolectada.
Tajo	Se refiere al lugar geométrico donde se encuentran los palos de café el cual puede ser tomado como muestra para determinar el porcentaje de infestación de alguna plaga.

Tabla 7. Algunos significados de palabras coloquiales utilizadas por los estudiantes que participaron en la investigación.

Los términos comunes empleados por los caficultores dentro de sus actividades en el cultivo de café (gecho, tajo, entre otros) hicieron parte de los procesos donde los estudiantes buscaron dar respuesta a las inquietudes que se presentaron en su contexto cafetero sobre la reproducción de la broca y una manera de representar verbalmente el entorno que los rodea.

Para los caficultores resulta ser una forma válida de representar mediante dichos términos cada uno de los elementos que hacen parte de ese contexto cafetero cercano, además de relacionarlos en las prácticas de forma empírica con áreas (tajo) sin tener que utilizar en ocasiones procesos matemáticos formales, sino una medida basada solo en la experiencia e información aportada por amigos y familiares caficultores.

5.2 Etapas que surgen en el proceso de modelación desde la investigación

Además de evidenciarse en la investigación la relación entre la situación particular, la reproducción de la broca, y la matemática (procesos aritméticos, algebraicos) a través de un proceso de modelación que permitió obtener cuatro modelos matemáticos, proceso que podría

ajustarse a las etapas de Biembengut y Hein (2004) descritas en el capítulo dos, aclaramos que dentro del proceso de modelación surgieron otras etapas derivadas las cuales mostramos en la siguiente ilustración.

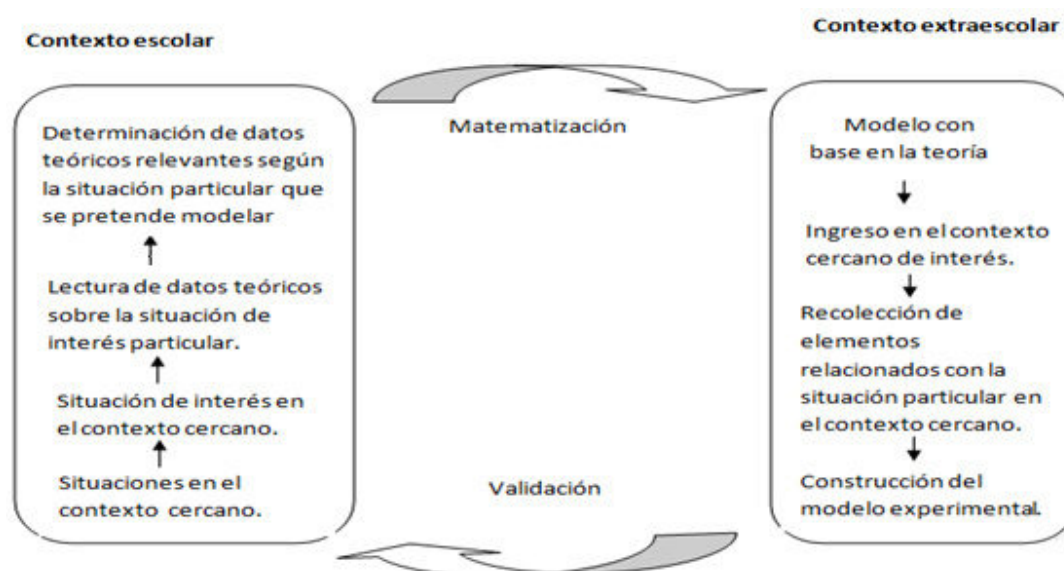


Ilustración 27. Proceso de modelación que surge en la investigación.

En la ilustración 27 donde inicialmente los estudiantes reconocieron unas situaciones en su contexto cafetero cercano de las cuales se inclinaron por estudiar una de ellas, la reproducción de la broca, esta decisión fue gracias a las reflexiones que se dieron en grupo y las implicaciones que ocasionó dicha situación en su economía.

Su interés por la situación particular conllevó a darle solución a un problema, la reproducción de la broca en su contexto cafetero cercano, donde los investigadores mediamos en la determinación de la relación que tenían los estudiantes con dicho fenómeno a través de preguntas las cuales permitieron establecer algunos de los conocimientos que tenían desde su experiencia en las actividades que realizan en el cultivo cafetero.

De acuerdo a los conocimientos suministrados por los estudiantes buscamos un artículo especializado que enmarcara la situación particular, con el fin que al realizar la lectura los estudiantes ampliaran sus conocimientos sobre la reproducción de la broca desde otros contextos cafeteros, para así determinar los datos relevantes que encajaban con el fenómeno, en aras de construir un modelo matemático.

Implementando los datos relevantes del documento teórico, invitamos a los estudiantes a dar respuesta a una pregunta que tenía intención de generar un proceso, donde relacionaron los datos relevantes de la lectura con los conocimientos matemáticos que poseían, en esta ocasión, generándose procesos inicialmente aritméticos, luego algebraicos, llegando a dos expresiones algebraicas que hacen mención a la fórmula general de la función exponencial $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$ (Zill y Wright, 2011), pero que los estudiantes nunca identificaron como tal, sino simplemente como una función al considerar la variabilidad representada en el aumento del número de brocas al cambiar la (x) por cada generación, actividad que hasta ese momento necesitó además del interés de los estudiantes por resolver un problema que afecta directamente su economía, las situaciones que nombramos a continuación:

- Los conocimientos de los investigadores sobre la situación particular desde el contexto cercano y documentos teóricos.
- Los procesos matemáticos que se podrían generar en relación con las preguntas, discusiones y reflexiones a las que se fueron llegando en compañía de los investigadores en el trabajo de campo.
- Las técnicas necesarias (documentos escritos y observaciones) para encaminarse en el proceso de construcción de modelos.

El proceso de validación de los modelos construidos con base a la teoría, necesitó que los investigadores en compañía de los estudiantes nos involucráramos con el contexto cafetero cercano buscando elementos como brocas hembras, machos, hallados a través de conteo experimental en el laboratorio del Colegio, permitiéndonos comenzar un nuevo proceso de matematización donde los estudiantes tuvieron en cuenta los procesos matemáticos utilizados en la construcción de modelos con base a la teoría, iniciando nuevamente su construcción con procesos aritméticos, luego algebraicos, que conllevaron a la construcción de modelos.

Observamos que dichos modelos que representaron la reproducción de la broca, un fenómeno particular biológico, si bien se ajusta a la fórmula general de la función exponencial $f(x) = b^x$ donde $b > 0$ y $b \neq 1$ (Zill y Wright, 2011), varía el valor de la base b debido a las condiciones climáticas y al proceso de control, lo cual hace que la reproducción de la broca aumenta o disminuye en cada contexto cafetero particular, conllevándonos a concluir que no son modelos que aporten información confiable de la reproducción de la broca para un contexto cafetero diferente al abordado en la investigación.

Observamos que al iniciar el proceso de modelación con los estudiantes se deben tener presentes las siguientes consideraciones sobre el fenómeno:

- Tener relación con la situación particular con la que se pretende realizar el proceso de modelación, es decir que sea parte de su contexto cercano.
- El interés de los estudiantes por resolver un problema que hace parte de la situación particular escogida por ellos, gracias a la influencia directa con sus vidas, su cultura, su entorno cercano, su economía.

- Según Biembengut y Hein (1997) “intuición y creatividad” (p.3), la cual es necesaria para que los estudiantes relacionen los conocimientos relevantes de la situación particular del problema, con los procesos matemáticos, con el fin de posibilitarse la construcción de modelos matemáticos.

Además consideramos que los investigadores que llevan a cabo el proceso de modelación en compañía de los estudiantes necesitan desde la experiencia de la investigación:

- Tener conocimientos en relación con los diferentes contextos cercanos que pueden ser escogidos por los estudiantes para un proceso de modelación.
- Conocer a profundidad el contexto escogido por los estudiantes desde el contacto directo con el mismo y documentos teóricos.
- Tener amplios conocimientos sobre la modelación y proceso de modelación.
- Tener conocimientos sobre las estrategias y técnicas (en el trabajo se utilizaron, entrevistas, documentos escritos, observaciones) que se deben implementar en el proceso de modelación con los estudiantes, según las reflexiones, discusiones y procesos a los que se llegan en cada etapa, con el fin de vislumbrar los modelos y su relación con los temas según (MEN,2006) que según el proceso de modelación se posibilita su reconstrucción o construcción como representación simplificada de la situación particular..

Igualmente se pudo concluir que el procedimiento realizado con los estudiantes, si bien cada proceso de modelación se puede ajustar a las etapas propuestas por Biembengut y Hein (2004), éste puede variar según la experiencia y conocimientos del investigador, ya que los resultados, reflexiones y discusiones del trabajo realizado por los estudiantes, en cada etapa requieren de la visión del investigador con el fin de aportar estrategias que lo encaminen a la construcción del modelo.

5.3 Aportes de la investigación para los docentes sobre la implementación de la modelación matemática en el aula de clase

En la investigación que realizamos se describió un proceso de modelación donde se relacionó elementos matemáticos aprendidos en clase, entre ellos, procesos aritméticos, algebraicos, con conocimientos extraescolares de interés para los estudiantes. También se observó dentro del proceso de modelación que el maestro es quien debe direccionar los procesos mediante la objetiva implementación de las técnicas de recolección de datos, donde sugerimos que dicha recolección se debe de hacer en paralelo con el análisis de los datos que emergen en cada episodio, para que las nuevas reflexiones que surgen permitan a los investigadores vislumbrar otras preguntas y actividades que conlleven a acercar a los estudiantes a la posibilidad de reconocer y transferir sus elementos matemáticos aprendidos en clase y relacionarlos con la situación de contexto que es de su interés dentro de un proceso que permita la construcción de modelos matemáticos.

De igual manera sugerimos que antes de abordar situaciones de modelación en el aula es conveniente basarse en documentos como los de Bassanezi y Biembengut (1997), Biembengut y Hein (2004), Villa-Ochoa (2007), Berrío (2012), Londoño y Muñoz (2011), entre otros donde tienen acceso a diferentes ejemplos con sus respectivos análisis (recomendaciones para su aplicación en el aula). En este sentido el maestro debe ser un aprendiz desde otras experiencias, ya sea para llevarlas a la práctica (si el contexto lo permite) o para generar nuevas propuestas.

El proceso de modelación que se realice en torno a situaciones que emergen de un contexto cercano a los estudiantes, donde converge cultura y costumbres que hacen parte de una

determinada sociedad pueden ser enfocados desde diferentes perspectivas, entre estas las descritas en la Tabla 1., según Kaiser y Schwarz (2010).

El trabajo de investigación que realizamos, como se había mencionado, tuvo la intencionalidad de describir el proceso de modelación llevado a cabo por los cinco estudiantes, aunque se acercó a la perspectiva educativa, (la cual se pudo observar dentro del proceso cuando los estudiantes comenzaron de forma consciente a desarrollar regularidades, como lo es la transferencia de los elementos matemáticos, entre ellos procesos aritméticos, la potenciación y algebra para representar de forma simplificada la situación particular reproducción de la broca mediante modelos) realmente no era el propósito aproximarse a una en particular. Dichas regularidades durante el proceso permitieron observar el proceso de modelación realizado en la investigación por los estudiantes como una herramienta para el aprendizaje de la matemática.

Queremos además reiterar que el proceso de modelación en la investigación que realizamos se aleja de ser una perspectiva realista, socio-crítica o contextual, debido a que durante el proceso no se desarrolló en los estudiantes herramientas para comprender y resolver una situación real a profundidad, igualmente no se tienen en cuenta los aspectos psicológicos de los estudiantes al analizar las dificultades que tuvieron para resolver el problema del contexto real a través de modelos.

El trabajo de investigación nos permitió observar el carácter integrador de la matemática con la biología a través del proceso de modelación donde los estudiantes relacionaron elementos del ciclo biológico de reproducción de la broca como se observan en la Ilustración 13, que emergieron tanto del fragmento (Bustillo, 2006) y luego fueron determinados de forma experimental. La representación de dichos elementos biológicos que emergieron de situaciones

de la vida cotidiana como la reproducción de la broca, permitieron que los modelos construidos por los estudiantes, descritos en las Ilustraciones 16,18,23 y 25 se contrastaran con la realidad del contexto particular, pero no de forma general, debido a que las variables que los componen como el número de brocas hembra o macho, el número de generaciones y el coeficiente de la función exponencial emergieron durante el proceso bajo situaciones ambientales y de control de brocas determinados para un contexto cafetero particular, que no representa las mismas condiciones biológicas de otro cultivo cafetero.

5.4. Futuras investigaciones

Los resultados de esta investigación muestran algunos elementos que hacen parte de la elaboración de modelos a partir de una situación contextual con el fin de que estos aportes y reflexiones sean llevados al aula de clase. Además sugerimos que en futuras investigaciones sea implementada la modelación como un proceso que permita rescatar de cierta manera la cultura de la caficultura, en el caso de Andes, al utilizar los términos comunes por los caficultores desde hace décadas y articularlos con procesos matemáticos en miras de la construcción de modelos.

Igualmente en un futuro se podrían realizar investigaciones sobre modelación concernientes a otros temas relevantes dentro de la caficultura como:

- Valor del control con respecto a la pérdida de valor del café.
- Gastos en abonos y químicos utilizados para que haya una buena producción, versus rentabilidad.

5.5. Divulgaciones

Ponencias:

- IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas.
“Modelación de ecuaciones desde un contexto cafetero”. Universidad de Medellín Mayo 9 al 11 de 2012. (Ver anexo7)
- 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa –ASOCOLME, 2012.
Reconocimiento de variables en el Contexto Cafetero y su Constitución como Modelos Matemáticos. Medellín, Octubre 11 al 13. (Ver anexo 8)
- V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas.
“Modelos Matemáticos Escolares producidos en un Contexto Cafetero”. Universidad de Medellín. Mayo 8 al 10 de 2013. (ver anexo 9)
- 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa –ASOCOLME, 2013. La modelación matemática: Un ejemplo en el contexto cafetero. Barranquilla, Octubre 9 al 11. (Ver anexo10)

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aravena, M., y Caamaño, C. (2007). Modelización matemática con estudiantes de secundaria de la comuna de Talca, Chile. *Estudios pedagógicos*, 33(2), 7-25.
- Arrieta, J., Canul, A., y Martínez, E. (2005). Laboratorio virtual de matemáticas. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 18, 785-790
- Berrio, M. (2012). Elementos que intervienen en la construcción que hacen los estudiantes frente a los modelos matemáticos. *El caso del cultivo del café* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Bassanezi, R., y Biembengut, M. S. (1997), Modelación matemática: Una antigua forma de investigación – un nuevo método de enseñanza. *Revista de Didáctica de las Matemáticas* 32, 13-25.
- Biembengut, M., y Hein, N. (1997). Modelo, Modelación y Modelaje: Métodos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"* 38, 209-222.
- Biembengut, M. S., y Hein, N. (2002). Modelaje y Etnomatemáticas: puntos (in)comunes. 52, 3-14.
- Biembengut, M.S., y Hein, N. (2004). Modelación Matemática y los Desafíos para Enseñar *Matemática. Educación Matemática*. 16 (2), 105-125
- Biembengut, M. S., y Hein, N. (2006, Marzo). Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas. M. Murillo (presidente), *Memorias del V festival internacional de matemática*. 1 - 25.
- Blank, C. (2001). Modelos y metáforas: el uso de la analogía en la ciencia. *In Anales de la Universidad Metropolitana*. 1 (1), 247-261.

- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. (Mina, M. trad.). *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*. National Center for Mathematics Education, Suecia. 145-159
- Bressan, A. (2005) Representaciones y modelos en la matemática realista. 1-7. Recuperado el 12 de enero de 2014 desde http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/representaciones_ymodelos.pdf,
- Burak, D. y Barbieri, D. D. (2005). Modelagem Matemática e sua implicações para a Aprendizagem Significativa. In: *IV CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - CNMEM*, 2005, Feira de Santana-BA. Anais... Feira de Santana - BA: UEFS.
- Burak, D., y Brandt, C. F. (2010). Modelagem matemática e Representações Semióticas: Contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico Mathematical Modeling and semiotic representations: contributions to the development of algebraic thinking p.(63-102). *Zetetiké: Revista de Educação Matemática*, 18(33). 63-102
- Bustamante, C. (2012). Hacia la construcción de modelos algebraicos multiplicativos en el grado sexto (Tesis de Maestría no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Medellín.
- Bustillo, A. (2006). A review of the coffee berry borer, *Hypothenemus hampei* (Coleoptera: Curculionidae: Scolytinae), in Colombia. *Revista Colombiana de Entomología*, 32(2), 101-116.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 8(2), 121-156.
- Castro, E., y Castro, E (1997): Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Barcelona: Horsori-ICE Universidad de Barcelona, 95-124

- Cisterna, F. (2010). Efectividad del uso de las analogías en el subsector de química, para la unidad cinética química, aplicado a estudiantes de tercer año medio. (Tesis de maestría no publicada). Universidad del BÍO-BÍO.
- Cordero, F. (2004). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. Artículo Innovación Educativa, 1-20. Recuperado el 12 de enero de 2014 desde <http://repensarlasmatematicas.files.wordpress.com/2012/09/44art-videoconf-08-2004.pdf>
- Córdoba, F. (2011). La Modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería. (Tesis de maestría no publicada). Instituto Politécnico Nacional, México.
- D'Ambrosio, U. (2001). Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade [Ethnomathematics: Link between tradition and modernity]. Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- D'Ambrosio, U. (2002). Ethnomathematics: an overview. In *Makalah yang disampaikan pada the II Congresso Internacional de Etnomatemática* (pp. 5-7).
- D'Ambrosio, U. (2006). Ethnomathematics: Link between traditions and modernity. *ZDM*, 40 (6), 1033-1034.
- D'Ambrosio, U. (2009). Mathematical modelling: cognitive, pedagogical, historical and political dimensions. *Journal of mathematical modelling and application*, 1 (1), 89-98
- D'Amore, B., y Pinilla, F. (2001). Matemática de la cotidianidad. *Paradigma. (Maracay, Venezuela)*. XXII. 1, 59-72.
- Díaz, S. A., Mendoza, V. M., y Porras, C. M. (2011). Una guía para la elaboración de estudios de caso. *Razón y palabra*, 75. Recuperado el 12 de enero de 2014 desde http://www.razonypalabra.org.mx/N/N75/varia_75/01_Diaz_V75.pdf
- Díaz, V., y Poblete, A. (2001, March). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Revista de didáctica de las matemáticas*, 45, 33-41.

- Díez, J. (2004), L'ensenyament de les matemàtiques en l'educació de persones adultes. Un model dialògic (tesis doctoral no publicada). Universitat de Barcelona, Barcelona.
- Fernández, S. y Cordero, J. Biología de la Broca del Café *Hypothenemus hampei* (Ferrari) (Coleoptera: Curculionidae: Scolytinae) en Condiciones de Laboratorio. *Bioagro*, 19 (1): 35-40
- Ferrari, M. (s.f.). Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo. CINVESTAV-IPN, México. 1-26. Recuperado el 12 de enero de 2014 desde <http://www.clame.org.mx/documentos/tesis/rferrari.pdf>
- Flick, U. (2002). *Introducción a la Investigación Cualitativa*. Madrid. Ediciones Morata, S.L.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *LA GACETA DE LA RSME*, 10, 427-442.
- Franqui y Medina S. (2003), La Broca del Café, *Hypothenemus hampei* (Ferrari): Biología y Aspectos Básicos de Control, pp. 5,6 Recuperado el 12 de enero de 2014 desde http://openpublic.eea.uprm.edu/sites/default/files/documents/files/BROCA_0.pdf
- Gabardo, L. (2006). Modelación Matemática y ontología. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 19, 317-323
- García, J. (2011). Didáctica de las ciencias modelizar y resolver problemas en la educación en ciencias experimentales. Medellín, Antioquia, Colombia: Grupo Investigaciones.
- García, W. (2012). Modelación matemática en funciones exponencial y logarítmica: una propuesta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas básicas (Tesis magister) Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.
- González, B. M. (2002). Las analogías en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias de la naturaleza (Tesis Doctoral) Universidad de La Laguna. España.

- Gómez, L., Amicarelli, A., Álvarez, H., y di Sciascio, F. (2004). El rol de los modelos en el diseño de equipos de procesos y sistemas de control. “ *In VI Congreso Nacional de la Asociación Colombiana de Automática*”.
- Guba, E., y Lincoln, Y. (2002). “Paradigmas en competencia en la investigación cualitativa”. (Denman C. y Haro J.A. compiladores.), Por los rincones. Antología de métodos cualitativos en la investigación social. El Colegio de Sonora. Hermosillo, México, 113-145.
- Hays, P. (2004). Case study research. . En *Foundations for research: Methods of inquiry in education and the social sciences*. Mahwah, NJ: LEA. 217-234
- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., Baptista-Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Herminio, M., y Borba, M. (2010). A NOÇÃO DE INTERESSE EM PROJETOS DE MODELAGEM MATEMÁTICA. *Educação Matemática Pesquisa. Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*. 12(1).
- Jiménez, J. y Perales, F. (2002). Modélisation et représentation graphique de concepts. Buletin de l union des physiciens. Vol 96.
- Jurdak, M., y Shahin, I. (2001), Problem solving activity in the workplace and the school: the case of constructing solids, *Educational Studies in Mathematics Education*. 47 (3), 297-315.
- Justi, R., y Gilbert, J. (1999). A cause of ahistorical science teaching: Use of hybrid models. *Science Education*. 83(2), 163–177.
- Kaiser, G. y Schwarz, B. (2010). Authentic Modelling Problems in Mathematics. Education- Examples and Experiences. *Journal für Mathematik-Didaktik*. 31, 51–76.
Doi:10.1007/s13138-010-0001-3
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). Un examen global de perspectivas internacionales en el modelado en la educación de las matemáticas. (*ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 38(3). 302-314.

- Londoño, S., y Muñoz, L. (2011). *La modelación matemática: un proceso para la construcción de relaciones lineales entre dos variables* (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Medellín.
- Martínez, S. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. (Tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.
- Martínez, M., Valle, N., Zolkower, B., Bressan, A. (2000). Los contextos realistas en la resolución de problemas de matemática: una experiencia para capacitadores, docentes y alumnos. 30-45. Recuperado el 12 de enero de 2014 de <http://soarem.org.ar/Documentos/24%20Martinez.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación. Recuperado de <http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación. Recuperado de <http://www.eduteka.org/pdfdir/MENLineamientoMatematicas.pdf>
- Musantes, S. (2006). Estrategias para la enseñanza de modelización a los estudiantes. *Revista BioScience*. 56 (4)
- Nagle, R. K., Saff, E. B. y Snider, A. D. (2005). *Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera*. México. Pearson.
- Nunes, T., Schliemann, A., y Carraher, D. (1993), *Street mathematics and school mathematics*, New York, Cambridge University Press.
- Ortiz, J., Rico, L., y Castro, E. (2010). Realidad y perspectiva didáctica de futuros profesores de matemáticas a partir de una situación problema. *Zona Próxima*, (13).

- Pino, G. (2010). La noción de modelo en el enfoque semántico de las teorías. *Nueva Serie*, (31), 169-185.
- Polya, G. (1973). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (Princeton). NJ: Princeton university press.
- Ramos, A., y Font, V. (2006). Contexto y contextualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una perspectiva ontosemiótica. *La Matematica e la sua didattica* 535-536.
- Rodríguez, G., Gil, J., y García, E. (1996). *Metodología de la Investigación Cualitativa*. Félix Varela, la Habana. Félix Varela.
- Sánchez, J., Obando, J., Muñoz, L., y Villa-Ochoa, J.A. (2013). La modelación matemática: Un ejemplo en el contexto cafetero. *Revista Científica, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá*, (Especial 18), 532-536.
- Sandoval, C. (2002). *Programa de Especialización en Teoría, Métodos y Técnicas de Investigación Social- Investigación Cualitativa*. Bogotá. Copyright.
- Stake, R. (1994). "Case studies". En Denzin, N. and Lincoln Y. (Eds), *Handbook of Qualitative research*. Thousand Oaks, Sage. 236-247.
- Stake, R. (2007). *Investigación con Estudio de Caso*. España. Ediciones Morata S.L
- Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*. 9 (46). 75-87.
- Villa-Ochoa, J.A., y Ruiz, H. (2009, Mayo-agosto). Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. 1(27). Recuperado de <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102/203>
- Villa-Ochoa, J.A., Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, J., y Ocampo, D. (2009). Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2 (2), 159-180.

- Villa-Ochoa, J.A, Bustamante, C., Berrío, M., Osorio, A., Ocampo, D. (2008). *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los lineamientos curriculares colombianos*. Curso dictado en 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de Octubre de 2008). Valledupar, Colombia.
- Villa- Ochoa, J.A., Rojas S., Cuartas, R. (2010). Realidad en las matemáticas escolares?: reflexiones acerca de la “realidad” en modelación en educación matemática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*. 29, 1-17.
- Villa-Ochoa, J.A. (2007). La modelización como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno lógicas*, (19), 63 - 85
- Villa-Ochoa, Jhony (2012/2013). *Modelación matemática escolar: algunas reflexiones frente a su relación con la cultura*. En Viana, Marger (Ed.), Anais Relme 26. Reunião Latinoamericana de Educação Matemática (pp. 210-219). Ouro Preto: EDUFOP.
- Zill, D., y Wright, W. (2011). *Cálculo de una variable: trascendentes tempranas*. McGraw-Hill.

7. APÉNDICE

Anexo 1: Consentimiento de Participación

Yo _____ estoy de acuerdo en participar en la investigación titulada —Construcción de modelos matemáticos a través de los procesos que realizan los caficultores en el contexto cafetero” que es conducida por los profesores John Fredy Sánchez Betancur y Jorge Didier Obando Montoya, estudiantes de maestría de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia y profesores de la Institución Educativa San Juan de los Andes e Institución Educativa San Antonio. Entiendo que mi participación es voluntaria y puedo decidir no participar o dejar de participar en cualquier momento sin dar ninguna razón y sin sufrir ninguna penalización. Puedo pedir que la información relacionada conmigo sea regresada a mi o sea destruida.

Propósito de la investigación: El propósito de este estudio es construir modelos matemáticos a través de los procesos que realizan los caficultores en el contexto cafetero.

Beneficios: El ser participante en esta investigación puede apoyar la investigación en Educación Matemática.

Procedimiento: Como participante en este estudio será observado en clase y algunas veces video grabado. De ser necesario podría ser entrevistado.

Riesgos: No hay riesgos asociados a la participación en este estudio.

Confidencialidad: Cualquier resultado de este estudio que pueda dar pistas acerca de la identificación del participante será confidencial. La información será guardada en un archivador con acceso limitado y solo se permitirá el acceso a la información bajo la supervisión de los investigadores y solo para fines académicos. Toda la información recolectada en este estudio será confidencial, solo seudónimos serán usados para escribir el informe final.

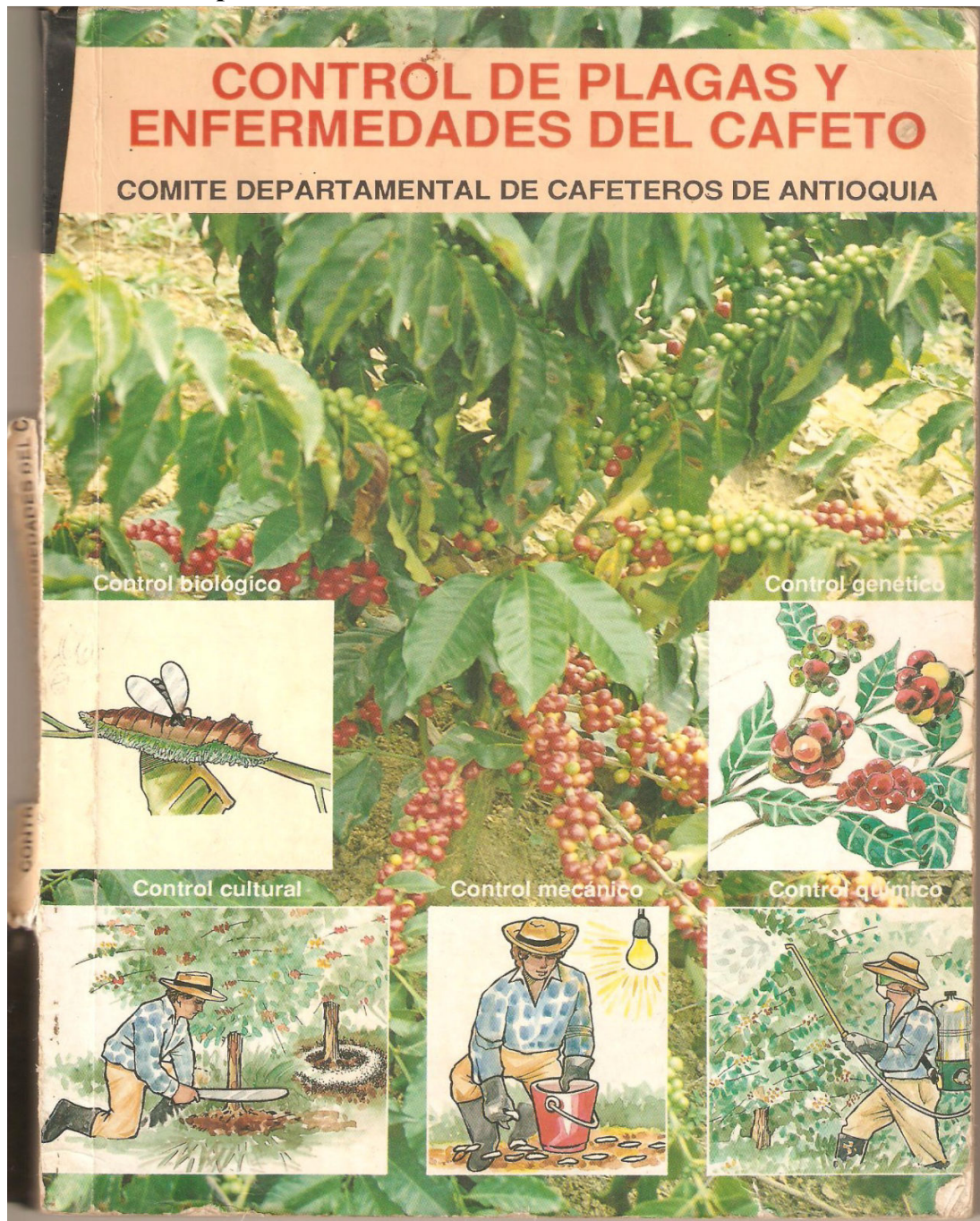
Preguntas posteriores: Los investigadores responderán cualquier pregunta relacionada con esta investigación, ahora o en el transcurso del proyecto, a través de los correos electrónicos: jofresanbeta@gmail.com, jdobandom@unal.edu.co

Consentimiento del participante: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en tomar parte de esta investigación.

Consentimiento del padre de familia: Entiendo que firmando esta autorización estoy de acuerdo en que mi hijo o hija participe de esta investigación (horario de las sesiones lunes y martes de 3:00 a 4:00 de la tarde).

Nombre del investigador 1	Firma	Fecha
Nombre del investigador 2	Firma	Fecha
Nombre del participante	Firma	Fecha
Nombre del padre de familia	Firma	Fecha

Anexo 2: Documento escrito otorgado por los extensionistas del comité de caficultores a los campesinos.



Documento sobre las plagas y enfermedades del cafeto otorgado por los extensionistas a los campesinos

Anexo 3: Guía 1, Cosecha Cafetera

Lugar: _____

Fecha: _____

Nombre: _____

Descripción de variables y construcción de los modelos matemáticos.

Un andariego que se encuentra en la finca recogiendo café desde hace tres semanas y desea cambiar de lugar de trabajo, busca reclamar su liquidación. El dueño de la finca necesita que usted le colabore con el cálculo del valor de la liquidación. Para ello aporta la siguiente información:

Días trabajados	Primera semana	Segunda semana	Tercera semana
	# de kilos recolectados por día	# de kilos recolectados por día	# de kilos recolectados por día
Lunes		135kg	147 kg
Martes	158 kg	175 kg	154 kg
Miércoles	147 kg	128 kg	137 kg
Jueves	136 kg	145 kg	110 kg
Viernes	143 kg	137 kg	88 kg
Sábado	84 kg		54 kg

Además pactó con el trabajador:

- Precio de kilogramo recogido en cereza \$270
- El trabajador pagará \$9000 por cada día alimentado (de lunes a sábado)

Si fueras el encargado de ayudarle al dueño de la finca ¿qué estrategia emplearías para la liquidación del trabajador? Escríbelo.

En la situación planteada ¿cuáles son los elementos que cambian y cuáles permanecen constantes?, comenta:

¿Cuál es el valor total a liquidar al andariego? Realiza los procedimientos.

¿Cómo calcularía el valor a cancelar por la alimentación? Realiza los procedimientos.

Si hubiese 18 empleados ¿cuánto le cancelarías por semana?, realiza los procedimientos.

¿Habría una forma general de calcular el valor a cancelarles? Comenta.

Anexo 4: Guía 2, Nutrición del Cafeto

Lugar: _____

Fecha: _____

Nombre: _____

Descripción de variables

Según IPNI (International Plant Nutrition Institute) para realizar la fertilización se deben de tener en cuenta las siguientes condiciones.

Fertilización en árboles jóvenes de café: durante la etapa de crecimiento acelerado hasta el inicio de la floración (18 meses aproximadamente). Basándose en el análisis de suelos, se decide si al momento de la siembra es necesario incorporar al suelo del hoyo de siembra enmiendas (es todo producto cuya acción fundamental es la de modificar las condiciones físico-químicas del suelo para mejorar su fertilidad) como cal agrícola, cal dolomítica o roca fosfórica. Las dosis no deben ser superiores a 80 g por planta. Se recomienda que la primera fertilización se efectúe un mes después del trasplante en el campo, y luego cada cuatro meses, para un total de cinco aplicaciones.

Fertilización de un cafetal de producción: esta etapa se inicia con las floraciones (aproximadamente a los 18 meses de siembra en el campo) y constituye el siguiente paso después de la fertilización en la etapa de crecimiento acelerado. La fertilización en esta etapa del cultivo debe iniciarse cuando la planta tenga dos años en el campo empezando ahora la aplicación de dosis anuales de fertilizantes repartidas en dos aplicaciones. La primera aplicación se efectúa dos meses antes de la cosecha intermedia, y la segunda dos meses antes de la cosecha principal. Esto se debe a que existe una gran demanda de nutrientes los dos últimos meses de desarrollo del fruto. Por ejemplo, en una región donde las cosechas se presentan entre abril - mayo y entre octubre - noviembre, las fertilizaciones se harán en febrero y agosto. Fundamentalmente, las recomendaciones consideran que el cafetal hasta la floración necesita principalmente N (nitrógeno) y P (fósforo), y a partir de la floración requiere principalmente N (nitrógeno) y K (potasio). Si se requiere la adición de enmiendas (es todo producto cuya acción fundamental es la de modificar las condiciones físico-químicas del suelo para mejorar su fertilidad), éstas se aplicarán un mes después de la fertilización.

Además la fertilización no es solo el factor determinante en una producción debido a que, existen localidades con limitado potencial ambiental de producción, debido a condiciones adversas de clima y/o de suelo. La producción de un lote o finca depende en gran forma del manejo del cafetal, sin embargo, esta producción está estrechamente controlada por las condiciones de clima y de suelo de la finca. Este potencial no puede incrementarse con aplicación de altas dosis de fertilizantes. Si bien la producción de café no siempre se incrementa aumentando la cantidad de fertilizante aplicado cuando se ha alcanzado el potencial que permite la oferta ambiental, es también cierto que la reducción de la producción será evidente si se aplica menos fertilizante del requerido para cumplir con las necesidades de la oferta ambiental del lote o finca (producción histórica).

Si quisieras mostrar a través de gráficos, las actividades de fertilización en árboles jóvenes y cafetal de producción, ¿Qué palabras básicas del texto, además que aspectos naturales, debes tener presentes con el fin de representar las relaciones que existen dentro de este proceso? Realiza los gráficos dentro de los recuadros.

Fertilización de árboles nuevos



Fertilización del cafetal en producción.



Ahora, si nos piden mostrar de forma gráfica las relaciones que existen entre la fertilización de árboles jóvenes y la fertilización de un cafetal en producción, que palabras, actividades y elementos naturales son necesarios, con el fin de representar de forma general la actividad de fertilización?

Realiza la gráfica en el siguiente recuadro.



La realización cuidadosa de los gráficos nos permite observar que los procesos de fertilización en general se constituyen de elementos que permanecen constantes, otros que cambian según el

tiempo de madurez del palo de café, además se identifican también elementos dependientes e independientes dentro del proceso de fertilización. Por lo tanto es necesario que identifique dicho elementos a través de un gráfico, que lo puede realizar en el siguiente recuadro.

Represéntalo de forma gráfica.

A large, empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to draw a graph representing the relationship between variables in the coffee cultivation process.

Anexo 5: Guía 3, Sobre la Fertilización en la Etapa Joven del Cafeto.

Lugar: _____

Fecha: _____

Nombre: _____

Juan siembra 5000 palos de café en su finca, por lo tanto necesita obtener asesoría técnica con el fin de guiar su proceso de fertilización con urea, en los primeros 18 meses, luego de haberlos trasplantado. Es así como se dirige a la página de internet de IPNI (International Plant Nutrition Institute) donde le dan a conocer la siguiente tabla que contiene la cantidad en gramos de urea que debe suministrar a cada árbol de café en los diferentes meses, como se muestra a continuación.

Fertilización de la etapa joven del cafeto.	
Meses después del trasplante	Cantidad y tipo de fertilizante (gramos/planta)
1	10 gramos de urea/cada planta
5	15 gramos de urea/cada planta
9	20 gramos de urea/cada planta
13	25 gramos de urea/cada planta
17	30 gramos de urea/cada planta

Tabla 1. Fertilización de la etapa joven del cafeto (IPNI, 2012).

Si el dueño de la finca necesitara de su ayuda con el fin de encontrar la cantidad de gramos de urea que necesita suministrar al total de palos de café, después de haber transcurrido hasta el quinto mes ¿Qué planteamiento podrías utilizar para colaborarle?

Camilo, el hijo de Juan pregunta sobre las posibles relaciones que existen entre los meses y la cantidad de gramos de urea por planta, luego de hacer el trasplante de los palos de café como se muestra en la tabla. Juan espera responderle a su hijo, por lo cual necesita de su ayuda con el fin de encontrar el camino más apropiado para dar solución al problema. ¿Qué alternativa puedes plantear para responder?

Juan y un grupo de caficultores desean encontrar una forma general de hallar la cantidad de gramos de urea que se deben suministrar al total de palos de café en cualquiera de los meses correspondientes a la fertilización de la etapa joven del cafeto. ¿Qué planteamiento podría usted realizar con el fin de colaborarles?

Juan el dueño de la finca, busca elegir un grupo de agricultores que le trabajen en su finca en el proceso de fertilización de los palos de café sembrados, queriendo encontrar la alternativa más favorable para su bolsillo. Es por eso que necesita de su ayuda para escoger entre las siguientes opciones de trabajadores: la primera compuesta por 9 agricultores todos con igual eficiencia, los cuales terminarían la fertilización de los 5000 palos de café en 5 días a razón de 6 horas diarias. La segunda opción compuesta por 7 agricultores todos con igual eficiencia los cuales trabajan a razón de 8 horas diarias, sin saber cuántos días se demoren para fertilizar el total de palos de café y la tercera opción compuesta por 2 agricultores que trabajan a razón de 10 horas diarias pero tampoco saben la cantidad de días que necesitan para fertilizar los 5000 palos de café sembrados. ¿Qué proceso utilizarías para determinar cuál de las tres opciones es la más favorable para Juan si él decide pagar el 4% del salario mínimo vigente para el año 2012 a cada agricultor por día trabajado?

Anexo 6: Guía 4, La Broca

Fecha: _____

Lugar: _____

Nombre: _____

Con esta guía se pretendo hallar variables dependientes e independientes

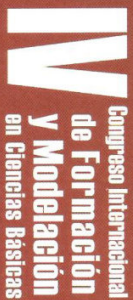
Un caficultor al ver que hay mucho verano y que han pasado 120 días después de la floración, es decir que ya, el grano presenta una consistencia, decide revisar visualmente los granos de algunos cafetos en busca de broca, con la gran sorpresa que ve un buen número de granos perforados, por lo que se cuestiona: **¿será necesaria o no la fumigación contra la broca para el cultivo de café?**. Él espera que por favor le ayude a responder su interrogante teniendo en cuenta una clara justificación, por lo que debe dar solución a las siguientes actividades:

1. Para realizar un control químico es necesario un mínimo porcentaje de infestación. ¿Cuál es?, ¿cómo se determina?
2. ¿Cómo le sustentarías numéricamente que tan conveniente o no es la fumigación en contra de la broca?
3. Algunas de las opciones que existen para controlar la broca son: el control mecánico o manual, el control con trampas, el control biológico y el control químico. ¿Qué datos podrías aportar acerca de cada uno de estos mecanismos de control? ¿Ves formas de organizarlos?
4. Si el cultivo es de 8000 árboles. ¿Cómo cuantificarías los gastos para los diferentes métodos de control?
5. Si el caficultor tiene conocimientos matemáticos, estadísticos y administrativos, ¿cómo harías para demostrarle que la fumigación es o no la opción de control necesaria?, escribe los procedimientos y/o argumentos.

6. Teniendo en cuenta la tabla, ¿Qué información te sirve y cuál se debe anexar, que sea fundamental a la hora de decidir sobre si es necesario o no el control de fumigación?

CONTROL BROCA	CONTROL QUÍMICO LÍQUIDO	VENENO	VALOR UNITARIO
		SUMITHION	\$36045
		CLORPIRICOL 4EC	\$19550
		CLORPYRIFOS	\$19416
		NUFOS 4EC	\$19143
		NUMETRIN 200EC	\$18000
		PIRINEX	
		NIFEREX	
		LORSBAN 4EC	\$31050
	CONTROL QUÍMICO ALTERNATIVO EN POLVO	LORSBAN	
		RAFAGA 4EC	\$26437
		ARRIERO 2,5 DP	\$4311
	CONTROL BIOLÓGICO	ALISIN	\$24600

Anexo 7: IV Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas



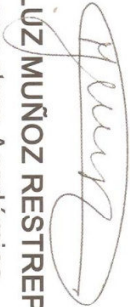
UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN



JOHN FREDY SÁNCHEZ BETANCUR
PONENTE

CERTIFICA QUE:

Asistió al IV Congreso Internacional de Formación y Modelación de las Ciencias Básicas, realizado los días 9, 10 y 11 de mayo de 2012 en la Universidad de Medellín, con una intensidad de 24 horas.

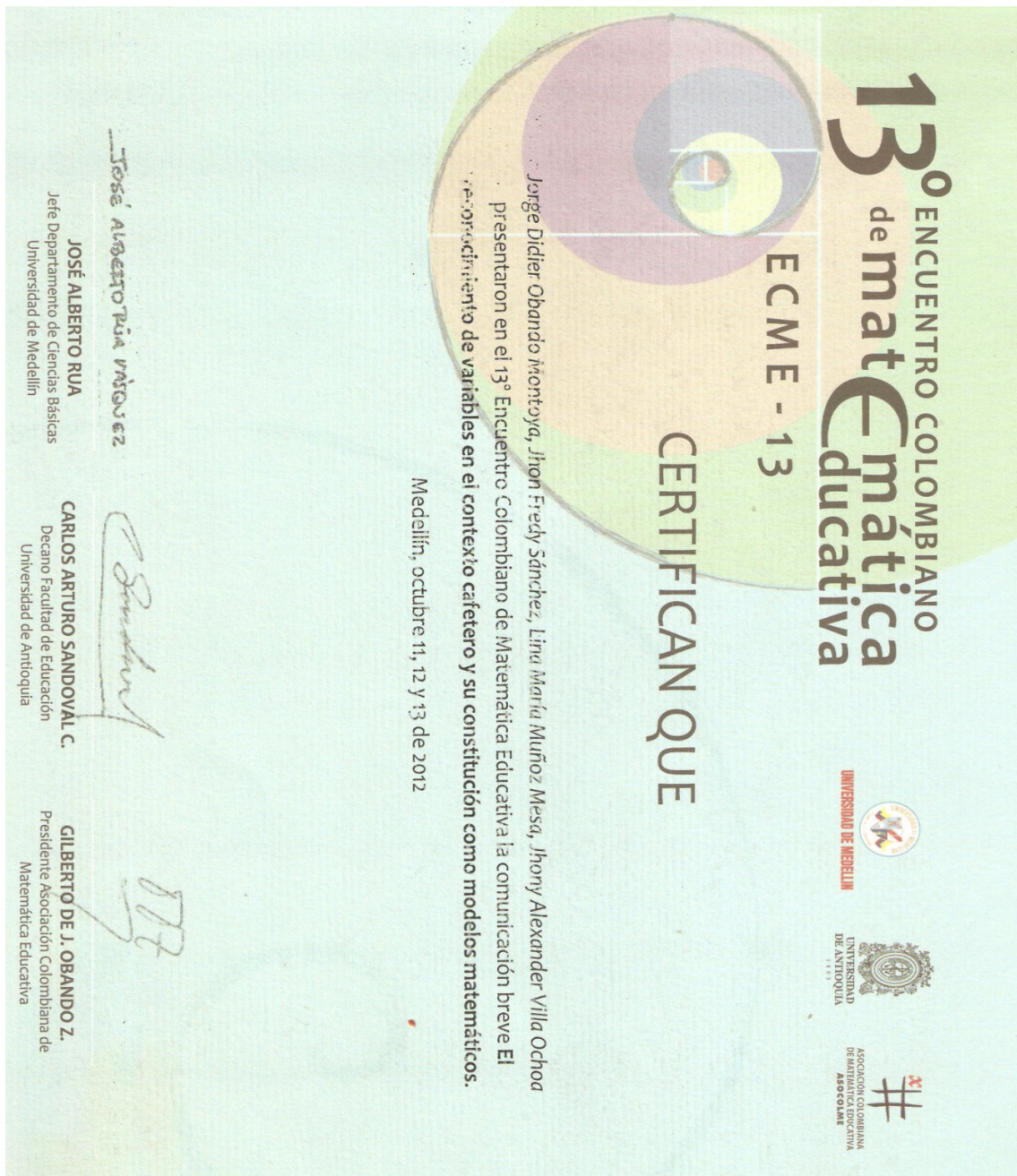


ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica



JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe Departamento
de Ciencias Básicas



Anexo 8: 13° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Anexo 9: V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas



UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

CERTIFICA QUE:

JOHN FREDY SANCHEZ BETANCUR

Asistió en calidad de
PONENTE

Con su presentación: **"MODELOS MATEMATICOS ESCOLARES PRODUCIDOS EN UN CONTEXTO CAFETERO"** dictado en el marco del V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, realizado en la Universidad de Medellín los días 8, 9 y 10 de mayo de 2013

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

José Alberto Rúa Vásquez

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe
Departamento de Ciencias Básicas



UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN

CERTIFICA QUE:

JORGE DIDIER OBANDO MONTROYA

Asistió en calidad de
PONENTE

Con su presentación: **"MODELOS MATEMATICOS ESCOLARES PRODUCIDOS EN UN CONTEXTO CAFETERO"** dictado en el marco del *V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, realizado en la Universidad de Medellín los días 8, 9 y 10 de mayo de 2013

ALBA LUZ MUÑOZ RESTREPO
Vicerrectora Académica

José Alberto Rúa Vásquez

JOSÉ ALBERTO RÚA VÁSQUEZ
Jefe
Departamento de Ciencias Básicas

Anexo 10: 14° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Anexo 11. Identificación de la situación que más afecta al café

Objetivo:

El siguiente cuestionario se realiza a los estudiantes con el fin de determinar el fenómeno que más daños ocasiona en el café de tal forma que afecta la situación económica de las familias.

PREGUNTAS PROGRAMADAS

1. ¿Cuál es la plaga que afecta significativamente al café en ésta temporada?
2. ¿Consideras que el sol afecta la producción del café?
3. ¿Cuáles son las consecuencias que ocasiona la falta de nutrientes?

PREGUNTAS QUE SURGEN EN LA CONVERSACIÓN

4. ¿Por qué la broca es considerada tan perjudicial para un cultivo de café?
5. ¿La humedad es un factor determinante en la propagación de la broca?
6. ¿La sombra es beneficiosa o perjudicial para el árbol de café?
7. ¿En qué forma afecta el sol al cultivo del café?
8. ¿Cómo afecta la humedad al cultivo de café?
9. ¿Qué cantidad de abono se le debe suministrar a un árbol de café?
10. ¿Cada cuánto tiempo se debe abonar?