



**Subcompetencias emergentes en la construcción de modelos: Relación triádica entre
el estudiante, el fenómeno de la respiración y el modelo matemático**

Diego Andrés Gaviria Botero

Trabajo de grado presentado para optar al título de Licenciado en Matemáticas
y Licenciado en Física

Asesores

Paula Andrea Rendón-Mesa, Doctora en Educación

Jonathan Sánchez-Cardona, Magister en Educación

Alexander Castrillón-Yepes, Doctor(C) en Educación

Universidad de Antioquia

Facultad de Educación

Licenciatura en Matemáticas

Medellín, Antioquia, Colombia

2025

Cita	(Gaviria, 2025)
Referencia	Gaviria Botero, D. A. (2025). <i>Subcompetencias emergentes en la construcción de modelos: Relación triádica entre el estudiante, el fenómeno de la respiración y el modelo matemático</i> . [Trabajo de grado profesional].
Estilo APA 7 (2020)	Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.



Grupo de Investigación Formación e Investigación en Educación Matemática (MATHEMA).

Centro de Investigaciones Educativas y Pedagógicas (CIEP).



Biblioteca Carlos Gaviria Díaz

Repositorio Institucional: <http://bibliotecadigital.udea.edu.co>

Universidad de Antioquia - www.udea.edu.co

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión de los autores y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad de Antioquia ni desata su responsabilidad frente a terceros. Los autores asumen la responsabilidad por los derechos de autor y conexos.

Dedicatoria

A la versión de mí que dudó, pero siguió adelante,
Por cada momento de incertidumbre, en el que dudé si este camino era el correcto.
Por la confianza que intenté construir, aun cuando el miedo y las dudas siempre estuvieron ahí.
Por cada elección que hice, sin certezas ni seguridades, pero con la necesidad de seguir avanzando.
Por haberme enfrentado a las "decisiones de adulto" y haber entendido que, al final, la vida es eso: decidir y seguir.
A mí, por no rendirme.

Agradecimientos

Agradezco profundamente a mi familia. A mis padres, por darme la oportunidad de estudiar; a mis hermanos, por interesarse y preguntarme siempre cómo iba; a mis sobrinas, por su compañía; y a mis gatos, por ser mi refugio.
También agradezco a la Universidad de Antioquia por brindarme una formación tan valiosa. A mis profes y asesores, por acompañarme en este proceso, y a mis compañeros de la U, especialmente a Catalina y a Daniel por su sincera amistad y apoyo.
Finalmente, agradezco a la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa, a la profe Cooperadora y a los estudiantes de la PROM 2023 y 2024, por abrirme las puertas y ser parte de mi camino.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE CONTENIDO	4
RESUMEN	8
ABSTRACT	9
INTRODUCCION	10
1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.....	12
1.1 Pregunta.....	20
1.2 Objetivo	20
2. REFERENTES CONCEPTUALES	21
2.1 El modelo y la configuración de la relación triádica.....	21
2.2 Subcompetencias en el proceso de modelación matemática	26
3. METODOLOGIA	33
3.1 Paradigma y Enfoque	33
3.2 Contexto	35
3.3 Etapas	36
3.3.1 Etapa 1: Indagación.....	37
3.3.2 Etapa 2: Preparación	38
3.3.2.1 Fase 1: “Patrones de movimiento”.....	39
3.3.2.2 Fase 2: “Fenómenos periódicos y cíclicos”	40
3.3.2.3 Fase 3: “El proceso de la respiración”	41
3.3.2.4 Fase 4: “Modelo matemático”	42
3.3.3 Etapa 3: Implementación	43
3.3.4 Etapa 4: Divulgación.....	44

3.4 Consideraciones éticas	46
4. ANALISIS Y RESULTADOS	48
4.1.1 Subcompetencias: Comprender y Proponer	49
4.1.2 Subcompetencias: Matematizar, Interpretar y Validar	54
4.1.3 Subcompetencias: Comunicar y Exponer	66
5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	68
5.1 La relación triádica como eje estructurante del proceso de modelación	68
5.2 las subcompetencias como herramienta de análisis para el proceso de modelación	68
5.3 Proyecciones pedagógicas e interdisciplinarias	69
5.4 Líneas para futuras investigaciones	70
5.5 Reflexión sobre el proceso investigativo como profesor en formación	70
REFERENCIAS	72
ANEXOS	80
Anexo A: Formato Diario Pedagógico	80
Anexo B: Propuesta de Intervención	81
Anexo C. Matriz análisis	94
Anexo D: Consentimiento Informado	95

Lista de tablas

Tabla 1	Fragmentos extraídos del diario pedagógico.....	14
Tabla 2	Subcompetencias propuestas por Maaß (2006).....	27
Tabla 3	Subcompetencias propuestas por Greefrath et al. (2013).....	29
Tabla 4	Subcompetencias para la investigación Maaß (2006) y Greefrath et al. (2013) ..	29
Tabla 5	Reconocimiento de las subcompetencias a través de la relación triádica	45

Lista de figuras

Figura 1	Interpretación relación triádica por Rendon-Mesa et al. (2015).....	23
Figura 2	Acto de modelar por Arrieta y Diaz (2015).....	24
Figura 3	Relación entre las subcompetencias y la relación triádica.....	32
Figura 4	Etapas del proceso de investigación	37
Figura 5	Fases de la propuesta de intervención	39
Figura 6	Evidencia caracterización del fenómeno por G1	50
Figura 7	Evidencia caracterización del fenómeno por G2	51
Figura 8	Evidencia caracterización del fenómeno por G3	52
Figura 9	Evidencia caracterización del fenómeno por G4.....	53
Figura 10	Evidencia modelo tabular realizado por G1, G2, G3 y G4.....	55
Figura 11	Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G1	56
Figura 12	Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G2.....	57
Figura 13	Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G3.....	58
Figura 14	Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G4.....	60
Figura 15	Evidencia modelos gráficos realizados por G1, G2 y G3.....	61
Figura 16	Evidencia generalización del modelo gráfico por G2.....	62
Figura 17	Evidencia primera caracterización del modelo gráfico por G1, G2 y G3	62
Figura 18	Evidencia segunda caracterización del modelo gráfico por G1, G2 y G3	64
Figura 19	Evidencia dificultades en el modelo gráfico realizado por G4.....	65
Figura 20	Evidencia nuevas relaciones realizadas por G1, G2 y G3	66

RESUMEN

La investigación presentada en este documento se realiza en el marco de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física de la Universidad de Antioquia (Colombia). El problema se construye con base en la Práctica pedagógica que se desarrolló en la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa. Este problema se definió a partir del uso del diario pedagógicos, del Plan de Área de Ciencias Naturales (PACN) y aportes de investigaciones pertinentes. Lo cual permitió formular la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo se desarrollan las subcompetencias que emergen de la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo a través de las acciones realizadas en una actividad de modelación? Para responder a esta pregunta, se adoptaron referentes conceptuales centrados en dos aspectos clave: el concepto de modelo y la configuración de la relación triádica, así como las subcompetencias involucradas en el proceso de modelación matemática. Consecuentemente, se adoptó un enfoque cualitativo de carácter interpretativo y naturalista con la intención de comprender la realidad del estudiante frente a las acciones desarrolladas en la construcción de un modelo matemático del fenómeno de la respiración. Finalmente, los resultados de la investigación permiten llegar a conclusiones que se asocian con: (1) la relación triádica como eje estructurante del proceso de modelación; (2) las subcompetencias como herramienta de análisis para comprender dicho proceso; (3) proyecciones pedagógicas e interdisciplinarias; (4) las líneas para futuras investigaciones y (5) reflexión sobre el proceso investigativo como profesor en formación.

Palabras clave: subcompetencias, construcción de modelos, y relación triádica

ABSTRACT

The research presented in this document is carried out within the framework of the bachelor's degree in mathematics and bachelor's degree in Physics programs at the University of Antioquia (Colombia). The problem is based on the pedagogical practice that was developed at the Pedro Luis Álvarez Correa Educational Institution. This problem was defined based on the use of the pedagogical diary, the Natural Sciences Area Plan (PACN) and relevant research contributions. This allowed the following research question to be formulated: How are the sub-competencies that emerge from the triadic relationship developed; student, phenomenon and model through the actions carried out in a modeling activity? To answer this question, conceptual references were adopted focused on two key aspects: the concept of model and the configuration of the triadic relationship, as well as the sub-competencies involved in the mathematical modeling process. Consequently, a qualitative approach of an interpretative and naturalistic nature was adopted with the intention of understanding the reality of the student in the face of the actions developed in the construction of a mathematical model of the phenomenon of breathing. Finally, the results of the research allow us to reach conclusions that are associated with: (1) the triadic relationship as the structuring axis of the modeling process; (2) sub-competencies as an analysis tool to understand this process; (3) pedagogical and interdisciplinary projections; (4) the lines for future research; and (5) reflection on the research process as a preservice teacher.

Keywords: sub-competencies, model construction, and triadic relationship

INTRODUCCION

La construcción de modelos se presenta como una posibilidad para la formación en Ciencias y Matemáticas (MEN, 2006a;2006b; 1998a;1998b), en tanto permite establecer una relación con un aspecto del mundo y un modelo que lo representa. Al construir modelos, los estudiantes eligen y relacionan variables, hacen suposiciones, representan datos y validan sus ideas en su vida cotidiana, lo que desarrolla una comprensión significativa de los fenómenos que estudian. Además, les permite a los estudiantes establecer una relación con su experiencia y su aprendizaje, fomentar su razonamiento, la argumentación y la capacidad de transferir aprendizajes a nuevas situaciones.

Ahora bien, el presente trabajo busca describir las subcompetencias que emergen de la relación triádica estudiantes-fenómeno-modelo enmarcadas en las acciones que realizan los estudiantes en la construcción de modelos, para lo cual se organiza en siete capítulos. En el Primer Capítulo se presenta el problema de investigación derivado del proceso de Práctica Pedagógica, que se articula al uso de diarios pedagógicos, la revisión del Plan de Área Ciencias Naturales (PACN) y los aportes de diferentes investigaciones, luego se establecen la pregunta de investigación y se da paso a los objetivos que orienta el desarrollo de este trabajo.

En el Segundo Capítulo se da a conocer los referentes conceptuales que sustentan la manera en la que se asume la idea de modelo y la configuración con la relación triádica determinada por el estudiante, el fenómeno y el modelo, así como también la comprensión de las subcompetencias que desarrollan los estudiantes en el proceso de modelación matemática.

En el Tercer Capítulo se muestra el diseño metodológico que incluye especialmente las cuatro etapas en las que se desarrolló el trabajo investigativo. Esta investigación se realizó con estudiantes del grado undécimo de la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa (Caldas-Antioquia) bajo un enfoque cualitativo, que involucraba por parte de los participantes realizar acciones como proponer, elaborar, desarrollar y construir con base a sus propias experiencias y conocimientos; en este proceso como investigador se adoptó un rol de observación participante. Adicionalmente, en este capítulo se presenta la propuesta de intervención que se realizó en el marco de la Práctica Pedagógica y como instrumento de recolección de información.

En el Cuarto Capítulo se presentan los resultados de la investigación a partir de la categoría inicial establecida. Específicamente se analizaron las evidencias de cuatro grupos de estudiantes con base en las subcompetencias que emergen de la relación triádica, organizadas de la siguiente manera: (1) Comprender y Proponer, (2) Matematizar, Interpretar y Validar y (3) Comunicar y Exponer. Luego, En el Quinto capítulo se recogen las conclusiones y las recomendaciones para futuras investigaciones, por mencionar una, se concluye que las subcompetencias pueden usarse como guía para elaborar situaciones que pretendan el desarrollo progresivo de la competencia de modelación.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Esta investigación se configura en el marco del trabajo de grado que se desarrolla para obtener el título profesional de los programas de Licenciatura en Matemáticas y Licenciatura en Física de la Universidad de Antioquia (UdeA), Colombia. En particular, el trabajo se inscribe en un Seminario de Práctica enfocado en una línea de interés, en este caso, en Modelación Matemática e Interdisciplinariedad, lo cual posibilita el reconocimiento de oportunidades para el desarrollo de la investigación.

Articulado a la línea de investigación, el Seminario de Práctica se reconoce como un espacio formativo en el que se establecen relaciones entre el saber disciplinar, el saber pedagógico, el saber didáctico y el saber investigativo. De esa manera, se da lugar a “una actividad para el análisis, la reflexión crítica y la confrontación de las experiencias inherentes al proceso de Práctica Pedagógica, y para la apropiación del proceso de investigación” (Facultad de Educación, UdeA, 2012, p. 4). Es decir, el Seminario de Práctica provee herramientas para la construcción y el desarrollo del problema de investigación que emerge en relación con la experiencia en la Práctica Pedagógica, entendida, según el reglamento de prácticas de la Facultad de Educación de la UdeA (2012), como:

La acción pedagógica en la enseñanza en una institución, en unos niveles educativos, en un grado escolar y en un saber por enseñar, que permiten su realización y cuyo propósito será poner al estudiante en contacto con las diferentes teorías, enfoques, metodologías, contextos y orientaciones de la educación y de la pedagogía, que convierten la práctica pedagógica en un ejercicio permanente de reflexión crítica. (p. 6)

La Práctica Pedagógica tuvo lugar en la Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa (EPLAC), una Institución oficial y mixta, ubicada en la zona urbana del municipio de Caldas, Antioquia, Colombia. La experiencia se desarrolló durante los semestres 2023-II y 2024-I en la sede que ofrece educación para el nivel de Básica Secundaria y una Media con especialidad en comercio. La incursión fue a través de un proceso estructurado que permitió una vinculación con el contexto escolar, facilitando así el desarrollo de una experiencia formativa significativa.

Inicialmente se realizó un primer acercamiento a la Institución Educativa mediante la identificación y el reconocimiento de la planta física, la presentación con el profesor cooperador (profesor titular de la asignatura relacionada con la práctica) y los estudiantes. Se acompañaron cuatro grupos, correspondientes a los grados décimo y undécimo en la asignatura de Física. En este contexto, se participó activamente en las dinámicas del aula, se desarrollaron estrategias didácticas y se orientó a los estudiantes en su aprendizaje, con el fin de lograr una apropiación progresiva del rol docente, que integre tanto el saber disciplinar como el pedagógico.

Ahora bien, para construir el problema, se emplearon en primer lugar los diarios pedagógicos, que permitieron documentar las observaciones y las reflexiones sobre el proceso de la Práctica Pedagógica. En segundo lugar, se indagó sobre el Plan de Área de Ciencias Naturales (PACN) que responde a las expectativas y los objetivos curriculares que guían la enseñanza en la institución, en este caso, para la asignatura de Física. Finalmente, se consideraron las investigaciones y los documentos que contribuyen al problema y ofrecen una base sobre la cual se sustenta y desarrolla la investigación.

Los diarios pedagógicos se entendieron como una herramienta de investigación y de reflexión, que mediante un sistema de registro permiten analizar, problematizar y resignificar la

práctica del profesor (Monsalve y Pérez, 2012). De esta manera, para la presente investigación, los diarios pedagógicos (ver Anexo A) posibilitaron encontrar situaciones, reflexiones, contradicciones o preguntas que pertenecen a momentos que se relacionaron con la acción pedagógica. A continuación, se presenta la Tabla 1 que recoge cuatro fragmentos, los cuales hacen alusión a diferentes momentos ocurridos en la clase de Física

Tabla 1

Fragmentos extraídos del diario pedagógico

Fragmento	Acciones
Durante cada experimento algunos estudiantes se notaban confundidos y frustrados, frecuentemente expresaban "no se ve nada" "no entiendo" "dónde está el rayo de luz", se observaba cómo intentaban comprender lo que estaba sucediendo, pero pocos lograban realizar el dibujo que representara el fenómeno. Esto supone una dificultad en establecer una relación entre cómo el rayo llegaba al vaso y cómo este incidía para mostrar el lápiz refractado (Diario pedagógico, 29 de septiembre, 2023).	El estudiante intenta describir lo sucedido en el experimento con un dibujo .
Un estudiante notó en la solución de un ejercicio de movimiento semiparabólico estaba utilizando las fórmulas correspondientes a la caída libre, luego realizó sus procedimientos con las ecuaciones presentadas para el movimiento parabólico, llevándose la sorpresa de que sus cálculos en ambos casos eran correctos; por lo cual le hizo preguntarse por qué era posible, tratando de generar relaciones entre los diferentes tipos de movimientos y las fórmulas (Diario pedagógico, 25 de octubre, 2023).	El estudiante puede razonar sobre el uso de las fórmulas para el movimiento.
Una estudiante preguntaba si era necesario utilizar un "lenguaje físico" para explicar cómo se relacionaba el movimiento del carro con las fuerzas, decía que era capaz a su forma. Le pregunté sobre cómo respondería la pregunta de la relación con la tercera ley de Newton, para lo cual explicó: "la acción está cuando se libera el aire del globo hacia atrás y la reacción se genera cuando se impulsa el carro hacia adelante". La respuesta refleja cómo la estudiante se apropia de la tercera ley de Newton,	La estudiante intenta explicar usando un lenguaje más simple o expresión propia la situación.

para dar una explicación de lo que está sucediendo (Diario pedagógico, 14 de mayo, 2024).	
Específicamente en una parte del taller se preguntaba sobre ¿cómo crees que la fuerza que hace mover el carro tendría que cambiar si se le agregara más masa? Algunos estudiantes respondieron que se le debía agregar otra bomba, ya que la fuerza tendría que aumentar, además otro estudiante justifico que es debido a que $F=ma$. Se puede comprender como el estudiante relaciona directamente el comportamiento del fenómeno y la ecuación correspondiente a la segunda ley de newton (Diario pedagógico, 14 de mayo, 2024).	Los estudiantes buscan relacionar las variables de la ecuación para saber cómo cambian según ciertas condiciones.

En la Tabla 1 se evidenció que los estudiantes, a través del dibujo, la expresión, la fórmula y la ecuación, realizaron acciones como describir, razonar, explicar y relacionar para comunicar cómo entendían el fenómeno. Es decir, los estudiantes construyeron una representación de la situación en cada fragmento, lo que les permitió evidenciar su comprensión sobre el rayo de luz, las fuerzas y el movimiento parabólico. Estas representaciones “se manifiestan como elementos útiles para dar cuenta de procesos que satisfacen la coherencia mínima que los sujetos requieren para interpretar y funcionar en su entorno”(Flores-Camacho et al., 2020, p.3).

De tal forma que, cuando los estudiantes dibujaron un rayo de luz, establecieron una ecuación de movimiento parabólico o verbalizaron las fuerzas que actuaron sobre un cuerpo, resulto importante preguntarse cómo el acto de representar influyó en que los estudiantes generen comprensiones sobre lo que se quiere estudiar. Es decir, cual es el papel de la representación para que los estudiantes a través de ellas construyan significados sobre los fenómenos. Al respecto, Acevedo et al. (2021) señala como se puede convertir en un desafío para los estudiantes la

construcción de una representación, ya que deben tomar decisiones frente a cómo muestra, con qué símbolos y qué significados le otorga a lo que pretende representar.

La aproximación del fenómeno por medio de la construcción de representaciones concuerda con lo que los Lineamientos Curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998a) consideran como un modelo, definido como una forma de representar una realidad dada, y que además implica expandir la comprensión, la percepción y las posibilidades en relación con una determinada situación. Por otra parte, En los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas MEN (2006a), el modelo reproduce, representa y busca reflejar ciertas características o comportamientos de una situación, y, por lo tanto, reduce la complejidad al enfocarse en los aspectos esenciales.

Además, más allá de la articulación entre dos dominios —como pueden ser el fenómeno y el modelo matemático—, la modelación implica considerar las acciones que se realizan entre ellos, es decir, las maneras en que un sistema se aborda se diseñan o se interpreta a través del otro. Por lo cual, se hace necesario hablar de múltiples modelaciones (Villa-Ochoa et al., 2017). Desde esta perspectiva, las acciones y decisiones que toman los estudiantes al modelar adquieren un papel central en la construcción del modelo.

En consecuencia, se puede reconocer que cuando se realiza un dibujo se construyen representaciones intencionadas y simplificadas, facilitando que el estudiante observe, recuerde y comunique sus ideas. Así, la elaboración de un dibujo exige que los estudiantes sean más cuidadosos en la selección de características esenciales de lo que intentan representar (Márquez, 2002). Por lo tanto, el dibujo determina comunica al fenómeno y al estudiante. Al respecto, Ainsworth et al. (2011) argumentan que dibujar es una actividad fundamental en el aprendizaje

de las Ciencias, pues ayuda a los estudiantes a desarrollar y demostrar su comprensión sobre diferentes fenómenos.

Igualmente, la verbalización de las ideas por medio de expresiones lingüísticas constituye un componente esencial en la construcción de modelos. Aragón et al. (2018) reconocen que interpretar la realidad en forma verbal es una actividad clave dentro del proceso de modelación, ya que permite a los estudiantes organizar y recontextualizar sus propias ideas. En este sentido, el MEN (2006b) señala que, para la formación en Ciencias, “resulta apremiante no sólo tener presente la existencia de concepciones alternativas en la mente de los estudiantes, sino conocer en detalle en qué consisten y cómo están organizadas en el pensamiento” (p.104). Esto resalta la necesidad de establecer espacios en los que los estudiantes expongan sus conocimientos y experiencia.

A su vez, cuando las fórmulas y las ecuaciones expresan las características de una situación, pueden entenderse como modelos matemáticos (Acebo-Gutiérrez y Rodríguez-gallegos, 2021). Así, cuando los estudiantes logran establecer una relación entre las condiciones de un problema y el modelo matemático, les otorgan un nuevo significado a las matemáticas, percibiéndolas como una herramienta útil para comprender y resolver situaciones del mundo que los rodea (Villa-Ochoa et al., 2017). Es decir, qué se espera que el estudiante establezca una relación con el modelo capaz de vincular relaciones entre el conocimiento matemático formas de representación y de aplicación de un problema que hace parte de su realidad.

Con las ideas expuestas anteriormente, se resalta la construcción de modelos por parte de los estudiantes, por lo cual, surgen interrogantes sobre cómo estos a partir de sus acciones se relacionan con los modelos y de qué manera contribuyen a representar aspectos de su vida

cotidiana. En este sentido, resulta fundamental comprender los aportes de la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo, ya que los ellos no solo describen lo que observan, sino que también organizan, interpretan, transforman y resignifican su conocimiento sobre lo que estudian. Además, según Muñoz-Campos et al. (2018): “los modelos nos ayudan a comprender diversos fenómenos, tanto científicos como no científicos, y muchas veces el propio estudiante, sin ser consciente de ello, los aplica para explicar fenómenos de su vida diaria” (p. 2).

Ahora bien, en relación con el Plan de Área de Ciencias Naturales [PACN] la IEPLAC (2019) menciona como objetivo transversal considerar la ciencia como una construcción humana, por lo que el estudiante entenderá que la ciencia permite explicar, comprender y predecir diferentes fenómenos presentes en su vida cotidiana. Adicionalmente, establece la necesidad de desarrollar habilidades científicas para comprender el mundo, tomar decisiones y enfrentar desafíos. Por otra parte, específicamente para el grado undécimo en el eje sobre ciencia, tecnología y sociedad [...] se espera que los estudiantes logren los siguientes indicadores:

1. Busca soluciones adecuadas a problemas de la vida cotidiana que implican la utilización de los conceptos del movimiento armónico simple (M.A.S).
2. Reconoce y diferencia fenómenos, representaciones y preguntas pertinentes sobre estos.
3. Realiza la descripción matemática de una onda (IEPLAC, 2019, p. 36-37).

Específicamente, los tres puntos del PACN generan una oportunidad para establecer conexiones entre el contexto de los estudiantes y los fenómenos físicos. De acuerdo con el MEN (1998b), las actividades cotidianas, se pueden caracterizar como una problemática real, y que, al ser transferida como un problema matemático, involucra acciones como formular y visualizar un

problema en diferentes formas, descubrir relaciones y regularidades. Al respecto, MEN (1998a) considera que la identificación de patrones hace que el mundo sea más comprensible y explicable, más adelante argumentan: [...] “Este supuesto de que el mundo es ordenable es el que fundamenta la actividad de todo científico y permite darle sentido” (p.12). Es decir que cuando los estudiantes observan y distinguen relaciones o patrones en su vida cotidiana, es posible la construcción de una representación y consecuentemente llegar a un modelo.

Por otra parte, investigaciones como la de Castrillón-Yepes et al. (2024) se cuestionan cómo los estudiantes articulan sus conocimientos de Matemáticas y física a través del estudio de un fenómeno físico, como el Movimiento Armónico Simple (MAS), durante el desarrollo de procesos de experimentación y modelación. Con el objetivo de construir un modelo matemático, se pretendía reconocer los conocimientos conceptuales y procedimentales que emplearon los estudiantes para su solución. Concluyen sobre la importancia que tiene vincular diferentes formas de representación con el fenómeno mismo. Además, resaltan en cómo el reconocimiento y la comprensión de las variables del movimiento periódico se deben considerar en relación con el desarrollo de modelos matemáticos.

También, Molina-Toro et al. (2018) reportan las maneras en la que los estudiantes le dieron sentido a las funciones trigonométricas (seno y coseno). Al respecto, menciona que es necesario evidenciar cómo las gráficas de las funciones trigonométricas se forman y cambian en respuesta a factores variables, en lugar de verlas como líneas fijas y estáticas. Al hacer esto, se facilita una comprensión significativa de las funciones trigonométricas como modelos matemáticos de fenómenos periódicos, permitiendo a los estudiantes ver la conexión entre estas representaciones visuales y los fenómenos de cambio y variación en la realidad.

Considerando las investigaciones anteriores, se observa que conceptos como periódico y consecuentemente cíclico, presentes en la descripción de una onda y vinculados con el desarrollo de los conceptos del MAS, ofrecen una posibilidad para establecer la construcción de modelos. Consecuentemente, las ideas expuestas se conectan con los diarios pedagógicos y las ideas señaladas en los indicadores del PACN, puesto que el primero permiten establecer la problemática de la investigación y el segundo proporciona una oportunidad para desarrollarse. Finalmente, se quiere responder a la siguiente pregunta y objetivo de la investigación.

1.1 Pregunta

¿Cómo se desarrollan las subcompetencias que emergen de la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo a través de las acciones realizadas en una actividad de modelación?

1.2 Objetivo

Describir las subcompetencias que emergen de la relación triádica entre el estudiante, el fenómeno de la respiración y el modelo matemático, a partir de acciones realizadas durante una actividad de modelación.

2. REFERENTES CONCEPTUALES

En este capítulo se presentan los elementos conceptuales que sustentan la investigación y orientan tanto el diseño metodológico como el análisis de los resultados. En primer lugar, se desarrolla una noción de modelo que se configura a partir de una relación triádica estudiante-fenómeno-modelo. En segundo lugar, se sitúan las subcompetencias de la modelación matemática para reconocer las acciones que emergen de la relación triádica y que se vinculan con el proceso de modelación matemática.

2.1 El modelo y la configuración de la relación triádica

El concepto de modelo posee múltiples significados que varían según el ámbito en el que se utilice —como el cotidiano, científico, educativo, tecnológico, matemático, filosófico, artístico o social—, lo que lo convierte en un término polisémico. Según Carvajal (2002), los modelos pueden comprenderse a partir de tres relaciones etimológicas principales: (a) como medida, cantidad o proporción, lo que remite a su función reguladora o normativa; (b) como ejemplar o prototipo, es decir, una referencia ideal; y (c) como algo proporcionado por otra cosa, es decir, una representación de un objeto o fenómeno en su ausencia. Esta última acepción pone de relieve la relación entre el modelo y el mundo que busca representar.

Considerando lo anterior, el mundo se concibe como un referente compuesto por objetos, fenómenos, procesos, ideas o sistemas que los modelos intentan reflejar mediante una idealización o aproximación, ya sea estableciendo ciertas condiciones o seleccionando las características más relevantes. Por ejemplo, una maqueta del sistema solar puede considerarse un modelo, pues permite analizar simbólicamente la distribución de los planetas alrededor del Sol,

sus órbitas y sus relaciones espaciales. Así, el modelo actúa como un puente entre la realidad y su representación conceptual (Adúriz-Bravo e Izquierdo-Aymerich, 2009).

Por lo tanto al asumir que existe una relación entre el modelo y el mundo, es necesario considerar las acciones de quien construye dicha relación. Bajo esa premisa, Giere (2004) propone una relación triádica expresada como “ S usa a X para representar W con un propósito P ” (p. 743), donde S es el agente, X el modelo, W el aspecto del mundo representado y P el propósito de la representación. Esta idea introduce al sujeto como un elemento clave, al reconocer que los modelos no existen de manera aislada, sino que son contruidos y utilizados con una intención particular. Así, la representación se entiende como una actividad intencional, centrada principalmente en el propósito de quien modela y su vínculo con el modelo y el mundo.

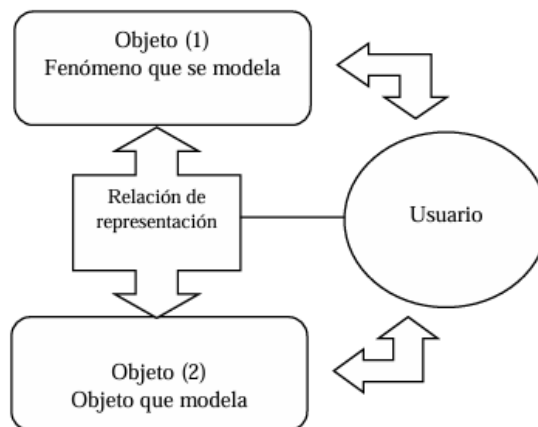
Consecuentemente, parte fundamental de utilizar un modelo para representar un aspecto del mundo es la capacidad que tiene el sujeto de seleccionar las características relevantes y similares. De este modo, la representación no exige una precisión absoluta, sino que depende del propósito y del contexto en el que se emplea. En consecuencia, los modelos no son estáticos; pueden evolucionar y perfeccionarse a medida que se incorporan nuevas evidencias. Según Giere (1999; 2004) esta flexibilidad es precisamente el elemento que hace que la actividad de representación sea pragmática.

En esa línea, Rendon-Mesa et al. (2015) interpretan la relación triádica (Giere, 1999), que se presenta en la Figura 1 donde se hace explícita la presencia del usuario y su vínculo con la relación de representación establecida entre el mundo y el modelo. Por lo cual sugieren que la forma en que se modela un objeto (fenómeno) se articula a las acciones que realiza el usuario para construir su modelo; de esa manera enfatiza en poner la atención sobre los elementos que

permiten la emergencia del modelo, pues se evidencia que el sujeto establece diferentes relaciones con aquello que pretende modelar.

Figura 1

Interpretación relación triádica por Rendon-Mesa et al. (2015)



Fuente: Rendon-Mesa et al. (2015).

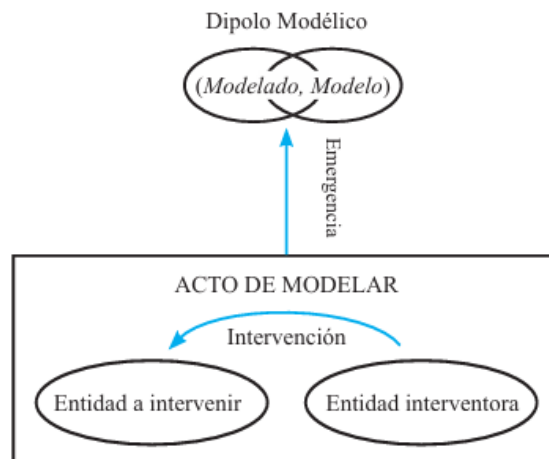
Así mismo, se afirma de acuerdo con Chamizo (2010) que el término modelo refiere a una representación contextualizada de una porción de la realidad que se construye con un fin y que, por lo tanto, tiene un carácter incompleto, debido a que involucra una única forma de comprender el mundo. Adicionalmente, cada tipo de representación se usa de forma específica, por lo cual contienen ventajas y desventajas (Justi, 2006). Esto demuestra cómo el modelo no es un fin en sí mismo; su valor y su utilidad están determinados por el objetivo particular que queremos alcanzar con él (Cassini, 2016).

Desde esta perspectiva de la relación triádica, Arrieta y Díaz (2015) introducen el concepto de dipolo modélico, que hace referencia a la articulación entre el modelo, lo modelado y el actor. Destacan que es este último —el sujeto que modela— quien otorga significado al acto de modelar, ya que el modelo solo adquiere sentido cuando se emplea como una herramienta en una

actividad concreta de modelación, por lo cual la relación estudiante- fenómeno-modelo es articuladora. A partir de esta perspectiva, los autores distinguen entre los alcances que pueden lograr los profesionales y los que alcanzan los estudiantes. En el ámbito educativo, subrayan la importancia de que el proceso de enseñanza se enfoque en fomentar que los estudiantes realicen acciones orientadas a modelar situaciones significativas de su vida cotidiana.

Figura 2

Acto de modelar por Arrieta y Diaz (2015)



Fuente: Arrieta y Diaz (2015)

Por lo anterior, según la formación en ciencias (MEN, 1998a, 2006b) y la Práctica Pedagógica se puede establecerse una relación frente a como se da la construcción del modelo en la clase de ciencia debido a que se suele establecerse en el contexto de la teoría científica. Lo que implica reconocer que los modelos son contruidos por los científicos para comprender una porción de la realidad y, a partir de ella, formular o validar una teoría.

Es así como el modelo se convierte en un medio que conecta el fenómeno observado con la teoría que busca explicarlo (Acevedo-Díaz et al., 2017). Por lo cual “para proponer un modelo

científico se requiere manejar el lenguaje científico y una red compleja de conocimientos que lo sustentan y le dan fundamento” (Umpiérrez-Oroño et al., 2023, p. 2). Es decir, que los modelos científicos requieren de un dominio especializado y del respaldo de teorías previas que los hagan coherentes dentro del campo científico.

En correspondencia, se resalta una diferencia entre el modelo construido por el científico y el de un estudiante, ya que "el modelo de la ciencia es un conocimiento producido que hay que enseñar, mientras que el modelo del alumno es la expresión de la comprensión de dicho conocimiento” (Figueiredo y Perticarrari, 2022, p. 5). Esto implica que los modelos de los estudiantes no serán iguales a los que construyen los científicos, pero sí mantienen una relación con la forma en que estos últimos los desarrollan. Por ello, es fundamental reconocer y valorar las formas particulares en que los estudiantes construyen modelos, pues estas pueden evidenciar sus apropiaciones del conocimiento (Moreno-Arcuri y López-Mota, 2013).

Dentro de este orden de ideas, se comprende que la relación de representación entre el mundo y el modelo se configura como la relación triádica estudiante- fenómeno-modelo (Giere, 1999, 2004). Desde esta perspectiva, es posible reconocer cómo los sujetos realizan acciones que permiten dar lugar a la emergencia del modelo, y que va más allá de establecer la representación, por lo cual los estudiantes desarrollan formas particulares de construir un modelo (Rendón-Mesa et al., 2015), lo que les permite otorgar significado al acto de modelar (Arrieta y Diaz, 2015).

Finalmente, para esta investigación, el interés se centra en la construcción de modelos matemáticos, entendida como una tarea cuyo propósito es representar matemáticamente una situación específica (Ferrando et al., 2017). Estos modelos no se reducen únicamente a la expresión simbólica de relaciones entre variables, sino que integran diversas formas de

representación —como ecuaciones, tablas, gráficas, lenguaje verbal, dibujos e imágenes— que permiten comunicar y comprender mejor la situación planteada (Muñoz-Mesa et al., 2014). En conjunto, estos elementos no solo estructuran el modelo, sino que también le otorgan significado al conectar la matemática con el contexto que se desea representar.

En el siguiente apartado se profundiza en las subcompetencias que emergen de esta relación triádica estudiante- fenómeno-modelo durante el proceso de modelación matemática.

2.2 Subcompetencias en el proceso de modelación matemática

Definir el modelo matemático permite situar la construcción de la representación matemática a partir de dos dimensiones distintas: por un lado, la matemática; y por el otro, el contexto en el que se desarrolla la situación a modelar, es decir, el modelo y el mundo, respectivamente. De este modo, se reconoce que el estudiante transita por un proceso de modelación que le permite alcanzar el objetivo propuesto

Diversas investigaciones han buscado describir el proceso de modelación, planteando esquemas que orientan las etapas que se recorren durante el proceso de modelación. Entre ellas, se encuentran las propuestas de Borromeo-ferri (2010), Blomhøj, M. (2008), Perrenet y Zwaneveld (2012) y Villa-Ochoa et al. (2022), ellos evidencian que no existe una única forma válida de hacer modelación, pero que, si es posible identificar características comunes, como, por ejemplo: la comprensión de la situación, la construcción del modelo y trabajo matemático, la interpretación de resultados y validación del modelo.

Esto implica que la manera en la que el estudiante atraviesa el proceso de modelización es reconocida como una competencia que permite caracterizar las acciones que desarrolla durante la construcción del modelo (Blomhøj y Jensen, 2007; Maaß, 2006; Greefrath et al., 2013). En ese

sentido, Blomhøj y Jensen (2007) destacan que la competencia en modelización matemática no puede entenderse como un solo aspecto o una sola habilidad, sino que debe analizarse en al menos tres dimensiones distintas para describir el progreso en el proceso. Estas dimensiones son:

1. Grado de cobertura, según qué parte del proceso de modelización trabajan los estudiantes y el nivel de sus reflexiones.
2. Nivel técnico, de acuerdo con el tipo de matemáticas que utilizan los estudiantes y la flexibilidad que tienen en su uso de las matemáticas.
3. Radio de acción, según el dominio de las situaciones en las que los estudiantes son capaces de realizar actividades de modelización. (p.55)

Consecuentemente, la modelación se establece como una práctica reflexiva y formativa en el aula, en la cual los estudiantes la llevan a cabo activamente al construir respuestas a problemas, mientras los profesores orientan y regulan el proceso (Blomhøj & Jensen, 2007). Por otra parte, desde una perspectiva centrada en el análisis del proceso mismo de modelización, Maaß (2006) define las subcompetencias según el momento en el que estas emergen dentro del ciclo de modelización. El cual se puede se hace referencia en la Tabla 2.

Tabla 2

Subcompetencias propuestas por Maaß (2006)

Subcompetencia	Indicadores
Comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad.	• Reconocer las cantidades que influyen en la situación, nombrarlas e identificar las variables clave • Construir relaciones entre las variables • Buscar la información disponible y diferenciar entre la información pertinente y la irrelevante
Establecer un modelo matemático a partir del modelo real.	• Matematizar las cantidades relevantes y sus relaciones • Simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones si es necesario y reducir su número y complejidad

Subcompetencia	Indicadores
Resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático.	• Elegir las notaciones matemáticas adecuadas y representar gráficamente las situaciones • Utilizar estrategias heurísticas como la división del problema en problemas parciales, el establecimiento de relaciones con problemas similares o análogos, la reformulación del problema, la visualización del problema en una forma diferente, la variación de las cantidades o los datos disponibles, etc. • Utilizar los conocimientos matemáticos para resolver el problema.
Interpretar resultados matemáticos en una situación real.	• Interpretar resultados matemáticos en contextos extramatemáticos. • Generalizar las soluciones que se desarrollaron para una situación especial. • Ver soluciones a un problema mediante el uso de un lenguaje matemático apropiado y/o para comunicar acerca de las soluciones.
Validar la solución.	• Revisar algunas partes del modelo o volver a pasar por el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación. • Reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones pueden desarrollarse de manera diferente. • Cuestionar el modelo en general.

Nota. Adaptado de Maaß (2006).

En coherencia a lo anterior, Greefrath et al. (2013) delimita una serie de subcompetencias que se refiere a la manera en la que los estudiantes desarrollan cada uno de los subprocesos de la modelación y que permiten reconocer como el objetivo final no es solo resolver un problema, sino adquirir la capacidad de traducir entre la realidad y las matemáticas. Adicionalmente destaca que debido a que existen diferentes representaciones del ciclo de modelización, es posible que se requiera el desarrollo de distintas subcompetencias según el enfoque adoptado. En el caso de su investigación, se identifican las siguientes subcompetencias:

Tabla 3

Subcompetencias propuestas por Greefrath et al. (2013)

Subcompetencias	Indicador
Comprender	Los estudiantes construyen un modelo mental propio sobre una situación problemática dada y comprenden así la pregunta planteada.
Simplificar	Los estudiantes distinguen entre la información importante y no importante de una situación real.
Matematizar	Los estudiantes traducen situaciones reales adecuadamente simplificadas en modelos matemáticos (por ejemplo, término, ecuación, figura, diagrama, función).
Interpretar	Los estudiantes relacionan los resultados obtenidos en el modelo con la situación real y así obtienen resultados reales.
Validar	Los estudiantes comprueban si los resultados reales del modelo se ajustan adecuadamente a la situación real.
Comunicar	Los estudiantes relacionan las respuestas encontradas en el modelo con la situación real y responden así a la pregunta planteada.
Nota. Tomado de Greefrath et al. (2013).	

Por lo tanto, para analizar las acciones que los estudiantes realizan durante la construcción de modelos, se retomaron las subcompetencias propuestas por Maaß (2006) y Greefrath et al. (2013). Ambas contribuciones permiten descomponer el proceso de modelación matemática en componentes observables, lo que facilita el estudio de la relación triádica estudiante- fenómeno- modelo. Esta perspectiva resulta especialmente útil para determinar de qué manera se puede realizar el análisis dentro del marco de la propuesta de intervención (ver Anexo B).

A continuación, se presenta la Tabla 4 que agrupa las propuestas de Maaß (2006) y Greefrath et al. (2013) con las que se consideran para esta investigación.

Tabla 4

Subcompetencias para la investigación Maaß (2006) y Greefrath et al. (2013)

Autores

<i>Maaß (2006)</i>	<i>Greefrath et al. (2013)</i>	<i>Gaviria (2025)</i>
Comprender el problema real y establecer un modelo basado en la realidad	Comprender Simplificar	Comprender y Proponer
Establecer un modelo matemático a partir del modelo real	Matematizar	Matematizar, Interpretar y Validar
Resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático		
Interpretar resultados matemáticos en una situación real	Interpretar	
Validar la solución	Validar Comunicar	Comunicar y Exponer

De acuerdo con la Tabla 4 las subcompetencias establecidas permiten entonces reconocer tres momentos claves durante el proceso de modelación (Borromeo-ferri, 2010; Blomhøj, M. 2008; Perrenet y Zwaneveld 2012; y Villa-Ochoa et al., 2022), los cuales sitúan la relación triádica estudiante- fenómeno-modelo, y se determina principalmente por las acciones que el estudiante realiza al enfrentarse al fenómeno y al construir un modelo que lo represente.

En un primer momento, se identifica la relación que el estudiante establece con el fenómeno. Las subcompetencias que emergen son *Comprender* y *Proponer*, ya que los estudiantes logran realizar un primer acercamiento al fenómeno, en el cual movilizan conocimientos previos, observan sus comportamientos e intentan reconocer a lo que ocurre. Este proceso inicial implica que el estudiante comience a identificar patrones, regularidades o aspectos susceptibles de ser representados mediante un modelo. De esta manera, el fenómeno puede empezar a ser vinculado con el modelo matemático, lo cual da paso al siguiente momento.

En un segundo momento, se establece la relación entre el estudiante y el modelo matemático. Inicialmente, la atención del estudiante se centra en la construcción de relaciones

matemáticas que permitan representar el fenómeno previamente reconocido. Las subcompetencias que se manifiestan aquí son *Matematizar*, *Interpretar* y *Validar*. Luego, una vez el modelo ha sido construido, debe interpretarlo y validarlo, es decir, verificar en qué medida dicho modelo representa adecuadamente el fenómeno, y qué aspectos considera relevantes en esa correspondencia. Esta validación no solo implica una revisión formal del modelo, sino también una reflexión sobre su pertinencia y su capacidad explicativa.

En un tercer momento, se observa la relación entre el modelo y el fenómeno, mediada por las subcompetencias de *Comunicar* y *Exponer*. Aquí, el estudiante utiliza el modelo construido para establecer una nueva mirada sobre el fenómeno, lo que implica justificar de qué manera podría cambiar el modelo en razón a por qué ciertas variables o relaciones son significativas. Este momento es fundamental, ya que demuestra cómo se apropia del modelo como herramienta para dar sentido y explicar el mundo, cerrando así el proceso de la modelación.

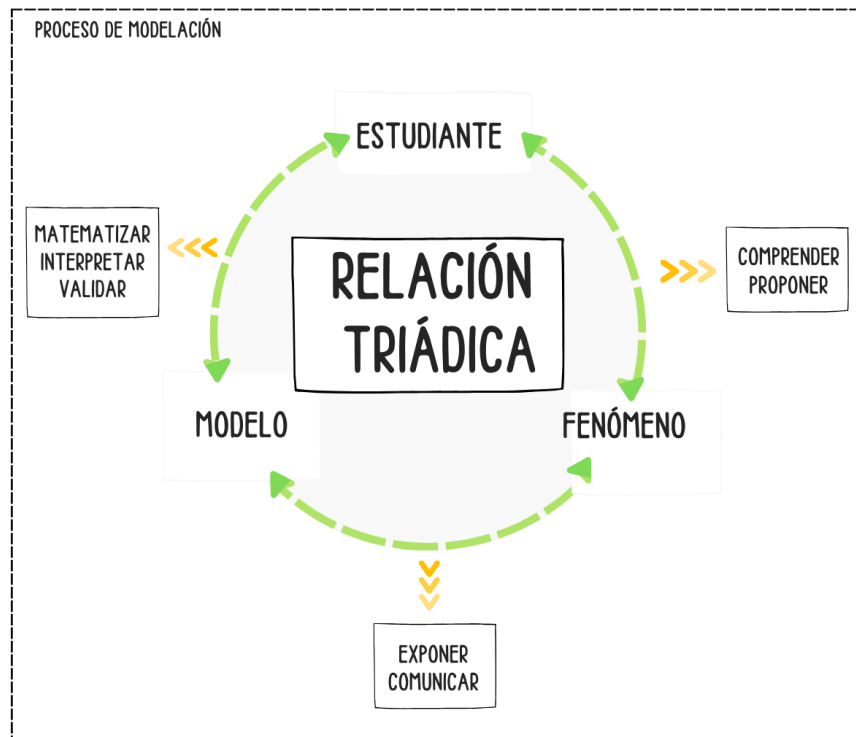
Finalmente, cabe aclarar que si bien en cada momento se destaca una relación específica dentro de la triada estudiante-fenómeno-modelo, esto no significa que el otro elemento quede excluidos o desconectado. Por el contrario, aunque el análisis resalte dos componentes que se evidencian con mayor fuerza en las acciones del estudiante, el tercer elemento permanece implícitamente involucrado. En consecuencia, las relaciones no son excluyentes, sino que se entrelazan y se vinculan en el proceso de modelación. Por ejemplo, cuando se enfatiza la relación entre el estudiante y el fenómeno, también está presente la idea de un modelo potencial, que orienta la comprensión; de la misma manera, al validar un modelo, se recurre necesariamente al fenómeno como referencia y por último es el estudiante que vincula al fenómeno y al modelo para otorgarle significado al acto de modelar. Por lo cual se logra comprender la triádica como un

sistema de relaciones interdependientes, en el que cada momento pone en primer plano ciertos vínculos, sin perder de vista la totalidad del proceso.

A modo de cierre, en la Figura 3 se presenta una síntesis de las ideas anteriormente mencionadas.

Figura 3

Relación entre las subcompetencias y la relación triádica



3. METODOLOGIA

El presente capítulo describe el enfoque metodológico que orientó la investigación, así como las decisiones que guiaron su diseño, desarrollo e implementación. Dado que el propósito central fue describir las relaciones que se establecen entre el estudiante, el modelo matemático y el fenómeno de la respiración a partir de las subcompetencias que emergen en actividades de modelación se optó por una perspectiva cualitativa de carácter interpretativo y naturalista. En este sentido, se detalla el contexto, los participantes, las etapas del proceso investigativo y las fases de la propuesta de intervención. Igualmente, se expone el modo en que se construyó la categoría de análisis y sus respectivas subcategorías, junto con los criterios éticos que sustentaron el desarrollo de la investigación.

3.1 Paradigma y Enfoque

Esta investigación tiene un enfoque cualitativo, de carácter naturalista e interpretativo, lo que implica que la construcción del conocimiento surge de las acciones realizadas en un espacio específico, donde convergen diversas realidades y formas de entenderlas. Este enfoque exige valorar y reconocer las contribuciones de cada participante (Hernández et al., 2010). De manera que como lo plantean García y Castro (2017) el enfoque cualitativo es “un proceso activo, sistemático y riguroso de investigación, en el que se toman decisiones acerca de aquello sobre lo que se investiga mientras se está en el propio campo o ámbito objeto de estudio” (p. 21). Esto implica que las decisiones sobre qué investigar y cómo hacerlo emergen en interacción con el contexto de la investigación.

Al desarrollarse en el marco de la Práctica Pedagógica, la investigación se vincula a dinámicas educativas, lo que permite como investigador comprender las acciones de los estudiantes a medida que evidencian sus conocimientos, sus interacciones y sus experiencias en el desarrollo de la propuesta de intervención (ver Anexo B). Por lo tanto, el papel del investigador se establece como un sujeto capaz de interpretar la realidad, quien al participar del contexto dialoga y confronta sus propias experiencias e interacciones con las interpretaciones de los estudiantes (Miranda y Ortiz, 2021).

Según González-Díaz et al. (2021), se reconocen tres aspectos fundamentales que garantizan el rigor en este tipo de investigación: credibilidad, transferibilidad y confirmabilidad. En primer lugar, la credibilidad, entendida como la validez de lo registrado, se garantizó mediante la estructuración de las etapas de la investigación —a las cuales se aludirá más adelante— y el uso de técnicas e instrumentos de registro, entre ellos los diarios pedagógicos, que corresponden a la acción de observación participante dentro del contexto. Además, se estableció una matriz en Excel (ver Anexo C) donde se almacenó la información recolectada de la propuesta de intervención, asegurando un respaldo organizado y accesible para el análisis.

En segundo lugar, la transferibilidad, que hace referencia a las condiciones que permiten valorar la aplicabilidad de los resultados en otras investigaciones, se fortaleció mediante la descripción del contexto, los participantes y las condiciones de implementación, aspectos que se desarrollan en los apartados siguientes de este capítulo. Finalmente, la confirmabilidad, vinculada con la objetividad en la interpretación de la información, se abordó principalmente a través del proceso de delimitación de categorías de análisis con base en criterios claros y verificables, los

cuales fueron contrastados en la construcción de los resultados. Este criterio se evidencia especialmente en el capítulo 5, correspondiente a la cuarta etapa de la investigación.

En resumen, mientras la credibilidad se centró en garantizar la validez de lo registrado mediante estrategias de construcción, observación y documentación, la transferibilidad se apoyó en una descripción contextual que permitió situar la investigación sobre distintas condiciones y posibilidades. Por su parte, la confirmabilidad se fortaleció con los criterios de análisis establecidos que permitieron reconocer los resultados y conclusiones. Esto permite que, en el marco de un enfoque cualitativo con perspectiva naturalista e interpretativa, se reconozca la importancia de la participación tanto del investigador como de los participantes a través de sus experiencias y sus interacciones.

3.2 Contexto

La investigación se desarrolló a lo largo de los periodos 2023-II, 2024-I y 2024-II, y se estructuró en cuatro etapas: indagación, preparación, implementación y divulgación. Este proceso investigativo estuvo articulado con la Práctica Pedagógica realizada en la Institución Educativa Pedro Álvarez Correa. Por lo cual el problema de la investigación se construye a partir de los diarios pedagógicos en relación con situaciones ocurridas en la asignatura de Física.

Los participantes de la investigación fueron estudiantes de grado undécimo y decimo. El desarrollo de la propuesta de intervención se realizó con dos grupos de Undécimo a finales de 2024-1, cada uno con aproximadamente 38 estudiantes, con edades entre 16 y 18 años. Estos grupos fueron seleccionados por su participación en el desarrollo de la Práctica Pedagógica, lo que garantizaba que contaran con los conocimientos, las habilidades y las herramientas necesarias para contribuir a la resolución de las situaciones propuestas. Además, se definió una duración de

cuatro semanas para realizar las actividades con los estudiantes debido a la disponibilidad horaria y para no ocasionar obstáculos en el calendario escolar.

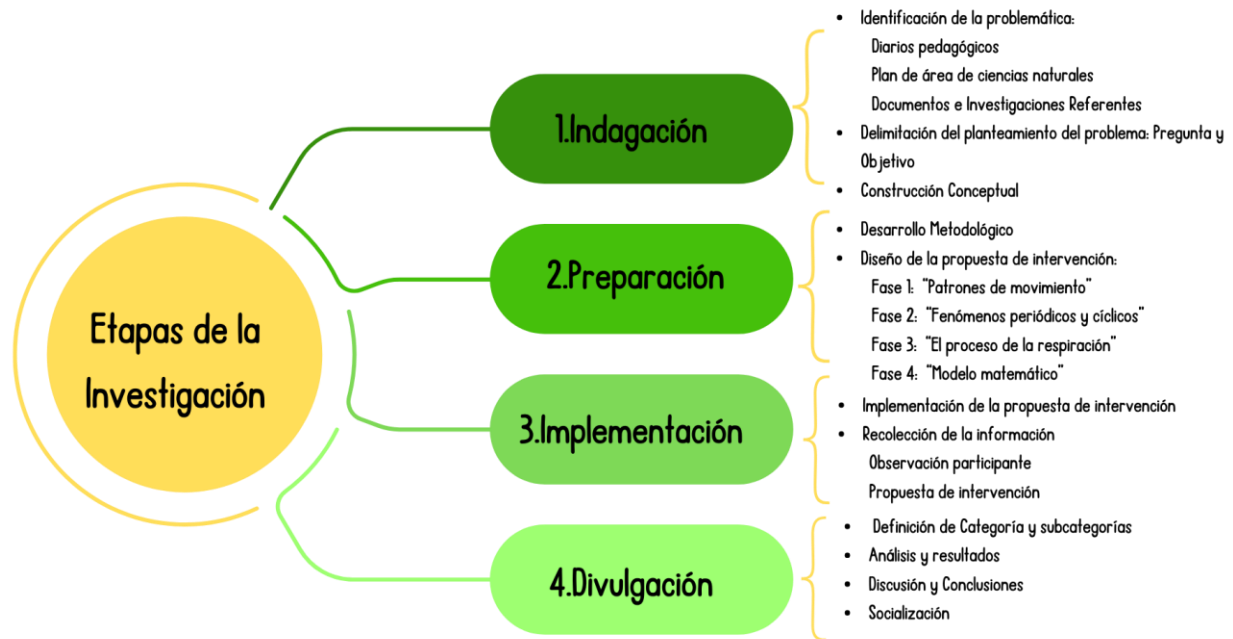
3.3 Etapas

El diseño metodológico se construyó a partir de tres etapas. La primera etapa denominada ***Indagación*** consistió en la delimitación del problema de investigación, a través de la revisión y problematización de los diarios pedagógicos, el Plan de Área de Ciencias Naturales y el uso de documentos que orientan la enseñanza en Colombia y diferentes investigaciones. Esta etapa se termina con la construcción conceptual de la investigación. La segunda etapa, referida a la ***Preparación*** incluyó el desarrollo metodológico de la investigación, además se realizó el diseño de la propuesta de intervención y todas las acciones orientadas a su construcción y desarrollo en el aula.

Luego, en la etapa de ***Implementación*** dónde se aplicó la propuesta de intervención y se recolectó la información. Finalmente, en la cuarta etapa de ***Divulgación*** se estableció la categoría de análisis y las subcategorías con el fin de analizar la información y presentar los resultados, se elaboraron las conclusiones y discusiones, para dar cierre al proceso investigativo con la socialización. A continuación, se presenta en la Figura 14 cada una de las etapas mencionadas anteriormente, para luego describirlas.

Figura 4

Etapas del proceso de investigación



3.3.1 Etapa 1: Indagación

Como se mencionó anteriormente en el Capítulo 1, la investigación se articula al proceso de Práctica Pedagógica, el cual se refiere al espacio profesional en la formación de profesores, por esta razón inicialmente fue importante reconocer los diarios pedagógicos como un instrumento que permitía configurar y evidenciar a través de pequeños fragmentos, diferentes situaciones significativas que sucedían dentro del aula y, con ello, las reflexiones, las preguntas o los comentarios que allí surgían, con el fin de identificar y de perfilar la problemática motivo de investigación.

En correspondencia con lo anterior, se revisó en el plan de Área de Ciencias Naturales de la IEPLAC, centrándose en los diferentes objetivos curriculares que se plantean para la asignatura de Física, y así construir relaciones y similitudes con lo que se encontró en el diario pedagógico

para poder ampliar la visión de la problemática. Además, se tuvo en cuenta los documentos que orientan la enseñanza en Colombia (MEN, 1998) como diferentes investigaciones para abrir la discusión. Finalmente, tanto el PACN y los diarios pedagógicos marcar un interés en el que se desarrolló la investigación, debido a esto, se comenzó el rastreo de investigaciones que aportaran discusiones importantes para la construcción de los referentes conceptuales

Para el rastreo de las investigaciones, se utilizó Google Scholar como motor de búsqueda y luego diversas bases de datos, tales como Dialnet, Redalyc, Scopus, Eric, SciELO y ScienceDirect. Se consideraron las palabras clave más relevantes para la investigación, como “modelación” “representación” “modelos”, “construcción”, “clase de ciencias” y “clase de matemáticas”, junto con conectores booleanos como AND y OR, con el fin de construir diferentes ecuaciones de búsqueda que permitieran encontrar información. Finalmente, se definieron algunos referentes el concepto de modelo y la configuración de la relación triádica (Giere 1999, 2004; Rendón-Mesa et al., 2015; Arrieta y Diaz, 2015), además de las subcompetencias de la modelación matemática (Blomhøj y Jensen, 2007; Maaß, 2006; Greefrath et al., 2013) que sustentan el problema de investigación y que, posteriormente, sirvió para contrastar los resultados y los hallazgos de la Cuarta etapa de esta investigación.

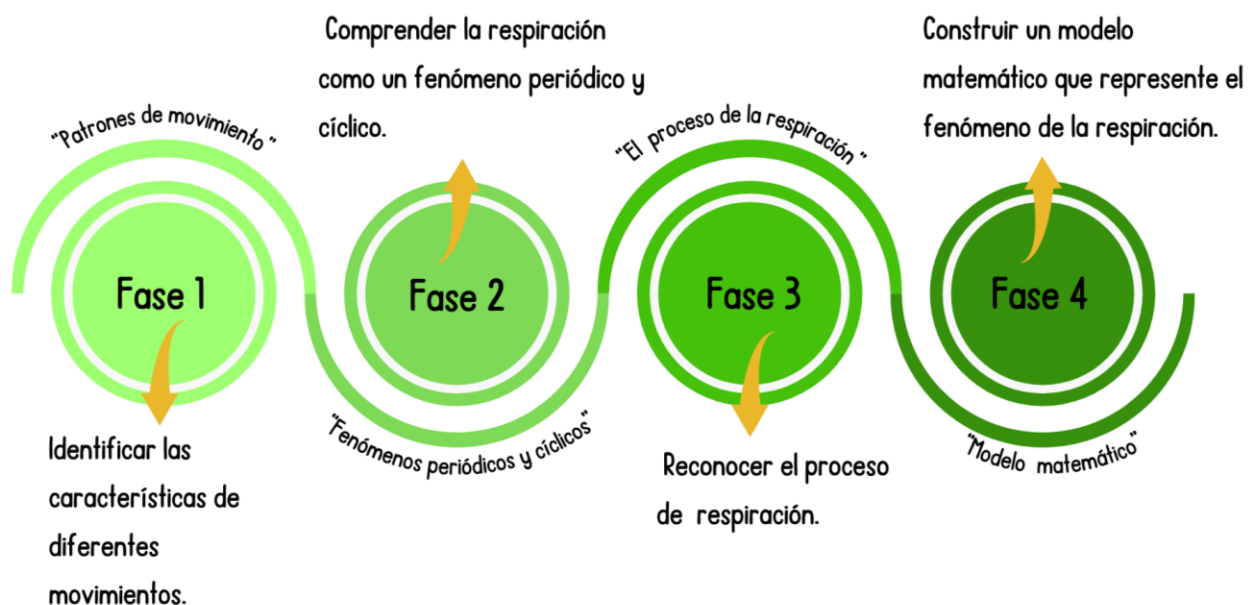
3.3.2 Etapa 2: Preparación

El diseño de la propuesta de intervención se realizó en correspondencia con los intereses declarados por el planteamiento del problema, la pregunta y los objetivos de la investigación. Su configuración se hizo con base en el proceso de modelación que define como los estudiantes desarrollan dicha competencia y, por tanto, el desarrollo de subcompetencias según la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo.

Para su estructuración se asumieron cuatro fases, “Patrones de movimiento”, “Fenómenos periódicos y cíclicos”, “El proceso de la respiración” y “Modelo matemático” cada una se realizó en una sesión de 90 minutos, en las que el fenómeno de interés fue el proceso de respiración, y específicamente su comportamiento periódico y cíclico. Por lo cual, el objetivo de la propuesta era que los estudiantes establecieran acciones para construir un modelo matemático del fenómeno de la respiración, a continuación, se presentan un diagrama que describe como se organizan cada una, para luego describirlas.

Figura 5

Fases de la propuesta de intervención



3.3.2.1 Fase 1: “Patrones de movimiento”.

Esta fase tenía como objetivo identificar las características de diferentes movimientos, a partir de patrones determinados por su trayectoria. Se esperaba que, en la observación y el análisis de secuencias de imágenes, los estudiantes realizaran, mediante la descripción del

movimiento, una aproximación a la caracterización de fenómenos periódicos o cíclicos. La sesión se estructuró en cuatro momentos. En el primero, se presentaron diferentes imágenes con las que se debía construir cuatro secuencias determinadas por diferentes movimientos: el lanzamiento de un yoyo, el balanceo en un columpio, la traslación de la tierra y el recorrido de un reloj.

Para el segundo momento, los estudiantes realizaron las descripciones de las características del movimiento que se podían representar en las imágenes, para luego establecer similitudes y diferencias entre cada uno. Para el tercero, se les presentó una imagen sobre las fases de la luna, y se les preguntó sobre qué podrían notar si observaran la luna durante 30 días, además justificar porqué se podría identificar la fase faltante en la imagen. En el cuarto momento se estableció una conversación para reconocer las diferentes soluciones de las secuencias construidas y problematizar las principales características de los movimientos periódicos y cíclicos. Finalmente, en este mismo momento, los estudiantes debían de reunirse para identificar lo periódico y lo cíclico en las secuencias.

3.3.2.2 Fase 2: “Fenómenos periódicos y cíclicos”

Esta fase tenía como objetivo comprender la respiración con un fenómeno periódico y cíclico. Para ello, los estudiantes analizaron videos de diversas situaciones, reflexionaron sobre el acto de respirar y exploraron de forma consciente la percepción de su propio cuerpo. A partir de estas actividades, identificaron las características de los fenómenos observados y profundizaron en la comprensión del proceso de la respiración.

La sesión se desarrolló en tres momentos. El primer momento involucró tres videos (olas del mar, fragmento de la canción “we will rock you” de Queen y una persona haciendo una respiración controlada). Los estudiantes debían de realizar observaciones que les permitiera

identificar el comportamiento cíclico o periódico de las situaciones que estaban analizando. El segundo momento introduce la posibilidad de reconocer la respiración como un fenómeno con las características anteriormente mencionadas, así como los factores que intervienen, por ejemplo: las fases del proceso, la cantidad de aire transportada, el estado físico de la persona, el tiempo durante cada fase, el tiempo total del proceso, entre otros. Finalmente, se realizó un ejercicio de respiración controlada, en el que los estudiantes debían percibir qué ocurría en su abdomen durante una respiración consciente. Luego, se les propuso representar mediante un dibujo lo que experimentaban al respirar

3.3.2.3 Fase 3: “El proceso de la respiración”

Para esta fase, el objetivo era reconocer el proceso de respiración. Se realizó un conservatorio mediado por ideas, preguntas y videos que permitieron poner en discusión la complejidad del fenómeno de la respiración. Los estudiantes tenían la tarea de buscar información sobre este proceso.

La sesión se desarrolló en tres momentos. En el primer momento, se estableció la necesidad de conocer sobre el fenómeno de la respiración, como iba a ser el principal interés, se debía identificar qué estaría sucediendo, qué podría ser importante considerar y a quién podríamos preguntarle. Para ello, se realizó una conversación en torno a diferentes preguntas que trataban de movilizar la discusión frente al fenómeno. Luego, en el segundo momento, se presentaron dos videos de profesionales que explicaban asuntos anatómicos y fisiológicos, que servían como justificación para considerar la respiración como un fenómeno periódico y cíclico. Finalmente, el tercer momento se configuró a partir de la construcción de un mapa mental sobre las ideas discutidas en clase y su socialización.

3.3.2.4 Fase 4: “Modelo matemático”

Esta fase se diseñó con el objetivo de construir un modelo matemático que representara el fenómeno de la respiración, a partir de dos variables: el volumen de aire y el tiempo durante el ciclo completo de inhalación y exhalación. Los estudiantes debían establecer relaciones matemáticas que permitieran construir el modelo, así como justificaciones que explicaran el comportamiento de la gráfica resultante.

La sesión se desarrolló en cuatro momentos. En el primer momento, los estudiantes identificaron los elementos que influyen en el estudio del fenómeno respiratorio desde una perspectiva periódica y cíclica. Por ejemplo, se discutió cómo el estado físico de la persona (reposo o actividad física) puede modificar el patrón respiratorio. En el segundo momento, calcularon su frecuencia respiratoria, registrando el número de respiraciones por minuto. A partir de este dato, estimaron la duración total de un ciclo respiratorio y la de cada una de sus fases (inhalación y exhalación).

En el tercer momento, elaboraron un modelo tabular relacionando el volumen de aire y el tiempo, usando como referencia un valor promedio de 500 ml para cada fase del ciclo respiratorio. Posteriormente, analizaron qué ocurría con ambas variables a lo largo de cada fase.

Finalmente, en el cuarto momento, construyeron modelo grafico con base en los datos obtenidos y reflexionaron sobre cómo esta representación visual permite describir el proceso de respiración. También discutieron qué condiciones podrían modificarse, ajustarse o mantenerse constantes en el modelo propuesto.

3.3.3 Etapa 3: Implementación

Durante esta etapa se llevó a cabo la implementación de la propuesta de intervención en el marco de la Práctica Pedagógica correspondiente al semestre 2024-1. En este proceso se reconocieron las diversas técnicas e instrumentos de recolección de información que se han usado en la investigación, entre los que se destacan la observación participante, el diario pedagógico y la propuesta de intervención.

En cuanto a la técnica de observación participante, implicó como investigador asumir un rol activo en el contexto donde se desarrolló la investigación. Según Hernández et al. (2010), esta técnica consiste en participar directamente en la situación observada, sin perder la distancia analítica respecto a los sujetos. Dicha participación exigía prestar atención a las formas de interacción con los estudiantes y a cómo estas influían en la construcción del proceso investigativo. Para profundizar en esta idea, Alves-Mazzotti y Gewandsznajder (2000) destacan que, al implementar esta técnica, es esencial tener en cuenta aspectos como el nivel de implicación del investigador, el grado de familiaridad con los participantes y las características específicas del contexto, ya que estos elementos condicionaban la manera en que se podía acceder y se dar sentido a la información recogida.

Como instrumentos de recolección de información, se utilizaron el diario pedagógico y la propuesta de intervención. El diario pedagógico recoge las expresiones, apropiaciones y preguntas relacionadas con las acciones tanto del investigador como de los participantes, especialmente en los momentos iniciales del desarrollo de la propuesta. Este instrumento recogió las intervenciones realizadas durante la configuración del problema y la ejecución de las actividades, permitiendo documentar, reflexionar y ajustar las acciones conforme avanzaban las

etapas del proceso. Como señala Pérez (2007), “su implementación se da en un ciclo dinámico entre la observación, descripción, reflexión e intervención de un problema o aspecto de la realidad” (p. 113).

Por su parte, la propuesta de intervención —construida previamente en la fase de diseño— permitió registrar las respuestas y apropiaciones de los estudiantes a lo largo de cada una de las fases. Para ello, se realizó un seguimiento de las construcciones de los estudiantes en términos de dibujos, expresiones, mapas de ideas y modelos, lo cual permitió organizar e interpretar la información recolectada en función de categorías emergentes, facilitando así el análisis y la obtención de resultados pertinentes para la investigación

3.3.4 Etapa 4: Divulgación

Esta última etapa consistió en la organización, la categorización y el análisis de la información recolectada durante la fase de implementación. Inicialmente, se organizó la información a través de una matriz en Excel (ver Anexo C), en la que se diferenciaron y siguieron las respuestas de los grupos de estudiantes durante la implementación de la propuesta de intervención. Posteriormente, con el objetivo de facilitar el análisis, se delimitaron cuatro grupos de respuestas, codificados como G1, G2, G3 y G4. La selección de estos grupos se basó en los siguientes criterios: (a) que los estudiantes hubieran completado la totalidad de las actividades propuestas, y (b) su nivel de participación e interés durante las sesiones desarrolladas.

Luego, se empezó la categorización, entendida como un ejercicio que facilita la organización de la información recolectada, en la que el objetivo es establecer patrones y regularidades (Bautista, 2011). Así, se define la categoría de la investigación como el reconocimiento de las subcompetencias a través de la relación triádica estudiante- fenómeno-

modelo, de las cuales se busca describir cómo los estudiantes a partir de sus acciones vinculan el fenómeno de la respiración con el modelo matemático. Adicionalmente, se definen tres subcategorías según las subcompetencias: (1) Comprender y Proponer, (2) Matematizar, Interpretar y Validar (3) Comunicar y Exponer.

Tabla 5

Reconocimiento de las subcompetencias a través de la relación triádica

Subcategoría	Descripción
Comprender y Proponer	Los estudiantes logran realizar un primer acercamiento al fenómeno, en el cual movilizan conocimientos previos, observan sus comportamientos e intentan reconocer lo que ocurre.
Matematizar, Interpretar y Validar	Los estudiantes se centran en la construcción de relaciones matemáticas para luego verificar en qué medida dicho modelo representa adecuadamente el fenómeno, y qué aspectos considera relevantes en esa correspondencia
Comunicar y Exponer	Los estudiantes utilizan el modelo construido para establecer una nueva mirada sobre el fenómeno.

Ahora bien, se reconoce que el proceso de análisis según Bautista (2011) responde a “la interpretación de la información recolectada en el transcurso de toda la indagación y que han sido registrados en diversos instrumentos para facilitar su estudio” (p.187). Al respecto, Hernández (2014) afirman que en este momento el investigador le asigna un significado en función del contexto de la investigación, los objetivos planteados y el marco teórico adoptado. En ese sentido la Tabla 5 permite la construcción de resultados desarrollados en el siguiente capítulo

3.4 Consideraciones éticas

Siguiendo los lineamientos establecidos por la Asociación Británica de Investigación Educativa (ABIE, 2019) y las consideraciones del código de ética de la Universidad de Antioquia (UdeA, s.f), se definieron los siguientes principios. Estos no solo reflejan el reconocimiento de las responsabilidades inherentes al proceso de investigación, sino que también constituyen un marco normativo fundamental que guio cada paso de la acción investigativa.

Consentimiento Informado: Se obtuvo el consentimiento informado de los estudiantes y sus padres o tutores antes de su participación en el proyecto, procurando que comprendieran los objetivos, los procedimientos y las implicaciones de la investigación. Asimismo, se les brindó la posibilidad de retirarse en cualquier momento sin consecuencias (Ver Anexo D).

Respeto: Durante el desarrollo de la investigación, se priorizó el trato digno hacia los participantes, asegurando su derecho a la privacidad y a la protección de su bienestar en todo momento. Asimismo, se fomentó un ambiente de participación en el que todos los aportes fueron valorados, sin realizar juicios de valor sobre las apropiaciones de los participantes.

Protección: Se implementaron medidas para asegurar que la información recolectada fuera tratada con confidencialidad. De modo que no fuera posible vincular los resultados con participantes específicos.

Equidad: Se posibilitó que todos los participantes tuvieran igualdad de oportunidades para formar parte del estudio, sin discriminación por razones de género, etnia, nivel socioeconómico u otras características.

Transparencia: Se estableció un proceso estructurado que guio la investigación a través de diferentes etapas, garantizando el acceso a la información relevante y la comprensión de cada

una de ellas. En el inicio hasta la divulgación de los resultados, se promovió una comunicación clara sobre los objetivos y procedimientos realizados.

Integridad: Se reconoció la importancia de actuar con responsabilidad investigativa durante todas las fases del proceso investigativo. Para ello, se realizaron acciones como la correcta referenciación del trabajo de otras personas, el rechazo al plagio y la presentación fiel de los resultados obtenidos. Asimismo, se asumió el compromiso de respetar la originalidad de las ideas y de sostener una actitud crítica y ética frente a la producción y análisis de la información

Divulgación: Se comprendió la importancia de compartir los resultados obtenidos como una parte esencial del proceso investigativo. Se asumió el compromiso de socializar los hallazgos con la comunidad universitaria y darle visibilidad mediante la inclusión del trabajo en el repositorio institucional. Estas acciones facilitarían el acceso a la información por parte de otros investigadores, profesores y estudiantes interesados.

4. ANALISIS Y RESULTADOS

El presente capítulo tuvo como propósito evidenciar cómo se desarrollan las subcompetencias que emergen de la relación triádica entre el estudiante, el fenómeno de la respiración y el modelo matemático. Para ello, se analizaron diferentes tipos de producciones realizadas por los estudiantes, entre las que se encuentran dibujos, expresiones escritas, modelo tabular y modelos gráficos, que se recolectaron a partir de la secuencia de actividades desarrolladas en la propuesta de intervención. La información corresponde a cuatro grupos de estudiantes denominados G1, G2, G3 y G4. Para obtener una base organizada de la información se empleó una matriz de análisis (Ver Anexo C) que permitió contrastar las producciones de los estudiantes y ubicar los momentos clave en que emergen las distintas subcompetencias. Los resultados se presentan siguiendo esta estructura, lo que facilita establecer relaciones claras con los objetivos de la investigación.

4.1 Reconocimiento de las subcompetencias a través de la relación triádica

La siguiente descripción corresponde a las actividades realizadas en la fase 2 “Fenómenos periódicos y cíclicos” (sección 2.3.2.2) y fase 4 (sección 2.3.2.4) de la propuesta de intervención (ver Anexo B). En estas fases, el fenómeno de interés fue la respiración y sus características de comportamiento. Los estudiantes debían responder a diferentes actividades orientadas a obtener un modelo matemático. A continuación, se presenta la descripción de las subcompetencias que emergieron con base en la relación triádica entre los estudiantes, el fenómeno de la respiración y el modelo matemático.

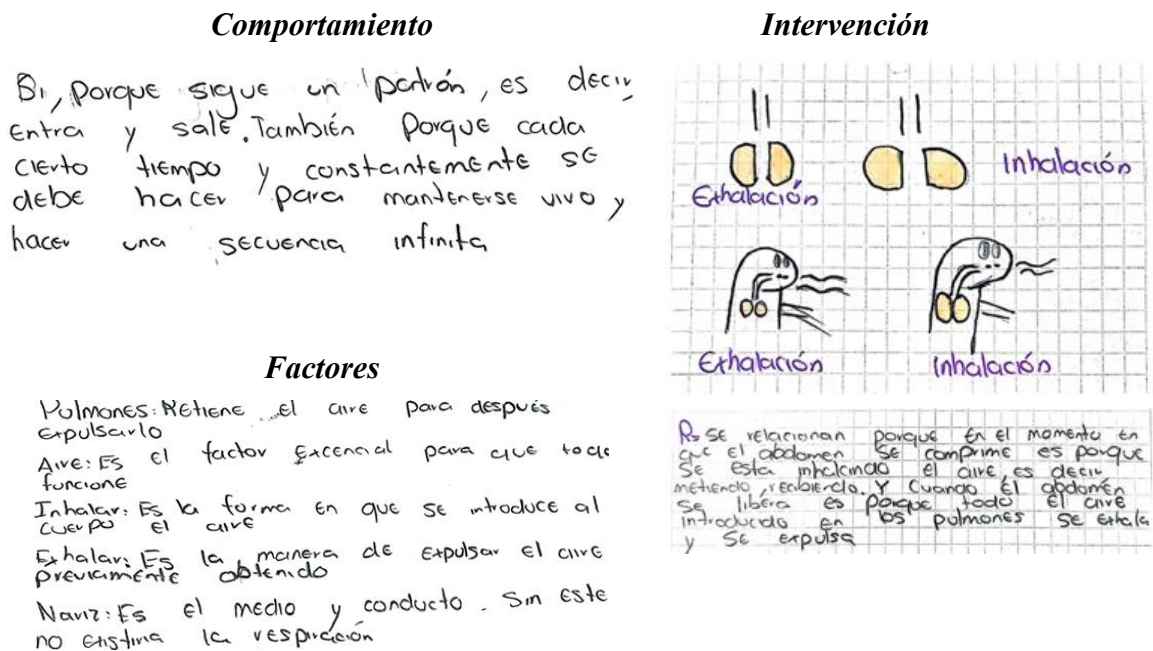
4.1.1 Subcompetencias: Comprender y Proponer

Durante el desarrollo de la fase 2 denominada “Fenómenos periódicos y cíclicos: el caso de la respiración”, en la que se logró despertar el interés de los estudiantes por el fenómeno de la respiración. Las evidencias correspondientes a las subcompetencias de Comprender y Proponer se organizaron a partir de una caracterización del fenómeno en tres elementos clave: el comportamiento, los factores involucrados y la intervención del estudiante. En esta fase, los estudiantes lograron reconocer si la respiración presentaba características propias de un fenómeno periódico y cíclico, identificar los factores que intervienen en el proceso y representarlo gráficamente mediante un dibujo.

En el caso del grupo G1 (Ver Figura 6), se evidenció que, en un primer momento, los estudiantes centraron su atención en el ingreso y salida del aire, lo que les permitió identificar un patrón repetitivo en el tiempo. A partir de esta observación, reconocieron que se trata de un fenómeno constante en la vida humana. Posteriormente, identificaron que los elementos que intervienen en el proceso son de carácter interno, es decir, propios del funcionamiento corporal. Finalmente, en la representación gráfica, lograron articular de manera coherente los tres elementos: el comportamiento cíclico del aire, los factores biológicos implicados y su forma de intervención, representando relaciones entre la entrada y salida del aire, los órganos involucrados y el tamaño relativo de los pulmones.

Figura 6

Evidencia caracterización del fenómeno por G1



En el caso del grupo G2 (Ver Figura 7), los estudiantes centraron su atención en aspectos más generales del fenómeno, sin enfocarse directamente en la descripción del comportamiento cíclico. En su lugar, orientaron su análisis hacia la identificación de factores que influyen en el proceso respiratorio, reconociendo que este puede ser controlado y que guarda relación con características del entorno y del propio fenómeno. De esta manera, identificaron elementos externos, como la atmósfera, y aspectos relacionados con la forma de respirar. En su representación, destacaron que algo ocurre en los pulmones, coincidiendo con G1 en que la entrada y salida del aire es una característica central del fenómeno. Sin embargo, a diferencia de

G1, no establecieron una relación explícita con el tamaño de los pulmones, sino que señalaron componentes específicos del proceso, como el ingreso de oxígeno (O_2) y la expulsión de dióxido de carbono (CO_2), haciendo referencia al intercambio gaseoso característico de la respiración.

Figura 7

Evidencia caracterización del fenómeno por G2

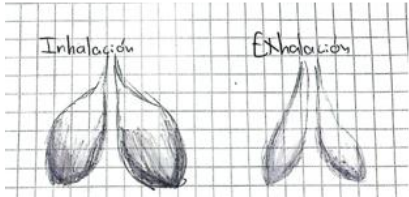
Comportamiento	Intervención
si, en el proceso de respiración el cuerpo sigue un tiempo determinado el cual se repite durante toda la vida del ser y en ocasiones específicas este puede ser controlado. Factores la temperatura, el nivel de oxígeno en la atmósfera, la altura a la que se respira, la capacidad pulmonar y la calidad del aire.	

En el caso del grupo G3 (Ver Figura 8), los estudiantes reconocieron desde el inicio el carácter periódico y cíclico del fenómeno, al señalar que la respiración está compuesta por dos momentos: la inhalación y la exhalación. Esta identificación les permitió comprender la naturaleza repetitiva del proceso y argumentar que se trata de un ciclo constante y regular. Al tratar los factores que intervienen en la respiración, hicieron una delimitación hacia lo externo, en sintonía con lo propuesto por el grupo G2, al mencionar elementos como la temperatura. En cuanto a la intervención, G3 estableció una relación entre el tamaño del pulmón y el movimiento del estómago; no obstante, es posible que aquí se haya presentado una confusión entre el

abdomen y el estómago. Aun así, los estudiantes destacaron que el proceso respiratorio implica un movimiento común que conecta distintas partes del cuerpo. Finalmente, en su representación gráfica, centraron su atención en el cambio de tamaño del pulmón durante el ciclo respiratorio, enfatizando así uno de los elementos clave del comportamiento del fenómeno

Figura 8

Evidencia caracterización del fenómeno por G3

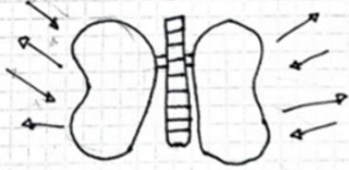
Comportamiento	Intervención
Puedes ser cíclico porque se repite la inhalación y exhalación y además es un ciclo que se repite cuando una persona esta viva. Puede ser periodico porque se hacen intervalos constantes y regulares. Factores Primero que todo interviene la tecnica que se use para respirar, tanto nasal y bucal, interviene de gal manera en la forma correcta o no de respirar, la altura (MSNM) interviene de manera que determina la cantidad de oxigeno que podemos inhalar y con que facilidad.	1 lo que logramos percibir es que en el momento en el que exhalamos se infla nuestro estomago y nuestro pecho se comprime y sucede lo contrario cuando inhalamos 2 se establece un movimiento ciclico ya que se repite constantemente un mismo movimiento donde se relaciona diferentes partes del cuerpo 

En el caso del grupo G4 (Ver Figura 9), los estudiantes reconocieron que la respiración es un fenómeno cíclico, asociado a la repetición de una misma acción, y periódico, en tanto se manifiesta con un ritmo constante. En cuanto a los factores que intervienen en el fenómeno, identificaron principalmente elementos externos relacionados con la manera en que respiramos. Señalaron, por ejemplo, que durante la actividad física la respiración se acelera, y que en caso de enfermedad puede perderse el control del ritmo respiratorio, lo cual genera una mayor demanda de oxígeno. Al igual que en los grupos G1 y G3 se evidenció una relación entre el movimiento del abdomen y el funcionamiento de los pulmones. En su representación gráfica, construyeron

una imagen de los pulmones acompañada de flechas que apuntan hacia adentro y hacia afuera, las cuales, según su explicación, representan la expansión durante la inhalación y la contracción durante la exhalación. Esta representación refleja un intento por mostrar el movimiento pulmonar en relación con el comportamiento observado en el fenómeno respiratorio

Figura 9

Evidencia caracterización del fenómeno por G4

Comportamiento	Intervención
la respiración si puede considerarse un movimiento periodico y ciclico, ya que: Periodico: ritmo ciclico: respiracion	① Con la mano que se encuentra en el pecho se puede llegar a sentir como los pulmones se expanden y a su vez sentimos como el abdomen se contrae ② Al inhalar se siente todo el aire entrando a los pulmones, por lo mismo se hace un espacio de vacío en el abdomen, y al exhalar se siente como este vacío vuelve a tomar su aire
Factores	 (las flechas significan que se expanden y se contraen, otra que cuando inhala se expanden y cuando exhala se contraen)

A partir de las acciones realizadas por los estudiantes y lo señalado anteriormente, se puede evidenciar que, según esta segunda fase de la propuesta de intervención, cada grupo logra establecer un modelo mental, que es propiamente lo que indica Greefrath et al. (2013) al referirse a la subcompetencia de Comprender. En dicho sentido los estudiantes intentan reconocer el fenómeno y realizar su representación. Puesto que se evidencian elementos que conocen sobre la respiración y les permite realizar inferencias y destacar cualidades del fenómeno, por lo que avanzaron en la construcción de la representación (Flores-Camacho et al., 2020). Esto demuestra

cómo, al enfrentarse a una nueva situación, los estudiantes recurrieron a sus observaciones, interacciones y conocimientos previos sobre el mundo para proponer una solución al problema (MEN, 1998a).

Adicionalmente, el conocimiento del fenómeno les permitió establecer un punto de partida para realizar una simplificación del fenómeno, lo cual se evidenció específicamente en su dibujo, derivado de la interacción de los estudiantes con el fenómeno a través de un ejercicio de respiración controlada. Por ejemplo: el grupo G1, entrada y salida de aire en relación con el tamaño de los pulmones; el grupo G2, entrada de oxígeno y salida de dióxido de carbono; el grupo G3, tamaño del pulmón y el grupo G4, movimiento del pulmón. Así, puntualizan relaciones en la construcción de la representación (Gómez, 2008).

4.1.2 Subcompetencias: Matematizar, Interpretar y Validar

A continuación, se describe los resultados obtenidos en la fase 4 denominada “Construcción de un modelo matemático” (sección 2.3.2.4) con el propósito de mostrar como los estudiantes intentan pasar del fenómeno a generar relaciones con las matemáticas, es decir evidenciar la aproximación a la construcción de un modelo matemático para la respiración. Es importante mencionar que se lograron establecer dos modelos: El primero fue un modelo tabular y el segundo, un modelo gráfico.

Inicialmente los estudiantes, a partir de dos variables: tiempo y volumen de aire, realizan su construcción. El propósito de esta actividad fue completar un modelo tabular para cada una de las dos fases del proceso de respiración, es decir Inhalación y exhalación. Es importante destacar que existen diferencias frente a la forma en la que se establecen las relaciones entre la

representación y el fenómeno por cada uno de los grupos, lo que indica que no existe una única forma en la que se configura el modelo (Chamizo, 2010; Justi, 2006).

Figura 10

Evidencia modelo tabular realizado por G1, G2, G3 y G4

Inhalación		Exhalación	
Tiempo(s)	Volumen de aire (ml)	Tiempo(s)	Volumen de aire (ml)
0	0	2	500
0,25	62,5	2,5	437,5
0,5	125	2,75	375
0,75	187,5	2,15	312,5
1	250	3	250
1,25	312,5	3,25	187,5
1,5	375	3,5	125
1,75	437,5	3,75	62,5
2	500	4	0

Los grupos G1, G2, G3 y G4 establecieron el modelo tabular. Sin embargo, esto no corresponde a una relación con el fenómeno, según Blomhøj (2008), para que un estudiante pueda relacionarse con un modelo matemático y reflexionar sobre él, primero debe reconocer la diferencia entre la situación real y su representación matemática, aunque ambas estén conectadas. De esa manera, más que solo construir el modelo con relaciones matemáticas, es clave que los estudiantes comprendan cómo dicho registro representa ciertos aspectos del fenómeno y en qué medida captura o deja fuera información relevante.

Con relación a lo anterior, las evidencias correspondientes a las subcompetencias Matematizar, Interpretar y Validar para este primer modelo matemático se organizaron a partir de dos elementos, a saber: los procedimientos y la caracterización. Los procedimientos hacen referencia a las acciones realizadas por los estudiantes para construir matemáticamente el modelo, tales como operaciones aritméticas o algebraicas, relaciones lineales y estimaciones, Por

su parte, la caracterización comprende las descripciones, explicaciones o justificaciones que los estudiantes ofrecieron sobre el fenómeno, el modelo y su relación.

En el caso del grupo G1 (Ver Figura 11), se encuentra una relación en los valores iniciales y, a partir de esta, se completa el modelo. En particular, en su procedimiento señalan: **“restamos porque el volumen de aire está disminuyendo”** y **“sumamos porque el volumen de aire está aumentando”**. Además, en la caracterización especifican que en la inhalación el tiempo y el volumen aumentan marcando una relación entre las dos variables.

Figura 11

Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G1

Procedimiento	Caracterización
Primero sacamos las mitades tanto del tiempo como del Volumen para establecer cual era el valor el cual se debía sumar hasta llegar a 2 segundos. $0,25 + 0,25 = 0,5 + 0,25 = 0,75$ $62,5 + 62,5 = 125 + 62,5 = 187,5$ El tiempo y el volumen del aire están aumentando Exhalación En el tiempo seguimos sumando los 0,25 segundos ya que estaba en aumento y para el Volumen restamos 62,5 porque el volumen está disminuyendo $2 + 0,25 + 0,25 + 0,25 + 0,25 = 3$ $500 - 62,5 = 437,5$	La inhalación: Su volumen va en aumento La exhalación: Su volumen va disminuyendo El tiempo va aumentando desde 0 segundos hasta 4 segundos El volumen va aumentando desde 0 ml hasta 500 ml

Por otra parte, el grupo G2 (Ver Figura 12), al responder sobre la evidencia de sus procedimientos, reconocieron que utilizaron multiplicaciones y divisiones, además que mencionaron el uso de una regla de tres, la cual establecen en función del valor máximo

alcanzado (500 ml). También en la caracterización identifican la relación entre las variables, expresando que **“entre mayor el tiempo de inhalación, más volumen de oxígeno hay en los pulmones”**. Para este grupo, existió una especificidad en relación con el aire en términos del oxígeno. Esto también se puede observar en la Figura 7.

Figura 12

Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G2

Procedimiento	Caracterización
Para la mayoría de procedimientos utilizamos divisiones y multiplicaciones, pero una gran parte también se hizo con algo de lógica como por ejemplo los tiempos (s), usando una regla básica de mitades a partir de nuestro tiempo máximo indicado. $500 \div 8 = 62.5$	Podemos darnos cuenta de la relación entre el tiempo y el volumen ya que entre mayor sea el tiempo de inhalación más volumen de oxígeno en los pulmones. La mayor diferencia que podemos notar es que el volumen y el tiempo inicial es el máximo de la anterior tabla y esta comienza a disminuir el volumen mientras aumenta el tiempo.

En el caso del grupo G3 (Ver Figura 13), el procedimiento se determinó a partir de la estructura establecida inicialmente, es decir, la construcción del modelo la realizan según los valores y espacios determinados. Además, se evidencia cómo en la caracterización logran relacionar las dos variables en términos de una razón que permite comprender la transformación del fenómeno durante su ejecución, específicamente mencionaron que **“en la inhalación, cada**

0,25 s obtenemos 62,5 ml de aire, y en la exhalación, cada 0,25 s soltamos 62,5 ml de aire”.

Con base en esta relación, aplican sumas o restas.

Figura 13

Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G3

Procedimiento	Caracterización
Para encontrar este resultado unimos tanto inhalación como exhalación en un ciclo en donde las dos tienen la misma duración y el mismo volumen pero en casos diferentes ya que la inhalación comienza de 0 y finaliza en 500 y luego con la exhalación funciona de forma contraria. El procedimiento llevado a cabo para llegar a esta solución fue hacer una división de 250 entre 4 y llenar los tres espacios restantes sumando el resultado así mismo. En la exhalación hicimos lo mismo pero restando	Una característica es que cada 0,25 sg obteníamos 62,5 ml de aire, así cuando logramos llegar a 2 sg tenemos 500 ml. En este caso iniciamos con 500 ml de aire en 2 sg e iniciamos el proceso de exhalación en la que cada 0,25 sg soltamos 62,5 ml de aire, así hasta llegar a 0 ml con 4 sg. Esto se considera un movimiento cíclico en el que en 4 sg se exhala e inhala, cada uno con 2 sg de duración y 62,5 sumando o restando cada 0,25 sg.

Teniendo en cuenta los análisis previos, se evidenció que los grupos G1, G2 y G3 establecieron relaciones proporcionales entre las variables tiempo y volumen, ya que reconocieron cómo una variable cambiaba en función de la otra, aspecto fundamental en la matematización (Parra-Bermúdez et al., 2013). Además, en sus afirmaciones muestran cómo establecen relaciones matemáticas, porque identifican lo que sucede en el fenómeno y lo asocian con relaciones matemáticas lo que concuerda con lo planteado por Rendon-Mesa et al. (2015) frente a como los estudiantes utilizan elementos conceptuales para acercarse a una forma de comprender la situación.

En particular, el grupo G3 logró especificar la razón matemática que representaba el cambio entre ambas variables. Según su modelo, **“cada 0,25 segundos se adquieren 62,5 mililitros de aire”** (Ver Figura 13-caracterización), por lo cual mostraron una mayor

coordinación entre los valores, lo que sugirió un razonamiento covariacional más avanzado en comparación con los grupos G1 y G2. Este tipo de razonamiento se constituyó en una herramienta clave para comprender y plantear conceptos esenciales en el desarrollo del pensamiento matemático (Bojórquez et al., 2021).

Finalmente, en el caso del grupo G4 (Ver Figura 14) se les preguntó por una característica del modelo tabular que correspondiera a la inhalación, respondieron en primer lugar que ***“la respiración varía dependiendo del tiempo dado, un ejemplo de ello puede ser cuando hacemos ejercicio; la respiración cada vez es más rápida y la inhalación y exhalación son más frecuentes”*** (Ver Figura 14-caracterización). De este modo, se evidenció una desconexión entre el modelo y el estudiante en relación con el fenómeno, ya que no destacaron una característica del modelo construido, sino que enunciaron una situación externa en la que el fenómeno cambia-

Luego, cuando se les preguntó por la diferencia entre el modelo establecido para la inhalación y el de la exhalación, caracterizaron su respuesta en términos de los valores obtenidos. De esa manera identificaron cómo los valores de la variable volumen cambiaban entre la inhalación y la exhalación, señalando en segundo lugar que ***“al inhalar tendríamos todo el aire (500 ml) y al exhalar los pulmones quedarían vacíos (0 ml)”***. Esta diferencia entre ambas respuestas marcó un punto clave en el establecimiento del modelo; por ello, fue en la segunda respuesta donde el grupo G4 logró relacionar la representación con el fenómeno, en términos de un valor específico. Campos y Araújo (2015) reconocen la relación de los estudiantes con el saber que se pone en juego en la actividad de modelar, y afirman que ellos desarrollan formas particulares de construir un modelo, las cuales tienen que ver con los conocimientos que poseen y las relaciones que establecen con el saber necesario para resolver el problema.

Figura 14

Evidencia procedimiento y caracterización del modelo tabular por G4

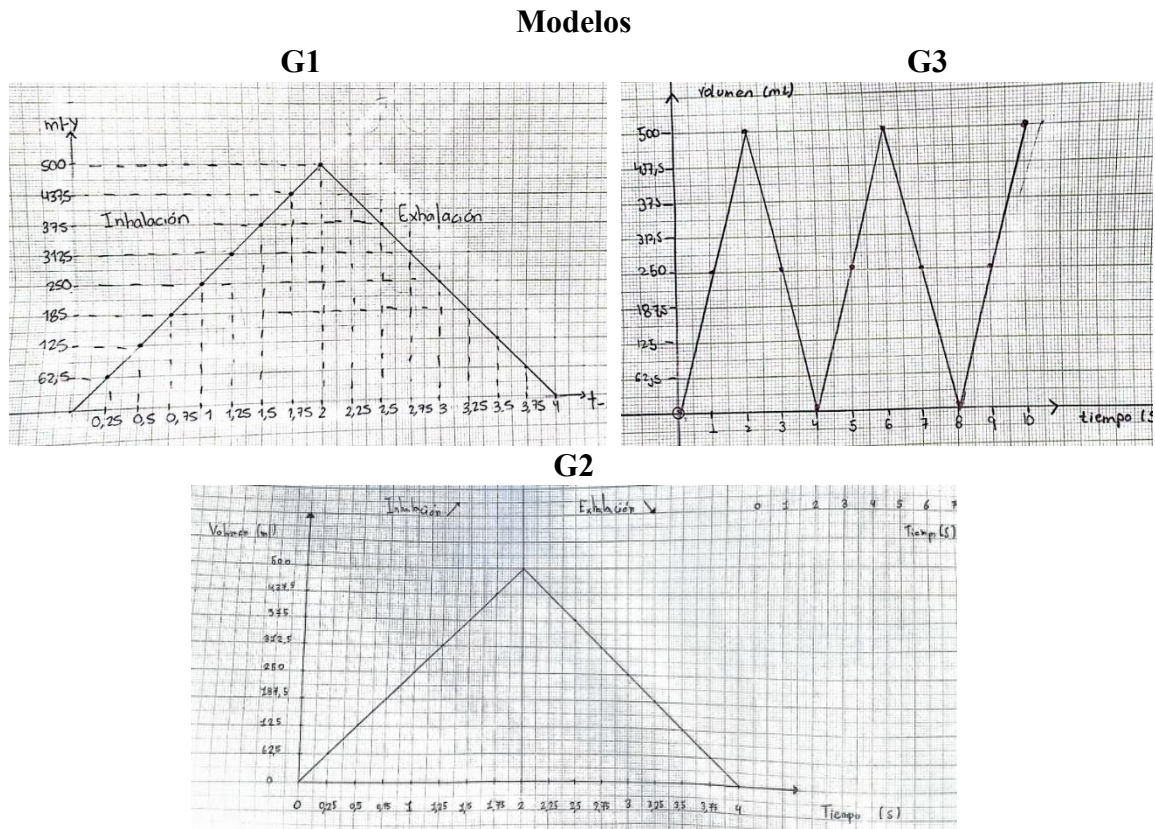
Procedimiento	Caracterización
ambos lados se realizaron sacando la mitad de los valores que ya teníamos definidos, y se sumó 62,5 varias veces para llegar al resultado final	que la inspiración vaya dependiendo del tiempo dando, un ejemplo de ello puede ser cuando hacemos ejercicio la inspiración cada vez es más rápida y la inhalación y exhalación es más fuerte cambian los valores y va de mayor a menor ya que al inhalar tendríamos todo el aire osea (500) al exhalar quedarían vacíos los pulmones osea (0)

A continuación, se presenta la construcción realizada por medio de una gráfica a partir del modelo tabular (Figura 10). Para este segundo modelo las subcompetencias Matematizar, Interpretar y Validar se presentan según el modelo y su caracterización.

Ahora bien, los grupos G1, G2 y G3 respondieron a las relaciones existentes entre el modelo y el fenómeno mediante el uso de herramientas como sistemas conceptuales y procedimientos (Lesh y Harel, 2003). Inicialmente (Ver Figura 15), desarrollaron adecuadamente la construcción del modelo, ya que, en primer lugar, establecieron la escala y asignaron etiquetas, elementos que correspondieron al proceso de matematización del problema. Posteriormente, identificaron patrones de variación entre las variables, reconocieron intervalos de aumento o disminución y establecieron relaciones funcionales que les permitieron dar significado a su modelo grafico (Bojórquez et al., 2021). De este modo, se evidenció que el modelo matemático construido logró representar el fenómeno de la respiración.

Figura 15

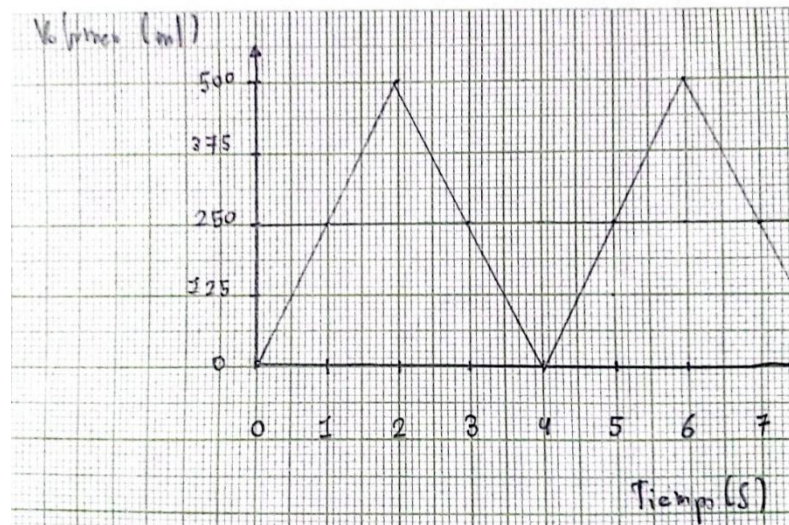
Evidencia modelos gráficos realizados por G1, G2 y G3



Adicionalmente, se observó que tanto el grupo G1 como el grupo G2 no solo lograron construir su modelo gráfico, sino que también determinaron qué parte de la gráfica correspondía a la inhalación y cuál a la exhalación. Por su parte, el grupo G3, en lugar de definir cada uno de los puntos para construir la gráfica, se centró en valores clave como el punto máximo y el punto medio. Este grupo reconoció una relación lineal y, a partir de ello, simplificó la construcción del modelo gráfico utilizando dichos puntos. Esta tendencia a la generalización también se evidenció en parte de la respuesta del grupo G2 (Ver Figura 16), quienes, además, incluyeron una línea que representaba el valor medio, es decir, 250 ml.

Figura 16

Evidencia generalización del modelo gráfico por G2



Por otra parte, cada grupo reconoció características del modelo (Ver Figura 17), en tanto identifican el punto máximo y el punto mínimo en términos de los valores numéricos, es decir, 500 ml y 0 ml, respectivamente. Además, relacionaron el fenómeno con esos puntos. Por ejemplo, para G1, *“los pulmones se expanden y se inflan”* y *“los pulmones se reprimen y sueltan el aire”*; para G2, *“están en su máxima capacidad”* y *“se contraen y comienzan a expulsar el oxígeno”*; y para G3, *“se llenan completamente de aire”* y *“expulsan la mayoría de aire”*. Adicionalmente los tres grupos, identifican que *“la gráfica obtenida se repite cada 4 segundos, lo que indica un ciclo de respiración”*.

Figura 17

Evidencia primera caracterización del modelo gráfico por G1, G2 y G3

Caracterización

G1

La variable independiente representada en el eje X es tiempo y la variable dependiente en el eje Y es Volumen.

Durante la inhalación, el volumen de aire aumenta desde 0 ml hasta 500 ml en 2 segundos.

La gráfica tiene un valor máximo de 500 ml, que ocurre durante la inhalación. En este momento los pulmones se expanden y se inflan.

La exhalación comienza en 2 segundos y termina en 4 segundos, el volumen de aire disminuye desde 500 ml hasta 0 ml.

La gráfica tiene un valor mínimo de 0 ml, que ocurre durante la exhalación. En este momento los pulmones se comprimen y sueltan el aire.

La gráfica tiene un valor medio de 250 ml, marcando un punto de equilibrio entre el proceso de inhalación y exhalación.

La grafica obtenida se repite cada 4 segundos, lo que indica un ciclo de respiración.

G3

La variable independiente representada en el eje X es tiempo y la variable dependiente en el eje Y es Volumen de aire.

Durante la inhalación, el volumen de aire aumenta desde 0 ml hasta 500 ml en 2 segundos.

La gráfica tiene un valor máximo de 500 ml, que ocurre durante la inhalación. En este momento los pulmones se llenan completamente de aire.

La exhalación comienza en 2 segundos y termina en 4 segundos, el volumen de aire disminuye desde 500 ml hasta 0 ml.

La gráfica tiene un valor mínimo de 0 ml, que ocurre durante la exhalación. En este momento los pulmones expulsan la mayoría de aire.

La gráfica tiene un valor medio de 250 ml, marcando un punto de equilibrio entre el proceso de inhalación y exhalación.

La grafica obtenida se repite cada 4 segundos, lo que indica un ciclo de respiración.

G2

La variable independiente representada en el eje X es tiempo y la variable dependiente en el eje Y es Volumen.

Durante la inhalación, el volumen de aire aumenta desde 0 ml hasta 500 ml en 2 segundos.

La gráfica tiene un valor máximo de 500 ml, que ocurre durante la inhalación. En este momento los pulmones se llenan hasta su máxima capacidad.

La exhalación comienza en 2 segundos y termina en 4 segundos, el volumen de aire disminuye desde 500 ml hasta 0 ml.

La gráfica tiene un valor mínimo de 0 ml, que ocurre durante la exhalación. En este momento los pulmones se contraen al expulsar el aire.

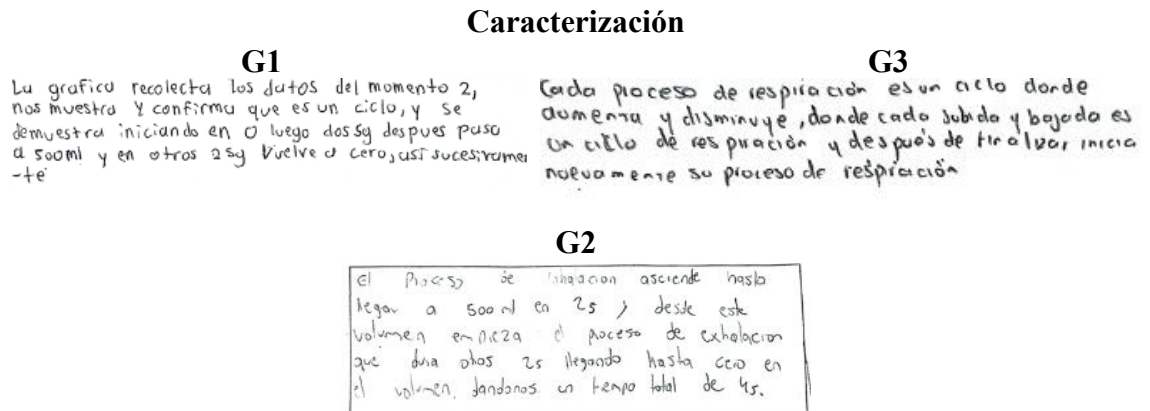
La gráfica tiene un valor medio de 250 ml, marcando un punto de equilibrio entre el proceso de inhalación y exhalación.

La grafica obtenida se repite cada 4 segundos, lo que indica un proceso cíclico de respiración.

En ese sentido, argumentan de la siguiente manera cómo el modelo representa el fenómeno (Ver Figura 18).

Figura 18

Evidencia segunda caracterización del modelo gráfico por G1, G2 y G3



Estas descripciones anteriores muestran que los estudiantes no solo lograron interpretar el comportamiento del volumen en función del tiempo, sino que también reconocieron el carácter cíclico y periódico de la respiración, expresado mediante la repetición del patrón gráfico cada cuatro segundos. Esto evidencia un avance en su comprensión sobre el comportamiento del fenómeno. De esa manera según Arrieta y Diaz (2015) es como se genera un dipolo modélico entre el modelo gráfico y la respiración, ya que permite que el estudiante modifique su comprensión y ajuste su interpretación a medida que interactúa con el modelo.

Finalmente, en el grupo G4 se evidenciaron dificultades en la construcción del modelo gráfico, por lo cual no logran responder a cuestiones matemáticas que refieren a los conocimientos matemáticos (Maaß, 2006). De esta manera, se observó que los estudiantes invirtieron los Ejes x e y al asignarles incorrectamente los valores que toman las variables. Además, se notó que las escalas de los ejes no eran equidistantes, lo que provocó errores en la ubicación de los puntos, finalmente el grupo indicó que la variable independiente en el Eje x es el volumen y la variable dependiente en y, el tiempo. Así pues, no lograron la caracterización del

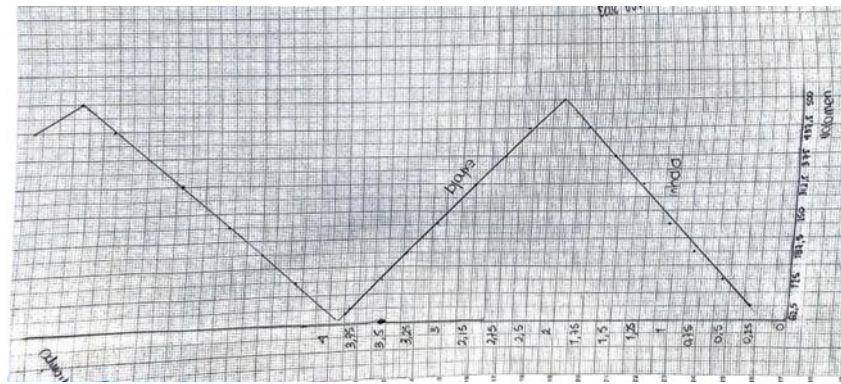
modelo ya que impidieron establecer una relación correcta con el fenómeno. Consecuentemente, el modelo se desarticuló al confundir la acción de los pulmones con la del cuerpo humano.

Debido a que se refieren a como los pulmones exhala e inhala, sin tener en cuenta que esta acción no es del pulmón si no del ser humano, para lo cual ellos se expanden o se comprimen.

Figura 19

Evidencia dificultades en el modelo gráfico realizado por G4

Modelo



Caracterización

La variable independiente representada en el eje X es volumen y la variable dependiente en el eje Y es tiempo.

Durante la inhalación, el volumen de aire aumenta desde 0 ml hasta 2 ml en 0,25 segundos.

La gráfica tiene un valor máximo de 1 ml, que ocurre durante la respiración. En este momento los pulmones exhala.

La exhalación comienza en 2 segundos y termina en 4 segundos, el volumen de aire disminuye desde 0 ml hasta 500 ml.

La gráfica tiene un valor mínimo de 0 ml, que ocurre durante la respiración. En este momento los pulmones inhala.

La gráfica tiene un valor medio de 2 ml, marcando un punto de equilibrio entre el proceso de inhala y exhalación.

La grafica obtenida se determina cada 0,25 segundos, lo que indica un proceso de respiración.

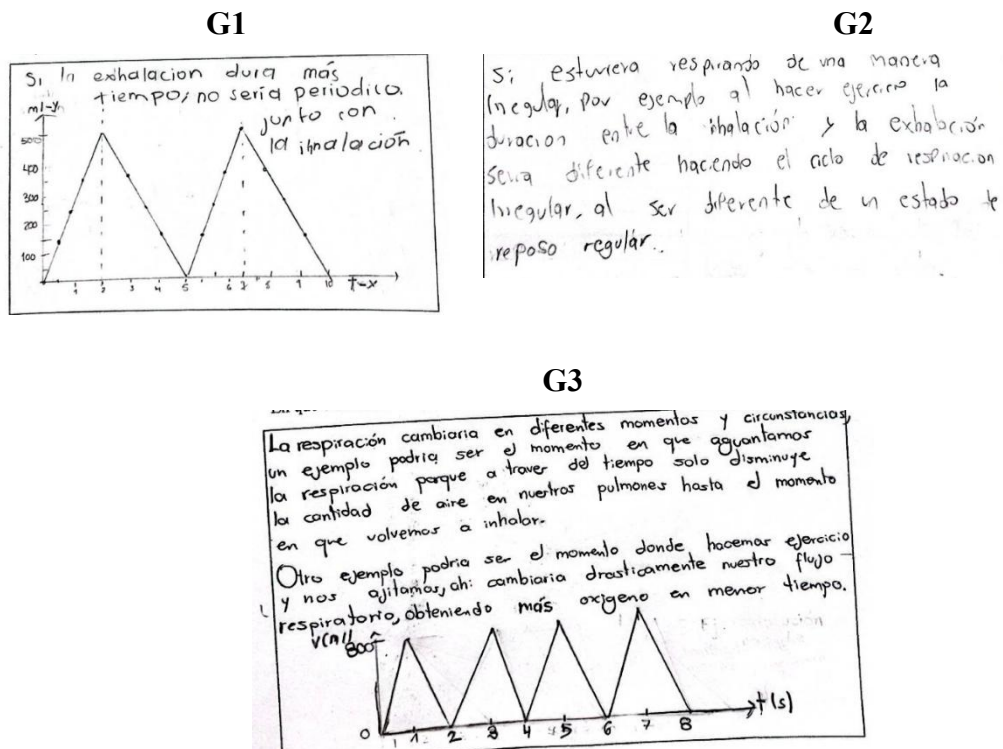
porque esto representa con una linea la inhalación y exhalación, la cual tiene forma de zig zag, cuando va hacia afuera es inhalación y hacia dentro es exhalación

4.1.3 Subcompetencias: Comunicar y Exponer

Como último momento de las fases 4 “Construcción de un modelo matemático” se le pregunto a los estudiantes en qué condiciones cambiaria el modelo realizado anteriormente. Se destacan las respuestas de los grupos G1, G2 y G3 debido al desarrollo de las subcompetencias anteriores. En primer lugar, los grupos G1 y G3 construyeron un modelo gráfico, en segundo lugar, el grupo G2 responde únicamente mediante una verbalización (ver Figura 20). Cada una de estas formas representó una manera de establecer nuevas relaciones con el fenómeno que se estudia, en este caso, la respiración (Acevedo-Díaz et al., 2017).

Figura 20

Evidencia nuevas relaciones realizadas por G1, G2 y G3



Ahora bien, el grupo G1 estableció un modelo gráfico, en el que indicaron que ***"Si la exhalación dura más tiempo, no sería periódico, junto con la inhalación"***, lo cual evidencian como reconocieron que la periodicidad se ve afectada cuando las fases del ciclo respiratorio tienen duraciones diferentes. Específicamente en su modelo se presenta que inhalación ocurre de 0 a 2 segundos, seguida de una exhalación más prolongada, de 2 a 5 segundos, lo cual rompe la simetría del ciclo. Así mismo, el grupo G2 señala como si la inhalación y la exhalación tuviera duración diferente el ciclo sería irregular comparado con uno de reposo, por lo cual sitúan la actividad de hacer ejercicio, sin embargo, no lograron establecer esta expresión a partir de la construcción de un modelo.

Por su parte, el grupo G3 reconoció dos condiciones distintas: al aguantar la respiración, identificaron que lo que cambia es la cantidad de aire y no el tiempo. Además, indicaron que ***"si se está haciendo deporte la respiración se agitaría"***, lo que implicaría una mayor captación de oxígeno en menos tiempo. A partir de ello, construyeron una representación de la respiración rápida, en la que implícitamente reconocieron un aumento en la frecuencia respiratoria con un modelo gráfico en el que se reconoció un ciclo de dos segundos y un volumen de aire de 800 ml.

Finalmente, se comprende que el grupo G1 y el grupo G2 identificaron que, si varía la duración de las fases respiratorias, cambia la periodicidad del fenómeno. El grupo G3, en cambio, menciona que en el caso de aguantar la respiración, la cantidad de aire cambia durante ese instante pero no el tiempo; mientras que durante el ejercicio se incrementa tanto la frecuencia como el volumen. Esto demuestra que los estudiantes lograron construir argumentos basados en el modelo situacional y aplicarlos a otras condiciones o contextos (Greefrath et al., 2013; Villa-Ochoa et al., 2014).

5. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Este Capítulo expone las conclusiones que dan respuesta a la pregunta de investigación y que permitieron alcanzar el objetivo general, a partir de los hallazgos presentados en el capítulo anterior. Para ello, se retoman los principales elementos analizados: la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo, el papel de las subcompetencias de modelación, algunas proyecciones pedagógicas e investigativas derivadas del estudio y una reflexión sobre el proceso investigativo.

5.1 La relación triádica como eje estructurante del proceso de modelación

Se evidencio cómo la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo se configura a partir de la vinculación del estudiante con el problema. Una vez los estudiantes reconocieron el fenómeno por modelar, la respiración como proceso periódico y cíclico, comenzaron a establecer relaciones, inferencias y a movilizar saberes previos. Este proceso permitió transitar desde la observación inicial del fenómeno hasta su representación matemática, evidenciando cómo los tres componentes de la triada interactúan en cada una de las fases del trabajo en el aula.

Las acciones realizadas por los estudiantes muestran que la relación triádica no es un marco meramente conceptual, sino una **estructura funcional** que permite describir con precisión cómo se da la construcción progresiva del modelo. Así, este estudio confirma que dicha relación es una herramienta útil tanto para el análisis de la modelación como para el diseño didáctico orientado al aprendizaje de fenómenos reales.

5.2 las subcompetencias como herramienta de análisis para el proceso de modelación

El análisis permitió identificar el desarrollo diferenciado de las **subcompetencias de modelación**: Comprender, Proponer, Matematizar, Interpretar, Validar, Comunicar y Exponer

(Maaß, 2006; Greefrath et al., 2013). Estas subcompetencias operaron como ejes que guiaron la observación del proceso de los estudiantes y permitieron evaluar sus avances.

Por ejemplo, en el caso de la subcompetencias, Matematizar, Interpretar y Validar se observó como el grupo G1, G2 Y G3 para el modelo grafico establecieron etiquetas, relaciones funcionales entre variables y su caracterización de modo que se logró reconocer una construcción de significado frente a la relación triádica estudiante-fenómeno-modelo. En contraparte, el grupo G4 presento mayores dificultades especialmente en el uso de herramientas matemáticas que permitieran construir un modelo coherente, lo cual sugiere la necesidad de reforzar progresivamente las subcompetencias mediante tareas diseñadas con ese propósito.

Así, se concluye que las subcompetencias no solo son categorías útiles para el análisis, sino también orientaciones didácticas para el diseño de actividades que favorezcan el desarrollo de la competencia de modelación en niveles escolares.

5.3 Proyecciones pedagógicas e interdisciplinarias

Se reconoce que el fenómeno de la respiración permite un abordaje interdisciplinar, integrando conocimientos de áreas como la biología, la física, la química o la educación física. Esta transversalidad representa una oportunidad para el diseño de situaciones didácticas más complejas, que permitan a los estudiantes comprender la interrelación entre variables y construir modelos más robustos, por ejemplo, incorporando nociones de presión, velocidad o frecuencia respiratoria.

Estas actividades pueden vincularse con la elaboración de otros tipos de modelos físicos o simulaciones computacionales, así como el reconocimiento de variables como la presión. De esta manera, la propuesta se convertiría en una oportunidad para que los estudiantes articulen saberes,

reconozcan la complejidad del mundo natural y fortalezcan su capacidad para interpretar y explicar diferentes fenómenos. Además, se abre la posibilidad de utilizar diferentes tipos de modelos (gráficos, físicos, computacionales), lo cual contribuiría a fortalecer la capacidad de los estudiantes para interpretar e intervenir en su vida cotidiana.

5.4 Líneas para futuras investigaciones

Queda abierta la posibilidad de seguir profundizando en la relación triádica como estructura central para el estudio de la modelación en Educación Matemática. Sería valioso explorar cómo esta relación se manifiesta en otros fenómenos, en otros niveles educativos o desde otros enfoques disciplinares. Igualmente, se propone investigar nuevas subcompetencias o dimensiones que podrían incorporarse para enriquecer el análisis, así como desarrollar instrumentos más precisos para evaluar el avance en cada una de ellas.

5.5 Reflexión sobre el proceso investigativo como profesor en formación

La investigación fue, ante todo, una travesía. Desde el inicio supuso enfrentarme a situaciones nuevas, tomar decisiones y sostener una actitud constante de escucha y reflexión. No fue un camino lineal ni exento de incertidumbres; por el contrario, me exigió estar siempre dispuesto al cambio y a enfrentar la frustración. Esta experiencia me permitió reconocer que el profesor puede estar de otras formas en el aula, más allá de desarrollar acciones para la enseñanza y el aprendizaje. Es decir, que también puede estar en clave de investigación, cuestionando su práctica, generando conocimiento y transformando su rol.

Estar en el aula con un enfoque investigativo me implicó adoptar una mirada distinta sobre lo que ocurre en las interacciones con los estudiantes y en el mismo proceso de enseñanza. Inicialmente, me llevó a observar y a estar atento a todas las situaciones que pudieran surgir, más

aún, me exigió reflexionar sobre ellas y formular un problema a partir de lo que allí se podía encontrar, que me llevo a reconocer lo importante que puede ser el diario pedagógico. También destaco lo satisfactorio que fue lograr desarrollar un abordaje conceptual y metodológico de la problemática, así como el esfuerzo puesto con el diseño de la propuesta de intervención, tanto para cumplir con lo investigativo como con lo didáctico y finalmente poder realizar los resultados y conclusiones me hicieron comprender que lo importante del camino es proponer y reconocer los aprendizajes de cada experiencia para poder seguir construyendo.

En relación con la doble titulación con la licenciatura en física, aún sigo en el camino de comprender la física desde su propia naturaleza, lo cual implica mi manera de entender el mundo. Tener la posibilidad de formarme en Matemáticas y Física al mismo tiempo me permitió fortalecer cada una de estas disciplinas en relación con la otra. Además, destaco que enseñar y aprender Física implica múltiples desafíos, comprender y reconocer los fenómenos, desarrollar experimentos, interpretar y relacionar los conceptos. Lo cual se traduce en la forma en la que puedo transformar y realizar mis acciones como futuro profesor (aplica también para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas).

Para terminar, reconozco que toda esta experiencia me aporta tanto académica como personalmente y me permite proyectarme hacia nuevos desafíos y abrirme a nuevas posibilidades en torno a mi propia mi forma de ser maestro.

REFERENCIAS

- Acebo-Gutiérrez, C., y Rodríguez-Gallegos, R. (2021). Diseño y validación de rúbrica para la evaluación de modelación matemática en alumnos de secundaria. *Revista Científica*, 40(1), 13-29. <https://doi.org/10.14483/23448350.16068>
- Acevedo, L., Casamajor, A., y Espinoza, A. (2021) La elaboración de representaciones modélicas para aprender ciencias naturales. *Revista del IIICE*, 1(50), 187-208. <https://doi.org/10.34096/iice.n50.11274>
- Acevedo-Díaz, J.A, García-Carmona, A., Aragón-Méndez, M, M., y Oliva-Martínez, J.M. (2017). Modelos científicos: significado y papel en la práctica científica. *Revista Científica*, 30 (3), 155-166. <https://doi.org/10.14483/23448350.12288>
- Adúriz-Bravo, A., & Izquierdo-Aymerich, M. (2009). Un modelo de modelo científico para la enseñanza de las ciencias naturales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 4(1), 40-49. https://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1850-66662009000100004&lng=es&tlng=es.
- Ainsworth, S., Prain, V. y Tytler, R. (2011). Drawing to learn science. *Science*, 333, 1096-1097. https://www.researchgate.net/publication/262039333_Drawing_to_Learn_in_Science
- Alves-Mazzotti, A., y Gewandsznajder, F. (2000). O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa. *In O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa*, (2)1, 1-203.

- Aragón, L., Jiménez-Tenorio, N., Oliva-Martínez, J. M., y Aragón-Méndez, M. M. (2018). La modelización en la enseñanza de las ciencias: criterios de demarcación y estudio de caso. *Revista Científica*, 32(2), 193-206. <https://doi.org/10.14483/23448350.12972>
- Arrieta Vera, J., y Díaz Moreno, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(1), 19-48. <https://doi.org/10.12802/relime.13.1811>
- Asociación Británica de Investigación Educativa [BERA], (2019) Guía Ética para la Investigación Educativa (4.a ed.) (L. Rivera Otero and R. Casado-Muñoz, Trads.), Londres. <https://www.bera.ac.uk/publication/guia-etica-para-la-investigacion-educativa>.
- Bautista, N. P. (2011). Proceso de la Investigación Cualitativa: epistemología, metodología y aplicaciones. *Colombia: Editorial Manual Moderno*.
- Blomhøj, M. (2008). *Modelización matemática: Una teoría para la práctica* (M. Mina, Trad.). *Revista de Educación Matemática*, 23(2), 20–35. <https://doi.org/10.33044/revem.10419>
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study* (pp. 45–56). Springer.
- Bojórquez Gutiérrez, K., González-Quñones, F., y Tarango, J. (2021). Tipificación de patrones en razonamiento covariacional en estudiantes de nuevo ingreso en la carrera

- de ingeniería. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, 12 (1173),1-21.
https://doi.org/10.33010/ie_rie_rediech.v12i0.1173
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modelling behaviour. *Journal für Mathematik didaktik*, 31 (1). 99-118.
<https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>.
- Campos, I. D. S., & Araújo, J. D. L. (2015). Envolvimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática: relação com o saber e possibilidades de ação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 167-18. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a09>
- Carvajal, A. (2002). Teorías y modelos: formas de representación de la realidad. *Comunicación*, 12(1), 1-14. <https://www.redalyc.org/pdf/166/16612103.pdf>
- Cassini, A. (2016). Modelos científicos. En C. E. Vanney, I. Silva & J. F. Franck (Eds.), *Diccionario Interdisciplinar Austral*. Universidad Austral.
https://dia.austral.edu.ar/index.php?action=mpdf&title=Modelos_cient%C3%ADficos
- Castrillón-Yepes, A., González-Grisales, A. C., Arango, S. M., Rendón-Mesa, P. A., & Villa-Ochoa, J. A. (2024). Interdisciplinary Relationships Between Mathematics and Physics Through Experimentation and Mathematical Modelling. In *Researching Mathematical Modelling Education in Disruptive Times* (pp. 537-547). Cham: Springer Nature Switzerland.
- Chamizo, J. A. C. (2010). Una tipología de los modelos para la enseñanza de las ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 7(1), 26–41.
<https://revistas.uca.es/index.php/eureka/article/view/2626>

- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M., y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los Modelos Matemáticos Producidos durante la Resolución de Problemas de Fermi. *Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 220-242.
<https://www.redalyc.org/pdf/2912/291250692011.pdf>
- Figueiredo, A. O., & Peticarrari, A. (2022). El aprendizaje basado en modelos mantiene a los alumnos activos y con atención sostenida. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 19(3), 310201-310219.
https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2022.v19.i3.3102
- Flores-Camacho, F., Gallegos-Cázares, L., y Gonzáles, C. (2020) Representaciones en física: construcción y validación de un cuestionario para la enseñanza media superior. *Revista electrónica de investigación educativa*, 22(4), 1-17.
<https://doi.org/10.24320/redie.2020.22.e14.1728>
- Galeano, E. (2018). Estrategias de investigación social cualitativa. El giro en la mirada. *Editorial Universidad de Antioquia*, 2(1), 1-280. <https://doi.org/10.2307/j.ctvdf06h7>
- García, J., y Castro, P. (2017). La investigación en educación. *Notas teórico-metodológicas de pesquisas em educação: concepções e trajetórias*, 1, 13-40.
<https://doi.org/10.7476/9788574554938.001>
- Giere, R. N. (1999). Using models to represent reality. In L. Magnani, N. J. Nersessian, & P. Thagard (Eds.), *Model-based reasoning in scientific discovery* (pp. 41–57). Springer.
https://doi.org/10.1007/978-1-4615-4813-3_3
- Giere, R. N. (2004). How models are used to represent reality. *Philosophy of Science*, 71(5), 742–752. <https://doi.org/10.1086/425063>

Gilbert, J. K. (2004). Models and modelling: Routes to more authentic science education.

International Journal of Science and Mathematics Education, 2, 115–130.

<https://doi.org/10.1007/s10763-004-3186-4>

Gómez, A. (2008). Construcción de explicaciones multimodales: ¿Qué aportan los diversos registros semióticos? *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*,

4(2), 83–99. <https://www.redalyc.org/pdf/1341/134112597006.pdf>

González-Díaz, R., Acevedo-Duque, Á., Guanilo-Gómez, S., y Cruz-Ayala, K. (2021). Ruta de Investigación Cualitativa – Naturalista: Una alternativa para estudios gerenciales.

Revista de ciencias sociales, 27(4), 334-350.

Greefrath, G., Kaiser, G., Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2013). Mathematisches

Modellieren—eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe.

Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule: Theoretische und didaktische Hintergründe, 11-37.

Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). Metodología de la investigación. Quinta edición. México: McGraw-Hill.

Institución Educativa Pedro Luis Álvarez Correa [IEPLAC]. (2019). Plan de área: Ciencias Naturales. Caldas-Antioquia.

Justi, R. (2006). La enseñanza de ciencias basada en la elaboración de modelos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(2), 173-184.

<https://ensciencias.uab.cat/article/view/v24-n2-justi/1705>

Lesh, R., & Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development.

Mathematical Thinking and Learning, 5(2), 157-189.

- Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142. <https://doi.org/10.1007/BF02655885>
- Márquez, C. (2002). Dibujar en las clases de ciencias. *Aula de innovación educativa*, (117), 54-57.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998a). Lineamientos curriculares en Ciencias Naturales y Educación Ambiental. Bogotá, D.C., Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (1998b). Lineamientos curriculares en Matemáticas. Bogotá, D.C., Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006a). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá, D.C., Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional [MEN]. (2006b). Estándares Básicos de Competencias en ciencias naturales. Bogotá, D.C., Colombia.
- Miranda, S., y Ortiz, J. (2021). Los paradigmas de la investigación: un acercamiento teórico para reflexionar desde el campo de la investigación educativa. *Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo [RIDE]*, 11(21), 1-18. <https://doi.org/10.23913/ride.v11i21.717>
- Molina-Toro, J. F., Villa-Ochoa, J. A., & Suárez Téllez, L. (2018). La modelación en el aula como un ambiente de experimentación-con-graficación-y-tecnología. Un estudio con funciones trigonométricas. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 11(1), 87-115. <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/506/427>

- Monsalve, A. y Pérez, E. (2012). El diario pedagógico como herramienta para la investigación. *Itinerario educativo*, 26(60), 117-128.
- Moreno, J. R. (2013). Diseño, aplicación y evaluación de una propuesta didáctica para trabajar la enseñanza de los circuitos eléctricos en tercer ciclo de Educación Primaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 31(2), 275-284. <https://doi.org/10.5565/rev/ec/v31n2.812>
- Moreno-Arcuri, G., y López-Mota, Á. D. (2013). Construcción de modelos en clase acerca del fenómeno de la fermentación, con alumnos de educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (Colombia)*, 9(1), 53-78.
- Muñoz-Campos, V., Franco-Mariscal, A. J., & Blanco López, Á. (2018). Modelos mentales de estudiantes de educación secundaria sobre la transformación de la leche en yogur. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 15 (2), 1-20.
- Muñoz-Mesa, L. M., Londoño, S. M., Jaramillo C. M. y Villa-Ochoa, J. A. (2014). Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 42, 48-67.
- Parra-Bermúdez, F. J., Ávila-Godoy, R. J., & Ávila-Godoy, J. (2013). El significado del objeto matemático proporcionalidad. Su origen y desarrollo. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26(26), 1241-1249.
- Pérez, D. (2007). El diario del profesor: herramienta de investigación y transformación de la práctica docente. *Revista colombiana de rehabilitación*, 6(1), 111-115.
- Perrenet, J., & Zwaneveld, B. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(6), 3-21.

- Rendón-Mesa, P., Esteban, P., & Villa-Ochoa, J. A. (2015). La Modelación Matemática y su función articuladora entre saberes en la formación de un ingeniero. *En Memorias de la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. México.
- Umpiérrez-Oroño, S., Píriz-Giménez, N., Olivero, M. J., Cabrera-Borges, C., & Donato, N. (2023). Competencias científicas y modelización: estudio de un caso en la formación de docentes. *Ciência & Educação (Bauru)*, 29, e23046.
- Universidad de Antioquia [UdeA]. (s.f.). Ética en la investigación UdeA.
<https://www.udea.edu.co/wps/portal/udea/web/inicio/investigacion/etica-en-la-investigacion-udea>
- Universidad de Antioquia [UdeA]. (2012). *Reglamento de prácticas académicas facultad de educación*. Medellín-Antioquia.
- Villa-Ochoa, J. A., Castrillón-Yepes, A., y Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, XVIII (36), 219-251.
- Villa Ochoa, J. A., Sánchez Cardona, J., & Parra Zapata, M. M. (2022). Modelación matemática en la perspectiva de la educación matemática. En A. Molina-González, J. C. Martínez-Romero, & L. I. Rodríguez-Morales (Eds.), *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos (Vol. 2)*. Fondo Editorial Universidad del Valle.

ANEXOS

Anexo A: Formato Diario Pedagógico

Enlace: [Diario Pedagogico](#)

Diario pedagógico	
Nombre: Maestro Cooperador:	Fecha: Grupo:
Practicas escolares	
Trabajo propuesto (Cooperador-Practicante)	
Desarrollo de las sesiones	
Interdisciplinariedad/Modelación	
Aspectos relevantes	
lo pensado	
Reflexiones	
Retos	
Lo que no esta en este diario	

Anexo B: Propuesta de Intervención

Sesión 1

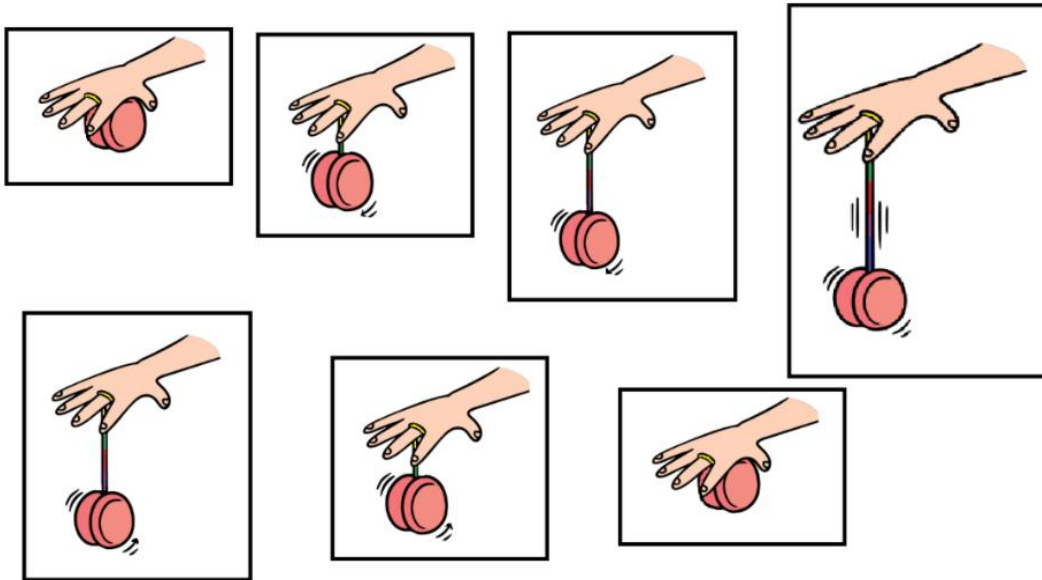
Fase 1: “Patrones de movimiento”

Nombres _____

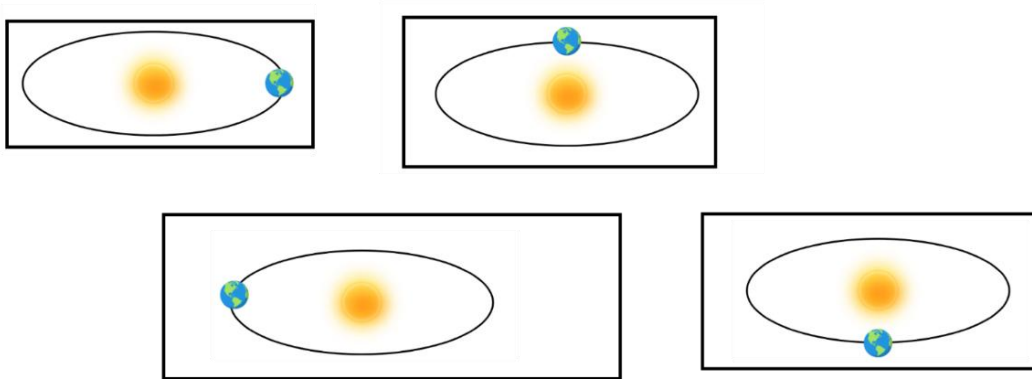
Momento 1.

1. Construyan las secuencias de las imágenes de movimiento. Se les entregara una hoja de papel Bong para pegar las imágenes, Deberán subir su resultado al siguiente padlet.

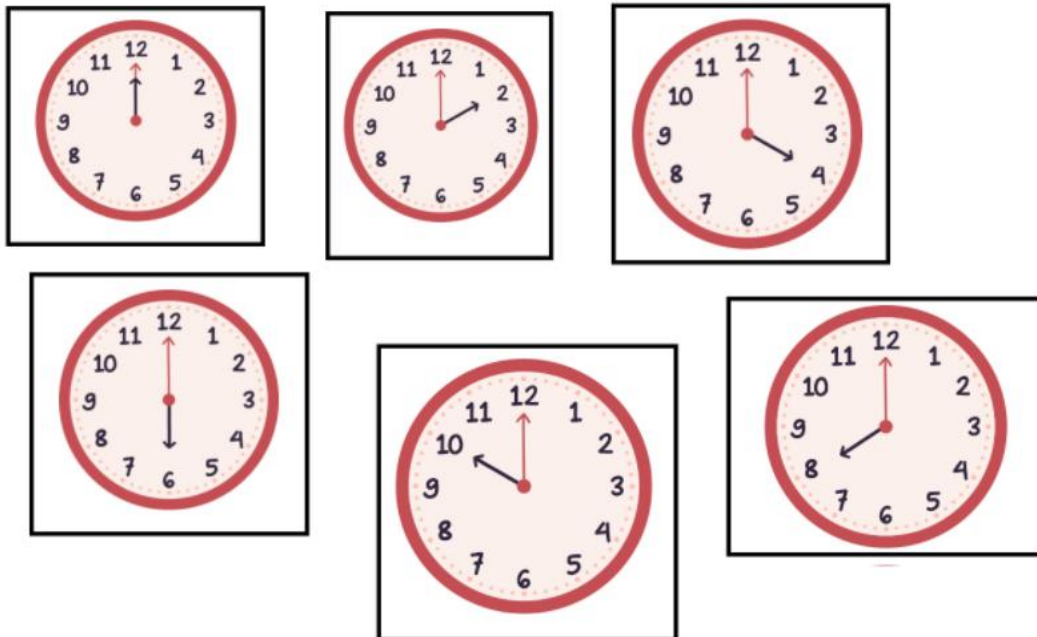
Secuencia de yoyo



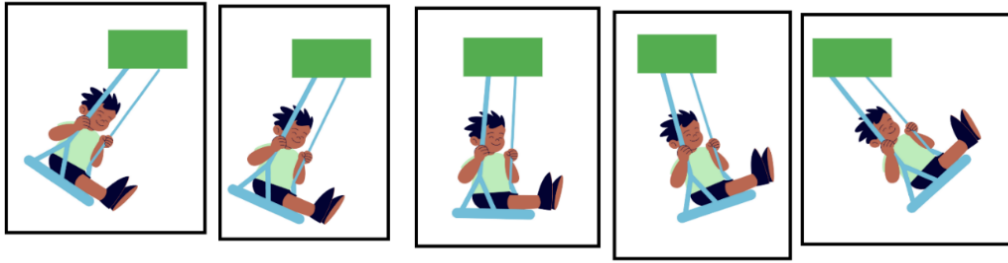
Secuencia Tierra-Sol



Secuencia Reloj



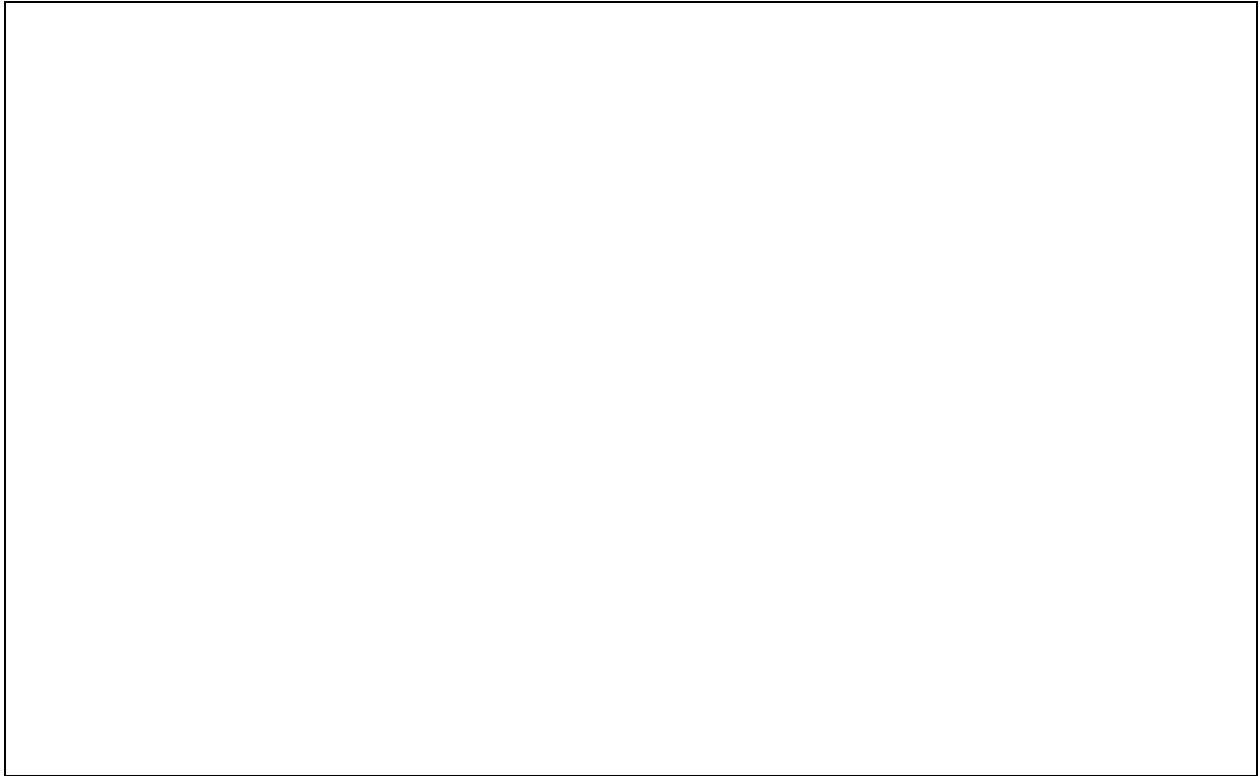
Secuencia Niño-Columpio



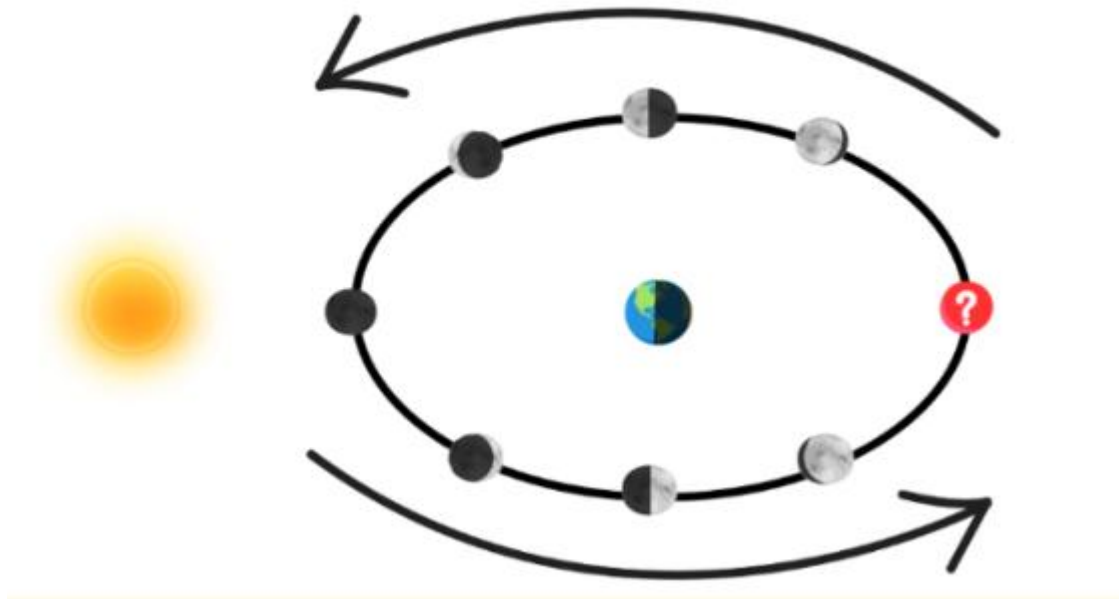
2. Analicen la secuencia de imágenes y completen la siguiente tabla

Secuencia	¿Cómo describirán el movimiento de las imágenes?

3. Escriban las diferencias y similitudes de los movimientos entre cada secuencia.

A large empty rectangular box with a thin black border, intended for the student to write their answers to the question above.

Momento 2. A continuación se presenta una imagen que representa un fenómeno presente en la vida diaria, respondan las siguientes preguntas.



1. ¿Qué notarían si observaran la luna durante 30 días?

--

2. Completen la fase faltante y describan como es el comportamiento del fenómeno

--

Momento 3. Socialización. Conversación sobre el momento 1 y 2.

Momento 4. Identifiquen si la secuencia cumple con ser un movimiento periódico, cíclico o ambos, luego completen la siguiente tabla.

Secuencia	Descripción de por qué es un movimiento periódico	Descripción de por qué es un movimiento cíclico	Descripción de por qué es un movimiento periódico y cíclico

Sesión 2

Fase 2: “Fenómenos periódicos y cíclicos”

Nombres _____

Momento 1. Ingresen a los siguientes tres videos, analícenlos y después registren sus observaciones en tabla.

Video	Observaciones

Momento 2. Respondan las siguientes preguntas

1. ¿La respiración puede considerarse un movimiento periódico y cíclico? ¿Por qué?

2. ¿Qué factores creen que intervengan en el proceso de respiración? ¿cómo lo hacen?

Momento 3

Coloca una mano suavemente sobre tu abdomen y la otra sobre tu pecho. respira profundamente por la nariz, luego exhala lentamente por la boca. Concéntrate en que le pasa a tu cuerpo en cada respiración durante unos minutos. Luego respondan.

1. ¿Que pueden percibir con su mano?

2. ¿Qué relación se puede establecer entre lo sucedidos y el proceso de la respiración (inhalación y la exhalación)?

3. Construyan una representación sobre el proceso de respiración.

Sesión 3

Fase 3: “El proceso de la respiración”

Momento 1: Discute la necesidad de conocer más sobre el fenómeno de la respiración.

Momento 2: Observa los videos que se presentaran continuación y registra lo más importante.

Momento 3: En el grupo anteriormente conformado construyan un mapa de ideas, un ideograma o un mapa conceptual sobre el fenómeno de la respiración.

Momento 4: Una persona del grupo socializara el trabajo realizado.

Sesión 4

Fase 4: “Modelo matemático”

Nombres _____

Momento 1. Respondan las siguientes preguntas de acuerdo con la información presentada.

La frecuencia se puede determinar a partir de fijar un intervalo de tiempo y se cuenta el número de veces que ocurre dicho fenómeno en ese intervalo.

1. Para uno de tus compañeros ¿Cuál sería la frecuencia de la respiración en un minuto?

2. Expliquen ¿Cuánto duraría un ciclo? ¿Cuánto dura la inhalación y la exhalación?

Registra tus procedimientos.

Momento 2. Completa la siguiente tabla.

El volumen de aire corriente es la cantidad de aire que ingresa y sale durante el proceso de respiración, aproximadamente tiene un valor de 500 ml.

***Nota:** Escriban los procedimientos y razonamientos que utilizaron para completar la tabla.*

Inhalación	
Tiempo(s)	Volumen de aire (ml)

Exhalación	
Tiempo(s)	Volumen de aire (ml)

Responde

1. ¿Cuáles características pueden identificar de la primera tabla (Inhalación)?

--

2. ¿En qué se diferencia la primera tabla (inhalación) con la segunda tabla (exhalación)?

--

Momento 3. Conforme a la información anterior, construyan una gráfica que represente ciclo el ciclo de la respiración (Inhalación y exhalación) mediante la relación volumen de aire vs tiempo.

Momento 4.

1. Según la gráfica construida complete la siguiente información

La variable independiente representada en el eje X es _____ y la variable dependiente en el eje Y es _____

Durante la inhalación, el volumen de aire _____ desde _____ ml hasta _____ ml en _____ segundos.

La gráfica tiene un **valor máximo** de _____ ml, que ocurre durante la _____. En este momento los pulmones _____

La exhalación comienza en _____ segundos y termina en _____ segundos, el volumen de aire _____ desde _____ ml hasta _____ ml.

La gráfica tiene un **valor mínimo** de _____ ml, que ocurre durante la _____. En este momento los pulmones _____

La gráfica tiene un **valor medio** de _____ ml, marcando un punto de equilibrio entre el proceso de _____ y _____

La grafica obtenida se _____ cada _____ segundos, lo que indica un _____ de respiración.

2. ¿Cómo justificarían que la gráfica representa el proceso de respiración?

3. En qué condiciones la gráfica sería diferente. Presenten un ejemplo.

Anexo C. Matriz análisis

Enlace: [ATDG.xlsx](#)

	Sesion 1		
COM	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
	Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3

Anexo D: Consentimiento Informado



Invitación

Estimado/a estudiante

Amablemente se le invita a participar en la investigación realizada por Diego Andrés Gaviria Botero, estudiante de la licenciatura en Matemáticas con doble titulación en física, y que corresponden al proceso de prácticas pedagógicas finales desarrolladas en la institución Pedro Luis Álvarez correa en el área de física durante el año 2023-2024. En particular, la investigación involucrará a los estudiantes que están actualmente en grado once.

Se solicita su colaboración y respaldo para realizar el registro de información para la investigación, se utilizarán de videos y audios, encuestas y fotografías, para conservar diálogos, documentos, tablas y demás recursos utilizados en clase y producidos por los estudiantes, que posibiliten el análisis de la investigación. La participación es voluntaria y anónima, por lo que ningún estudiante estará obligado a formar parte y quienes lo deseen podrán retirarse cuando consideren necesario. Además, su participación no conllevará ningún beneficio académico, económico o personal.

Consentimiento

Declaro que no he recibido presiones verbales, escritas o gestuales para formar parte de la investigación. Tomé esta decisión en pleno uso de mis facultades mentales, de manera consciente y libre. He leído y comprendido las explicaciones sobre mi participación en esta investigación. Además, he tenido la oportunidad de hacer preguntas y he recibido respuestas satisfactorias. Por lo tanto, estoy de acuerdo en participar y autorizo el uso de la información obtenida para los fines de la investigación.

Fecha: _____

Nombre del Estudiante: _____

Firma del Estudiante: _____

Nombre del Padre/Madre o Tutor: _____

Firma del Padre/Madre: _____