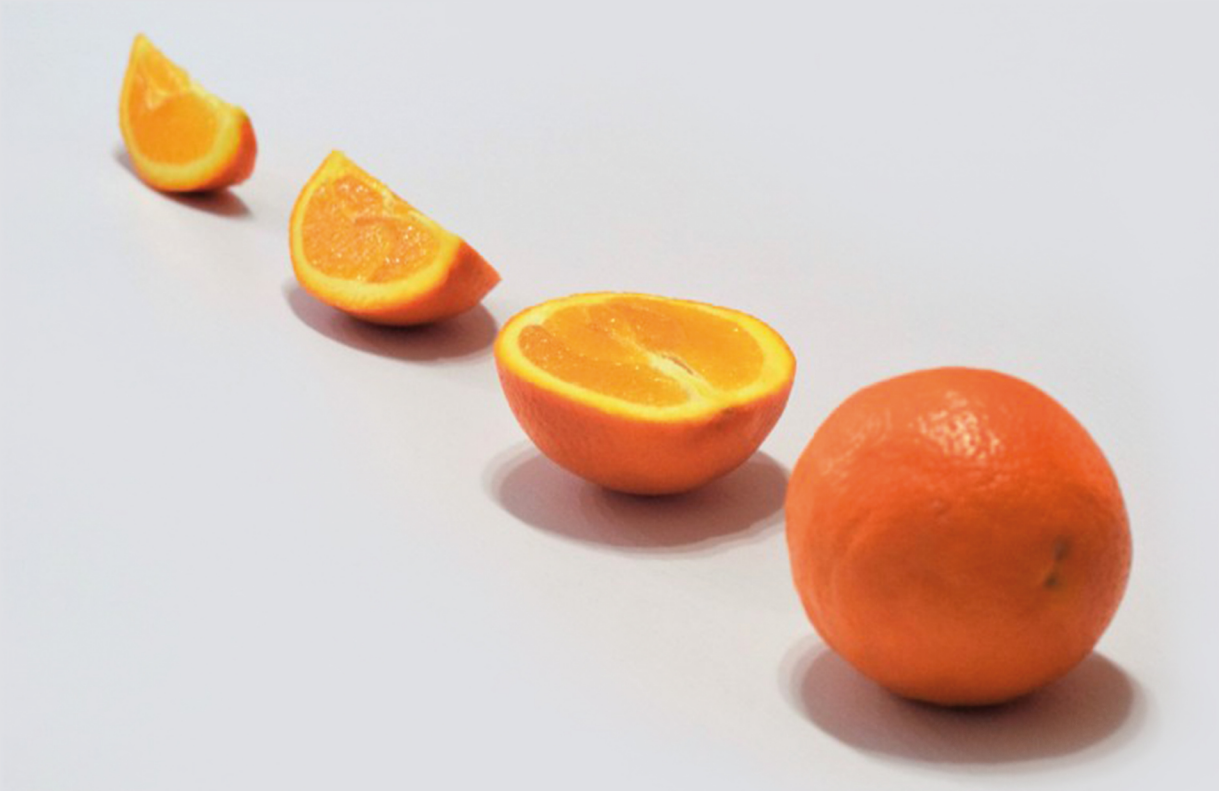
Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática

Recursos para la captura de información y el análisis

Leonor Camargo Uribe



Editorial
Universidad de Antioquia®

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

Investigación / Educación

Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática

Recursos para la captura de información y el análisis

Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática

Recursos para la captura de información y el análisis

Leonor Camargo Uribe

Investigación / Educación
Universidad Pedagógica Nacional
Editorial Universidad de Antioquia®

Colección *Investigación / Educación*
© Universidad Pedagógica Nacional
© Editorial Universidad de Antioquia®
ISBN: 978-958-501-036-9
ISBNe: 978-958-501-037-6

Primera edición: agosto del 2021
Impresión y terminación: Imageprinting
Diseño de cubierta y diagramación: Imprenta Universidad de Antioquia

Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia
Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de la Universidad Pedagógica Nacional y la Editorial Universidad de Antioquia®

Universidad Pedagógica Nacional
(571) 594 18 94 ext. 190
editorialupn@pedagogica.edu.co
http://editorial.pedagogica.edu.co
Calle 72 N.º 11-86, código postal 110221
Bogotá D. C., Colombia

Editorial Universidad de Antioquia®
(574) 219 50 10
editorial@udea.edu.co
http://editorial.udea.edu.co
Apartado 1226. Medellín, Colombia

Imageprinting
(571) 743 75 52
Carrera 27 N.º 76-38
Bogotá D. C., Colombia

Camargo Uribe, Leonor
Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis / Leonor Camargo Uribe. -- 1. edición. – Medellín: Editorial Universidad de Antioquia, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional; 2021.
224 páginas. -- (Colección Investigación / Educación)
ISBN: 978-958-501-036-9
ISBNe: 978-958-501-037-6
1. Educación matemática. 2. Matemáticas – Investigación. 3. Matemáticas – Estudio y enseñanza. 4. Metodología de la investigación. I. Título. II. Serie.

LC QA11
510/.7-DDC

Catalogación en publicación de la Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

Contenido

Alcances del libro xi

1. Perspectiva y aclaración de términos 1
Una visión sobre el desarrollo investigativo en educación matemática 1
Antes de 1960 1
Décadas del sesenta y el setenta 3
Décadas del ochenta y el noventa 4
Siglo XXI 10
La educación matemática, un campo en pleno desarrollo 13
Enfoques, aproximaciones, metodologías, estrategias y recursos 14
Enfoques empírico-analítico, fenomenológico y sociocrítico en educación matemática 15
Aproximaciones en las investigaciones con enfoque fenomenológico o sociocrítico 18
Metodología y estrategia investigativa 20
Recursos para obtener información y para analizar datos 27
Postura ecléctica o de caja de herramientas 29

2. Modelos de un diseño investigativo 31
¿Qué es un diseño investigativo y para qué sirve? 31
Modelos de un diseño investigativo 32
Modelo secuencial con solapamientos 33
Modelo artesanal de Romberg 45
Modelo coreográfico de Janesick 50
¿Qué tan operativos son los modelos de diseño investigativo? 52
Diseños rígidos o focalizados versus diseños flexibles y amplios 54

3. Principales estrategias cualitativas empleadas en educación matemática 57
Estrategias naturalistas (¿qué pasa?) 58
Estrategia investigativa: basada en prácticas usuales 59
Estrategia investigativa: en primera persona 63
Estrategia investigativa: estudio de caso 66
Estrategia investigativa: revisión documental 69
Estrategias clínicas (¿cómo pasa?) 72
Estrategias investigativas: entrevista estructurada y entrevista semiestructurada 73
Estrategia investigativa: entrevista basada en tareas 78
Estrategia investigativa: observación clínica 83
Estrategias de diseño (¿qué pasaría si...?) 84
Estrategia investigativa: experimento de enseñanza 86
Estrategia investigativa: experimento comparativo 91
Estrategia investigativa: investigación-acción 94
Síntesis de las estrategias cualitativas de uso frecuente en educación matemática 98

4. Recursos y sugerencias para registrar información y construir datos investigativos 104
Captura de información 105
Escenario investigativo (¿dónde?) 106
Los informantes (¿a quién?) 109
Eventos (¿cuándo?) 112
Procesos (¿haciendo qué?) 114
Recursos (¿cómo?) 116
Producción de datos investigativos 120
Organización de la información 121
Reducción de la información 121
Depuración de la información 123
Fragmentación e integración de información 129

5. Análisis de la información y obtención de resultados 136
Inicio del proceso de análisis 137
Alcances del análisis 139
Procedimientos para hacer el análisis 141
Producción de resúmenes 143
Codificación de datos 144
Producción de categorías 153
Producción de memorandos 158
Notas de análisis colectivos 159
Viñetas 159

Análisis preestructurados 164
Conteos 169
Correlaciones 170
Triangulación 175
Resultados del análisis y formas de presentarlos 176
Síntesis del capítulo y sugerencias 189

6. Criterios de calidad para la investigación en educación matemática ... 192
Criterios de calidad para el proceso investigativo 193
Auditabilidad 193
Fiabilidad o credibilidad 194
Consistencia 194
Factibilidad o viabilidad 195
Legitimidad 195
Objetividad 195
Pertinencia 195
Reproducibilidad 196
Rigurosidad 196
Criterios de calidad para los productos investigativos 196
Adaptabilidad 196
Aplicabilidad 197
Autenticidad 197
Confirmabilidad o falsabilidad 197
Comparabilidad 198
Convencimiento 198
Genericidad 198
Originalidad 199
Poder descriptivo, explicativo o predictivo 199
Significación o relevancia 199
Sustentabilidad 199
Transferibilidad 200
Validez 200

Referencias bibliográficas 201

Alcances del libro

Este libro está dirigido a investigadores en formación y a educadores. Sin pretender ser exhaustiva, ofrezco un recurso bibliográfico para estudiantes en procesos de elaboración de trabajos de grado o tesis, investigadores noveles en el campo de la educación matemática y profesores que orientan espacios académicos de investigación. Proporciono información que pretende ser útil para establecer la estrategia investigativa y los recursos para capturar y analizar información. La mayoría de los ejemplos están tomados de investigaciones realizadas por investigadores colombianos y sirven como referencia para nuevas investigaciones en contextos similares.

De acuerdo con los planteamientos consignados en el capítulo 1, no es un libro de metodología ni pretende orientar la configuración de un proyecto de investigación de principio a fin. Pone el centro de atención en estrategias (capítulo 3) y recursos (capítulos 4 y 5) que pueden servir en un diseño investigativo, al tenor de las preguntas del investigador y su marco de referencia. Sin embargo, en el capítulo 2 presento algunos modelos que pueden ser útiles para concebir un diseño investigativo. Adicionalmente, en el capítulo 6 incluyo un conjunto de criterios de calidad que permiten ir vigilando el proceso investigativo y evaluar el producto obtenido.

1

Perspectiva y aclaración de términos

Una visión sobre el desarrollo investigativo en educación matemática

Las aproximaciones, las metodologías, las estrategias y los recursos de investigación propios de cualquier campo de conocimiento dependen de la dinámica de desarrollo de dicho campo. Comparada con las disciplinas matemática, psicología, pedagogía, antropología y sociología, la educación matemática constituye una disciplina de conocimiento relativamente joven. El estado de madurez, aunado a la cada vez más diversa y creciente complejidad de los asuntos que atiende, hace que el ejercicio investigativo esté aún hoy en una etapa incipiente de organización y consolidación. Pese a ello, es posible identificar tendencias investigativas que se orientan por las dinámicas propias de su desarrollo.

En esta sección propongo una vista panorámica, sintética y no exhaustiva, de tales tendencias, a nivel internacional y nacional, con el fin de crear un contexto para presentar algunas estrategias investigativas y recursos para capturar y analizar información investigativa. Como se verá, la investigación en educación matemática ha ido ampliando su campo de acción para atender múltiples retos impuestos por la sociedad.

Antes de 1960

De acuerdo con el recorrido histórico elaborado por Kilpatrick (1992), la investigación en educación matemática se originó en países como Alemania, Bélgica, Estados Unidos, Inglaterra y Japón, a finales del siglo XIX. Este nuevo campo de investigación surgió como reacción a las necesidades de aumentar

el número de profesores de matemáticas para cubrir la educación de mayor número de personas y de mejorar su preparación; se requería que más gente se pudiera poner a tono con los desarrollos matemáticos de la época. Las universidades comenzaron a hacerse cargo de institutos de formación de profesores, de niveles elemental y secundario, y la educación matemática comenzó a ser vista como un asunto de indagación en la educación superior. Al comenzar el siglo XX se esperaba que las personas involucradas en la enseñanza de los profesores hicieran investigación al respecto.

En 1905, David Eugene Smith, profesor de la Universidad de Columbia, propuso realizar un estudio internacional, a gran escala, para caracterizar la organización del currículo de matemáticas en diferentes países. A partir de esta idea surgió la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI, por su sigla en inglés), fundada en Roma en 1908, y la primera publicación periódica sobre el tema *(L'Enseignement Mathématique)*. El propósito de la ICMI era reportar el estado de la enseñanza de las matemáticas en distintos niveles escolares alrededor del mundo. Países como Alemania, Austria, Bélgica, Dinamarca, Estados Unidos, Francia, Hungría, Inglaterra y Suecia elaboraron reportes nacionales, se hicieron estudios comparativos descriptivos sobre currículos de matemáticas y de formación de profesores y se empezaron a divulgar propuestas de actividades escolares para reformar los currículos. Kilpatrick (1992) reporta, por ejemplo, que dos de los temas que se discutieron en la ICMI de 1912 fueron el papel de la intuición y la experimentación en las matemáticas de secundaria y el tratamiento del concepto de función en secundaria.

Los primeros estudios dieron paso a trabajos investigativos realizados por matemáticos de reconocido prestigio, como Felix Klein, Henri Lebesgue, Émile Borel y Jacques Hadamard, durante los primeros cincuenta años del siglo XX. En ellos se propusieron, principalmente, reformas a la matemática escolar que quedaron plasmadas en documentos escritos. Kilpatrick (1992) menciona que un rasgo distintivo de tales estudios era que, a pesar de recopilar gran cantidad de información, no se desarrollaron diseños investigativos sólidos y los reportes eran compilaciones de datos, más que análisis o interpretaciones. En ese sentido, desde su óptica, el trabajo realizado en aquella época no tenía aún un estatus científico. Sin embargo, se considera el origen de la investigación sobre qué y cómo se enseña matemáticas en la escuela.

En Colombia, de acuerdo con el rastreo hecho por Sánchez (2001), las preocupaciones por la enseñanza de las matemáticas tienen su origen en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional, a final del siglo XIX. En esa época tuvieron lugar interesantes debates sobre cómo enseñar matemáticas a los futuros ingenieros; se discutía si había que proporcionarles

una sólida fundamentación teórica o si se hacía énfasis en la aplicabilidad. Los ingenieros-matemáticos estudiaban fundamentos de geometría euclidiana, geometría analítica, álgebra elemental, cálculo diferencial y cálculo integral. Durante los primeros cuarenta años del siglo XX, matemáticos como Julio Garavito rechazaron las geometrías no euclidianas por considerarlas juegos intelectuales sin aplicabilidad. Con la llegada al país de los matemáticos Francisco Vera, en 1943; Carlos Federici, en 1948, y Juan Horváth, en 1951, se impulsó el desarrollo de las matemáticas en Colombia y se crearon las carreras de matemáticas en la Universidad de los Andes (en 1949) y en la Universidad Nacional (en 1951), con el principal interés de introducir las matemáticas modernas en la formación de matemáticos.

La enseñanza de las matemáticas en los niveles elemental y de secundaria fue preocupación de la Escuela Normal Superior. Creada en el país en 1936, bajo la tutela de la Universidad Nacional, era la encargada de la educación superior de las maestras de tales niveles. Esta escuela, que logró su autonomía en 1951, se convirtió en la Universidad Pedagógica Nacional Femenina en 1955, y en la Universidad Pedagógica Nacional en 1962, una universidad mixta. Durante la década del cincuenta del siglo pasado, esta universidad desarrolló un intenso trabajo de capacitación docente que se constituyó en el germen de la investigación sobre la formación de maestros de matemáticas en el país.

Décadas del sesenta y el setenta

A pesar del recorrido señalado en la sección previa, algunos autores (Gómez, 2000; Niss, 2004; Blanco, 2011) ubican los orígenes de la investigación en educación matemática solo a finales de la década del sesenta del siglo pasado, cuando la ICMI otorgó el reconocimiento de dominio científico al campo e instó a instituciones universitarias y centros de investigación a desarrollar trabajo investigativo seriamente. Dos hechos relevantes marcan este inicio: el Primer Congreso Internacional de Educación Matemática, organizado por la ICMI en Lyon (en 1969), Francia, y la aparición de los primeros números de las revistas *Journal for Research in Mathematics Education, Educational Studies in Mathematics* y *ZDM: International Journal on Mathematics Education.*

La investigación en educación matemática de las décadas del sesenta y el setenta se enfocó principalmente en los niveles secundario y universitario del sistema educativo. Las preocupaciones centrales eran: el currículo (entendido como un listado de contenidos acompañado por objetivos, formas de enseñar y de evaluar), la organización y secuenciación de contenidos de enseñanza, la producción de materiales educativos y evaluativos, las formas de enseñar

matemáticas y la instrucción de los profesores en formación y en ejercicio (Niss, 2004; Sierra, 2011).

Por ejemplo, en 1971, en los volúmenes 3 y 4 de la revista *Educational Studies in Mathematics,* se encuentran recopilados ejercicios investigativos realizados en Estados Unidos sobre la enseñanza de la geometría. Los autores, apoyados en fundamentos matemáticos y algunos ejercicios empíricos exitosos (principalmente de experiencias personales), establecen la posición de la geometría en el currículo de secundaria, proponen secuencias de enseñanza y recomiendan formas de enseñar. En casi todos los artículos se percibe el interés por mostrar que la enseñanza puede ser realizada de una mejor manera. En 1979, en el volumen 4 de una publicación seriada de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco) que fue auspiciada por la ICMI, los investigadores presentan algunas tendencias curriculares para la enseñanza de la matemática en diferentes países, relatan cómo sucedía el proceso de reforma curricular llamado "matemática moderna" y describen ejemplos de formas de enseñar que consideran una buena fuente de inspiración para profesores en diversos lugares del mundo.

En Colombia también se identifica un ejercicio investigativo similar, principalmente realizado por profesores universitarios de programas de matemáticas o de formación de profesores de matemáticas. Por ejemplo, en el Primer Congreso Nacional de Enseñanza de la Matemática a Nivel Medio, llevado a cabo en la Universidad Nacional de Colombia en 1967, profesores como Jairo Charris, Yu Takeuchi y Carlos Federici exponen los retos que enfrenta el currículo escolar al introducir las "matemáticas modernas" en reemplazo de las aproximaciones tradicionales. Y profesores de la Universidad Pedagógica Nacional, como Julia de Delgado, Raquel Ardila y Hernando Alfonso, presentan propuestas de actualización de los programas de matemáticas para bachillerato.

En 1974, adscrito a la Universidad Pedagógica Nacional, se creó el Instituto Colombiano de Pedagogía (Icolpe). En su seno, Carlos Federici y su grupo de trabajo asumieron la tarea de investigar qué podían aprender los estudiantes de primaria sobre lógica y conjuntos, cómo deberían enseñarse los racionales y las razones, cómo introducir los números complejos a partir de vectores y cómo enseñar aspectos matemáticos de la medición, entre otros asuntos.

Décadas del ochenta y el noventa

En las décadas del ochenta y el noventa del siglo pasado el centro de atención de los investigadores amplió su rango de interés con relación a los niveles educativos sobre los cuales intervenir. Se popularizaron trabajos en preesco-

lar, primaria y secundaria y se convocaron estudiantes de matemáticas y de diversas carreras de pregrado, incluidos los futuros profesores, como sujetos de investigación. También se dio inicio a investigaciones sobre la educación matemática en contextos no formales, por ejemplo, con adultos en procesos de alfabetización.

Las preocupaciones investigativas también comenzaron a abarcar más asuntos. A continuación, menciono algunos de los desarrollos más significativos de estas dos décadas. Algunos dieron continuidad a los estudios previos sobre el currículo, la evaluación, los artefactos mediadores y la formación de profesores. Otros abrieron nuevas líneas de trabajo sobre las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática, la resolución de problemas y algunos procesos cognitivos propios del aprendizaje de contenidos específicos. Y otros más contribuyeron a perfilar el giro social en la investigación en educación matemática, que empezó al inicio de la década del noventa.

Los estudios sobre el currículo de matemáticas cambiaron de óptica al abordarse este como un proyecto educativo y no solo como una secuenciación de contenidos de enseñanza. La investigación se centró en el análisis de la pertinencia de los currículos vigentes, la identificación de aspectos que favorecen o dificultan la implementación de un currículo, la selección de referentes útiles para el diseño curricular en matemáticas, la búsqueda de organizadores curriculares, el diseño de tareas y recursos para el aula (dirigido a contextos específicos) y el papel de los profesores en el diseño y el desarrollo curricular. Destaco el trabajo de Thomas Romberg en esta línea de indagación.

La investigación acerca de la evaluación en matemáticas cobró relevancia en las décadas del ochenta y el noventa. Investigadores como Jeremy Kilpatrick, en Estados Unidos, y Mogens Niss, en Dinamarca, retomaron trabajos que se habían adelantado en pedagogía, para desarrollar estudios dedicados a conceptualizar el significado de evaluar en matemáticas, establecer la influencia de diferentes formas de evaluar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y buscar mecanismos para organizar e implementar la evaluación, interna y externa, de cara a las metas de la educación matemática.

A partir de los trabajos de matemáticos como Pólya, filósofos como Dewey y psicólogos como Luria, Greeno y Newell y Simon (Resnick y Ford, 1990), investigadores como Alan Schoenfeld en Estados Unidos, Luz Manuel Santos Trigo en México, Luis Rico, Martín Socas y Luis Puig en España, avanzaron en la línea de investigación sobre la resolución de problemas en educación matemática. Se interesaron en asuntos como: identificar qué es para los estudiantes un problema, cómo resuelven problemas los estudiantes, qué dificultades tienen los estudiantes al resolver problemas, qué características

tiene un buen resolutor de problemas; qué factores metacognitivos, afectivos y sociales afectan el éxito en la resolución de problemas, qué lugar tienen los problemas en la clase de matemáticas, cómo organizar la enseñanza de las matemáticas alrededor de problemas, y los valores educativos de la enseñanza realizada mediante la resolución de problemas. Ellos realizaron un notable trabajo en este campo; algunos aún lo hacen.

El papel de los artefactos mediadores es un ámbito que comenzó a ser explorado por psicólogos, matemáticos y pedagogos interesados en el aprendizaje de las matemáticas, en décadas anteriores a las del ochenta y el noventa, pero tuvo su auge al finalizar el siglo XX. Una de las motivaciones de la investigación fue el vertiginoso desarrollo de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) y su llegada a la escuela. Con fundamentos psicológicos (de corrientes cognitivas y socioculturales) o con bases teóricas provenientes de estudiar en profundidad la naturaleza de los objetos y los procesos matemáticos, los investigadores centraron su interés en asuntos como: la influencia de programas informáticos en el aprendizaje, el papel de las representaciones computacionales en la construcción conceptual, las transformaciones del ambiente de clase al estar presentes las TIC, etc. Programas informáticos como Logo, Cabri Geometry, Geometer's Sketchpad y SimCalc MathWorlds fueron desarrollados con la meta de aprovechar las representaciones computacionales de ideas matemáticas, sujetas a la programación matemática interna de la aplicación, para que los estudiantes sobrepasaran la identificación de atributos físicos y se adentraran en la estructura matemática. La posibilidad de manipular las representaciones matemáticas hizo de estos programas entornos estimulantes para favorecer la indagación matemática, en un acercamiento similar al de las ciencias naturales, en busca de explorar, descubrir, conjeturar y justificar. Destaco en esta línea las investigaciones desarrolladas por James Kaput en Estados Unidos y Luis Moreno y Teresa Rojano en México.

En relación con la investigación sobre los profesores, en las décadas del ochenta y el noventa identifico un cambio importante de perspectiva. Los docentes dejaron de ser sujetos de observación o instrucción y comenzaron a verse como seres pensantes cuyas concepciones, conocimientos y prácticas tienen un alto impacto en el aprendizaje de sus estudiantes. El conocimiento profesional del profesor se volvió una línea de estudio importante y el interés por la perspectiva del profesor para la educación matemática, su desarrollo profesional y su papel en la investigación en educación matemática empezaron a ser preocupaciones de los investigadores. Los estudios de Deborah Ball en Estados Unidos y Olimpia Figueras en México son representativos de esta línea de trabajo.

Estudios investigativos acerca de las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática se destacaron en los años ochenta. Quizás una de las obras más influyentes que condujo a abrir esta línea de investigación es el trabajo de Lakatos, quien dio un vuelco a la visión de las matemáticas, mostrándola como una empresa humana. Este matemático y filósofo estimuló trabajos tendientes a promover esta visión en la escuela. El libro de Davis y Hersh (1982) recoge los principales desarrollos de la época. Investigadores como Paul Ernest en Inglaterra, Anna Sierpinska en Canadá y Ricardo Cantoral en México son reconocidos por sus trabajos desarrollados en esta óptica.

Pero quizás el cambio de dirección más relevante en la investigación en educación matemática durante las décadas del ochenta y el noventa se dio por el interés de investigar el aprendizaje y los procesos cognitivos específicos propios de este. Es decir, los estudiantes entraron en el ámbito de las preocupaciones investigativas. Con fundamento en marcos de referencia muy potentes, como el conductismo y el constructivismo (desarrollados por científicos de la talla de Thorndike, Piaget, Dienes, etc.), y usando estrategias investigativas propias de la piscología, los investigadores comenzaron a estudiar qué y cómo aprendían los estudiantes, cómo desarrollaban capacidades y habilidades matemáticas, cómo procesaban información matemática, cómo resolvían problemas, entre otros asuntos.

Adicionalmente, los investigadores notaron que además de estudiar el aprendizaje de manera general, era necesario —como lo señalaron tempranamente Bauersfeld y Skowronek (1976)— estudiar a fondo el aprendizaje de contenidos específicos, teniendo en consideración la naturaleza y especificidad de estos. La necesidad de desarrollar marcos de referencia particulares dio lugar a una alianza muy productiva entre matemáticos y psicólogos, que derivó en programas de investigación aún vigentes e ilustrativos desde el punto de vista del trabajo colaborativo. Basta mencionar estudios como: la comprensión matemática de las fracciones, las razones y las proporciones, investigada por Kathleen Hart, en Inglaterra; el aprendizaje de los racionales, analizado por Thomas Kieren, en Canadá; el aprendizaje del álgebra, estudiado por Carol Kieran, en Estados Unidos; el razonamiento geométrico, descrito por Pierre y Marie van Hiele, en Holanda. Esta vía de trabajo acarreó el desarrollo de líneas investigativas centradas en el pensamiento numérico, variacional, espacial, métrico, algebraico, analítico, estadístico y probabilístico. También condujo al estudio de procesos como los de argumentar, resolver problemas y demostrar, y al avance de la didáctica de estos dominios y procesos. Afirmo que en las décadas ochenta y noventa reinó la investigación cognitiva en educación matemática, basada en estrategias de indagación empírica, y que fue y continúa siendo muy fructífera.

Además de los avances investigativos mencionados, en la última década del siglo xx se comenzó a dar un giro social en la investigación en educación matemática para prestar atención a aspectos sociales determinantes de la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación en matemáticas. Diversos investigadores coinciden en señalar los comienzos de los años noventa como el momento en el que se empiezan a adoptar teorías socioculturales en los marcos interpretativos y analíticos de los estudios (Lerman, 2006, Valero, 2000). Bajo la influencia de tendencias propias de la psicología cultural, la antropología, la sociología de la educación y teorías acerca del discurso, comenzaron a adelantarse algunos trabajos sobre cognición situada, comunidades de práctica, interacciones sociales, etnomatemática, mediación semiótica, cultura del aula, etc. Adicionalmente, el interés por asuntos socioculturales amplió el panorama de estrategias investigativas empleadas en educación matemática, derivadas de las ciencias sociales. Los trabajos de Alan Bishop, Stephen Lerman, Ubiratàn D'Ambrosio, Ole Skovsmose, Anna Sfard y Paul Ernest, entre otros, son precursores del enfoque sociocultural.

En Colombia la década del noventa puede considerarse como el periodo de surgimiento de grupos de investigación específicos del campo de la educación matemática en las universidades, algunos con participación de profesores de primaria y secundaria. Comenzaron a desarrollarse estudios sistemáticos de corte empírico, muchos de ellos de tipo comparativo, principalmente enfocados en el desarrollo de procesos cognitivos. El interés principal de los investigadores era comprender de qué forma los niños, los adolescentes y los jóvenes acceden al conocimiento matemático, para posteriormente diseñar, implementar y evaluar propuestas didácticas que produjeran un efecto transformador del sistema educativo (Ortiz, 2001). Entre los temas específicos de interés investigativo señalo, a manera de ejemplos: el aprendizaje de los números enteros, las funciones y los racionales; la comprensión de la variable, la ecuación, el límite y la derivada; la enseñanza de las transformaciones geométricas; y las exigencias cognitivas en el acercamiento a procesos como la aproximación, la variación, la argumentación y la demostración. Algunos de los resultados investigativos de esa década tuvieron un efecto directo en la construcción de los *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas* (Ministerio de Educación Nacional, 1998), debido a que representantes de los equipos de investigación más conocidos fueron convocados para trabajar en la propuesta.

Otro asunto de interés investigativo en educación matemática en Colombia, en la década del noventa, fue el diseño curricular para la formación de docentes, dado que la mayoría de los grupos de investigación estaban vinculados a programas de formación de profesores. Estos grupos apoyaron el surgimiento y desarrollo de programas de especialización y maestría dirigidos a profesores.

No identifico estudios colombianos de corte sociocultural en las décadas del ochenta y noventa, aunque el profesor Carlos Vasco comenzaba a señalar la necesidad de prestar atención a la dimensión sociocultural de la educación matemática. En la tabla 1.1 listo algunos grupos de investigación que se conformaron en esta década.

Tabla 1.1 Grupos de investigación colombianos en educación matemática conformados en la década del noventa

Grupo de investigación	*Institución*
Club de Educación Matemática (Club EMA)	Una Empresa Docente, Universidad de los Andes
Grupo de Educación Matemática (GEM)	Universidad del Valle
Asociación Anillos de Matemáticas	Asociación Distrital de Educadores, Bogotá
Didáctica de la Matemática	Universidad Pedagógica Nacional
Grupo de Educación Matemática	Universidad de Antioquia
Grupo Pretexto	Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Grupo Matemáticas Escolares (Mescud)	Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Fuente: información recopilada por la autora.

En las décadas del ochenta y el noventa tres profesores obtuvieron su título de doctor en el campo de la educación matemática en universidades extranjeras, y se convirtieron en los primeros colombianos en tener este nivel de formación en el campo disciplinar. Los autores, nombres de las tesis e institución que les otorgó el título se encuentran en la tabla 1.2.

Tabla 1.2 Primeros doctores colombianos en educación matemática

Fecha	*Autor*	*Tesis*	*Institución*
1980	Luis Carlos Arboleda	*Contribution à l'étude des premières recherches topologiques d'après l'œuvre et la correspondance de Maurice Fréchet*	Escuela de Estudios Superiores en Ciencias Sociales (EHESS)
1990	Adalira Sáenz-Ludlow	*Children's fraction schemes: An elaboration of their number sequence*	Universidad de Georgia
1998	César Delgado	*Estudio microgenético de esquemas conceptuales de alumnos universitarios en su proceso de aprendizaje de conceptos asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso*	Universidad de Barcelona

Fuente: información recopilada por la autora.

Siglo xxi

La investigación en educación matemática en los primeros diecisiete años del siglo xxi está enmarcada en la búsqueda de mecanismos para estrechar lazos entre la educación matemática y la sociedad. Se tienen como premisas que el conocimiento se origina en la interacción social y que el aprendiz es miembro de múltiples comunidades a través de las cuales construye significados de las matemáticas; por lo tanto, los roles de la cultura, las prácticas y los valores sociales son centrales y no secundarios en la construcción de conocimiento, y ameritan ser estudiados en profundidad. Con base en estos planteamientos, se han generado importantes trabajos interdisciplinarios y se emplean conceptos, procesos y métodos provenientes de diversas áreas, para comprender el papel que juegan diferentes aspectos sociales en la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.

Autores como Ubiratàn D'Ambrosio, Stephen Lerman, Ole Skovsmose, Paola Valero, Alan Bishop, Bill Barton y Günter Ziegler han señalado la necesidad de dar un viraje rotundo a la investigación para dejar de ubicar a las matemáticas como el centro de un sistema alrededor del cual gravitan el sistema educativo, los profesores, los estudiantes y los aspectos sociales determinantes de su enseñanza y de su aprendizaje. En lugar de ello, sugieren poner en el centro del sistema al ciudadano aprendiz, alrededor del cual giran el sistema educativo, las matemáticas, las prácticas sociales, las redes de prácticas sociales en las que las matemáticas se usan, y los sistemas institucionales que regulan su injerencia y sus responsabilidades sociales y culturales (Valero, 1999 y 2000; Vithal y Valero, 2003; Valero y Skovsmose, 2012; Baptista y Ribeiro, 2019).

Los asuntos investigativos que describí para las últimas dos décadas del siglo xx siguen vigentes en el siglo xxi. Y han cobrado renovado impulso temas que van más allá de preocupaciones por el aprendizaje individual, tales como: las diferencias en el aprendizaje por sexo, clase social y grupo cultural; el aprendizaje, los errores y las dificultades que experimentan los estudiantes cuando trabajan colectivamente; el afecto y las actitudes hacia las matemáticas; las creencias de los profesores y la enseñanza y el aprendizaje a nivel universitario; el diseño de tareas y de ambientes de aprendizaje.

La ampliación de la visión se ha incrementado notoriamente los primeros veinte años del siglo xxi, así como el cúmulo de tópicos de interés. La investigación en educación matemática ha trascendido tanto las fronteras de la institución educativa como la atención a diferentes tipos de poblaciones, para avanzar hacia el análisis de instituciones y sistemas de prácticas en los que la educación matemática tiene lugar o se regula. Algunos asuntos nuevos

que se investigan son: el desarrollo de competencias matemáticas para ser un ciudadano socialmente activo y responsable; la búsqueda de oportunidades para lograr acceso equitativo a ideas poderosas en matemáticas; los factores determinantes de la constitución de escenarios de aprendizaje de las matemáticas; la construcción de currículos orientados a poner las matemáticas al servicio en el desarrollo social; el papel de los ambientes de enseñanza y aprendizaje para reproducir patrones de interacción social competitivos o colaborativos; las adecuaciones de los sistemas de prácticas institucionales para ponerlos al servicio de la educación matemática de niños y jóvenes; las mediaciones tecnológicas y su contribución en la formación de ciudadanos matemáticamente informados; la conformación de redes de aprendizaje de estudiantes y profesores de matemáticas mediadas por tecnologías informáticas; el papel de la educación matemática en los procesos de socialización y configuración de identidades; la responsabilidad de la educación matemática en los procesos de inclusión y equidad social; el desarrollo cultural que se logra a través de la generación de escenarios y comunidades de aprendizaje de las matemáticas en los cuales se aúnan esfuerzos para la resolución de problemas del entorno local; la dimensión política de la educación matemática.

Si el final del siglo XX fue la época de esplendor de los estudios cognitivos, el siglo XXI ha permitido el florecimiento de los estudios socioculturales y el empleo de estrategias investigativas provenientes de las ciencias sociales. Dos indicadores del auge de esta tendencia sociocultural son el surgimiento, en el año 1998, del grupo Mathematics, Education, and Society (MES) —comunidad en la que se discuten las dimensiones sociales, culturales y políticas de la educación matemática, centrando la atención en aspectos metodológicos y de cooperación internacional— y la ampliación de los tópicos de estudio que se discuten en el Congreso Internacional de Educación Matemática y en la Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

En Colombia los primeros años del siglo XXI se han caracterizado por el posicionamiento de la educación matemática como campo disciplinar e investigativo en el ámbito académico. El incremento del número de grupos de investigación, que pasó de trece en 1995 (Ortiz, 2001) a alrededor de treinta en 2019, y la cantidad de doctores en el campo, cuyo número era de tres en 1998 y en 2019 supera los cien, son indicadores de la dinámica de crecimiento. También lo son la variedad de eventos que reúnen a la comunidad, tales como: el Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, el Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones, la Escuela Nacional de Historia y Educación Matemática, el Encuentro de Programas de Formación de Profesores de Matemáticas, el

Encuentro Regional de Educación Matemática, el Simposio de Matemáticas y Educación Matemática, el Encuentro de Investigación en Educación Matemática, el Encuentro Colombiano de Educación Estadística, el Coloquio Nacional sobre Problemas y Tendencias en Educación Matemática, etc.

En la tabla 1.3 se encuentra un listado de algunos trabajos investigativos de profesionales colombianos, fruto de tesis doctorales presentadas con posterioridad a 2010. Me valgo de ellos para ilustrar algunas ideas planteadas a lo largo del libro. Otros ejemplos son tomados de artículos de investigación o ponencias hechas en memorias de eventos.

Tabla 1.3 Algunas tesis doctorales de investigadores colombianos 2010-2017

Fecha	*Autor*	*Tesis*	*Institución*
2010	Jorge Enrique Fiallo	*Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica*	Universidad de Valencia, España
2010	Leonor Camargo	*Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria*	Universidad de Valencia, España
2011	Élgar Gualdrón	*Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras plana*s.	Universidad de Valencia, España
2011	Sandra Evely Parada	*Reflexión y acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional*	Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Distrito Federal, México
2011	Walter Castro	*Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*	Universidad de Granada, España
2012	Pedro Javier Rojas	*Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos*	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2012	Jeannette Vargas	*Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo: Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*	Universidad de Salamanca, España
2013	Yuly Marsela Vanegas	*Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas*	Universidad de Barcelona, España
2014	Luz Edith Valoyes	*Colombian teachers' expectations of poor and black students' ability to learn algebra*	Universidad de Misuri, Estados Unidos

Tabla 1.3 (continuación)

Fecha	*Autor*	*Tesis*	*Institución*
2014	Rodolfo Vergel	*Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años*)	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2015	Gilberto Obando	*Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3.º y 4.º de una institución educativa de la Educación Básica*	Universidad del Valle, Colombia
2016	Edgar Guacaneme	*Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas*	Universidad del Valle, Colombia
2016	Luis Ángel Bohórquez	*Cambios de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas*	Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colombia
2017	John Henry Durango	*Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso*	Universidad de Antioquia, Colombia

Fuente: información recopilada por la autora.

La educación matemática, un campo en pleno desarrollo

En las páginas anteriores he hecho un breve recorrido, no exhaustivo, por el desarrollo de la investigación en educación matemática. Más que agotar temas, líneas y personas (me disculpo de antemano con todos aquellos a quienes no he nombrado), la panorámica que presento muestra la complejidad del campo y la multiplicidad de asuntos de los que se ocupa. El desarrollo investigativo no ha estado marcado por la uniformidad, sino por una creciente complejidad y variedad de perspectivas. En ese sentido, difícilmente alguna estrategia investigativa puede servir para tratar todas las inquietudes del campo. Se requieren esfuerzos venidos de múltiples orientaciones para avanzar hacia las metas de ganar claridad o aportar soluciones, mediante la investigación en educación matemática, a los álgidos problemas que enfrenta la sociedad actual. Es un hecho que el aumento en la calidad de interacciones entre las diferentes opciones investigativas tendrá beneficios innegables para la sociedad.

Aun a riesgo de ser demasiado limitada en la síntesis, puedo decir que la

investigación en educación matemática ha tenido una evolución en continua ampliación, en aspectos como los siguientes:

- *La finalidad de la investigación en educación matemática.* Inicialmente enfocada en mejorar la enseñanza de las matemáticas, la investigación avanza hacia descripciones, interpretaciones e inferencias sobre el aprendizaje, el estudio de relaciones entre los tres polos del sistema didáctico, el diseño de tareas, asuntos fuera de la escuela que abarcan redes y sistemas de prácticas relacionados con la educación matemática y el desarrollo de cuerpos de conocimientos compartidos en los que modelos, sistemas, conceptos y teorías son útiles para una variedad de propósitos y en una variedad de situaciones.
- *La población.* El interés por la formación matemática de los maestros da paso a la preocupación por la educación matemática de estudiantes de preescolar, primaria y secundaria, la educación matemática universitaria, la educación matemática no formal y la educación matemática de poblaciones diversas. Esta ampliación del campo de visión tiene que ver con reconocer que la educación matemática es un derecho de todos y cada uno de los seres humanos.
- *Los objetos de estudio.* Los contenidos escolares, la enseñanza de las matemáticas y la formación de maestros de matemáticas, como objetos de investigación, dan paso a inquietudes sobre el aprendizaje, el desarrollo profesional de los educadores, el currículo, la evaluación, las relaciones entre historia, filosofía y educación matemática y los factores sociales determinantes de la educación matemática. Actualmente, los objetos de estudio incluyen los sistemas de prácticas sociales y culturales en los que intervienen las matemáticas y las responsabilidades que la sociedad le asigna a la educación matemática para lograr que cada vez más personas tengan oportunidades de acceso equitativo al conocimiento.
- *Los fenómenos de indagación.* Los estudios sobre habilidades y transmisión de información dan paso a investigaciones sobre concepciones, creencias, comprensión, aprendizaje, significados, mediación, comunicación, escenarios, normas, estatus y prácticas sociales de interacción, participación y comunicación, entre otros.

Enfoques, aproximaciones, metodologías, estrategias y recursos

En la segunda sección de este capítulo presento mi punto de vista sobre la distinción entre enfoque, aproximación, metodología, estrategia y recurso para

la investigación. Como no hay uniformidad en la terminología, he escogido una y la uso de manera consistente a lo largo del libro, aunque no por ello considere que es la única opción de organización.

Enfoques empírico-analítico, fenomenológico y sociocrítico en educación matemática

Denomino *enfoque empírico-analítico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de investigación en educación, que desde un punto de vista usualmente llamado positivista asumen quienes consideran que los hechos de indagación sistemática pueden ser sometidos a manipulación, verificación empírica, deducción y formulación de leyes. Esto porque se presupone la existencia de una realidad universal, cognoscible, independiente del contexto y susceptible de controlar y predecir. Con fundamento en marcos conceptuales preestablecidos, los investigadores buscan regularidades en los hechos educativos, los cuantifican, modelan relaciones entre variables y establecen generalizaciones.

Suponiendo que la investigación puede sustraerse de influencias particulares de los participantes en el estudio (incluyendo los investigadores), el enfoque empírico-analítico admite la posibilidad de acceder de manera neutral a conocimiento objetivo sobre asuntos propios del campo de investigación porque asume que los fenómenos están bien determinados.

Por lo menos durante la primera mitad del siglo XX, la investigación en educación matemática tuvo una fuerte influencia de la investigación en ciencias naturales, psicología y pedagogía y compartió con estos dominios el enfoque empírico-analítico propio de la época. Una de las razones de tal influencia fue que muchas de las investigaciones realizadas en pedagogía y psicología se valían de hechos o situaciones que ocurrían en el ámbito de la educación matemática, para derivar generalizaciones sobre el aprendizaje y la educación, y estas investigaciones fueron la base de los estudios en educación matemática.

El enfoque empírico-analítico en educación tiene como objetivos básicos controlar los elementos involucrados en la acción educativa, explicar hechos y predecir resultados (Kilpatrick, 1992; Gómez, 2000; Villarreal, 2003). Por tal razón, el ejercicio investigativo se suele apoyar en recursos estadísticos de recogida de información, análisis de datos y cuantificación de resultados, que son de larga trayectoria y que se han estandarizado desde hace décadas. Esto hace que el enfoque haya sido denominado, comúnmente, enfoque cuantitativo. Sin embargo, como señala Páramo (2013), lo que define el enfoque de una investigación no son los procedimientos empleados sino la postura epistemológica que se asuma para identificar problemas, formular preguntas

y aproximarse al fenómeno de investigación. Es un error asociar unívocamente el enfoque empírico-analítico con procedimientos cuantitativos de procesamiento y análisis de datos. De hecho, tales procedimientos requieren de un acercamiento cualitativo a la hora de juzgar los datos, por lo que no es productivo asociar el enfoque con el procedimiento.

La principal crítica que se le hace al enfoque empírico-analítico está en que muchas de sus prácticas no se ajustan a la naturaleza de los problemas que atiende la investigación en educación matemática, en donde la institución educativa es el principal escenario, y estudiantes, padres de familia, directivos docentes, diseñadores de currículo, son sus protagonistas. El desajuste se debe a que el pensamiento, las acciones y las interacciones de los actores de los hechos educativos no son susceptibles de control y predicción. Además, porque más allá de obtener conjuntos de valores, tendencias numéricas, correlaciones, modelos de regresión, etc., la investigación en educación matemática busca describir, interpretar y sacar inferencias dotadas de significado acerca de los fenómenos que estudia (Romberg, 1992; Ortiz, 2001; Villareal, 2003), aunque ocasionalmente se valga de procedimientos matemáticos para procesar información. La complejidad de los asuntos investigativos y la gran influencia de una multiplicidad de factores contextuales en las prácticas educativas que tienen que ver con enseñar y aprender matemáticas han conducido la mirada al enfoque fenomenológico.

Denomino *enfoque fenomenológico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de acercamiento a la investigación que, desde una aproximación antropológica, hermenéutica, o colaborativa social, asumen quienes consideran que los fenómenos de indagación sistemática pueden ser descritos, interpretados, explicados (a fin de construir significados sobre las acciones y discursos humanos) y cuestionados (a fin de buscar alternativas para su transformación). El enfoque fenomenológico es bien recibido en la investigación en ciencias humanas porque, más allá de buscar control y predicción, pretende obtener descripciones, explicaciones e inferencias, fundamentadas y suficientemente significativas de los fenómenos en estudio, que permiten establecer relaciones entre eventos, derivar esclarecimientos útiles y convincentes, hacer hallazgos novedosos, etc.

Denomino *enfoque sociocrítico* al conjunto de supuestos, visiones y prácticas de investigación en educación que plantean una racionalidad dirigida a la consecución de objetivos, en la que intervienen juicios, valores e intereses, con un expreso compromiso para la transformación social y la emancipación del ser humano. Este enfoque no se concibe ni empírico ni interpretativo. Sus

contribuciones surgen de la crítica social, con un marcado carácter autorreflexivo, en estudios de corte comunitario y de investigación participativa. El enfoque sociocrítico es privilegiado en educación matemática, particularmente por quienes se ubican en la corriente de investigación "educación matemática crítica" que fue introducida por Frankenstein, en Estados Unidos, y Skovsmose, en Europa, en la década del ochenta del siglo pasado. Como lo señalan Valero y Skovsmose (2012), esta perspectiva privilegia la conceptualización del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, así como la investigación misma sobre estas, como prácticas sociopolíticas.

La investigación en educación matemática favorece actualmente los enfoques fenomenológico y sociocrítico al tener una visión según la cual no basta con identificar los problemas, analizarlos y construir modelos sobre deficiencias o dificultades. La investigación debe ir más allá para explorar oportunidades para el progreso y buscar soluciones que sean útiles a estudiantes, profesores y agentes educativos, en diferentes entornos culturales, porque responden a la complejidad de las circunstancias particulares (Confrey, 2000; Moschkovich y Brenner, 2000).

Los enfoques fenomenológico y sociocrítico suelen asociarse con procedimientos inductivos no numéricos de recolección de información y análisis cualitativo de datos. Infortunadamente, los procedimientos cualitativos no siempre están bien descritos, los investigadores tienen poca guía y muchas veces actúan a ciegas o de forma muy artesanal (Miles y Huberman, 1994). Por eso, aunque se observa una predisposición al uso de procedimientos cualitativos, los investigadores no niegan la posibilidad de describir y manipular datos matemáticamente si con ello logran profundizar en los fenómenos en estudio y producir resultados útiles y confiables.

Desde mi punto de vista, en consonancia con Páramo (2013) y como lo expresaron Dreyfus y Paola (2004) hace ya más de una década, es tiempo de sobrepasar la dicotomía sostenida entre el uso de procedimientos cualitativos y cuantitativos, dejando de asociarlos con uno u otro enfoque epistemológico, para aprovechar los beneficios de cada uno según los fines de la investigación. Como estos autores señalan, es posible imaginar combinaciones bien estructuradas de procedimientos cualitativos y cuantitativos para lograr diseños investigativos más útiles y válidos que los que se conseguirían empleando solo los de un tipo; esto porque los procedimientos no están comprometidos ineludiblemente con el enfoque. Obviamente, el reto de combinar métodos va de la mano de un enfoque investigativo claro y de establecer los alcances de cada procedimiento, según los propósitos del estudio.

Aproximaciones en las investigaciones con enfoque fenomenológico o sociocrítico

Los presupuestos sobre la naturaleza del ejercicio investigativo ubican a los investigadores en el enfoque empírico-analítico, el fenomenológico o el sociocrítico. Situados en el enfoque, los intereses investigativos específicos, la perspectiva investigativa y los propósitos de la investigación determinan la aproximación que enmarca un estudio. En los enfoques fenomenológico y sociocrítico, Miles y Huberman (1994) identifican tres aproximaciones que son frecuentes en investigación en educación matemática: interpretativa o hermenéutica, antropológica y colaborativa social (esta última más ligada al enfoque sociocrítico). A continuación, me refiero a cada una.

Aproximación interpretativa o hermenéutica

El interés principal de la *aproximación interpretativa o hermenéutica* es rastrear, sin juzgar, las diversas "capas" de significado que subyacen a las acciones, las interacciones y los discursos de las personas (gestuales, verbales o escritos), vistos como conjuntos de signos. En particular, el investigador en educación matemática buscar profundizar en los significados que construyen estudiantes, profesores, agentes educativos, sobre: los objetos y procesos matemáticos, la naturaleza de las prácticas educativas y de evaluación, los factores sociales y culturales determinantes de la cultura escolar, etc.

Dos mecanismos pueden ser empleados por los investigadores para interpretar los signos: a) mediante una aproximación interpretativa fenomenológica, en la que se busca una cercanía total con el fenómeno que se está indagando para conocerlo, comprenderlo y captar su significado "en profundidad" de forma global; b) mediante una aproximación interpretativa interaccionista que se enfoca en interpretar grupos de acciones e interacciones que tienen un interés particular. Estos son empleados, por ejemplo, en las investigaciones de Fiallo (2010), Camargo (2010), Gualdrón (2011), Castro (2011), Vargas (2012), Rojas (2012), Valoyes (2014), Vergel (2014), Obando (2015) y Durango (2017). En cualquiera de los dos casos, los investigadores no están más alejados del fenómeno de estudio que sus informantes y se reconoce que las interpretaciones que logran están influenciadas por sus propias elaboraciones. Los investigadores no intentan extraer información del escenario investigativo de manera imparcial, sino mediante una coelaboración con los participantes del estudio. Por ello, en esta aproximación, como en las demás que corresponden

al enfoque fenomenológico, no se pretende generar leyes generales, sino hacer interpretaciones factibles y útiles (Tobin, 2000).

Aproximación antropológica

De acuerdo con la *aproximación antropológica,* la investigación se enfoca en la identificación de regularidades de comportamientos, acciones y prácticas de grupos humanos en su escenario natural. Para el caso del campo disciplinar de la educación matemática, esta identificación se hace en los escenarios en los que la educación matemática ocurre, se planea o se norma. Las regularidades son detectadas por los investigadores, quienes procuran mimetizarse en el escenario para participar en las prácticas del grupo social en estudio como si hicieran parte de este e identificar y describir eventos cotidianos o inusuales, haciendo énfasis en las particularidades locales. Este es el caso de las investigaciones de Vanegas (2013) y Bohórquez (2016). El resultado del ejercicio les permite detectar patrones expresados por medio de usos, lenguajes, artefactos, rituales y relaciones con los cuales logran hacer inferencias sobre aspectos culturales del grupo social en estudio, interés principal de esta aproximación (Kilpatrick, 1992).

Aproximación colaborativa social

La *aproximación colaborativa social* estudia acciones de colaboración en escenarios sociales. Los directamente implicados en el fenómeno en estudio buscan a investigadores que se sientan cómodos en el escenario social y les piden acompañamiento en tiempo real para estudiar la situación. Investigadores sensibles a las inquietudes de los participantes diseñan junto con ellos un libreto para experimentar una transformación en el escenario. La investigación busca una comprensión más profunda del asunto que les preocupa y, eventualmente, una modificación del ambiente social, gracias a un proceso de indagación crítica que busca detectar y remover estructuras invisibles opresivas. Los investigadores pueden tomar dos posturas: reflexiva, asumiendo una actitud de indagación y cuestionamiento; o dialéctica, adoptando una interpretación opuesta a la de los actores locales, para incentivar la mirada analítica. Para el caso de la investigación en educación matemática, esta aproximación busca generar procesos colaborativos, independientes y autónomos, de búsqueda de información, comprensión y transformación de prácticas relacionadas con la educación matemática, procurando su mejoramiento, a partir de asumir responsabilidades compartidas (Kilpatrick, 1992; Gómez, 2000; Valero, 2000; Parada, 2011).

Metodología y estrategia investigativa

Denomino *metodología de investigación* al conjunto conformado por un enfoque, una o varias aproximaciones, una o varias estrategias investigativas, un conjunto de recursos y una fundamentación teórica específica que genera la base racional para orientar la investigación de principio a fin. En una metodología, la fundamentación teórica y las estrategias se articulan en una relación estrecha de construcción y reformulación mutua, en la que los principios y conceptos asumidos en la fundamentación teórica definen el espectro de lo que es posible y deseable conocer y de cómo puede ser conocido (Moschkovich y Brenner, 2000; Radford y Sabena, 2015; Saxe, De Kirby, Le, Sitabkhan y Kang, 2015; Spangler y Williams, 2019). La metodología determina el problema a investigar, las preguntas que se hacen, el marco conceptual de referencia, el modelo investigativo, las estrategias y los recursos que se ponen en juego para obtener información y analizarla.

Una medida del avance de un campo disciplinar es la consolidación de metodologías específicas de este, con las cuales conducir sus indagaciones. En ese sentido, desde finales del siglo XX y hasta hoy, los profesionales del campo de la educación matemática han intentado consolidar metodologías propias que contribuyan a la construcción de una identidad disciplinar y permitan reconocer quiénes hacen investigación en el campo (Kilpatrick, 1992). A continuación, a manera de ejemplo, describo brevemente dos metodologías que surgieron en la década del ochenta del siglo pasado (la ingeniería didáctica y el ciclo ACE) y otras dos, que recientemente han empezado a cobrar importancia, dirigidas a analizar procesos de aprendizaje en el aula de matemáticas: la metodología de aproximación semiótica (Radford y Sabena, 2015) y la metodología basada en el modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2015). Ambas metodologías se fundamentan en principios de la psicología cultural promulgados por Vygotski y por sus discípulos Leóntiev y Davydov.

Ejemplo 1.1 Ingeniería didáctica

La *ingeniería didáctica* es una metodología de investigación que surgió en la década del ochenta cuando el investigador francés Guy Brousseau se dio a la tarea de proponer una forma de indagación específica con base en las teorías de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986) y de la transposición didáctica (Chevallard, 1991). Buscaba una metodología que permitiera enfrentar, de manera autónoma y con independencia de otros campos de conocimiento, fenómenos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas.

La teoría de las situaciones didácticas parte del supuesto de que el aprendizaje se produce mediante un proceso de adaptación y aculturación como producto de la interacción entre el aprendiz y un medio en el que este actúa para resolver una tarea y que reacciona a las acciones del sujeto. El conocimiento se alcanza cuando las acciones que permiten al estudiante alcanzar la meta se refuerzan, mientras que se desestiman las acciones que no conducen a esta. A partir de esta idea, se entiende que las tareas propuestas a los estudiantes son fruto de una cuidadosa planeación, de tal suerte que: a) el conocimiento matemático que se aprende es precisamente la solución óptima a una situación sugerida en la tarea, la cual se denomina "situación fundamental"; b) la tarea se diseña en un medio que reacciona a las acciones del estudiante positiva o negativamente, según si las acciones van encaminadas o no a la situación fundamental; c) el estudiante es capaz de llegar a la solución óptima, con poca ayuda del profesor en "situación adidáctica"; y d) el profesor tiene la responsabilidad de llevar a cabo procesos de "devolución" (al procurar que sus estudiantes acepten la responsabilidad de resolver la tarea por ellos mismos) e "institucionalización" (al conectar el conocimiento construido por los estudiantes con el conocimiento escolar de referencia) (Artigue, 2015). El diseño investigativo parte de un análisis riguroso de las tareas, en el que se articulan los niveles macro (curricular y didáctico) y micro (de la interacción con el conocimiento y con los interlocutores del aula) (Calderón, 2005). El análisis se realiza desde una perspectiva sistémica y particular. En la primera fase del diseño investigativo se llevan a cabo análisis preliminares (epistemológico, cognitivo y didáctico) del objeto de enseñanza. Estos tienen como fin analizar la naturaleza matemática del objeto de conocimiento y el proceso por el que este transitó históricamente hasta convertirse en objeto matemático; además, indagar por las concepciones, dificultades y obstáculos que han primado sobre el objeto en el ámbito educativo y establecer las restricciones propias de la transposición didáctica. A partir del análisis preliminar, se formulan hipótesis investigativas, se conciben las situaciones didácticas y se lleva a cabo un análisis *a priori* de las variables macro- y microdidácticas, relacionadas con las tareas que se propondrán a los estudiantes. En esta fase se prevén las acciones de los estudiantes en el medio, las interacciones entre los estudiantes y el profesor y las oportunidades que los estudiantes tendrán para aprender, y se analiza cómo y por qué podrán aprender. Después, se lleva a cabo la fase de experimentación, en la que se ejecuta el diseño en el entorno escolar previsto y se recoge información que pueda dar cuenta de los fenómenos identificados en el análisis *a priori.* Luego se realiza un análisis *a posteriori,* que se compara con el análisis *a priori,* y se evalúa si la situación didáctica tuvo el efecto deseado.

Ejemplo 1.2 Ciclo ACE

El *ciclo ACE* es una metodología de investigación que surgió de los trabajos de Ed Dubinsky, realizados en la década del ochenta del siglo pasado. A partir de un planteamiento constructivista sobre la abstracción reflexiva, desarrollado para la educación matemática, el autor propuso la teoría APOE para el aprendizaje de los conceptos matemáticos, la cual tiene en cuenta cuatro componentes: acciones, procesos, objetos y esquemas. Estos están en la mente de un estudiante al momento de construir significado. La teoría ha sido empleada amplia y exitosamente para analizar el desarrollo de conceptos, principalmente en el caso de estudiantes de secundaria y universidad.

La teoría APOE brinda a la investigación una herramienta denominada descomposición genética, que es un modelo hipotético del proceso de construcción mental de los conceptos, por el que un estudiante debería transitar en el proceso de aprendizaje. Con esta herramienta como fundamento conceptual, la estrategia investigativa de la metodología llamada ciclo ACE (sigla derivada de la escritura en inglés de actividades, discusión en clase y ejercicios) consiste en promover, implementar y evaluar situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas. Las etapas en las que se desarrolla la investigación incluyen un análisis teórico de los conceptos matemáticos, que da lugar a una descomposición genética preliminar de cada uno, el diseño e implementación de situaciones de enseñanza de tales objetos, en las que los estudiantes se involucran en el escenario usual de las clases de matemáticas, y la evaluación de su aprendizaje en términos de acciones, procesos, objetos y esquemas logrados por ellos. En varias oportunidades esta evaluación conduce a reelaboraciones de la descomposición genética, lo que contribuye a su refinamiento.

Ejemplo 1.3 Aproximación semiótica

La *metodología aproximación semiótica,* propuesta por investigadores como Radford y Sabena (2015) y Vergel (2014), parte de la consideración del aprendizaje como un proceso a través del cual los estudiantes se familiarizan gradualmente con significados matemáticos culturales y formas de actuar y razonar históricamente constituidos. La familiarización no implica acuerdo sino comprensión socialmente responsable y conceptualmente articulada. Lo anterior se logra a través de la actividad, por lo que un aspecto central de la estrategia es el diseño de tareas para favorecerla. A partir de la identificación de requerimientos curriculares generales y de la caracterización de escenarios escolares particulares, se proponen metas y contenidos específicos mediante los cuales el conocimiento es instanciado. Un análisis epistemológico preliminar contribuye a estructurar las tareas y a seleccionar y secuenciar preguntas y

problemas. Las primeras tienen la función de atraer a los estudiantes a una actividad; poco a poco las preguntas y los problemas se vuelven más complejos, lo que lleva a los estudiantes a movilizar el contenido matemático en profundidad.

Como uno de los principios que soporta la metodología es que el aprendizaje es un fenómeno social, la interacción en clase es central en el diseño. Generalmente esta se desarrolla con los estudiantes organizados en pequeños grupos mientras el profesor circula entre ellos y se involucra en discusiones, y no como guía u observador, sino como mediador que forma parte de la actividad. Sin importar qué tan planeada sea la clase, es imposible predecir con exactitud lo que ocurrirá. La clase es vista como un sistema dinámico en el cual suceden eventos de los que emergen significaciones que entran en conflicto. En todo caso, los estudiantes y el profesor se involucran en una actividad sensorial y material en la que recurren a sistemas semióticos a través de los cuales ellos dan forma a sus ideas e intenciones en el marco de vías de pensar y actuar constituidas histórica y culturalmente. En este proceso los estudiantes y el profesor producen acciones multimodales a través de las cuales se producen significados complejos de forma subjetiva.

Para analizar los procesos de objetivación y significación en esta metodología, se recurre a recursos analíticos que permiten rastrear momento a momento la actividad corporal y verbal de los estudiantes y el profesor. Lo que dicen, la entonación y el ritmo con el que hablan, los gestos, las expresiones faciales, la posición del cuerpo, lo que dibujan o representan, lo que manipulan, señalan, miran, etc., todos ellos son importantes ya que son recursos semióticos que, de manera integrada, dinámica, sincrónica o diacrónica, permiten a los estudiantes tomar conciencia de lo que significa pensar y hacer matemáticas. Además de las estrategias, la metodología sugiere algunos constructos con los cuales describir e interpretar el aprendizaje como una actividad mediada por signos. Entre ellos menciono: el nodo semiótico, la contracción semiótica y el bucle semiótico (Vergel, 2014; Radford y Sabena, 2015).

Ejemplo 1.4 Modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas

La metodología denominada *modelo para la abstracción de acciones epistémicas anidadas* (Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz, 2015) está concebida para investigar la construcción de conceptos matemáticos, por parte de los estudiantes, en contextos sociales de indagación específicos. Se fundamenta en presupuestos socioculturales de la teoría de la actividad, sugeridos por Davydov. Según estos, el conocimiento científico no es una simple expansión de la experiencia personal diaria, sino que requiere formas particulares de pensar que se cultivan activamente y que permiten establecer conexiones internas de

ideas, en un proceso que va de la abstracción al análisis y a la síntesis. En un proceso dialéctico, en donde un experto interactúa con novatos, estos últimos avanzan desde formas de pensar iniciales a otras más desarrolladas mediante la negociación de significados. La metodología establece un puente entre la dimensión sociocultural y la cognitiva, al fundamentarse también en la idea de Freudenthal de la "matematización vertical", para imaginar el aprendizaje como un proceso de reconocimiento de constructos matemáticos previos que son útiles para resolver un problema o enfrentarse a una situación y usar la matemática conocida para acceder a nuevos conocimientos matemáticos.

En la metodología se articulan las siguientes fases. La fase 1, de diseño, en la que se anticipa un conjunto de acciones que los estudiantes y el profesor pueden llevar a cabo a través de una secuencia de tareas que buscan promover la transformación continua de objetos matemáticos (*i. e.*, conceptos, relaciones, estrategias, razonamientos); se pretende que los estudiantes tengan oportunidades para construir nuevos objetos, aplicarlos como herramientas en contextos familiares y usarlos en contextos que requieran la elaboración de otros objetos matemáticos. Es necesario configurar un mecanismo para que los estudiantes establezcan conexiones entre el conocimiento previo y los nuevos objetos y lo integren en formas que no estaban disponibles previamente. La fase 2, de análisis preliminar, en la que se examinan las tareas previstas estudiando posibles caminos para implementarlas y gestionarlas. La atención se centra en el conocimiento que hay que activar para realizar la tarea y en el que se espera emerja en el curso de esta. Para cada objeto de conocimiento los investigadores producen una descripción operativa mediante un conjunto de indicadores que permitan afirmar cuándo un estudiante está expresando o usando tal objeto. El resultado del análisis *a priori* es una estructura de objetos de conocimiento que establece relaciones entre unos y otros y destaca aquellos más inclusivos. La fase 3, de obtención de datos y análisis preliminar, en la que se implementan las tareas y se establece la forma mediante la cual se recopilará la información a analizar. Las interacciones seleccionadas son registradas y estudiadas de tal forma que se obtenga un panorama del proceso entero de aprendizaje. Se llevan a cabo ejercicios de reducción de información, dejando solamente aquella relevante, y esta se fragmenta según cambios en el contenido o en la aproximación que están teniendo los estudiantes; con los fragmentos se construyen episodios. En cada episodio se identifica si aparece o no un nuevo objeto de conocimiento en uno o más estudiantes en los que se ha enfocado la atención. Para ello se rastrean necesidades en los estudiantes, manifestadas con expresiones de entusiasmo, incertidumbre, sorpresa, curiosidad, desconcierto. Son consecuencia de un conflicto cognitivo, no siempre consciente por parte de ellos, que sirve para identificar y explicar el surgimiento de una actividad de construcción de conocimiento.

> La fase 5, de análisis en profundidad, en la que se usan los episodios en los cuales se ha apreciado la aparición de un objeto de conocimiento. Se identifican y caracterizan los tres estados epistémicos del proceso de abstracción: a) el reconocimiento de los objetos previos que se tienen a disposición, b) la emergencia de un nuevo objeto de conocimiento a partir de la reorganización de los previos (que se hace explícita en acciones de cálculo, elaboración de esquemas, razonamientos, justificaciones, etc.), y c) la consolidación del nuevo objeto a partir de su uso flexible y de manifestaciones expresas por parte de los estudiantes. El ejercicio analítico tiene como meta develar el proceso por el cual emergen los nuevos objetos de conocimiento como una reorganización vertical de los previos y contribuir a refinar el modelo a través del despliegue del proceso ocurrido en el episodio. En este análisis, realizado intervención por intervención, las definiciones que se han hecho operativas son cruciales. Proveen criterios claros para evaluar si la expresión o la acción de un estudiante es evidencia de la construcción que lleva a cabo.

A falta de metodologías específicas que se ajusten a los fenómenos de interés, los investigadores en educación matemática han optado por desarrollar metodologías propias para sus estudios. Se valen de estrategias provenientes de otros ámbitos investigativos, aunque emplean siempre marcos de referencia que aludan a objetos y procesos matemáticos o a prácticas sociales en las que las matemáticas juegan un papel central. El marco de referencia que guía el diseño investigativo es el que determina que la investigación sea del campo o no, y no la metodología. En ese sentido, sigue siendo válida la afirmación de Gutiérrez (1991) cuando señala que la investigación en educación matemática es de carácter multidisciplinar, más que autónomo.[1]

Denomino *estrategia investigativa* al mecanismo que pone en funcionamiento un diseño investigativo en el mundo empírico, permitiendo a los investigadores conectar sus presupuestos teóricos con formas específicas de obtener información para analizarla (Denzin y Lincoln, 1998). Es el conjunto de prácticas, recursos e instrumentos, organizados de manera más o menos planificada, que se emplea en una investigación para hacer y reportar una indagación disciplinada sobre un asunto de interés. Como indica Villarreal

---

1 Incluso, a partir de 2005, ha nacido un interés por articular diferentes teorías para hacer investigación colaborativa, como una vía de atender fenómenos complejos y aunar sinergias, marcos de referencia y estrategias investigativas entre diferentes grupos. El proceso se denomina *networking* (Artigue, Bartolini-Bussi, Dreyfus, Gray y Predifer, 2005) y se ha visto como un avance en el crecimiento de la comunidad de investigación en educación matemática.

(2003), el término "indagación" se refiere a una búsqueda asociada a interrogantes que se quieren responder. Y el calificativo "disciplinada" pretende señalar que el proceso es sistemático y susceptible de ser auditable, además de que los resultados obtenidos pueden ser públicamente examinados y sometidos a crítica por otros miembros de la comunidad donde se inscribe la investigación.

Las estrategias han surgido del trabajo investigativo en diferentes campos disciplinares y van variando con el tiempo. Se caracterizan por privilegiar ciertas formas de poner el diseño en movimiento, según las inquietudes investigativas y en coherencia con los marcos de referencia. Pero, en cualquier caso, el carácter investigativo de un ejercicio académico se consigue si la estrategia asumida cumple tres características, señaladas por Bishop (1992):

- *Indagación.* Dinámica interrogativa y crítica en la búsqueda intencional y sistemática del conocimiento. En el caso de la investigación en educación matemática, se interroga sobre fenómenos como aquellos señalados en la primera sección de este capítulo.
- *Evidencia.* Información que exhibe la situación sobre la cual se centra la indagación. En el caso de la investigación en educación matemática, como se verá, pueden ser registros de clases o de actividades institucionales, producciones escritas y orales de estudiantes y profesores, textos educativos, programas académicos, documentos históricos, etc.
- *Teoría.* Base teórica que guía la indagación y soporta las afirmaciones que se hacen en el estudio, además de ser un producto esencial de la actividad de investigación. En el caso de la educación matemática, este fundamento está referido a las matemáticas involucradas, aspectos de su enseñanza, su aprendizaje, su evaluación, o a las redes de prácticas o sistemas institucionales que tienen injerencia en la educación matemática.

La indagación y la evidencia dependen de la estrategia, mientras que estas dos, junto con la teoría, determinan la metodología. Cabe mencionar el llamado de alerta que hacen Bishop (1992) y Kilpatrick (1994) al señalar que algunas actividades como la mera acumulación de información, el reporte de un incidente que ocurre accidentalmente, el diseño de materiales de enseñanza, los ejercicios especulativos sobre cómo enseñar tal o cual asunto, la narración de una experiencia educativa, por sí mismas, no constituyen un ejercicio investigativo, aunque cada una de ellas podría aportar evidencias en algún momento de un proceso de indagación, de acuerdo con la estrategia que se adopte. En el capítulo 3 del libro presento un conjunto de estrategias que son empleadas

en investigación en educación matemática por quienes adoptan un enfoque fenomenológico o sociocrítico.

Recursos para obtener información y para analizar datos

Una estrategia se apoya en un conjunto de recursos que se ponen en juego en un diseño investigativo con la intención de llevar a cabo la indagación disciplinada, recabar evidencia acerca del fenómeno estudiado e intervenir sobre la información recolectada, de manera analítica. Los *recursos* son el conjunto de acciones investigativas, técnicas e instrumentos para registrar información, depurarla, construir datos, analizar datos y visualizar hallazgos.

La selección de recursos está determinada por el enfoque, la aproximación investigativa, el marco teórico de referencia, las preguntas de investigación, la estrategia, el contexto experimental y las posibilidades y limitaciones económicas y de tiempo. Por esa razón, cada investigación es única y difícilmente repetible en toda su extensión.

Dadas la diversidad y la complejidad de los asuntos que se investigan en educación matemática, se requieren recursos y formas productivas variadas para enfrentar los fenómenos y tener oportunidades para aclararlos o resolverlos. Pueden ser entrevistas, observaciones directas, artefactos culturales, documentos, materiales audiovisuales, narraciones, fotos e incluso experiencias personales (Denzin y Lincoln, 1998).

Frecuentemente los investigadores en educación matemática se valen de recursos empleados en otros campos, como los de la psicología, la pedagogía, la antropología, la historia y la sociología (Kelly y Lesh, 2000). Pero no por ello adoptan las "metodologías" de estos campos, pues no usan sus marcos de referencia ni tienen las mismas preguntas de indagación. Conviene ser precisos al hablar y hacer referencia a recursos y no a metodologías. Por ejemplo, no es correcto decir "mi metodología es la etnografía", a no ser que el interés sea producir información referida a la cultura. Pero es posible decir "empleo técnicas etnográficas" para aludir a la forma como se recolectó la información para el estudio.

Termino esta sección haciendo una precisión. Como ya mencioné, es posible que una investigación con enfoque fenomenológico o sociocrítico se valga de algunos procedimientos cuantitativos, si el diseño investigativo lo requiere. Esto no produce incoherencias epistemológicas si el tratamiento dado a la información numérica recogida se ajusta al enfoque. De hecho, es curioso que, en los últimos diez años, a pesar de prevalecer los enfoques fenomenológico y sociocrítico, hay un renacer de procedimientos cuantitativos empleados en

la investigación en educación matemática. Basta echar una ojeada a las actas de las reuniones anuales del PME para corroborar esta afirmación. Según Kelle y Buchholtz (2015), esto puede deberse al impacto que han tenido los estudios evaluativos de desempeño a gran escala, como el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por su sigla en inglés) y el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por su sigla en inglés), y al reconocimiento, cada vez mayor, de las limitaciones de algunos procedimientos cualitativos para atender en profundidad, sin apoyo de procedimientos cuantitativos, los asuntos investigativos. Lo anterior ha llevado a los investigadores a desvincular los procedimientos empleados del enfoque. Los autores invitan a considerar la combinación de procedimientos organizando la investigación en subestudios para atender asuntos particulares en cada uno, de tal forma que los resultados dan cuenta de un fenómeno complejo. Proponen tres formas de combinar los procedimientos cualitativos y cuantitativos:

- *Diseño secuencial cualitativo → cuantitativo.* Procedimientos cualitativos iniciales ayudan a identificar asuntos centrales y a desarrollar conceptos teóricos e hipótesis que pueden ser posteriormente examinadas con procedimientos cuantitativos.
- *Diseño secuencial cuantitativo → cualitativo.* Procedimientos cuantitativos iniciales pueden ser empleados para identificar áreas problemáticas y preguntas de investigación, las cuales pueden ser luego investigadas con ayuda de procedimientos cualitativos.
- *Diseño paralelo cualitativo-cuantitativo.* Los dos tipos de procedimientos se ponen en juego en paralelo buscando recopilar los datos y analizarlos con el apoyo de técnicas provenientes de los dos tipos de procedimientos, para enriquecer la información obtenida por ambas vías.

La combinación puede ir más allá. Por ejemplo, si se estudia un nuevo ambiente de aprendizaje en una práctica escolar, usualmente al inicio del estudio hay poco conocimiento previo acerca de sus efectos y es muy difícil suponer hipótesis que se puedan evaluar en el escenario antes de acceder a este. En ese caso, un estudio exploratorio, usando procedimientos cualitativos, en el que se examinen los efectos del nuevo ambiente de aprendizaje podría llevar a generar hipótesis que posteriormente puedan testearse con procedimientos cuantitativos. Y posteriormente un nuevo estudio mediante procedimientos cualitativos puede ser útil para profundizar en los hallazgos del estudio realizado cuantitativamente, empleando teorías del campo de la educación matemática que permitan fundamentar interpretaciones. A largo plazo, el análisis cuali-

tativo puede derivar en propuestas de nuevos ambientes de aprendizaje, que también pueden ser investigados empíricamente combinando procedimientos cualitativos y cuantitativos (Kelle y Buchholtz, 2015).

Postura ecléctica o de caja de herramientas

Propongo, en consonancia con algunos investigadores (Romberg y Gómez, 1997; Kelly y Lesh, 2000), ver el ejercicio investigativo en educación matemática desde un punto de vista pragmático. Además de concebirlo como una indagación disciplinada y sistemática, le agrego el calificativo de "auténtica", es decir, condicionada por las inquietudes genuinas del investigador —lo que le permite capturar de mejor manera la información que necesite, analizarla y producir recuentos consistentes, sistemáticos y científicos de sus hallazgos— y no por el deseo de seguir una aproximación o una estrategia al pie de la letra. Cuidando la coherencia del diseño y la ruta en busca de respuestas a las preguntas, los investigadores pueden combinar aproximaciones, estrategias y procedimientos para construir diseños cuya naturaleza no está necesariamente predeterminada y cuyos recursos sean vistos como el resultado de buscar en una caja de herramientas aquellas que se requieren para enfrentar la tarea. Obviamente, la escogencia de los recursos empleados debe estar convenientemente explicada y justificada por los objetivos investigativos y debe producir diseños coherentemente lógicos.

Este punto de vista y la conciencia de la complejidad de los asuntos que se investigan en educación matemática me lleva a mencionar una tercera aproximación fenomenológica, además de la hermenéutica, la antropológica y la colaborativa social: la aproximación sistémica (Kilpatrick, 1994), que es asumida, por ejemplo, en la metodología de ingeniería didáctica.

Aproximación sistémica

De acuerdo con la aproximación sistémica, la investigación en educación matemática se enfoca en establecer relaciones entre comportamientos, discursos, interacciones, acciones (colaborativas o no), concepciones, significados y prácticas de grupos humanos en escenarios naturales o prediseñados en donde la educación matemática ocurre, se planea, se transforma o se regula. Para ello, el investigador se vale de aproximaciones antropológicas, interpretativas (fenomenológica o interaccionista) y/o de colaboración social (reflexiva o dialéctica) y de algunos procedimientos usados principalmente en los enfoques fenomenológico o sociocrítico, para construir una estrategia propia que

le permita analizar un fenómeno sistémicamente, no de manera aislada, sino en el marco de situaciones complejas.

En una postura ecléctica, como la que defiendo, las estrategias y los recursos existentes se independizan de la aproximación, e incluso del enfoque, para ponerse al servicio de la búsqueda metódica. Como lo indican Cook y Reichardt (1986; citados en Sierra, 2011) y Kilpatrick (1994), son más los beneficios que resultan de combinar aproximaciones o estrategias que los de pretender mantener una posición radical; en lugar de acomodar la investigación a un conjunto de estrategias, son estas las que se acomodan a la investigación, a partir de una combinación de pasos y recursos pertinentes y útiles a los fines investigativos. Ello no implica que la combinación de recursos sea un asunto trivial, dejado al azar. Es necesario buscar formas de enriquecer unos recursos con otros y capitalizar la precisión de unos y la autenticidad de otros.

2

Modelos de un diseño investigativo

Dedico este capítulo a presentar tres modelos de lo que se concibe como un diseño investigativo y a hacer unas reflexiones al respecto, con particular énfasis en el componente empírico de este. Comienzo caracterizando qué entiendo por un diseño investigativo y señaló cuál es su importancia. Después describo algunos modelos sobre cómo ver un diseño investigativo pensando en el proceso y diferenciando el proceso del reporte de resultados. Finalmente diferencio los diseños rígidos y focalizados de los diseños flexibles y amplios, proponiendo potencialidades y dificultades de cada uno de ellos.

¿Qué es un diseño investigativo y para qué sirve?

El *diseño investigativo* es una ruta que lleva al investigador, situado socialmente, con inquietudes investigativas y ubicado en una perspectiva teórica, desde sus intereses investigativos hasta un escenario empírico específico (Denzin y Lincoln, 1998). Esta ruta articula de manera coherente: los propósitos del estudio, las preguntas de investigación, la identificación de cuál es la información más apropiada para permitir responder las preguntas y quién o qué provee dicha información. Además, conduce a establecer cuáles son las estrategias y los recursos más adecuados para obtenerla.

Según Kelly y Lesh (2000), un diseño investigativo se configura como una cadena de razonamiento que es coherente, auditable, compartible y que tiene la intención de persuadir a un escéptico bien intencionado acerca de la veracidad de las conclusiones obtenidas. Por esa razón, el diseño debe incluir mecanismos para informar acerca de los presupuestos que se han asumido, los resultados que se buscan y las razones para la toma de decisiones sobre la información y los informantes.

La ruta que determina un diseño investigativo se construye de manera flexible y dinámica, buscando siempre conectar la fundamentación teórica con las estrategias y los recursos para obtener información y para analizarla. En ese sentido, el diseño sitúa al investigador entre el mundo teórico y el mundo empírico y le permite un estrecho y ojalá prolongado contacto con sitios específicos, personas, grupos, instituciones, documentos, archivos o cualquier otro tipo de material susceptible de ser revisado para los fines investigativos. También, como lo indican Denzin y Lincoln (1998), permite tener un mecanismo de control de la representatividad de la información y la legitimidad de esta.

Janesick (1998) y Miles y Huberman (1994) señalan las siguientes características de un diseño con enfoque fenomenológico o sociocrítico:

- *Holístico.* Busca lograr una visión global del proyecto desde la cual orientar las acciones investigativas.
- *Ideológico.* Admite y explicita la influencia de las preferencias del investigador sobre el enfoque, la aproximación, la perspectiva teórica, la estrategia y los recursos.
- *Situado.* Depende de un escenario cultural y social particular en donde se lleva a cabo la investigación y demanda el desarrollo de modelos de lo que ocurre en tal escenario.
- *Personal.* Promueve una interacción cara a cara de los investigadores con los participantes en el estudio y demanda de los investigadores una cercanía estrecha y prolongada con ellos.
- *Flexible.* Se ajusta a circunstancias del escenario y a experiencias de los participantes en busca de capturar la realidad, desde el punto de vista de los participantes, de la mejor manera.
- *Articulado.* Busca el avance en los análisis desde el mismo momento del registro de la información y hasta la formulación de hallazgos y conclusiones.
- *Particular.* Atiende tales especificidades que no se constituye en un patrón copiable que elimine la necesidad de proponer diseños propios.
- *Ético.* Incluye decisiones para obtener el consentimiento informado de los participantes.

Modelos de un diseño investigativo

Para ilustrar en qué consiste un diseño investigativo, algunos investigadores han construido modelos que pueden servir para orientar a las personas interesadas en desarrollar un proyecto y que tienen poca experiencia en esta tarea. Aunque no considero que estos deban ser tomados como procedimientos

estandarizados, ya que cada diseño obedece a particularidades propias de los ejercicios de indagación situada, presento tres modelos que han sido útiles en investigación en educación matemática.

Modelo secuencial con solapamientos

El modelo secuencial con solapamientos fue sugerido por David Fox (1981; citado en Sierra, 2011) hace más de treinta y cinco años. Se compone de tres partes: el diseño del plan de investigación, la ejecución del plan de investigación y la aplicación de resultados. Cada parte incluye un conjunto de etapas que, en total, son diecisiete. Cada etapa comienza en momentos distintos, pero puede solaparse con otras en el tiempo, de modo que varias de ellas pueden ejecutarse simultáneamente. En la figura 2.1 presento la síntesis del modelo, haciendo algunos pocos cambios a los términos usados por Fox, para adecuar la presentación a la terminología que uso en el libro. Por ejemplo, en donde veo oportuno, he cambiado "metodología" por "estrategia" y "datos" por "información", procurando no tergiversar el planteamiento. Las flechas de la parte derecha de la figura buscan ilustrar el solapamiento de etapas, sin que la punta de la flecha indique en qué etapa termina.

Cada etapa parece estar suficientemente caracterizada por su denominación. Basta agregar que la idea o necesidad impulsora a la que se refiere la etapa 1 se diferencia del problema concreto de investigación (etapa 3). La primera esboza una inquietud acerca de un fenómeno, producto de una intuición, una experiencia profesional o una curiosidad personal, mientras que el problema tiene un soporte empírico y teórico explícito. A continuación, presento algunos ejemplos para ilustrar la diferenciación.

Ejemplo 2.1

Fiallo (2010), profesor de una escuela universitaria de matemáticas y con experiencia como profesor de educación básica secundaria, se interesó inicialmente por la complejidad de la enseñanza de la trigonometría, dada la falta de articulación entre los diferentes acercamientos que se proponen en la escuela (a través de razones trigonométricas, a partir de las coordenadas de puntos en el círculo trigonométrico, haciendo referencia a líneas específicas del círculo trigonométrico o como funciones circulares). Indagó por investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría y por orientaciones que los documentos curriculares ofrecieran al respecto y encontró poca información útil. Esto lo llevó a centrar sus esfuerzos investigativos en este dominio de la educación matemática.

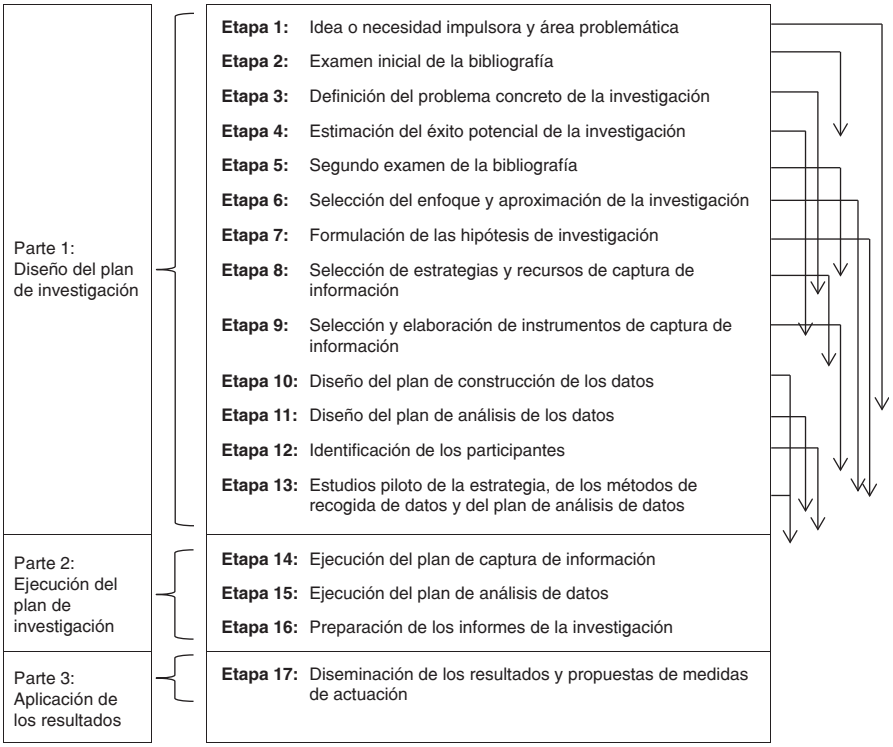


Figura 2.1 Modelo de un diseño investigativo sugerido por David Fox

Fuente: tomada, con algunas adaptaciones, de Sierra (2011).

La ubicación del proyecto de investigación en la línea de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración con el apoyo de programas de geometría dinámica lo llevó a una revisión bibliográfica centrada en estudios sobre la argumentación y la demostración en trigonometría y sobre propuestas didácticas acerca del aprendizaje de la demostración. Fiallo (2010) fue concretando su problema de investigación al enfocarse en la distancia cognitiva percibida por diversos investigadores entre la argumentación y la demostración, como una de las causas de dificultades de aprendizaje. Con el interés puesto en la trigonometría optó por encausar su tesis doctoral en la necesidad de indagar por posibles acercamientos al estudio de las razones trigonométricas que permitan cerrar la brecha entre la argumentación y la demostración. Decidió valerse de la conceptualización de Marrades y Gutiérrez (citados en Fiallo, 2010) para construir una perspectiva amplia de demostración y usar el modelo sugerido

por Pedemonte (citado en Fiallo, 2010) en el análisis de la posible unidad cognitiva entre los procesos de argumentación y demostración de propiedades de las razones trigonométricas cuando se involucra a los estudiantes en una unidad didáctica de trigonometría que aprovecha recursos de un programa de geometría dinámica.

Ejemplo 2.2

En mi tesis doctoral (Camargo, 2010) expresé un interés inicial, fruto de mi experiencia docente como profesora de matemáticas de educación secundaria y universitaria, en profundizar acerca del aprendizaje de la demostración, dado que observaba dificultades de los estudiantes para realizar o usar demostraciones en los cursos de geometría y poco interés de los profesores de secundaria por promover esta práctica. Esta idea impulsora me llevó a documentarme empírica y teóricamente sobre tales dificultades. Junto con los colegas de mi grupo de investigación, Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ • G), recogimos evidencias de las problemáticas que experimentan estudiantes de geometría del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, particularmente reflejadas en los altos índices de fracaso. Recogimos evidencias del estilo usual de enseñanza y comenzamos a ver que una de las fuentes del problema del aprendizaje de la demostración eran las prácticas matemáticas que se impulsaban en las clases de geometría. Estas no proveían ambientes estimulantes ni significativos para aprender a demostrar.

La inquietud inicial o idea impulsora fue corroborada por la revisión de literatura de referencia acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración. Esto me llevó a dirigir la atención, en la tesis doctoral, hacia la búsqueda de opciones para impulsar el aprendizaje de la demostración desde una perspectiva sociocultural. Tomé como insumos algunos elementos conceptuales de la teoría de la práctica social (Wenger, 1998) y la caracterización de actividad demostrativa, propuesta por Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (2012).

Ejemplo 2.3

Gualdrón (2011) explica en la introducción de su tesis doctoral que fueron varios los elementos que le generaron una inquietud inicial: la constatación personal del desconocimiento y la incomprensión del concepto de semejanza de figuras planas por parte de los estudiantes de secundaria y primeros semestres universitarios, la ausencia de propuestas curriculares para la enseñanza de la semejanza que fueran más allá de las formas típicas simplistas de "ver" objetos semejantes, la frecuente ausencia de una reflexión sistemática sobre la propia práctica de la enseñanza de la semejanza por parte de docentes de matemáticas y la ausencia de un estudio específico hecho en Colombia sobre la enseñanza y

el aprendizaje de este concepto geométrico. Al inscribir su estudio en el ámbito del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, el investigador concretó su inquietud inicial en el problema referido a la falta de estrategias para modificar las prácticas docentes sobre la enseñanza de la semejanza. Con su tesis buscó contribuir a la cualificación profesional de los docentes en este tema y a mejorar el aprendizaje de la semejanza de los escolares colombianos.

Ejemplo 2.4

Al ser profesora de matemáticas de un departamento de ciencias básicas, desde hace varios años, Vargas (2012) ha tenido especial interés en el carácter de los cursos universitarios de precálculo dirigidos a estudiantes de diversas profesiones, incluida matemáticas, en donde se busca afianzar conceptos básicos relacionados con las funciones, con los cuales poder cursar con éxito asignaturas como cálculo y ecuaciones diferenciales. Inquietudes iniciales sobre la enseñanza de los conceptos matemáticos básicos en precálculo o el conocimiento que deberían tener los profesores para impartir esta asignatura empezaron a concretarse al decidir seleccionar un contenido específico para llevar a cabo su estudio investigativo. La decisión de profundizar en la función exponencial se debió principalmente al poco trabajo realizado sobre el aprendizaje de tal tema y sobre el conocimiento de los profesores al respecto, pero también por considerarlo un contenido central para la modelación y el análisis de fenómenos, principalmente de crecimiento, en diversos campos. La inquietud investigativa se perfiló entonces hacia el conocimiento de los profesores universitarios de precálculo sobre las funciones exponenciales y sobre la enseñanza de estas.

Una nueva concreción de la inquietud llevó a Vargas (2012) a tomar la decisión de encaminar la investigación hacia la práctica del docente y no de abarcar todas las dimensiones del conocimiento profesional. La decisión estuvo motivada por la revisión de literatura relacionada con la línea de investigación sobre el conocimiento didáctico del contenido y por ir ganando la convicción de la necesidad de profundizar en requerimientos no especialmente de contenido, sino del quehacer en el aula relacionado con la enseñanza de la función exponencial, en donde identificó un vacío investigativo. Así, ella optó por inscribir su investigación en la línea de la práctica del profesor universitario desde una perspectiva sociocultural.

A partir de la inscripción en la línea de investigación y sin olvidar que su interés se centraba en la práctica del profesor de precálculo sobre la función exponencial, Vargas (2012) optó por fundamentar su estudio en dos constructos teóricos: la modelación de la descomposición genética de un concepto, que consideró útil para analizar la práctica del profesor, y la teoría cognitiva APOE

(acciones, procesos, objetos y esquemas), que se refiere a una manera de comprender los conceptos matemáticos. Finalmente, el problema de investigación se concretó en aclarar, desde el punto de vista investigativo, en qué se apoyan los profesores de precálculo cuando realizan su enseñanza sobre la función exponencial, cómo lo hacen y por qué lo hacen así.

Ejemplo 2.5

El estudio realizado por Rojas (2012) tuvo como motivación inicial su inquietud sobre las dificultades que tenían estudiantes de diferentes niveles de escolaridad para articular varios significados parciales (o sentidos) de expresiones matemáticas elaboradas en el mismo registro de representación, que se pueden transformar una en la otra mediante una manipulación algebraica o numérica. Un análisis inicial acerca de las dificultades lo llevó a indagar en profundidad por la complejidad del significado de los objetos matemáticos debida a que estos pueden representarse en diferentes registros semióticos.

Al encuadrar su estudio en elementos teóricos de los enfoques estructural-funcional propuesto por Raymond Duval, semiótico-cultural sugerido por Luis Radford y ontosemiótico formulado por Juan Godino, Rojas decidió centrarse, en su tesis doctoral, en la búsqueda de explicaciones de carácter sociocultural acerca de la dificultad señalada. Principalmente decidió aclarar los orígenes de los cambios de sentido, los criterios para caracterizar cambios de sentido y la articulación de sentidos para construir significados matemáticos.

Ejemplo 2.6

La investigación adelantada por Valoyes (2014) se originó a raíz de identificar la falta de preocupación del Estado y la sociedad colombiana por los bajos desempeños en álgebra de estudiantes de raza negra en condiciones de pobreza de la ciudad de Cali, Colombia. Estos desempeños son medidos por pruebas como el Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS, por su sigla en inglés), el Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA, por su sigla en inglés) y Saber (el programa colombiano de evaluación para la educación básica). Según Valoyes, los bajos resultados en estas pruebas generalmente son vistos como "naturales" y esperados por la sociedad y por entidades como el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (Icfes). Esta apreciación hace que se preste muy poca atención a las razones por las que esta visión persiste en el tiempo. La investigadora comenzó preguntándose por qué los desempeños bajos en matemáticas de la población de raza negra en condición de pobreza eran esperados y por qué la situación se naturalizaba en los discursos oficiales expresados por el Icfes.

Valoyes (2014) hizo una revisión de literatura al respecto y encontró que la

naturalización de la discriminación y marginalización de grupos sociales era un mecanismo para evitar controvertir el orden social establecido. Apoyada en un enfoque sociocrítico de la educación matemática, consideró importante analizar cómo las diversas formas de poder, en un nivel macroestructural de la sociedad, se expresaban en niveles micro en contextos institucionales. En particular, estimó relevante procurar comprender e interpretar de qué forma los imaginarios sociales sobre el racismo y la pobreza conformaban las prácticas sociales de enseñanza y qué efecto tenían en el aprendizaje y en la configuración de identidades en los estudiantes. Desde su punto de vista, las relaciones entre raza, clase social y aprendizaje de las matemáticas estaban suficientemente estudiadas, pero no así el efecto de los respectivos imaginarios sociales sobre la enseñanza de las matemáticas, especialmente del álgebra. Ese fue el foco específico en el que enmarcó su tesis doctoral.

Ejemplo 2.7

Vergel (2014) partió de una inquietud inicial sobre la factibilidad de reconocer y desarrollar el pensamiento algebraico en los primeros años de escolaridad mediante actividades de generalización de patrones. En su primera aproximación al problema expuso que los avances de la investigación en "álgebra temprana" no habían generado respuestas claras sobre cuáles son las evidencias que se necesitan para evaluar la presencia de pensamiento algebraico. Al adentrarse en la revisión de literatura sobre este aspecto, encaminó su interés inicial hacia el estudio de diversas formas de expresión de la generalidad que los niños exhiben y que parecen haber pasado desapercibidas por mucho tiempo, dado el énfasis curricular en expresiones alfanuméricas.

El investigador enmarcó su trabajo doctoral en la perspectiva semiótico-cultural, línea de investigación cuyo exponente principal es Luis Radford. Concretó el asunto problemático de su investigación en la necesidad de reconocer formas de pensamiento algebraico referidas al reconocimiento de la indeterminación y la generalidad y en las relaciones que los niños establecen entre el cuerpo, la percepción y el inicio de la simbología, cuando se involucran en actividades culturales de generalización de patrones; en particular, se centró en relaciones que se pueden caracterizar a través de gestos, movimientos, ritmo, uso de artefactos, actividad perceptual y formas lingüísticas. De acuerdo con Vergel (2014), la línea de investigación había generado algunos resultados acerca de la emergencia del pensamiento algebraico de estudiantes jóvenes en tareas basadas en patrones figurales o numéricas con apoyo tabular, pero muy poco en relación con actividades con secuencias puramente numéricas o puramente figurales.

Ejemplo 2.8

La investigación llevada a cabo por Obando (2015) partió de una inquietud inicial sobre los bajos desempeños de los estudiantes en tareas, que tiene que ver con la razón, la proporción y la proporcionalidad. Según el investigador, este hecho no se corresponde con la cantidad de investigación adelantada sobre estos conceptos, realizada desde los años sesenta del siglo pasado, que se ha dirigido a profundizar en aspectos cognitivos, epistémicos, didácticos y matemáticos involucrados. La línea de investigación suele ser conocida como "razonamiento proporcional" y ha sido uno de los motores del desarrollo de la investigación en educación matemática. Como señala Obando, la importancia de estos conceptos se ve reflejada en su valoración en los currículos de matemáticas, en donde ocupan un lugar central, y en las pruebas evaluativas sobre calidad de la educación. Pero, pese al esfuerzo investigativo y curricular, la razón, la proporción y la proporcionalidad continúan siendo problemáticas para su aprendizaje y su enseñanza, quizás por su complejidad o por la falta de orientaciones curriculares claras. El investigador asumió el reto, en su estudio doctoral, de indagar empírica y teóricamente sobre posibles mecanismos elementales de desarrollo de la razón, la proporción y la proporcionalidad.

A partir de su inquietud inicial, al adoptar un marco conceptual proveniente de la teoría de la actividad, Obando (2015) decidió concretar su problema investigativo en la búsqueda y caracterización de una organización escolar que permita a los estudiantes de 3.º y 4.º de primaria construir conocimiento sobre la razón, la proporción y la proporcionalidad a partir de un cierto tipo de actividades matemáticas enmarcadas en un sistema de prácticas. Este es entendido como el conjunto de condiciones cristalizadas en elementos de la cultura que orientan, delimitan y restringen las formas de hacer y pensar, sobre razón, proporción y proporcionalidad, de individuos adscritos a una institución educativa, además de las posturas subjetivas que orientan la manera como los individuos desarrollan su acción.

Ejemplo 2.9

Como profesor de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas y de programas de posgrado dirigidos a profesores de matemáticas en ejercicio, Guacaneme (2016) se preguntaba continuamente por las características del conocimiento que se espera promover en tales programas. Esta inquietud se remonta a sus primeras experiencias como profesor de matemáticas que hicieron evidente la insuficiencia del conocimiento adquirido en la formación de pregrado para afrontar los retos del quehacer docente. A raíz de su vinculación al Grupo de Historia de las Matemáticas, el interés inicial se empezó a

concretar al querer desentrañar el papel de la historia de las matemáticas en la constitución del conocimiento del profesor.

La construcción del problema pasó por el proceso de enmarcar la inquietud en el campo investigativo denominado "la educación del profesor" y ubicarse en la línea referida al conocimiento profesional del profesor. En esa línea Guacaneme se enfocó en el aporte que la historia de la matemática podría tener en las concepciones, los conocimientos y las competencias de los profesores de matemáticas. Como la revisión de la literatura le mostró la falta de investigaciones centradas en el aporte de la historia de aspectos matemáticos específicos, eligió el tema de la teoría euclidiana de la razón y la proporción. Esto por su situación de privilegio en el interior de las matemáticas escolares, su vínculo con otras ciencias, su empleo como conocimiento instrumental auxiliar y su uso como elemento evaluador del desarrollo psicológico de los individuos. El encuadre teórico le permitió enfocar su problema doctoral en el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el libro V de *Elementos,* para la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas.

Ejemplo 2.10

Durango (2017), profesor de un programa de licenciatura en matemáticas, centró su interés investigativo en las diferencias entre la argumentación enseñada y exigida en los cursos de geometría y lógica, del programa de formación inicial, y la argumentación exhibida por los estudiantes en los seminarios de práctica pedagógica, en donde se atienden y discuten problemas de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Desde su punto de vista, la formación en argumentación matemática se veía como insuficiente (o parcializada) para desarrollar competencias argumentativas no matemáticas, pues esta última parecería de naturaleza muy diferente; el investigador no veía que en algún curso del programa se formara en ella. Dado que este tipo de argumentación es la que los maestros en formación elaboran con sus colegas y es la forma como los niños y jóvenes argumentan en clase al descubrir, explicar, comunicar hechos matemáticos, consideró que la deficiencia detectada podría dar pie a la construcción de un problema de investigación.

En la construcción del problema el investigador analizó diversas caracterizaciones de argumentación en el campo de la educación matemática. Evidenció que, a partir del modelo de Toulmin, se había avanzado en conceptualizaciones de esta, principalmente relacionadas con las funciones de racionalidad teórica, ligadas a la deducibilidad y validación de enunciados. También encontró que diversos investigadores reconocían limitaciones de los marcos de referencia para profundizar en el análisis de la argumentación, cuando esta se usa para persuadir y convencer. Enfocó su interés en componentes del modelo de Toulmin que han

sido útiles para establecer lazos entre racionalidad y razonabilidad, al ampliar las funciones argumentativas al ámbito de la comunicación. En particular, se interesó por las cualidades retóricas y dialécticas que deberían hacer parte esencial del análisis estructural de la argumentación. Identificó que algunos autores profundizaban en la relación entre argumentación y demostración, pero no encontró un modelo integral de la argumentación que incluyera las cualidades mencionadas y que a su vez permitiera considerar la demostración como un caso particular de argumentación y señalar rutas para ir de la una a la otra.

Adicionalmente, Durango (2017) identificó que la mayoría de los estudios sobre la argumentación se habían realizado con un énfasis en el aprendizaje y en la caracterización de la forma de argumentar de escolares y de maestros en formación; estos últimos en sus clases de matemáticas, pero no en las de didáctica de las matemáticas. No encontró caracterizaciones de argumentación centradas en la razonabilidad práctica que debería exhibir un maestro en formación en sus prácticas pedagógicas. Los vacíos investigativos encontrados por Durango en la revisión de la literatura lo llevaron a formular como problema la falta de un modelo integral de argumentación de maestros en formación, cuando discuten temáticas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

La diferencia entre la idea impulsora y la formulación del problema hace que entre ambas fases se encuentre el primer examen de la bibliografía (etapa 2). Este se hace a partir de la ubicación de la necesidad impulsora en un área problemática. Además de servir para construir y delimitar el problema de investigación, según Fox (1981; citado en Gutiérrez y Maz, 2001) y Siebert (2019), las finalidades del examen de la bibliografía son proporcionar: a) el marco conceptual de la investigación, b) el conocimiento sobre el estado de desarrollo de la investigación al respecto, c) un estimativo sobre las probabilidades de éxito de la investigación (etapa 4), d) las indicaciones para tomar decisiones sobre el enfoque, la aproximación, la estrategia y los recursos (etapa 6), e) la información específica para formular definiciones, supuestos, limitaciones, hipótesis de investigación (etapas 7 y 8). Acerca de las etapas 11 a 17 me referiré en los capítulos siguientes del libro. A continuación, ejemplifico algunas utilidades encontradas a la revisión de la literatura por nueve investigadores colombianos.

Ejemplo 2.11

En mi tesis (Camargo, 2010), la revisión de la literatura me proporcionó el marco conceptual para asumir el aprendizaje como participación y para ver la actividad demostrativa como un conjunto de prácticas, entre las cuales están explorar, definir, conjeturar y argumentar. Algunos estudios previos me su-

girieron explorar el constructo "participación periférica" (Wenger, 1998) y me dieron luces sobre el diseño investigativo.

Ejemplo 2.12

Parada (2011) usó la revisión de la literatura para identificar acercamientos investigativos, cognitivos y socioculturales, que pretenden apoyar el desarrollo profesional de profesores de matemáticas. Buscó elementos conceptuales con dos propósitos: uno, construir un modelo teórico útil para promover procesos de reflexión en comunidades de práctica de educadores matemáticos, como complemento a su desarrollo profesional; dos, identificar herramientas prácticas con las cuales analizar la influencia que tiene la aplicación del modelo propuesto en el pensamiento reflexivo de profesores de matemáticas. Para ello la investigadora indagó por estudios sobre los aprendizajes logrados por maestros que participan en comunidades de práctica y por investigaciones que involucran procesos de reflexión.

Adicionalmente, la investigadora encontró que la revisión bibliográfica mostraba la pertinencia de ahondar en la búsqueda de mecanismos para promover procesos reflexivos en los docentes, aprovechando recursos digitales de información y de comunicación. Además, el rastreo de trabajos que analizan el fenómeno del desarrollo profesional, desde perspectivas socioculturales, inspiró el acercamiento que ella propuso.

Ejemplo 2.13

La revisión de la literatura permitió a Gualdrón (2011) ubicar su estudio en un aspecto específico del campo investigativo sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas que tiene que ver con el desarrollo de la práctica reflexiva. La revisión le permitió concretar una ruta metodológica para promover la práctica reflexiva de profesores de matemáticas, centrada en la implementación de una propuesta didáctica y el impulso a la reflexión de los profesores sobre los efectos de esta en la enseñanza y el aprendizaje de sus estudiantes. Inscrito en esa línea, el investigador revisó literatura relacionada con la formulación de propuestas curriculares e implementación de unidades didácticas en el tema de semejanza. El modelo de razonamiento de Van Hiele, con énfasis en el proceso de visualización, le permitió fundamentar la propuesta didáctica y adaptarla al contexto colombiano.

Ejemplo 2.14

Al revisar la literatura, Vargas (2012) hizo un recorrido por investigaciones sobre el conocimiento profesional del profesor, la enseñanza y el aprendizaje de la fun-

ción exponencial y los cursos universitarios de precálculo. Gracias a este pudo: identificar un vacío investigativo sobre la práctica del profesor universitario; reconocer la vigencia del tema dentro del conjunto de problemas investigativos; ubicarse en una línea de investigación sobre la práctica del profesor, y conocer y ubicar investigativamente los constructos modelación de la descomposición genética y teoría APOS, con los cuales concretó el problema de investigación, el marco de referencia, la ruta metodológica y la herramienta de análisis.

Ejemplo 2.15

Rojas (2012) empleó la revisión de la literatura principalmente para ubicarse conceptualmente. Primero, ligó su investigación a un campo de investigación sobre los sistemas semióticos de representación y con ello dispuso de un lenguaje para describir el fenómeno de estudio diferenciando transformaciones de tratamiento y de conversión de registros. Segundo, usó constructos de la semiótica cultural para establecer una posición sobre el papel de la cultura y de la actividad en la configuración del conocimiento matemático y en el aprendizaje; este es visto en su investigación como un proceso social de objetivación de patrones de acción fijos en la cultura. Y tercero, se basó en los estudios del enfoque ontosemiótico para establecer una diferenciación entre sentido y significado y reconocer la faceta expresión/contenido en los sistemas de prácticas que se ponen en juego en el aprendizaje matemático.

Ejemplo 2.16

El estudio de la literatura fue empleado por Obando (2015) para identificar, en primer lugar, momentos por los que ha transitado la investigación sobre el razonamiento proporcional en alrededor de cincuenta años de desarrollo, ubicando trabajos relevantes y los principales aportes de los autores. Esta revisión le permitió identificar la necesidad, atendida parcialmente en otros contextos, pero no en Colombia, de profundizar en la organización escolar que favorece la construcción de significado de la razón, la proporción y la proporcionalidad, a temprana edad, en el marco de lo que caracteriza como sistemas de prácticas. En segundo lugar, la revisión le permitió identificar la importancia de estos temas en el currículo escolar colombiano (y en otras latitudes) y los persistentes bajos niveles de desempeño de los estudiantes. Con ello mostró la pertinencia de su investigación tanto por la temática como por el nivel escolar en donde hizo el trabajo empírico.

Ejemplo 2.17

Valoyes (2014) centró la revisión de la literatura en varios frentes. Uno, para configurar el problema, recopiló información estadística sobre desempeño de

los estudiantes en álgebra, principalmente relacionados con la distribución poblacional en las comunas de Cali, Colombia, discriminando la información por nivel socioeconómico y raza. Buscó los análisis de los resultados de pruebas evaluativas hechas por los organismos que en Colombia son responsables del fomento de la educación. Y revisó investigaciones relacionadas con el bajo desempeño, en donde se hacen análisis que correlacionan este factor con raza y estrato. Identificó un vacío en el estudio de causas y en el efecto del mantenimiento de las expectativas sociales que influyen en la enseñanza. Dos, para ubicar el problema en una línea de investigación, identificó publicaciones en la línea sociopolítica que, con una mirada más allá del aula, defienden el presupuesto según el cual la marginalización de los aprendices, debida a la raza, el género y la clase social, es una construcción social derivada de prácticas sociopolíticas de poder que operan en el interior de la escuela y que eventualmente se resisten a la reacción de profesores y estudiantes en contra de estas. Es decir, las matemáticas son usadas como instrumentos de selección y marginalización social. Tres, para definir el dominio matemático en el que iba a enmarcar su investigación, revisó estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. Estos le mostraron que este es un dominio altamente valorado y también es la principal área de fracaso escolar. A pesar del gran volumen de estudios sobre el tema, Valoyes identificó un vacío relacionado con identificar la fuente ideológica institucional de las expectativas de los profesores sobre el desempeño de sus estudiantes en la clase de álgebra y allí ubicó su estudio.

Ejemplo 2.18

Guacaneme (2016) usó la revisión de la literatura para establecer un estado de desarrollo de la investigación sobre las relaciones entre historia y educación matemática e historia y conocimiento profesional del profesor. También para construir unas preguntas con las cuales analizar un conjunto de documentos e identificar qué características de la historia de las matemáticas se aprovechan en la formación de profesores, qué argumentos se esgrimen a favor del uso de la historia de las matemáticas en la formación de profesores, cuáles son las intenciones de tal integración y qué estrategias metodológicas se han empleado.

Ejemplo 2.19

La revisión de la literatura sirvió a Durango (2017) para confirmar su percepción acerca de las diferencias entre la argumentación matemática y la no matemática, retomando aportes fundamentados en la lógica y la epistemología, que diferencian la estructura, las funciones y los elementos de tipos de argumentación. Además, a partir de la revisión, propuso un modelo integral de argumentación en el que incluyó aspectos lógicos, retóricos y dialécticos

de la argumentación, sugeridos por diversos investigadores; la propuesta de modelo surgió cuando el investigador identificó un vacío en los estudios sobre la argumentación fundada en la razonabilidad práctica. El modelo se constituyó en la hipótesis de trabajo de su ejercicio investigativo. Con este caracterizó la argumentación de maestros en formación y estableció nexos entre las formas de argumentar y de demostrar en matemáticas.

Modelo artesanal de Romberg

El modelo de diseño de investigación sugerido por Thomas Romberg (1992) incluye un conjunto de acciones que, desde su punto de vista, configuran un proceso que guarda más parecido de familia con la producción de una artesanía que con un proceso técnico. Esto porque, según él, hacer una investigación no puede verse como la realización de un procedimiento mecánico de un conjunto de tareas que se llevan a cabo de manera predeterminada o prescrita. Como en toda producción artesanal, hay acuerdos, en un amplio sentido, acerca de qué procedimientos seguir y qué se considera un trabajo aceptable. Estos acuerdos surgen en el trabajo cotidiano de los investigadores. En el caso de la investigación en educación matemática, Romberg (1992) propone diez acciones que usualmente se llevan a cabo y que explicitan algunas de las situaciones que las personas que no están familiarizadas con la actividad investigativa pueden experimentar, además de insinuar pautas para diferenciar estrategias investigativas (véase figura 2.2).

Identificar un fenómeno de interés es una actividad que da comienzo a la elaboración de un diseño. Quien emprende una investigación parte de una curiosidad sobre un fenómeno. En la época en la que Romberg (1992) propuso el modelo, identificó como aspectos centrales de la investigación en educación matemática: el aprendizaje de los estudiantes, la interacción de los estudiantes con las matemáticas, la interacción de los estudiantes con los profesores y la planeación de la enseñanza. En el capítulo 1 he enunciado muchos más fenómenos de interés del campo (al ubicar esta acción en el modelo de Fox, podría corresponder a las etapas 1 y 3).

Construir un modelo preliminar se refiere a la actividad de prever ciertos aspectos importantes del diseño, como la identificación y descripción de variables o asuntos claves que se van a considerar y las posibles relaciones entre ellos. El modelo preliminar cumple la función de ayudar a clarificar y limitar un fenómeno complejo al extraer de una situación real aquellos elementos que el investigador cree que están operando en la situación y pueden ser estudiados. Obviamente, señala Romberg (1992), el modelo es una simplificación inicial,

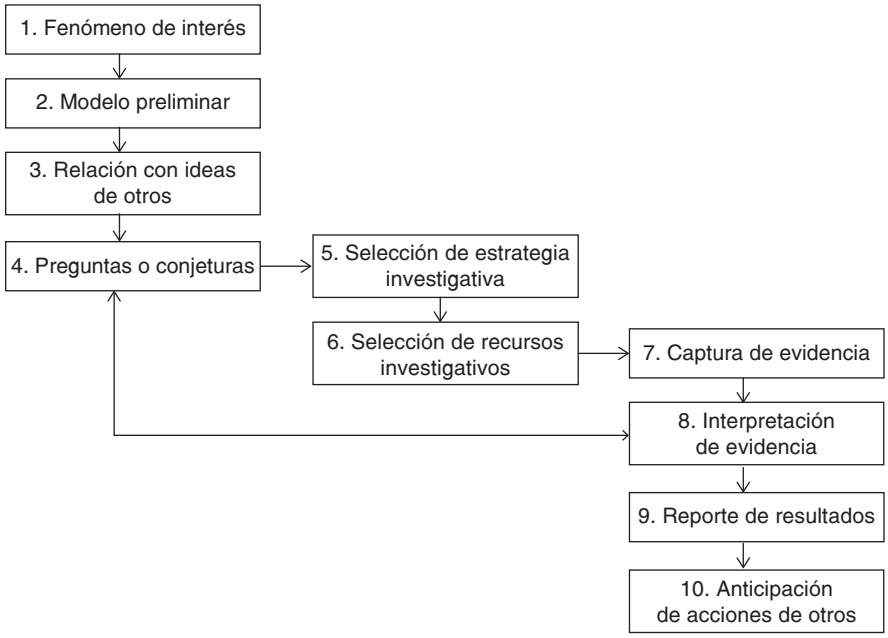


Figura 2.2 Modelo artesanal de diseño investigativo

Fuente: adaptada de Romberg (1992).

dado que algunos asuntos pueden llegar a ser significativos, otros pueden terminar siendo irrelevantes y otros pueden no haberse considerado. De todas formas, el modelo sirve como un punto de partida para orientar la indagación (etapas 6 y 7 del modelo de Fox).

La tercera actividad del modelo consiste en *relacionar el fenómeno y el modelo preliminar con las ideas que otros investigadores han señalado* acerca de este, para determinar si estas ideas pueden ser usadas para clarificar, ampliar o modificar el modelo propuesto. Al hacer esto, los investigadores contrastan sus propios enfoque, aproximación y perspectiva teórica con los de los investigadores consultados para apoyarse en ellos o confrontar sus planteamientos (etapas 2, 4 y 5 del modelo de Fox).

Formular preguntas acerca del fenómeno y *proponer una hipótesis razonada* que se quiere examinar son dos actividades claves de un diseño investigativo. Romberg (1992) afirma que, aunque cruciales, no son actividades sencillas dada la cantidad de asuntos potenciales que se pueden indagar acerca de un fenómeno. De estas actividades depende qué tan fuerte o débil resulta ser la

cadena de indagación promovida por el diseño. Desde su punto de vista, las preguntas pueden estar orientadas al pasado (¿cómo llegó el fenómeno a ser de esta manera?), al presente (¿cuál es el estatus del fenómeno actualmente?) o al futuro (¿qué pasaría con el fenómeno si hago tal o cual cosa?), según si el estudio es descriptivo o predictivo.

Romberg (1992) sugiere ejemplos de preguntas que haría alguien cuyo interés investigativo está en el concepto de fracción. Con una orientación al pasado, podría preguntarse: ¿Cómo ha evolucionado el concepto de fracción en matemáticas? ¿Cómo han sido definidas e ilustradas las fracciones en los libros de texto en los últimos cien años? Con una orientación al presente, podría preguntarse: ¿Cuál es el nivel de conocimiento de los profesores acerca de los números racionales? ¿Cómo se desempeñan los estudiantes al sumar fracciones? Y con una orientación hacia el futuro, podría preguntase: ¿Cuál es el efecto de enseñar algoritmos para el cálculo de fracciones en la comprensión de estas? ¿Qué influencia tiene en el aprendizaje de las fracciones el uso de material manipulativo?

Desde mi punto de vista, y como lo explico en el capítulo 3, las preguntas también pueden estar orientadas según la aproximación investigativa y las metas del estudio. Así, apuntan a describir (¿qué veo?, ¿qué está pasando?), interpretar (¿por qué pasa esto?, ¿qué puedo aprender?), inferir (¿qué pasaría si hago esto?) o modificar (¿cómo transformar esta situación?). Algunas preguntas de investigación propuestas en estudios de investigadores colombianos se recogen en la tabla 2.1.

Además de formular preguntas, los investigadores generalmente las acompañan de una o más hipótesis acerca de posibles respuestas. Estas hipótesis, según Romberg (1992), están basadas en las relaciones que se entrevén entre las variables o asuntos claves que caracterizan el fenómeno, que probablemente se han identificado en el modelo preliminar (etapa 7 del modelo de Fox).

El modelo de Romberg (1992) también incluye como actividad importante *seleccionar la estrategia investigativa* para conseguir la evidencia (etapa 8 del modelo de Fox). La estrategia depende de las preguntas e hipótesis, del enfoque, la aproximación y la fundamentación teórica que se pretende poner en juego y del modelo preliminar construido. Por ejemplo, si las preguntas están orientadas al pasado, las estrategias documentales pueden ser útiles. Pero si están orientadas al presente se podría emplear la estrategia de estudio de caso (ver capítulo 3).

Además de decidir la estrategia, hay que *seleccionar recursos* específicos de captura de información y ponerlos en funcionamiento para obtener evidencias. Lo anterior implica decidir qué y cómo conseguir información de los participantes en el estudio y cómo organizarla, una vez recogida. Esta

Tabla 2.1 Ejemplos de preguntas de investigación en tesis doctorales de autores colombianos

Tesis	*Preguntas*	*Aproximación*
Fiallo (2010)	¿Existe continuidad o distancia cognitiva entre los procesos de argumentar y demostrar en el desarrollo de demostraciones de propiedades de las razones trigonométricas? ¿Cuáles son las dificultades que tienen los estudiantes cuando se aproximan al proceso de demostración de los conceptos y propiedades de las razones trigonométricas usando un programa de geometría dinámica?	Descriptiva e interpretativa orientada al futuro
Camargo (2010)	¿Qué acciones del repertorio compartido dan significado a la práctica de demostrar, y favorecen el aprendizaje de los estudiantes, en una comunidad de práctica de clase? ¿Cómo evoluciona la participación de los estudiantes de la comunidad a medida que la comunidad se consolida?	Descriptiva e interpretativa orientada al futuro
Parada (2011)	¿Cómo fortalecer los procesos de reflexión de los profesores de matemáticas?	Descriptiva e interpretativa orientada al futuro
Vargas (2012)	¿Cómo modelan los profesores de precálculo en su práctica docente los mecanismos de construcción del concepto de función exponencial y cuáles son las características que subyacen a las prácticas analizadas?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente
Rojas (2012)	¿Qué explica la dificultad que encuentran los estudiantes para articular los diferentes sentidos asignados a representaciones de un objeto matemático obtenidas mediante transformaciones de tratamiento?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente
Vanegas (2013)	¿Cómo debe entenderse la competencia profesional que permite a los futuros docentes de matemáticas de secundaria, formados en lo específico, educar en la ciudadanía como competencia transversal y qué actividades profesionales podrían ayudar a desarrollar esa competencia?	Descriptiva e interpretativa orientada al futuro
Valoyes (2014)	¿Cuáles son las expectativas de los profesores colombianos sobre la habilidad de sus estudiantes para aprender álgebra, relacionadas con las características raciales y sociales de sus estudiantes? ¿Cómo se expresan tales expectativas en sus prácticas de enseñanza?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente

Tabla 2.1 (continuación)

Tesis	*Preguntas*	*Aproximación*
Vergel (2014)	¿Qué formas de pensamiento algebraico temprano emergen en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años), como resultado de su participación en la actividad matemática del aula, específicamente en torno a tareas sobre generalización de patrones?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente
Obando (2015)	¿Qué sistemas de prácticas matemáticas están presentes en las clases de matemáticas de los grados tercero y cuarto de la institución escolar estudiada y qué configuraciones epistémicas sustentan tales sistemas de prácticas?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente
Guacaneme (2016)	¿Cuál es el potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción, contenida en el libro V de *Elementos,* en la constitución del conocimiento del profesor de matemáticas?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente
Durango (2017)	¿Cómo argumentan, en geometría, maestros en formación inicial en práctica pedagógica?	Descriptiva e interpretativa orientada al presente

Fuente: elaboración propia.

actividad se guía por las preguntas de investigación, para asegurar que los recursos escogidos realmente permitan recopilar evidencias útiles para enfrentar la búsqueda de respuestas a las preguntas. En el capítulo 4 presento opciones para hacer el acopio de información.

La actividad de *interpretar la información* implica analizar las evidencias obtenidas. Si los investigadores emplean procedimientos cuantitativos, asignan números a los datos, emplean procedimientos matemáticos para agrupar y resumir las evidencias y usan test estadísticos para identificar la significancia o correlación de variables, características, factores, etc. Si emplean procedimientos cualitativos, organizan, agrupan, clasifican y categorizan evidencias, además de interpretar la información, pero sin reemplazarla por números. Romberg (1992) señala que el proceso de identificar la importancia de las evidencias que se recogen es un arte en el que ciertas personas se desempeñan mejor que otras. Desde mi punto de vista, la experiencia permite ir ganando sensibilidad para identificar qué información es relevante y cuál no. En el capítulo 5 propongo algunos recursos para el análisis cualitativo de datos.

Como miembros de una comunidad académica los investigadores tienen la responsabilidad de *comunicar* a otros miembros cómo se llevó a cabo la

investigación y qué resultados se obtuvieron. Esto con el objetivo de esperar comentarios y críticas de los colegas. Romberg (1992) indica que, además de reportar los hallazgos de un estudio, los investigadores están en la obligación de informar sobre la aproximación, la perspectiva teórica, la estrategia seguida y los recursos usados. Lo anterior hace que los resultados cobren sentido en el marco en el que se mueven los investigadores y que los lectores interpreten dichos resultados en ese marco y no en el propio.

Finalmente, el modelo hace referencia a la actividad de *anticipar las acciones de otros.* Los investigadores deberían preocuparse, dice Romberg (1992), por suponer qué pasará con los resultados del estudio después de que este sea comunicado. Podrían imaginar si otros miembros de la comunidad discutirán las ideas, si habrá reacciones específicas para proponer nuevos pasos o modificaciones al estudio, si los hallazgos serán punto de partida de otros estudios, etc. De esta forma, la investigación se concibe como el eslabón de una cadena de indagación en la que los estudios previos y los siguientes son importantes.

Modelo coreográfico de Janesick

En el capítulo 2 del libro editado por Denzin y Lincoln, Valerie Janesick (1998) propone un modelo para el diseño de una investigación en el que relaciona el proceso con el montaje de una coreografía. Este modelo es sugestivo pues captura la naturaleza dinámica, expresiva y elástica de la indagación. Según la autora, los investigadores son como artistas que establecen un puente entre sus experiencias individuales y las vivencias de las comunidades en las que los seres humanos, incluidos ellos, se relacionan.

Una coreografía, así como un diseño investigativo, comienza con preguntas relacionadas con aquello que se quiere expresar. Las preguntas genuinas son el motor de la danza y del diseño. Ellas están enmarcadas por los puntos de vista de los bailarines y de los investigadores acerca de la expresión y comunicación de sentimientos e ideas y por lo que coreógrafos e investigadores conciben como una coreografía o una indagación. A su vez, las preguntas conducen al montaje de una danza o al diseño de un proyecto de investigación. Estos están pensados para y con individuos reales en mente, que se desempeñan en ámbitos sociales específicos y se comunican cara a cara. A manera de ejemplo, para el caso de diseños investigativos en educación, Janesick (1998) sugiere que las inquietudes sobre el currículo que se ajustan a un diseño con enfoque fenomenológico pueden ser: la calidad de un currículo, una innovación o un programa; los significados o interpretaciones acerca de los componentes de un currículo; las relaciones entre el currículo declarado y el currículo

oculto; las manifestaciones curriculares en el sistema educativo en general, una localidad, una escuela o una clase; el contexto social de una escuela y la pertinencia de su currículo, e incluso cuestionamientos sobre las concepciones de los profesores acerca de la enseñanza y el aprendizaje.

A partir de las preguntas acerca de lo que se quiere expresar, la coreografía de una danza y el diseño investigativo se desarrollan en tres partes: el calentamiento, la puesta en escena y el enfriamiento. Interpreto el modelo de Janesick (1998) de la siguiente manera:

- *Parte 1: Calentamiento.* En el calentamiento, los bailarines preparan su cuerpo para la ejecución de la danza y ejercitan los movimientos y las rutinas de la coreografía, propias del estilo de danza que quieren ejecutar. De manera similar, los investigadores se preparan para la recogida de información en el escenario. Toman decisiones sobre los participantes, características o circunstancias del escenario, el tiempo y las estrategias para la recolección de la información, las cuales están influidas por sus ideas sobre el escenario social en estudio. Establecen qué recursos emplear para obtener evidencias y con qué instrumentos las obtendrán. Pero estos movimientos corporales o las decisiones investigativas no son definitivos. Son susceptibles de cambios durante la ejecución si los bailarines o los investigadores identifican formas más potentes de expresión o de captura de la información, desde la perspectiva de los participantes. De manera similar a la ejercitación de las rutinas previas para la ejecución de la danza, los investigadores pueden hacer un estudio piloto. En este, ensayan métodos e instrumentos, entran en contacto con los participantes, comienzan a establecer patrones de comunicación efectivos e incluso aclaran la estrategia a seguir, decidiendo aspectos de esta que podrían estar poco establecidos. El tiempo dedicado al estudio piloto puede redundar positivamente en la toma de información experimental y en los análisis.
- *Parte 2: Ejecución de la danza.* Durante la ejecución de la danza los bailarines interpretan la coreografía buscando plena sintonía con el auditorio. De igual forma, los investigadores ponen en funcionamiento la planeación, de manera flexible, según las reacciones de los participantes y su sensibilidad acerca de la pertinencia de la información que están registrando. Ello implica lograr un estado de comunicación, confianza y compenetración con los participantes que les permita capturar matices de la información y hallar significados de esta. Así como los bailarines dependen de la columna vertebral para lograr movimientos expresivos y elásticos, los investigadores dependen del diseño previsto para lograr acciones investigativas flexibles

y útiles. Guardando el equilibro, los bailarines interpretan la coreografía inclinándose a un lado u otro buscando dar vía libre a su expresividad, pero siempre regresando a una posición estable. Respetando unos puntos de anclaje del diseño, los investigadores se mueven flexiblemente en el escenario en donde se encuentran los participantes en el estudio, buscando las mejores formas de intercambiar información con ellos, pero cuidando siempre de regresar a los puntos de amarre.

- *Parte 3: El enfriamiento.* Una vez ejecutada la danza, los bailarines van suspendiendo el movimiento de manera paulatina hasta finalizarlo. Aún en el escenario, los investigadores comienzan el proceso analítico a medida que van suspendiendo, poco a poco, el registro de información. Ello no impide que por momentos haya un renovado interés en capturar más información, así como los bailarines regresan al escenario cuando el público demanda una última pieza. En la etapa de enfriamiento se llevan a cabo principalmente procesos de: reducción y depuración de la información, para convertirla en datos investigativos; refinamiento de conceptos con los cuales se interpretan los datos; búsqueda de ejemplos positivos y negativos que permitan reafirmar o descartar hipótesis; elaboración de modelos explicativos de los fenómenos en estudio; revisión de significancia de elementos del modelo; verificación a partir del chequeo de la información registrada, y presentación de hallazgos para ser sometidos a escrutinio. En un diseño cualitativo se prevén reportes investigativos que ejemplifican las afirmaciones que se hacen, con datos que sirven para corroborar los planteamientos.

¿Qué tan operativos son los modelos de diseño investigativo?

Los tres modelos que he presentado en la sección previa pueden ser útiles principalmente para aquellas personas que enfrentan la tarea de elaborar un diseño investigativo por primera vez. Pero hay que ser cautos a la hora de interpretarlos para no suponer que ellos expresan la realidad del ejercicio investigativo.

En la vida real, un diseño investigativo se ajusta más al proceso de armar un rompecabezas por ensayo y error, aunque sistemáticamente. Retomo las palabras de Gómez (1998) cuando, al dar cuenta de su experiencia investigativa, señala un camino lleno de desvíos y retornos, sin que ello implique que no se haga un diseño investigativo previo. Por ejemplo, él señala que en muchas ocasiones la información recogida no permite ahondar en el problema que se pretende atender, pero sí releva fenómenos sorprendentes. Esto puede llevar a la necesidad de hacer cambios en la formulación del problema. Es decir, a partir de una inquietud, la formulación de un problema, el diseño de una estrategia investigativa y la reco-

lección de información, se identifica un fenómeno importante e interesante que se aparta del asunto inicial y lleva a los investigadores a proceder "en reversa", de la información al problema. En ese sentido, Gómez define el diseño como un proceso dinámico y flexible, que se autoalimenta y redefine en el transcurso mismo del proceso. Solo después de repetidas aproximaciones al escenario, con inquietudes algo generales, se van identificando aspectos particulares de la realidad que pueden ser observados y analizados de manera sistemática, buscando evidencia que pueda confirmar o refutar lo que se encuentra.

La descripción de Gómez (1998) ha sido también mi experiencia, en el ámbito de procesos de investigación institucionalizada. Es el caso del desarrollo de trabajos de grado o tesis en los cuales el director aporta su experiencia para dirigir a los estudiantes-investigadores hacia un ejercicio académico en los plazos de tiempo establecidos. No obstante, al caracterizar un diseño investigativo, los profesores del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional hemos sugerido que este tiene un parecido con completar un rompecabezas, del que no se tiene claro qué forma final tiene; es decir, se avanza por diferentes rutas que incluso determinan cambios en los objetivos, el problema, la fundamentación teórica, etc. Los estudiantes-investigadores desarrollan competencias investigativas dentro de ciertas tradiciones y con base en ello ganan conocimiento para sí y eventualmente para otros. Esto hace que sea muy difícil normalizar el diseño, aunque se tenga conciencia de que es una experiencia de aprendizaje enmarcada en un tiempo limitado, a partir de la concepción misma del trabajo. En ese sentido, los directores de los trabajos se mueven en una tensión entre la flexibilidad y la rigidez de los diseños investigativos, tratando de equilibrar el aspecto caótico o desordenado del ejercicio, con las exigencias institucionales que regulan los tiempos. Esto porque el proceso no es lineal, pero a la vez está enmarcado en un programa académico y, en ocasiones, en exigencias de rendición de cuentas. Ello significa que los directores y estudiantes-investigadores experimentan una dinámica compleja entre la construcción del proyecto (en donde los estudiantes-investigadores avanzan en su proceso innovador, crítico y reflexivo) y las exigencias administrativas de tener que presentar informes parciales y obtener calificaciones semestre a semestre. Esta tensión es una realidad con la que debe convivirse, pero de la que no debe interpretarse que el proceso investigativo real coincide con el administrativo; si se entiende que existen dos rutas diferentes (real y administrativa) para el trabajo investigativo,

puede tenerse una coexistencia pacífica que conduzca a la culminación de los trabajos de grado.[1]

Diseños rígidos o focalizados versus diseños flexibles y amplios

Los planteamientos que he formulado en las secciones precedentes permiten inferir que, en el proceso de desarrollo, los investigadores avanzan en la planeación y ejecución de un proyecto a partir de un diseño. Su grado de elaboración se puede caracterizar en un rango que está entre dos polos opuestos: un diseño amplio y flexible o un diseño focalizado y rígido. Estas características dependen de las condiciones en las que se lleva a cabo el estudio, de la experiencia de los investigadores acerca del fenómeno, de la naturaleza misma del fenómeno e incluso del punto de vista de los investigadores sobre la naturaleza del ejercicio.

Respuestas a preguntas como las siguientes determinan las características del diseño: ¿Debería partirse de una o varias preguntas de investigación, o conviene ir al escenario investigativo libre de inquietudes? ¿Debería disponerse de un marco conceptual antes de ir al escenario? ¿Deberían contemplarse previamente ciertos instrumentos para recopilar información? ¿La falta de una delimitación y focalización previa puede conducir a una recolección indiscriminada y poco productiva de datos? ¿Una delimitación y focalización previa ciega a los investigadores para captar rasgos importantes del fenómeno y puede producir percepciones equivocadas? En todos los casos, las investigaciones con enfoque fenomenológico o sociocrítico se encuentran en un punto entre estos dos extremos.

Miles y Huberman (1994) indican que, sin importar qué tan flexible o rígido sea, toda investigación se apoya en un diseño, sea este deliberado o no, que prefigura el proceso analítico. Esto porque los investigadores, así lo quieran, no pueden desprenderse de su perspectiva de los fenómenos, de sus intereses, de su formación y de su experiencia. Por ejemplo, la observación de una clase de matemáticas sobre la ecuación general de segundo grado, realizada por diversos investigadores, se orienta a partir de un diseño, flexible o rígido. Este conduce la mirada de una manera específica, según los investigadores quieran profundizar o tengan conocimiento previo sobre: el papel de las representaciones

---

1 Estas ideas son extraídas del informe presentado por el Equipo Integral de Docencia del programa de Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (del que hacían parte Cecilia Agudelo, Gloria García, Edgar Guacaneme y Leonor Camargo), en diciembre de 2016, a la coordinación del programa. El documento no está publicado y se escribió como parte de las acciones de revisión curricular y de autoevaluación del programa.

empleadas por el profesor en los significados construidos por los estudiantes; la gestión que el profesor realiza para usar las ideas de los estudiantes en el desarrollo del contenido; el papel que juegan el libro de texto, los cuadernos de apuntes y otro material concreto de apoyo empleado por los estudiantes; la argumentación desplegada por los estudiantes para sostener una afirmación matemática; los enunciados de los ejercicios propuestos por el profesor para involucrar a los estudiantes en la actividad matemática; el rol que desempeñan los problemas en la clase; las normas sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996) que establecen cómo tratar con ecuaciones de segundo grado; la interacción en el aula y procesos de negociación de significados matemáticos; los conflictos de autoridad y poder entre estudiantes o entre profesor y estudiantes que influyen en la construcción de conocimiento; las relaciones entre los ejemplos trabajados en clase y el contexto sociocultural de la escuela; etc.

Según Miles y Huberman (1994), la aproximación antropológica sugiere evitar diseños rígidos o focalizados al máximo. Investigadores que promueven esta aproximación consideran que los fenómenos sociales son demasiado complejos, evasivos o sorprendentes para acceder a ellos con preguntas y marcos conceptuales predeterminados y explícitos. Sugieren diseños más libres que se van estructurando y construyendo de manera participativa, incluso con apoyo de los sujetos investigados, a partir de la recolección de información. De esa forma: el marco conceptual se decide en el curso de la obtención de información, a partir de unas ideas rudimentarias de los investigadores sobre dónde apoyarse para lograr comprensión del fenómeno total o parcialmente; las preguntas de investigación se van proponiendo y aclarando gradualmente; los participantes se seleccionan durante el trabajo empírico de recolección de información; los recursos e instrumentos, si se ven necesarios, se derivan de la misma configuración del escenario y la visión de los participantes, a partir de unas ideas iniciales sobre qué observar y cómo. Respecto de la selección de los participantes, Tobin (2000) agrega que es muy interesante identificar en el escenario participantes que se ajustan a un tipo de actuación estándar o representativa, pero también vale la pena mirar actuaciones divergentes para lograr un retrato claro y completo que permita ganar claridad sobre el fenómeno. Esto hace que pueda ser importante una selección contingente de los participantes, que lleve a tomar decisiones sobre la marcha. Entre mayor sea la variedad de los participantes, mejor se refleja la diversidad de la comunidad estudiada.

Al cuestionar la postura de la aproximación antropológica, Miles y Huberman (1994) consideran que los diseños flexibles y abiertos son convenientes cuando se investigan fenómenos poco estudiados o muy complejos, de los que no se tiene mucha información previa. Sin embargo, conviene emplearlos

cuando los investigadores cuentan con amplia experiencia y son sensibles y receptivos a la idiosincrasia local y al examen de hechos que otras personas pueden pasar por alto. Requieren de experticia para ir modificando la agenda investigativa a medida que se hacen reflexiones, interpretaciones y análisis en curso, sin perder el rumbo final. De lo contrario se puede correr el riesgo de invertir tiempo valioso recopilando gran cantidad de información en el escenario que solo produzca banalidades.

Las aproximaciones hermenéutica y colaborativa social frecuentemente promueven la realización de diseños más rígidos y focalizados, sobre todo cuando se estudia un fenómeno o una cultura familiar a los investigadores, cuando se trabaja con constructos bien definidos, cuando la investigación busca probar un fenómeno descrito o cuando se es investigador novel (Miles y Huberman, 1994). Este tipo de diseños ofrecen una ruta clara y enfocada que puede ser útil para aquellos que no se sienten cómodos con adentrarse en un fenómeno difuso o no tienen el tiempo para administrar una sobrecarga de información adicional.

Como se ve, la posición sostenida por Miles y Huberman (1994), que comparto, tiende a ir a favor de los diseños más rígidos y focalizados que a defender los diseños amplios y flexibles, aunque estos autores insisten en que la decisión depende de qué tanto se sabe acerca del fenómeno, qué recursos e instrumentos están disponibles y el alcance del análisis que se desea hacer. Una de las razones que ellos aducen es que es poco eficiente ignorar el conocimiento base del que disponen los investigadores, pues este les permite ver y descifrar detalles, sutilezas, rasgos, a los que no accede un observador menos informado; en ese sentido, no guiarse por un marco conceptual previo puede resultar contraproducente. Otra razón para defender esta postura es que los fenómenos sociales son complejos; por lo tanto, una recolección de evidencias desprovista de inquietudes, estrategias y métodos puede conducir a registrar mucha información y esta recopilación se vuelve un proceso complejo que redunda en un cúmulo de registros en donde difícilmente se pueden identificar regularidades claves. Obviamente, si los investigadores no están limitados en el tiempo, podrán darse el lujo de ir depurando la información poco a poco; pero este no es el caso la mayoría de las veces.

En síntesis, los diseños rígidos y focalizados producen resultados más económicos, comparables y potencialmente generalizables. Los diseños flexibles y amplios son sensibles y pueden derivar en resultados novedosos y sorprendentes. En ese sentido, la mejor idea parece ser la de evitar cualquiera de los dos extremos.

3

Principales estrategias cualitativas empleadas en educación matemática

En este capítulo me ocupo de presentar un conjunto de estrategias investigativas que se valen principalmente de procedimientos cualitativos, usadas en educación matemática. Las estrategias determinan un plan de ejecución relacionado con el registro de información, previsto en el diseño de la investigación (Páramo, 2013). Sin pretender ser exhaustiva, describo estrategias empleadas frecuentemente en los últimos años, por lo menos en el ámbito local, cuando la investigación tiene un enfoque fenomenológico o sociocrítico, en cualquiera de sus aproximaciones (ver capítulo 1).

La riqueza de estrategias tiene su origen en el reconocimiento, cada vez más frecuente, de la necesidad de buscar formas de indagación que capturen la complejidad de los fenómenos educativos de tal suerte que su pertinencia y significación produzcan resultados interesantes y útiles. Su vigencia para el campo de investigación en educación matemática es señalada por diversos investigadores que abogan por ellas aun a riesgo de perder rigor científico o posibilidades de generalización (Kelly y Lesh, 2000; Sierra, 2011).

En educación matemática la notoriedad de las estrategias que se valen de procedimientos cualitativos es motivada por el giro social en el campo, que enfatiza en la naturaleza social y cultural de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Esta visión sitúa la indagación en complejos escenarios y comunidades, amplía el rango de los fenómenos de estudio y admite fuentes de información de diversa naturaleza (Romberg, 1992). Adicionalmente, hace que los investigadores se vean a sí mismos como partícipes de los fenómenos que investigan y que las distancias entre investigadores e investigados se diluyan. Varias de las estrategias que describo promueven esta mirada e

involucran a profesores, estudiantes y agentes educativos en los equipos de investigación. Como consecuencia se preocupan por generar mecanismos para actuar responsablemente usando evidencias y herramientas analíticas creíbles y auditables (Kelly y Lesh, 2000). Esta manera de proceder es diferente cuando se emplean estrategias que se valen de procedimientos cuantitativos; en estos casos, el investigador se ubica en una posición apartada por considerar que estrechas relaciones entre investigadores e investigados vician los estudios.

Como lo señalé en el capítulo 1, la pertinencia de las estrategias a las que me refiero no se deriva únicamente de su capacidad para dar respuestas a ciertas cuestiones específicas que movilizan la investigación. Proviene de su potencial para encontrar nuevas vías para pensar acerca de las inquietudes y sus posibles soluciones, promoviendo la profundización en los fenómenos, para ir más allá de lo obvio e inmediato y poner el acento en lo que podría ser factible. Kelly y Lesh (2000) señalan que hay una relación simbiótica entre el desarrollo de nuevas estrategias, los problemas que se estudian y los resultados que se producen. Por eso hay una dinámica que moviliza las estrategias de investigación generando cambios en ellas mismas a medida que el campo disciplinar avanza. Las preguntas por el objeto de estudio, el tipo de fenómeno (¿es un estado?, ¿es un proceso?, ¿es un mecanismo?, ¿es una evolución?), el contexto investigativo, las interacciones que interesan, los participantes y la naturaleza de los productos, determinan la estrategia a escoger o a construir.

Organizo este capítulo a partir de una posible clasificación de las estrategias con base en el tipo de preguntas que permiten atender. El deseo de presentar una clasificación proviene, como indican Herrera y Ruiz (2013), del interés por facilitar la comunicación entre investigadores y construir un punto de partida para guiar las elecciones personales.

Describo cada estrategia mencionando aspectos como: en qué consiste, en qué casos se usa, cuáles son los productos esperados, quiénes son los participantes y sus roles, en qué escenarios se desarrolla, qué llevan los investigadores al escenario, qué etapas se suelen cubrir y qué variantes de la estrategia existen. Como indican Denzin y Lincoln (1998), cada estrategia tiene formas particulares de "ponerse en movimiento". En los capítulos 4 y 5 hago una descripción de recursos para la recolección de información y el análisis de datos, por lo que en este capítulo no me detengo en ello.

Estrategias naturalistas (¿qué pasa?)

Denomino *estrategias naturalistas* a aquellas que se preguntan *¿qué pasa?* o *¿qué pasó?* para describir e interpretar algún fenómeno relacionado con la

enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la evaluación en matemáticas o asuntos concernientes a redes y sistemas de prácticas sociales y culturales que influyen en la educación matemática de niños, jóvenes, adultos y profesores. Estas estrategias son empleadas principalmente por quienes asumen una aproximación antropológica, que toma en cuenta la compleja cultura escolar o educativa, de manera holística, sin interferir en ella, o por quienes adoptan una aproximación interpretativa; aunque también pueden ser empleadas, en combinación con otras, cuando se adopta una aproximación sistémica.

El principal interés de los investigadores es hacer una descripción de una situación lo más fiel posible de modo que la información obtenida se pueda narrar o interpretar en función del escenario en donde se recolecta. Los estudios no pretenden develar realidades objetivas sino lograr relatos o interpretaciones construidas por los participantes, de manera negociada (Uribe, 2013).

Las interpretaciones, cuando tienen lugar, buscan: generar comprensiones sobre fenómenos buscando representarlos, construir consensos entre formas de interpretar fenómenos, examinar hechos e interacciones entre ellos, construir mapas de rutas sobre prácticas, sugerir vías de atención a situaciones o tomar decisiones; todo ello tiene en consideración la cultura en la cual se da el fenómeno investigado (Romberg, 1992; Confrey, 2000; Moschkovich y Brenner, 2000; Sierra, 2011; Bakker y Van Eerde, 2015). Generalmente las estrategias naturalistas son una buena forma de relacionar corpus teóricos entre sí, sobre individuos, grupos, instituciones, materiales, formas de trabajo, etc., y verificar las relaciones en el escenario (Herrera y Ruiz, 2013).

En investigación en educación matemática las estrategias naturalistas han permitido principalmente estudiar las prácticas de enseñar y aprender matemáticas en diversos contextos, examinar actitudes y creencias e identificar fenómenos sociales en el interior del aula de matemáticas o en las redes de prácticas sociales que rodean el aula. La manera de proceder está influida por los escenarios en donde la educación matemática se lleva a cabo, se regula o se controla. Frecuentemente son empleadas las estrategias investigativas: "basada en prácticas usuales", "en primera persona", "estudio de caso" y "revisión documental".

Estrategia investigativa: basada en prácticas usuales

La estrategia investigativa *basada en prácticas usuales*[1] consiste en un ejercicio sistemático de acercamiento a un escenario educativo. Se busca describir o inter-

1 Cuando la investigación se realiza en el escenario del aula, se denomina "basada en clases" (en inglés es conocida como *classroom-based research).*

pretar la naturaleza de un fenómeno interesante, desde el punto de vista académico, no necesariamente notado por los participantes de este (Kelly y Lesh, 2000).

Esta estrategia se emplea comúnmente cuando se tiene la intención de caracterizar una dinámica presente en un contexto singular y los investigadores quieren captar la riqueza y los detalles del fenómeno de manera situada y desde la perspectiva de los participantes. Un escenario común para llevar a cabo este tipo de investigación es el aula de matemáticas, aunque también pueden ser considerados otros escenarios como aquellos en los que los profesores de matemáticas interactúan o se forman o escenarios donde se llevan a cabo prácticas sociales que promueven la educación matemática, como los museos o centros de difusión de ciencia y tecnología.

Los productos de una investigación naturalista basada en prácticas usuales son generalmente descripciones o interpretaciones de sistemas complejos considerados por algunos investigadores como textos que los narran o dilucidan con cierta verisimilitud, sin pretender ser copias "reales" de estos (Denzin y Lincoln, 1998). Otros productos son constructos, tipologías, esquemas de relaciones o modelos de actuación que surgen en las interpretaciones (Kelly y Lesh, 2000).

Los participantes de una investigación basada en prácticas usuales son los miembros de un equipo de investigación y las personas que usualmente interactúan en el escenario para llevar a cabo la práctica cuyo fenómeno se desea describir o interpretar. En el caso de una clase de matemáticas son el profesor y los estudiantes que están en el ambiente natural de dicha clase. Los participantes no investigadores llevan a cabo sus prácticas de manera natural, como suelen hacerlo. Los investigadores intentan mimetizarse en el escenario y producir la menor alteración posible. Se integran a las actividades rutinarias como otros miembros o permanecen en el escenario como observadores no participantes. En ambos casos, una condición de esta estrategia es que los participantes no investigadores se sientan cómodos con los investigadores y puedan actuar frente a ellos como si no estuvieran presentes, o con ellos como si fueran miembros del grupo (Uribe, 2013).

La estrategia supone que los investigadores se incorporen al escenario habiéndose fundamentado previamente en un referente teórico, generalmente amplio, que les permite disponer de un recurso de "lectura" e interpretación del fenómeno. Pueden disponer de un conjunto de indicadores iniciales que guían sus observaciones y la recolección de las primeras evidencias empíricas. Estas pueden estar poco estructuradas. A medida que las observaciones avanzan, los investigadores formulan nuevos indicadores, tipologías, sistemas de relaciones o categorías. Este procedimiento es realizado de manera inductiva, alimentando el marco teórico preliminar con los resultados de sus observaciones.

Generalmente la estrategia incluye las etapas que ilustro en la figura 3.1, que se llevan a cabo una vez se ha previsto, en el diseño, el fenómeno a describir o interpretar.

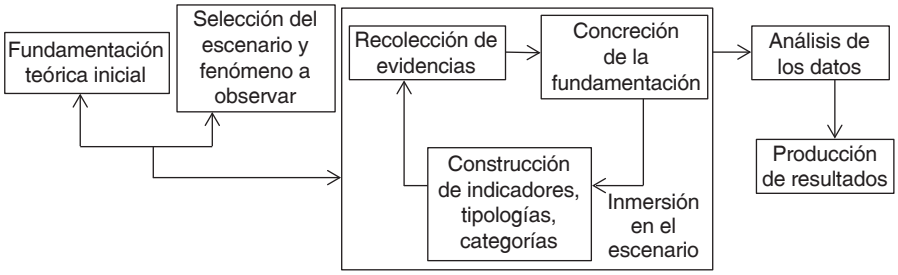


Figura 3.1 Plan de ejecución de la estrategia basada en prácticas usuales

Fuente: elaboración propia.

La fundamentación teórica inicial y la selección del fenómeno y del escenario se van adelantando en relación una con la otra. A partir de ellas los investigadores se ubican en el escenario y adelantan procesos de recolección de evidencias, concreción de la fundamentación teórica y construcción, generalmente inductiva, de indicadores, tipologías y categorías que se van puliendo y refinando con nuevas evidencias y mejor concreción de la fundamentación. Una vez se dispone de la información que permite describir o interpretar el fenómeno en profundidad, se abandona el escenario y se hacen análisis de la información recolectada a partir de indicadores, tipologías y categorías construidas durante la etapa de recolección de evidencias. Este proceso puede dar lugar a nuevos indicadores y categorías que se contrastan con la información recogida. El análisis genera los productos de la investigación.

El tiempo de permanencia en el escenario y la cantidad de ciclos de recolección de información, concreción de referentes teóricos y producción de indicadores, tipologías y categorías varían según el fenómeno, las condiciones particulares incidentales y las limitaciones del estudio. Investigaciones que se refieren a fenómenos como adaptación, cambios de actitud, memoria y fatiga requieren de observaciones sostenidas por largos periodos. En ese caso, la estrategia lleva el calificativo de "longitudinal" (Romberg, 1992). Si las circunstancias de la observación no permiten la recolección de información por un largo periodo, pero la pregunta de investigación alude a diferencias en el tiempo, los investigadores pueden llevar a cabo una estrategia "cruzada"; esta permite la comparación de

información recogida en grupos similares de participantes en los que varía la edad o el tiempo de exposición a una situación de enseñanza o aprendizaje, para poder interpretar los cambios experimentados (Romberg, 1992).

Ejemplo 3.1

Clasifico la estrategia usada en la investigación de Obando (2015) como naturalista basada en una práctica usual. El investigador escogió como escenario una institución educativa en la que comúnmente se llevan a cabo procesos de seguimiento y sistematización de experiencias y de cualificación de acciones pedagógicas. Se vinculó al sistema de prácticas que quería investigar considerando su participación como parte del proceso de constitución del sistema. En ese sentido, además de participar en reuniones de planeación institucional en las que se definieron las tareas con las cuales estudió las prácticas matemáticas relacionadas con razón, proporción y proporcionalidad de niños de 3.º y 4.º de primaria, el investigador estuvo en reuniones evaluativas sobre el trabajo de los estudiantes y en sesiones de revisión de fundamentación pedagógica y didáctica de la propuesta curricular institucional. Las tareas, escogidas de un banco de actividades que los docentes han ido proponiendo y probando a lo largo de varios años, fueron revisadas y se hicieron algunas adaptaciones sugeridas por Obando y otros profesores, en el marco de la organización curricular dispuesta por la institución.

Obando (2015) también participó en el trabajo en las aulas, interactuando con los estudiantes, haciéndoles preguntas, solicitándoles ampliar sus argumentos y proporcionándoles algunas explicaciones; sin embargo, respetó en todo momento la gestión de la clase que dirigían las profesoras titulares. Los niños estaban al tanto de los intereses que él tenía (de estudiar lo que ellos hacían en la clase) y sabían también que "el profesor Obando" podía apoyarlos en su trabajo. Esta forma de participar le brindó un conocimiento profundo y cercano de la institución, los docentes, las tareas y los estudiantes, que fue importante para la caracterización del sistema de prácticas del que estaba interesado.

Paralelamente al registro de información empírica, Obando (2015) fue construyendo una fundamentación teórica con la cual analizó el sistema de prácticas a partir de una revisión histórica de prácticas matemáticas relacionadas con la razón, la proporción y la proporcionalidad, en diferentes culturas, lugares y épocas de la historia. Esta revisión siguió una estrategia de análisis documental muy similar a la que se describe más adelante.

Ejemplo 3.2

Valoyes (2014) adoptó, como parte de sus estrategias investigativas, una indagación naturalista sobre las prácticas de enseñanza en tres instituciones

educativas ubicadas en tres estratos socioeconómicos diferentes, caracterizadas por que en todas ellas había estudiantes de raza negra en los cursos de grado 8.º de educación básica secundaria. Hizo la selección de las instituciones después de contactar a los directores de un conjunto de estas que cumplían ciertos criterios, explicarles los propósitos del estudio y apreciar el interés y la aceptación por participar en este. Una vez seleccionadas las instituciones, la investigadora escogió un profesor en cada una que tuviera más de cinco años de experiencia docente, impartiera clases de álgebra y no fuera de raza negra. Decidió observar las clases de un curso de grado 8.º en cada institución y seleccionó como asistentes a cuatro estudiantes de cada curso, al menos uno de ellos de raza negra, para hacer videograbaciones.

Con el objetivo de lograr una observación persistente y significativa, Valoyes (2014) actuó como observadora participante en las clases de álgebra de las tres instituciones durante cuatro semanas, y tomó notas personales. Esto le permitió observar directamente las estrategias instruccionales usadas por los profesores al enseñar álgebra, el uso de textos y materiales didácticos, la organización de la clase y la participación de los estudiantes. Con ello ganó comprensión acerca de rutinas y discursos de los profesores, así como de las reacciones de los estudiantes a las prácticas de enseñanza. Como parte de la observación, Valoyes invirtió tiempo en la sala de profesores hablando informalmente con ellos para captar sus percepciones sobre la institución y los estudiantes y percibir el clima escolar y las relaciones entre los profesores y entre ellos y los estudiantes. También habló con estudiantes durante los recesos de clase acerca del ambiente escolar y estuvo en una reunión de padres de familia. Tuvo acceso a la biblioteca, la cafetería y los lugares de descanso para registrar interacciones.

Estrategia investigativa: en primera persona

La estrategia investigativa *en primera persona* consiste en el estudio de un fenómeno investigativo accediendo a este a partir de su explicitación directa por parte de quienes lo experimentan, tienen conciencia de él y quieren estudiarlo. Se busca capturar su riqueza y profundizar en sus detalles significativos (Ball, 2000).

Esta estrategia es útil cuando se quiere describir o interpretar el significado que las personas dan a fenómenos personales de su vida corriente relacionados con situaciones, individuales o colectivas, roles, jerarquías, normas, retos, emociones, dudas, etc., en circunstancias sociales específicas (Denzin y Lincoln, 1998). Por ejemplo, cuando los profesores se enfocan en su práctica para escudriñarla a fondo "desde dentro" y captar aspectos de esta que

son determinantes, la investigación es vista como una forma para legitimar perspectivas sobre la práctica por medio de su indagación sistemática.

Algunos productos de la implementación de una estrategia en primera persona son: descripciones (en forma de comentarios o narrativas) e interpretaciones que contribuyen a comprender y mejorar la práctica observada; información nueva que puede ser útil en futuras prácticas; proyecciones de nuevas prácticas; revelaciones, ideas, constructos teóricos e incluso modelos que pueden ser compartidos con otras personas que llevan a cabo prácticas similares. En todos estos productos se captan matices de los significados, el lenguaje y las acciones locales que no pueden ser captados por alguien ajeno a la misma práctica. Por ejemplo, los profesores de matemáticas pueden escribir a sus colegas acerca de problemas de la enseñanza que llevan a cabo, los aprendizajes de sus estudiantes, inquietudes y dilemas sobre orientaciones curriculares, etc. Por esta vía rompen el aislamiento en el que muchas veces sucede su práctica y pueden incluso convencer a otros de hacer ajustes a sus propias prácticas, de los que podrían no estar inicialmente muy convencidos (Ball, 2000). Un ejemplo de investigación en primera persona es reportado por Martin Simon —en el documento de Ball (2000)—, quien a través del análisis de su propia práctica encontró patrones sobre ella y propuso un modelo que denominó "ciclo de enseñanza".

Como en esta estrategia el investigador indaga en y sobre su propia práctica, él es a su vez el sujeto investigado. La posición en la que se ubica es utilizada deliberadamente para formular preguntas que no podrían atenderse con otras estrategias, estructurar la recolección de evidencias empíricas y hacer el análisis.

El investigador-investigado escruta su práctica en busca de un fenómeno de interés. Dotado de sus ojos y sus manos, y con la posibilidad de moldear su práctica, tiene acceso íntimo a ella para examinarla desde dentro. La indagación se lleva a cabo en el mismo escenario en el que se desarrolla la práctica, por lo que el investigador-investigado genera situaciones que le permiten recopilar evidencias sobre ella, reflexionar acerca de esta y analizarla. Ello no implica que tenga que poner en funcionamiento un diseño especial o una conjetura, pero sí que sea altamente disciplinado, reflexivo sobre su práctica, sensible a eventos que se salen de lo previsto y versátil a la hora de capturar e inspeccionar información acerca del fenómeno. Esto, al tiempo que realiza su práctica para poder registrarla y analizarla. En caso necesario, alimenta sus observaciones y reflexiones con fundamentación teórica que le permite disponer de herramientas para captar lo que es menos visible y comprender las situaciones que experimenta.

En particular, al momento de analizar su práctica el profesor de matemáticas está abierto a captar el sentido de lo que hacen o dicen sus estudiantes. Así ellos se salgan de lo previsto por él, debe cuidarse de la tendencia a evaluar lo que ellos deberían hacer, para avanzar hacia lo que hacen y comunican, gracias a las oportunidades que él les brinda. En la figura 3.2 esquematizo las etapas por las que atraviesa una investigación en primera persona que se ponen en funcionamiento una vez se tiene una idea sobre el fenómeno a investigar.

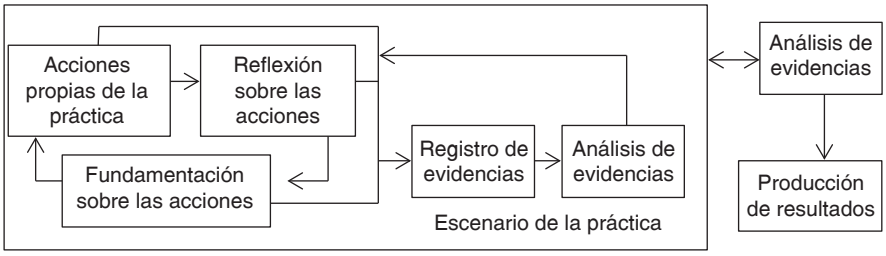


Figura 3.2 Plan de ejecución de la estrategia investigativa en primera persona

Fuente: elaboración propia.

La mayor parte de la investigación transcurre en el escenario de la práctica. A partir de la reflexión sistemática sobre esta, con el apoyo de una fundamentación teórica, el investigador-investigado va recopilando y analizando evidencias del fenómeno en el escenario, pero también desde afuera de este. Despliega una dinámica de entrar y salir del escenario, cuantas veces se requiera, hasta lograr producir resultados interesantes desde el punto de vista investigativo. El hecho de que aparezca dos veces ilustrado el momento del análisis tiene que ver con intentar expresar que los análisis se hacen con una mirada desde el interior de la práctica y por fuera de ella.

Es importante aclarar que para aprovechar las ventajas de analizar la propia práctica el investigador se impone un reto. Necesita generar mecanismos para alejarse de sí mismo y lograr poner en perspectiva sus acciones, pues de lo contrario le será difícil avanzar en el análisis más allá de hacer descripciones. La posibilidad de lograr descubrimientos e interpretaciones y, en general, de producir nuevo conocimiento para sí mismo y para los demás está en su capacidad de analizar la práctica propia como si se tratara de la de otra persona

y llevar a cabo reflexiones en lugar de defensas sobre esta práctica, pero sin silenciar la voz interior.

Como señala Ball (2000), el hecho de que el investigador sea actor y a la vez crítico genera dudas acerca de la naturaleza de los productos de la investigación y de la validez del ejercicio investigativo. Un mecanismo que se ha visto útil para lograr un proceso confiable consiste en apoyarse en un equipo de investigación, de tal suerte que el investigador-investigado hace parte de este y, mediante la interacción con sus colegas, logra analizar su práctica en perspectiva. Incluso en algunas variantes de la estrategia el equipo apoya al investigador-investigado en la introducción de modificaciones a su práctica; por eso, en ocasiones, esta estrategia puede ser clasificada dentro del grupo de estrategias de diseño.

Estrategia investigativa: estudio de caso

La estrategia investigativa *estudio de caso* consiste en describir y caracterizar una situación o historia individual *(i. e.*, ser humano específico, entidad, organización o institución) cuya particularidad es interesante desde el punto de vista investigativo. Generalmente es empleada por investigadores que se ubican en una aproximación interpretativa o hermenéutica. Ellos hallan una circunstancia atípica que desafía regularidades previamente observadas acerca de un fenómeno, notan que las explicaciones elaboradas previamente parecen encontrar una excepción y deciden examinarla en profundidad para lograr una comprensión más completa sobre el fenómeno cuya complejidad se hace visible (Hederich, 2013).

Esta estrategia es útil cuando se quiere reportar información acerca de creencias, conocimientos, situaciones, acciones o particularidades del caso sin hacer juicios o valorar estos, pero con la intención de obtener resultados teóricos y prácticos útiles para analizar experiencias de otros (Romberg, 1992). En el campo de la educación matemática es frecuentemente nombrado el artículo de Erlwanger (1973) por reportar una investigación que quizás fue la primera en usar la estrategia. El autor hizo un seguimiento cercano a un niño de 11 años, al que llamó Benny, para describir e interpretar cómo él trabajaba atípicamente con fracciones e identificar qué concepción tenía sobre las reglas algorítmicas para operar con ellas. Aunque la investigación se refiere a un caso específico, el investigador intenta derivar conclusiones prácticas y teóricas acerca de la diferencia entre lo que revela una evaluación escolar y lo que un estudiante puede pensar.

El principal producto de la investigación que usa la estrategia estudio

de caso es el reporte minucioso del caso, con información detallada sobre las particularidades de este. Estas tienen que ver con la experiencia previa, las circunstancias especiales y la relación con otros casos o informantes (Stake, 1978; citado en Denzin y Lincoln, 1998). El reporte brinda información que puede ser útil para comprender situaciones similares, constructos teóricos e incluso modelos de actuación.

Los participantes en el estudio son los investigadores y el "caso". Este puede ser un sujeto individual (un profesor, un estudiante, un director de un colegio, un padre de familia, etc.), una clase, una institución u organización, con alguna particularidad de interés investigativo que amerita hacer un estudio a fondo. Los investigadores generan estrategias para hacer un seguimiento pormenorizado al caso procurando una relación personal con este (Gutiérrez, 1991).

Para llevar a cabo la indagación los investigadores parten de unos presupuestos sobre el comportamiento o la forma de pensar de las personas en relación con una práctica social. En el campo de la investigación en educación matemática las suposiciones pueden ser sobre experiencias de enseñanza o aprendizaje. Estas son confrontadas con el comportamiento o la forma de pensar (diferente o atípica) de un individuo o grupo de individuos que tiene una peculiaridad que amerita ser estudiada. A partir de un seguimiento detallado del caso se va aclarando el comportamiento o el pensamiento. Lo anterior implica hacer interpretaciones de las acciones y los discursos con base en fundamentos teóricos relacionados con el asunto.

En la figura 3.3 intento esbozar, con un interés ilustrativo, la estructura común de la estrategia estudio de caso sin pretender con ello que el proceso deba llevarse a cabo tal cual. Como se puede apreciar, a partir de la identificación del caso por parte del investigador (con el que muchas veces él se encuentra sin estarlo buscando) la estrategia se enfoca en hacer un seguimiento detallado de este. A partir de una visión holística, simultáneamente compara el caso con sus homólogos y establece su especificidad. Para interpretar lo que dice o hace el individuo, o el grupo de individuos, los investigadores se fundamentan en un marco teórico que les permite revisar sus presupuestos preliminares o comprender por qué el caso se distancia de lo usual.

Stake (1978; citado en Denzin y Lincoln, 1998) identifica dos tipos de estudios de caso: intrínseco e instrumental. En un estudio de caso *intrínseco* se selecciona un caso porque el investigador se encuentra con una cuestión paradójica, extraña o atípica que requiere comprensión y que puede aclararse estudiando el caso particular a fondo. Según Stake, el interés se centra en el caso y por eso se llama "intrínseco". El estudio de caso *instrumental* es aquel en el que el caso se escoge a propósito para someter a prueba una teoría. Se-

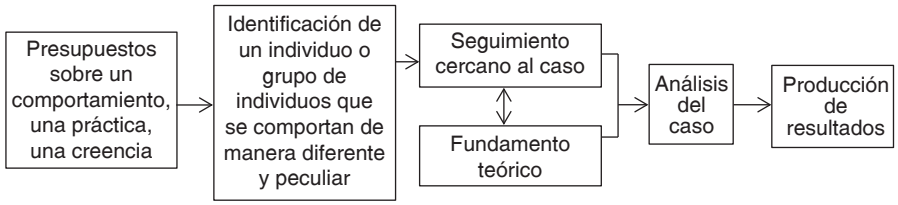


Figura 3.3 Plan de ejecución de la estrategia estudio de caso

Fuente: elaboración propia.

gún Stake, el interés se centra en la teoría y no en el caso y por eso se llama "instrumental". Una forma de estudio de caso instrumental es el "estudio de caso colectivo" en el que se estudian varios casos para fundamentar la generalidad de un fenómeno o una teoría. Los casos que se seleccionan pueden ser similares o diferentes, ya sea para entender las concordancias o para identificar las variantes entre cada uno.

Ejemplo 3.3

Como parte del ejercicio investigativo, cuyo interés principal era caracterizar la competencia profesional que permite a profesores de matemáticas de secundaria educar en ciudadanía, Vanegas (2013) llevó a cabo un estudio de caso. Buscó analizar en profundidad las prácticas profesionales exitosas de un profesor experimentado atípico, que participa en un grupo de innovación educativa. El grupo interpreta la enseñanza de las matemáticas como un proceso de enculturación a partir de la resolución de problemas sociales y culturales. El docente lleva un tiempo considerable buscando promover las competencias ciudadanas en la clase de matemáticas de secundaria y logra resultados fuera de lo común. El seguimiento a la práctica del profesor implicó videograbar algunas de sus clases, estudiar sus planeaciones, analizar algunas de sus publicaciones sobre la enseñanza del álgebra, entrevistar a algunos de sus estudiantes y conversar con él sobre la interpretación que tiene de su propia práctica. El análisis del caso conllevó identificar categorías emergentes relacionadas con el trabajo matemático en contextos culturales diversos, el tratamiento de conexiones matemáticas, el desarrollo de un lenguaje propio y el fomento de la participación respetuosa, solidaria y crítica. Estos elementos se relacionan con la formación para la ciudadanía.

Estrategia investigativa: revisión documental

La estrategia investigativa *revisión documental* consiste en la indagación sistemática de material escrito (impreso o en formato digital) en busca de describir e interpretar, a partir de ciertas consideraciones conceptuales específicas, el contenido y la voz de quienes lo elaboraron. Según Guacaneme (comunicación personal), es una manera de recuperar los planteamientos de los autores en un estado de elaboración mayor que si se recogiera lo que dicen ya que la escritura exige poner "en limpio" las ideas.

En la investigación en educación matemática esta estrategia es útil para quienes indagan por asuntos de la historia de las matemáticas o de la historia de la educación matemática. Ejercicios de revisión documental se han hecho desde los orígenes de la investigación empírica en el campo, principalmente por quienes han hecho investigación sobre currículos y textos escolares (Sierra, 2011). Es una estrategia investigativa usada también por quienes están interesados en elaborar estados del arte sobre líneas de investigación.

La meta principal de la revisión documental es producir clasificaciones o tipificaciones de propuestas, conceptualizaciones y acercamientos que dejan su huella en los materiales escritos revisados. Eventualmente pueden obtenerse conteos de frecuencia de ciertos contenidos y explicaciones de los hallazgos al contrastar los datos de diversas fuentes.

En la investigación toman parte un investigador o grupo de investigadores que seleccionan un conjunto de materiales escritos a partir de una inquietud investigativa y de unos criterios que tienen que ver con el tipo de documentos, el rango de fechas para la revisión, el ámbito geográfico, etc. Cada criterio puede derivar en un conjunto independiente de documentos que serán revisados. O puede ser necesario, si hay un gran volumen de literatura, llevar a cabo un proceso de selección de documentos empleando un criterio tras otro con el material seleccionado (Sánchez y Molina, 2012). Además de criterios para seleccionar el material, los investigadores también elaboran categorías preliminares que determinan lo que van a buscar en los documentos. En la figura 3.4 ilustro el esquema investigativo de la estrategia revisión documental, una vez se han identificado, en el diseño, los objetivos del estudio.

La búsqueda sistemática de descripciones, clasificaciones, tipificaciones, conceptualizaciones o acercamientos inmersos en los materiales analizados requiere seleccionar o construir un conjunto de categorías con el fin de organizar la información y poder entresacar y estructurar la evidencia más relevante según las finalidades del análisis (Valbuena, 2013). El examen del material impreso implica su fragmentación y su transformación en datos susceptibles de organi-

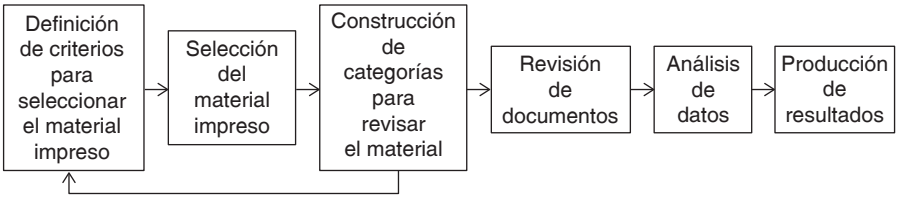


Figura 3.4 Plan de ejecución de la estrategia de revisión documental

Fuente: elaboración propia.

zarse y clasificarse en las categorías. La búsqueda de vocablos o expresiones específicas contribuye a la ubicación de un dato en una categoría. Una vez los datos se han organizado por categorías, se buscan similitudes de contenido y se formulan proposiciones que resumen la caracterización del material agrupado.

Ejemplo 3.4

En su estudio, Obando (2015) combinó dos estrategias: la investigación basada en una práctica usual y la revisión documental. La segunda tenía la intención de identificar diferentes sistemas de práctica relacionados con la razón, la proporción y la proporcionalidad constituidos en diferentes épocas y lugares. Buscaba formas de actividad que pudieran ser útiles para orientar procesos de aprendizaje actuales en contextos escolares. La revisión documental implicó las siguientes etapas:

- *Etapa 1: Selección de épocas y lugares.* Al indagar sobre la actividad matemática relacionada con la razón, la proporción y la proporcionalidad, Obando identificó que las matemáticas griegas eran herederas de tradiciones egipcias y babilónicas y que la tradición matemática hindú tenía fuertes nexos con la matemática de la antigua China. Por lo tanto, seleccionó el antiguo Egipto, la cultural mesopotámica, la antigua China, la antigua Grecia y la Europa medieval como épocas y lugares de indagación.
- *Etapa 2: Identificación de fuentes.* Obando identificó autores u obras que pudieran ser contempladas como representativas de la cultura matemática de la época o autores especializados que hubieran hecho estudios detallados de las matemáticas de las épocas y lugares escogidos. Al no tener acceso a fuentes documentales sobre las matemáticas de la cultura precolombina, esta no fue considerada, aunque el autor consideró que podría ser interesante rastrear tales prácticas.

- *Etapa 3: Discriminación de fuentes.* Las fuentes fueron clasificadas en: primarias, si eran obras publicadas por autores de la época y el lugar en estudio; y secundarias, si eran traducciones modernas, compilaciones analíticas realizadas por autores modernos sobre las matemáticas de una época o lugar determinado o artículos publicados en revistas especializadas. Las segundas fuentes contribuyeron a identificar y rastrear algunas de las primeras.
- *Etapa 4: Tratamiento de las fuentes.* A través de las diferentes fuentes se analizaron tipos de situaciones en las que la razón, la proporción y la proporcionalidad orientaran la actividad o fueran instrumentos de esta. También se indagó por formas de mediación instrumental que pusieran la razón, la proporción y la proporcionalidad en el centro de la actividad y por las formas de objetividad logradas. Al identificar trazas comunes de formas de actividad, se identificaron ideas relacionadas con la cantidad, su representación, la operación entre cantidades y el tipo de problemas; todos estos elementos le sirvieron para caracterizar las prácticas.
- *Etapa 5: Caracterización del sistema de prácticas de ciertas culturas en algún momento histórico.* El análisis dio lugar a una caracterización epistemológica de los objetos de conocimiento razón, fracción, proporción y proporcionalidad, en las épocas y lugares escogidos.

Ejemplo 3.5

La tesis de Guacaneme (2016) es ilustrativa de un estudio documental. De acuerdo con la descripción que el autor hace, llevó a cabo el estudio del potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas en las siguientes etapas:

- *Etapa 1: Identificación y organización de la literatura a estudiar sobre la relación historia de las matemáticas-educación matemática, especialmente publicada desde la década del noventa del siglo pasado.* El investigador hizo un primer esfuerzo de categorización del material en las líneas de investigación estudiadas, según aspectos sociales relacionados con comunidades dedicadas a la investigación sobre el asunto y de acuerdo con los espacios académicos que las determinan. Esta etapa permitió al investigador determinar qué documentos revisar y por qué.
- *Etapa 2: Profundización en la literatura seleccionada para identificar aquella que aborda específicamente la relación entre historia de las matemáticas y conocimiento del profesor de matemáticas.* Guacaneme usó categorías emergentes de análisis para rastrear los planteamientos identificados en los documentos. Estas son referidas a las características de la historia de las

matemáticas que podrían ser relevantes para la formación de profesores (¿qué?), las razones que se arguyen a favor de incorporar el estudio de la historia de las matemáticas como parte de los discursos necesarios para el ejercicio docente del profesor de matemáticas (¿por qué?), los propósitos que se persiguen con el estudio de la historia de las matemáticas (¿para qué?) y las estrategias metodológicas de incorporación de la historia de las matemáticas en la educación de los profesores (¿cómo?).

- *Etapa 3: Estudio de documentos históricos sobre la teoría euclidiana de la razón y la proporción.* Guacaneme realizó estos estudios con el apoyo del análisis del contenido y el uso de las categorías emergentes resultado de la fase dos, para develar el potencial formativo en la formación de profesores.
- *Etapa 4: Propuesta de respuesta descriptiva e interpretativa a la pregunta de investigación por el sentido de la investigación histórica en relación con el conocimiento del profesor.* El autor identificó el potencial de la historia de la teoría euclidiana de la razón y la proporción para influir sobre las concepciones de los profesores de matemáticas y de los aportes que tal historia podría llegar a ofrecer a los conocimientos o competencias de los profesores de matemáticas.

Estrategias clínicas (¿cómo pasa?)

Denomino *estrategias investigativas clínicas* a aquellas en donde, sobre un fenómeno en particular, los investigadores se preguntan *¿cómo pasa?, ¿cómo pasó?, ¿por qué pasa?* o *¿por qué pasó?* Los investigadores pretenden hacer un análisis en profundidad que les permita explicar el fenómeno, además de describirlo o interpretarlo. Las estrategias clínicas son empleadas con frecuencia por quienes adoptan una aproximación hermenéutica, tanto fenomenológica como interaccionista, pero pueden ser usadas, en articulación con otras, cuando se adopta una aproximación sistémica. En educación matemática usualmente son empleadas por quienes tienen interés en develar formas de pensar de las personas.

Para ahondar en el fenómeno de interés los investigadores buscan tener cierto control sobre la manera en que recogen la información (Bakker y Van Eerde, 2015). Así pretenden que se revelen descripciones, concepciones, procedimientos y justificaciones útiles para profundizar en los fenómenos investigados y poder explicarlos (Kelly y Lesh, 2000). En el caso de preguntas acerca de cómo sucedió un fenómeno en el pasado, es necesario que quienes vivieron la situación que dio lugar a este puedan interactuar con el investigador y participar en el estudio. De lo contrario habría que adelantar una revisión documental.

En las siguientes secciones me refiero a las estrategias denominadas "entrevista estructurada", "entrevista semiestructurada", "entrevista basada en tareas" y "observación clínica". En la caracterización agrupo las dos primeras, por considerar que su naturaleza, propósitos y etapas son muy similares.

Estrategias investigativas: entrevista estructurada y entrevista semiestructurada

Las estrategias investigativas denominadas *entrevista estructurada* y *entrevista semiestructurada* consisten principalmente en hacer una indagación sistemática sobre un conjunto de respuestas dadas por un grupo de personas seleccionado cuidadosamente. A ellos se les propone, de manera oral o escrita, una secuencia de preguntas predeterminada y organizada con un arreglo específico. La diferencia entre "estructurada" o "semiestructurada" está en que en el segundo caso la secuencia de preguntas varía según la respuesta dada por el entrevistado a preguntas previas. Pero el conjunto de preguntas para hacer, sea cual sea la respuesta, está previsto de antemano.

Las dos estrategias se emplean cuando se quieren recopilar ideas espontáneas y auténticas de personas o grupos de personas, opiniones o puntos de vista para analizar a partir de ellas procesos de razonamiento o concepciones, e incluso detectar estructuras de pensamiento que subyacen a las ideas expuestas. En investigación en educación matemática estas estrategias, acompañadas de entrevistas basadas en tareas, han sido muy reveladoras para identificar concepciones y procesos de razonamiento ingenuos o no "oficiales" (Gutiérrez, 1991; Clement, 2000).

Algunos productos de las entrevistas estructurada y semiestructurada son modelos de concepciones o razonamientos. Estos son útiles para comprender formas naturales de pensar, detectar dificultades de aprendizaje y hacer diseños curriculares. Llenan el vacío dejado por las evaluaciones instruccionales generalmente centradas en detectar formas estándares de proceder. A partir del conocimiento de las formas como piensan los estudiantes, o de aquello en lo que creen, los profesores pueden apoyarlos en sus procesos de aprendizaje de manera más efectiva (Clement, 2000).

En estas estrategias participan un grupo de personas seleccionado cuidadosamente a partir de unos criterios que dependen de los objetivos del estudio, uno o más investigadores que llevan a cabo las entrevistas y eventualmente un grupo de expertos que evalúa la entrevista antes de ser aplicada. En caso de ser más de un investigador, es necesario asegurar que todos los miembros del equipo tienen pericia similar para llevar a cabo la entrevista, que las con-

diciones de tiempo y ambientales ofrecidas a los entrevistados sean similares y que todos procederán según la secuencia o secuencias preestablecidas. Los entrevistados tienen la tarea de responder de forma espontánea, auténtica, sincera y lo más completa posible, evitando al máximo presuponer lo que el entrevistador desea escuchar. Esta última es una de las debilidades de la estrategia. Por su parte, los investigadores tienen el rol de hacer las preguntas de acuerdo con las condiciones prefijadas, no intervenir en las respuestas dadas por los entrevistados y recopilar las respuestas exactas que dan las personas. En caso de necesidad pueden solicitar a la persona que repita la respuesta, pero no deberían parafrasear lo que dice.

Generalmente las entrevistas se llevan a cabo en lugares que permiten una interacción tranquila entre el entrevistador y el entrevistado. Los investigadores llegan con el libreto de la entrevista preparado y disponen los recursos para registrar las respuestas de manera oral o escrita, según sea el caso. Los libretos se han preestablecido de acuerdo con los objetivos de la investigación y el fundamento teórico. La figura 3.5 contiene un esquema ilustrativo de las estrategias. Las etapas sugeridas se llevan a cabo una vez se tienen definidos los objetivos de la investigación.

Las estrategias entrevista estructurada y entrevista semiestructurada requieren una cuidadosa preparación del instrumento y de los entrevistadores. Cada una de las preguntas que se hacen debe tener una intención clara y un análisis preliminar de potenciales respuestas. Esto define la organización de la secuencia o de las secuencias previstas para la formulación de las preguntas,

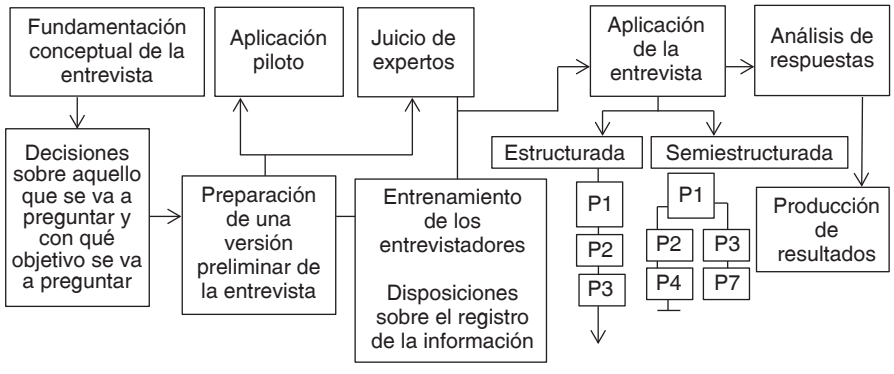


Figura 3.5 Plan de ejecución de una entrevista estructurada o semiestructurada

Fuente: elaboración propia.

según el caso. Como se trata de obtener respuestas espontáneas, puntos de vista o ideas naturales, difícilmente las evaluaciones instruccionales pueden ser empleadas como formatos de entrevista. En muchos casos, además de emplear criterios construidos por los investigadores para decidir qué preguntas hacer, conviene consultar con expertos que juzguen la pertinencia de las preguntas y puedan dar sugerencias para modificarlas, el orden en que se hacen e incluso el lenguaje en el que se formulan.

Según Clement (2000), las dos estrategias han evolucionado para incluir variaciones que tienen que ver con la autorización que se da a los investigadores para incluir nuevas preguntas en el curso de la entrevista si así lo consideran. Se pretende establecer un diálogo con el entrevistado, para completar información, pedir más detalles, insistir sobre algún punto. Estas variaciones son pertinentes cuando se trata de construir modelos individuales de formas de pensar y no patrones de pensamiento de varias personas.

Ejemplo 3.6

Entre las estrategias empleadas por Gualdrón (2011) para dar cuenta del desarrollo de una práctica reflexiva sobre la enseñanza y el aprendizaje de la semejanza por parte de profesores de secundaria, están dos entrevistas semiestructuradas realizadas por el investigador a un docente. Se hicieron antes y después de una enseñanza impartida en la que el profesor puso en funcionamiento una unidad de enseñanza sugerida por Gualdrón. En la preparación de las entrevistas el investigador tuvo en cuenta el ciclo reflexivo de Smith (1991; citado en Gualdrón, 2011) para la reconstrucción de la práctica. Este comprende las etapas de descripción, información, confrontación y reconstrucción. Se empleó este ciclo pues Gualdrón buscaba que el profesor reflexionara antes y después de las clases sobre su enseñanza y se hicieran explícitos aspectos de su desarrollo profesional. Un ejemplo de preguntas de la entrevista se encuentra en la tabla 3.1.

Tabla 3.1 Ejemplo de preguntas de la entrevista semiestructurada empleada por Gualdrón (2011)

Sobre las actividades 13-15 de la Unidad Didáctica de Semejanza
Nivel 2. Fase de Orientación Dirigida

	Antes de la sesión	*Después de la sesión*
Descripción	(1) ¿Qué procedimientos conoces para la construcción de dos figuras semejantes? (2) ¿Qué procedimientos conoces para determinar el factor de semejanza dada una figura y su ampliación o reducción?	(1) ¿Qué dificultades has visto en los estudiantes que no habías previsto antes? (2) ¿Hubo dificultades o errores sobre los cuales ya se había trabajado?

Tabla 3.1 (continuación)

	Antes de la sesión	*Después de la sesión*
Información	(3) ¿Cuáles de los procedimientos que conoces has enseñado a tus estudiantes? (4) ¿En cursos anteriores, tus estudiantes han tenido buenos resultados con estos procedimientos?	(3) ¿Cómo solventarás esta situación en una próxima clase?
Confrontación	Las actividades planteadas para esta sesión están clasificadas en la fase de Orientación Dirigida (nivel 2 de Van Hiele). (5) ¿Estás de acuerdo con esto? (6) ¿Sugieres alguna organización diferente? (7) ¿Consideras que el concepto de paralelismo debería usarse antes que el de proporcionalidad al momento de desarrollar el tema de la semejanza? (8) ¿Qué opinas de enseñar a los estudiantes a reconocer la semejanza como ampliación/reducción de una forma respecto a la otra? (9) ¿Qué opinas de definir la semejanza como ampliación o reducción usando paralelismo con centro dado?	(4) ¿Reconocer el paralelismo dada la proporcionalidad es algo que se observa con evidencia visual o es fruto de un proceso deductivo? Explica. (5) En el desarrollo de alguna actividad noté que usas términos diferentes para referirte a una misma cosa; por ejemplo, factor de semejanza, factor de elongación, factor de reducción, factor de proporcionalidad, ¿crees que esto favorece el aprendizaje?
Reconstrucción	(10) ¿Qué resultados y/o propiedades matemáticas aprenderán los estudiantes en esta sesión de clase?	(6) ¿Qué cambiarías de lo que hemos usado en el desarrollo de las actividades hasta el momento? (7) ¿Qué has aprendido al participar en este proyecto respecto de la planificación? (8) ¿Qué has aprendido o de qué te has hecho consciente (en aspectos diferentes a la planificación)?

Fuente: adaptada de Gualdrón (2011).

Ejemplo 3.7

Dos de las estrategias investigativas empleadas por Vargas (2012) para caracterizar la práctica docente de dos profesores de precálculo cuando enseñan la función exponencial son la entrevista estructurada y la entrevista semiestructurada. La investigadora empleó la entrevista estructurada para obtener información biográfica general, información del contexto en donde cada profesor desarrolla su práctica, antecedentes sobre la formación matemática y la experiencia docente, la perspectiva sobre el salón ideal de clase, el programa del curso de precálculo, las expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes e información sobre la planificación de las clases cuyo tema era función exponencial. Algunas de las preguntas de la entrevista son:

- ¿Cómo se interesó por enseñar y ser profesor de matemáticas?
- ¿Por qué enseñar matemáticas?

- ¿Se siente satisfecho enseñando matemáticas?
- ¿Cómo debería ser la enseñanza ideal de un curso de precálculo?
- Si tuviera que completar esta frase: "Mi método o estrategia de enseñanza de precálculo consiste en...", ¿cómo la completaría?
- ¿Cuál es el rol que juega la tecnología en su salón de clase?
- Sobre la función exponencial, ¿qué evalúa?, ¿qué valora? o ¿qué espera encontrar en cuanto a su dominio?
- ¿Qué es lo que resulta difícil de aprender sobre la función exponencial?

La entrevista semiestructurada se llevó a cabo al finalizar las clases registradas. De acuerdo con lo planeado, Vargas (2012) invitó a cada profesor a examinar las grabaciones en privado mientras ella hacía lo mismo y las contrastaba con notas tomadas durante la clase. La investigadora pidió a cada profesor que segmentara cada clase según los momentos en los cuales consideraba que existían cambios de tema, procesos, intenciones, o introducía cualquier otro elemento nuevo en la clase. También que identificara si tuvo necesidad de hacer cambios en el desarrollo de la clase según lo planeado y recordara a qué se debieron tales cambios. Adicionalmente les pidió que seleccionaran los momentos de la clase que consideraban más importantes y pensaran por qué lo creían. Posteriormente, profesor e investigadora observaron el video de la clase y conversaron al respecto a partir de un guion de entrevista construido especialmente para cada profesor y con variaciones según la respuesta que el entrevistado iba dando. La meta de la entrevista era obtener información que permitiera contrastar sus primeras impresiones sobre los momentos en que el profesor propicia cada uno de los mecanismos mentales de construcción de la función exponencial: interiorización, encapsulación y tematización. La conversación fluyó espontáneamente para permitir que los comentarios, observaciones e ideas que el profesor quisiera agregar fueran bienvenidos.

Ejemplo 3.8

Valoyes (2014) usó, además de la estrategia basada en prácticas usuales, la entrevista semiestructurada para poder hacer un examen profundo de las prácticas de enseñanza del álgebra dirigidas a estudiantes de raza negra. Las entrevistas hechas antes de observar clases se centraron en las expectativas de los profesores acerca del desempeño en general de los estudiantes y sus habilidades para aprender álgebra. Buscó que ellos explicitaran de qué manera esas ideas se relacionaban con el contexto social e institucional. Durante la entrevista ella escrutó las diferentes formas en las cuales los profesores clasificaban a los estudiantes y las diferentes formas de usar esa clasificación para referirse a algunos aprendices en particular. Además, exploró las percepciones

de los profesores sobre su rol en la institución y en el ambiente de la clase y sobre cómo estos elementos se relacionaban con sus expectativas acerca de la habilidad de los estudiantes para aprender álgebra. Algunas de las preguntas previstas para la entrevista son las siguientes, aunque la investigadora introdujo otras de manera espontánea, según el curso de cada conversación:

- ¿Por qué escogió la enseñanza como su profesión?
- ¿Cuáles son los principales retos que usted aborda en su trabajo diario?
- ¿Cómo describe los estudiantes de su clase de álgebra?
- ¿Cómo describe un buen estudiante? ¿Y un mal estudiante?
- ¿Piensa que el contexto social de los estudiantes influye en su aprendizaje del álgebra?
- ¿Piensa que el contexto social de los estudiantes influye en sus prácticas de enseñanza del álgebra?

Estrategia investigativa: entrevista basada en tareas

La estrategia *entrevista basada en tareas* consiste en una indagación sistemática sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos, o sobre la evolución de esta, interactuando con ellos mientras resuelven preguntas o tareas que se les proponen y que han sido preplaneadas de acuerdo con los propósitos investigativos (Romberg, 1992; Goldin, 2000).

En la investigación en educación matemática esta estrategia es útil, entre otras cosas, cuando se busca: profundizar en busca de procesos de pensamiento propios de la actividad matemática de los estudiantes y explicaciones de estos (Clement, 2000); documentar formas de resolver tareas matemáticas o pedagógicas; rastrear mecanismos de exploración y avances en la construcción conceptual logrados al resolver una tarea; identificar el conocimiento profesional de los educadores para enfrentar retos de su profesión; evaluar el avance en un estado de conocimiento; validar conjeturas sobre aprendizajes, afecto, emociones o concepciones.

Los productos de la entrevista basada en tareas son variados, dependiendo de si la investigación es exploratoria o confirmatoria. Pueden ser descripciones y explicaciones finas o reportes detallados del proceso seguido por los entrevistados, pruebas de hipótesis o de inferencias causales sobre el pensamiento de las personas (con información detallada de las evidencias que las soportan), evaluaciones sobre la aplicabilidad de una intervención o desarrollo de constructos que explican la actividad o la evolución de esta. El libreto mismo de la entrevista puede considerarse como un producto que puede ser usado por otros

estudiosos. Pero eso supone que los investigadores dan información detallada sobre la tarea, los recursos, los momentos de intervención del entrevistador, las situaciones contingentes, etc.

En la investigación que usa la estrategia entrevista basada en tareas participan un individuo o grupo de individuos que se involucran en la resolución de una tarea (problemas, preguntas, situaciones, etc.) y uno o varios investigadores que promueven un diálogo con ellos mientras resuelven la tarea. En ese sentido, en la interacción no solo intervienen entrevistados y entrevistadores sino también los recursos disponibles en el escenario y la tarea misma (Goldin, 2000). A partir de unas preguntas previstas de antemano los investigadores buscan que los entrevistados exhiban de manera clara, completa y precisa lo que piensan, las estrategias que emplean, las razones para emplearlas, etc. Retan a los entrevistados a "pensar en voz alta" y a emplear la mayor cantidad de recursos que tengan a su alcance para reportar la actividad que están llevando a cabo, sin suspender el trabajo para detenerse a pensar sobre ella o evaluarla (Gutiérrez, 1991; Clement, 2000). Los investigadores tienen libertad para hacer preguntas nuevas o sugerir el uso de ciertos recursos para que los entrevistados clarifiquen sus reportes, minimizando al máximo sus intervenciones y procurando no hacerlo prematuramente para evitar desviar el recorrido seguido por los entrevistados. También están preparados con tareas alternativas, peticiones de revisión de respuestas o pistas para atender situaciones contingentes que puedan ocurrir en el curso de la entrevista. Las insinuaciones o pistas no se ven como "trampas" que vician la información recogida sino como puentes que apoyan a los entrevistados en el proceso de resolución de la tarea. La riqueza del trabajo posterior indica si las pistas fueron significativas y permite a los investigadores inferir vías fructíferas de apoyar rutas hacia la solución de las tareas. Entre más entrenados estén los participantes para expresar en voz alta lo que están pensando, se tendrán mejores registros de información para el análisis.

Las tareas no son rutinarias y tienen que preverse cuidadosamente para garantizar riqueza en el proceso desarrollado por los entrevistados y cierto control sobre la información recogida, cuyo foco se dirige a los procesos de resolución de la tarea, más que a patrones de respuestas correctas o incorrectas (Goldin, 2000). Los enunciados, el contenido y los recursos son planeados con base en criterios explícitos. Se busca que la tarea estimule a los entrevistados a sugerir estrategias heurísticas, usar diversos tipos de representaciones, desarrollar discusiones verbales, producir textos enriquecidos y exhibir su involucramiento emocional en la situación. Puede ser interesante prever una secuencia de tareas en orden de complejidad para controlar que los entrevis-

tados puedan enfrentarse al menos a alguna de ellas de manera retadora, con respuestas variadas e involucrando diversos procesos que puedan exteriorizar.

Los escenarios para llevar a cabo las entrevistas son variados. Se pueden realizar en los ámbitos naturales en los que las tareas podrían tener sentido o en espacios acondicionados, libres de interferencias auditivas para facilitar el registro de datos. En el caso de entrevistas basadas en tareas, propuestas a estudiantes, el profesor podría ser el entrevistador, siempre y cuando esté dispuesto a dedicar tiempo y esfuerzo para que los entrevistados expresen ampliamente lo que están haciendo. Esta actividad se dificulta enormemente cuando se lleva a cabo en el aula natural de clase pues el profesor tiene que estar atento a lo que hacen o dicen muchos estudiantes o grupos de estudiantes simultáneamente. En esos casos conviene que esté acompañado de otros investigadores que hagan las veces de "profesores" para que cada uno acompañe a un estudiante o grupo de estudiantes diferente.

La estrategia entrevista basada en tareas incluye, generalmente, las etapas que ilustro en la figura 3.6. La fundamentación conceptual sirve de marco de referencia y de mecanismo parcial de control para la toma de decisiones sobre el contenido, la estructura, la complejidad semántica y sintáctica de las tareas, y para definir las preguntas o insinuaciones que hará el entrevistador. El escenario, los materiales disponibles, la selección de los entrevistados y el tiempo de la entrevista tampoco se dejan al azar. Se deciden cuidadosamente en la etapa de planeación con el objetivo de lograr la observación deseada (Goldin, 2000). Una aplicación piloto, el juicio de expertos y el entrenamiento de los entrevistadores son etapas importantes de la planeación que no conviene obviar para evitar al máximo contratiempos debidos a falta de preparación.

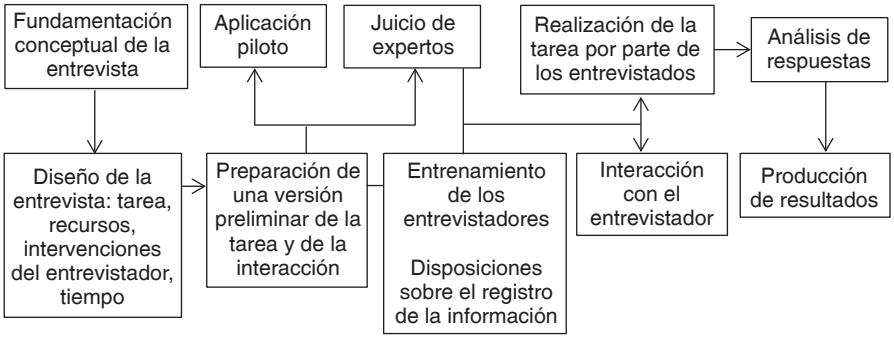


Figura 3.6 Plan de ejecución de una entrevista basada en tareas

Fuente: elaboración propia.

Durante la realización de la tarea los entrevistadores interactúan con los entrevistados según el ritmo que estos últimos impriman a la situación. Después del planteamiento de la tarea dejan tiempo a los entrevistados para pensar cómo proceder. Si los entrevistados avanzan en la resolución sin comunicar claramente los procesos que realizan, los investigadores pueden hacer preguntas no directivas como: "¿pueden decirnos algo sobre lo que están haciendo?", "¿podrían narrar cómo están procediendo?". Si los procesos que se quieren observar no fluyen o se desvían de la meta de la entrevista, los investigadores pueden hacer preguntas con sugerencias mínimas del tipo: "¿pueden valerse de alguno de los materiales que tienen a disposición?", "¿ven alguna forma de organizar la información?", "¿ven algún patrón en este registro?" (Goldin, 2000). La meta de los entrevistadores es lograr que los entrevistados expliciten el proceso de razonamiento que realizan, se obtengan registros lo más completos posibles de este y los investigadores puedan inferir patrones de razonamiento no necesariamente estándares. Por esa razón los investigadores procuran registrar palabras, gestos, interjecciones, intervenciones, acciones, actuaciones, escritos, etc., que permitan capturar el proceso que los entrevistados están llevando a cabo y así poder reportar cómo realizaron la tarea y hacer inferencias explicativas al respecto. Lo que se va a registrar debe estar previsto de antemano.

Según Goldin (2000), la entrevista basada en tareas no se presta para hacer generalizaciones pues cada experiencia es diferente y no se puede tener un verdadero control sobre los sucesos. Ello no le resta potencia a la estrategia pues los resultados informan en profundidad procesos de pensamiento y permiten explicar formas de proceder que otras estrategias no permiten.

Ejemplo 3.9

En su investigación, Rojas (2012) adoptó la estrategia entrevista basada en tareas. A partir de una tarea empleada por Bruno D'Amore en una investigación previa sobre los sentidos otorgados a dos expresiones matemáticas ($3n$ y $(n + 1) + n + (n - 1)$, $n \in Z$), hizo un estudio preliminar con estudiantes de grado 9.º de educación básica secundaria. La tarea, compuesta por tres preguntas alusivas a las dos expresiones, fue puesta a los estudiantes por el profesor del curso y su solución fue observada por Rojas. La gestión oral de la tarea se consideró inapropiada para los intereses investigativos por lo que se diseñó un instrumento escrito con las mismas preguntas y se pidió a los estudiantes justificar cada respuesta. La tarea se propuso a otro grupo de estudiantes del mismo grado. Rojas apreció una nueva falla en el funcionamiento de la tarea al no pedir a los estudiantes comprobar la equivalencia de las expresiones en el caso en el

que los estudiantes consideraran que sí lo eran. Finalmente, los dos estudios preliminares le permitieron entrever que las preguntas harían posible rastrear los sentidos otorgados por los estudiantes a las expresiones, si identificaban la equivalencia y si lograban articular dichos sentidos. El modelo de preguntas le sirvió a Rojas para construir tres tareas (una de probabilidad, otra de expresiones algebraicas equivalentes y la tercera de ecuaciones cuadráticas).

La fase experimental propiamente dicha tuvo lugar en seis cursos, tres de grado 9.º y tres de grado 11.º de cuatro instituciones educativas diferentes. Los cuarenta estudiantes de cada grupo respondieron las preguntas individualmente y luego conformaron grupos de tres estudiantes para discutir las respuestas y asumir una en común (si era posible). Luego, las respuestas de los grupos fueron presentadas al conjunto de estudiantes de cada clase. Después, a partir de unos criterios relacionados con el contenido de las hojas de respuestas (particularmente con la posibilidad de profundizar en el fenómeno), Rojas seleccionó dieciséis grupos para hacerles preguntas sobre las respuestas dadas por ellos. Además, usó las respuestas de tres de tales grupos para hacer un análisis en profundidad. La selección de los tres grupos se hizo intencionalmente revisando si en las respuestas era evidente que los estudiantes exhibían interpretaciones de las representaciones compatibles con el significado institucional, si al menos uno de los estudiantes podía establecer la equivalencia sintáctica entre las expresiones dadas (y había hecho el tratamiento que le permitía obtener una expresión a partir de la otra) y si al menos uno de los estudiantes, que hubiera reconocido la equivalencia sintáctica, rechazaba la asignación del sentido otorgado a una expresión para la otra expresión. Las preguntas formuladas a los tres grupos (uno por cada tarea) se centraron en verificar las respuestas escritas.

Ejemplo 3.10

Vergel (2014) empleó la estrategia entrevista basada en tareas en su investigación. Para ello, a partir de la fundamentación conceptual, realizó un estudio preliminar con seis parejas de estudiantes cuyas edades eran de 9 o 10 años, a quienes se los invitó a resolver una de dos tareas tomadas y adaptadas de la investigación que dirige el profesor Luis Radford. Una de las tareas tenía que ver con una secuencia figural y la otra con una secuencia tabular. La intención del estudio preliminar era evaluar si las tareas y el acompañamiento del docente daban lugar a la emergencia de medios semióticos de objetivación (esto es, objetos, artefactos, términos lingüísticos y, en general, signos que se utilizan para comunicar o hacer visible una intención y para llevar a cabo una acción). También se querían revisar y adecuar las preguntas formuladas a los niños y analizar posibles dificultades enfrentadas por ellos en la resolución. El análisis de la aplicación permitió: corroborar la hipótesis sobre la pertinencia de las

tareas; tomar la decisión de destinar un espacio de tiempo al trabajo individual, otro momento al trabajo en parejas y un tercer momento a la discusión colectiva; prever seis tareas (tres con secuencias figurales, dos de ellas apoyadas en representación tabular, y tres con secuencias numéricas, dos de ellas apoyadas en representación tabular); y hacer un análisis previo de cada tarea, que fue sometida a un control experimental en el que se vigilaron variables como el contenido matemático, la estructura, la complejidad y la estructura lingüística. Una séptima tarea surgió en el curso del experimento, al ver la necesidad de promover de manera más decidida hacer explícita la indeterminación y tener que operar con ella.

La fase experimental propiamente dicha tuvo lugar con trece estudiantes de 4.º y 5.º de primaria de un colegio público de Bogotá que participaron en la investigación de manera voluntaria, en un horario extraescolar. Una profesora dirigió el trabajo de los niños y tanto ella como Vergel hicieron las entrevistas. Ellos dos tenían encuentros permanentes para analizar la estructura de las tareas, hacer ajustes y definir pautas de actuación de la profesora con los estudiantes. Las preguntas que hacían a los niños tenían que ver con aclarar respuestas poco claras, solicitar que un niño explicara a otro, indagar cómo identificaban características comunes de los patrones, pedir razones de ciertas formas de actuar y demandar repetición de explicaciones de procedimientos para ver si se podían detectar varios recursos semióticos sincronizados.

Estrategia investigativa: observación clínica

La estrategia investigativa denominada *observación clínica* es una variante de la estrategia basada en tareas. Consiste en hacer una indagación sistemática sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos, autónomamente, mientras resuelven una tarea preplaneada, según los objetivos de la investigación. Un investigador observador establece previamente qué quiere observar y en qué momentos de la situación, y se atiene a tal libreto procurando controlar la recolección de información sin intervenir (Romberg, 1992).

Esta estrategia ha sido empleada en la investigación en educación matemática cuando se busca profundizar en las formas de pensar matemáticamente que promueven ciertas tareas, centrando la atención tanto en el proceso por el que transitan los entrevistados mediante la externalización de los pasos intermedios para su resolución como en la influencia del proceso en los resultados obtenidos. Los productos de la implementación de esta estrategia son: descripciones, explicaciones y construcciones finas de los procesos de pensamientos que llevan a cabo los estudiantes; modelos del desarrollo del conocimiento logrado al enfrentarse a cierto tipo de tareas; mecanismos que

posibilitan a los estudiantes interpretar la situación, organizar y cuantificar información, interpretar o encontrar patrones, proponer modelos explicativos, obtener soluciones y derivar conocimiento para enfrentar otras situaciones. Estos productos son útiles para apoyar a los profesores en la toma de decisiones sobre la enseñanza de las matemáticas. A la vez promueven el aprendizaje de los estudiantes que participan en el estudio.

Los investigados son personas (estudiantes o profesores) que generalmente trabajan en grupos; esto con el objetivo de favorecer la expresión oral de ideas durante el proceso. Ellos resuelven una tarea (problema, situación, preguntas, etc.) preplaneada y uno o más investigadores actúan como observadores no participantes. El centro del estudio lo constituye la tarea pensada para permitir la matematización que hagan los participantes de manera autónoma. Esta implica usar o hacer representaciones significativas de situaciones o fenómenos cotidianos o científicos para encontrar o producir constructos y para crear o usar modelos o sistemas conceptuales relacionados con ideas matemáticas. Como se promueve el trabajo en grupo, el proceso exige que los participantes desarrollen habilidades comunicativas y fluidez representacional. La intención es que puedan: proponer, modificar y refinar ideas; explicar y justificar caminos para resolver la tarea; controlar y monitorear el progreso alcanzado; detectar deficiencias en las formas de pensar que están poniendo en juego; comparar ideas alternativas y seleccionar las que consideren más útiles; integrar fortalezas y minimizar debilidades en las formas de pensar; identificar por sí mismos cuándo tienen una elaboración suficientemente refinada para afirmar que han acabado el trabajo; y articular y comunicar resultados (Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000). La tarea por sí sola los estimula a usar productivamente su pensamiento y a revelarlo en presencia de un observador no participante. Las mejores tareas son aquellas que son significativas para los participantes pues les permiten establecer una conexión con experiencias personales previas, usar diferentes niveles de conocimientos y poner en juego habilidades matemáticas. Los resultados revelan explícitamente cómo piensan los participantes al pedirles explicitar el proceso de solución como parte de la solución de la tarea.

En la figura 3.7 esquematizo, con fines ilustrativos, la estrategia de observación clínica. La estructura es similar a la de la entrevista basada en tareas, salvo que no se lleva a cabo una interacción entre los estudiantes y el observador.

Estrategias de diseño (¿qué pasaría si...?)

Denomino *estrategias investigativas de diseño* a aquellas estrategias en las que los investigadores se preguntan *¿qué pasaría si...?* sobre un fenómeno en

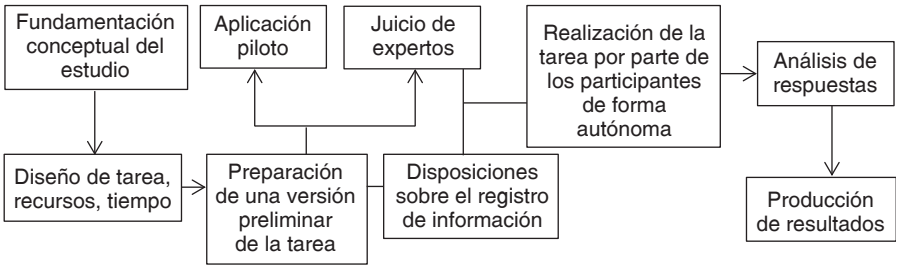


Figura 3.7 Plan de ejecución de una observación clínica

Fuente: elaboración propia.

particular. Se pretende hacer un análisis en profundidad, en ámbitos socialmente complejos, sobre potenciales efectos de cierto diseño, movilizado por una conjetura o hipótesis, sobre el fenómeno de interés. Los investigadores se enfocan en eventos que ocurren en escenarios conceptualmente ricos que son explícitamente diseñados para optimizar las oportunidades de desarrollos relevantes y observar su efecto (Kelly y Lesh, 2000).

Las estrategias de diseño son empleadas con frecuencia por quienes adoptan la aproximación interpretativa o la colaborativa social, pero pueden ser empleadas junto con otras estrategias por quienes adoptan una aproximación sistémica. Los investigadores proponen una hipótesis de trabajo en la que predicen qué podría pasar si se introducen ciertas condiciones o circunstancias que no están presentes en un momento dado (Sierra, 2011). A partir de la hipótesis diseñan una situación para poner en funcionamiento dicha hipótesis y estudian los efectos logrados (Romberg, 1992). Estas estrategias son empleadas para obtener evidencias del efecto de un nuevo programa, currículo, artefacto, material educativo, conjunto de problemas, normas, etc. (Bakker y Van Eerde, 2015).

Las estrategias de diseño están en un lugar intermedio entre las estrategias naturalistas y las estrategias clínicas. De un lado, pretenden superar las críticas que se hacen a las estrategias clínicas por no tener en cuenta las condiciones y limitaciones en las que suceden los eventos educativos y estar alejadas de los escenarios reales. De otro lado, buscan superar las críticas que se hacen a las estrategias naturalistas por requerir de largos periodos de tiempo y esfuerzo en capturar mucha información, que no necesariamente se usa (Confrey y Lanchance, 2000). A continuación, describo las estrategias "experimento de enseñanza", "experimento comparativo" e "investigación-acción".

Estrategia investigativa: experimento de enseñanza

La estrategia investigativa *experimento de enseñanza* consiste en el diseño, implementación y evaluación de una secuencia de enseñanza organizada con la meta de poner en funcionamiento una conjetura sobre un aprendizaje específico. La secuencia se diseña para trabajar con estudiantes de los diferentes niveles educativos, incluidos profesores en formación y en ejercicio (a quienes denominamos estudiantes cuando participan de estos experimentos).

Esta estrategia es empleada principalmente por investigadores que asumen una aproximación hermenéutica, del tipo interaccionismo social. Según esta, no se trata de valorar el efecto de una intervención contrastándolo con un referente ideal sino de capturar los significados que las personas dan a diversos aspectos de las dinámicas propias generadas. Se indaga por procesos o por mecanismos que se ponen en juego en un aula en particular y por la calidad de la experiencia matemática de los estudiantes cuando participan de la implementación de un diseño que busca crear oportunidades de aprendizaje con tareas estimulantes (Cobb, 2000; Confrey, 2000; Kelly y Lesh, 2000; Lesh y Kelly, 2000; Steffe, Thompson y Von Glasersfeld, 2000).

La estrategia es útil cuando se quiere observar el proceso de aprendizaje matemático en vivo y analizar aspectos de este para ganar claridad sobre la naturaleza de los significados construidos por los estudiantes. Se busca determinar si ocurre un desarrollo relevante en contextos enriquecidos específicos mediante el diseño y estudio sistemático de formas y oportunidades de aprendizaje, estrategias de enseñanza, artefactos mediadores, formas de interacción, patrones discursivos y otros condicionantes del ambiente de la clase, tales como las normas sociales y sociomatemáticas (Yackel y Cobb, 1996). El foco investigativo apunta al monitoreo y la documentación del progreso en los significados construidos por los estudiantes, que se estimula en direcciones que incrementan su mejoramiento (Lesh y Clarke, 2000).

Los productos de una investigación que adopta la estrategia experimento de enseñanza son varios. En primer lugar, secuencias de enseñanza implementadas, evaluadas y mejoradas, con indicaciones explícitas sobre los cambios que se sugieren para que los estudiantes puedan progresar; estas pueden ser usadas por profesores interesados en transformar la enseñanza (Confrey, 2000). En segundo lugar, modelos reales de actividad matemática de los estudiantes y de la transformación de esta actividad como resultado de una secuencia de enseñanza (Cobb, 2000). En tercer lugar, "pruebas de existencia" que muestran cómo, bajo ciertas condiciones, es posible lograr un efecto deseado y vale la pena seguir intentándolo; estas pruebas pueden ser empleadas por profesores

o investigadores como una referencia para sus propias implementaciones. No se trata de replicar exactamente el experimento esperando obtener resultados similares sino de estar informado sobre lo que podría pasar (Confrey y Lanchance, 2000). En cuarto lugar, constructos o interpretaciones más profundas de las que se tenían hasta el momento acerca del fenómeno en estudio que dan cuenta de la efectividad o no de las conjeturas puestas en juego (Romberg, 1992) o de la racionalidad que subyace en las acciones o verbalizaciones de los estudiantes (Steffe, Thompson y Von Glasersfeld, 2000). Estos constructos pueden estar relacionados con aprendizajes de los estudiantes, ideas desarrolladas por individuos o grupos, aprendizajes de los profesores que conducen el experimento, actividades de enseñanza o incluso el ambiente de enseñanza (Kelly y Lesh, 2000).

Los investigadores suponen que cuando el ambiente en el que transcurre el aprendizaje es estructurado en busca de un enriquecimiento conceptual, aquello que evoluciona es principalmente resultado de cómo los participantes interpretan y organizan su experiencia y también de la estructuración prevista. Por esa razón, en los reportes de los experimentos es muy importante describir de qué manera las interpretaciones de los participantes se desarrollaron en las dimensiones de interés de los investigadores y también cómo se estructuró el ambiente de aula. Por ejemplo, Lesh y Kelly (2000) sugieren que si se investiga cómo evoluciona la conceptualización de los estudiantes acerca de un objeto matemático, partiendo de experiencias concretas e ideas intuitivas hasta llegar a abstracciones matemáticamente refinadas, es necesario explicar de qué forma los profesores lograron corporeizar las ideas abstractas para que los estudiantes les dieran significados situados en sus experiencias.

Los participantes en un experimento de enseñanza son: los investigadores responsables de proponer la secuencia de enseñanza y recopilar la información para analizarla; un profesor que hace parte del equipo de investigación y es el encargado de la gestión de la secuencia; los investigadores que actúan como observadores no participantes en la clase; y los estudiantes del aula en donde tiene lugar la clase, que son considerados colaboradores en el estudio. Más que entregar información pasiva, se espera que ellos interactúen con el profesor activamente reaccionando a las invitaciones que se les hacen, modelando la interacción y tomando decisiones (Kelly y Lesh, 2000).

Según Steffe, Thompson y Von Glasersfeld (2000), la participación del profesor en el equipo de investigación le permite gestionar dos tipos de interacciones en la clase. Unas, sensibles a los acontecimientos imprevistos e intuitivas sobre cómo armonizar el trabajo de los estudiantes con las metas de aprendizaje. Son interacciones que suceden espontáneamente y el profesor no tiene total claridad

sobre la razón de su actuación, pero de alguna manera su proceder es influenciado por la participación en el equipo de investigación o su experticia como profesor. Otras, son interacciones analíticas que se derivan de la interpretación consciente que el profesor hace sobre lo que los estudiantes dicen o hacen. Esta interpretación lo lleva a proponer vías para apoyar a los estudiantes, a partir de la conjetura inicial construida por el equipo de investigación sobre el aprendizaje y cuya ruta se va aclarando en el curso del experimento. Nuevamente, para poder llevar a cabo este tipo de interacciones el profesor debe estar fundamentado en los marcos conceptuales del equipo de investigación, pero estar abierto a la guía ofrecida por los estudiantes con sus formas particulares de actuar o comunicar, las cuales no siempre se han anticipado.

El escenario de un experimento de enseñanza suele ser el aula regular de clase, aunque eventualmente puede suceder en aulas acondicionadas para tal efecto con menos estudiantes o incluso con grupos de estudiantes que se involucran voluntariamente en la enseñanza en situaciones extracurriculares. El profesor está acompañado de uno o más observadores no participantes que hacen parte del equipo de investigación. Ellos contribuyen a interpretar lo que los estudiantes dicen o hacen y apoyan la toma de decisiones sobre los pasos a dar en la clase. Su posición de observadores les permite captar información que puede habérsele escapado al profesor y ampliar las evidencias de cara a la interpretación que se busca. En ocasiones alguno puede intercambiar su rol con el profesor para tener una experiencia diferente de interacción con los estudiantes.

Los investigadores, incluido el profesor, van al escenario investigativo con una secuencia preliminar de enseñanza, la cual han previsto según la conjetura de aprendizaje que piensan poner en juego. Esta conjetura surge de comprometerse con un marco conceptual sobre el aprendizaje en general y sobre la forma de promover el desarrollo específico de un contenido matemático en un escenario social determinado. A medida que la clase se desarrolla, se hacen ajustes a la secuencia a la luz de las limitaciones cotidianas de la vida escolar, de las adaptaciones que profesor y estudiantes implementan y de la retroalimentación que consigue el equipo de investigación con la observación y el análisis realizado a cada una de las clases, hecho simultáneamente con el desarrollo del experimento (Confrey, 2000; Lesh y Kelly, 2000; Bakker y Van Eerde, 2015).

En la figura 3.8 sugiero un esquema general de un experimento de enseñanza. Este se lleva a cabo por medio de ciclos repetidos de diseño, puesta a prueba experimental y refinamiento de la conjetura que supone una vía para aprender un contenido (Cobb, 2000; Lesh y Kelly, 2000; Steffe, Thompson y Von Glasersfeld, 2000).

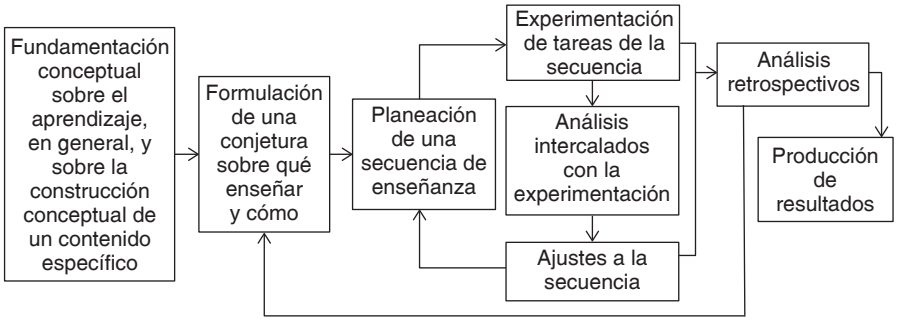


Figura 3.8 Plan de ejecución para la estrategia experimento de enseñanza

Fuente: elaboración propia.

A partir de la revisión crítica de la literatura existente sobre el fenómeno, la insatisfacción de los investigadores acerca de los resultados de prácticas de enseñanza usuales y las evidencias no conclusivas e incompletas sobre cómo lograr un aprendizaje significativo, los investigadores formulan una conjetura preliminar sobre cómo impulsar el aprendizaje de un contenido específico en el escenario social escogido. Buscan una transformación benéfica para los estudiantes, delineando una trayectoria hipotética de aprendizaje.

La conjetura formulada tiene dos dimensiones: una, referida al contenido matemático en juego, que responde al interrogante sobre qué debería ser enseñado; otra, referida al aprendizaje, que responde al cómo debería ser enseñado. En la dimensión de contenido la conjetura sugiere una vía de acercamiento conceptual. Confrey y Lanchance (2000) ilustran esta dimensión con dos ejemplos: la conjetura puede ser acerca del tipo de aproximación a cierto objeto matemático que permitiría que las matemáticas se pusieran al servicio de la formación ciudadana o puede referirse a qué elementos de las matemáticas del cambio y la variación deberían incluirse para lograr acceder significativamente a conceptos de cálculo en niveles tempranos del currículo. En la dimensión del aprendizaje la conjetura indica, a partir de un marco conceptual, cómo organizar la instrucción, qué tipo de tareas proponer en la secuencia y qué aprendizajes se esperarían lograr.

La conjetura es el motor que dirige el experimento. Determina el curso de los acontecimientos. Por ello algunos autores sugieren hacer un ejercicio preliminar que permita evidenciar su potencial funcionamiento. Este ejercicio puede hacerse con un pequeño grupo de estudiantes o con todo el grupo, pero centrándose en un único aspecto de esta.

La conjetura delinea las siguientes etapas del experimento. No se busca simplemente probarla o descartarla sino ir revisándola y reelaborándola a medida que el experimento está en marcha. Los investigadores se dan cuenta si el acercamiento conceptual funciona, si una tipología se sostiene o no, o si cierta clase de tareas logra el efecto deseado, como se establece en la conjetura (Confrey y Lanchance, 2000). Los investigadores toman decisiones sobre ajustes al contenido y cómo organizarlo, el tipo de tareas, problemas o ejercicios que resuelven los estudiantes y en qué orden, cómo estructurar la interacción en la clase, qué artefactos poner a disposición de los estudiantes, qué investigador hace de profesor, qué rol desempeña en la clase y qué acciones evaluativas consideran para valorar el aprendizaje (Confrey y Lanchance, 2000).

Según Cobb (2000), el desarrollo de la conjetura que sugiere una trayectoria hipotética de aprendizaje y la planeación de la secuencia de enseñanza se coconstruyen mutuamente. La generación de ideas para la secuencia depende de la conjetura sobre el aprendizaje de los estudiantes, pero, a su vez, la generación de la conjetura depende de la identificación de situaciones sociales específicas del escenario en donde se lleva a cabo el experimento y de resultados de experimentos previos.

Lo que los estudiantes hacen y dicen en el curso del experimento es fuente para hacer microanálisis guiados por un marco interpretativo que puede ser emergente. En el transcurso del experimento, por momentos, el profesor hace lo posible por "olvidar" la conjetura en favor de adaptarse a los acontecimientos en la clase y estar atento a las contribuciones de los estudiantes. En otros momentos regresa a la conjetura para reflexionar analíticamente sobre lo que ellos dicen y hacen e ir reconfigurándola.

El experimento se realiza intercalado con la ejecución de la secuencia. Las discusiones sostenidas por el equipo de investigación mientras el experimento progresa son frecuentemente pragmáticas pues la preocupación central es la calidad de la experiencia matemática de los estudiantes. Sirven para ajustar la conjetura y las tareas instruccionales subsecuentes. Los análisis de la actividad de los estudiantes y del proceso social realimentan nuevas experiencias en el aula y conducen a variaciones de metas específicas para una sesión dada (Cobb, 2000).

La última etapa de un experimento de enseñanza es un análisis retrospectivo de la información generada en el curso del experimento. Este análisis se hace orientado por la conjetura inicial y tiene como meta encuadrar los eventos de la clase en un marco conceptual amplio para ubicar el experimento como representativo de otros. Los investigadores revisan las evidencias obtenidas durante la experimentación, retrospectiva y prospectivamente, en busca de

refinar, confirmar o modificar la conjetura, proponer constructos teóricos e incluso desarrollar modelos de enseñanza.

Los experimentos de enseñanza pueden durar un año académico, un semestre escolar, unos cuantos meses, algunas semanas e, incluso, unas pocas horas (Kelly y Lesh, 2000). Pero, en todos los casos, se implementa, analiza y transforma una enseñanza durante el tiempo necesario para poder capturar regularidades subyacentes que no pueden ser captadas en inspecciones superficiales. Aquellos experimentos que duran unas pocas horas pueden ser vistos mejor como entrevistas clínicas.

Ejemplo 3.11

En mi tesis empleé la estrategia experimento de enseñanza (Camargo, 2010). El objetivo general de la investigación era describir y analizar un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en un curso universitario de geometría plana de un programa de formación de futuros profesores de matemáticas para la educación secundaria, en Bogotá (Colombia). La conformación de una comunidad de práctica se usó como herramienta metodológica para promover el aprendizaje. El desarrollo del curso sirvió como escenario, a la vez que los análisis realizados se aprovecharon para informar los efectos alcanzados con el fin de apoyar nuevas implementaciones. En dicho curso pusimos en funcionamiento, junto con colegas del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría (Æ • G), una secuencia de enseñanza con base en una trayectoria hipotética de aprendizaje que pretendía promover la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa. En el experimento combinamos una aproximación sociocultural a la demostración, de tipo participativo, con la pretensión de lograr la producción colectiva de demostraciones deductivas ajustadas a un sistema teórico de referencia. La planeación general de la versión del curso en donde se recogieron los datos (semestre 1 de 2007), así como los cambios realizados sobre la marcha, fueron objeto de discusión en el grupo, en reuniones realizadas semanalmente; también lo fueron el diseño de las situaciones problema, la toma de decisiones sobre la gestión de las clases y la planeación de algunas evaluaciones.

Estrategia investigativa: experimento comparativo

La estrategia investigativa *experimento comparativo* consiste en cotejar aspectos del aprendizaje de las matemáticas en dos escenarios, uno de los cuales es experimental y afectado por un diseño intencionado. El otro escenario sirve de control; en este se realiza una enseñanza natural sin intervención de los

investigadores en su diseño. De forma similar al experimento de enseñanza, se interviene el grupo experimental con una planeación específica buscando enriquecer la enseñanza en vías dirigidas por una hipótesis de aprendizaje. Se comparan el grupo experimental y el grupo control para identificar diferencias y variaciones apreciables en las oportunidades de aprendizaje.

Esta estrategia es empleada principalmente por investigadores que asumen una aproximación hermenéutica, del tipo interaccionismo social. Se busca determinar si el diseño experimental en el que se introduce un acercamiento diferente, un material didáctico, tipos de tareas, formas de interacción, mediaciones, normas, etc., "causa" resultados deseados y benéficos desde el punto de vista educativo, en comparación con lo que sucede en el grupo control. Para ello se procura "aislar" de algún modo el efecto específico introducido en el grupo experimental al separarlo de otros cambios que pueda haber, derivados de trabajar con dos grupos de personas. En situaciones ideales la comparación se hace de tal modo que se puedan establecer relaciones plausibles entre el tratamiento dado al grupo experimental y un efecto apreciado, que no se observa en el grupo control (Gutiérrez, 1991; Sierra, 2011; Bakker y Van Eerde, 2015).

El producto principal de una investigación cuya estrategia es un experimento comparativo es una "prueba de existencia" que informa si es posible lograr un efecto deseado bajo ciertas condiciones. Esta prueba puede ser empleada por profesores o investigadores como una referencia para sus propias implementaciones. Otros productos pueden ser constructos o interpretaciones más profundas que aquellas disponibles hasta el momento acerca del fenómeno de estudio, que dan cuenta de la efectividad o no de la variación que se puso en juego en el grupo experimental.

Los participantes en un experimento comparativo son: los investigadores responsables de proponer la secuencia de enseñanza para el grupo experimental y recopilar la información para analizarla; los estudiantes de dos grupos con edades, nivel escolar y conocimientos "similares" sobre un contenido matemático, experiencias escolares parecidas y circunstancias semejantes al momento de participar en la enseñanza sobre el contenido determinado (en el grupo experimental se introduce una modificación específica); y los profesores de ambos grupos, que pueden ser del equipo investigador o no (ellos tienen experticia en la enseñanza del contenido y dominio del artefacto, material, estrategia, etc., introducido como elemento de indagación).

El esquema de un experimento comparativo tiene una estructura que ilustro en la figura 3.9. De igual manera que en los experimentos de enseñanza, se parte de una fundamentación conceptual y una conjetura sobre cómo impulsar el aprendizaje.

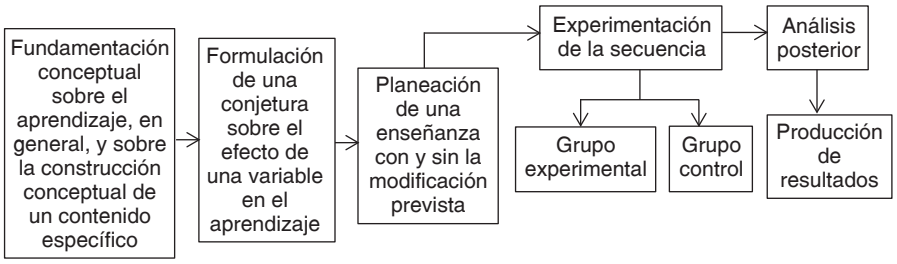


Figura 3.9 Plan de ejecución de un experimento comparativo

Fuente: elaboración propia.

En los análisis posteriores se evalúan las diferencias entre los resultados logrados por los dos grupos, haciendo énfasis en la influencia de la modificación introducida. Los reportes de los resultados del experimento comparativo incluyen descripciones precisas de los elementos puestos en juego para que otros investigadores o profesores puedan valerse del estudio en nuevos experimentos o introducir cambios en su enseñanza.

Los experimentos comparativos son difíciles de implementar en el medio educativo no solo porque es muy complejo y poco factible aislar un aspecto específico sino porque no es equitativo ofrecer a un grupo un tratamiento que se presupone beneficioso y no ofrecérselo a otro grupo muy similar. Lo anterior ha hecho que los experimentos comparativos se hayan ajustado para examinar el efecto de un tratamiento particular sobre un mismo grupo, antes y después de dicho tratamiento, teniendo en cuenta que se tengan disponibles suficientes datos de ambos momentos (Romberg, 1992). Estas comparaciones también son complejas porque no siempre es posible anticipar exactamente los resultados que se van a obtener con el diseño, por lo que es difícil seleccionar la información previa al experimento. Además porque la intervención de los investigadores, para recopilar evidencias antes de realizar el experimento, también influye en los resultados que se obtienen (Lesh y Kelly, 2000).

Bakker y Van Eerde (2015) alertan sobre los riesgos que tiene generalizar resultados de experimentos comparativos, e ilustran su afirmación con una situación ocurrida en una escuela norteamericana. Los profesores estaban insatisfechos con una decisión administrativa en la que cada clase de matemáticas debía comenzar con una tarea "de calentamiento", como un rompecabezas o un juego matemático. Aparentemente, un experimento comparativo previo había probado que los estudiantes lograban mejores desempeños si las clases comenzaban con ese tipo de tareas. Pero los profesores opinaban que las

tareas casi nunca se relacionaban con el tema de la lección y que se perdían minutos valiosos para dedicarse a ella. Como la naturaleza comparativa del experimento se centró solo en la modificación de comenzar la lección con o sin tarea de calentamiento, el estudio no aportó información adicional para tener una mejor visión sobre el funcionamiento de este tipo de tareas. Por esa razón los investigadores sugieren emplear esta estrategia en combinación con otras.

Estrategia investigativa: investigación-acción

De acuerdo con Carr y Kemmis (1986), la estrategia *investigación-acción* es una forma de indagación autorreflexiva que emprende un grupo de personas que comparte una práctica social, con el fin de mejorar la comprensión, racionalidad y justicia de tal práctica, mediante una transformación de esta. Consiste en llevar a cabo una intervención sistemática sobre una práctica recolectando, interpretando y analizando información sobre esta, con la intención de lograr resolver problemas específicos de dicha práctica y mejorarla, sin tener la pretensión de hacer una generalización teórica (Kelly y Lesh, 2000; Sierra, 2011; Bakker y Van Eerde, 2015). Esto supone la necesidad de actuar, intervenir activamente en la comunidad, probar soluciones y observar resultados. Se caracteriza por una participación democrática de todos los participantes a lo largo del proceso y por la toma de decisiones para buscar generar una dinámica de cambio en una situación específica del grupo social que la implementa. Según Parra (2013), la primacía por los aspectos prácticos es la razón de su alta difusión en la educación.

Es una estrategia empleada principalmente por quienes sostienen una aproximación colaborativa social con enfoque sociocrítico. Estos investigadores defienden que para lograr transformaciones en prácticas no satisfactorias u opresivas se requieren formas de autorreflexión y toma de conciencia de las frustraciones o distorsiones de propósitos o estrategias para averiguar cómo podrían eliminarse los impedimentos. Tiene sus raíces en una agenda de cambios sociales logrados a partir de la práctica reflexiva e investigativa de quienes la llevan a cabo.

La investigación-acción busca dos resultados. Uno, un conocimiento práctico, sistemático, local y público de la práctica que se realiza, lo que propicia el avance sobre el conocimiento para la acción acerca de la práctica. Dos, un mejoramiento del grupo social desde el punto de vista de quienes la ponen en marcha o se benefician de ella, lo que se logra al tomar decisiones informadas producto de la participación en la investigación; ello puede significar una modificación del sistema o de las estructuras en las que la práctica se lleva a

cabo, en un proceso de "emancipación" (Carr y Kemmis, 1986; Feldman y Minstrell, 2000).

En una investigación-acción participan un grupo de personas que desarrollan una práctica común (practicantes), local y situada —que están interesadas en resolver problemas de esta práctica y propiciar cambios cualitativos—, las personas beneficiadas con los posibles cambios (que pueden ser los mismos practicantes) y uno o más investigadores que no pertenecen al ámbito en donde la práctica se realiza. Los investigadores externos están presentes durante todo el proceso y se consideran colaboradores que apoyan al grupo estableciendo una relación de pares, cooperativa e interdisciplinar. La función principal de los investigadores externos es estimular y orientar la reflexión actuando como observadores participantes o amigos críticos (Parra, 2013). Los participantes de la práctica se involucran en todos y cada uno de los momentos de la indagación, ampliando gradualmente la participación para incluir otros agentes y tener variedad de puntos de vista, lograr la mayor colaboración y la mayor implicación posible.

En el ámbito educativo, una investigación-acción generalmente involucra a grupos integrados por agentes educativos, profesores, directivos docentes, personal de apoyo educativo y estudiantes. Los grupos se reúnen con el interés de indagar a fondo una práctica que ellos mismos desarrollan y buscar vías para cambiarla con miras a su mejoramiento (Doerr y Tinto, 2000; Feldman y Minstrell, 2000).

La estructura de una investigación-acción es cíclica, lo que intento reflejar en la figura 3.10. Generalmente el primer ciclo comienza con una reflexión crítica sobre la práctica, fundada en marcos de referencia que permiten ahondar en una problemática de esta y en las estrategias para resolverla. A partir de allí se hacen explícitos presupuestos, estrategias de intervención y reflexiones sobre el efecto de estas. Las evidencias de cambio son recolectadas por los mismos practicantes. Estas pueden girar en torno a tres fuentes: el lenguaje y los discursos, las tareas y las prácticas o las relaciones y la organización de los protagonistas (Kemmis y McTaggart, 1988).

Una vez evaluado el ejercicio investigativo y valoradas las estrategias particulares implementadas para atender la situación inicial, se identifican formas diferentes de ver el problema o nuevos problemas que dan lugar a un nuevo ciclo. Un ciclo de reflexión para la acción se caracteriza porque se articula con preguntas de investigación que son refinadas y reformuladas cuando se observan cambios en la práctica. Los resultados de un ciclo tienden a ser percibidos como efectos del ejercicio investigativo y también como retos para la formulación de nuevos ciclos (Doerr y Tinto, 2000).

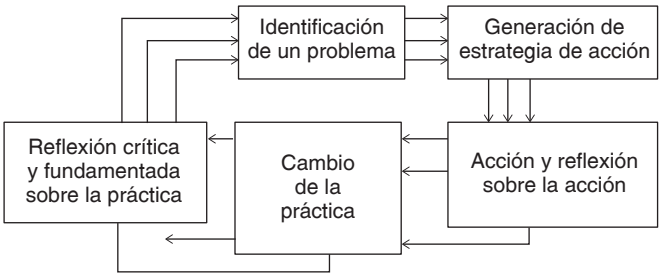


Figura 3.10 Plan de ejecución de una investigación-acción

Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la descripción anterior, la estrategia supone procesos repetidos, que avanzan en forma de espiral, de identificación de problemas, planeación de estrategias de acción, aplicación de acciones planeadas, observación, reflexión y cambio. Algunas características de tales procesos son sugeridas por Parra (2013) de la siguiente manera:

- *Planificación.* Parte de la identificación de problemas y permite establecer objetivos o metas. Es colectiva y flexible para adaptarse a las limitaciones y dificultades de la situación social. Atiende a los riesgos que implican los cambios y a las condiciones reales, materiales y políticas de la situación.
- *Acción.* Es deliberada y controlada. Supone una variación cuidadosa de la práctica y, aunque se busca que esté guiada por la planificación, se ajusta a situaciones imprevistas que llevan a la toma de decisiones sobre la marcha. Se realiza en el escenario social en donde usualmente se lleva a cabo la práctica.
- *Observación.* Tiene la función de documentar los efectos de la acción, esperados e inesperados. Es la fuente de información que se emplea en la reflexión posterior y supone una mirada prospectiva. Se hace de manera planificada pero flexible para que se pueda ajustar a las circunstancias específicas en las que la acción sucede.

- *Reflexión.* Es participante e introspectiva, pues busca desentrañar el sentido de las acciones, las dificultades y los progresos de esta. Es ayudada habitualmente por la discusión entre los participantes. A través del intercambio de puntos de vista, la reflexión en grupo conduce a la reconstrucción del significado de la situación social y proporciona la base para un plan revisado.
- *Evaluación.* Busca la reconstrucción valorativa de la acción repasándola y estableciendo sus alcances y limitaciones. Permite decidir sobre la conveniencia o no de repetir la acción observada o de dar inicio a un nuevo ciclo de reflexión para la acción. Incluso puede llevar a introducir cambios a la planificación general que se modifica de manera flexible para acomodarse a las contingencias propias del proceso. Gracias a la evaluación continua, retrospectiva y prospectiva, cada uno de los procesos de planificación, acción, observación y reflexión está en estrecha relación con los demás.

Una de las dificultades de la estrategia investigación-acción, señalada por Feldman y Minstrell (2000), es que las estrechas relaciones entre los practicantes y los investigadores externos hacen muy difícil lograr un proceso crítico reflexivo sobre la práctica, tal como el que sucede en la estrategia en primera persona. Requiere que todos los participantes se comprometan a un análisis crítico de manera decidida (Kemmis y McTaggart, 1988).

Ejemplo 3.12

Parada (2011) caracteriza su estudio como una investigación-acción colaborativa. A partir de problemáticas detectadas por una comunidad de práctica de profesores, sobre su acción educativa, el grupo emprendió una estrategia de acción que buscaba una transformación de las prácticas de enseñanza con el objetivo de enfrentar los problemas detectados. La investigadora actuó como moderadora de la comunidad. Proporcionó información y facilitó recursos que ayudaron a la comunidad a asumir alternativas de acción, pero a la vez intervino como una integrante más de la comunidad al participar en la toma de decisiones. Los resultados de la investigación son los conocimientos que surgieron de la experiencia compartida.

Parada (2011) se basó en la propuesta de Kemmis y McTaggart (1988) para definir seis fases de su investigación que sintetizó en la figura 3.11. En ellas, consideró dos fases relativas a participación, reflexión y acción.

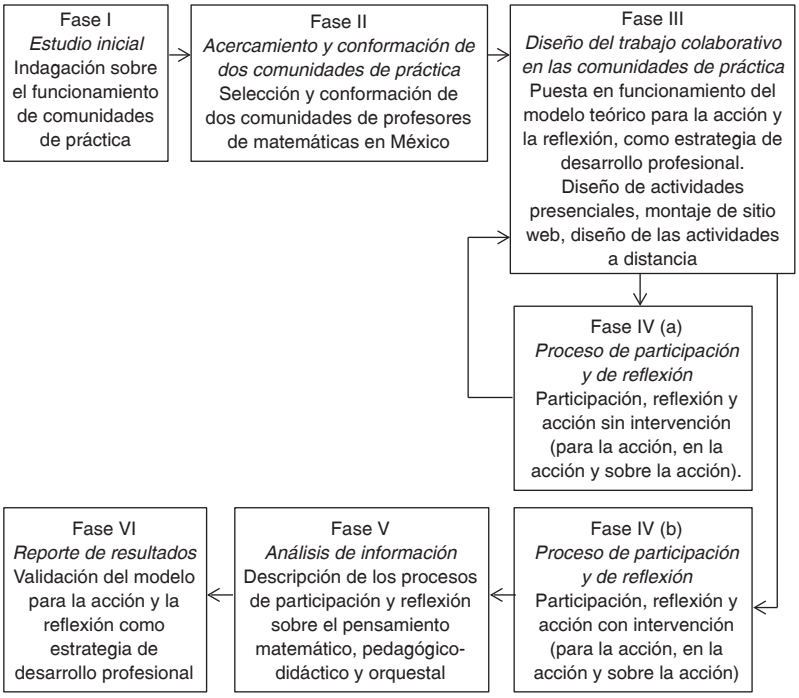


Figura 3.11 Estrategia de investigación-acción implementada por Parada (2011)

Fuente: tomada de Parada (2011).

Síntesis de las estrategias cualitativas de uso frecuente en educación matemática

En la tabla 3.2 sintetizo el conjunto de estrategias descritas en este capítulo. Cada una de ellas tiene fortalezas y debilidades que hay que considerar a la hora de decidir la estrategia, buscando atender los propósitos de la investigación.

Antes de terminar el capítulo retomo un planteamiento que he mencionado en otras partes del libro, en el que veo necesario enfatizar. Más que adoptar una estrategia investigativa específica, y seguirla paso a paso, cada diseño investigativo debería construir su propia estrategia; esto puede significar combinar elementos de dos o más estrategias siempre y cuando se logre un diseño articulado, coherente y en consonancia con los objetivos investigativos. Ese es el reto.

Tabla 3.2 Aspectos centrales de las estrategias de investigación descritas

Tipo	*Estrategia*	*Descripción*	*Participantes*	*Requisitos*	*Productos*
Naturalistas: ¿Qué pasa?	Basada en prácticas usuales	Acercamiento a un escenario natural para describir e interpretar un fenómeno interesante no notado por los participantes.	Equipo de investigación. Miembros de un colectivo que lleva a cabo una práctica.	Los investigadores se mimetizan en el escenario. Se parte de indicadores y categorías incipientes que se refinan inductivamente.	Descripciones de sistemas complejos. Constructos, tipologías, esquemas de relaciones. Modelos de actuación.
	En primera persona	Estudio de un fenómeno a partir de la identificación directa de quien lo experimenta.	Investigador-practicante.	El fenómeno se escudriña "desde dentro".	Descripciones e interpretaciones de un fenómeno desde la perspectiva de quien lo vive. Proyectos de nuevas prácticas. Revelaciones, ideas, constructos teóricos.
	Estudio de caso	Caracterización de la situación o historia de un individuo o grupo específico con una particularidad interesante.	Equipo de investigación. El "caso".	Se requiere generar estrategias para hacer un seguimiento pormenorizado.	Reporte minucioso del caso.
	Revisión documental	Indagación sistemática en material impreso en busca de describir e interpretar la voz de quienes lo elaboraron.	Equipo de investigación. Materiales impresos.	Se construyen criterios sobre cómo seleccionar el material y qué buscar en este.	Clasificaciones o tipificaciones de propuestas, conceptos, acercamientos.

Tabla 3.2 (continuación)

Tipo	*Estrategia*	*Descripción*	*Participantes*	*Requisitos*	*Productos*
	Entrevistas estructuradas y semiestructuradas	Indagación sobre un conjunto de respuestas dado por un grupo de personas seleccionado cuidadosamente, a quienes se les hace un conjunto de preguntas preplaneadas.	Equipo de investigación. Entrevistadores. Entrevistados.	Las preguntas se hacen en orden establecido (estructurado) o según la respuesta a la pregunta anterior (semiestructurado).	Modelos de concepciones y razonamientos útiles para comprender formas naturales de pensar.
Clínicas: ¿Cómo pasa?	Entrevista basada en tareas	Estudio sobre la actividad que llevan a cabo individuos o grupos de individuos mientras resuelven problemas e interactúan con un investigador.	Equipo de investigación. Entrevistadores. Entrevistados. Tareas.	La entrevista se lleva a cabo en el escenario de realización de la tarea. Los investigadores retan a los entrevistados a "pensar en voz alta" para obtener de manera clara, completa y precisa lo que piensan.	Descripciones finas o reportes detallados del proceso seguido por los entrevistados. Pruebas de hipótesis o inferencias causales sobre el pensamiento de las personas. Protocolos de entrevista.
	Observación clínica	Estudio de la actividad que llevan a cabo grupos de individuos, sin intervención del investigador, sobre tareas preplaneadas.	Equipo de investigación. Resolutores. Tareas.	Se procura que la tarea se resuelva en grupos. Se procura que la tarea permita la matematización autónoma, el uso de representaciones significativas y la identificación explícita de los procesos.	Descripciones, explicaciones, construcciones finas de los procesos de pensamiento.

Tabla 3.2 (continuación)

Tipo	*Estrategia*	*Descripción*	*Participantes*	*Requisitos*	*Productos*
De diseño: ¿Qué pasaría si...?	Experimento de enseñanza	Diseño, implementación y evaluación de secuencias de enseñanza que ponen en funcionamiento una conjetura.	Equipo de investigación. Estudiantes. Profesor-investigador. Observador no participante.	Se pone en funcionamiento una conjetura en una trayectoria hipotética de aprendizaje. Se hacen microanálisis de la actividad de los estudiantes en el curso del experimento.	Secuencias de enseñanza. Modelos de actuación. Pruebas de existencia. Constructos, interpretaciones, tipologías.
	Experimento comparativo	Comparación del aprendizaje en dos escenarios que difieren porque uno de ellos es afectado por un diseño intencionado.	Equipo de investigación. Dos grupos de estudiantes. Profesores de los estudiantes.	Los estudiantes de ambos grupos tienen características similares. Los profesores de ambos grupos tienen experticia en la implementación de la enseñanza.	Pruebas de existencia. Constructos teóricos. Reportes detallados de la implementación del diseño experimental.
	Investigación-acción	Análisis de una práctica mediante ciclos de acción reflexivos que buscan mejorarla con participación de sus miembros.	Miembros de un colectivo que lleva a cabo una práctica. Equipo de investigación invitado.	Se requiere que los responsables de la práctica se involucren en todos y cada uno de los momentos de la indagación.	Conocimiento local, situado, práctico y público sobre la práctica. Transformación de la práctica. Emancipación del colectivo mediante modificación de estructuras.

Fuente: elaboración propia.

La madurez de la investigación en educación matemática es tal que la estricta adherencia a una estrategia no es necesariamente, como lo señalan Kelly y Lesh (2000) y Mestre (2000), el mejor camino para la investigación. De hecho, la combinación de estrategias puede derivar en nuevas y creativas estrategias quizás más útiles que las conocidas hasta el momento. Dado que la investigación se dirige cada vez más hacia objetos complejos, incluso alejados de los ámbitos institucionales escolares, los escenarios son cada vez más diversos y multifacéticos y requieren formas ricas y sistémicas de intervención.

La toma de decisiones sobre la estrategia a usar, o la combinación de estrategias, depende también del estado de madurez de las investigaciones sobre los fenómenos estudiados. Muy posiblemente cuando hay escasa investigación sobre un asunto, las estrategias naturalistas pueden servir para describir el fenómeno claramente. Si ya se encuentran descripciones de este, las estrategias clínicas pueden ser pertinentes si se desea ahondar en el asunto para explicarlo. Y si la situación ha sido lo suficientemente interpretada, estrategias de diseño, en busca de transformar el estado de cosas, pueden ser las más recomendadas.

Como señalan Gutiérrez (1991) y Mariotti (2006), un programa de investigación en educación matemática generalmente sigue una ruta que comienza con diagnósticos sobre el estado de cosas y elaboración de modelos de funcionamiento. Después, pasa por la identificación de dificultades, causas, obstáculos, razonamientos. Y luego, deriva en la búsqueda de intervenciones eficaces y formas productivas de pensar sobre el asunto a partir de la generación de hipótesis de trabajo (véase figura 3.12).

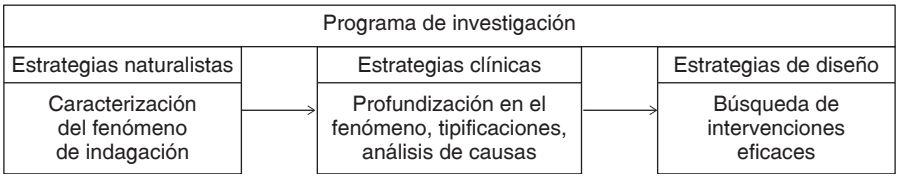


Figura 3.12 Ruta usual de un programa de investigación

Fuente: elaboración propia.

La adopción de una estrategia investigativa inadecuada puede enmascarar aspectos significativos del fenómeno investigado. Cline y Mandinach (2000) y Mestre (2000) advierten acerca de la inconveniencia de adoptar una estrategia antes de aclarar el carácter del fenómeno y luego llevarla a cabo al pie de la

letra sin prestar atención a su funcionamiento. Ejemplifican su planteamiento con un estudio en el que habían previsto un diseño cuasiexperimental que tuvieron que transformar en un estudio de caso, cuando identificaron más claramente el problema que querían atender.

Un proyecto de investigación puede adoptar diferentes estrategias que permitan una comprensión óptima, sobre todo en el caso de aproximaciones sistémicas a un fenómeno complejo. Incluso puede suceder que el proyecto requiera interpretaciones, explicaciones e inferencias, producto de estrategias sucesivas, para ir estructurando paulatinamente el diseño investigativo (Tobin, 2000).

4

Recursos y sugerencias para registrar información y construir datos investigativos

Este capítulo está dedicado a dos asuntos del diseño investigativo: uno, la captura de información que se realiza en el escenario experimental; dos, el proceso de organización, reducción, depuración y fragmentación de la información para convertirla en datos investigativos. Son dos actividades de la investigación cruciales para lograr un análisis fructífero relacionado con los intereses investigativos. Aunque el enfoque, la aproximación investigativa y la estrategia o estrategias seleccionadas (o construidas) privilegian cierta manera de recopilar información, los procedimientos empleados para ello no están atados a ninguna de estas elecciones. Por esa razón independizo el registro de información y dedico este capítulo a señalar posibles procedimientos, recursos y recomendaciones prácticas que pueden considerarse en diferentes diseños investigativos.

Inicialmente me ocupo del ejercicio de captura de información procedente de los participantes informantes en el estudio. Luego me centro en el proceso de transformar la información registrada en datos investigativos. En ese sentido diferencio información de dato. Con el primer término me refiero a los registros tal como son obtenidos en el escenario. Con el segundo me refiero a partes de la información contenida en tales registros que efectivamente se usan en el análisis. Obviamente los datos también son información, pero organizada, reducida, depurada y fragmentada.

Captura de información

La investigación cuyas estrategias se valen de procedimientos cualitativos se dirige principalmente al estudio de fenómenos sociales complejos en diversos escenarios sociales ricos en personas y situaciones. Por ello una actividad clave del diseño es la toma de decisiones sobre cuál información conviene registrar para el análisis y cuál no. Esta escogencia es necesaria porque es una tarea imposible registrar todo lo que sucede en el escenario, aquello que pasa en el entorno de este o todo lo que hacen o dicen los participantes sobre un fenómeno de interés (Miles y Huberman, 1994). La selección de participantes informantes, a partir de criterios explícitos, y la determinación de qué procesos o productos de sus acciones registrar definen los límites del estudio y establecen qué tipo de conclusiones se pueden sacar de este.

Decisiones sobre cuál información registrar y en qué momento están influidas, entre otras cosas, por la búsqueda de consistencia del diseño en términos de la relación entre el fenómeno a estudiar, los presupuestos relevantes que enmarcan la investigación y los procesos de registro previstos. Estos últimos son diferentes según si se trata de obtener información para indagar por concepciones, formas de pensar, ideas, emociones, opiniones, acciones, interacciones, prácticas, producciones, etc. Y también si se trata de describir lo que hacen individuos solos, interacciones entre individuos o una mezcla de los dos; o de registrar estados, transiciones entre estados o evoluciones.

Gutiérrez (1991) y Kelly y Lesh (2000) alertan sobre el cuidado que hay que tener con las posibles modificaciones que sufra un fenómeno que se está estudiando como consecuencia del proceso de registro de información y con el efecto que este proceso pueda tener sobre la información capturada y sobre los análisis que se hagan. Señalan que, en el caso de estrategias naturalistas, entre menos invasivos sean los procesos de captura de información y menos personas extrañas al escenario estén presentes en este, mucho mejor.

Cinco preguntas determinan qué información registrar: ¿dónde?, ¿a quién o qué?, ¿cuándo?, ¿haciendo qué?, ¿cómo? Las respuestas a cada pregunta dependen de las necesidades del estudio que están determinadas por las inquietudes investigativas, el marco de referencia adoptado (general o específico), el conocimiento previo que tienen los investigadores sobre el fenómeno y la estrategia usada o construida. Más que atender criterios sugeridos por otros, los investigadores se centran en la meta de obtener información lo más holística y rica posible sobre el fenómeno, de tal suerte que permita revelar aspectos nuevos de su complejidad. En cualquier caso, una característica clave de la

información a recoger es que tenga un fuerte vínculo con el escenario social en el que ocurren los eventos; esto hace que la información más útil sea la que se capture en estrecha proximidad con la situación específica, teniendo en cuenta las influencias del contexto local.

El momento en el que se responden las cinco preguntas depende mucho del tipo de diseño. Diseños flexibles y abiertos, de carácter principalmente exploratorio, pueden ir definiendo y concretando sobre la marcha: el escenario, los informantes, los eventos, los procesos y los instrumentos que se usen para registrar información. Diseños rígidos y focalizados, de carácter principalmente confirmatorio, definen y concretan al máximo estos aspectos antes de ir al escenario. Nuevamente señalo la posibilidad de asumir un punto de vista intermedio previendo respuestas a las preguntas antes de llevar a cabo el proceso de registro de información, pero permitiendo la apertura del diseño para hacer ajustes, a medida que la captura se adelanta. En los siguientes párrafos hago referencia a cada una de las cinco preguntas.

Escenario investigativo (¿dónde?)

El escenario investigativo es el lugar donde se hace el registro de la información. Responde a la pregunta *¿dónde obtener la información?* Para el caso de la investigación en educación matemática, el lugar tiene que ver con sitios en los que se enseña y se aprende matemáticas (formal o informalmente), se organiza, se agencia o se regula la enseñanza, se incentiva y evalúa el aprendizaje de las matemáticas o se adelantan prácticas sociales relacionadas con las matemáticas.

Diferencio dos tipos de escenarios: a) impresos o digitales y b) físicos o virtuales. Los escenarios impresos o digitales son los lugares propios para la investigación cuya estrategia es documental, aunque otras estrategias también pueden usar información de este tipo. Pueden ser escritos históricos, biografías, documentos curriculares, textos escolares, cuadernos de apuntes, diarios programadores, actas de encuentros o reuniones, notas de clase, cartas o registros periodísticos, fotos, entre otros. El equipo de investigación centra el ejercicio investigativo en un conjunto de materiales impresos o digitales en donde encuentra la información requerida para hacer el análisis. La selección del escenario está argumentada por uno o varios criterios. Sánchez y Molina (2012) sugieren proceder de dos formas posibles:

- Decidir un conjunto de criterios y escoger todos los materiales que se ajusten a ellos.

- Decidir un conjunto de criterios, ordenarlos de acuerdo con su importancia y luego ir filtrando entre aquellos materiales que se ajusten a un criterio, aquellos que se ajusten al siguiente criterio, y así sucesivamente, según el orden establecido.

Ejemplo 4.1

A manera de ilustración, presento el procedimiento seguido por Guacaneme (2016) para definir dos escenarios para su revisión documental. El primer escenario se constituyó siguiendo el segundo procedimiento sugerido por Sánchez y Molina (2012). Primero, hizo un rastreo de bibliografía proveniente del campo de la educación matemática, desde 1990 hasta 2010, en donde se encuentran reportes de acciones y reflexiones académicas en torno a la relación historia de las matemáticas-educación matemática. Este rastreo lo llevó a identificar los "lugares" en los que se reportan avances acerca de la cuestión: 14 monográficos de revistas del campo de la educación matemática, 2 revistas especializadas en tal relación, 4 inventarios bibliográficos al respecto, alrededor de 336 artículos de 26 revistas de investigación, 15 libros y 19 conferencias sobre la relación en cuestión impartidas en 3 eventos. Luego, en la literatura ubicada seleccionó 78 documentos (61 artículos y 17 capítulos de libros) en los que se expresaba alguna idea sobre la relación historia de las matemáticas-conocimiento profesional.

El segundo escenario usado por Guacaneme (2016) también se valió de dos criterios usados secuencialmente. Primero hizo una revisión bibliográfica, acotada en las últimas tres décadas sobre la historia de los objetos matemáticos razón y proporción, en publicaciones académicas especializadas en historia de las matemáticas y filosofía de las ciencias, libros de historia de las matemáticas, artículos en revistas de investigación en educación matemática y matemáticas. Segundo, en la bibliografía encontrada seleccionó alrededor de cien documentos ampliamente citados en índices de referenciación. Algunos de ellos se salen del límite temporal previsto, pero Guacaneme consideró su inclusión dada su relevancia.

Los escenarios físicos o virtuales pueden ser una o varias aulas de clase, instituciones educativas, entornos escolares, instituciones de educación no formal en las que se aprende matemáticas, ámbitos sociales en los que la gente usa las matemáticas, lugares de encuentro de profesores, entre otros. En estos escenarios tiene lugar el fenómeno de interés investigativo.

Podría parecer que es sencillo seleccionar cuáles serán los escenarios investigativos específicos. Sin embargo, además de considerar las posibi-

lidades de acceso del equipo de investigación, es importante elaborar una argumentación, y comunicarla, sobre las razones que llevan a seleccionar tal o cual lugar, acotando el estudio. Por ejemplo, entre todos los cursos de una institución escolar, ¿cuál o cuáles escoger para hacer un estudio comparativo o un experimento de enseñanza y con qué criterios hacer la selección? Entre las escuelas de una localidad, ¿cuál escoger para hacer un estudio naturalista sobre el currículo de matemáticas que implementan y con qué criterios hacer la selección? Entre los diferentes sitios en los que los niños llevan a cabo prácticas sociales extraacadémicas relacionadas con las matemáticas (el patio de recreo, la tienda escolar, los entornos familiares, los museos que visitan), ¿cuál o cuáles seleccionar para hacer una entrevista basada en tareas y con qué criterios hacer la selección? En la tabla 4.1 doy ejemplos de escenarios extraídos de tesis doctorales de investigadores colombianos.

Tabla 4.1 Ejemplos de escenarios investigativos

Tesis	*Escenario*
Fiallo (2010)	Clase de Trigonometría de grado 10.º de educación media
Camargo (2010)	Clase de Geometría Plana, de segundo semestre de un programa de Licenciatura en Matemáticas
Parada (2011)	Comunidad de práctica de profesores de matemáticas en ejercicio interesada en seguir el modelo de "reflexión para la acción"
Vargas (2012)	Clase de Precálculo de un programa universitario de pregrado
Rojas (2012)	Clase de Matemáticas de grados 9.º y 11.º y espacio físico de reuniones de algunos estudiantes en la biblioteca y en una sala de estudio
Vanegas (2013)*	Clases de Matemáticas de secundaria impartidas por un profesor experimentado que busca promover el desarrollo de competencias ciudadanas
Valoyes (2014)	Clases de Álgebra de grado 8.º
Vergel (2014)	Espacio físico de reunión de algunos estudiantes voluntarios en la biblioteca de un colegio público
Obando (2015)	Clases de Matemáticas de 3.º y 4.º de primaria de una institución pública
Bohórquez (2016)	Clase de Didáctica de la Variación, de sexto semestre de un programa de Licenciatura en Matemáticas
Durango (2017)	Seminario de Práctica Pedagógica, de futuros licenciados en matemáticas y clases de Geometría de nivel escolar impartidas por los estudiantes inscritos en el seminario

* Vanegas (2013) emplea otros escenarios en su investigación. He escogido este como ejemplo de estudio de caso.

Fuente: elaboración propia con información extraída de las tesis doctorales.

Los informantes (¿a quién?)

Excepto por la investigación documental, la investigación en educación matemática con enfoques fenomenológico o sociocrítico se lleva a cabo interactuando con personas (estudiantes, profesores, agentes educativos, usuarios de las matemáticas, etc.) de manera directa, física o virtualmente. ¿Cómo seleccionar aquellos que participarán en el estudio? Rincón y Barreto (2013) recomiendan preguntarse: ¿Quiénes serán los individuos? ¿Todos los individuos sirven para obtener la información o solo unos? ¿Cómo ubicar a los individuos claves? ¿Qué características deben tener? ¿Cómo saber si se hizo una selección correcta o adecuada? ¿Cuántos individuos se convocan? ¿En qué momento convocarlos? ¿Se dejarán de considerar individuos importantes? ¿Qué pasa si los individuos son muy disímiles? Cuando el eje central de la captura de información son los participantes informantes es necesario identificarlos, saber cuántos serán, caracterizarlos y relacionarlos con el problema y el escenario.

A diferencia de la investigación que se vale de procedimientos cuantitativos, los participantes en un estudio que se vale de procedimientos cualitativos son relativamente pocos y están ubicados en los escenarios usuales en donde llevan a cabo sus prácticas relacionadas con la educación matemática, o en escenarios similares. Esto hace que las posibilidades de selección estén limitadas por los propósitos y las condiciones del estudio y se considere más apropiada una selección deliberada de participantes que una selección al azar.

La selección de los participantes también está dirigida conceptualmente, sea desde el comienzo del registro de información o progresivamente. En el segundo caso, a partir de una selección inicial exploratoria o concreta, los participantes pueden irse delimitando de acuerdo con el desarrollo del estudio. Al identificar ciertos eventos, respuestas, acciones, prácticas, los investigadores pueden ir enfocando la mirada sobre algunas personas presentes en el escenario, con la meta de recoger información que permita análisis en profundidad de los fenómenos de interés.

Miles y Huberman (1994) sugieren que la selección de participantes específicos se lleve a cabo teniendo en cuenta dos necesidades: a) los alcances específicos del estudio y b) un contexto experimental con el que se puedan apoyar exploraciones, descubrimientos, confirmaciones o desarrollo de procesos o constructos de interés particular. Con estas necesidades en mente, ¿a quién seleccionar?; de todos los estudiantes de un curso, ¿quiénes se observarán?; de todos los profesores de matemáticas de una localidad, ¿con quién trabajar?; de los rectores de colegios de un municipio, ¿a quiénes se entrevistará? Erickson (1986; citado en Miles y Huberman, 1994) recomienda escoger los

participantes específicos a partir de un conjunto de personas o grupos de personas amplio, que se considere dentro de ciertos límites iniciales, para luego ir eligiendo cada vez menos cantidad de ellos a medida que se va enfocando el estudio en eventos específicos.

También es posible seleccionar los participantes específicos siguiendo uno o varios de los siguientes procedimientos sugeridos por diversos investigadores cuyas propuestas son recogidas por Miles y Huberman (1994):

- Buscar la mayor variación en las características de los participantes, de tal forma que se puedan identificar patrones comunes a pesar de la variedad.
- Procurar un grupo homogéneo de participantes con características similares para simplificar las variables que incidan en la situación a estudiar.
- Escoger participantes que estén en una situación crítica o experimenten circunstancias peculiares que sirvan para profundizar en el fenómeno de interés.
- Seleccionar dos grupos de informantes: unos que parecen confirmar una situación o una hipótesis y otros que parecen descartarla.
- Elegir un conjunto inicial de personas y luego, por sugerencia de alguien experto o un informante clave que conoce bien al grupo, optar por algunos de ellos que puedan proporcionar información amplia y verídica.
- Optar por un conjunto inicial de personas y luego preferir al azar algunos de ellos.
- Tomar un conjunto inicial de personas y luego, a partir de un criterio que define el equipo de investigación, optar por todos aquellos que lo cumplen.
- Preferir un grupo de individuos o personas que convienen al estudio porque permiten disminuir costos, tiempos, esfuerzos, pero sin perder con ello información que reste credibilidad al estudio.
- Identificar grupos de personas con características específicas y luego escoger al azar un número concreto de personas de cada grupo.

Por su parte, Rincón y Barreto (2013) proponen seleccionar a los participantes de manera intencional mediante aproximaciones sucesivas logradas con base en la información de interés proporcionada por un grupo de individuos; la cantidad de participantes informantes va aumentando hasta que nuevos individuos no aporten nueva información. Así la selección de los participantes se relaciona estrechamente con la información que se requiere para hacer análisis que conduzcan al tratamiento del problema propuesto. Es un proceso dinámico que exige una secuenciación en el tiempo, dado que requiere ir acopiando y analizando información para luego escoger al próximo individuo.

En el caso de la investigación documental puede considerarse que los informan-

tes son los autores de los documentos, ya que los textos pueden ser vistos como respuestas a preguntas formuladas por el investigador. Obviamente, y como señala Guacaneme (2016), como los documentos no se escribieron necesariamente con la intención de responder a inquietudes específicas de un estudio, el no encontrar lo que el investigador busca no genera una valoración negativa del documento.

En el caso de los experimentos de enseñanza o de la investigación-acción es importante considerar que el equipo de investigación es un informante más y por lo tanto conviene registrar sus acciones de planeación del diseño, análisis en curso y análisis retrospectivo. Incluso puede ser útil que un investigador recoja información de lo que piensan otros investigadores del equipo a lo largo del estudio (Confrey y Lanchance, 2000).

En la tabla 4.2 doy ejemplos de informantes, extraídos de tesis doctorales de investigadores colombianos.

Tabla 4.2 Ejemplos de informantes

Tesis	*Informantes*
Fiallo (2010)	17 estudiantes de grado 10.º de una institución educativa privada asistentes al curso de Trigonometría
Camargo (2010)	21 estudiantes de Licenciatura en Matemáticas inscritos en el curso Geometría Plana en el segundo semestre de 2007
Parada (2011)	16 profesores considerados como participantes plenos, permanentes o frecuentes en alguna de dos comunidades de práctica seleccionadas
Vargas (2012)	2 profesores de Precálculo que trabajan en las unidades académicas de ciencias básicas de una universidad pública y de una privada, respectivamente
Rojas (2012)	120 estudiantes de grado 9.º, 120 estudiantes de grado 11.º, 8 grupos de 3 estudiantes de grado 9.º y 8 grupos de 3 estudiantes de grado 11.º
Vanegas (2013)	1 profesor experimentado que intenta promover competencias ciudadanas en las clases de Matemáticas
Valoyes (2014)	3 profesores de Álgebra de tres colegios diferentes (de estrato sociocultural alto, medio y bajo) y 4 estudiantes por curso con al menos un estudiante de raza negra
Vergel (2014)	13 niños de grados 4.º y 5.º que participaron voluntariamente de la realización de unas tareas de matemáticas
Obando (2015)	25 estudiantes de grado 3.º y 25 estudiantes de grado 4.º durante dos años escolares* asistentes a las clases de matemáticas
Bohórquez (2016)	36 estudiantes de sexto semestre inscritos en el curso Didáctica de la Variación de un programa de Licenciatura en Matemáticas
Durango (2017)	Tres estudiantes de Licenciatura en Matemáticas inscritos en el Seminario de Práctica Pedagógica

* Durante la investigación, los 25 estudiantes de grado 3.º pasaron a 4.º y los 25 estudiantes de grado 4.º pasaron a 5.º.

Fuente: elaboración propia con información extraída de las tesis doctorales.

Eventos (¿cuándo?)

Además de definir el escenario y los participantes, los investigadores deciden cuándo llevar a cabo el registro de información. Esto implica tener previsto, por lo menos de manera provisional, los eventos en donde tendrá lugar la interacción con los informantes.

En el caso de investigaciones que adoptan la estrategia documental la respuesta a este interrogante tiene que ver con decidir qué partes del material revisar. Si son textos escolares, por ejemplo, hay que decidir si se revisan las secciones correspondientes a cierto contenido declarado, las páginas en las que un cierto tema se incluye sin importar en qué unidad estén, las páginas en las que se ejemplifiquen procesos o conceptos de cierta área, las secciones de ejercicios, etc. Si son cuadernos de apuntes, hay que considerar si se inspeccionan solo las partes correspondientes a una unidad temática, todos los escritos de producción autónoma de los estudiantes, las partes en donde los estudiantes responden a ciertas preguntas formuladas por el profesor, etc. Por ejemplo, en la tesis de Guacaneme (2016) el material a revisar fue el documento completo acompañado de reseñas y resúmenes de los artículos y capítulos de libros escogidos, elaborados por el investigador, en donde se consignaron las ideas centrales de cada documento.

En los casos en los que los informantes son personas, conviene tomar decisiones, desde un principio o a medida que transcurre el estudio, que tienen que ver con:

- *Los eventos por registrar.* ¿Se registra información relacionada con eventos específicos o se registra todo aquello que los participantes hagan o digan en el escenario? Por ejemplo: se registra solo cuando los estudiantes estén resolviendo problemas puestos en clase por el profesor para ser trabajados en pequeños grupos; se registran solamente las clases en las que un profesor esté enseñando un nuevo tema dirigiéndose al grupo completo de estudiantes; se registra solo cuando los estudiantes responden a evaluaciones escritas puestas por el profesor; se registra cada vez que un grupo de profesores se reúna para decidir modificaciones a la programación prevista para los cursos de matemáticas, etc.
- *Los límites que acotan los eventos.* ¿Cuál información se tiene en cuenta y cuál no? Por ejemplo: si se registra cuando los estudiantes estén resolviendo problemas puestos en clase por el profesor para ser trabajados en pequeños grupos, se consideran solo aquellos momentos en los que trabajan sin presencia del profesor y se descartan los momentos en los que

él interactúa con el grupo; si se registran las clases en las que un profesor esté enseñando un nuevo tema, se consideran solo las clases en las que el profesor usa el tablero y no aquellas en las que usa un videoproyector; si se registra cuando los estudiantes responden a evaluaciones escritas puestas por el profesor, se descartan las evaluaciones respondidas en grupo y solo se consideran las individuales o viceversa; si se registra cada vez que un grupo de profesores se reúne para decidir modificaciones a la programación prevista para los cursos de matemáticas, se tienen en cuenta solo las reuniones en las que se discute la programación de primaria y se descarta cuando hablan de programaciones de bachillerato.

- *Los momentos para el registro de información.* ¿Se registra información acerca de un evento, sobre lo que pase en momentos específicos o durante todo el tiempo? Por ejemplo: se registra cuando los estudiantes de un curso resuelvan todos los problemas propuestos en una clase, solo cuando resuelvan los problemas pares, o solo cuando resuelven los tres problemas más exigentes; se registran todas las clases en las que un profesor explique un nuevo tema usando el tablero o solo se registra una clase al inicio, otra en una sesión intermedia y otra en la última clase en la que explique un nuevo tema; se registran todas las evaluaciones individuales escritas durante un lapso de tiempo, solo la mitad de ellas, o una por evaluación por tema; se registran todas las sesiones de reuniones de profesores en las que se deciden modificaciones a la programación de primaria o solo una de cada tres.
- *La duración del registro.* ¿En qué lapso se tomará la información (minutos, horas, sesiones, meses, años)? Por ejemplo: se registran las sesiones de clase en las que se aborde un tema durante un semestre escolar; se registran las reuniones de profesores durante un año escolar; se registran cinco minutos del comienzo de cada clase. Según Tobin (2000), los periodos de observación y registro prolongados favorecen las descripciones detalladas pues permiten a los investigadores una amplia contextualización.
- *El tratamiento que se dará a los participantes al momento del registro.* ¿Se considera a los participantes como individuos por separado, como grupos de individuos o como colectivos? Por ejemplo: se registra cómo resuelve un problema cada estudiante así trabaje en grupo o bien cómo resuelve el problema el grupo; se registran las decisiones de un colectivo de profesores o de cada individuo que hace parte del colectivo.
- *La interacción con los investigadores.* ¿Se recopila información a partir de una interacción comunicativa de los participantes informantes con los investigadores o se recopila información de la interacción comunicativa

de los informantes entre ellos sin interacción comunicativa con el investigador? Por ejemplo, los investigadores: interrogan a los participantes; entablan un diálogo con ellos; participan con ellos de ciertas prácticas como miembros del grupo; observan sus actuaciones, interacción o comunicación espontánea sin comunicarse verbalmente con ellos; observan los procesos de pensar en voz alta, de forma neutra; tratan de pasar desapercibidos y no se relacionan con los informantes.

- *La información que se da a los participantes sobre los investigadores.* ¿Algunos o todos los participantes saben quiénes actúan como investigadores? ¿Los investigadores están en el escenario sin que ningún participante lo sepa? Según Atkinson y Hammersley (1998), por ejemplo, en un experimento de enseñanza los estudiantes saben que su profesor está haciendo una investigación en la que ellos participan, pero pueden considerar a un investigador observador como otro profesor en el salón y no necesariamente como investigador.

En la tabla 4.3 doy ejemplos de eventos, extraídos de tesis doctorales de investigadores colombianos.

Procesos (¿haciendo qué?)

En el momento de decidir qué información recopilar también hay que considerar qué procesos son de principal interés. Es decir, qué prácticas, actuaciones, interacciones, diálogos, gestos, etc., interesa registrar con especial atención. Por ejemplo:

- De los momentos de resolución de problemas puestos por el profesor para ser trabajados en grupo, sin presencia del profesor, puede interesar registrar especialmente: el momento en el que cada individuo del grupo interpreta el enunciado del problema, la discusión que sostienen sobre la estrategia a seguir, el proceso que siguen para resolver el problema, las intervenciones de cada individuo del grupo o las interacciones que sostienen con materiales que tienen a disposición.
- De los momentos de la enseñanza de un profesor acerca de un nuevo tema en el que él esté dirigiéndose a todo el grupo y se apoya del tablero, podría ser pertinente registrar: qué consigna en el tablero, la interacción comunicativa que promueve con los estudiantes y el papel que juega el tablero en ella, si pide a algunos estudiantes pasar al tablero a escribir o explicar algo, o qué procedimientos ejemplifica en el tablero y con qué nivel de detalle.

Tabla 4.3 Ejemplos de eventos

Tesis	*Eventos*
Fiallo (2010)	Interacción entre parejas de dos grupos de estudiantes cuando trabajan con apoyo de un programa de geometría dinámica una unidad de enseñanza sobre razones trigonométricas e interacción de la profesora con el grupo completo de estudiantes cuando ellos explicitan los hallazgos
Camargo (2010)	Interacción entre estudiantes cuando trabajan en grupos pequeños resolviendo los problemas propuestos en el semestre académico e interacción de la profesora con el grupo completo de estudiantes, después de la resolución de los problemas
Parada (2011)	Procesos de participación y reflexión para la acción, en la acción y sobre la acción, con y sin intervención del investigador, de una comunidad de práctica interesada en resolver problemas de la enseñanza de las matemáticas tomando en consideración el modelo de acción y reflexión sugerido por la investigadora
Vargas (2012)	Interacción sostenida entre el profesor de precálculo y sus estudiantes cuando él les enseña el tema de función exponencial, interacción sostenida entre el profesor de precálculo y el investigador en una entrevista estructurada previa al registro de las clases y una entrevista semiestructurada posterior al registro
Rojas (2012)	Proceso individual de resolución de tres tareas, discusión sobre las respuestas sostenida por los estudiantes en grupos de tres y entrevistas a dieciséis grupos de estudiantes, sostenidas con el investigador alrededor de las respuestas a las tareas
Vanegas (2013)	Gestión de la enseñanza de las matemáticas de un profesor, con énfasis en promover competencias ciudadanas
Valoyes (2014)	Interacción de los profesores con sus estudiantes de grado 8.º cuando les enseñan álgebra e interacción de los profesores con la investigadora en entrevistas estructurada y semiestructurada
Vergel (2014)	Proceso de resolución de las tareas, primero individualmente, luego en parejas y finalmente en grupo
Obando (2015)	Proceso de resolución de tareas de razón, proporción y proporcionalidad en grupos pequeños o en discusión general, con y sin interacción de la profesora o el investigador
Bohórquez (2016)	Procesos de resolución de dos problemas de optimización, análisis didáctico colectivo de los problemas y análisis y reflexión colectiva de la resolución de problemas como contexto de aprendizaje
Durango (2017)	Interacción sostenida entre parejas de estudiantes, futuros profesores, o entre los estudiantes y el profesor de un curso de pregrado, en la que ellos comparten experiencias sobre la preparación y presentación de seis tareas de geometría, dirigidas a escolares, e interacción sostenida por los estudiantes, futuros profesores, con sus alumnos de educación básica y media, en tres clases de geometría cuando enseñan y discuten conocimientos geométricos con ellos

Fuente: elaboración propia con información extraída de las tesis doctorales.

- De los momentos de registro de evaluaciones individuales escritas puestas por el profesor podría interesar capturar especialmente: las normas sociales que regulan la actividad, el efecto emocional que produce la actividad evaluativa en los estudiantes, las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas.
- De los momentos de registro de reuniones de grupos de profesores para decidir modificaciones a la programación de los cursos de matemáticas de primaria, sería conveniente registrar especialmente: las discusiones sobre las causas de los ajustes, la argumentación para defender cierto cambio o los referentes en los que se basan los profesores para tomar decisiones.

Una opción sugerida por Lesh y Kelly (2000) para lograr buenos registros sobre cómo actúan los participantes informantes es proponerles tareas "provocadoras" en las que ellos se sientan retados y que les brinden ricas oportunidades de aprender y documentar lo que están aprendiendo. Esto es posible si la estrategia no es naturalista. En particular, recomiendan formular problemas, hacer preguntas o proponer situaciones de toma de decisiones, que tengan en cuenta contextos realistas para los informantes y que les permitan desarrollar descripciones, explicaciones, predicciones, justificaciones, que revelan cómo interpretan la tarea, cómo la desarrollan y cómo aprenden a partir de ella. Gutiérrez (1991) sugiere tener muy en cuenta y mirar con especial énfasis a aquellos informantes estudiantes que no responden tal como se tiene previsto, para detectar lagunas de aprendizaje.

En la tabla 4.4 doy ejemplos de procesos extraídos de tesis doctorales de investigadores colombianos.

Recursos (¿cómo?)

¿Cómo registrar la información? Obviamente depende del fenómeno estudiado, pero siempre se intenta que las condiciones de captura sean similares para todos los participantes, de manera que sea posible comparar la información de unos y otros (Herrera y Ruiz, 2013). En el caso de la investigación documental la información ya está escrita en material impreso o digital. En los demás casos, la información a registrar se refiere a lo que los participantes dicen, lo que hacen o lo que escriben. Para hacer el registro es posible valerse de diversos recursos. A continuación, presento un conjunto de posibilidades.

Para registrar lo que dicen los informantes

Los registros verbales se hacen mediante dispositivos de audio o de video; en el segundo caso interesa relacionar lo que dicen los informantes con algo

Tabla 4.4 Ejemplos de procesos cuyo interés requiere un registro cercano

Tesis	*Procesos*
Fiallo (2010)	Argumentación y demostración relacionada con afirmaciones sobre razones trigonométricas conjeturadas a partir de la resolución de problemas
Camargo (2010)	Actividad demostrativa llevada a cabo por los estudiantes o por los estudiantes y la profesora, con el apoyo de un programa de geometría dinámica
Parada (2011)	Participación y reflexión sobre el diseño de actividades para el aula (con o sin intervención), orquestación de la actividad en el aula y evaluación de los logros alcanzados
Vargas (2012)	Opiniones sobre el aprendizaje, las estrategias de enseñanza, el uso de recursos, la gestión de dificultades, la evaluación, etc.; elementos incluidos en la planeación escrita de la clase sobre función exponencial; intenciones del profesor en los diferentes momentos de la clase, elementos matemáticos que el profesor introduce, momentos en los que introduce los mecanismos de construcción de la función exponencial
Rojas (2012)	Interpretaciones de representaciones matemáticas, tratamiento de registros de representación equivalentes y traspaso (o no) del sentido asignado a un registro a otro registro
Vanegas (2013)	Gestión del profesor en el empleo de contextos sociales y culturales diversos, el tratamiento de conexiones matemáticas, el fomento a la participación respetuosa, solidaria y crítica, etc.
Valoyes (2014)	Expectativas acerca de la habilidad de estudiantes de grado 8.º para aprender álgebra relacionadas con su raza y medio social y prácticas asociadas a tales expectativas
Vergel (2014)	Reconocimiento de patrones figurales o numéricos y uso para identificar términos no ostensibles y comunicar o usar una expresión general
Obando (2015)	Actividad matemática mediada de los estudiantes en la que es posible reconocer elementos del sistema de prácticas institucional relacionado con el aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad
Bohórquez (2016)	Manifestaciones de concepciones sobre la gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas
Durango (2017)	Argumentación exhibida por los participantes durante el diálogo con sus compañeros de clase, la discusión con el profesor del seminario o la conversación con sus estudiantes en clase de geometría

Fuente: elaboración propia con información extraída de las tesis doctorales.

que observan o que hacen. Los registros se acompañan generalmente de notas de un observador, tomadas en el momento de la manifestación verbal o posteriormente a esta. El observador consigna información sobre el contexto, algún hecho que acompaña el registro, o situaciones que no se capturan con el dispositivo y que pueden servir para comprender lo que la persona dice.

Según la estrategia investigativa implementada, los registros de lo que dicen los informantes pueden ser de diferente naturaleza. Por ejemplo:

- Lo que los informantes dicen espontáneamente cuando llevan a cabo alguna acción o interacción en el escenario o comunican experiencias, ideas, pensamientos u opiniones.
- Lo que los informantes dicen espontáneamente cuando se enfrentan a situaciones planeadas por los investigadores. Puede ser al observar una película, ver fotos, mirar fragmentos de un video de una actuación anterior (de ellos o de otras personas), trabajar en un programa informático (sobre una pantalla de computador o un tablero inteligente), etc.
- Reportes orales de sus acciones cuando se les solicita presentar un informe sobre algo que se les pidió hacer.
- Explicitación del pensamiento, producto de la solicitud de los investigadores. Esta opción es útil si los informantes son hábiles para llevar a cabo introspecciones sobre sus propios pensamientos y para comunicarlas.
- Respuestas a preguntas hechas por los investigadores, de tipo informativo o formativo. Estas pueden obtenerse en conversaciones informales o en entrevistas estructuradas o semiestructuradas.
- Diálogos con los investigadores al promover una interacción comunicativa que origine procesos de coconstrucción discursiva.

Con el auge de dispositivos móviles de uso personal, los registros de audio y video se han facilitado enormemente e incluso es posible que los informantes colaboren con la captura de sus propias voces y el envío de la información al grupo de investigación en formato digital. Si los investigadores orientan a los informantes sobre qué es lo que interesa grabar y además acompañan la grabación con notas de lo que sucede en el escenario, estos pueden constituirse en registros fieles de aquello que dicen.

Para registrar lo que escriben los informantes

En el caso de la investigación documental, los registros escritos, impresos o en formato digital están ya elaborados y basta hacer una recopilación del material existente. En los demás casos se trata de recopilar el material producido por los informantes. Según la estrategia investigativa los registros, en papel o en formato digital, pueden ser de distinta naturaleza. Por ejemplo:

- Respuestas a preguntas incluidas en cuestionarios verbales o escritos elaboradas por los investigadores o por alguno de los participantes.
- Respuestas a solicitudes específicas de los investigadores, tales como

"completar la frase: para mí, la clase de matemáticas es como...", o "¿qué está pasando en esta foto, este videoclip, etc.?" (Doerr y Tinto, 2000).
- Informes de los participantes sobre procesos de resolución de problemas o situaciones, elaborados en el momento de la resolución o retrospectivamente.
- Reportes o protocolos de los informantes sobre planes de acción, acciones realizadas, preocupaciones o inquietudes (Confrey y Lanchance, 2000).
- Apuntes de las clases, reuniones o comités, redactados por los participantes.
- Recuentos retrospectivos de pensamientos, emociones, opiniones, ideas, críticas, acciones, interacciones, dinámicas, prácticas propias o de otros.

Generalmente, la recolección de material escrito no requiere un soporte tecnológico de audio o video, salvo si la información proporcionada se acompaña de acciones, uso de material o uso de representaciones. En esos casos una videograbación, fotos o notas de un observador pueden enriquecer los registros.

Cuando el estudio busca rastrear procesos, es importante para los investigadores tener registros escritos completos, no necesariamente "en limpio". Por eso piden a los participantes que escriban la mayor cantidad de ideas posibles; además les solicitan escribir con esfero y no con lápiz, y en caso necesario pueden hacer tachones o segundas versiones, pero sin borrar ni eliminar información sobre versiones preliminares.

Para registrar lo que hacen los informantes

Para registrar gestos, movimientos, acciones, interacciones, prácticas y en general aquello que hacen los informantes se pueden emplear: fotos de personas interactuando con otras en el escenario; esquemas del escenario elaborados por observadores; reportes de actuaciones elaborados por observadores; artefactos físicos, obras manuales, obras de arte, creadas o producidas por los informantes (Tobin, 2000). Sin embargo, el medio por excelencia para el registro de actuaciones es el video.

De acuerdo con la estrategia investigativa, el uso de videograbaciones puede variar según quien haga el registro:

- *Puede estar a cargo del equipo de investigación.* En ese caso se usan tantas cámaras como haga falta para registrar aquello que interesa, desde diferentes ángulos. En caso de situaciones en recintos cerrados puede haber una cámara captando todo el escenario y otras (u otra) enfocadas en individuos

o grupos, capturando la riqueza de actuaciones. En situaciones de aula, Confrey y Lanchance (2000) sugieren dirigir una cámara hacia el frente del salón y otra dispuesta hacia los estudiantes, que se enfoque en la persona que habla. Durante el trabajo en grupos hay que tener cámaras registrando a los grupos escogidos (para capturar todo el proceso realizado) y usar otra cámara moviéndose por el salón para registrar la riqueza de formas de enfrentar la tarea. En caso de situaciones al aire libre, la cámara sigue a algunos informantes captando el entorno en el que se desenvuelven y sus interacciones. Hall (2000) plantea diferencias interesantes en el registro según si la cámara enfoca particularidades o se usa con un angular amplio.

- *Puede estar a cargo de los informantes.* Como muchas personas, incluso estudiantes jóvenes, tienen dispositivos móviles dotados de cámaras de video, es posible valerse de ellos para que los mismos informantes hagan registros en tiempo real sobre lo que hacen o capturen reportes retrospectivos de sus acciones. Guiados por los investigadores pueden obtener información incluso más completa que la que obtendrían ellos.

Cuando la investigación busca analizar interacciones de los estudiantes con programas informáticos hay otros recursos disponibles para el registro de información. Gutiérrez (2005) sugiere, por ejemplo, pedir a los estudiantes archivos creados por ellos en diferentes momentos del proceso, aprovechar el comando que tienen algunos programas que permite revisar las construcciones o procesos realizados, o aprovechar la opción que tienen algunos programas de hacer un registro automático de la sesión. Adicionalmente, en el mercado existen programas informáticos que capturan lo que sucede en la pantalla de los computadores y simultáneamente graban a los usuarios interactuando frente a la pantalla. Estos recursos se han convertido en una fuente importante para hacer registros de acciones cuando estas tienen que ver con interacciones en las que se usa un computador. Entre ellos están Camtasia y CamStudio.

Producción de datos investigativos

La información recogida en el escenario, en bruto, no siempre corresponde a los datos investigativos, pero estos sí son obtenidos a partir de la información. Para ello es necesario llevar a cabo procesos de organización, reducción, depuración y fragmentación de la información; así se constituyen los datos y se preparan para el análisis (Denzin y Lincoln, 1998; Tobin, 2000). A continuación, describo y ejemplifico estos procesos.

Organización de la información

La información recogida en el escenario requiere ser organizada cuidadosamente para asegurar su uso eficaz, flexible y confiable por todos los investigadores de un estudio. Las investigaciones que se valen de procedimientos cualitativos generalmente acumulan gran cantidad de información y por eso conviene establecer un mecanismo de organización y archivo desde el inicio de la captura. Así se tiene acceso a esta en cualquier momento y los análisis se hacen vinculados a la información original (Tobin, 2000). Esto redunda en confiabilidad y evita pérdida de información y de tiempo.

Usualmente los investigadores prevén dos tipos de archivos: físico y digital. El archivo físico contiene la materia prima recopilada: productos elaborados por los participantes, hojas de trabajo, notas en papel elaboradas por los investigadores, cuestionarios de respuestas, copias de los cuadernos de los estudiantes, cintas de audio o video, fotos, etc. El archivo digital contiene el material registrado en soporte informático: notas o reportes hechos en procesadores de texto, respuestas registradas en soporte tecnológico, capturas de pantalla de computadores, archivos de audio, fotos digitales, archivos de video, etc.

Sea en soporte físico o en digital, conviene ubicar la información recogida en carpetas y archivos convenientemente rotulados con información sobre el lugar, la fecha, los investigadores que hicieron u organizaron el registro, los informantes, el evento registrado, el dispositivo de registro y el conjunto de materiales que acompañan el registro. Algunos investigadores prevén formatos unificados para el registro de la información con encabezados que contienen la identificación del registro; otros investigadores son más flexibles al respecto, pero a medida que archivan la información construyen un sistema de identificación con el que se sienten cómodos.

El archivo de información en bruto se acompaña de un mapa con especificaciones sobre la organización de la información. De esta forma los investigadores pueden acceder fácilmente a evidencias específicas en cualquier momento del proceso.

Reducción de la información

Las carpetas y los archivos con la información en bruto son el punto de partida para la obtención de datos investigativos. A partir de la información comienza un proceso que Miles y Huberman (1994) consideran muy relacionado con el análisis, pues los investigadores toman decisiones sobre el material regis-

trado influenciados por las inquietudes investigativas, el marco de referencia y aquello que identifican en los registros.

Incluso durante el periodo de registro de la información comienza el proceso de reducción. Después de la recopilación de evidencias, los investigadores seleccionan la información que consideran será empleada en el análisis y descartan información irrelevante o inútil (sin eliminarla completamente). Generan nuevas carpetas y archivos que contienen la información reducida separándola de la que no usarán. Este proceso se acompaña de la generación de bases de datos de los registros utilizables organizadas en archivos con información entrelazada. Algunas de estas bases de datos pueden tener información como la siguiente:

- El registro de los momentos de captura de información que se van a utilizar, con campos que indican la fecha, el escenario, el evento, la información registrada, los dispositivos empleados en el registro y el material recogido.
- El registro de los materiales impresos que se van a utilizar, con campos que indican la fecha, el escenario, el evento, el informante, la descripción del material, el lugar de ubicación física del material, etc.
- El registro de los fragmentos de los archivos digitales que se van a utilizar, con indicaciones sobre la fuente de archivo, el lapso de interés, la descripción de los eventos en tal lapso, los informantes, etc.
- El registro de capturas de pantalla de los computadores que se van a utilizar, con indicaciones sobre quienes trabajaban en el computador, qué hacían, la fecha de la toma de captura, etc.
- El registro de las notas de los investigadores, con campos como el nombre del investigador, la fecha de la observación, la descripción de la información, el lugar en donde se encuentra la nota, etc.

La reducción de la información puede conducir a un reagrupamiento de esta en nuevas bases de datos a partir de criterios establecidos por los investigadores. Por ejemplo, información organizada por fechas puede ser reorganizada por informantes. En la tabla 4.5 muestro un ejemplo de una base de datos en la que se organiza la información registrada en video al hacer la reducción, para el estudio llevado a cabo por Camargo (2010). Como se puede apreciar, una clase puede dar lugar a varios registros, porque se tratan asuntos diferentes.

En la tabla 4.6 muestro cómo organizó Guacaneme (2016) la información documental de uno de los dos escenarios que empleó en su investigación. La información se refiere a artículos de investigación en la revista *Enseñanza de las Ciencias* que aluden a la relación historia de las matemáticas-educación matemática. Las referencias están organizadas cronológicamente.

Tabla 4.5 Ejemplo de registro en una base de datos de información recopilada en video

Reg.	*Fecha*	*Día*	*Unid.*	*Asunto*	*Video*
41	Mar06	martes	2	Tres puntos no colineales determinan dos segmentos que se bisecan	D1/video3/0:31
42	Mar06	martes	2	Convexidad	D1/video4/1:04
43	Mar06	martes	2	Postulado de separación del plano	D1/video4/1:29
44	Mar06	martes	2	Teorema de separación del plano	D1/video5/0:00
45	Mar06	martes	2	Teorema interestancia mismo lado de la recta	D2/video2/6:38
[...]					
47	Mar08	jueves	2	Convexidad	D1/video1/1:34
[...]					
97	Abr20	viernes	4	Comprobación escrita número 4	D1/video 1/0:00
[...]					
113	Abr30	lunes	4	Acuerdos sobre el uso de información obtenida de las figuras	D1/video1/0:00
114	Abr30	lunes	4	Si un triángulo isósceles es obtuso, las alturas a los lados congruentes caen fuera del triángulo	D3/video3/4:03
115	Abr30	lunes	4	Criterio hipotenusa-cateto	D5/video2/1:06
[...]					

Fuente: tomada de Camargo (2010).

Depuración de la información

La información reducida no siempre constituye los datos del estudio. En muchos casos hay que depurarla, lo cual implica refinar y optimizar las evidencias para hacerlas aún más concretas y útiles para el análisis (Morse, 1998). El proceso puede conducir a descartar (sin eliminar del todo) información que inicialmente se consideró relevante pero que en una segunda mirada se aprecia que no lo será. Incluye realizar procedimientos como los siguientes:

- Editar los archivos de audio y video para eliminar segmentos que no se usarán, subtitularlos si es necesario, mezclar o agrupar las grabaciones de dispositivos que hayan captado la misma escena desde ángulos diferentes, etc.
- Editar las capturas de pantalla o los registros de sesión para eliminar segmentos que no se usarán, incluir cortinas con descripciones sobre la captura, tomar fotos de pantallazos, etc.

Tabla 4.6 Ejemplo de registro en una base de datos de referencias a analizar

	Referencias Enseñanza de las Ciencias *(relación historia-educación matemática)*
1	D'Amore, B. (1990). Motivaciones epistemológicas sobre las que se basan las elecciones didácticas llevadas a cabo en las actividades educativas en Italia, desde prescolar hasta el bienio superior. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 8*(1), 52-58.
2	González Urbaneja, P. M. (1991). Historia de la matemática: integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 9*(3), 281-290.
3	Núñez Espallargas, J. M. y Servat Susagne, J. (1993). Los algoritmos para el cálculo de la raíz cuadrada y sus antecedentes en textos escolares antiguos. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 11*(1), 69-78.
4	Cerizola, N., Guyot, V. y Giordano, M. (1993). Matemática e historia, una articulación para la enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 11*(N.º Extra 1), 329-330.
5	Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M. T. y López Esteban, C. (1999). Evolución histórica del concepto de *límite funcional* en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria (COU), 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 17*(3), 463-478.
6	González Astudillo, M. T. y Sierra Vázquez, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 22*(3), 389-408.
7	Richard, Ph. R., Meavilla Seguí, V. y Fortuny Aymemí, J. M. (2010). Textos clásicos y geometría dinámica, estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 28*(1), 95-112.
8	Sierra Vázquez, M. y López Esteban, C. (2012). La descentralización del currículo de matemáticas en la educación obligatoria en España durante la década 1990-2000. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 30*(2), 219-239.

Fuente: tomada de Guacaneme (2016).

- Editar los materiales impresos para recortar las partes que no se emplearán, sacar copias ampliadas o reducidas de los escritos o imágenes, fragmentar, juntar o entrecruzar información, agregar hojas con indicaciones de los autores, fechas, eventos, etc. (Morse, 1998).
- Editar las respuestas a cuestionarios o entrevistas para eliminar partes de la intervención que no aluden a la solicitud, complementar la información con detalles observados por el entrevistador, juntar información que pueda estar aislada, etc.
- Editar las notas de campo incluyendo eventos, detalles, recuentos interpretativos, preguntas, vínculos con otros registros o información adicional que recuerden los observadores. Conviene que esta edición se haga tan pronto

se sale del escenario para aprovechar la memoria fresca (Tobin, 2000). Las notas de campo se procesan en textos organizados que pueden ser leídos por cualquiera de los investigadores.

- Acompañar objetos, fotos, artefactos recogidos en el escenario con descripciones relacionadas con el momento, las condiciones, los autores de la producción, etc., y menciones a su potencial uso en los análisis (Tobin, 2000).
- Transcribir interacciones registradas en archivos de audio y video. Los investigadores optan por una de tres opciones, con respecto a la transcripción de los archivos: hacerla de manera simultánea con la depuración de la información, hacerla más adelante o no hacerla. Sin embargo, expresiones textuales de aquello que dicen los informantes, acompañadas de registros visuales, son comunes en los informes investigativos porque ilustran los análisis y los resultados.

Desde mi punto de vista, llevar a cabo la transcripción de grabaciones de la información que se analizará es un ejercicio útil para los investigadores pues les permite un conocimiento profundo del suceso capturado por las cámaras de audio y video, esencial para el análisis. Escuchar repetidamente un audio o mirar repetidamente un video para transcribir una interacción permite captar detalles que pueden no haberse visto, incluso estando presentes al momento del registro.

Una buena transcripción permite a los investigadores tener un registro escrito fiel a la interacción. Es importante, en el proceso de edición y depuración, no afectar la esencia de la información, aunque es legítimo remover los "mmm" y las pausas, a menos que estas expresiones y el ritmo de la comunicación sean importantes (Morse, 1998).

Las transcripciones se llevan a cabo generalmente en formatos de tres columnas en los que se incluye en cada fila: a) la numeración de la intervención, b) el nombre de la persona que interviene (en cada fila se incluye solo lo que dice un participante) y c) lo que dice, con diferente nivel de detalle según los intereses investigativos. Además de ello, la transcripción incluye información sobre la ubicación del registro en la cinta o el archivo de audio o video, lo que las personas hacen o gesticulan (usualmente encerrada en paréntesis y escrito en la tercera columna, en la fila correspondiente) e información adicional que contribuye a dar significado a la interacción y que proviene de interpretaciones que hace quien realiza la transcripción, a sucesos, gestos, eventos del contexto, etc. (usualmente encerrada en corchetes y también incluida en la tercera columna de la fila correspondiente). En caso de ser necesario se incluyen fotos o imágenes captadas por una cámara de video o de la pantalla de un computador, si se considera que pueden contribuir a entender la interacción.

En una transcripción, las pausas se diferencian en el lapso mediante puntos suspensivos: (...) para las pausas cortas y (...) (...) para las pausas largas. Si se eliminan partes de la interacción, por considerar que no son relevantes, quien hace la transcripción deja una indicación sobre la cantidad de intervenciones que se eliminaron, para no tergiversar los hechos uniendo interacciones que no sucedieron consecutivamente. También hay que definir un orden o un mecanismo para transcribir intervenciones dichas simultáneamente. En la transcripción hay que prestar mucha atención a la puntuación, verificando varias veces en el archivo digital que las comas, los punto y coma, los puntos, los puntos suspensivos y las tildes están usados apropiadamente, para que la lectura de la transcripción permita una reproducción lo más fiel a la intervención.

En la transcripción que se usa en el análisis se pueden mantener los nombres originales de los interlocutores. Pero los investigadores deben asegurar que las citas textuales que se emplearán en los reportes investigativos no permiten reconocer quién es el hablante específico, a menos que este haya dado su consentimiento informado de manera explícita.

Ejemplo 4.2

En mi investigación (Camargo, 2010), con el objetivo de depurar la información, adelanté un proceso de caracterización de los registros de las transcripciones de las clases que seleccioné en el proceso de reducción. La depuración se hizo con base en la perspectiva que iba alcanzando sobre el aprendizaje como una práctica social y sobre la actividad demostrativa. Para ello partí de una serie de preguntas con las cuales interrogué las transcripciones y produje una descripción del contenido de los registros. Unas preguntas se referían al conocimiento de la comunidad acerca de la actividad demostrativa, otras aludían al apoyo brindado por la profesora a la práctica que estaban desarrollando los estudiantes y otras se dirigían a identificar el papel de la geometría dinámica en dicha práctica. Algunos trozos de transcripciones de las clases quedaron excluidos porque no tenían que ver con la actividad demostrativa, porque no tenían información suficientemente rica o clara sobre la actividad demostrativa o porque había otros registros con situaciones muy similares. Este ejercicio me permitió depurar el conjunto de transcripciones a analizar, que pasó de 153 a 115.

Ejemplo 4.3

El proceso de depuración realizado por Vargas (2012) consistió en: enumerar consecutivamente (de 1 a 32) cada transcripción de los audios de las entrevistas estructurada y semiestructurada hechas a los dos profesores de precálculo que participaron en su investigación, así como la transcripción de la interacción

sostenida en clase por cada profesor con sus estudiantes (cuando enseñaba la función exponencial y la función logarítmica); enriquecer cada transcripción con anotaciones de la investigadora que estuvo presente en las clases (y llevó un cuaderno de observaciones) y con fotos de lo que el profesor o los estudiantes escribían o representaban en el tablero; alimentar un programa de procesamiento de datos (cada material enumerado se convirtió en un documento independiente); hacer una descripción de la fuente de cada documento tal como se presenta en la tabla 4.7.

Tabla 4.7 Información sobre los documentos que fueron depurados por Vargas (2012)

# Documento	*Contenido de cada documento*
D1 a D5	Clases del profesor caso 1 sobre la función exponencial
D6 a D10	Clases del profesor caso 1 sobre la función logarítmica
D11 a D15	Clases del profesor caso 2 sobre la función exponencial
D16 a D20	Entrevista semiestructurada caso 1
D21 a D25	Clases del profesor caso 2 sobre la función logarítmica
D26 a D28	Entrevista semiestructurada caso 2
D31	Entrevista estructurada caso 1
D32	Entrevista estructurada caso 2

Fuente: tomada de Vargas (2012)

A partir de lecturas sucesivas de los documentos, Vargas (2012) decidió dejar de lado aquellos documentos relacionados con las clases sobre la función logarítmica, pues no contenían información relevante sobre la práctica del profesor acerca de los mecanismos mentales de construcción de la función exponencial. Así, los documentos que sirvieron de base para la construcción de los datos solo fueron veintidós.

Ejemplo 4.4

Rojas (2012) llevó a cabo un proceso de depuración que comenzó con la selección de algunos grupos de tres estudiantes, entre ochenta grupos aproximadamente, cuyas respuestas tenían interés investigativo según la observación que hicieron el profesor y el investigador, mientras los estudiantes se ponían de acuerdo sobre estas. Luego, el investigador escogió dieciséis grupos para llevar a cabo entrevistas. La elección se hizo de acuerdo con unos criterios presentados en el ejemplo 3.9. Después de las entrevistas, Rojas seleccionó únicamente tres grupos para hacer un análisis en profundidad de los sentidos otorgados a las expresiones, el reconocimiento de la equivalencia y el traspaso o no de sentido de una expresión a la otra. La información usada incluyó las

grabaciones de las clases en donde los tres grupos expusieron, las grabaciones de audio de las entrevistas, las respuestas a las preguntas de las tareas resueltas por ellos y las notas del investigador.

Ejemplo 4.5

Valoyes (2014) transcribió los videos de las clases, realizados tanto con una cámara fija como con cámaras que estaban incorporadas en gafas que usaron cuatro estudiantes en cada uno de los cursos de grado 8.º de las tres instituciones en donde hizo el registro de información. También transcribió las entrevistas hechas a los profesores y a los estudiantes, así como una narración hecha por los profesores al final de cada clase. Después de eliminar información con contenido irrelevante para el estudio, organizó la información depurada en una tabla (véase tabla 4.8).

Tabla 4.8 Tabla con información sobre la primera etapa de depuración llevada a cabo por Valoyes (2014)

Fuentes de información	*Profesora Diana*	*Profesor Juan*	*Profesor Pedro*	*Total*
Entrevistas profesores	1	1	1	3
Entrevistas estudiantes	4	5	4	13
Narraciones profesores	3	3	2	8
Materiales curriculares	5	6	4	15
Plan de las lecciones	2	2	0	4
Notas de campo	8	8	8	24
Videos de las clases	8	8	8	24
Videos de los estudiantes	21	27	18	66

Fuente: tomada de Valoyes (2014).

Ejemplo 4.6

En la investigación de Vergel (2014) el proceso de depuración de información consistió en seleccionar en las transcripciones de todas las entrevistas realizadas en trece sesiones de clase (enriquecidas con las hojas de trabajo de los estudiantes y las notas de campo del investigador) algunas partes de estas, a partir de un criterio que el investigador denominó "foco teórico". Es decir, tuvo en cuenta la pregunta, el objetivo de investigación y los principios y conceptos de la teoría cultural de la objetivación. Estos elementos le permitieron ir marcando en los diálogos sentencias, frases y expresiones que mostraban elementos asociados al pensamiento algebraico. La selección de trozos estuvo controlada por un proceso de "saturación teórica" (Glaser y Strauss, 1967; citados en Vergel, 2014), según el cual agregar nuevos trozos no representaría

tener información adicional. Esta marcación permitió obtener cien extractos de diálogo, segmentados temáticamente, en donde Vergel podía identificar instancias del pensamiento algebraico.

Fragmentación e integración de información

A partir de sucesivas revisiones de la información depurada se desarrolla un proceso de fragmentación e integración del material, movilizado por las inquietudes investigativas y la aproximación conceptual. Este proceso conduce a establecer los datos de la investigación, que denomino "unidades de análisis".

Un *dato* o *unidad de análisis* es un segmento textual claramente discernible (Delgado y Gutiérrez, 1999), es decir, un fragmento de la información depurada o constituido por la integración de porciones de esta que tiene sentido completo para los investigadores y puede someterse a un análisis. Un dato puede interpretarse a la luz de un marco de referencia para producir descripciones, explicaciones, inferencias, constructos teóricos, pruebas de hipótesis, esquemas de relaciones, tipologías, etc.

Dependiendo de las inquietudes investigativas, los datos pueden ser muy cercanos a la información depurada o estar alejados de ella. Algunos ejemplos de datos investigativos usados en educación matemática son:

- Transcripciones completas (pero depuradas) de interacciones en las que se reporta un proceso, se discute un asunto, se resuelve un problema, etc.
- Relatos o narraciones completos (pero depurados), producidos por informantes o investigadores.
- Protocolos completos (pero depurados) del proceso seguido por uno o varios informantes para el desarrollo de una tarea durante un periodo de tiempo (Gutiérrez, 1991).
- Momentos específicos del desarrollo de una tarea.
- Episodios o conjuntos de sucesos relacionados en un todo.
- Escenas o sucesos específicos.
- Fragmentos de transcripciones.
- Unidades textuales reconstruidas integrando oraciones que tratan sobre un asunto en particular.
- Párrafos de escritos o transcripciones.
- Respuestas a preguntas.
- Enunciados de situaciones, problemas, tareas.
- Oraciones.
- Expresiones.

- Secuencias de gestos.
- Gestos.

¿Qué nivel de detalle deben tener los datos? Esta respuesta depende del estudio. Algunos análisis lingüísticos requieren que los datos a analizar sean interacciones, línea a línea, e incluso palabra a palabra. Pero usualmente los datos son oraciones, párrafos o narraciones. Lo importante es que el investigador tenga claro cuál es su unidad de análisis en la investigación. Por ejemplo, en una investigación que estudió patrones de participación en clases de matemáticas impartidas a estudiantes de grado 8.º en dieciocho países, Clarke, Mesiti, O'Keefe, Xu, Jablonka, Mok y Shimiuzu (2007) definieron como dato un "evento de la lección"; es decir, cada dato era una situación acaecida en clase relevante y útil para el estudio transcultural, con características visuales y de participación social y suficientemente común para ser identificada en las clases de cada uno de los países estudiados, aunque tuviera variaciones locales producto del contexto.

Ejemplo 4.7

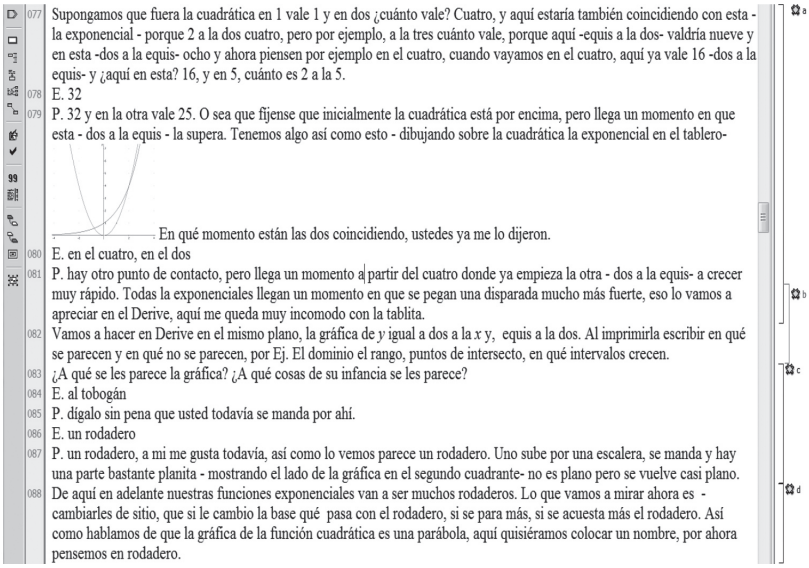
En mi tesis (Camargo, 2010), a partir de un ejercicio de codificación inicial de la información (ver capítulo 5), pude identificar e integrar en episodios quince asuntos que eran representativos de la práctica matemática que se llevó a cabo en el curso de Geometría Plana porque: entre todos cubrían la totalidad de las estrategias de clase empleadas, incluían extractos de transcripciones etiquetados con prácticamente todos los códigos de un listado inicial, abarcaban clases impartidas a lo largo del curso y tenían suficientes interacciones para dar cuenta de la participación de los estudiantes.

Cada episodio comenzaba con una exploración hecha en un programa de geometría dinámica e incluía el estudio de definiciones, el análisis de conjeturas formuladas por los estudiantes, la socialización de argumentos para demostrar enunciados y la producción de alguna demostración, combinando las diversas estrategias de gestión de la clase. Los datos de la investigación fueron el conjunto de extractos de interacción codificados en esos quince episodios que se constituyeron en unidades de significación relevantes (Delgado y Gutiérrez, 1999).

Ejemplo 4.8

De los veintidós documentos que tenían la información depurada, Vargas (2012) extrajo segmentos de transcripción que daban cuenta de cómo el profesor propiciaba la puesta en juego de algún mecanismo mental de construcción

de la descomposición genética de la función exponencial (interiorización, encapsulación o tematización). Para hacerlo, identificó en los documentos correspondientes una tarea (o parte de ella) en donde el profesor, a través de sus acciones, impulsaba la interacción discursiva sobre acciones, procesos u objetos. Luego identificó la introducción de un elemento matemático específico del concepto de función exponencial y los registros de representación usados. En las entrevistas segmentó los documentos según si las respuestas del profesor aludían a un cambio de intenciones en su gestión, un cambio de tareas o un aspecto puntual de la clase que llamaba la atención del profesor. La identificación de los segmentos de transcripciones que se constituyeron en los datos de la investigación involucró sucesivos ajustes y refinamientos. En la figura 4.1 presento un fragmento de diálogo transcrito en un documento en el que Vargas identificó cuatro segmentos para analizar.



077 Supongamos que fuera la cuadrática en 1 vale 1 y en dos ¿cuánto vale? Cuatro, y aquí estaría también coincidiendo con esta - la exponencial - porque 2 a la dos cuatro, pero por ejemplo, a la tres cuánto vale, porque aquí -equis a la dos- valdría nueve y en esta -dos a la equis- ocho y ahora piensen por ejemplo en el cuatro, cuando vayamos en el cuatro, aquí ya vale 16 -dos a la equis- y ¿aquí en esta? 16, y en 5, cuánto es 2 a la 5.

078 E. 32

079 P. 32 y en la otra vale 25. O sea que fíjense que inicialmente la cuadrática está por encima, pero llega un momento en que esta - dos a la equis - la supera. Tenemos algo así como esto - dibujando sobre la cuadrática la exponencial en el tablero- En qué momento están las dos coincidiendo, ustedes ya me lo dijeron.

080 E. en el cuatro, en el dos

081 P. hay otro punto de contacto, pero llega un momento a partir del cuatro donde ya empieza la otra - dos a la equis- a crecer muy rápido. Todas la exponenciales llegan un momento en que se pegan una disparada mucho más fuerte, eso lo vamos a apreciar en el Derive, aquí me queda muy incomodo con la tablita.

082 Vamos a hacer en Derive en el mismo plano, la gráfica de *y* igual a dos a la *x* y, equis a la dos. Al imprimirla escribir en qué se parecen y en qué no se parecen, por Ej. El dominio el rango, puntos de intersecto, en qué intervalos crecen.

083 ¿A qué se les parece la gráfica? ¿A qué cosas de su infancia se les parece?

084 E. al tobogán

085 P. dígalo sin pena que usted todavía se manda por ahí.

086 E. un rodadero

087 P. un rodadero, a mi me gusta todavía, así como lo vemos parece un rodadero. Uno sube por una escalera, se manda y hay una parte bastante planita - mostrando el lado de la gráfica en el segundo cuadrante- no es plano pero se vuelve casi plano.

088 De aquí en adelante nuestras funciones exponenciales van a ser muchos rodaderos. Lo que vamos a mirar ahora es - cambiarles de sitio, que si le cambio la base qué pasa con el rodadero, si se para más, si se acuesta más el rodadero. Así como hablamos de que la gráfica de la función cuadrática es una parábola, aquí quisiéramos colocar un nombre, por ahora pensemos en rodadero.

a b c d

Figura 4.1 Segmentos identificados por Vargas (2012) como datos de investigación

Fuente: Vargas (2012).

En el segmento *a* (dato 1), el profesor propicia una comparación entre una función cuadrática particular y una función exponencial particular a través de un examen punto a punto utilizando cálculos numéricos y registro gráfico. A ese segmento se le asignan los elementos matemáticos globales de una

función cuadrática y una función exponencial; se identifican los registros de representación simbólico y gráfico usados por el profesor para propiciar esas comparaciones.

En el segmento *b* (dato 2), el profesor realiza observaciones sobre el elemento global "función exponencial" haciendo uso de la representación gráfica, establece un comportamiento del proceso función exponencial y guía la observación sobre el crecimiento rápido de este tipo de funciones; finaliza exponiendo una tarea en donde se examinarán elementos puntuales de la función exponencial a partir de la función particular dos a la equis.

En el segmento *c* (dato 3), el profesor centra la atención en la representación gráfica de una función exponencial particular con el fin de establecer una analogía entre la forma de cada curva de la función exponencial y la forma de un tobogán.

En el segmento *d* (dato 4), el profesor hace uso de la representación gráfica; no establece una observación para esa única función que tenía como ejemplo, sino que se refiere a la representación gráfica para todas las funciones exponenciales.

Ejemplo 4.9

Los datos de la investigación de Rojas (2012) son las respuestas individuales y grupales escritas por los dieciséis estudiantes que fueron entrevistados en grupos de tres, así como fragmentos de las respuestas a las entrevistas en donde se evidencian: sentidos dados a las representaciones matemáticas, identificación o no de la equivalencia, traspaso o no de sentido de una representación a la otra y elementos del discurso que permiten explicar las dificultades para articular sentidos de las representaciones.

Ejemplo 4.10

Los datos de la investigación de Valoyes (2014) son "pequeñas piezas de transcripción" (palabras, frases, oraciones o párrafos) en donde se evidencian potenciales asuntos relacionados con los objetivos investigativos (*i. e.*, rastros de habilidades de los estudiantes para aprender álgebra, sus comportamientos y actitudes en la clase, discursos del profesor acerca de la enseñanza y aprendizaje del álgebra, características del contenido algebraico presentado por los profesores, etc.). Un ejemplo de dato investigativo es el siguiente párrafo:

> Desde que yo llegué acá siempre he enseñado en grado octavo y algunas veces en séptimo grado. Y ellos son niños que, yo pienso, no se preocupan acerca del estudio. Yo siento que ellos no imaginan muy bien que para obtener un buen futuro ellos necesitan estudiar (entrevista, agosto 20) (Valoyes, 2014, traducción personal).

Ejemplo 4.11

En la investigación de Vergel (2014) los datos son extractos de diálogos de las transcripciones de las entrevistas que se segmentaron temáticamente y que contenían instancias del pensamiento algebraico factual, acompañados de las producciones de las hojas de trabajo de los estudiantes. En la tabla 4.9 presento un dato de la investigación.

Tabla 4.9 Ejemplo de dato en la tesis de Vergel (2014)

Participante	*Intervención*
Profesora Johanna:	Pero, mira, si tú pones 34 círculos abajo y 33 arriba, ¿cuántos círculos tiene Esneider?
Estudiantes en coro:	¡67!
Profesora Johanna:	Listo, entonces (...) es lo que yo te quiero decir, pero es que (...) mira que estamos averiguando la figura que tiene 81 círculos
Esneider:	Por eso, dividiendo el (...) 67
Profesora Johanna:	¿Qué es lo que divides? ¿67? ¿Lo divides? ¿Y cuánto te da?
Esneider:	(...) Mmm, no
Profesora Johanna:	¿Quién le explica a Esneider? Luis ya explicó. Entonces ahora quiero que explique otro (...). ¡Tú!, ¿sí? Explícale a Esneider. Mira la solución que tienen ellos
Estudiante:	Usted tiene que restarle 3 al 81, el resultado lo tiene que dividir por 2
Profesora Johanna:	Pero explícale a Esneider, ¿por qué tienes que restarle 3?
Estudiante:	*Porque la secuencia lo dice, porque, por ejemplo, aquí (...) 2, y le sumamos 2. Esta es la figura 2, entonces se colocan dos círculos más, más 2, me daría 4 y al 4 le resto 1 y le pongo 3 arriba*

* La última oración, en cursivas, es la instancia de pensamiento algebraico que identificó el investigador y la que lo llevó a seleccionar el fragmento como dato.

Fuente: tomada de Vergel (2014).

Ejemplo 4.12

En la investigación de Obando (2015) los datos correspondientes al análisis del sistema de prácticas relacionado con razón, proporción y proporcionalidad, en dos cursos de primaria (3.º y 4.º) de una institución pública, son las clases de matemáticas en las que se trabajaron los temas. De acuerdo con su interés de caracterizar el sistema de prácticas, cada clase en su totalidad es analizada como un dato, con el objetivo de examinar de manera sistémica las diferentes actividades y formas de mediación, los agentes involucrados, los instrumentos culturales que se ponen en juego y los vínculos entre las acciones y el contexto institucional y social.

Ejemplo 4.13

En la investigación de Guacaneme (2016) los datos correspondientes a uno de los escenarios de su investigación son fragmentos de los documentos en donde el investigador encuentra respuestas a las preguntas: ¿qué?, ¿por qué?, ¿para qué?, ¿cómo?, referidas a la relación historia de la matemática y conocimiento profesional del profesor. En la tabla 4.10 aparecen cuatro datos relacionados con la categoría *¿para qué?*

Tabla 4.10 Ejemplos de datos investigativos de la tesis de Guacaneme (2016)

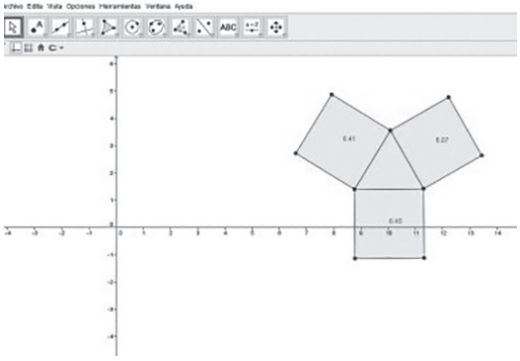
Dato	*Documento*	*Respuesta*
1	Barbin (1996)	Comprender mejor los errores de los estudiantes
2	Bkouche (1997)	Constituir un discurso epistemológico que apoye la reflexión epistemológica
3	Bkouche (1997)	Responder a problemas de orden epistemológico que surgen en el quehacer docente
4	Clark (2012)	Poner de relieve el conocimiento previo de los futuros profesores (y, a menudo, vacíos o comprensiones incompletas) e impulsar consideraciones sobre las dificultades de sus futuros alumnos

Fuente: tomada de Guacaneme (2016).

Ejemplo 4.14

En la investigación de Durango (2017) los datos de la investigación son setenta y cinco transcripciones en las que se fragmentan nueve segmentos locutivos compuestos por preguntas con las cuales se solicitan argumentos y por respuestas en las que se ofrecen argumentos. Él escogió las transcripciones que correspondían a diálogos sobre la enseñanza y el aprendizaje del teorema de Pitágoras, la construcción geométrica de un paralelogramo y el trazo de diagonales de un hexágono. En los diálogos interactúan los participantes con sus compañeros, el profesor o sus estudiantes. Cada transcripción incluye el turno de participación, el hablante y lo que dice. En la tabla 4.11 se observa un dato de la investigación. Carlos, estudiante (futuro profesor) del seminario y participante informante, conversa con una compañera sobre una exploración que ella sugerirá en una de las tareas que propondrá a sus estudiantes de grado 9.º, para que ellos descubran la relación pitagórica. Por decisión de Durango (2017), dos intervenciones de Carlos se dividen en líneas de transcripción diferentes.

Tabla 4.11 Ejemplo de dato en la tesis de Durango (2017)

		Transcripción 7: Colega 1, Carlos e investigador (video 1)
31	Colega 1:	¡Verificar para triángulos que no son rectángulos!
32	Carlos:	Es decir, ¿trazo un triángulo cualquiera? (Realiza la siguiente construcción en GeoGebra e incluye las medidas de las áreas de los cuadrados) 
33	Carlos:	¿Qué relación puedo sacar de aquí? (...) ¿Empleando la calculadora?
34	Carlos:	6.51 - 6.45 es igual a 0.06. No da igual, no corresponde, es distinto. 1.63 + 6.45 claramente no va a dar 6.51. No observo ninguna relación. Puede que haya, pero no observo ninguna
35	Investigador:	¿Habría qué (...)?
36	Carlos:	Habría que entrar a mover (...). Podríamos entrar a mover (...). No sé (...) si subo más (...)
37	Colega 1:	¡Ahí sí puedes concluir algo!
38	Carlos:	Digamos que el ángulo del triángulo no es recto, mientras lo voy tornando recto, los dos catetos se van acercando a la suma de la hipotenusa
39	Carlos:	Quiero ver algo [Él experimenta con varios triángulos]
40	Carlos:	Siempre el área de los lados de cualquier triángulo de los dos catetos es mayor al del lado mayor. Pensaríamos. ¡No lo tengo a ciencia cierta!

Fuente: tomada de Durango (2017)

5

Análisis de la información y obtención de resultados

En este capítulo me ocupo del análisis de los datos y la obtención de resultados investigativos. Sin pretender ser exhaustiva, resumo y ejemplifico algunos procedimientos útiles para analizar los datos obtenidos en el proceso de recopilación empírica de información. También señalo algunas formas para sintetizar el ejercicio analítico, disponiendo visualmente la información producida en el análisis, de forma tal que se exhiban los principales hallazgos del estudio.

La intención de un análisis es adentrarse en la complejidad de los datos de la mano de un referente teórico para: aclarar información que inicialmente puede parecer confusa, desentrañar componentes o constructos, identificar unidades de significado, descubrir patrones, encontrar indicios de pensamientos, percepciones, concepciones o actuaciones, establecer conexiones, fijar variables intervinientes, etc. Los investigadores no sin esfuerzo llevan a cabo un ejercicio fundamentado, creativo, inventivo e interpretativo de procesamiento de los datos para construir un sentido sobre aquello que observan. Como indica Morse (1998), el proceso toma tiempo y requiere determinación, persistencia y perseverancia. Solo gracias a la búsqueda constante y diligente, superando frustraciones y desánimos, las piezas del rompecabezas empiezan a cuadrar.

El ejercicio analítico hace que emerja un cierto orden y permite hacer una reconstrucción o síntesis informada gracias al proceso llevado a cabo. El producto del ejercicio es una posible (no única) "historia" coherente del fenómeno observado, que propone descripciones, ejemplos, rutas, tipos, estructuras conceptuales, relaciones, etc., situadas en el escenario en el que se capturaron los datos. La historia puede ser sometida a escrutinio público

una vez es comunicada (Denzin y Lincoln, 1998; Morse, 1998; Confrey y Lanchance, 2000; Simon, 2019).

Kelly y Lesh (2000) reconocen relaciones entre los procedimientos usados para el análisis de datos en un campo de investigación y el refinamiento de los problemas e inquietudes que caracterizan al campo. Por un lado, los procedimientos de análisis escogidos, adaptados o creados determinan la naturaleza y profundidad de las asociaciones que los investigadores establecen entre los datos y los recursos interpretativos que les aporta la fundamentación teórica para poder responder las inquietudes investigativas (Mestre, 2000). Por otro lado, los procedimientos de análisis pueden llevar a variar las preguntas de investigación abriendo paso a nuevas inquietudes investigativas.

Dado que este libro tiene la intención de apoyar a investigadores noveles, a continuación me detengo en algunos aspectos del proceso analítico, procurando ser esquemática. Además de referirme al momento en el que comienza el análisis, los alcances de este y los textos que se producen durante el análisis, describo y ejemplifico algunos procedimientos analíticos. También menciono la herramienta heurística de triangulación y algunas formas de presentar los análisis realizados.

Inicio del proceso de análisis

Diversos investigadores sitúan el inicio de los análisis cualitativos incluso antes de comenzar el registro de información. Estos continúan durante el registro y terminan después de haber salido del escenario (Miles y Huberman, 1994; Morse, 1998; Confrey y Lanchance, 2000). En la figura 5.1 propongo un esquema ilustrativo sobre los momentos del análisis, similar al sugerido por Miles y Huberman (1994).

En sentido estricto el análisis comienza antes del registro de la información. Las decisiones sobre la estrategia a seguir, la selección del escenario, la elección de los participantes, la información que se registrará y los momentos de registro están condicionadas por las primeras comprensiones que tienen los investigadores sobre el fenómeno. Es un momento del análisis que se hace, generalmente, de manera no muy consciente (Miles y Huberman, 1994).

En el periodo de registro de la información también se llevan a cabo análisis. Estos suceden cuando se toman decisiones sobre qué registrar, a quién, cuándo y haciendo qué. Durante el registro los investigadores suelen reunirse periódicamente para evaluar cómo suceden los acontecimientos. Deciden cómo resolver situaciones fortuitas que pueden afectar el éxito del estudio, hacen ajustes a la estrategia o al diseño mismo, destacan información que cobra

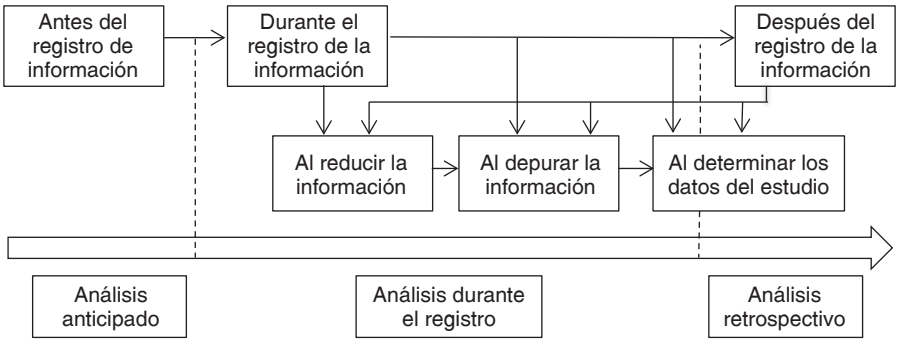


Figura 5.1 Momentos de análisis en un enfoque cualitativo

Fuente: elaboración propia inspirada en Miles y Huberman (1994).

importancia, etc. (Confrey y Lanchance, 2000). El hecho de que el registro de información se acompañe de análisis hace que estos guíen la captura de nueva información a medida que se hacen confrontaciones entre la fundamentación teórica, los intereses del estudio, lo que se ha registrado, lo que falta por registrar y lo que no es necesario. Así, los investigadores mantienen cierto control sobre el registro de la información, que, en alguna medida, es analítico (Morse, 1998; Teppo, 2015; Vollstedt, 2015).

Después del registro de la información se hacen análisis en los momentos de reducción y depuración de la información, así como en su fragmentación para constituir los datos del estudio. Estos procesos pueden comenzar durante el registro de información. Son decisiones analíticas movilizadas por las inquietudes del estudio, el referente teórico con el que se está observando el escenario y la información que se está registrando. La reducción y depuración de información enfocan la mirada, refinan aquello que se quiere estudiar en profundidad y la organizan.

Finalmente se realiza el análisis retrospectivo. Los investigadores se concentran con mayor intensidad en la información para, si es el caso, organizarla, reducirla, depurarla, construir o reconstruir los datos investigativos, interpretarlos, hallar patrones, establecer relaciones, hacer inferencias, etc. No se descarta que el análisis conduzca a nuevos procesos de reducción y depuración de información al ir enfocando la mirada en los hallazgos del estudio (Confrey y Lanchance, 2000). Por ejemplo, en las investigaciones de Camargo (2010), Vergel (2014), Valoyes (2014) y Obando (2015) los datos

investigativos se construyeron luego de un primer ejercicio de codificación de la información registrada y transcrita.

Alcances del análisis

El alcance del análisis de los datos depende de la aproximación investigativa, las inquietudes del estudio, el tipo de herramienta analítica y los resultados esperados. Generalmente, los análisis que se llevan a cabo en una investigación en educación matemática avanzan progresivamente por las siguientes acciones, hasta donde se necesite o se desee:

- *Describir* el fenómeno a partir de un marco de referencia (implícito o explícito) descomponiendo el todo en unidades más simples con el objeto de: detallar aspectos del fenómeno; representar o modelar alguna situación o asunto; identificar nueva información, condiciones, acciones, interacciones, eventos, prácticas; exhibir y aclarar situaciones específicas en donde el fenómeno ocurre; verificar o ejemplificar situaciones, tipos, fases, etc. En síntesis, se busca ampliar el estado de conocimiento del fenómeno para lograr dar una idea general de sus partes o propiedades. Si el marco de referencia está implícito, las preconcepciones, prejuicios, valores, teorías y hábitos retóricos de los investigadores no se exhiben, aunque siempre están presentes.
- *Interpretar* los datos para develar significados inmersos en gestos, expresiones, escritos, sucesos o procesos y comprender acciones, interacciones y prácticas llevadas a cabo por los participantes en el escenario investigativo. Un todo complejo se descompone en unidades más simples para concebirlo, ordenarlo y entenderlo de manera personal de acuerdo con un marco de referencia emergente o preestablecido, mediante la identificación de patrones. Miles y Huberman (1994) señalan que las comprensiones pueden dar sentido a una serie de eventos, identificar condiciones externas o internas que influyen en un fenómeno, o responder a intereses particulares del estudio. En los tres casos la interpretación liga la explicación con la información proporcionada por los participantes específicos del estudio.
- *Inferir* relaciones entre los datos para sacar conclusiones estableciendo equivalencias, complementariedades, dependencias, asociaciones, correlaciones, analogías, etc. Estas relaciones conducen a sugerir clasificaciones, proponer tipologías, establecer fases, insinuar relaciones causales, presentar constructos, argumentar afirmaciones y justificar acciones o creencias. En las estrategias clínicas ligadas a estudios exploratorios las inferencias hacen que emerjan conceptos, proposiciones e incluso teorías plausibles, fundamenta-

> das en los datos (Strauss y Corbin, 1998; Teppo, 2015); estas relacionan las proposiciones en forma de listas jerárquicamente ordenadas o en redes de enunciados. En los estudios confirmatorios el análisis conduce a completar vacíos de la teoría, aclarar ambigüedades, complementar los modelos, proponer descriptores, ilustrar ideas con ejemplos, identificar excepciones, ampliar tipologías, hallar pruebas de existencia, hacer pruebas de hipótesis, etc. Para evitar que las inferencias sean especulativas o se impongan a los datos más que derivarse de ellos, Miles y Huberman (1994) proponen considerar tres fuentes para hacerlas: a) de la teoría que emerge o se conforma, b) de los datos disponibles, explicando las excepciones, y c) del permanente diálogo entre las ideas que configuran los investigadores y los datos del estudio.

La diferencia entre describir, interpretar e inferir es difusa. Generalmente los investigadores avanzan en el análisis, según las pretensiones de la investigación, para condensar cada vez mayor cantidad de datos, lograr una comprensión cada vez más profunda del fenómeno y poder obtener resultados interesantes, novedosos y útiles. Miles y Huberman (1994) sugieren pensar en las tres acciones como en una progresión en ascenso que parte de especificar una situación indicando qué pasa (descripción), construir una "cartografía" del fenómeno mediante elementos claves de la situación e indicando cómo pasa (interpretación) y elaborar modelos teóricos plausibles y situados que indiquen por qué pasa y qué influencias hay entre los elementos constitutivos (inferencia) en el escenario local. De acuerdo con Erickson (1986; citado en Miles y Huberman, 1994), la investigación busca hacer familiar lo extraño y extraño lo familiar.

El ejercicio analítico conlleva procesos iterativos de revisión y descripción de los datos, organización e interpretación de los datos y establecimiento de relaciones entre conjuntos de datos; esto permite adentrarse en capas cada vez más profundas de significados. Estos procesos se acompañan de chequeos de la información en bruto, reducida o depurada, en busca de detalles que puedan contribuir a la interpretación y también conllevan modificaciones en la organización o en las relaciones que se van previendo, a medida que el fenómeno se aclara (Tobin, 2000; Vollstedt, 2015).

En la investigación en ciencias humanas las inferencias obtenidas no necesariamente tienen la rigidez ni la generalidad del razonamiento deductivo. Son relaciones causales, múltiples, contingentes, ubicadas temporalmente, situadas localmente, flexibles, provisionales y de naturaleza amplia, que muchas veces sobresimplifican un fenómeno complejo (Stake, 1998). Sin embargo, son importantes porque contribuyen a entender fenómenos y derivar conocimiento, no importa qué tan caóticos parezcan ser los fenómenos. Según

mi interpretación, Miles y Huberman (1994) diferencian el tipo de relaciones entre un dato (o conjunto de datos) A y un dato (o conjunto de datos) B de acuerdo con los siguientes patrones:

- *Asociación.* A precede o antecede a B mucho más que otros datos.
- *Conjunción.* A es encontrado cuando se encuentra B en muchos registros.
- *Especificidad.* A y B suelen relacionarse de una forma específica.
- *Temporalidad.* Generalmente A precede a B y no al revés.
- *Gradiente.* Si hay más A probablemente habrá más B.
- *Influencia.* Parece haber una razón que liga a A con B.
- *Coherencia.* La relación A-B se ajusta a lo que previamente se conoce de A y de B.
- *Experimental.* Al modificarse A también se modifica B.
- *Analogía.* La asociación entre A y B se parece a la relación conocida entre los datos C y D.

Los patrones identificados conducen eventualmente al descubrimiento de procesos en forma de relaciones recíprocas, líneas de acción, patrones de interacción o de cambio, relaciones entre cambios y condiciones, consecuencias de acciones, etc. Según Stake (1998), cuando los investigadores infieren estados o fases, surge una conceptualización de lo que puede ocurrir bajo ciertas condiciones y en ese sentido se construye una herramienta de predicción para la situación específica. Es decir, los investigadores pueden afirmar que "dondequiera que se obtengan condiciones similares entonces consecuencias aproximadamente similares se obtendrán". Esta forma "proposicional" señala que la inferencia obtenida es situada.

Por ejemplo, en un estudio hecho por Vollstedt (2015) el investigador desarrolló una teoría situada sobre los significados personales de estudiantes de 14 y 15 años acerca de las matemáticas y el aprendizaje de estas. Fundamentó la teoría en el análisis empírico de las respuestas de una entrevista en la que asoció y conjugó varias categorías para definir qué rasgos personales y qué experiencias previas producían ciertos significados personales y qué influencia podían tener tales significados en el logro académico, en el disfrute por hacer matemáticas y en las percepciones personales de competencia y éxito.

Procedimientos para hacer el análisis

Los procedimientos para llevar a cabo los análisis son de dos tipos: deductivos o inductivos. A continuación, describo cada tipo.

Los *procedimientos deductivos* llevan a los investigadores de los referentes teóricos a los datos para describirlos, interpretarlos o construir inferencias. Se valen de constructos teóricos cuyo grado de elaboración o de operatividad proporciona categorías relacionadas con modelos, tipologías, fases, momentos, que pueden ser empleados por los investigadores para intervenir los datos. El análisis permite:

- Obtener indicadores o descriptores de categorías preexistentes, ampliando las caracterizaciones que se tienen.
- Establecer si entre el conjunto de datos hay ejemplos de cada categoría o no.
- Identificar si entre el conjunto de datos hay algunos que no se ajustan a las categorías preexistentes y podrían dar lugar a modificar el sistema inicial.
- Identificar circunstancias, eventos, agentes, que dan lugar a la generación de datos en cada categoría.

De acuerdo con Miles y Huberman (1994), cuando se hacen análisis deductivos y se llega a establecer inferencias, los investigadores comienzan con un conjunto de relaciones causales y las examinan en los datos. De esta forma, las van contrastando con los eventos empíricos para ejemplificarlas, verificarlas, refinarlas, adecuarlas, complementarlas o cambiarlas.

Los *procedimientos inductivos* llevan a los investigadores de los datos a los constructos teóricos, incluidas teorías que emergen de ellos. Recurren al trabajo sobre los datos sin preestablecer categorías de análisis, aunque sí teniendo en cuenta un referente conceptual de base (implícito o explícito) que guía el análisis y da al investigador sensibilidad teórica para que emerjan conceptos. Como señalan Teppo (2015) y Vollstedt (2015), la sensibilidad teórica surge de la permanente revisión de literatura relacionada, la experiencia personal y profesional previa del investigador y la inmersión intensiva en los datos. Al comienzo del estudio no se tiene una teoría definida sino un amplio campo de estudio cuyos aspectos relevantes se vuelven más y más claros a través de la investigación. Esta claridad se va ganando y es la que conduce a producir ideas, significados, conceptos y teorías derivadas de los datos.

En el caso de los análisis inductivos las inferencias surgen constructivamente. Los investigadores identifican patrones de relaciones recurrentes en los datos (como los listados en la sección previa), proponen relaciones hipotéticas y las van modificando y refinando en el curso del estudio. Los patrones se identifican con etiquetas y se elaboran enunciados proposicionales que pueden derivar en tipologías, modelos o teorías. En los casos en los que se construye una teoría fundamentada en los datos la recolección de estos y su análisis

progresan funcionalmente dependientes y cronológicamente paralelos. Según Vollstedt (2015), ninguno de los dos es entendido y terminado completamente hasta el final del estudio.

En los párrafos siguientes describo algunos de los procedimientos sugeridos en la literatura de referencia (Miles y Huberman, 1994; Denzin y Lincoln, 1998; Confrey y Lanchance, 2000). Estos pueden ser empleados tanto en análisis deductivos como en inductivos, aunque algunos procedimientos se acomodan mejor a uno u otro tipo.

Producción de resúmenes

El procedimiento de *producir resúmenes* es útil especialmente en análisis que se hacen en el curso de la captura de información, sean inductivos o deductivos. Es un mecanismo para entrar en contacto rápido e intuitivo con los datos. Los investigadores intercalan el registro, la reducción, la depuración de la información y la construcción de datos investigativos con pausas reflexivas (que se benefician de la cercanía con el momento de construcción de los datos). En tales pausas intentan responder brevemente la pregunta: ¿Cuáles son los principales asuntos, ideas, formas de hacer, temas, conceptos, etc., que se aprecian en los datos (o nos inquietan) y son útiles en el estudio? Las respuestas a la pregunta se escriben en resúmenes que son revisados frecuentemente y compartidos entre los investigadores.

Para que los resúmenes sean útiles es importante generar un formato que pueda ser diligenciado rápidamente y unifique la información y el orden en el que se consigna. Este formato puede elaborarse a partir de los primeros resúmenes o estar previsto desde antes de comenzar a recopilar la información. En cualquier caso, todo resumen incluye datos como la fecha de elaboración, el autor y la identificación del dato o conjunto de datos que da lugar a él. Conviene archivar los resúmenes de tal forma que sean fácilmente vinculables a los datos a los que se refieren y que pueda hacerse un seguimiento de estos a lo largo del estudio. Disponerlos en bases de datos puede ser un mecanismo muy efectivo.

El contenido de un resumen puede componerse de frases u oraciones que intentan responder a la pregunta. También puede incluir información sintética sobre el dato o conjunto de datos, inquietudes o preocupaciones del investigador, etc. Además de contribuir con la reflexión crítica sobre los datos e iluminar potenciales interpretaciones, también puede servir para reorientar los registros de información, ubicar datos eficientemente y reconstruir el trabajo con un informante (persona o documento) para darle continuidad, si es el caso.

Ejemplo 5.1

El fragmento incluido en la tabla 5.1 ejemplifica un resumen analítico de la investigación llevada a cabo por Guacaneme (2016). Contiene información que el investigador considera relevante en su análisis documental.

Tabla 5.1 Ejemplo de resumen como procedimiento analítico

El uso de la historia en la educación matemática [Using history in mathematics education]	
Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics: An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 3-6.	Si bien la temática central del artículo no es la relación HM-CPM (como sí la discusión crítica sobre la no integración de la HM en la enseñanza de las matemáticas), encontramos en este fragmento que la aluden. Mencionemos, por ejemplo, un texto del Ministerio de Educación del Reino Unido del año 1958, cuyo contenido y sentido el autor cita y extraña en el Currículo Nacional Inglés de finales del siglo XX. Otro es una indicación directa del autor a través de la cual sostiene que el uso de la HM por parte de los profesores puede ser difícil por adolecer de conocimiento sobre la misma y de formación sobre el uso de esta con los alumnos; en esta dirección se plantea la necesidad de trascender las afirmaciones acerca de las bondades del uso de la HM en las clases y evidenciar y estudiar cómo se podría incorporar en algunas actividades de la clase, cómo podría hacer más fácil la enseñanza de algunos temas específicos, o cómo el trabajo extra que puede ser necesario en un principio tiene a largo plazo efectos en la consecución de los objetivos del currículo matemático

Fuente: tomada de Guacaneme (2016).

Codificación de datos

La *codificación* es un procedimiento que puede emprenderse desde el comienzo del registro de información y de la construcción de datos. Contribuye a focalizar el estudio y a tomar decisiones sobre la información que se seleccionará por ser realmente importante en el estudio, pero con la mente abierta a identificar intereses emergentes.

En los análisis deductivos los datos se organizan en las categorías previstas de antemano según el marco de referencia empleado. En algunos casos, si se ve la necesidad de diferenciar los datos correspondientes a una categoría, se emplean códigos que se han previsto desde el comienzo del análisis o que surgen a lo largo del estudio. Los códigos son rótulos o etiquetas que permiten asignar unidades de significado a los datos. Agrupaciones de códigos pueden constituir subcategorías de la categoría inicial.

En los análisis inductivos los códigos van surgiendo del ejercicio analítico a medida que los investigadores diferencian unos datos de otros y entrevén en ellos asuntos específicos. Estos tienen que ver con los intereses investigativos, el problema, las hipótesis, las posibles variables o el marco de referencia. Por

ejemplo, supongamos que los investigadores están analizando actividades matemáticas en las que toman parte los estudiantes de un curso y los datos que tienen son fragmentos de transcripciones de video que contienen intervenciones de estudiantes llevando a cabo una actividad matemática. Los investigadores interesados en un análisis inductivo pueden usar el código REPR para etiquetar un dato en el que se identifica a un estudiante haciendo una representación. Continuamente los investigadores revisan si están etiquetando con el mismo código datos que tienen la misma unidad de significado o no, lo que puede llevar a ir refinando el listado de códigos. Los códigos más útiles son aquellos que agrupan muchos datos, sugieren temas o anticipan vínculos. Glaser y Holton (2004; citados en Teppo, 2015) usan el término "codificación selectiva" cuando el investigador restringe la comparación de códigos a aquellos asuntos que se relacionan con el fenómeno de manera significativa. Por su parte, Charmaz (2006; citado en Teppo, 2015) denomina "codificación enfocada" a la acción de privilegiar códigos que dan un sentido más claro y relevante a los datos.

Según Vollstedt (2015), los nombres de los códigos provienen de diferentes fuentes: hay unos que surgen directamente de los datos o de pequeñas variaciones de estos, cuando son mencionados directamente por algún participante. Otros nombres surgen de visiones o sospechas de los investigadores en el curso del proceso analítico. Y otros nombres pueden ser tomados de la literatura cuando se entrevé su relación con los datos.

En cualquier estudio, existan códigos predefinidos o que emerjan en el curso del análisis, ellos cambian, se ajustan y se refinan a medida que la investigación progresa, mediante un procedimiento de comparación constante. Unos códigos se mantienen si los datos revelan repetición de las unidades de significado etiquetadas, mientras otros se descartan, si este tipo de datos no vuelve a surgir. Grupos de códigos se fusionan en uno solo, otros se convierten en más de uno durante el análisis. Así, resultan listados de códigos que agrupan conjuntos de datos con la misma unidad de significado. Cabe aclarar que un dato puede ser etiquetado con más de un código por lo que la información no se organiza necesariamente en conjuntos disyuntos.

Cuando los datos codificados con un rótulo tienen matices relevantes y se quiere establecer cierta diferenciación, es posible crear códigos combinados o hacer subcodificaciones. En el caso del ejemplo del código REPR, si interesa diferenciar si la representación que hace un estudiante es gráfica, tabular o algebraica, pueden surgir códigos como REPR-GRAF, REPR-TABL y REPR-ALGE o mantener el código REPR y crear los subcódigos GRAF, TABL y ALGE no solo asociados a la representación sino eventualmente a otro tipo de actividad matemática.

Según Miles y Huberman (1994), los códigos asignados pueden ser de tres tipos, lo que supone que el ejercicio de codificación puede conducir a distintos niveles de análisis:

- *Descriptivos.* Si se trata de una caracterización del contenido mismo del dato.
- *Interpretativos.* Si el investigador atribuye un significado no explícito en el contenido mismo pero factible de acuerdo con el contexto, la dinámica, etc., o si sugiere una explicación discernida a partir de los eventos que recoge el dato.
- *Inferenciales.* Si el investigador aventura una relación causal.

A medida que la codificación progresa los investigadores van aclarando el significado de cada código y pueden comenzar a producir descripciones asignando a cada código una definición. De esta forma obtienen una especie de diccionario de códigos con conjuntos de datos asociados a cada uno. Las definiciones se van refinando a medida que avanza el estudio. Los investigadores van ganando un lenguaje con el que referirse a los códigos para aplicarlos de manera consistente. Conviene dar nombres a los códigos estrechamente ligados a los conceptos que describen, para facilitar su recuerdo y uso, en lugar de emplear únicamente números que no orientan la unidad de significado que agrupa el código.

Cuando el ejercicio avanza, los investigadores obtienen grupos de códigos asociados a cada categoría (en el caso de los análisis deductivos) o pueden ir agrupando los códigos alrededor de un tema que caracteriza a todos ellos, para constituir categorías (en el caso de los análisis inductivos). En el segundo caso, las categorías son conceptos, asuntos o temas que describen de manera sucinta características comunes a un conjunto de códigos. Por ello se afirma que las categorías emergen de los datos y son las que permiten elaborar las descripciones, interpretaciones e inferencias a las que haya lugar (ver siguiente sección). En un análisis posterior las categorías se organizan según relaciones de contenencia, causales, etc., con el objetivo de comenzar a sintetizar y explicar los fenómenos identificados en los datos (Teppo, 2015).

En el comercio existen varios programas de computador que facilitan el proceso de codificación. Entre ellos menciono ATLAS.ti, NVivo, N6, Aquad, Ethnograph, WinMAX, MAXQDA. Son útiles para ir compilando el listado de códigos y porque tienen diversos formatos para exhibir los códigos, sus definiciones y los datos relacionados con cada uno.

Cuando los investigadores proceden mediante análisis inductivos comien-

zan organizando los códigos emergentes en grupos generales previstos de antemano para asegurar un análisis completo y profundo. Según el conjunto de datos organizado en cada grupo se establecen las categorías. Miles y Huberman (1994) recogen sugerencias de varios investigadores sobre posibles tipos de códigos, que sintetizo en la tabla 5.2. Estos autores aclaran que no necesariamente en un estudio es posible ubicar códigos de todos los tipos, pero el ejercicio de partir de una organización ayuda a los investigadores a pensar sobre cuáles pueden ser las categorías que emergerán del estudio.

Tabla 5.2 Ejemplos de tipos de códigos que pueden preverse en un análisis inductivo

Propuesta de Strauss (1987)	*Propuesta de Lofland (1971)*	*Bogdan y Biklen (1992)*
Condiciones Interacciones Estrategias Consecuencias	Actos temporalmente breves Actividades Significados Participaciones Relaciones Escenarios	Escenarios Definiciones de la situación Perspectivas Opiniones Procesos Estrategias Eventos Relaciones Métodos

Fuente: tomada de Miles y Huberman (1994).

Otros estudios no se ajustan a ninguna lista de códigos preexistente. Por ejemplo, Vollstedt (2015) optó por clasificar los códigos que emergían inductivamente en su estudio en "preliminares personales" (experiencias previas, rasgos personales), "significados personales" y "consecuencias" ("influencia en acciones", "influencia en juicios"). Según su criterio, las propuestas que conocía no se ajustaban a su investigación.

Los investigadores, no importa qué tan rígido o flexible sea su diseño o qué tan consolidada esté la orientación conceptual, reconocen cuándo un conjunto de códigos se acomoda a los datos o si se requiere hacer ajustes. Por eso están abiertos a que su listado de códigos cambie. Los códigos se establecen en un ejercicio fundado empírica y teóricamente y se busca que satisfagan el interés de los investigadores en tanto cubren con ellos importantes asuntos del fenómeno. Para ello, según Miles y Huberman (1994), generalmente se sopesan tres fuentes de conocimiento que movilizan el estudio: primera, el marco de referencia, por incipiente que sea, o las vías que los investigadores empiezan a visualizar para establecer relaciones; segunda, el escenario, que se vuelve cada vez más descifrable en la medida en que se pasa tiempo en él o se revisan los datos; tercera, el continuo flujo

de asuntos interesantes, ideas, temas, preocupaciones, contradicciones, que los investigadores perciben y que hay que ir ajustando a los códigos. La codificación es una forma de forzar el entendimiento, hacer que surjan nuevas miradas, poner nombres a incidentes o eventos, tratar de agruparlos, comunicar ideas y articular conceptos con datos.

Como sugieren Strauss (1987) y Lincoln y Guba (1985) (citados en Miles y Huberman, 1994) y Teppo (2015) y Vollstedt (2015), la codificación y recodificación terminan cuando los investigadores perciben que su listado permite codificar todos los datos y abarca los asuntos de interés, es decir, cuando se produce lo que denominan una "saturación" de códigos. Sin embargo, no conviene apresurar el fin de la codificación pues la comprensión de los datos sucede paulatinamente. Entre más tiempo se está en el escenario o se revisan los datos aparecen más asuntos interesantes. Generalmente son variables externas al estudio, como el tiempo y el presupuesto, las que limitan el proceso.

Ejemplo 5.2

En mi tesis (Camargo, 2010) es posible apreciar varios tipos de codificación realizados en diferentes estados del proceso analítico. Veamos.

Codificación abierta inicial. Esta codificación se realizó en dos momentos. Primero, cuando revisé extractos de las transcripciones de ciento quince documentos que alimentaron un archivo del programa ATLAS.ti. Fue una codificación emergente realizada con base en la conceptualización de actividad demostrativa y de aprendizaje como participación. Esta codificación sirvió para seleccionar unos registros y abandonar otros. Segundo, cuando revisé extractos de las transcripciones correspondientes a quince episodios que se constituyeron en la base para obtener los datos investigativos. La segunda codificación se hizo a partir de la primera, revisando el listado de códigos, agregando y eliminando códigos. Un ejemplo de los cincuenta y cuatro códigos que resultaron de este ejercicio se presenta en la tabla 5.3.

Tabla 5.3 Ejemplos de códigos emergentes producto de una codificación abierta

Código	*Definición*
AsumeResponsabil	Autoasignación de una responsabilidad explícita para ser realizada en forma voluntaria, por algún estudiante, generalmente fuera de clase y que es relevante para el buen funcionamiento de la práctica de la comunidad
ComparanConjeturas	Intervención de la profesora o de un estudiante en donde se comparan conjeturas formuladas por los estudiantes bien sea por su similitud, pertinencia o utilidad
DefiendeIdea	Intervención de estudiante para defender una idea ante una objeción, crítica o mala interpretación hecha por algún otro miembro

Tabla 5.3 (continuación)

Código	*Definición*
GeneralEnun	Elaboración de una expresión, por parte de la profesora o algún estudiante, que sintetiza un enunciado en forma general para expresarlo como suele decirse en geometría
QueParaComoDemost	Alusión de la profesora o de un estudiante que evidencia una negociación sobre qué es demostrar, cómo se demuestra y para qué se demuestra
RelaFigEnunci	Intervención de la profesora o de un estudiante en donde hace referencia explícita al uso de las figuras en el curso

Fuente: tomada de Camargo (2010).

Codificación axial. A partir del listado inicial de códigos emergentes hice una clasificación de estos en principales y subordinados según permitieran un análisis más o menos detallado de las finalidades de participación de los estudiantes en la actividad demostrativa y de la evolución de esta. En esta clasificación fue muy importante el uso del programa ATLAS.ti pues me permitió localizar los extractos codificados en la transcripción original de manera rápida y eficaz, para no perder la visión global de esta y del episodio. Opté por considerar códigos principales a aquellos que incluían aspectos relevantes del repertorio de prácticas, con los cuales podría analizar la participación de los estudiantes. Códigos que había usado referidos al papel del experto (la profesora), el papel del programa de geometría dinámica, la empresa conjunta y el compromiso mutuo los consideré subordinados a los principales y la información recogida en ellos me fue útil para complementar los análisis de la participación, cuando el extracto correspondiente a un repertorio contenía alguno de estos códigos. De esta manera seleccioné los extractos que emplearía en el análisis (al descartar aquellos en donde no hubiera un código principal) y concreté el foco del análisis en el repertorio de prácticas sin desatender otros aspectos de este, pero poniéndolos en un lugar secundario. En la tabla 5.4 ilustro cómo discriminé los códigos en el análisis de un extracto correspondiente a uno de los episodios.

Tabla 5.4 Ejemplo de organización de códigos en principales y subordinados

	Extracto correspondiente al episodio 15	*Códigos principales*	*Códigos subordinados*
P:	(a) Bueno, vamos a mirar esta conjetura del grupo A. Esta conjetura es bien interesante [Coloca la diapositiva correspondiente y la lee].	AutoriaAfirmacion	
	(b) [Grupo A: Dado el cuadrilátero *ABCD*. Si las diagonales se bisecan y *AC* = *BC,* el cuadrilátero tiene al menos dos lados congruentes].	FormuConjetu	
	(c) [...]... ¿o sea dado qué?		
Efraín:	Un paralelogramo.		

Tabla 5.4 (continuación)

	Extracto correspondiente al episodio 15	*Códigos principales*	*Códigos subordinados*
P:	(a) "Si las diagonales se bisecan" ya me garantiza que es paralelogramo. "Y, además, *AC* y *BD* son iguales". Y si las diagonales tienen la misma medida, "entonces tiene al menos dos lados congruentes".		Parafrasea
	(b) Me gustaría ver esa construcción, si la tienen...		FormulaTarea
	(c) porque... en el fondo, el teorema de ellos, o la conjetura que propone, es verdadera ¿o no? [...].		QuePara ComoDemost
María:	Claro.	EvaluaConjetu	
P:	¿Claro qué, María?		
María:	Es verdadera.		
P:	¿Por qué?		
María:	Porque ya es un paralelogramo... y tiene dos pares de lados congruentes.		
P:	O sea que como quien dice, esta condición, sobra [*AC* = *BD*]. [...].		
	[P113: 4-12]		

Fuente: tomada de Camargo (2010).

Codificación fina, línea a línea. Hice esta codificación al hacer un análisis en profundidad de los extractos correspondientes a los códigos principales. Con la mirada puesta en la práctica específica asignada al extracto, interpreté la participación de los estudiantes identificando "modos de hacer" y "modos de decir", lo que me llevó a refinar la codificación, ampliando o reorganizando el listado de códigos principales. Con ello pude codificar línea a línea cada extracto. Un ejemplo de refinamiento se encuentra en la tabla 5.5, en donde aparece el mismo extracto de transcripción con el que ejemplifiqué la codificación axial, pero ahora con la codificación fina. A partir de esta codificación hice una interpretación de la participación de los estudiantes en la rutina de "conjeturar".

Tabla 5.5 Ejemplo de organización de códigos línea a línea

	Extracto correspondiente al episodio 15	*Códigos línea a línea*
P:	(a) Bueno, vamos a mirar esta conjetura del grupo A. Esta conjetura es bien interesante [Coloca la diapositiva correspondiente y la lee].	
	(b) [Grupo A: Dado el cuadrilátero *ABCD.* Si las diagonales se bisecan y *AC* = *BC,* el cuadrilátero tiene al menos dos lados congruentes].	ForIni
	(c) [...]... ¿o sea dado qué?	Reform
Efraín:	Un paralelogramo.	Reform
P:	(a) "Si las diagonales se bisecan" ya me garantiza que es paralelogramo. "Y, además, *AC* y *BD* son iguales". Y si las diagonales tienen la misma medida, "entonces tiene al menos dos lados congruentes".	Reform

Tabla 5.5 (continuación)

	Extracto correspondiente al episodio 15	*Códigos línea a línea*
	(b) Me gustaría ver esa construcción, si la tienen...	ConjCons
	(c) porque... en el fondo, el teorema de ellos, o la conjetura que propone, es verdadera ¿o no? [...].	Acepta
María:	Claro.	Acepta
P:	¿Claro qué, María?	Acepta
María:	Es verdadera.	Acepta
P:	¿Por qué?	Acepta
María:	Porque ya es un paralelogramo... y tiene dos pares de lados congruentes.	Deduci
P:	O sea que como quien dice, esta condición, sobra [*AC* = *BD*]. [...].	Enunci
	[P113: 4-12]	

Fuente: tomada de Camargo (2010).

Ejemplo 5.3

Vargas (2012) realizó un primer análisis de sus datos que denominó "de primer orden". Se valió de los mecanismos de descomposición genética empleados como fundamento conceptual para hacer una primera clasificación de los segmentos de las transcripciones de las clases, según si el profesor propiciaba una interiorización, una encapsulación o una tematización. Después, cada segmento fue codificado haciendo uso de los descriptores de cada mecanismo que fueron construidos a partir del análisis realizado previamente sobre la descomposición genética de la función exponencial. Los códigos fueron nombrados con tres caracteres. El primero, I, E o T, corresponde al mecanismo. El segundo, e, se refiere a la función exponencial. Y el tercero, a, b, c, d, e, etc., alude al descriptor específico. En la tabla 5.6 presento unos ejemplos de los códigos empleados por Vargas.

Tabla 5.6 Ejemplos de códigos usado por Vargas (2012) en su análisis denominado "de primer orden"

Código	*Descriptor*
Iea	Interiorización de las iteraciones correspondientes a elevar una base fija cuando se varía el exponente, considerando de forma separada los casos en que la base es mayor que uno o cuando tiene un valor entre cero y uno
Ied	Interiorización de las acciones de ubicar diferentes puntos en la curva función exponencial en el proceso de construcción de la gráfica de la función sin recurrir a realizar las acciones de remplazar en la fórmula diversos valores
Eec	Encapsulación. Comparación de curvas exponenciales para establecer el eje X como asíntota, el corte de la función con el eje Y, el dominio y el rango de las funciones exponenciales
Teb	Tematización. Aplicación de las funciones exponenciales transformadas en los procesos de solución de ecuaciones logarítmicas

Fuente: tomada de Vargas (2012)

El proceso de codificación fluyó de los documentos con la transcripción de las clases a los documentos con las respuestas a las entrevistas y viceversa, en un proceso de permanente cotejo de la información proporcionada por los profesores en las entrevistas y percibido por la investigadora en las clases. Aprovechando las posibilidades que brinda el programa ATLAS.ti, Vargas (2012) construyó redes visuales en las que podía apreciar esquemáticamente la categoría, los códigos usados en los segmentos correspondientes, los trozos del segmento codificado, la ubicación del segmento en los documentos, la numeración del segmento y los vínculos con segmentos de las entrevistas correspondientes a la situación. Un fragmento de una red se puede apreciar en la figura 5.2.

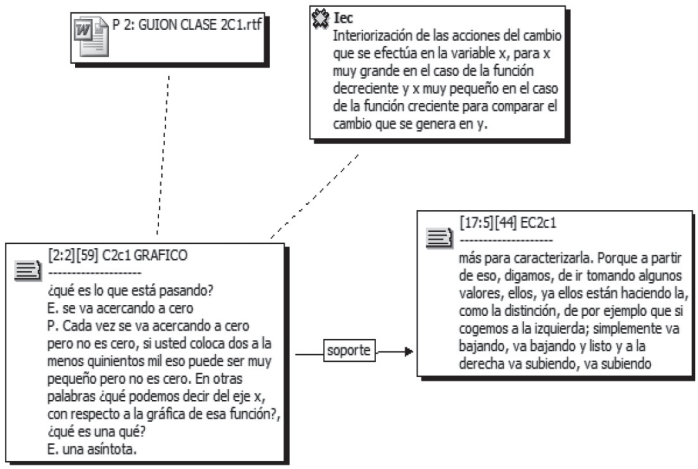


Figura 5.2 Fragmento de red construido por Vargas (2012) en ATLAS.ti a partir de la codificación hecha

Fuente: Vargas (2012).

La numeración de los segmentos fue útil para establecer la secuencia mediante la cual se propiciaron los mecanismos de construcción en las clases sobre la función exponencial. Esta es la materia prima con la cual Vargas (2012) llevó a cabo un "análisis de segundo orden" empleando la producción de viñetas para reconstruir las clases de manera que se exhibiera la modelización del mecanismo de construcción de la descomposición genética. Este análisis se ejemplifica más adelante.

Ejemplo 5.4

Obando (2015) realizó un proceso de clasificación inicial de la información contenida en cada dato (clase de matemáticas) con base en el marco de referencia. Estableció las siguientes categorías: los "instrumentos" (que median la actividad matemática de los estudiantes), los "objetos y conceptos" (objetivados en la clase, durante la actividad matemática) y los "procedimientos" (que dan forma a las acciones de los estudiantes). A medida que señalaba fragmentos de interacciones verbales, producciones escritas o acciones no verbales de los estudiantes, correspondientes a cada categoría, elaboró comentarios con análisis preliminares. A partir de la primera categorización procedió a hacer una codificación de los fragmentos dentro de cada categoría buscando elementos diferenciadores, lo que lo llevó a considerar niveles en cada categoría.

El proceso de codificación le permitió un análisis detallado de las prácticas y el surgimiento de elementos teóricos que le posibilitaron caracterizarlas como sistema. Dado que el objetivo central de la investigación era el análisis del sistema de prácticas, la presentación de resultados no se hizo revisando categoría por categoría, sino mediante la redacción de dos narrativas, tipo viñeta, que dan cuenta de la manera como instrumentos, procedimientos, objetos, conceptos y procedimientos dan forma a ciertas configuraciones epistémicas y cognitivas en la actividad matemática determinada por las tareas realizadas por los estudiantes.

Producción de categorías

El procedimiento de *producción de categorías* se aplica en los análisis inductivos, especialmente en dos casos. Primero, cuando se tiene un conjunto de códigos que describen el fenómeno, pero el estudio requiere un segundo nivel de organización. Se entrevé que la clasificación inicial de los datos mediante listas de códigos no es suficiente y no se tienen categorías previas. La categorización consiste en asignar rótulos o etiquetas a conjuntos de códigos según su contenido, lo que permite identificar temas emergentes, conceptos, tipos, configuraciones o explicaciones y relaciones. Segundo, cuando el investigador opta por construir categorías derivadas de los datos, sin hacer una codificación previa de estos.

Miles y Huberman (1994) proponen cuatro funciones para la categorización:

- Reducir la cantidad de información contenida en los códigos o en los datos, proponiendo un conjunto administrable de categorías que determinan un

número específico de asuntos a destacar y permiten recuperar información de los datos fácilmente, para ilustrar los asuntos.
- Lograr que los investigadores identifiquen los asuntos más importantes organizando los datos o el conjunto de códigos que inicialmente pueden parecer dispersos. Esto conduce a generar una estructura u orden conceptual.
- Apoyar la realización de una cartografía del fenómeno, es decir, la producción de esquemas interpretativos que evolucionan con el estudio y que sirven para comprender incidentes locales e interacciones y hacer inferencias, cuando es el caso.

De la misma forma que los códigos emergentes, las categorías surgen, se abandonan, se modifican y se refinan a medida que se establecen regularidades entre los códigos. El proceso se realiza poco a poco, sin pretender prematuros intentos de definición de las categorías para evitar sesgos en las interpretaciones o descartar información importante del estudio porque no se ajuste a la categorización hecha en un momento dado. Conviene contrastar el ejercicio de categorización con la información contenida en los datos (en busca de frases comunes, matices, etc.), las preguntas de investigación y el marco de referencia, por incipiente que este sea, para encontrar regularidades en los códigos. Cada categoría se define y precisa especificando qué códigos y datos contiene y qué condiciones o situaciones establece.

El proceso de elaborar categorías agrupando y descartando códigos o datos es creativo. Los investigadores se preguntan permanentemente cuáles son las ideas generales que están más allá de lo dicho por los participantes y cómo combinarlas, asociarlas, conjugarlas, etc., de tal forma que emerja una teoría. Vollstedt (2015) recomienda reflexionar constantemente acerca de las ideas generales que envuelven lo que dicen los informantes, buscando generalizar expresiones concretas para inferir ideas relevantes investigativamente. Cabe preguntarse: ¿Qué está detrás de lo que dice tal persona? ¿Cómo se vincula lo que dice con lo que dijo antes? Cuando los investigadores agrupan códigos en categorías y establecen relaciones entre ellos, se dan cuenta de que estas conexiones estaban sugeridas en las expresiones de los participantes, pero no se habían detectado.

Ejemplo 5.5

El proceso analítico llevado a cabo por Valoyes (2014) comenzó con la producción de los datos investigativos al seleccionar y subrayar, en la primera

transcripción escogida para iniciar el análisis (la narración de un profesor sobre sus impresiones de la clase de álgebra de grado 8.º), palabras, frases, oraciones o párrafos que expresaban ideas relacionados con el asunto de interés. Acompañó el ejercicio con anotaciones al margen, relacionadas con posibles temas que serían asunto por discutir. Por ejemplo, en la transcripción, Valoyes notó que el profesor usaba la localización de la clase para explicar el desempeño de los estudiantes. Así, el siguiente dato fue etiquetado con "comparando actitudes de estudiantes":

> Usualmente, los estudiantes que quieren poner atención y contribuir a la clase se sientan adelante. Los estudiantes que no quieren poner atención se sientan atrás. Esta es una característica común, siempre (entrevista, agosto 20) (Valoyes, 2014, traducción personal).

El proceso llevó a la investigadora a proponer un conjunto inicial de categorías para ir agrupando los datos en cada una de ellas según dos temas (véase tabla 5.7).

Tabla 5.7 Categorías iniciales propuestas por Valoyes (2014) al comenzar el proceso analítico

Expectativas del profesor (narrativas acerca de)	*Prácticas instruccionales del profesor*
Habilidades de los estudiantes para aprender álgebra	Características de la instrucción
Desempeño de los estudiantes en la clase de álgebra	Discurso sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra
Comportamiento y actitudes de los estudiantes en la clase de álgebra	Discursos que apoyan la instrucción del profesor
Éxitos o fracasos de los estudiantes	Características del contenido algebraico presentado por el profesor

Fuente: tomada de Valoyes (2014).

Valoyes (2014) repitió el ejercicio con otras transcripciones haciendo comparaciones constantes de los datos marcados con la misma etiqueta y ubicados en cada categoría. Esto le permitió identificar semejanzas y diferencias entre los datos y vincular estrechamente el análisis a ellos. En este proceso, las notas de campo tomadas en las clases le sirvieron para identificar asuntos que habían llamado su atención y que podían estar asociados con las categorías propuestas. El hallazgo de nuevos asuntos, así como la profundización en la literatura revisada, condujeron a la investigadora a refinar el análisis y proponer un nuevo conjunto de categorías e incluso proponer un nuevo tema: "el ambiente de la clase". El nuevo listado de categorías se presenta en la tabla 5.8.

Tabla 5.8 Categorías refinadas a partir de un conjunto inicial (tabla 5.7), producto del proceso analítico

Expectativas del profesor (narrativas acerca de la clase social y la raza y su relación con)	*Prácticas instruccionales del profesor*	*Ambiente de la clase*
Habilidades de los estudiantes para aprender álgebra	Características de la instrucción	Gestión del comportamiento de los estudiantes
Desempeño de los estudiantes en la clase de álgebra	Discurso sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra	Posicionamiento de los estudiantes
Comportamiento y actitudes de los estudiantes en la clase de álgebra	Discursos que apoyan la instrucción del profesor	Interacciones discursivas
Éxitos o fracasos de los estudiantes	Características del contenido algebraico presentado por el profesor	Construcción de ambientes de aprendizaje
Ambiente social de los estudiantes	Representaciones de "malos" y "buenos" estudiantes	
	Prácticas evaluativas	

Fuente: tomada de Valoyes (2014)

El listado de categorías sirvió a Valoyes (2014) para construir un diccionario de categorías proponiendo una descripción de cada una. Alimentó el programa NVivo con las categorías y volvió a realizar un nuevo proceso de análisis de las transcripciones revisando las ya hechas y avanzando con otras.

El proceso reiterativo de agrupación de datos en categorías llevó a Valoyes (2014) a cubrir los elementos fundamentales en los datos y a enfatizar los hallazgos en los vínculos entre categorías. Así el procedimiento analítico fue dando un giro conceptual. El significado otorgado a las categorías fue guiado por las preguntas de investigación y la perspectiva teórica. Las anotaciones hechas al ubicar los datos en categorías fueron centrales para conceptualizar estas. Adicionalmente, permitieron a la investigadora establecer conexiones entre los aspectos analizados y asuntos más amplios del campo de la educación matemática.

Con el objetivo de identificar la influencia de las expectativas del profesor sobre la habilidad para aprender álgebra de estudiantes de raza negra y estrato social bajo, Valoyes (2014) estableció relaciones y sacó inferencias entre las categorías. Para ver si las relaciones eran válidas comparó la información de los tres profesores explorando cada categoría para identificar propiedades y características. Una vez corroboradas las inferencias, Valoyes construyó un modelo de interpretación de la influencia buscada. El proceso analítico finalizó cuando todos los datos fueron meticulosamente cubiertos y las categorías se habían "saturado"; es decir, todas las regularidades y patrones a lo largo de los tres casos fueron interpretadas con el modelo.

Al finalizar la explicación del análisis realizado, Valoyes (2014) señaló el importante papel de la perspectiva teórica asumida al usar una aproximación dialéctica entre los datos y la teoría con varios movimientos en ambos sentidos. De un lado, la perspectiva teórica le permitió enfocarse en aspectos particulares de las expectativas y prácticas de los profesores. De otro lado, logró refinar algunos elementos conceptuales para ganar una mayor comprensión de ellos. Por ejemplo, ella introdujo en el modelo la noción de "agencia" como resultado del análisis para referirse a las interacciones entre profesores y estudiantes. También refinó la noción de "representación hegemónica" para describir las vías en las cuales los profesores explican y justifican las actitudes y comportamientos de sus estudiantes.

Ejemplo 5.6

Un ejemplo de producción de categorías es sugerido por Gläser-Zikuda y Mayring (citados en Mayring, 2015), quienes, en un estudio acerca de la relación entre el aprendizaje y las emociones, analizaron entrevistas abiertas y diarios de emociones de veinticuatro estudiantes de una clase de grado 8.º. Mediante una codificación abierta encontraron los códigos que presento en la tabla 5.9 y cuantificaron el número de veces que encontraba el código en el conjunto de datos.

Tabla 5.9 Ejemplo de códigos en el estudio de Gläser-Zikuda y Mayring

Código 1	Feliz por las interesantes actividades de hoy	(21 ocurrencias)
Código 2	Feliz por dominar el tema y haber entendido todo	(21 ocurrencias)
Código 3	Temas asombrosos vistos en la lección de hoy	(16 ocurrencias)
Código 4	Disfruté la retroalimentación positiva del profesor	(14 ocurrencias)
Código 5	Agradable grupo o agradable compañero de trabajo	(11 ocurrencias)
Código 6	Problemas interesantes en la lección	(3 ocurrencias)

Fuente: tomada de Mayring (2015).

Los códigos se construyeron usando expresiones de los estudiantes. Se referían a impresiones positivas acerca de emociones en el proceso de aprendizaje. A partir de ellos Mayring (2015) produjo dos categorías: "Cat 1: Emociones positivas sobre el proceso" (códigos 1, 2, 4 y 5) y "Cat 2: Emociones positivas sobre los contenidos" (códigos 3 y 6). Como había hecho un conteo de ocurrencias, posteriormente comparó los resultados de estas dos categorías en dos grupos de estudiantes de alto y bajo desempeño y buscó una correlación entre las emociones positivas y el logro. Encontró que había una relación más estrecha entre un proceso de aprendizaje emocionalmente positivo y el logro que entre este y emociones positivas sobre el contenido.

Producción de memorandos

Un *memorando* es un escrito en el que se consignan ideas acerca de los códigos y las categorías, preexistentes o emergentes, relacionadas principalmente con posibles relaciones que se identifican entre las categorías. Los memorandos reflejan el proceso analítico cuando los investigadores consignan sus pensamientos generales acerca de datos concretos, de tal forma que luego son sometidos a verificación en relación con el material (Vollstedt, 2015).

De manera similar a los resúmenes, los memorandos se hacen en momentos de pausas reflexivas de la construcción de datos o del análisis. Van construyendo un sentido coherente del fenómeno y permiten avanzar hacia la producción de interpretaciones e inferencias. Pero a diferencia de los resúmenes, se centran en las percepciones e ideas fugaces que los investigadores logran sobre los códigos y las categorías y no sobre los datos. Buscan poner por escrito ideas surgidas al revisar los códigos y la categorización contribuyendo a crear una línea de desarrollo del pensamiento (Teppo, 2015). Conviene comenzar a elaborarlos tan pronto se tiene el primer conjunto de datos y continuar escribiéndolos hasta el reporte final.

Cuando un análisis avanza de manera inductiva, los memorandos se van acumulando y organizando para apoyar la construcción de categorías y de relaciones entre ellas. Son una forma de avanzar desde el escenario hacia el nivel conceptual, exhibiendo relaciones y construyendo unidades conceptuales. Son del tamaño de una oración, un párrafo o un conjunto de párrafos.

En el caso de los análisis deductivos los memorandos pueden ser útiles para identificar agrupaciones de códigos que se organizan en una categoría, confrontar qué tan adecuado es el marco de referencia inicial e identificar qué aspectos revisar. En los memorandos se puede consignar qué está desarticulado, sugerir hipótesis alternativas, proponer nuevas categorías e integrar reflexiones o comentarios que acompañan la codificación, cuando los investigadores no tienen claro un concepto en mente, pero están a punto de lograr aclararlo.

Para poder disponer de ellos de manera expedita, los memorandos tienen una identificación que permite ordenarlos. Esta puede incluir la fecha, los conceptos claves que se discuten y los vínculos entre códigos y categorías que se reseñan. Se rotulan de acuerdo con los conceptos a los que se refieren y se guardan separados de los archivos de datos. Así constituyen una vía auditable del desarrollo del pensamiento analítico y proporcionan transparencia al proceso investigativo (Teppo, 2015). Incluso Glaser (1998; citado en Teppo, 2015) defiende el empleo de memorandos poco estructurados en donde la

corrección gramatical y la exactitud del lenguaje no es lo más importante; el investigador debe sentirse libre de expresar sus ideas y promover que estas fluyan sin centrar la atención en la forma, por lo menos inicialmente.

Notas de análisis colectivos

El procedimiento de construcción de *notas colectivas* se usa para que los investigadores se apoyen mutuamente en la producción de estructuras relacionales y constructos que emergen del estudio, sea este inductivo o deductivo. Los investigadores se reúnen y ocasionalmente invitan a algunos pares para revisar los datos, los códigos o las categorías y para discutir posibles resultados del estudio. La discusión es orientada por las preguntas de investigación y las impresiones que el colectivo extrae de los datos, los códigos o las categorías. Las personas expresan sus puntos de vista, no necesariamente compartidos, pero se espera ir construyendo un sentido compartido del fenómeno y de los hallazgos de la investigación.

Los resultados de los encuentros se organizan en notas de análisis que reúnen los principales asuntos tratados. Generalmente incluyen: temas, impresiones, enunciados, síntesis de posibles relaciones, explicaciones, especulaciones, hipótesis, interpretaciones alternativas, desacuerdos, nuevos pasos necesarios en la recolección de información, revisiones de la codificación, eventos inesperados, nuevos análisis que habría que hacer, asuntos que no se verifican, etc. Las notas son revisadas por todos los participantes del encuentro y se acude a ellas una y otra vez en el curso del análisis.

Viñetas

La generación de *viñetas* analíticas es un procedimiento que vincula de manera cercana los datos de la investigación con el ejercicio analítico. Una viñeta es una descripción no neutral, influenciada por los hallazgos, vívida y persuasiva, de una serie de eventos que suceden en un lapso y que son representativos o emblemáticos del fenómeno que se estudia. Tiene una estructura narrativa que preserva la cronología de los eventos y procura crear una historia ilustrativa del escenario durante el lapso que se narra, recreando con riqueza de detalles y ejemplos la vida en el escenario. Simultáneamente, en la narración los investigadores exhiben explícitamente los hallazgos usándolos como hilo conductor de la narración en los subtítulos, en los ejemplos ilustrativos o en el texto descriptivo, para enfocar la atención en aquello que es significativo

y mostrar las condiciones específicas en que operan los conceptos, procesos, temas y las características particulares del funcionamiento en el escenario.

Generalmente una viñeta tiene un contenido que incluye elementos como: el contexto, las expectativas, los participantes involucrados, las acciones, interacciones o prácticas que se llevan a cabo (descritas poniendo en juego los resultados del análisis), los efectos de las acciones, interacciones y prácticas, las explicaciones sobre tales consecuencias, los aprendizajes logrados en la investigación, entre otros. La narración es focalizada e intenta "limpiar" de información irrelevante la descripción. Por tal razón no es una copia exacta del evento original sino una abstracción situada y contextualizada que busca destacar la perspectiva del fenómeno, producto del análisis.

Miles y Huberman (1994) recomiendan solicitar a los participantes informantes leer las viñetas y proponer cambios en el caso que ellos consideren que la narración no se ajusta a la realidad vivida o produce una descripción que no es típica sino excepcional (a menos que sea eso justamente lo que se quiere narrar). Sucesivos ajustes a partir de lo que opinan los participantes y de la revisión que hacen los investigadores al conjunto de datos y al material producido en otros análisis (resúmenes, memorandos, notas), si los hay, sirven para tener una versión que refleja de mejor manera los eventos.

Ejemplo 5.7

A partir de su segmentación y codificación, la cual he explicado en ejemplos previos, Vargas (2012) buscó, en cada clase, establecer relaciones entre segmentos según ellos impulsaran el mismo mecanismo de descomposición genética. De esta manera conectó y ordenó segmentos, construyendo unidades completas de significado, a la luz de cada mecanismo. En cada unidad se podía apreciar la actividad matemática desarrollada en relación con el mecanismo y la secuencia puesta en juego para propiciar el aprendizaje de los estudiantes sobre la función exponencial.

Posteriormente Vargas (2012) elaboró una visión de conjunto de la descomposición genética propiciada por cada profesor que participó en su estudio. Concretó su análisis mediante viñetas en las que entrelazó en un mismo texto las evidencias y el análisis de los datos, esbozando la modelación de cada mecanismo en la práctica de cada profesor. En cada viñeta incluyó fragmentos informativos que ubican al lector acerca del origen de las evidencias, la tarea o tareas que el profesor propuso a los estudiantes y los instrumentos, registros de representación y contenido matemático que incorpora. Lo anterior fue articulado a las inferencias que hizo la investigadora sobre cómo cada profesor puso en juego los mecanismos, todo ello hilado narrativamente.

Ejemplo 5.8

La siguiente es una transcripción de una interacción comunicativa entre un estudiante y el profesor, seguida por la viñeta elaborada por Obando (2015) en su estudio sobre el sistema de prácticas acerca de la razón, la proporción y la proporcionalidad. Esta es construida a partir del análisis de los datos en el grado 3.º de primaria. Según el autor, la narrativa exhibe la comprensión de un estudiante acerca de la relación de variación de dos cantidades involucradas en una situación en la que una niña llamada Juanita ha comprado cuatro bananas (caramelos) por las que pagó $200 y quiere saber cuánto dinero necesita para regalar una banana a cada uno de sus veinte compañeros de clase.

Transcripción:

36:06 e: Es que no sé si multiplicar, sumar o restar.
36:07 p: A ver, empecemos. ¿Qué es lo que tiene que hacer Juanita?
36:11 e: Juanita apenas compró cuatro bananitas para regalarle a algunos amigos y cuando ahí pagó
36:21 p: doscientos pesos
36:25 e: ella quiere saber cuánto dinero necesitará para regalar una banana a cada uno de sus amigos.
36:35 p: Entonces, ¿cuántas bananas realmente necesitará Juanita?
36:38 e: ¡Ah! Necesita veinte.
36:39 p: Necesita veinte bananas. Y ella necesita saber cuánto dinero necesitaría para comprar las veinte bananas. Y entonces ella ¿qué tiene? Estos doscientos pesos ¿por cuántas bananas fueron?
36:57 e: Estos fueron por cuatro bananas.
36:58 p: Cuatro bananas, entonces para completar veinte bananas ¿qué tiene que hacer?
37:04 e: Se, se (...) ¿suma?
37:14 p: ¿Tiene que comprar más bananas?
37:15 e: Sí.
37:16 p: ¿Cuantas más?
37:47 e: (...) (...) dieciséis, diecisiete, dieciocho, diecinueve, veinte.
38:02 e: ¿Necesita dieciséis?
38:03 p: ¡Ajá! Necesita dieciséis bananas más y ¿cuánto le costarán esas dieciséis bananas más?, si tú sabes que cuatro valen doscientos.
38:16 e: Si cuatro valen doscientos, más uno, trescientos.
38:34 p: ¡No! Cuatro bananas valen doscientos.
39:16 e: (...) (...) con cuatro bananas más ya serían cuatrocientos.
39:18 p: Exactamente, con cuatro bananas más serían cuatrocientos, perfecto. (...) ¿cuántas bananas llevarías aquí en total? (...) ¿cuántas bananas llevas hasta ahora?
39:46 e: Ahora llevo (...) ocho.

39:47 p: Llevas ocho bananas y llevas cuatrocientos pesos.
39:58 e: ¡Ah! Más cinco.
39:59 p: ¡Y por qué cinco?
40:02 e: Más otras cuatro.
40:04 p: Más otras cuatro. Porque tú sabes cuánto valen doscientos, pero no sabes todavía cuánto valen cinco. Más otras cuatro.
40:14 e: Cuatrocientos y doscientos.
40:16 p: Serían seiscientos, más otras cuatro ya serían seiscientos.
40:22 e: Y ahora tiene doce bananas.
40:23 p: Y ahora tiene doce bananas.
40:48 p: (...) más.
40:49 e: (...) (...) más cuatro bananas (Obando, 2015).

Viñeta:
El profesor inicia solicitando a la estudiante una lectura del enunciado verbal que presenta el problema (entrada 36:07), para luego, en la entrada 36:35 y 36:39, preguntar por la cantidad de bananas que se tienen que conseguir, y por la cantidad de bananas que se pueden comprar con $200. De esta manera llama la atención sobre la naturaleza de las cantidades involucradas. En la entrada 36:58 pregunta a la estudiante qué tiene que hacer para completar las 20 bananas, y ella responde con el cálculo de la cantidad de bananas que le falta conseguir a Juanita, a saber, 16 bananas más (entradas 37:47 y 38:02). Si bien esto es cierto, con esta idea no es fácil encontrar la cantidad de dinero que necesita para comprar las 20 bananas. Al final de esta entrada la expresión del profesor "si tú sabes que cuatro valen 200" es fundamental en el cambio de estrategia de la estudiante: en la entrada 38:16, la estudiante intenta tomar como punto de partida esa relación de "cuatro a 200", agregando de una en una (al cuatro), pero al 200 le suma 100, duda, y regresa nuevamente a parafrasear la relación "cuatro 200", y ante esto el profesor enuncia nuevamente la relación "cuatro bananas valen 200". Nuevamente opera un cambio en la estrategia desarrollada por la estudiante: "con cuatro bananas más ya serían 400" (entrada 39:16), lo que evidencia que ha comprendido el papel que juega dicha relación en el proceso de solución del problema. Esto es ratificado por el profesor que parafrasea lo dicho por la estudiante, y termina con una pregunta que pone la atención sobre la cantidad de bananas acumuladas "¿cuántas bananas llevas hasta ahora?". Ante esta pregunta la estudiante responde "ahora llevo ocho", y el profesor (parafraseando a la estudiante) enuncia los totales parciales "llevas ocho bananas y llevas $400". Luego de una pequeña vacilación, la estudiante retoma la línea argumental agregando otras cuatro bananas (entrada 40:02), y agregando $200 al total de dinero (entradas 40:14 y 40:16). Todo esto es reafirmado por el enunciado del profesor en la entrada 40:16, en donde afirma que ya se tendrían entonces

$600 en dinero, y la estudiante responde que se tienen ahora 12 bananas (entrada 40:22). El procedimiento continúa de esta manera.

[...] es necesario llamar la atención sobre el papel que juegan las intervenciones del profesor, desde el punto de vista discursivo, en la manera como la estudiante va configurando su acción y en la forma como va fijando su atención en elementos claves de la situación: hasta la entrada 37:16 cuestiona, interroga a la estudiante; en la entrada 38:03 hace una afirmación; en la entrada 38:34 enuncia una negación; de la entrada 39:16 en adelante parafrasea a la estudiante. Cada uno de esos posicionamientos del profesor genera también diferentes posicionamientos en la estudiante (centrar la atención sobre las cantidades relevantes para la descripción de evento; fijar la atención sobre los cambios en estas cantidades; comprender la relación [razón] que gobierna el cambio en las cantidades; direccionar los procedimientos que se van realizando; ganar confianza en que se ha tomado el camino correcto, etc.) que van dando forma a la acción de estos últimos.

En suma, lo anterior muestra varios elementos claves en la comprensión de la multiplicación: (1) diferenciar la naturaleza de cada uno de los sistemas de cantidades, (2) identificar que de acuerdo con las condiciones del evento que da origen a la tarea, al interior de cada sistema de cantidades hay un movimiento en los valores que pueden tomar las cantidades y, finalmente, (3) que ese movimiento de los valores de las cantidades está gobernado por una condición, para este caso, la razón *4 bananas son 200 pesos,* a este nivel objetivada a partir de una expresión verbal. En ambos casos la tarea se resuelve favorablemente por la comprensión de esta razón, y por la coordinación del doble conteo que se desencadena a partir de dicha razón, lo que garantiza dos cosas: una, cada que haya un cambio en una cantidad hay un cambio en la otra, y dos, el cambio se coordina a partir de una regularidad (cada que se agreguen cuatro bananas a la cantidad de bananas, se deben agregar $200 a la cantidad total de dinero).

[...] [En la figura 5.3] se muestran procedimientos a partir de los cuales se puede afirmar plena conciencia del proceso de covariación entre los dos sistemas de cantidades, pues se explicita que por cada vez que se repita la cantidad 4 dulces, se repite la cantidad $200. Lo que cambia es la manera como se controla este doble proceso de variación [...]. Esto implica conciencia de la relación *cada cuatro dulces se corresponden con doscientos pesos.* Tener conciencia de este tipo de relaciones es clave para la comprensión de una idea de razón y para el uso instrumental de esta idea de razón en la comprensión de los conceptos propios de la multiplicación. Es más, estos últimos casos muestran el valor instrumental de las formas de representación tanto de las cantidades como de sus procesos de variación [...] en tanto que son elementos fundamentales en la objetivación de los aprendizajes sobre la multiplicación (Obando, 2015).

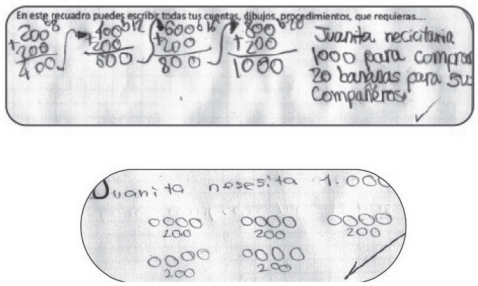


Figura 5.3 Procedimientos empleados por niños de grado 3.º en los que se evidencia que identifican la covariación

Fuente: tomada de Obando (2015).

Análisis preestructurados

El procedimiento de *análisis preestructurado* se emplea cuando se opta por realizar análisis deductivos, el tiempo es limitado, las preguntas y el marco de referencia están bien especificados y se tiene un plan preciso para la toma de datos. Consiste en prever un esquema analítico antes de comenzar el registro de la información. Antes de ir a los datos se define un conjunto de categorías de manera explícita con ejemplos prototipos y reglas claras sobre el contenido de cada categoría. Los investigadores desarrollan un mecanismo para distinguir qué datos corresponden a una categoría y crean formatos para ir ubicando los datos en sitios específicos. Generalmente se prevén espacios para visualizar los datos esquemáticamente, espacios para elaborar textos analíticos de los esquemas visuales que se están observando y, si es pertinente, hacer conteos de datos.

Con el formato elaborado, los investigadores comienzan el registro de información identificando cuáles datos pertenecen a una categoría y diligenciando los formatos específicos para cada dato o conjunto de datos, según la categoría a la que pertenezcan. Como señala Durango (2017), generalmente se emplea la interpretación directa de ejemplos individuales de datos para identificar indicadores de las categorías. Es la suma categórica de ejemplos la que permite concluir sobre las particularidades del fenómeno.

El formato se puede ir revisando y modificando para ajustarlo a los datos obtenidos, para completar información o para ganar claridad. Eventualmente se formulan reglas específicas para delimitar qué dato se organiza en una categoría particular y, en caso necesario, reformular el conjunto de categorías.

El procedimiento de hacer análisis preestructurados tiene la ventaja de que el análisis puede terminar simultáneamente con el registro de información y la construcción de los datos. Es un recurso para focalizar la construcción de datos y dar fluidez al análisis, manteniendo una visión holística del proceso que se hace y de los resultados que se buscan. Es un procedimiento relativamente rápido en términos de tiempo, pero conviene desarrollarlo simultáneamente con otros procedimientos y buscando la retroalimentación de los informantes, para verificar que no se hayan introducido sesgos o se hayan hecho análisis apresurados.

Ejemplo 5.9

Presento un ejemplo de formato (véase tabla 5.10) basado en un esquema sugerido por Schwarz (2015). Las letras A, B, C son valores nominales o numéricos (ordinales o no), que discriminan el tipo de datos correspondientes a una categoría, según una dirección, un grado o un rango.

Tabla 5.10 Ejemplo de formato para organizar la categorización en un análisis preestructurado

Categoría	*Valor de la categoría*	*Definición*	*Reglas para definir si un dato se ajusta a la categoría*
Cat 1	A		
	B		
	C		
Cat 2	A		
	B		
	C		

Categoría	*Valor de la categoría*	*Ejemplos*	*# Ocurrencias*
Cat 1	A	Dato P: Dato Q:	
	B	Dato R:	
	C	Dato S: Dato T: Dato U:	
Cat 2	A	Dato V:	
	B	Dato W: Dato X:	
	C	Dato Y: Dato Z:	

Fuente: adaptación de un esquema sugerido por Schwarz (2015).

Ejemplo 5.10

Como parte de sus análisis, Fiallo (2010) estudió la posible unidad cognitiva referencial entre los argumentos y las demostraciones elaboradas por estudiantes

de grado 10.º, al resolver problemas relacionados con razones trigonométricas con el apoyo de un programa de geometría dinámica. Decidió valerse de la propuesta de Pedemonte (2007; citado en Fiallo, 2010) que toma en cuenta los sistemas de representación usados por los estudiantes, las heurísticas empleadas para trabajar sobre las representaciones, el marco de referencia en el que se basan y las concepciones y conocimientos puestos en juego al momento de proponer una conjetura y en el desarrollo de la demostración de esta. Construyó una tabla para organizar y analizar la información procedente del análisis de los datos (véase tabla 5.11). La comparación entre los componentes incluidos en los diferentes campos previstos para rastrear la argumentación y la demostración le permitió decidir sobre la posible unidad cognitiva referencial.

Tabla 5.11 Ejemplo de formato empleado por Fiallo (2010) para ubicar los datos y determinar la posible unidad cognitiva relacional

Argumentación (enunciado conclusión-conjetura)			*Demostración (enunciado conclusión-demostración)*		
Tipos de datos: *an:* analítico; *dc:* dibujo de Cabri; *defpc:* definición en el plano cartesiano; *g:* geométrico; *gproc:* generalización del proceso; *itrig:* identidad trigonométrica; *leysig:* ley de los signos; *n:* numérico; *p:* perceptivo; *pig:* propiedad de la igualdad; *pm:* propiedad matemática; *proc:* proceso; *rang:* relación entre ángulos; *relana:* relación analítica; *relgeo:* relación geométrica; *Rp:* refutación potencial.					
Operadores	*Sistema de representación*	*Estructura de control*	*Operadores*	*Sistema de representación*	*Estructura de control*
Producciones y comportamientos. ¿En qué condiciones hay relación entre datos y enunciados?	Expresión lingüística o no de los problemas, los operadores, los controles y las acciones	Juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores	Producciones y comportamientos. ¿En qué condiciones hay relación entre datos y enunciados?	Expresión lingüística o no de los problemas, los operadores, los controles y las acciones	Juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores
Ejemplos: *dc:* dibujo de Cabri. *deftr:* definición triángulo rectángulo. *demal:* demostración algebraica. *ejn:* ejemplo numérico. *genen:* generalización del enunciado. *pig:* propiedad de la igualdad. *ptrans:* propiedad transitiva. *ptrig:* propiedad trigonométrica.	*al:* algebraico. *an:* analítico. *dc:* dibujo de Cabri. *dg:* dibujo geométrico. *fdc:* figura dinámica de Cabri. gestos. *ln:* lenguaje natural.	*arr:* arrastre en Cabri. *dg:* dibujo geométrico. *ej:* ejemplo. *n:* numérico. *p:* perceptivo. *p-n:* perceptivo numérico. *t:* teórico.	Ejemplos: *dc:* dibujo de Cabri. *deftr:* definición triángulo rectángulo. *demal:* demostración algebraica. *ejn:* ejemplo numérico. *genen:* generalización del enunciado. *pig:* propiedad de la igualdad. *ptrans:* propiedad transitiva. *ptrig:* propiedad trigonométrica.	*al:* algebraico. *an:* analítico. *dc:* dibujo de Cabri. *dg:* dibujo geométrico. *fdc:* figura dinámica de Cabri. gestos. *ln:* lenguaje natural.	*arr:* arrastre en Cabri. *dg:* dibujo geométrico. *ej:* ejemplo. *n:* numérico. *p:* perceptivo. *p-n:* perceptivo numérico. *t:* teórico.
Tipo de marcos: *al:* algebraico; *an:* analítico; *g:* geométrico; *n:* numérico; *p:* perceptivo; *trig:* trigonométrico. *trigpc:* trigonometría en el plano cartesiano; *tritr:* trigonometría del triángulo rectángulo.					

Fuente: tomada de Fiallo (2010).

Ejemplo 5.11

En la investigación de Guacaneme (2016) los datos correspondientes al segundo escenario de su investigación (fragmentos de documentos escogidos como fuente informativa para el análisis del papel formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la formación de profesores de matemáticas) se sometieron al siguiente procedimiento que define tres niveles analíticos del contenido: en el nivel de superficie, inicialmente se hizo una descripción de la información contenida en ellos; en un segundo nivel o nivel analítico, se clasificó su contenido a través de dos categorías preestablecidas (¿qué? y ¿para qué?); en el tercer nivel, interpretativo, se elaboró un texto que le asignó sentido a la investigación histórica analizada en relación con el conocimiento del profesor. En un esquema como el que está en la tabla 5.12, Guacaneme presenta el conjunto de respuestas a la pregunta: ¿Qué historia de la matemática aporta al conocimiento del profesor de matemáticas?

Tabla 5.12 Formato para organizar los datos correspondientes a la categoría *¿qué?*

¿Qué?	Objeto de estudio	Biografías y cronología
		Fuentes primarias, secundarias, terciarias
		Teorías/Subdisciplinas/Disciplinas
		Temas/Procesos/Problemas
		Pensamiento matemático
		Asuntos metamatemáticos o metahistóricos
		Relación de la HM con lo educativo
	Tratamiento	Internalista/Externalista
		Relato/Análisis
		Evolutiva/Situada

Fuente: tomada de Guacaneme (2016).

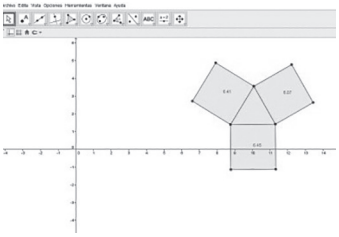
Ejemplo 5.12

En su investigación, Durango (2017) empleó el modelo de argumentación propuesto en su marco teórico para analizar las intervenciones de los participantes. Por ejemplo, en la tabla 5.13 se aprecia cómo intervino sobre la transcripción 7 correspondiente al primer segmento locutivo de sus datos. Empleó un cuadro adicional (véase tabla 5.14), que acompaña cada transcripción, en el que caracterizó cada palabra según el marco.

Tabla 5.13 Transcripción usada para caracterizar los segmentos locutivos

Transcripción 7: Colega 1, Carlos e investigador (video 1)		
31	Colega 1:	¡Verificar para triángulos que no son rectángulos!

Tabla 5.13 (continuación)

Transcripción 7: Colega 1, Carlos e investigador (video 1)		
32	Carlos:	Es decir, ¿trazo un triángulo cualquiera? (Realiza la siguiente construcción en GeoGebra e incluye las medidas de las áreas de los cuadrados) 
33	Carlos:	¿Qué relación puedo sacar de aquí? (...) ¿Empleando la calculadora?
34	Carlos:	6.1 – 6.45 es igual a 0.06. No da igual, no corresponde, es distinto. 1.63 + 6.45 claramente no va a dar 6.51. No observo ninguna relación. Puede que haya, pero no observo ninguna
35	Investigador:	¿Habría qué (...)?
36	Carlos:	Habría que entrar a mover (...). Podríamos entrar a mover (...). No sé (...) si subo más (...)
37	Colega 1:	¡Ahí sí puedes concluir algo!
38	Carlos:	Digamos que el ángulo del triángulo no es recto, mientras lo voy tornando recto, los dos catetos se van acercando a la suma de la hipotenusa
39	Carlos:	Quiero ver algo [Él experimenta con varios triángulos]
40	Carlos:	Siempre el área de los lados de cualquier triángulo de los dos catetos es mayor al del lado mayor. Pensaríamos. ¡No lo tengo a ciencia cierta!

Fuente: tomada de Durango (2017).

Tabla 5.14 Categorización de segmentos locutivos para analizar la argumentación

Turno	*Elemento teórico*	*Descripción*
32	Indicador de argumentación	Es decir
32	Cualificador modal	Cualquiera
34	Indicadores de argumentación	No, pero no
34	Cualificadores modales	Ninguna, puede
32-34	Argumento con intención de explicar	Carlos ofrece otras afirmaciones sobre triángulos que no contienen un ángulo recto al aplicar el teorema de Pitágoras
36	Indicador de argumentación	Mientras
40	Cualificadores modales	Siempre, cualquier
40	Indicador de argumentación	No

Fuente: tomada de Durango (2017).

La interpretación directa de ejemplos individuales se hizo identificando en las transcripciones: los indicadores de argumentación y sus componentes, los recursos retóricos y la intención de los segmentos locutivos. Estos son elementos del modelo interpretativo sugerido por Durango (2017). La suma categórica de ejemplos le permitió concluir cómo argumentaba cada uno de los participantes-informantes en la investigación.

Conteos

Como ya he mencionado, este libro se centra en estrategias que se valen ante todo de procedimientos cualitativos. Sin embargo, eventualmente estas se acompañan de algunos procedimientos cuantitativos, en particular de *conteo,* cuando la cantidad de datos, individuos, observaciones en cada categoría, etc. (a los que en adelante nos referiremos como elementos para simplificar la escritura), así lo ameritan y estos procedimientos son útiles en los análisis. Es totalmente innecesario sacar porcentajes, por ejemplo, cuando se está analizando un número de elementos inferior a veinte o treinta. En ese caso, es preferible proporcionar las cantidades correspondientes a cada caso.

Cuando el número de elementos es suficiente para hacer análisis sobre cómo se distribuyen estos a lo largo de un conjunto de valores con relación a una variable, se emplean procedimientos de conteo. También es posible llevar a cabo alguna medición que permita identificar su localización o su dispersión. Nos referimos a variables para aludir a características, rasgos, propiedades o atributos de los elementos a los que se les pueden asignar valores nominales o que toman valores numéricos. Estos últimos pueden ser: ordinales (según tenga sentido ordenarlos), de intervalo (según tenga sentido comparar las distancias entre pares de valores, pero el valor cero es decidido mediante una convención) o de razón (según tenga sentido comparar las distancias entre pares de valores y usar el cero absoluto) (Herrera y Ruiz, 2013).

Los conteos más empleados en la descripción de variables son las distribuciones de frecuencias. Estas pueden expresarse en número de valores, proporciones o porcentajes. También hay diversas formas de presentar las frecuencias, mediante diagramas de barras, circulares, de anillos o de líneas.

Las medidas de localización son resúmenes estadísticos que brindan diferente información sobre los valores de las variables. A continuación, menciono algunos:

- *El promedio o la media.* Es la suma de los valores de una variable dividida por el número de datos; es útil cuando no hay valores anómalos.

- *El percentil.* Es una manera de dividir los datos en dos grupos, según los valores de la variable. Por ejemplo, un percentil 20 corresponde al valor de la variable que hace que el 20 % de los datos queden en un grupo y el 80 % en el otro.
- *La mediana.* Corresponde al valor que ocupa el lugar central entre todos los valores del conjunto de elementos cuando estos están ordenados en forma creciente o decreciente. Corresponde al percentil 50. Si el conjunto de elementos es par, la mediana corresponde al promedio de los dos datos centrales.
- *La moda.* Es el valor que más veces se repite. Si no se repite ningún valor, no existe moda. Si hay dos valores que tengan igual mayor frecuencia, existen dos modas.
- *Los cuartiles.* Son los tres valores que dividen a un conjunto de datos ordenados en cuatro partes porcentualmente iguales. El primero se obtiene calculando la mediana de la primera mitad de los valores, el segundo es la mediana y el tercero es la mediana de la segunda mitad de valores.

Las medidas de dispersión expresan niveles de heterogeneidad o de dispersión de los valores de los elementos. La más empleada es la desviación estándar que determina qué tanto se alejan los valores del promedio. Se halla calculando el promedio de las diferencias entre cada valor y el promedio de los valores del conjunto de elementos.

Correlaciones

En algunas ocasiones, cuando la cantidad y características de los elementos lo hacen posible, además de hacer conteos puede interesar describir cómo se relacionan dos o más variables que caracterizan los datos para describir, explicar o hacer inferencias sobre el fenómeno en estudio. En esos casos se pueden hacer *estudios correlacionales.* Estos miden el grado en que una variable da información sobre la otra o cómo cambia una en función de la otra (Herrera y Santana, 2013).

Una forma visual de establecer una correlación entre dos variables es mediante un diagrama de dispersión. Este consiste en una nube de puntos que se ubica en un plano cartesiano, en el cual cada pareja de puntos *(X, Y)* corresponde a los valores de las dos variables para cada elemento. Según se ubiquen los puntos se examina su tendencia para identificar el tipo de relación. En general, puede haber una correlación lineal, cuadrática, cúbica, exponencial o logarítmica (positiva o negativa), con un patrón no matemático, o puede que no se identifique ninguna correlación.

Herrera y Santana (2013) distinguen tres tipos de estudios correlacionales:

- *Estudios descriptivos.* Son aquellos en donde se busca establecer si existe relación entre dos o más variables y, de ser así, medir su grado, es decir, la "fuerza" (qué tan clara es la asociación entre las variables) de la asociación y la "dirección" de esta (el tipo de cambio simultáneo de las variables), cuando estas tengan sentido. Cuando dos variables cambian en el mismo sentido, aumentando o disminuyendo, se habla de correlaciones directas o positivas; de lo contrario, si las variables cambian en sentido inverso, la correlación es inversa o negativa. Cuando se busca establecer la asociación entre más de dos variables se emplean métodos estadísticos multivariados.
- *Estudios explicativos.* Son aquellos en donde se busca proponer una explicación acerca de cómo y por qué sucede el fenómeno, examinando el rol de las variables.
- *Estudios predictivos.* Son aquellos en donde se examina la correlación positiva entre dos o más variables para predecir o prever algún fenómeno. En investigación con enfoque fenomenológico o sociocrítico la predicción tiene el matiz de plausibilidad, en tanto no se busca afirmar que el fenómeno pasará forzosamente, sino que, en circunstancias similares, podría pasar.

De acuerdo con el tipo de variables en juego, la investigación en educación matemática ha adoptado dos formas de medir la correlación entre dos variables que son propias de las ciencias sociales: el coeficiente de correlación de Pearson y el índice de correlación de Spearman. Pero solo es posible valerse de ellos si los valores de las variables en juego son "de razón", es decir, tiene sentido comparar las distancias entre pares de valores y factible asignar un cero absoluto en la escala de valores.

El coeficiente de correlación de Pearson (r_{xy}) mide la posible asociación lineal entre los valores de dos variables numéricas de razón (x, y) si cada variable tiene una distribución normal. Solo para el caso de gran cantidad de datos la distribución normal puede darse por cierta; de lo contrario, hay que verificarla para cada variable antes de usar la fórmula. El cálculo del coeficiente de correlación se hace mediante la siguiente ecuación:

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{(n-1)s_x s_y}$$

La fórmula se basa en la sumatoria del producto de las distancias de cada valor de la variable (x y y) con respecto a su promedio $\bar{x}$, $\bar{y}$. Para calcular la correlación, el investigador calcula el promedio de valores de cada variable,

luego halla la diferencia entre cada valor y el promedio respectivo, hace el producto para cada dato y calcula la suma. Esta se divide entre el producto del número total de datos menos uno (n - 1) por la desviación estándar de cada variable (S_x, S_y).

El coeficiente obtenido indica la medida de la fuerza y la dirección de la asociación entre las dos variables, teniendo en cuenta que:

- La dirección de la asociación se indica con el signo. Índices positivos indican correlación lineal positiva e índices negativos indican correlación lineal negativa.
- El número obtenido al hacer el cálculo está en un rango entre -1 y 1. Estos valores indican la máxima correlación negativa o positiva.
  Valores cercanos a -1 o 1 indican que la correlación es fuerte.
- El valor 0 indica ausencia de correlación según el coeficiente de Pearson, pero esto no significa que no exista otro tipo de asociación entre las variables.
- Valores cercanos a 0 indican muy poca correlación.

Cabe aclarar que el coeficiente de correlación no es un porcentaje ni una medida que corresponda a una escala de intervalo. Diferencias numéricas iguales no significan igual asociación, ni un índice que sea el doble de otro indica doble asociación. El valor del coeficiente de correlación brinda información que depende de las circunstancias específicas y debe interpretarse a la luz de estas (Herrera y Santana, 2013).

El índice de correlación de Spearman (${}_sr_{xy}$) mide la relación lineal entre dos variables numéricas de razón cuando no se tienen muchos datos o las variables no se ajustan a una distribución normal. El cálculo se realiza mediante la siguiente ecuación:

$$ {}_sr_{xy} = 1 - \frac{6\sum(R_{xi} - R_{yi})^2}{n(n^2 - 1)} $$

Para hacer el cálculo se ordenan los valores de cada variable y se asigna a cada valor un número que corresponde al orden (o rango: R_{xi}, R_{yi}). Si la correlación es máxima y positiva (índice 1), al ordenar los datos de menor a mayor con relación a una variable, estos también quedarán ordenados de menor a mayor con respecto a la otra variable. Con n como número total de datos se aplica la fórmula establecida en la ecuación.

Si las variables son nominales, es decir, si el número asignado a un dato representa un rasgo, característica o atributo, pero no es un valor ordinal, de intervalo

(y por lo tanto la dirección de la asociación no tiene sentido) o de razón, no es correcto usar el coeficiente de correlación de Pearson o el índice de correlación de Spearman. Tampoco es apropiado suponer que si las variables son numéricas de razón la correlación solo podrá ser lineal o no y por este motivo no conviene limitarse a usar solo el coeficiente o el índice explicados. Puede suceder que sí haya correlación, aunque no lineal, y se pierda información valiosa al no considerar que esta puede ser cuadrática, cúbica, exponencial, logarítmica, o tener un patrón no matemático.

Para variables nominales puede usarse la conocida prueba de independencia llamada "ji-cuadrado (X^2)". Mediante esta prueba se estima la correlación entre dos variables suponiendo inicialmente, a manera de hipótesis, una total independencia entre ellas. Si esta suposición no resulta respaldada por los datos se concluye que las variables sí se correlacionan. Para llevar a cabo la prueba de hipótesis se construye una matriz en la que las filas corresponden a los valores encontrados en los datos para una variable y las columnas contienen los valores encontrados en los datos para la otra variable (véase tabla 5.15). Cada celda incluye el número de datos de los valores correspondientes a ambas variables.

Tabla 5.15 Ejemplo de matriz para organizar los datos y hacer la prueba X^2, suponiendo 54 datos

	Valor 1 (Variable A)	*Valor 2 (Variable A)*	*Valor 3 (Variable A)*	*Total*
Valor 1 (Variable B)	2	4	2	8
Valor 2 (Variable B)	8	14	12	34
Valor 3 (Variable B)	2	6	4	12
Total	12	24	18	54 datos

Fuente: elaboración propia.

La prueba se basa en la comparación del valor observado en cada celda contra un valor esperado o teórico que se supone para el caso de la total independencia. Por ejemplo, siguiendo la explicación intuitiva de Herrera y Santana (2013), si la variable A no tiene nada que ver con los valores que se obtienen para la variable B, todas las celdas de la columna correspondientes al valor 1 de la variable A deberían tener un 4. Sin embargo, en una celda se reporta 8, que es el doble de ese valor. Además, todas las celdas de la columna para el valor 2 de la variable A deberían tener un 8 y hay una diferencia notoria entre el valor para la primera (4) y para la segunda fila (14). Y en todas las celdas correspondientes a la columna para el valor 3 de la variable A debería

haber un 6 y en la segunda fila hay el doble (12). Un estudio similar debería hacerse para la variable B. Existe un procedimiento estandarizado en el que se usa la siguiente ecuación para el cálculo de ji-cuadrado (X^2), en la que f es la frecuencia observada en cada celda y e la frecuencia esperada:

$$x^2 = \sum \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

Cuando existe total independencia entre las variables, la diferencia entre las frecuencias observadas y esperadas será 0. Pero si hay correlación, el valor de ji-cuadrado será alto y se rechaza la hipótesis de la independencia. Existen paquetes estadísticos que permiten comparar el valor obtenido contra unos límites prefijados y la significancia del valor obtenido en la prueba. Por ejemplo, según la clasificación de Cohen (1988; citado en Herrera y Santana, 2013), correlaciones con valor de 0.1 deberían interpretarse como débiles, valores de 0.3 como de mediana magnitud y valores por encima de 0.5 indican un efecto fuerte. Sin embargo, puede ocurrir que algunas correlaciones pequeñas (0.15, 0.2) resulten estadísticamente significativas si se tienen muchos datos.

Para variables nominales que solo adoptan dos valores, se puede emplear el coeficiente de correlación de Mathews o coeficiente phi (φ). Tiene el mismo principio de la prueba de independencia ji-cuadrado, pero se usa la siguiente ecuación:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$$

Los valores de *a, b, c, d* corresponden a los dos posibles valores de cada variable, como indica la tabla 5.16.

Tabla 5.16 Representación de valores con los que se calcula el coeficiente de correlación de Mathews (φ) para variables dicotómicas

	Valor 1 (Variable A)	*Valor 2 (Variable A)*	*Total*
Valor 1 (Variable B)	a	b	(a + b)
Valor 2 (Variable B)	c	d	(c + d)
Total	(a + c)	(d + b)	(a + b + c + d)

Fuente: elaboración propia.

Herrera y Santana (2013) alertan sobre algunas precauciones que hay que tener cuando se usan los coeficientes de correlación:

- No hay que confundir correlación con causalidad. Esta se da solo si hay relación temporal y no hay más variables influyentes.
- No se puede suponer siempre que una correlación pueda modelarse mediante una función matemática, pues no todos los patrones de asociación son de ese tipo.
- Hay que tratar de evitar usar solo parte de la información proporcionada por los datos al centrar la atención solo en la búsqueda de correlaciones.
- No hay que confundir la independencia de las variables con valores negativos de los índices de correlación. Los valores negativos definen la dirección de la asociación, para el caso de las variables numéricas de razón.
- No siempre dos variables que correlacionan positivamente están realmente asociadas. Hay que examinar la influencia de otras variables en la asociación obtenida.

Triangulación

La triangulación es una herramienta heurística empleada frecuentemente en investigación con enfoque fenomenológico o sociocrítico. La denominación es tomada metafóricamente de procesos de orientación espacial que se refieren al uso de varios puntos de referencia para ubicar la localización de un objeto. En investigación se busca chequear si "se ven las mismas cosas en diferentes momentos y lugares" (Schoenfeld, 2000). Para ello se buscan diversas fuentes de información acerca del fenómeno y se indaga si ellas portan mensajes consistentes. Entre más independientes sean las fuentes de información los hallazgos serán más robustos.

Mediante la triangulación es posible ampliar la comprensión de un fenómeno, reducir la probabilidad de hacer interpretaciones equivocadas o sesgadas, clarificar significados, verificar la repetitividad de un suceso, identificar diversas vías de interpretación, elucidar hallazgos divergentes y dar fiabilidad o credibilidad a los hallazgos (Denzin y Lincoln, 1998; Janesick, 1998; Stake, 1998; Moschkovich y Brenner, 2000; Schoenfeld, 2000; Mok y Clarke, 2015). Generalmente, en una investigación es posible identificar cuatro tipos de triangulación:

- *Triangulación de fuentes.* Cuando se emplea más de una fuente de datos en el estudio y se confirma el análisis hecho sobre un conjunto de datos con el obtenido mediante otra fuente.
- *Triangulación de investigadores.* Cuando varios investigadores analizan el mismo conjunto de datos, confrontan visiones individuales, las negocian y llegan a interpretaciones similares.

- *Triangulación de estrategias.* Cuando los investigadores emplean más de una estrategia para estudiar el mismo problema desde diferentes facetas y fortalecer el análisis. Se puede llevar a cabo combinando diferentes acercamientos al escenario, a los participantes y a experiencias concretas, o mezclando formas analíticas diversas.
- *Triangulación teórica.* Cuando los investigadores emplean más de una perspectiva teórica para analizar el mismo conjunto de datos.

Ejemplo 5.13

Castro (2011) tiene una perspectiva sobre la triangulación relacionada con varias formas de concebir los fenómenos a estudiar, que están inmersas en especificidades culturales, sociales e institucionales. Señala como recursos de triangulación: a) el uso de varios métodos para explorar los datos, b) el uso de varias fuentes de datos, c) el empleo de unos datos recopilados para construir nuevos instrumentos de recolección de datos y d) la contrastación de los análisis entre varios investigadores.

Ejemplo 5.14

Bohórquez (2016) menciona como recursos de triangulación en su investigación: a) el uso de diferentes fuentes de datos, b) múltiples líneas de evidencia o argumentos que apuntan a las mismas interpretaciones o conclusiones y c) "múltiples ojos" sobre los mismos datos.

Ejemplo 5.15

Durango (2017) señala que trianguló el análisis que dio lugar a la suma categórica de ejemplos mediante diversas fuentes de datos, dos investigadores y contrastando teorías. En el caso de las fuentes, la triangulación se hizo gracias al uso de información proveniente de dos escenarios: el Seminario de Práctica Pedagógica y el aula de clase donde los participantes informantes (futuros profesores) actuaban como profesores. En el caso de los investigadores, la triangulación se hizo con apoyo del director de la tesis, quien observó los videos y escuchó los audios correspondientes a las transcripciones analizadas, con el fin de corroborar las interpretaciones hechas por Durango, refutarlas o complementar el análisis. Y la triangulación teórica se hizo al compartir el modelo interpretativo con otros investigadores, quienes revisaron y contrastaron la validez de las conceptualizaciones.

Resultados del análisis y formas de presentarlos

Los resultados del análisis son conjuntos de afirmaciones que sintetizan los hallazgos acerca del fenómeno para describirlo, explicarlo o hacer inferencias

relacionadas con este. Todo ello contribuye al cumplimiento de los objetivos de la investigación y al desarrollo del campo investigativo en el que se inscribe el estudio. Las afirmaciones se acompañan de argumentos acerca de las decisiones que se tomaron sobre incluir o no elementos en las descripciones, hacer tal o cual agrupación, proponer un cierto proceso, o sugerir una inferencia. A su vez, la argumentación se coteja con datos representativos que ilustran el razonamiento y con ejemplos de datos discrepantes, que incluyen explicaciones plausibles sobre por qué se apartaron de los demás. Los datos discrepantes contribuyen a reflejar la diversidad de circunstancias en las que suceden los fenómenos y contextualizan los análisis en escenarios reales, además de proporcionar información adicional para dar significado a los datos que sí se ajustan a un patrón.

El ejercicio investigativo se va materializando en diagramas, esquemas y textos discursivos, situados temporal, local y conceptualmente, que reflejan el análisis de los datos, valoran las afirmaciones hechas desde el punto de vista de una tendencia central plausible, promueven un foro de puntos de vista que inscriben los hallazgos en un marco de opciones posibles (Tobin, 2000; Simon, 2019). Todo ello se constituye en los insumos para obtener las conclusiones del estudio. Estas se van elaborando poco a poco, a lo largo del estudio; su forma se va adaptando a los hallazgos y a las inquietudes que se quieren resolver.

Algunos de estos textos pueden ser los siguientes:

- Descripciones de condiciones, circunstancias, acciones, interacciones, eventos, prácticas.
- Representaciones, ilustraciones o modelos de situaciones, fenómenos o prácticas.
- Verificaciones o confirmaciones de hallazgos obtenidos en otros estudios.
- Pruebas de existencia sobre la posibilidad de que suceda un fenómeno bajo ciertas circunstancias.
- Narraciones realistas, impresionistas, confesionales, críticas o literarias (Stake, 1998).
- Interpretaciones de situaciones específicas relacionadas con el fenómeno.
- Listados o tablas de datos organizados por semejanzas, clases, tipos, niveles, momentos, efectos, eventos, temas, fases, ejemplos, indicadores de constructos emergentes o previstos.
- Tablas o esquemas visuales de relaciones o articulaciones entre conjuntos de datos, indicando flujos, procesos, secuencias, asociaciones, estructuras, cambios recíprocos, frecuencias, correlaciones, causalidades.
- Constructos teóricos emergentes.

- Teorías explicativas que establecen relaciones plausibles entre conceptos, conjuntos de conceptos y proposiciones acerca de estos (Stake, 1998).

Ejemplo 5.16

Entre los resultados de mi tesis (Camargo, 2010) propuse tres constructos teóricos para diferenciar estados de participación en la actividad demostrativa, de acuerdo con el grado de autonomía, relevancia y originalidad de la participación. Las definiciones se encuentran en la tabla 5.17.

Tabla 5.17 Constructos teóricos sugeridos por Camargo (2010) como resultado de su investigación

Estados de participación	*Definición*
Participación periférica legítima	Los estudiantes, bajo la dirección y el acompañamiento cercano del profesor, participan en la actividad demostrativa con los recursos disponibles, de manera poco autónoma, genuina, relevante u original
Participación legítima	Los estudiantes, con el apoyo del profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, relevante u original, pero no autónoma
Participación plena	Los estudiantes, en interacción comunicativa con el profesor, participan en la actividad demostrativa de manera genuina, autónoma, relevante y eventualmente original y son reconocidos como líderes por los demás miembros de la comunidad

Fuente: tomada de Camargo (2010).

Una práctica saludable de la investigación es pedir a los participantes informantes que revisen las conclusiones del estudio, critiquen las interpretaciones y vean si su perspectiva del fenómeno queda reflejada en ellas. El reto es que lo que parecía familiar para ellos, les parezca extraño pero plausible y puedan aprender sobre el fenómeno. Esta visión "desde dentro" es importante pues se presta atención a las voces de los participantes. Pero también es importante la perspectiva externa (de los investigadores) para lograr que a los informantes lo extraño les parezca familiar. Como señala Tobin (2000), los investigadores cuya perspectiva está enriquecida por el marco de referencia y el ejercicio analítico hecho en profundidad dan sentido a eventos que podrían haber sido no notados por los protagonistas. A su vez, la perspectiva de los investigadores también puede evolucionar para ajustarse a las perspectivas de los participantes informantes, en procesos de negociación de significados.

Comparto la sugerencia de Miles y Huberman (1994) y Teppo (2015) de presentar los resultados de los análisis acompañados de esquemas visuales que recojan los hallazgos. De acuerdo con estos autores, la presentación de resultados únicamente en forma de reportes escritos no permite apreciar globalmente el ejercicio realizado. Su organización secuencial hace difícil

la visualización de patrones y relaciones obtenidos en los análisis hechos. Por ello es importante sintetizar los hallazgos en esquemas que permitan visualizar un conjunto amplio de resultados en un mismo lugar, organizados de tal forma que exhiban la respuesta a las preguntas de investigación. Los esquemas visuales condensan hallazgos y filtran los resultados relacionados con las personas, los eventos o los procesos que intervienen en el estudio.

Sin embargo, Teppo (2015) retoma las palabras de Glaser cuando alerta acerca de exagerar la confianza en los diagramas como única vía para explicar resultados. Mientras los diagramas permiten visualizar relaciones, es en el texto escrito donde el significado de las relaciones se hace explícito. Un diagrama es un ayuda para comprender el significado de un escrito y no el significado en sí mismo.

Ejemplo 5.17

En la figura 5.4 presento dos esquemas ilustrativos de intervenciones comunicativas como los que empleé en la tesis (Camargo, 2010) para comparar lo que denominé "estilos de participación". Para visualizar aspectos centrales de la participación y destacar elementos importantes que caracterizan su evolución, elaboré esquemas en los que mediante un trazo continuo de una línea poligonal ilustré quién toma la palabra, diferenciando cuándo lo hace un estudiante (extremos superiores de los segmentos) o cuándo lo hace la profesora (extremos inferiores). Adicionalmente, usé las convenciones indicadas para marcar cada intervención en términos de su estilo.

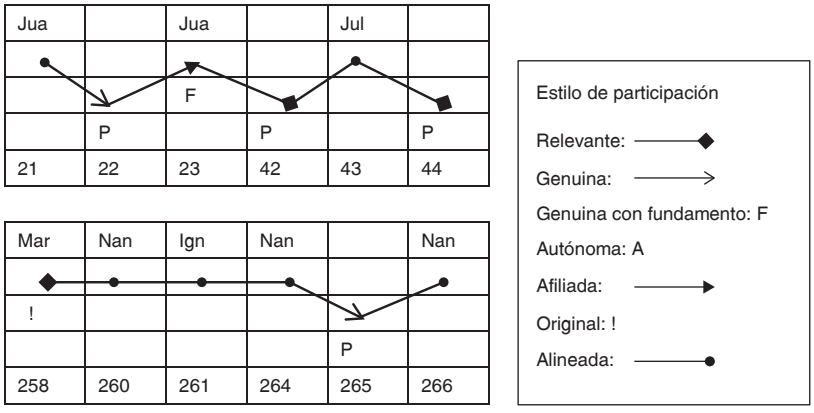


Figura 5.4 Ilustración de la interlocución para destacar los patrones de participación

Fuente: Camargo (2010).

Los esquemas visuales son útiles para resaltar los resultados del estudio porque la organización de la información da la oportunidad de apreciar las comparaciones, exhibir diferencias, mostrar patrones y temas, ver tendencias, etc. Pero para que los esquemas cumplan el efecto esperado, se requiere tener en cuenta los fines de la investigación. Los investigadores necesitan tomar decisiones sobre la información que incluirán, la estructura de tal información y el texto escrito que acompañará el esquema. La generación de un esquema requiere ensayar varias opciones hasta encontrar la que mejor exhiba los datos. Pero siempre hay que tener en cuenta que la forma que se emplee cumpla con una función; es decir, está condicionada a las preguntas de investigación, los datos, los resúmenes, los códigos, las categorías, las notas, los memorandos obtenidos, etc.

Generalmente, los esquemas que se pueden proponer son de dos clases: matrices o redes. En las matrices se disponen los hallazgos en filas y columnas. Estas son útiles para entender la localización y la relación entre eventos y contribuyen a obtener referencias causales, cuando es el caso (Miles y Huberman, 1994). En las redes, se establecen "nodos" que se conectan unos con otros. Esta opción es útil cuando los investigadores quieren centrar la atención en varios asuntos al tiempo.

El tipo de esquema y su organización dependen de lo que se está tratando de dar a entender: una situación general, una cronología detallada, un proceso, el comportamiento de ciertas personas que cumplen diferentes roles, una evolución en el desempeño, etc. También dependen de qué tan complejo sea el estudio y de la envergadura de las inquietudes investigativas. Pueden servir para mostrar una visión panorámica de la exploración hecha, destacar detalles de los análisis realizados o combinar conjuntos de datos.

El contenido de los esquemas puede incluir: frases u oraciones cortas, citas textuales obtenidas en los registros de información, abreviaturas, figuras, líneas etiquetadas, flechas, etc. Algunas redes pueden parecerse a mapas conceptuales o a diagramas de flujo. En todo caso, como he mencionado, los esquemas que acompañan los resultados investigativos requieren textos explicativos que aludan a las características del esquema, reflejen el sentido con el que fue construido, cómo "leen" el esquema los investigadores y qué interpretaciones y conclusiones derivan de este. Generalmente estas aluden a patrones, temas, cadenas de evidencia, relaciones entre variables, comparaciones, conteos, proposiciones "si... entonces...", tendencias, etc.

Ejemplo 5.18

Dierdorp *et al.* (2011; citados en Bakker y Van Eerde, 2015) proponen elaborar una tabla de resultados como la que se muestra para hacer seguimiento al funcionamiento de una conjetura formulada en un experimento de enseñanza, a lo largo de una secuencia de tareas (véase tabla 5.18). Se reúne visualmente información sobre la trayectoria hipotética de aprendizaje, extractos de interacciones en clase y una valoración sobre qué tan bien se ajustan los datos a la conjetura asumida. La comparación entre el aprendizaje pretendido y el observado es útil para el rediseño del proceso y para responder las preguntas de investigación.

Tabla 5.18 Ejemplo de formato para registrar el resultado del análisis para verificar una conjetura formulada en un experimento de enseñanza

Trayectoria hipotética de aprendizaje			*Trayectoria real de aprendizaje*		
Tarea #	*Enunciado de la tarea*	*Qué se esperaba de los estudiantes*	*Extracto de transcripción*	*Observaciones*	*Ajuste entre lo sucedido y lo esperado (se pone + para confirmar al menos 2/3 de estudiantes, ± entre 1/3 y 2/3 de estudiantes y – menos de 1/3 de estudiantes)*
1					
2					
3					
...					

Fuente: adaptada de Dierdorp *et al.* (2011; en Bakker y Van Eerde, 2015).

Ejemplo 5.19

Rojas (2012) ideó tres formatos diferentes para esquematizar los resultados del análisis de su investigación. En el primero, resumió la información de las respuestas individuales y en grupo a las preguntas de las tres tareas propuestas (véase tabla 5.19).

Tabla 5.19 Rejilla propuesta por Rojas (2012) para organizar los resultados de las respuestas de los estudiantes a la tarea 3

Tarea (cuestionario 3)	*Instrumento individual*			*Trabajo en grupo*	*Entrevista (planteamiento inicial)*
Ítem / Estudiante	E1: María E	E2: Daniel A	E3: Daniel D	E1, E2, E3	E1, E2, E3
1. Interpretación de la ecuación $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	Una circunferencia	Circunferencia	Circunferencia. Podría ser una elipse.	Circunferencia	Es una circunferencia
2. ¿Son equivalentes las ecuaciones? $x + y = \frac{1}{x+y}$ $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$	Sí [Muestra paso a paso la equivalencia]	No Porque se tiene $2xy$ y se transforma en $x + y$, lo cual carece de sentido; además se saca la raíz cuadrada a toda la ecuación, lo cual tampoco se puede	Sí Porque al pasar el $(x + y)$ del denominador a multiplicar al otro lado de la igualdad se obtiene $x^2 + y^2 + 2xy - 1 = 0$ Y lo que se hace es pasar el 1 a restar	Sí [Muestra paso a paso la equivalencia]	Reconocen y aceptan las transformaciones requeridas para verificar la equivalencia sintáctica entre las dos ecuaciones
3. La ecuación $x + y = \frac{1}{x+y}$ ¿es una circunferencia?	Sí Sigue siendo una circunferencia [Reitera la equivalencia entre las dos expresiones]	No Los valores de no están elevados al cuadrado, por lo tanto, no es una circunferencia	No Las variables no son cuadradas [Se refiere a que deberían estar elevadas al cuadrado]	No En una las variables están al cuadro y en la otra no	E1: No, pues no. Yo no diría que es una circunferencia. E2: Yo digo que no es una circunferencia [...] uno parte de que la circunferencia como ecuación básica es (...) eh (...) cuando ambas variables están al cuadrado. E3: Sí lo es, pero uno no lo ve así.

Fuente: Rojas (2012).

Rojas empleó un segundo formato para esquematizar el análisis de los sentidos personales otorgados por cada estudiante a una expresión algebraica, a partir de las respuestas individuales y en grupo. Mediante una flecha indicó las funciones semióticas establecidas por los estudiantes, entre la expresión y el contenido de esta (véase figura 5.5). Adicionalmente, usó un formato o "rejilla de síntesis" sobre el reconocimiento de la equivalencia sintáctica de las representaciones comparadas, la articulación o no de sentidos asignados, el reconocimiento de la equivalencia y el posible cambio en la articulación de sentidos (véase tabla 5.20).

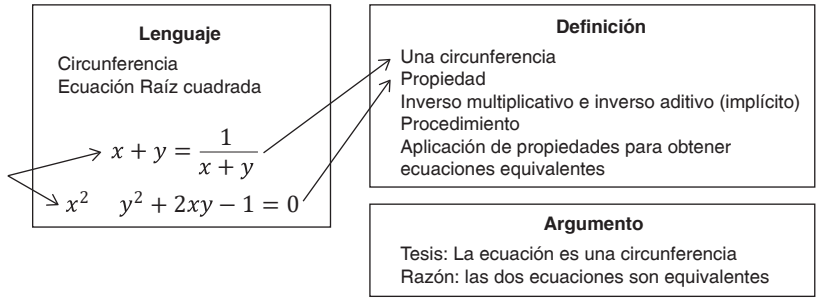


Figura 5.5 Funciones semióticas identificadas en la respuesta de la estudiante María E

Fuente: Rojas (2012).

Tabla 5.20 Rejilla que sintetiza el reconocimiento o no de la equivalencia sintáctica

	María E	*Daniel A*	*Daniel E*	*Pequeño grupo*
Reconoce equivalencia sintáctica	Sí	Sí	Sí	Sí
Articula sentidos asignados a las expresiones	Sí	Sí	Sí	Sí
Cambio (reconocimiento de equivalencia)		✓		
Cambio (articulación de sentidos)		✓	✓	✓

Fuente: tomada de Rojas (2012).

Ejemplo 5.20

Valbuena (2013) consolidó en una tabla los resultados del análisis de contenido con el que estudió las concepciones sobre el conocimiento profesional del pro-

fesor, expresadas por futuros profesores de biología en las respuestas que ellos dieron a un cuestionario (véase tabla 5.21).[1] Las proposiciones que aparecen en la columna del medio son el resultado de buscar una formulación que fuera fiel al contenido de los datos agrupados en ella y a la vez abarcara la mayor cantidad de datos con significado similar, a la luz de varios investigadores. A partir de la tabla, el investigador hizo inferencias sobre las concepciones de los futuros profesores.

Tabla 5.21 Tabla de consolidación de respuestas empleada por Valbuena (2013) para analizar concepciones

Agrupaciones de unidades de análisis o datos	*Proposiciones*	*Interpretaciones (concepciones inferidas)*
Cf.326-E21 (1)	Para enseñar biología basta con saber biología	Concepción A
Cf.274-E15, Cf.277-E1... (26)	Para enseñar biología, además de saber biología, se necesita saber pedagogía y didáctica (comunicar, enseñar, transmitir, instruir, explicar, hacer entender, conocimiento...)	
Cf.273E-4 y otros 2	Para enseñar biología es necesario saber pedagogía y establecer relaciones interdisciplinares	Concepción B
Cf.... (2)	Para enseñar biología basta saber pedagógica y biología y tener gusto por enseñar	
Cf.294-E3	Para saber enseñar biología se necesita saber hacer la transposición didáctica	Concepción C

Ejemplo de código: Cf.331-E22: Cf.: cuestionario a futuros profesores; 331: número correspondiente al dato; 22: número correspondiente al estudiante.

Fuente: Valbuena (2013).

Ejemplo 5.21

Los resultados de Vergel (2014) son relatos detallados de los medios semióticos de objetivación usados por los niños participantes en su investigación para explicar los patrones encontrados en una secuencia. Por ejemplo, en la tarea de decir cuántos círculos tendría la figura número 9 (véase figura 5.6), sin hacer la representación, el diálogo sostenido entre el investigador, la profesora y la estudiante Laura Sofía (véase tabla 5.22) es analizado y reportado como aparece después.

1 Uso este ejemplo porque, aunque no se refiere a una investigación en educación matemática, ilustra el empleo de tablas para consolidar los resultados de un estudio de concepciones.

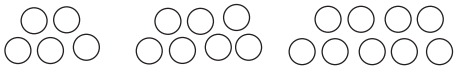
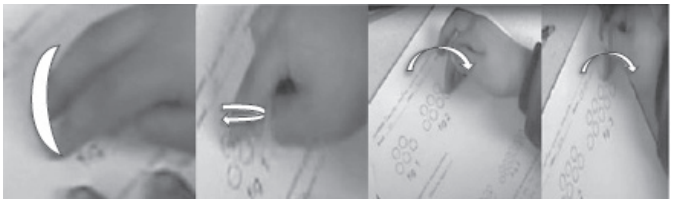
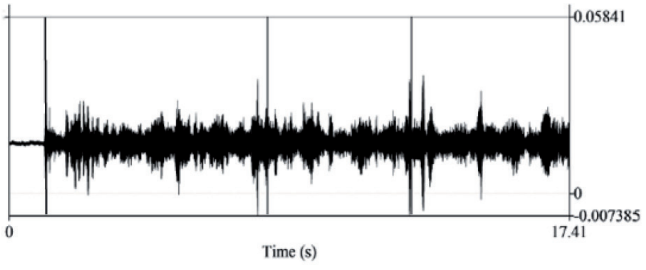


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Figura 5.6 Secuencia figural usada por Vergel (2014) en el estudio de los medios semióticos de objetivación

Fuente: tomada de Vergel (2014).

Tabla 5.22 Secuencia de señalamientos que despliega Laura Sofía al hablar, seguida de un análisis prosódico de las elocuciones

Participante	*Intervención*
Laura Sofía:	Sumando 9 más 9 da 18 y 3 (...) 21.
Profesor R:	Y eso de 9 más 9, 18, ¿cómo lo haces en la figura?
Profesora J:	Sí, enséñame acá en la figura [Señala con su mano la secuencia], ¿cómo es?
Laura Sofía:	Porque 1 más 1 (...) [Tapa con sus dedos el primer círculo de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo] sumándole 3 [Hace circular su dedo alrededor de los tres círculos que sobran en la figura 1 después de contar el primero de la fila de arriba y el primero de la fila de abajo], [Estos tres círculos los denomina "la torre"].
Profesora J:	¿Y en la figura número 2?
Laura Sofía:	(...) [Ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba, de izquierda a derecha] y sumándole 3 [Con su dedo índice señala "la torre"]  1 más 1 da 2, sumándole 3 — 2 más 2 da 4, sumándole 3 — 6, y sumándole 3 

Fuente: tomada de Vergel (2014).

Vergel (2014) sintetiza el análisis de la siguiente manera:

> La solicitud que hace el profesor R, "Y eso de 9 más 9, 18, ¿cómo lo haces en la figura?", provoca una respuesta en Laura Sofía. Ella despliega una serie de señalamientos en la secuencia, los cuales recorren las tres figuras dadas. En la parte de arriba se muestra la cadena de gestos que le permite a Laura Sofía comunicar la objetivación del patrón acudiendo a "la torre" [así denominaron los niños a la configuración de tres puntos con uno arriba y dos consecutivos abajo] como recurso semiótico. En la parte de abajo de la imagen aparece un fragmento de 17.41 segundos del archivo que digitaliza la estructura de una elocución, usando el programa Praat. Se aprecia el ritmo de la elocución mediante una onda cuando Laura Sofía dice "1 más 1 da 2, sumándole 3", "2 más 2 da 4, sumándoles 3", "6, y sumándole 3". Laura Sofía moviliza dos gestos indexicales. El primero corresponde a la acción de tapar los círculos subitizadamente y, al hacer una pausa, el otro es cuando despliega el segundo gesto indexical señalando "la torre". [...] Sin embargo, notamos que a medida que Laura Sofía habla, señala los cuatro círculos antes de "la torre" a través de dos deslizamientos con su índice derecho (el primero sobre los primeros círculos de abajo hacia arriba y el segundo sobre los siguientes dos círculos de abajo hacia arriba). Más adelante, ubica su dedo pulgar derecho tapando el tercer círculo de arriba de izquierda a derecha para luego señalar de nuevo "la torre". El análisis prosódico sugiere que el ritmo emerge como un medio semiótico de objetivación, evidenciado en el conteo, la pausa hecha y luego el gesto de señalar "la torre". El ritmo crea la expectativa de un próximo evento (You, 1994) pero, además, "constituye un medio semiótico de objetivación crucial para hacer aparente el sentimiento de un orden que va más allá de figuras particulares" (Radford, 2010) (Vergel, 2014).

Ejemplo 5.22

En la tabla 5.23 presento algunas de las filas de la matriz elaborada por Guacaneme (2016) en la que se observa el resultado del análisis realizado a sesenta y dos documentos referidos a la teoría euclidiana de la proporción incluida en el libro V de *Elementos.*

Tabla 5.23 Registros de la matriz construida por Guacaneme (2016) para presentar los resultados de los datos referidos al análisis de la categoría *¿qué?*

Documento	*FP/FS/FT*	*Teo/Sub/Dis*	*Tem/Proc/Prob*	*PM*	*MH/MnH*	*AmM/AmH*	*HM-E*
Filep, 2003	FS		Tem		MH	AmM	
Saito, 2003	FS	Teo			MH	AmM	
Guacaneme, 2005	FT		Tem	PM	MH		HM-E
Vitrac, 2002	FS		Tem		MH		

Tabla 5.23 (continuación)

Documento	*FP/FS/FT*	*Teo/Sub/Dis*	*Tem/Proc/Prob*	*PM*	*MH/MnH*	*AmM/AmH*	*HM-E*
Goldstein, 2000	FS		Tem		MH	AmM	
Palmeri, 2003	FS		Tem	PM	MH	AmM	
Lamandé, 2013	FS	Teo			MH		
...							

Convenciones: FP/FS/FT: fuentes primarias, secundarias, terciarias; Teo/Sud/Disc: teorías, subdisciplinas, disciplinas; Tem/Proc/Prob: temas, procesos o problemas; PM: pensamiento matemático; MH/MnH: matemáticas hegemónicas o matemáticas de culturas no hegemónicas; AmM/AmH: asuntos metamatemáticos o asuntos metahistóricos; HM-E: relación de HM con lo educativo.

Fuente: tomada de Guacaneme (2016).

La matriz se acompaña con un texto explicativo, del cual resumimos algunos apartados para ilustrar de qué manera Guacaneme (2016) aprovechó la matriz. Al no haber incluido los sesenta y cuatro registros, no se aprecian plenamente las conclusiones que sugiere el investigador, pero el lector puede darse una idea de cómo se obtuvieron:

> Resaltemos que la mayoría de los documentos son fuentes secundarias relacionadas con la teoría euclidiana de la proporción.
>
> Al mirar las frecuencias de los valores de las dos siguientes categorías, se advierte que, de los sesenta y dos documentos, la mayoría (cuarenta y cuatro) refieren estudios de temáticas específicas relacionadas con la teoría euclidiana de la proporción, dieciséis abordan el estudio de teorías o presentan una teoría, uno (Acerbi, 2003b) refiere a un proceso y uno (Rusnock y Thagard, 1995) a un problema (Guacaneme, 2016).
>
> Al examinar los documentos se estableció que la gran mayoría versan sobre la historia de las matemáticas occidentales y de las escuelas europeas, sin embargo, clasificamos los documentos descritos bajo el título "traducciones árabes y latinas" como de matemáticas no hegemónicas (salvo uno de ellos que tiene un fuerte contenido de las matemáticas griegas), bajo el entendido de que la contribución de la cultura árabe se ha subordinado y que, en este sentido, pareciera representar unas matemáticas de culturas no hegemónicas. Más allá de ello, vale la pena resaltar que en el listado de documentos no disponemos de alguno que verse sobre el tratamiento de la teoría de la proporción en culturas orientales o comunidades indígenas (Guacaneme, 2016).

Ejemplo 5.23

Los resultados de Durango (2017) son caracterizaciones de la argumentación de cada uno de los tres profesores participantes en su investigación, elaboradas

a partir del modelo integral propuesto por él (véase tabla 5.24). Para cada caso se verifica la ocurrencia de argumentos dialógicos o monológicos, así como el tipo de indicadores de argumentación que son más frecuentes en el discurso del profesor. También se da cuenta de: cuáles recursos retóricos emplea cada profesor y con qué fin los emplea (el ejemplo, la ilustración, el modelo, la metáfora); cuáles componentes argumentativos hace explícitos (datos, conclusiones, garantías, soportes, cualificadores modales, refutadores); el tipo de garantías usadas en cada escenario (empírico personales, *a priori,* epistemológicas, *a priori* con el uso de medios; *a priori* pedagógica, epistemológica institucional); los cualificadores modales de uso frecuente (puede, no necesariamente, siempre, más o menos, aunque, exactamente, todos); los soportes (teóricos y empíricos usados); cuándo hace uso de la refutación; qué intenciones hace explícitas (defender, refutar, explicar, persuadir). La argumentación de cada profesor se describe como tendiente hacia la racionalidad teórica o hacia la razonabilidad práctica.

Tabla 5.24 Tabla empleada por Durango (2017) para reportar sus resultados

			Seminario de Práctica Pedagógica			*Aula de clase*		
			Carlos	Helena	María	Carlos	Helena	María
Tipo de argumentos	Argumento con carácter dialógico		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Argumento con carácter monológico		✓	✓	✓			
Indicadores de argumentación	Ejemplo		✓		✓	✓	✓	✓
	Ilustración		✓	✓	✓			
	Modelo				✓			
	Metáfora							✓
Componentes de la argumentación	Datos		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Conclusiones		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Garantías	*A priori* epistemológicos	✓	✓	✓			✓
		Epistemológica institucional		✓	✓			
		A priori pedagógica	✓		✓			
		A priori con uso de medios	✓	✓	✓			
		Empírico personal		✓		✓		✓

Tabla 5.24 (continuación)

			Seminario de Práctica Pedagógica			*Aula de clase*		
			Carlos	Helena	María	Carlos	Helena	María
		Empírico profesional						
	Cualificadores modales		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Soportes		✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Refutadores							
Intención de los argumentos	Validar					✓	✓	
	Defender				✓	✓	✓	✓
	Refutar							
	Explicar		✓	✓	✓	✓	✓	
	Persuadir					✓		
	Justificar						✓	

Fuente: adaptada de Durango (2017).

Síntesis del capítulo y sugerencias

En este capítulo he sugerido un conjunto de ideas y procedimientos para llevar a cabo los análisis, obtener resultados del estudio y presentarlos. Los procedimientos descritos solo ejemplifican un gran universo de posibilidades y probablemente ninguno se ajusta de manera perfecta a un estudio o es suficiente en una investigación. En cada caso, el conjunto de procedimientos más útil es diferente y los investigadores van encontrando la mejor forma de dialogar con sus datos. Como señala Janesick (1998), no existe el mejor procedimiento de análisis. Los investigadores pueden intentar usar los procedimientos sugeridos, pero en algún momento necesitan tomar decisiones que pueden distanciarlos de estos, pues la información que tienen que analizar es particular en cada estudio y prima sobre cualquier procedimiento preestablecido. Más que seguir ciegamente un procedimiento, se trata de buscar la manera más efectiva de encontrar una historia y contarla, procurando convencer a una audiencia.

Cualquiera sea el procedimiento analítico elegido, los investigadores siguen una ruta que generalmente incluye: i) una familiarización con la información en bruto y la construcción de unidades de análisis o conjunto de datos; ii) la organización de los datos en agrupaciones con algún orden y denominación;

iii) la identificación de patrones, temas, tendencias, conceptos, tipos; iv) la reorganización de los datos en agrupaciones derivadas del análisis; iv) la síntesis o condensación de los resultados en esquemas visuales y textos discursivos, ilustrados con información proveniente de los datos (Miles y Huberman, 1994; Stake, 1998; Morse, 1998; Moschkovich y Brenner, 2000). La figura 5.7 es una adaptación del proceso analítico, sugerido por Carney (1990; citado en Miles y Huberman, 1994).

El ejercicio analítico no es mecánico. Requiere un trabajo de observación constante, reflexivo, interpretativo y crítico, en el que los investigadores se mueven entre el punto de vista de los participantes y su punto de vista. Se comprometen a ponderar impresiones, deliberar sobre sus hallazgos, repetir registros, corroborar hallazgos, introducir diversas líneas de pensamiento y modificar puntos de vista iterativamente, buscando una aproximación sistemática que les permita describir, interpretar e inferir.

Termino el capítulo con tres sugerencias relacionadas con los análisis y la presentación de resultados:

- Algunos estudios fenomenológicos o sociocríticos se apoyan en procedimientos cuantitativos en el ejercicio analítico pues son útiles para hacer comparaciones detalladas y variadas. Son útiles cuando se buscan patrones, correlaciones, tendencias, dispersiones. Pero hay que ser cautos a la hora de emplearlos, pues no tiene sentido cuantificar pocos datos y referirse a porcentajes o frecuencias.
- Los procedimientos de análisis no tienen por qué ser empresas solitarias en las que los investigadores se enfrentan solos a un gran conjunto de datos. Como sugiere Morse (1998), el trabajo en equipo es más eficiente y fructífero y las ideas de unos desencadenan ideas de otros, haciendo más profundo el análisis. Frecuentes lluvias de ideas, discusiones y toma de decisiones colectivas hacen más potente el estudio si se respetan las contribuciones de unos y otros y se sostienen relaciones igualitarias y equitativas.
- Todo proceso de análisis genera su propia ruta de auditoría y control (Morse, 1998) para garantizar que las personas interesadas puedan reconstruirlo y establecer nexos inmediatos entre la información, los datos, los análisis y las conclusiones. Una fortaleza del análisis cualitativo es la cercanía de los hallazgos con la información recogida en el escenario. Esta cercanía debe ser evidente para personas externas a la investigación.

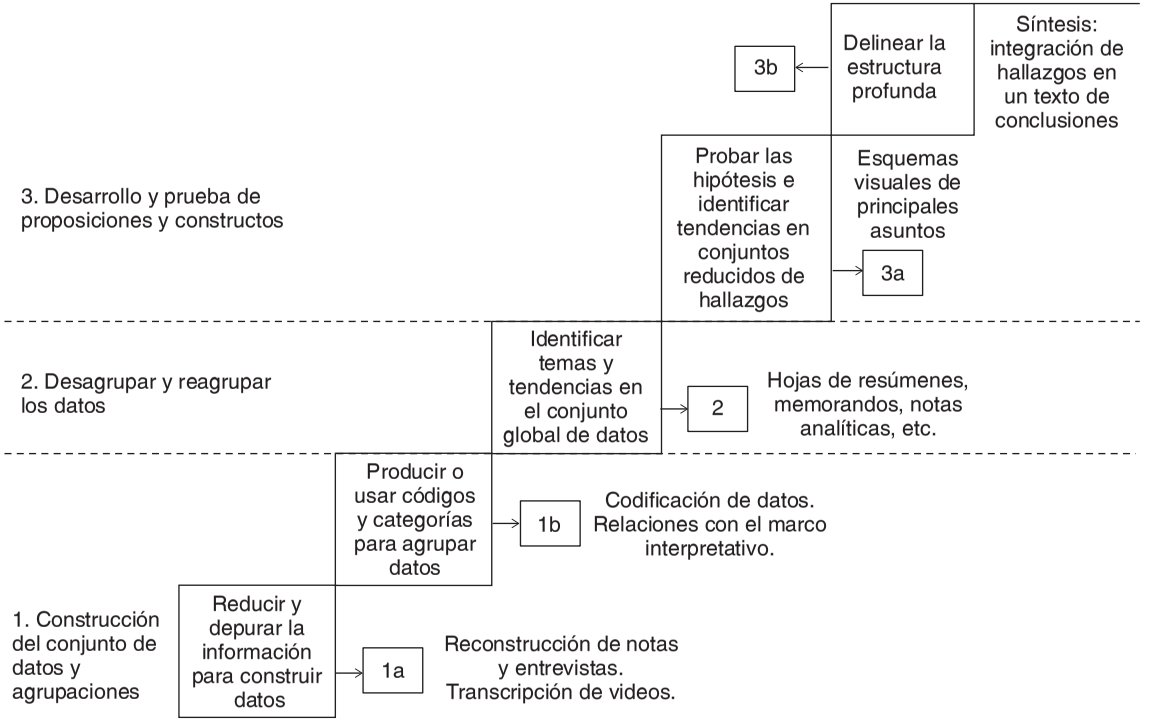


Figura 5.7 Ilustración de un proceso analítico sugerida por Carney

Fuente: Carney (1990; en Miles y Huberman, 1994).

6

Criterios de calidad para la investigación en educación matemática

En investigación en educación matemática, así como en cualquier disciplina científica, existe la necesidad de establecer criterios de calidad de la producción académica, como un mecanismo de regulación, vigilancia y control de esta. Estos criterios cambian según las dinámicas y transformaciones propias del campo de investigación, dada la amplitud de asuntos que se atienden, las particularidades de los estudios y las preguntas de interés. Los criterios pretenden contribuir a responder la pregunta: ¿Cómo saber si una investigación es de calidad?

La naturaleza de los fenómenos de los que se ocupa la investigación en educación matemática hace improcedente juzgar su calidad estableciendo si los resultados son verdaderos o falsos. Como señalan Kelly y Lesh (2000), la complejidad de los sistemas vivos, dinámicos, interactivos y situados, de los que se ocupa el campo, requiere de criterios variados, particulares y versátiles de establecer la calidad de una investigación.

El enfoque fenomenológico y el sociocrítico no tienen criterios estandarizados para juzgar la calidad de un estudio pues asumen que no hay una forma universal de juzgarla. La decisión sobre qué criterios emplear depende de la naturaleza de la investigación, las preguntas, la estrategia implementada y los productos que el investigador espera obtener. Por ejemplo, si la aproximación es antropológica, con la meta de producir una descripción de un fenómeno complejo, un criterio para juzgar la calidad del estudio tiene que ver con la fidelidad de la descripción. En cambio, si se trata de una aproximación interpretativa en la que se sugiere una estrategia de diseño para validar una hipótesis

de aprendizaje, uno de los criterios para juzgar la calidad del estudio tiene que ver con la utilidad del proceso llevado a cabo para confirmar la hipótesis.

En este último capítulo del libro recojo y describo algunos criterios empleados en la investigación en educación matemática, con enfoque fenomenológico o sociocrítico, que se vale principalmente de procedimientos cualitativos. Aunque algunos de los términos empleados para nombrar los criterios son iguales a los que se utilizan para los procedimientos cuantitativos usados en el enfoque empírico analítico, las descripciones son diferentes. La investigación con enfoque empírico analítico busca medir la calidad de un estudio empleando métodos externos, casi siempre ofrecidos por la estadística. En cambio, la investigación con enfoque fenomenológico o sociocrítico, con un fuerte interés en procesos y resultados sociales, situados y locales, emplea criterios internos relacionados con cualidades, comportamientos, acciones o actitudes.

El capítulo está divido en dos secciones. En la primera, hago referencia a criterios para juzgar la calidad del proceso investigativo. En la segunda, me refiero a criterios para valorar la calidad de los productos de la investigación. La lista de criterios no es única ni exhaustiva. Algunos criterios se solapan en sus descripciones, aunque algunos matices los diferencian. Los autores referenciados usan el mismo nombre o describen de la misma manera criterios que, a mi manera de ver, son diferentes. Me he tomado la libertad de agrupar descripciones similares alrededor del término cuya definición en el *Diccionario de la lengua española* (RAE, 2017) sea la que más se acomode. La intención de presentar el listado obedece a ofrecer un conjunto de opciones entre los que cada investigador o grupo de investigadores puede elegir, para establecer los criterios que más se adecúen a su estudio.

Criterios de calidad para el proceso investigativo

Un proceso investigativo en educación matemática debería cumplir algunos de los siguientes criterios para poder afirmar que el estudio es de calidad.

Auditabilidad[1]

El proceso se puede examinar o chequear para ver si se ajusta a lo que se enuncia, mediante una vía de comprobación ofrecida por los investigadores (Guba

1 Ni "auditabilidad" ni "auditable" son términos registrados en el *Diccionario de la lengua española* (RAE, 2017). Empleo "auditabilidad" porque es empleado por Guba y Lincoln (1989) para sustantivar el verbo "auditar".

y Lincoln, 1989; Moschkovich y Brenner, 2000; RAE, 2017). Los lectores del proceso tienen manera de seguir la ruta, disponer de evidencias de esta y tener mecanismos para rastrear el proceso, revisando el efecto de las decisiones que se tomaron en diferentes momentos de este. Las decisiones que se toman y las afirmaciones que se hacen a lo largo del estudio están abiertas a escrutinio público porque se documentan todas las fases del proceso (Cobb, 2000).

Fiabilidad o credibilidad

El proceso se organiza de tal forma que se evidencia un buen funcionamiento con baja probabilidad de errores, en el sentido de la exactitud, seguridad y estabilidad de los datos que se obtienen y las afirmaciones respaldadas por ellos, independientemente de los deseos o gustos del investigador. Los lectores pueden juzgar qué tan creíbles, dignos de confianza, probables y razonables son los datos y las afirmaciones que se hacen al observar las fuentes, identificar la perspectiva situada de los participantes, entender las decisiones que se toman y reconocer los factores del fenómeno que sobresalen a lo largo del proceso (Guba y Lincoln, 1989; Romberg, 1992; Moschkovich y Brenner, 2000; Bakker y Van Eerde, 2015; RAE, 2017).

La credibilidad de una investigación no implica suponer que no haya otra forma de proceder o de obtener resultados también razonables y plausibles (Cobb, 2000). Pero sí requiere garantizar y hacer evidente: un involucramiento cercano de los investigadores con los participantes informantes en el escenario (buscando evitar distorsiones a causa de eventos atípicos); la obtención de suficientes datos que permitan reconocer patrones recurrentes; y un examen persistente de los datos (Moschkovich y Brenner, 2000). Un recurso útil para promover la credibilidad o fiabilidad de un estudio es presentar evidencias que no se ajustan al funcionamiento de las demás, con las respectivas explicaciones sobre las posibles razones de este funcionamiento atípico (Guba y Lincoln, 1989).

Consistencia

El proceso es razonable y se guarda la debida coherencia entre las diferentes acciones investigativas, de tal suerte que congenian unas con otras y no se generan contradicciones entre las acciones. Esto quiere decir que es posible identificar una avenencia (conformidad y unión) entre los propósitos y la estrategia investigativa, las inquietudes y el escenario, la pregunta y los datos, el marco de referencia y las preguntas, el análisis realizado y los resultados, etc. (Goldin, 2000; Simon, 2000; Castro, 2011; RAE, 2017). Si un proceso

es consistente, diferentes observaciones (hechas en variados momentos o por distintas personas) permiten lograr resultados similares (Moschkovich y Brenner, 2000).

Factibilidad o viabilidad

El proceso se puede realmente aplicar, es decir, poner en práctica, administrar o hacer, para atender un determinado fenómeno. El diseño investigativo y la estrategia prevista son posibles, se pueden lograr y con ello se puede atender aquello que se pretende realizar (RAE, 2017).

Legitimidad

El proceso es lícito, permitido, conforme a las normas establecidas en el medio sociocultural donde se lleva a cabo. Además, el escenario y los participantes informantes son los más idóneos para proporcionar la información que se requiere, exhibir el fenómeno o valorarlo (Simon, 2000; RAE, 2017).

Objetividad

El proceso se exhibe presentando las evidencias recogidas y los análisis realizados, buscando la neutralidad de los datos, pero sin desconocer la imposible neutralidad del investigador. El proceso se hace ostensible enmarcado explícitamente en los sesgos en los que inevitablemente incurren los investigadores (producto de su propia manera de ver el fenómeno, o de la perspectiva de los participantes, pero no de caprichos o intereses personales). Los lectores pueden examinar y juzgar el proceso desde esa óptica, situando las acciones y las afirmaciones en el marco de tales sesgos y minimizando interpretaciones diferentes que pueden dar lugar a equívocos (Kilpatrick, 1981; Romberg, 1992; Moschkovich y Brenner, 2000). A diferencia de la investigación con enfoque empírico analítico, la objetividad no se refiere a la independencia con la manera personal de pensar o sentir (RAE, 2017) sino con plena conciencia de ella y de los alcances de lo dicho.

Pertinencia

El proceso de investigación es conducente o concerniente a problemas álgidos que realmente preocupan a la comunidad, o que están relacionados o se derivan de estos (Kilpatrick, 1981; RAE, 2017).

Reproducibilidad

El proceso es reproducible, es decir, se puede replicar o repetir (Kilpatrick, 1981; Goldin, 2000; Schoenfeld, 2000; RAE, 2017). La reproducción se puede hacer en el curso del mismo proyecto cuando se repiten acciones en el mismo escenario para ver si suceden eventos similares u otros observadores hacen las mismas observaciones o interpretaciones. También se puede hacer en nuevos proyectos, cuando el ejercicio se replica o reproduce con otros participantes, en busca de obtener resultados comparables. Por ejemplo, en las investigaciones que emplean la estrategia experimento de enseñanza los investigadores pueden seleccionar varios participantes cuyo lenguaje, acciones o prácticas indique formas similares de proceder, replicando la experiencia en el mismo escenario para confirmar el modelo de actividad matemática de los estudiantes o usar el modelo como punto de partida o hipótesis para nuevos experimentos, en busca de nuevos modelos (Steffe, Thompson y Von Glasersfeld, 2000).

Rigurosidad

El proceso es estricto, escrupuloso, claro, adecuado a la estrategia definida y, en consonancia, los investigadores fijan pautas de antemano (Gutiérrez, 1991; RAE, 2017). Un trabajo riguroso está organizado con claridad, especifica los propósitos, el marco de referencia, la estrategia investigativa y los resultados obtenidos. Cuida los detalles, proporcionando suficiente información para entender las afirmaciones y su argumentación (sin parecer que "surjan de la nada"). Define claramente los conceptos usados o construidos. Comprueba varias alternativas, expone casos límite o contraejemplos, se somete a refutaciones y se conecta en el trabajo de otros (Kilpatrick, 1981; Schoenfeld, 2000; Simon, 2000).

Criterios de calidad para los productos investigativos

Los productos de una investigación deberían satisfacer algunos de los siguientes criterios, para poder afirmar que el estudio es de calidad.

Adaptabilidad

Los productos de la investigación se pueden adaptar, acomodar o ajustar en otras investigaciones o contextos educativos y no se restringen a la forma particular que poseen (Guba y Lincoln, 1989; RAE, 2017).

Aplicabilidad

Los productos de la investigación son útiles y pueden emplearse o aplicarse en otros contextos investigativos y educativos (Guba y Lincoln, 1989; Moschkovich y Brenner, 2000; RAE, 2017). Algunos autores, como Moschkovich y Brenner (2000), consideran que no es responsabilidad de los investigadores expresar en qué contextos se pueden aplicar los resultados de una investigación pues la naturaleza situada de la investigación fenomenológica hace difícil referirse al uso sin suficiente información acerca del posible contexto. Pero lectores interesados en el estudio sí deberían entrever cómo usar los resultados.

Autenticidad

Los productos de la investigación son auténticos, genuinos, representan la experiencia vivida en el estudio y son consecuentes con ella. Son productos característicos del escenario y no lo tergiversan (Simon, 2000; RAE, 2017). Por ejemplo, Confrey y Lanchance (2000) afirman que en el caso de la estrategia experimento de enseñanza la autenticidad se refiere a la emergencia de las voces de los estudiantes en los datos. La investigación debe poder mostrar que las expresiones de los estudiantes son genuinas y representativas de la forma de comunicarse de los distintos estudiantes. Además, deberían presentarse indicadores concretos del éxito en el aprendizaje.

Confirmabilidad o falsabilidad[2]

Los productos de la investigación son corroborados o refutados por vías experimentales, es decir, están fundamentados en hallazgos empíricos y podrían ser confirmados o refutados por nuevas evidencias (Guba y Lincoln, 1989; Gutiérrez, 1991; Schoenfeld, 2000). Los investigadores proveen a los participantes del estudio, y a lectores interesados, mecanismos para someter los productos al juicio crítico de ellos, de forma tal que ellos puedan corroborar afirmaciones, establecer la plausibilidad de los hallazgos, ganar firmeza o seguridad sobre lo dicho.

---

2 Ni "confirmabilidad" ni "falsabilidad" son términos registrados en el *Diccionario de la lengua española* (RAE, 2017), pero se emplean en filosofía u otras áreas técnicas.

Comparabilidad

Los productos de la investigación están descritos con suficiente precisión para poder ser comparados o cotejados con los de estudios en donde se trabajan fenómenos o variables similares, para establecer semejanzas y diferencias (Goldin, 2000; RAE, 2017).

Convencimiento

Los productos de la investigación son convincentes o persuasivos porque se derivan de una argumentación sólida, más que por la cantidad de participantes. Incitan a los lectores a usarlos, cambiar de idea o de comportamiento. Muestran hechos innegables racionalmente (Guba y Lincoln, 1989; Tobin, 2000; RAE, 2017).

Genericidad

Los productos investigativos tienen la condición de ser genéricos (no necesariamente generales), es decir, son comunes o pueden aplicarse a varias situaciones porque rebasan la especificidad del caso particular y ofrecen conclusiones que van más allá de la caracterización de la situación específica. Para ello, vinculan las características específicas con consideraciones más amplias o genéricas, sin pretender la universalidad de la generalidad. La investigación ofrece mecanismos para reconceptualizar el fenómeno estudiado más allá de la situación específica y, eventualmente, poder hacer predicciones plausibles, superando la presentación de evidencias anecdóticas (Guba y Lincoln, 1989; Gutiérrez, 1991; Romberg, 1992; Goldin, 2000; Simon, 2000; Bakker y Van Eerde, 2015; RAE, 2017). En el caso de investigaciones que emplean la estrategia experimento de enseñanza, Steffe, Thompson y Von Glasersfeld (2000) alertan sobre la necesidad de que los productos sean ajustables a contingencias locales de otros escenarios distintos en donde fueron construidos. No tiene sentido que solo operen en el caso particular pero tampoco sería procedente que funcionaran en cualquier escenario escogido aleatoriamente; al ser producidos a través de la abstracción de una experiencia, tienen la cualidad de funcionar en otros casos, pero no en todos los casos. Cuando los investigadores comunican sus hallazgos a otros investigadores que hacen experimentos de enseñanza similares, confirman sus formas de pensar y se estimula el establecimiento de la genericidad de los modelos o la necesidad de construir modelos substitutos.

Originalidad

Los productos de la investigación son originales, novedosos e inventivos. Presentan nuevas perspectivas, nuevos puntos de vista, rebasan las expectativas con argumentos contundentes, hacen sólidas contribuciones al conocimiento del campo contribuyendo a correr la frontera del saber (Kilpatrick, 1981; Gutiérrez, 1991; Simon, 2000; RAE, 2017).

Poder descriptivo, explicativo o predictivo

Según las metas del estudio, los productos de la investigación deberían, según el caso: a) poder capturar el fenómeno señalando los aspectos relevantes o sobresalientes de este, de manera fiel y sin olvidar detalles importantes (Schoenfeld, 2000); b) señalar una mejor forma de reconceptualizar el fenómeno explicando cómo y por qué sucede, qué constructos están involucrados, cómo se relacionan y por qué es posible que sucedan ciertas cosas pero otras no (Confrey y Lanchance, 2000; Schoenfeld, 2000); y c) ofrecer estructuras relacionales, sugerir eventos probables, posibles limitaciones y predicciones plausibles (Kilpatrick, 1981; Schoenfeld, 2000).

Significación o relevancia

Los productos de la investigación aportan posibles vías para atender problemas relevantes de la educación matemática contribuyendo al avance significativo del campo de indagación, al responder a cuestiones trascendentes. Proveen mejor comprensión acerca de los fenómenos, profundización en detalles de estos y repercusiones en las prácticas educativas (Gutiérrez, 1991; Simon, 2000; Schoenfeld, 2000; RAE, 2017).

Sustentabilidad[3]

Los productos de la investigación pueden defenderse o sostenerse por un periodo de tiempo, logrando satisfacer necesidades durante un lapso significativo y generando estados de equilibrio entre los fenómenos en estudio y los constructos o relaciones derivados de este (Guba y Lincoln, 1989).

---

3 El término "sustentabilidad" no está registrado en el *Diccionario de la lengua española* (RAE, 2017), pero se emplea principalmente en ecología con un sentido similar al usado acá.

Transferibilidad

Los productos de la investigación pueden ser transferidos, traspasados, cedidos, remitidos, extendidos o llevados a otro lugar (Guba y Lincoln, 1989; Bakker y Van Eerde, 2015; RAE, 2017). Los lectores de la investigación pueden identificar cuáles resultados son relevantes para ellos y pueden transferirse a sus propios contextos educativos o investigativos. Para favorecer la transferibilidad, los investigadores tienen la responsabilidad de hacer explícitos los criterios para la escogencia del escenario y los participantes (como informantes óptimos) y aportar detalles particulares de estos (Moschkovich y Brenner, 2000).

Validez

Los productos de la investigación son aceptables, firmes y válidos. Es decir, provienen de las condiciones experimentales, están ligados directamente con el fenómeno observado y no son marginales a este (Kilpatrick, 1981; Romberg, 1992).

Ejemplo 6.1

Durango (2017) incluye en su tesis una explicación sobre los criterios de calidad en su ejercicio investigativo. Se refiere a la credibilidad, auditabilidad y transferibilidad y explica cómo los tuvo en cuenta. El criterio de credibilidad fue considerado por el investigador en sus dos roles. Como investigador, al cuidar los registros y las transcripciones y discutir las interpretaciones y análisis con pares. Como profesor, al promover el diálogo con los tres estudiantes participantes actuando como facilitador y refutador y no como validador de argumentos, sin imponer sus conocimientos o puntos de vista. Cuidó el criterio de auditabilidad al organizar y guardar celosamente el registro de grabaciones en audio y video, al describir las características de los participantes y al discutir las circunstancias de los escenarios de recolección de datos. El criterio de transferibilidad o aplicabilidad se atendió al seleccionar colegas cuyas maneras de comunicar conocimientos o puntos de vista son compartidas por compañeros maestros de sus instituciones educativas, de tal suerte que las formas de argumentar pueden ser representativas de este sector de la población.

Referencias bibliográficas

Atkinson, P. y Hammersley, M. (1998). Ethnography and participant observation. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 110-136). Thousand Oaks, California: Sage.

Artigue, M., Bartolini-Bussi, M., Dreyfus, T., Gray, E. y Predifer, S. (2005). Different theoretical perspectives and approaches in research in mathematics education. En M. Bosch (ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Del 18 al 21 de febrero del 2005, Sant Feliu de Guíxols, Cataluña (pp. 1237-1402). Sant Feliu de Guíxols, Cataluña: Fundemi, Universitat Ramon Llull.

Artigue, M. (2015). Perspectives on design research: The case of didactical engineering. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 467-496). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Ball, D. L. (2000). Working on the inside: Using one's own practice as a site for studying teaching and learning. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 365-402). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bakker, A. y Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 429-466). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Baptista, T. C. y Ribeiro, R. (2019). The social turn and its big enemy: a leap forward. En J. Subramanian (ed.), *Proceedings of the tenth International Mathematics Education and Society Conference,* MES*-10.* Del 28 de enero al 2 de febrero de 2019, Hyderabad, India [Internet]. Hyderabad, India: MES-10. Disponible en https://www.mescommunity.info/proceedings/MES10.pdf.

Bauersfeld, H. y Skowronek, H. (1976). Research related to the mathematical learning process. En H. Athen y H. Kunle (eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education, ICME-3.* Del 16 al 21 de agosto de 1976, Karlsruhe, Alemania (pp. 231-245). Karlsruhe, Alemania: ICME.

Bishop, A. (1992). International perspectives on research in mathematics education. En D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 710-723). Nueva York: Macmillan.

Blanco, L. J. (2011). La investigación en educación matemática. *Educatio Siglo XXI, 29*(1), 109-128.

Bohórquez, L. A. (2016). *Cambios de concepciones de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en ambientes de aprendizaje fundamentados en la resolución de problemas.* (Tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación, Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática.* Córdoba, Argentina: Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática, Astronomía y Física (Serie B, Trabajos de Matemática, 19; versión castellana 1993).

Calderón, D. I. (2005). *Dimensión cognitiva y comunicativa de la argumentación en matemáticas.* (Tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación Universidad del Valle, Cali.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.* (Tesis doctoral). Doctorado en Matemáticas, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Valencia, España.

Carr, W. y Kemmis, S. (1986). *Becoming critical. Education, Knowledge and Action Research.* Nueva York: Routledge.

Clarke, D., Mesiti, C., O'Keefe, C., Xu, L. H., Jablonka, E., Mok, I. A. Ch. y Shimiuzu, Y. (2007). Addressing the challenge of legitimate international comparisons of classroom practice. *International Journal of Educational Research, 46*(5), 280-293.

Castro, W. F. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores.* (Tesis doctoral). Doctorado en Matemáticas, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada, España.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547-589). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Cline, H. y Mandinach, E. (2000). The corruption of a research design: A case study of a curriculum innovation project. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 169-189). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Chevallard, I. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 307-333). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. (2000). Improving research and systemic reform toward equity and quality. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 87-106). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Confrey, J. y Lanchance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Davis, Ph. J. y Hersh, R. (1982). *Experiencia matemática.* Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Delgado, J. y Gutiérrez, J. (coords.). (1999). *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales.* Madrid: Síntesis.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (1998). Introduction: Entering the field of qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 1-34). Thousand Oaks, California: Sage.

Doerr, H. y Tinto, P. (2000). Paradigms for teacher-centered, classroom-based research. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 403-427). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T. y Paola, D. (2004). TSG 28: New trends in mathematics education as a discipline. En M. Niss (ed.), *Proceedings of the Tenth International Congress on Mathematical Education, ICME-10.* Del 4 al 12 de julio del 2004, Roskilde, Dinamarca (pp. 417-421). Copenhague, Dinamarca: ICME. Disponible en http://higeom.math.msu.su/~asmish/Lichnaja-2010/Version2010-11-20/Trudy/Publications/2004/icme_completebook.pdf.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. y Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: Theory as methodological tool and methodological tool as theory. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 185-217). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Durango, J. H. (2017). *Argumentación en geometría por maestros en formación inicial en práctica pedagógica: un estudio de caso.* (Tesis doctoral). Doctorado en Educación, Facultad de Educación Universidad de Antioquia, Medellín.

Erickson, F. (1986). Qualitative method in research on teaching. En M.C. Wittrock (ed.), *The Handbook of Research on Teaching* (pp. 119-161). Nueva York: Macmillan.

Erlwanger, S. H. (1973). Benny's conception of rules and answers in IPI mathematics. *Journal of Children Mathematical Behavior, 1*(2), 7-25.

Feldman, A. y Minstrell, J. (2000). Action research as a research methodology for the study of the teaching and learning of science. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 429-455). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Fiallo, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de geometría dinámica.* (Tesis doctoral). Doctorado en Matemáticas, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Valencia, España.

Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 517-544). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Gómez, P. (1998). Investigación en educación matemática en países en desarrollo. En Universidad Central de Venezuela (ed.), *Memorias III Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 65-73). Caracas: Universidad Central de Venezuela. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-92713_archivo.pdf.

Gómez, P. (2000). ¿Qué es la investigación en educación matemática y cuáles son sus resultados? I. *Boletín Una Empresa Docente, 6,* 1-6.

Guacaneme, E. A. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la construcción del conocimiento del profesor de matemáticas.* (Tesis doctoral). Doctorado en Educación, Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle, Cali.

Gualdrón, É. (2011). *Análisis y caracterización de la enseñanza y aprendizaje de la semejanza de figuras planas.* (Tesis doctoral). Doctorado en Matemáticas, Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Valencia, España.

Guba, E. G. y Lincoln, Y. S. (1989). *Fourth Generation Evaluation.* Newbury Park, California: Sage.

Gutiérrez, Á. (1991). La investigación en didáctica de las matemáticas. En A. Gutiérrez (ed.), *Área de conocimiento: didáctica de la matemática* (pp. 149-195). Madrid: Síntesis.

Gutiérrez, Á. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática – SEIEM.* Del 7 al 10 de septiembre del 2005, Córdoba (pp. 27-44). Córdoba: Universidad de Córdoba.

Gutiérrez, Á. y Maz, A. (2001). Cimentando un proyecto de investigación: la revisión de literatura. En P. Gómez y L. Rico (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 149-164). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Hall, R. (2000). Videorecording as theory. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 647-664). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Hederich, C. (2013). El método de la búsqueda del cisne negro. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 85-102). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Herrera, A. N. y Ruiz, J. I. (2013). Estudios descriptivos. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 45-66). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Herrera, A. N. y Santana, A. C. (2013). Estudios correlacionales. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 67-84). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Janesick, V. (1998). The Dance of qualitative research design: Metaphor, methodolatry, and meanings. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 35-55). Thousand Oaks, California: Sage.

Kelle, U. y Buchholtz, N. (2015). The combination of qualitative and quantitative research methods in mathematics education: A "mixed methods" study on the development of the professional knowledge of teachers. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 321-361). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Kelly, A. y Lesh, R. (eds.) (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kemmis, S. y McTaggart, R. (1988). *Cómo planificar la investigación acción.* Barcelona: Laertes.

Kilpatrick, J. (1981). Research on mathematical learning and thinking in the United States. *Recherches en Didactique des Matématiques, 2*(3), 363-379.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 3-38). Nueva York: Macmillan.

Kilpatrick, J. (1994). Investigación en educación matemática: su historia y algunos temas de actualidad. En J. Kilpatrick, L. Rico y P. Gómez (eds.), *Educación matemática* (pp. 1-18). Bogotá: Una Empresa Docente.

Lerman, S. (2006). Socio-cultural research in PME. En Á. Gutiérrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 347-366). Róterdam, Países Bajos: Sense.

Lesh, R. y Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 113-149). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 197-230). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. y Post, Th. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 591-645). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutierrez y P. Boero (eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173-204). Róterdam, Países Bajos: Sense.

Mayring, Ph. (2015). Qualitative content analysis: Theoretical background and procedures. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 365-380). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Mestre, J. P. (2000). Progress in research: The interplay among theory, research questions, and measurement techniques. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 151-168). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación Nacional. Colombia. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas.* Bogotá: El Ministerio.

Mok, I. A. Ch. y Clarke, D. J. (2015). The contemporary importance of triangulation in a post-positivist world: Examples from the Learner's perspective study. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 403-425). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Morse, J. (1998). Designing funded qualitative research. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 56-85). Thousand Oaks, California: Sage.

Moschkovich, J. y Brenner, M. (2000). Integrating a naturalistic paradigm into research on mathematics and science cognition and learning. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 457-486). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis: An Expanded Sourcebook.* Thousand Oaks, California: Sage, 2.ª ed.

Niss, M. (2004). Key issues and trends in research on mathematical education. En H. Fujita, Y. Hashimoto, B. Hodgson, P. Y. Lee, S. Lerman y T. Sawada (eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education, ICME-9.* Del 31 de julio al 6 de agosto del 2000, Mihama, Japón (pp. 4-11). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3.º y 4.º de una institución educativa de la Educación Básica.* (Tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación, Instituto de Educación y Pedagogía Universidad del Valle, Cali.

Ortiz, M. (2001). La investigación en educación matemática en Colombia, 1991-1999. En M. Henao y J. O. Castro (comps.), *Estados del arte de la investigación en educación y pedagogía en Colombia, 1989-1999* (tomo 1, pp. 1-56). Bogotá: Icfes, Colciencias, Sociedad Colombiana de Pedagogía.

Parada, S. E. (2011). *Reflexión y acción en comunidades de práctica: un modelo de desarrollo profesional.* (Tesis doctoral). Doctorado en Ciencias, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Páramo, P. (2013). La falsa dicotomía entre investigación cuantitativa y cualitativa. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 23-32). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Parra, C. (2013). La investigación-acción educativa: orígenes y tendencias. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 269-300). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo, L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. Épsilon, *29-3*(82), 41-56.

Radford, L. y Sabena, C. (2015). The question of method in a vygotskian semiotic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 157-182). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Real Academia Española (RAE). (2017). *Diccionario de la lengua española,* 23.ª ed. [en línea]. Consultado en http://dle.rae.es/

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

Rincón, J. C. y Barreto, I. (2013). Técnicas de muestreo para las investigaciones sociales. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 33-44). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Rojas, P. J. (2012). *Articulación y cambios de sentido en situaciones de tratamiento de representaciones simbólicas de objetos matemáticos.* (Tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación, Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Romberg, T. (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 49-64). Nueva York: Macmillan.

Romberg, T. y Gómez, P. (1997). What are the aims of research in mathematics education? En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 14-20). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Sánchez, C. E. (2001). 50 años de matemáticas modernas en Colombia. *Boletín de Matemáticas, 8*(2), 3-28.

Sánchez, M. y Molina, J. G. (2012). On the links between mathematics education and democracy: A literature review. *Pythagoras, 33*(2), a164.

Saxe, G. B., De Kirby, K., Le, M., Sitabkhan, Y. y Kang, B. (2015). Understanding learning across lessons in classroom communities: A multi-leveled analytic approach. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 253-318). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Schoenfeld, A.H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the AMS, 47*(6), 641-649.

Siebert, D. K. (2019). Conducting a timely literature search. En K. R. Leatham (ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 17-30). Provo, Utah: Springer.

Sierra, M. (2011). Investigación en educación matemática: objetivos, cambios, criterios, método y difusión. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 173-198.

Simon, M. A. (2000). Research on the development of mathematics teachers: the teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335-359). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Simon, M. A. (2019). Analyzing qualitative data in mathematics education. En K. R. Leatham (ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 111-122). Provo, Utah: Springer.

Schwarz, B. (2015). A study on professional competence of future teacher students as an example of a study using qualitative content analysis. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 381-399). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Spangler, D. A. y Williams, S. R. (2019). The role of theoretical frameworks in mathematics education research. En K. R. Leatham (ed.), *Designing, Conducting, and Publishing Quality Research in Mathematics Education* (pp. 3-16). Provo, Utah: Springer.

Stake, R. (1998). Case studies. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 86-109). Thousand Oaks, California: Sage.

Steffe, L., Thompson, P. y Von Glasersfeld, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 267-306). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Strauss, A. y Corbin, J. (1998). Grounded theory methodology: An overview. En N. Denzin y Y. Lincoln (eds.), *Strategies of Qualitative Inquiry* (pp. 158-183). Thousand Oaks, California: Sage.

Teppo, A. R. (2015). Grounded theory methods. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 3-21). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Tobin, K. (2000). Interpretive research in science education. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 487-512). Mahwah, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Uribe, C. A. (2013). La etnografía de investigación en ciencias sociales. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 129-144). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Valero, P. (1999). Deliberative mathematics education for social democratization in Latin America. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 31*(1), 20-26.

Valero, P. (2000). Dilemas de la investigación socio-política en educación matemática. En Associação de Professores de Matemáticas (ed.), *Memorias do X Seminário de Investigação em Educação Matemática (X-Seiem)* (pp. 87-96). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemáticas.

Valero, P. y Skovsmose, O. (comps.) (2012). *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.* Bogotá: Una Empresa Docente.

Valbuena, E. O. (2013). El análisis del contenido: de lo manifiesto a lo oculto. En P. Páramo (comp.), *La investigación en ciencias sociales: estrategias de investigación* (pp. 213-224). Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Valoyes, L. E. (2014). *Colombian Teachers' Expectations of Poor and Black Students' Ability to Learn Algebra.* (Tesis doctoral). Ph. D. Escuela de Posgrados Universidad de Misuri, Estados Unidos.

Vanegas, Y. M. (2013). *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas.* (Tesis doctoral). Doctorado en Formación del Profesorado: Práctica Educativa y Comunicación, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y la Matemática Universidad de Barcelona, España.

Vargas, J. (2012). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo: Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales.* (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales Universidad de Salamanca, España.

Vergel, R. (2014). *Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).* (Tesis doctoral). Doctorado Interinstitucional en Educación, Facultad de Ciencias y Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Villarreal, M. E. (2003). La investigación en educación matemática. *Soarem, 5*(16), 4-18. Disponible en http://www.soarem.com.ar/Documentos/boletines/Boletin5-Feb03.pdf.

Vithal, R. y Valero, P. (2003). Researching mathematics education in situations of social and political conflict. En A. Bishop, M. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, F. Leung (eds.) *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 545-591). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Vollstedt, M. (2015). To see the wood for the trees: the development of theory from empirical interview data using grounded theory. En A. Bikner-Ahsbahs, Ch. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 23-48). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning and Identity.* Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

Impreso en agosto del 2021

Estrategias cualitativas de investigación en educación matemática. Recursos para la captura de información y el análisis ofrece un recurso bibliográfico para estudiantes en procesos de elaboración de trabajos de grado o tesis, investigadores noveles en el campo de la educación matemática y profesores que orientan espacios académicos de investigación.

El libro se enfoca en estrategias y recursos útiles en un diseño investigativo, al tenor de las preguntas del investigador y su marco de referencia, y también ofrece modelos que pueden ser de gran ayuda para concebir un diseño investigativo.

Las estrategias y los recursos son ilustrados con ejemplos extraídos de tesis doctorales de investigadores colombianos. Finalmente, el libro presenta un conjunto de criterios de calidad para hacer seguimiento al proceso investigativo y evaluar el producto obtenido.

Disponible en e-book

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

ISBN: 978-958-501-036-9
9 789585 010369