UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
1 8 0 3

Enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado noveno

Rubén Andrés Ríos Aguilar

Trabajo de profundización presentado para optar al título de:
Magíster en enseñanza de las Matemáticas

Asesor: Luisa Fernanda Restrepo Torres

Universidad de Antioquia
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Matemáticas - Maestría en Enseñanza de las Matemáticas
Medellín, Colombia
Marzo de 2025

Índice general

0.0.1. Dedicatoria 1
0.0.2. Resumen 2
0.0.3. Abstract 2

1. Introducción **4**

2. Revisión a la literatura **15**

3. Marco histórico **20**

4. Marco disciplinar **28**

5. Directrices de aprendizaje **30**

6. Módulo de Profundización **32**
6.0.1. Nota histórica sobre funciones matemáticas 32
6.0.2. Actividad con Phet Simulations 35
6.0.3. Taller diagnóstico 37
6.0.4. Definición de par ordenado 38
6.0.5. Situaciones problema pares ordenados 40
6.0.6. Definición- Relación Matemática. 48
6.0.7. Situaciones problema- Relaciones Matemáticas 49
6.0.8. Definición-Función Matemática. 55
6.0.9. Rango y dominio de funciones. 57
6.0.10. Funciones matemáticas. 60
6.0.11. Ejercicios-Funciones Matemáticas 72
6.0.12. Situaciones problema-Funciones Matemáticas 74
6.0.13. Examen sobre funciones matemáticas 79
6.0.14. Actividad de funciones matemáticas - Globos como funciones 80
6.0.15. Operaciones y transformaciones con funciones. 82
6.0.16. Recomendaciones generales 87
6.0.17. Referencias bibliográficas: 88
6.0.18. Anexos 92

0.0.1. Dedicatoria

Dedico este trabajo de manera fehaciente, a mi familia; ellos han estado siempre apoyando mi proceso de formación profesional y han estado en cada paso de mi crecimiento como maestro. Dedico mi proyecto a ellos y a mi pareja, por el empeño y apoyo constante.

De manera especial agradezco a los profesores Rubén Henao y Luisa Torres, quienes apoyaron el inicio y final de este proyecto. Sus consejos y clases fueron fundamentales para cerrar un ciclo de formación posgradual. Sin duda que, hay un antes y un después luego de haber estudiado la maestría.

Gracias a la Universidad de Antioquia, mi alma máter, por haber permitido mi formación en esta instancia mediante la beca de mejor estudiante graduado.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Antioquia, por recibir a un profesional de la educación y transformarlo en alguien más hábido de conocimiento disciplinar y pedagógico.

0.0.2. Resumen

En distintas experiencias como educador matemático en procesos de educación primaria, básica secundaria y universitaria, desde el año 2019 hasta el año 2024, se ha evidenciado una falencia de habilidades matemáticas en cuanto a interpretación, lectura, análisis, solución e inferencia de situaciones problema o ejercicios matemáticos. A nivel de la Institución Educativa de María, se evidencian falencias en el componente aleatorio, geométrico-métrico y numérico-variacional de la prueba OEA, preparatoria para el ICFES, evidencia que requiere atención e intervención.

En cuanto al icfes del año 2023, estos muestran unos resultados globales preocupantes, especialmente por el NSE (nivel socioeconómico) y por el bajo porcentaje de estudiantes que obtienen una puntuación de nivel 4 en matemáticas. Dadas estas premisas, se sugiere una mejora en la enseñanza de las matemáticas a partir de un trabajo de profundización denominado: enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado noveno. Su diseño se basa en el modelo de Dick y Carey y en la revisión a la literatura sobre enseñanza de la matemática.

La pregunta de profundización es entonces, ¿cómo fortalecer la enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado 9°? Para responder a dicha pregunta se ha creado un instrumento; un módulo de profundización basado en el modelo de Dick y Carey. Este se ha ido perfeccionando para que apunte a enseñar la función matemática de manera rigurosa pero con un lenguaje intuitivo, inductivo e interactivo. En este se proponen actividades con las herramientas tecnológicas Desmos, Geogebra y Phet simulations. Se exponen además notas curiosas para dar contexto, ejemplos ilustrativos, gráficas, problemas, situaciones problema y talleres inéditos. Para finalizar se propone un examen de los temas expuestos, se dan recomendaciones generales para su implementación.

Palabras clave: multimodalidad, enseñanza, aprendizaje, función.

0.0.3. Abstract

In different experiences as a mathematics educator in primary, secondary and university education processes, from 2019 to 2024, a lack of mathematical skills has been evident in terms of interpretation, reading, analysis, solution and inference of problem situations or mathematical exercises. At the level of the María Educational Institution, deficiencies are evident in the random, geometric-metric and numerical-variational component of the OEA test, preparatory

for the icfes, evidence that requires attention and intervention.

Regarding the icfes for the year 2023, these show worrying overall results, especially due to the SEL (socioeconomic level) and the low percentage of students who obtain a level 4 score in mathematics. Given these premises, an improvement in the teaching of mathematics is suggested based on an in-depth work called: teaching the concept of mathematical function in ninth grade students. Its design is based on the Dick and Carey model and on the review of the literature on mathematics teaching.

The deepening question is then, how to strengthen the teaching of the concept of mathematical function in 9th grade students? To answer this question, an instrument has been created; an in-depth module based on the Dick and Carey model. This has been perfected so that it aims to teach the mathematical function in a rigorous manner but with an intuitive, inductive and interactive language. In this, activities are proposed with the technological tools Desmos, Geogebra and Phet simulations. Curious notes are also presented to provide context, illustrative examples, graphs, problems, problem situations and workshops. Finally, an exam of the topics presented is proposed, and general recommendations are given for its implementation.

Keywords: multimode, teaching, learning, function.

Capítulo 1

Introducción

En distintos espacios y experiencias como educador matemático en procesos de educación primaria, básica secundaria y universitaria, desde el año 2019 hasta el año 2024, se ha evidenciado una falencia de habilidades matemáticas en cuanto a interpretación, lectura, análisis, solución e inferencia de situaciones problema o ejercicios matemáticos. Evidencia obtenida, principalmente, en los resultados institucionales de las pruebas OEA, en la Institución Educativa de María, al mostrar la necesidad de bases matemáticas, modelos explicativos, argumentos y competencias necesarios para que los estudiantes puedan expresar en sus respuestas la solución o justificación de un proceso matemático de forma oportuna y acorde a los presupuestos del Ministerio de Educación Nacional Colombiano y a los Estándares Básicos de Competencias.

La Institución Educativa de María es de carácter público, cuya población abarca cuatro modalidades de estudio, jornada única mañana y tarde, jornada nocturna y dominical. Está ubicada en el municipio de Yarumal en el norte antiqueño.

En el año 2024 se han evidenciado los siguientes resultados en la prueba OEA, preparatoria para las pruebas de estado ICFES en el grado 10°2. Esta prueba se implementa para fortalecer a los alumnos en las competencias requeridas para presentar la prueba saber 11°.

Resultados componentes	**Sumatoria reales**	**Sumatoria esperados**	**Porcentaje (real/esperado)**
Aleatorio	640	1.350	47,41
Geométrico-métrico	1.290	3.240	39,81
Numérico variacional	1.120	1.890	59,26

Tabla 1. Resultados de las pruebas OEA año 2024 - 10°2, Institución Educativa de María.

En el curso de matemáticas a nivel institución se evidencian falencias en el componente

aleatorio, geométrico-métrico y numérico-variacional. Teniendo en cuenta estos precedentes, se señala una dificultad por parte de los estudiantes en cuanto al aprendizaje de funciones matemáticas y el manejo adecuado de dichos componentes; cuestión que está relacionada con la forma en que se enseña, la falta de prerrequisitos algebraicos y aritméticos. López y Sosa (2008) hacen énfasis en la falta de opciones para que los estudiantes puedan entender el concepto de función matemática, puesto que

> La forma en que usualmente se suele transmitir el concepto en la escuela deja de lado el proceso de constitución del concepto función; las experiencias de aprendizaje en las aulas no favorecen apreciar la naturaleza y funcionalidad del concepto para entender, modelar y explicar fenómenos de carácter variacional, provocando dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas en los estudiantes (López y Sosa, 2008, p.2).

Esto significa que hay una problemática detectada en la enseñanza del concepto de función matemática por resolver.

Agregan que "es necesario considerar los aspectos cognitivos, epistemológicos y didácticos para el aprendizaje de funciones, en actividades y experiencias que promuevan el lenguaje y pensamiento variacional, la visualización y la modelación de situaciones o fenómenos" (López y Sosa, 2008, p.11).

Es por esta razón que se decide escoger como concepto de estudio a la función matemática, puesto que hace parte transversal del currículo en la enseñanza de las ciencias exactas en bachillerato, especialmente en grados 9°, 10° y 11°. Fortalecer su comprensión permitirá el desarrollo de los componentes aleatorio y numérico-variacional, mediante actividades, ejercicios y situaciones problema articuladas en un módulo de profundización. Las funciones matemáticas hacen parte fundamental de procesos y estudios en distintos campos laborales. Su estudio y conceptualización favorece el desarrollo del país y por lo tanto, de su economía.

"En Colombia, los resultados del examen estandarizado Saber 11° constituyen la medida más utilizada para monitorear la calidad de la educación básica y media" (Fundación Empresarios por la Educación y Observatorio de gestión educativa, 2024). Estas dos instituciones realizan un estudio en 2023 basadas en los resultados de las pruebas Saber 11°, mostrando hallazgos, como:

-En 2023 el puntaje global promedio aumentó en 2,4 puntos respecto a 2022.

-La brecha entre niveles socioeconómicos se amplió, al tiempo que se observa la persistencia en la brecha entre los sectores oficial - no oficial de 31 puntos. En el informe, se estudia a nivel nacional los niveles de desempeño por NSE (nivel socioeconómico) y por prueba evaluada.

Según el (Icfes, 2022) "los niveles de desempeño son una descripción cualitativa de las habilidades y conocimientos que se estima ha desarrollado el evaluado, y tienen el objetivo de complementar el puntaje numérico obtenido". De igual manera, permiten agrupar a los estudiantes de grado once en 4 niveles (1, 2, 3 y 4). Para matemáticas se da un informe por niveles de desempeño y por NSE.

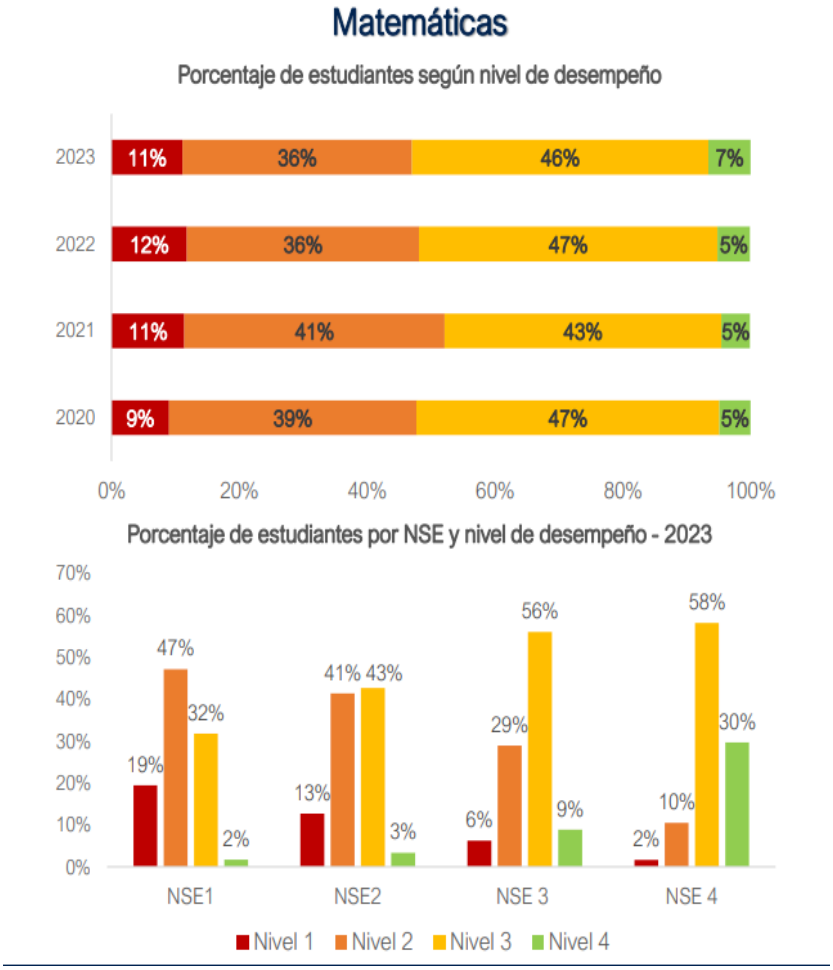


Figura 1.1: Resultados de las pruebas Icfes Colombia, Fundación empresarios por la educación, Observatorio de gestión educativa, año 2023.

Este análisis evidencia unos resultados globales preocupantes, especialmente por el NSE y por el bajo porcentaje de estudiantes que obtienen una puntuación de nivel 4 en matemáticas.

En cuanto a resultados de las prueba PISA en el año 2022, el Ministerio de Educación Nacional ha hecho su análisis al indicar que

> Los resultados de la medición internacional dejan ver datos que para el Gobierno Nacional dan muestra de la necesidad de transformar estructuralmente el sistema educativo, dado que, en los tres dominios, más del 50 por ciento de los estudiantes no alcanzaron las competencias básicas (nivel 2) esperadas en cada una de las áreas (MEN, 2023).

Esto significa que hay una problemática en la educación colombiana que atender. Se presenta a continuación una tabla comparativa del dominio de matemáticas.

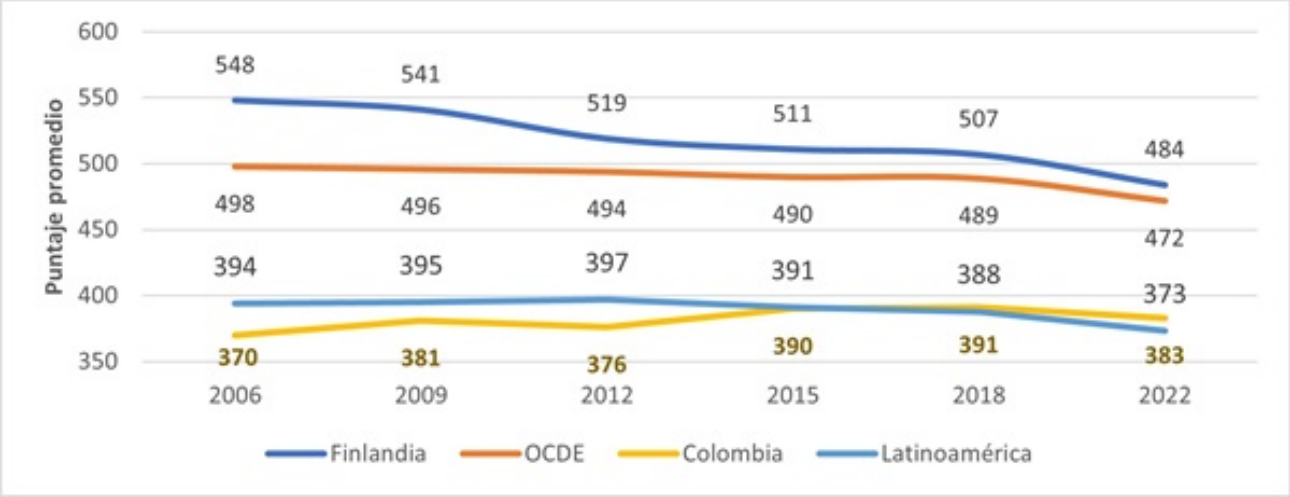


Figura 1.2: Histórico de puntajes promedio dominio de matemáticas - PISA. (Fuente: Nota país OCDE - PISA 2022).

Puede notarse en la anterior gráfica la necesidad de potenciar los procesos de enseñanza en Colombia, puesto que está por debajo de la OCDE y de otros países en el rendimiento de la prueba. Por otro lado, se señala que "la misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo en que tendrán que vivir" (Santaló, 1990, p.1), lo cual está en la línea de permitirles forjar un proyecto de vida que brinde soluciones a situaciones reales y del contexto propio. Luego, se les debe brindar un mejor proceso de enseñanza.

Es necesario, a posteriori, repensar la actividad de enseñanza matemática bajo una perspec-

tiva de cambio, una que promueva cambios cualitativos, una con enfoque didáctico, pues, la Enciclopedia Universalis define que

> la didáctica matemática estudia los procesos de transmisión y adquisición de diferentes contenidos de esta ciencia, particularmente en situación escolar y universitaria. Se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre su enseñanza y aprendizaje. No se reduce a buscar una buena manera de enseñar una noción fija aún cuando espera, a término, ser capaz de ofrecer resultados que permitan mejorar el funcionamiento de la enseñanza (Enciclopedia Universalis, p.12).

En correspondencia con lo mencionado, la didáctica matemática podría favorecer la concreción del concepto de función, además de mejoras cualitativas en los procesos de formación en matemáticas en distintos grados de escolaridad y niveles de educación, lo cual apunta a la cognición del niño o joven. En este sentido, la construcción de conceptos matemáticos se relaciona con el estudio de la forma en que se aprende y cómo se concretiza el aprendizaje.

Dadas estas premisas, se considera necesario disponer de nuevos aportes para una mejora en el proceso de interacción del maestro con su objeto de estudio, las matemáticas y su posterior enseñanza, puesto que, "investigar es realizar la búsqueda de verdades temporales con la finalidad de generar nuevos conocimientos que permitan ampliar fronteras y descubrir de forma ordenada y sistemática los hechos" (Cerón et al., 2020, p.1). En consonancia con lo anterior, se puede afirmar que, el conocimiento es susceptible de nuevos aportes y de complementarse, razón por la cual se busca poner a disposición de los maestros en matemáticas un instrumento para la enseñanza del concepto de función matemática apoyado en algunos aportes teóricos.

Radford y André mencionan que "la revisión de la literatura ofrece un panorama general que subraya la naturaleza multimodal de la cognición en general y de la cognición matemática en particular" (Radford y André, 2009, p.1). En contraste con lo ya mencionado, el problema detectado del presente trabajo está relacionado con la necesidad de rastreo bibliográfico en torno a la enseñanza del concepto de función, para una mejora en su enseñanza.

En esta propuesta de profundización se presta especial interés a algunos aportes teóricos en la enseñanza de las matemática, ante la necesidad particular de dejar un precedente que aporte a la propia experiencia profesional, a docentes e interesados que se preocupen por la enseñanza del concepto de función, dada la necesidad de una mejora cualitativa en el servicio educativo brindado y a las circunstancias y argumentos expuestos.

Es por esta razón que la pregunta del presente trabajo de profundización es: ¿cómo fortalecer la enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado 9°?

En el marco de la presente propuesta de profundización, se pretende generar un aporte a la educación con la necesidad de transformar y aportar al contexto desde el conocimiento. Puesto que, “la investigación desde la ruta cualitativa se enfoca en comprender los fenómenos, explorándolos desde la perspectiva de los participantes” (Sampieri, 2018, p.390), en este proyecto se ha apelado por hacer uso de un trabajo de análisis de algunos estudios de forma cualitativa, para sustentar el diseño de un módulo en matemáticas.

Teniendo en cuenta el tipo de trabajo a realizar, se apela por hacer uso de un método de interpretación como lo es la hermenéutica, el "método de síntesis es el hermenéutico, palabra que proviene del término griego hermeneuo, que quiere decir yo explico y que consiste en el arte y teoría de la interpretación, que tiene como fin aclarar el sentido del texto partiendo de sus bases objetivas (significaciones gramaticales de los vocablos y sus variaciones históricamente condicionadas) y subjetivas (propósitos de los autores)"(Delgado, 2010, p.11).

La revisión a la literatura entreteje el planteamiento del problema con la literatura actual, ampliando su horizonte (Sampieri, 2018, p.579), es por ello preciso hacer uso de ésta, en aras de obtener una mirada más robusta del tema abordado, a la luz de su interpretación. Se considera pertinente el uso de esta técnica dentro del proceso de análisis de información, dada la necesidad de fortalecer los procesos educativos.

Para la construcción del instrumento que pueda fortalecer la educación matemática, se ha definido la pertinencia de diseñar y elaborar un recurso que permita ser una mediación didáctica estimulando al aprendiz, por esta razón se ha construido en este trabajo un módulo de profundización.

Este se basa en el modelo de Dick y Carey, modelo que permite de forma estructurada diseñar materiales de enseñanza y que, de manera particular permite el diseño de un módulo en el que prevalece la meta de aprendizaje, la evaluación constante y el estímulo pertinente esperando una adecuada respuesta por parte de quien aprende, puesto que

> Walter Dick y Lou Carey desarrollaron un modelo para el diseño de sistemas instruccionales basado en la idea de que existe una relación predecible y fiable entre un estímulo (materiales didácticos) y la respuesta que se produce en un alumno (el aprendizaje de los materiales) (Belloch, 2017, p.8).

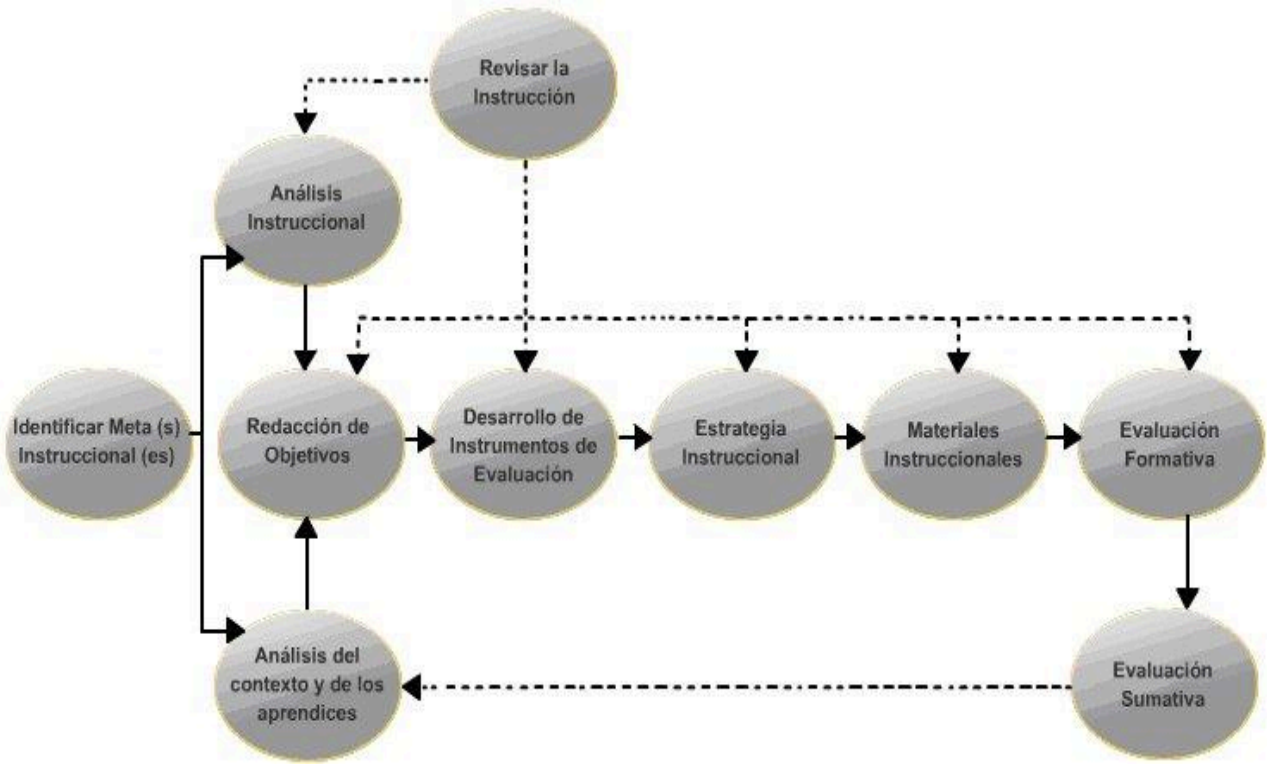


Figura 1.3: Gráfico del modelo de Dick y Carey (Belloch, 2017).

Según (Belloch, 2017) las fases del modelo son:

1. **Identificar la meta instruccional**. En el módulo se evidencia a partir de los objetivos que se proponen en cada actividad, taller y diseño realizado. La meta instruccional consiste en adquirir las bases y prerrequisitos de forma progresiva hasta lograr una conceptualización.

2. **Análisis de la instrucción.** Se hace análisis constante del módulo construido con la asesoría de los docentes de la facultad de ciencias exactas para mejorarlo y cualificarlo, tanto a nivel disciplinar como pedagógico y estético. Ha sido presentado a estudiantes, docentes y directivos de la institución educativa en donde se detecta el problema para mejorar su presentación y calidad.

3. **Análisis de los estudiantes y del contexto.** Se hace una descripción del entorno del grupo en donde se detecta la problemática. Se evidencian los componentes icfes en matemáticas que

son necesarios reforzar. Se concibe como necesario hacer ajustes a la forma de enseñanza para que el aprendizaje mejore y se fortalezca.

4. **Redacción de objetivos.** Se plantean metas en el instrumento elaborado y en el proyecto, en aras de mejorar el aprendizaje en matemáticas a partir del diseño instruccional descrito.

5. **Desarrollo de Instrumentos de evaluación.** Se crean recursos evaluativos diversos: juegos, talleres y al finalizar el proceso de aprendizaje, un examen de situaciones problema relacionado con lo expuesto de forma previa.

6. **Elaboración de la estrategia instruccional.** Se apela por el uso de un diseño inductivo, riguroso e interactivo para el alumno. Al recurrrir a algunos aportes teóricos sobre enseñanza de la matemática se presenta un módulo intuitivo. Se recurre a distintas formas de presentar la función matemática, puesto que se hace uso de herramientas tecnológicas como Desmos, Phet y Geogebra para incentivar la interactividad con el contenido. Se presenta a la función matemática de forma gráfica, en forma de ecuación y con situaciones de contexto. Al finalizar se plantea el uso de material concreto para potencializar el aprendizaje adquirido, atendiendo así a los sentidos del alumno.

7. **Desarrollo y selección de los materiales de instrucción.** Se hace uso de recursos digitales pertinentes y de actividades e indicaciones claras para un adecuado uso. Las situaciones problema, actividades y talleres son creados de forma inédita desde la formación en la maestría en enseñanza de las matemáticas. Cada apartado se piensa para inducir por medio de la experiencia de aprendizaje al concepto de función en noveno grado.

8. **Diseño y desarrollo de la evaluación formativa.** De manera continua se evalúan los tópicos temáticos del instrumento de enseñanza. Se puede garantizar un progresivo aumento de habilidades matemáticas con este dada la estructura con que se diseña; pues este facilita inducir, conducir, orientar, retroalimentar y profundizar.

9. **Diseño y desarrollo de la evaluación sumativa.** Al finalizar, se plantea evaluar con un examen de situaciones problema y funciones matemáticas. Se concibe como necesario poder cerrar el ciclo de enseñanza con una evaluación de tipo sumativa, al examinar el dominio del saber específico para el grado noveno en el tema propiamente dicho.

10. **Revisión de la instrucción.** Al aplicar el instrumento se deja abierta la posibilidad de mejorar su diseño y estructura al público que se interese en usarlo.

A manera de resumen; basado en este modelo se crea un diseño secuenciado, con evaluación sumativa y con un enfoque inductivo, riguroso e interactivo para el estudiante. Se estructuran temas por subsecciones, cada una con sus definiciones y con metas de aprendizaje.

El módulo procura inducir al conocimiento para el uso de distintas habilidades y de fomentar competencias necesarias para desarrollar con éxito el tema de funciones en el grado 9°. Su nivel de complejidad avanza de manera progresiva; se relaciona con la forma en que surge el concepto, (se basa su diseño en el marco histórico desarrollado) y se enfoca en dar distintos niveles de representación y comprensión para que el alumno pueda apropiarse de este, atendiendo con ello al carácter multimodal de la enseñanza, aspecto relacionado con las múltiples formas de enseñar, respondiendo así a los sentidos de quien aprende. El módulo expone algunas notas que permiten dar contexto al concepto, ilustra con definiciones, ejemplos, gráficas, ejercicios y situaciones problema relacionadas con el contexto real y otras áreas del conocimiento. En su desarrollo y diseño quién realiza las actividades debe hacer uso de tres herramientas tecnológicas, Desmos, Geogebra y Phet Simulations; esto le da un factor diferenciador al proyecto, pues sugiere integrar las TIC dentro del proceso de aprendizaje. Presenta una actividad o taller diagnóstico, finaliza con una actividad lúdica en la que el estudiante puede simular una o más funciones mediante el uso de material concreto y un examen final con situaciones problema del tema visto.

Es en esta línea que se desarrolla el trabajo de profundización denominado: enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado noveno. Cabe destacar que, el rastreo bibliográfico (trabajo realizado sobre la enseñanza de las matemáticas) en pro de una mejora en su aprendizaje, también contribuye de forma significativa, puesto que de este trabajo surgen contribuciones didácticas y pedagógicas que serán expuestas de forma explícita en la revisión a la literatura y de forma implícita en el módulo creado.

Sobre la construcción de un módulo en matemáticas, se presentan a continuación algunos trabajos, mostrando cuán efectivos pueden ser en el campo de su enseñanza.

-Fabián (2013)

Desarrolla un estudio llamado efectividad de un módulo de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria del Callao. Se aporta a la enseñanza de las matemáticas pues se evidencia una mejora en el aprendizaje de los estudiantes después de la intervención

con el módulo, puesto que "los resultados muestran diferencias en el rendimiento en matemática a favor del grupo experimental, que nos permiten concluir que el módulo influyó en el desarrollo de las capacidades evaluadas" (Fabián, 2013, p.88). Se intervino en dos grupos distintos. Se realiza el módulo para fortalecer la forma en que el estudiante resuelve un problema matemático.

-Cantillana (2015)

La PRODIENAF (Propuesta didáctica de enseñanza y aprendizaje, módulo de funciones para la unidad de función lineal y afín del programa de matemática primer año de enseñanza media) es el nombre que recibe este trabajo sobre enseñanza de las funciones. Se realizan intervenciones en dos grupo distintos, uno de intervención directa y otro de control, demostrándose la validez y pertinencia del módulo a través del contraste de la información que se genera de una intervención inicial y una final. Se prueba una mejora cualitativa en los aprendizajes con respecto al concepto de función matemática.

- Vílchez (2017)

Desarrolla un trabajo denominado "módulo de enseñanza modular personalizada de las funciones trigonométricas". La intervención se realizó en grado décimo mediante un trabajo de enseñanza personalizada, usando un módulo y estrategias didácticas para la enseñanza del concepto de función trigonométrica. El análisis de las intervenciones permite concluir que el módulo fue propicio y enriqueció las bases matemáticas de los estudiantes que fueron foco de atención en la investigación.

-Arellano et al., (2017)

Desarrollan un módulo sobre la enseñanza de funciones matemáticas usando TIC, en un trabajo denominado: electrónico "funcimat" como herramienta didáctica para el estudio de funciones matemáticas y su incidencia en el rendimiento académico. Se trabaja con dos grupos diferentes. Se hace un comparativo entre el uso de la herramienta tecnológica o módulo electrónico con la forma tradicional de enseñanza de funciones. Se comprueba mediante análisis estádístico que el módulo y la estrategia didáctica aplicada en este es viable para una mejora en la enseñanza de las funciones matemáticas.

Como se puede evidenciar los trabajos con módulos pueden ser enriquecedores, depende claramente de su diseño e intención pedagógica. Nótese en los cuatro módulos presentados como referencia que, denota el antes y después de la intervención como factor diferenciador;

en este se destaca el progreso de los alumnos mediante su uso. De manera análoga el presente trabajo apunta a una mejora significativa que redunde positivamente en el aprendizaje de la función como concepto.

Dentro de la propuesta de profundización se plantean por objetivos los siguientes:

Objetivo general

Fortalecer la enseñanza del concepto de función matemática en estudiantes de grado 9° a través de un módulo de profundización.

Objetivos específicos

Diseñar un instrumento de enseñanza que aporte al aprendizaje del concepto de función.

Profundizar en el concepto de función matemática.

Revisar aportes teóricos en la historia para la enseñanza del concepto de función.

Capítulo 2

Revisión a la literatura

A continuación se evidencia una revisión a la literatura sobre enseñanza de las matemáticas. Este aporta a la construcción del módulo de profundización y a la práctica pedagógica del maestro de matemáticas.

Este trabajo consiste en la revisión y búsqueda de distintos aportes a la enseñanza de la matemática entorno al proceso de aprendizaje. Al revisar el impacto que tienen, se acude a una descripción de estos trabajos teóricos dando paso a la creación de reflexiones pedagógicas que suscitan y promueven prácticas de enseñanza.

En concreto, la línea temática de esta revisión se centra en los tópicos cerebro y enseñanza de la matemática, razón por la cual la palabra neurociencia aparece en distintos apartados de este capítulo.

Esta revisión inicia con Bravo (2010), quien desarrolla un artículo en el que se destaca la importancia de una escuela que se preocupe por entender cómo funciona el cerebro, para, posteriormente, resolver cuestiones que involucren el saber pedagógico y al cerebro.

En línea con lo planteado por Bravo (2010) en su trabajo sobre neurociencia y enseñanza de la matemática, pensar en escuela y primordialmente reflexionar en torno a la práctica educativa involucra, por lo mencionado, un trabajo de metacognición por parte del maestro, pues este como ente dinamizador del saber es quien debe ahondar en la forma en que manipula el conocimiento para disponerlo y hacer que los estudiantes progresen y avancen en su formación, concretamente en conceptos de índole matemático.

Esto significa que, como agente del conocimiento, el docente de matemáticas debe reconocer cómo mejorar de manera progresiva su práctica de enseñanza, haciendo un trabajo de revisión

y de constante mejora en su práctica.

Un ejemplo de esto es el trabajo desarrollado por Sureda y Otero (2013), quienes desarrollan una investigación basada en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud en cuatro grupos de estudiantes, sobre el campo conceptual de función exponencial. Se obtienen diferentes niveles de representación sobre el campo conceptual de función exponencial. Los campos conceptuales de Vergnaud en Matemáticas, hacen parte de una teoría para la enseñanza de las matemáticas que permiten mejorar la práctica de enseñanza basado en niveles diferentes de conceptualización matemática.

Vargas (2013) además, realiza una revisión a la literatura sobre la forma en que se desarrolla el pensamiento matemático desde la neurociencia. Plantea el pensamiento matemático en dos vías, una intuitiva y una formal. Además, se afirma que las dos son fundamentales en el aprendizaje matemático. Al mencionarse lo intuitivo y lo formal, ambas vías conllevan a estructurar la enseñanza de las matemáticas considerándolas a ambas.

En línea con lo anteriormente mencionado, es importante además fijar la atención en la forma en que el estudiante recibe y se involucra con el saber, puesto que "para saber cómo se enseña hay que saber cómo se aprende" (Bravo, 2010, p.4). Este razonamiento implica conocer las múltiples formas en que los conceptos y ambientes de aprendizaje son favorables o no en la propuesta pedagógica de formación, especialmente de nociones de precálculo. El argumento de saber cómo aprenden los estudiantes para saber cómo se enseña también es defendido por (Rivera-Rivera, 2019, p.9), y por Bravo (2014) quien expone que los maestros no solo deben preocuparse de cómo enseñar sino de cómo los alumnos aprenden (Bravo, 2014, p.4).

Esto implica, en consecuencia, poder reconocer las herramientas, lenguaje y símbolos que mejor se adapten a las condiciones del entorno en el que se desarrolle el arte de la enseñanza de nociones como el de función matemática. El uso favorable de herramientas lingüísticas cercanas y el uso de símbolos concretos para la enseñanza de las matemáticas, congruentes con los procesos de construcción conceptual para cada grado de escolaridad son claves, en ruta con lo mencionado por Rivera-Rivera (2019). En particular, se hace énfasis en que los estudiantes retienen más la información suministrada cuando se lee, discute y ejecuta (Rivera-Rivera, 2019, p.3). Dada esta premisa, manipular el concepto matemático incluyendo a la acción y el lenguaje, puede ser garante de un aprendizaje más eficaz y provechoso para el fomento de competencias.

Un ejemplo de esto es el trabajo realizado por Fernández et al., (2017), quienes desarrollan una investigación documental sobre los elementos a considerar en el uso de un software edu-

cativo para la enseñanza del concepto de función matemática. Se concluye que, este software propicia las condiciones para el aprendizaje de dicho concepto.

Ejemplos de enseñanza haciendo uso de herramientas tecnológicas que aportan al ejercicio docente, incluyen el uso de simulaciones y laboratorios virtuales, el manejo de Geogebra, Phet Simulations, gamificación y enseñanza basado en la elaboración de juegos de exigencia y aplicación de nociones matemáticas.

De aquí que, simplificar el uso de términos elevados y hacer uso de expresiones de rigor matemático, pero mucho más cercanas a la acción y comprensión del joven, le permitan un mejor acercamiento a la noción de función, puesto que "el excesivo énfasis en conceptos abstractos, sin utilidad práctica aparente y la memorización rutinaria de algoritmos perjudica la evolución y motivación del alumno" (Rivera-Rivera, 2019, p.7).

Butterworth 1999 y Dehaene 1997, como se cita en Bravo, 2010

> Afirman que las personas humanas nacemos con un módulo numérico que la escuela se encarga de obstaculizar. Aconsejan a la enseñanza de la matemática el desarrollo del razonamiento intuitivo, la manipulación de materiales y el carácter lúdico de las actividades, para interactuar con la mente del sujeto (p.6).

Implicar la mente del estudiante y la forma en que esta es estimulada por las estrategias de enseñanza son entonces parte de un trabajo didáctico en el desarrollo de clases que apelen más a la intuición y a elementos tangibles, que sirvan como soporte para que el concepto de función pueda llevarse con profundidad práctica a los jóvenes que se aproximan a preconceptos de cálculo.

En una retrospectiva de corte constructivista, se plantea la necesidad de formar muy bien a los niños para que en su educación puedan desarrollar el pensamiento matemático (Vargas, 2013, p.8), puesto que es en estas edades donde se pueden fomentar con mayor ahínco los aprendizajes básicos, por la flexibilidad que presenta el desarrollo cerebral de los niños. El autor además plantea que, se debe estudiar mucho más la relación de la neurociencia con el aprendizaje de las matemáticas.

De acuerdo a este tema en mención, Bravo (2014) realiza una revisión a la literatura basada en la neurociencia y el aprendizaje del lenguaje y las matemáticas. Subraya el papel de la neurociencia en la relación de las matemáticas y su enseñanza. Puesto que este tópico de estudio es

un tema de reciente actualidad y de gran complejidad, la literatura buscada no ofrece una ruta concreta para que el aprendizaje se pueda dar de manera satisfactoria y sin margen de error, sin embargo, esta ofrece apuntes teóricos que podrían propiciar una mejora en la forma en que se manipula el objeto matemático a enseñar.

En cuanto al ejercicio docente, “muchos maestros conservan celosamente "su estilo de enseñar"que generalmente es el mismo con el cual fueron ellos enseñados, pero no investigan y leen pocas investigaciones actualizadas sobre los procesos cognitivos y psicolingüísticos de cómo aprenden los niños” (Bravo, 2014, p.2). Esto supone que, la cognición debe ser tenida en cuenta en la educación. Al respecto, “mediante el neuro-aprendizaje, se puede optimizar el funcionamiento del cerebro para potenciar los procesos que intervienen en el aprendizaje: atención, memoria, lenguaje, lectura, escritura, razonamiento y emociones” (Rivera-Rivera, 2019, p.2).

Por otro lado, en cuanto al uso de instrumentos en investigación en neurociencia, “las investigaciones en matemáticas también han mostrado, en estudios mediante EEG [1], que su aprendizaje también produce modificaciones en el desarrollo cerebral lo que implica que la educación debe considerar el procesamiento cerebral para la enseñanza del cálculo” (Bravo, 2014, p.9). Puesto que el aprendizaje de las matemáticas aporta al desarrollo del cerebro, ha de facilitarse y disponerse de herramientas necesarias para que este sea el mejor y pertinente, estimulando distintas áreas del cerebro.

Al respecto, “nuestro cerebro procesa los números utilizando tres procedimientos (visual, verbal y cuantitativo) en los que se activan regiones cerebrales distintas. Debemos activarlos todos mediante actividades con un enfoque multisensorial” (Rivera-Rivera, 2019, p.10). La relación de lo que se aprende por medio de los sentidos y el carácter multimodal de la enseñanza (relacionada con las múltiples formas de acceder a el saber), se relacionan entonces en un aspecto primordial y es en que las diferentes formas de impartir el conocimiento pueden o no ser de utilidad para que precisamente esos sentidos puedan ser estimulados, permitiendo o no el acceso al conocimiento. Rivera-Rivera (2019) menciona la importancia de las múltiples formas de enseñar y la importancia de enseñarle al alumno a ser meta consciente de su aprendizaje (Rivera-Rivera, 2019, p.7). Dos conceptos claves en enseñanza de las matemáticas, multimodalidad y metacognición se resaltan como claves para el ejercicio de quien enseña.

La metacognición se refiere a la consciencia que se tiene para mejorar el proceso propio de aprendizaje.

[1] EEG significa electroencefalograma

"No debemos olvidar que la adolescencia es el periodo en el que los bloques cognitivos que han empezado a formarse durante la infancia se refinan, por lo cual implica un período de transformación cerebral importante" (Radford y André, 2019). Por esta razón se deben optimizar y usar de manera adecuada los recursos y metodología de enseñanza desde la infancia, para que el tránsito en la conceptualización a mayor edad sea un poco más efectiva.

Aunque la literatura se ha ido inclinando por el análisis de fundamentos neurocientíficos que le den mayor sólidez a la práctica del maestro y aunque se hayan desarrollado instrumentos tecnológicos que permiten analizar al cerebro en su interacción con su funcionamiento en el aprendizaje, aún se presentan preguntas y retos al respecto, puesto que falta por explorar. No obstante, el interés por la enseñanza de la matemática desde este enfoque se presenta de forma llamativa y cuestiona el trabajo del maestro de matemáticas.

A manera de resumen y en términos de los aportes que este capítulo propicia para la construcción del módulo de profundización se rescatan las siguientes contribuciones a saber:

Se debe trabajar la enseñanza de las matemáticas involucrando el lenguaje, la acción y en general los sentidos del estudiante. Se le debe proporcionar múltiples formas de acceder al saber, intentando potenciar la memoria, atención, lenguaje, escritura, lectura, razonamiento y emociones. Se debe proporcionar la lúdica en las actividades de clase, la manipulación de material concreto y permitir que el estudiante pueda poner en discusión los temas abordados.

Capítulo 3

Marco histórico

Para el desarrollo de la revisión histórica del concepto de función, se debe precisar que "analizar los procesos históricos en el desarrollo de la matemática permite conocer la forma en que surgen, se sistematizan y se desarrollan los métodos, las ideas, los conceptos y las teorías de esta ciencia" (Vasquez et al., 2008, p.1). Teniendo en cuenta estos postulados, es importante dentro del proceso de construcción conceptual reconocer el papel que desarrollan los distintos teóricos en la construcción del conocimiento, dejando entrever la necesidad particular de la época según el contexto de generar avances en la ciencia para suplir necesidades que se presentaban.

Para la construcción del presente marco histórico, se hizo una búsqueda de documentos en idioma inglés y español; se seleccionaron diferentes textos para referenciar distintas épocas de la historia en la construcción del concepto de función.

3.1 Antigüedad

En la antigüedad, se hacía uso de estrategias para la distribución de tierras como en el caso de los Egipcios cuando el río Nilo inundaba sus terrenos, con ayuda de la agrimensura. Ellos usaron el triángulo rectángulo como herramienta para redistribuir sus tierras cuando las inundaciones hacían desaparecer las fronteras entre sus propiedades. Ciertamente para la época, se tenía una concepción de número acorde a la comprensión de la matemática del momento. "Se pueden encontrar ejemplos particulares de funciones en épocas antiguas; por ejemplo, contar, que implica una correspondencia entre un conjunto de objetos dados y una secuencia de números para contar" (Ponte, 1992, p.1). Estas formas de usar los números para sobrevivir son referentes que permiten comprender la relación del concepto de número con el concepto de función matemática.

El hecho de saber que mientras mayor sea la diagonal de un triángulo rectángulo, mayor

área de parcelación puede haber encerrada por este, es una representación intuitiva del concepto de función, que muy probablemente los Egipcios podían deducir. Plantear una explicación a la anterior situación implica que el valor de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es proporcional al área que encierra este triángulo, si es que se comparan 2 o más triángulos que sean semejantes. Esta representación geométrica de la proporcionalidad entre variables, es un referente matemático de la forma en que se presentaba una función matemática, aunque en la época no la definieron tal como se define en la actualidad.

"La versión más rudimentaria del concepto de función es, sin lugar a duda, el concepto de dependencia entre cantidades. Como tal, está presente en tablas de arcilla de los babilonios y en papiros de los egipcios" (Ugalde, 2014, p.6). Ha de destacarse que, en la antigüedad se representaban en columnas distintas los cuadrados de los números, lo cual traslada al concepto de par ordenado, coordenada y por supuesto de función matemática, aunque no estuviese definida.

Trabajos realizados por matemáticos y geógrafos como Eratóstenes, demuestran las habilidades rudimentarias y avanzadas que se tenían para la época. Eratóstenes descubrió la proyección de la sombra en Alejandría con un gnomon (instrumento usado en la antigüedad para medidas astronómicas, latitudes, meridianos), en un ángulo de aproximadamente 7,2 ° en solsticio de verano, en comparación con la sombra que este generaba en Siena de 0°. Conocía sobre la esfericidad de la tierra y de la gran distancia al sol; con todo esto y conociendo la distancia entre Alejandría y Siena, determinó para un ángulo de 360°, una distancia de 25.000 estadios antiguos para el perímetro terrestre, un valor no tan lejano de los 40.000 km.

Este trabajo de comparación entre longitudes y ángulos, conlleva en sí al concepto de función, mientras mayor sea el ángulo de referencia, que es de 7,2 °, mayor será la longitud del perímetro, esto es, si se toman arcos de circunferencia cada vez mayores sobre la esfera terrestre. Una evidencia más de cuán presente está y estuvo la función matemática en la interpretación física de los fenómenos naturales y por supuesto de los astronómicos.

Con respecto al avance en cuanto a la matemática, "la evolución del concepto de función se remonta a 4.000 años; 3.700 de estos consisten en anticipaciones. La idea evolucionó durante cerca de 300 años en conexión íntima con problemas de cálculo y análisis" (Kleiner, 1989, p.1). Esto implica que, para el desarrollo matemático era necesario el desarrollo de ideas y de postulados más sólidos y consistentes.

3.2 Siglo XIV

Para entender el contexto de acción de la matemática y de la función como concepto den-

tro del desarrollo de la ciencia, se concibe que "la noción de función aparece en el siglo XIV, cuando la matemática empieza a considerarse como la principal herramienta para estudiar los fenómenos naturales" (Cf. Youschkevitch, Dhombres, como se cita en Herrera, 2013, p.2). Además, "en este marco surgen las teorías de las calculaciones o latitudes de las formas, que ofrecen representaciones abstractas del movimiento y en ellas se encuentra un acercamiento a la definición de función por descripciones verbales de sus propiedades específicas o por gráfica " (Cf. Youschkevitch, Dhombres, como se cita en Herrera, 2013, p.2).

Ya para la época era necesario explicar la naturaleza con algún modelo o representación matemática. De aquí que, el avance de la matemática esté vinculado con avances en otras ramas de la ciencia, específicamente con la explicación de fenómenos físicos.

De forma particular, puede decirse por este argumento y por científicos como Tesla con la creación de la corriente alterna y de Newton con el hallazgo de la ley universal de gravitación, que, la ciencia en su conjunto, ha ido avanzando a través del tiempo dejando entrever la relación estrecha de la forma en que se concibe la realidad y el desarrollo científico del momento histórico que atraviesa, donde la matemática juega un papel relevante como lenguaje para interpretar e intentar leer a la naturaleza.

Es en este sentido que, se ha de destacar la relación del desarrollo de la función matemática en torno a los avances científicos de la época como crucial para la consolidación del concepto mismo y del cálculo.

3.3 Siglos XVI - XVII

En los siglos XVI y XVII, se producen los primeros acercamientos a una definición formal de función matemática. Ya se estaban acuñando los argumentos y herramientas matemáticas necesarias para fundar el cálculo tal como se conoce hoy, en cuya intervención directa aparecen Newton, Leibniz y por supuesto, la función matemática.

Al respecto del concepto de función, Descartes (1596-1650) definía a una ecuación, representada por una curva, haciendo referencia a la dependencia entre las incógnitas involucradas (Ponte , 1992, p.2) . En consecuencia, es claro que la dependencia entre variables de la que habló Descartes era ya un acercamiento a la definición de función tal como se conoce actualmente. Al referirse a dependencia entre variables, se hace énfasis en la forma en que una variable dependiente afecta a su variable independiente, de forma que si se tiene a la ecuación $4.r = t$, el cambio producido en t afecta el comportamiento de r en la ecuación de forma directamente proporcional. "En la época de Descartes, se dispone de un lenguaje nuevo gracias a las aporta-

ciones de muchos ilustres geómetras, de entre los cuales, en Francia, cabe destacar a François Viète" (Pla i Carrera, sf). Además, "este nuevo lenguaje permite expresar ciertas curvas, no ya por medio de una característica geométrica definitoria, sino por medio de una expresión algebraica cerrada que, en el más simple de los casos, es una ecuación polinómica en dos variables" (Pla i Carrera, sf).

La evolución histórica de función en cuanto a lo algebraico, geométrico y lógico implica un razonamiento cada vez más sofisticado, la relación entre variables no sólo implica ver cómo una de ellas afecta a la otra, también implica analizar qué ocurre cuando una de ellas cambia de forma significativa.

3.4 Siglo XVII

"Fue Leibniz (1646-1716) quien primero usó el término (función) en 1673". (Ponte, 1992, p1.). Además, fue Leibniz junto a Newton, quienes consolidaron las bases del cálculo.

El trabajo realizado por Newton y Leibniz, aunque independiente, generó grandes contribuciones en la forma de concebir la matemática. Una de las contribuciones de Leibniz fue el estudiar el triángulo característico, pues esto le permitió descubrir el cálculo diferencial en 1676 (Leibniz, p.14, 2017). La relación estrecha del concepto de función matemática con el cálculo, lleva a pensar en la necesidad de definir de manera precisa la noción de función primero para luego establecer la noción del límite en la curva geométrica de esta.

> Los elementos que Leibniz denomina "funciones" no se refieren a constantes, sino a magnitudes variantes regulares, es decir, magnitudes que varían con respecto a una ley dada como, por ejemplo, lo son una abscisa u ordenada de la curva, y que están en una relación determinada con otras variables (Herrera, 2013).

Dada esta interpretación de función, se rescata el término de dependencia, en relación con una regla o ley de correspondencia. Esta interpretación de función implica una comprensión y conceptualización de la función como un "artefacto" en el que se atribuye una regla o patrón definido.

3.5 Siglo XVIII

En contraste, para el siglo XVIII, aparece el argumento de Euler. Al respecto, se afirma que "durante mucho tiempo, la definición de función se debió a Euler en su Introductio in Analysin Infinitorum de 1748 que decía: "una función es una cantidad variable, es una expresión analítica

compuesta de cualquier manera por la cantidad variable y números o cantidades constantes" " (Lindström, 2008, p .4).

Una combinación de elementos numéricos fijos y de variables que evidencian cómo la matemática ya no es solo conteo sino también, dependencia y correlación entre cantidades representadas por símbolos y de naturaleza no necesariamente constante. "Euler, cuando estudiaba alguna función, asumía que ésta tenía una serie de Taylor y que además era única pero jamás dió una demostración al respecto" (Ponce, 2015, p.15).

Bernoulli, matemático de la época, entiende también a la función como una expresión analítica e introduce la notación f conocida actualmente para representarla; la expresión $f(x)$ por el contrario, la introdujo el matemático suizo Leonhard Euler. Estos matemáticos del siglo en mención son considerados como los principales exponentes de la época en cuanto al estudio de la función (Farfán y García, 2005, p.491). Ambos marcan un precedente de tinte más riguroso, al modelar las funciones mediante una letra o símbolo universal, llámese f o $f(x)$.

La distinción entre f y $f(x)$ es importante dentro del estudio de funciones, f es entendida hoy día como una especie de máquina que procesa valores x de un conjunto X, arrojando mediante una regla dada, valores $y = f(x)$ de un conjunto Y.

3.6 Siglo XIX

Para finales del siglo XVIII, se produce una nueva idea. En la época "debido a la noción poco clara de una función a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX, se pensaba en una función de la misma manera que hoy pensaríamos de una función analítica" (Lindström, 2008, p.5). No obstante, la definición de función analítica hace referencia a series de potencias convergentes, la cual al ser una función particular, deja de lado una noción genérica que englobe a las demás de forma más concreta. "La noción de función en forma explícita no surgió hasta principios del siglo XVIII" (Kleiner, 1989, p.1) y añade, "las principales razones por las que el concepto de función no surgió antes fueron: falta de prerrequisitos algebraicos, llegar a un acuerdo con el continuo de los números reales y desarrollo de la notación simbólica; falta de motivación" (Kleiner, 1989, p.1).

Al adolecer de suficientes bases matemáticas para mostrar de mejor manera lo que se comprendía, se limitó un poco el desarrollo teórico-matemático del momento. El desarrollo que llevó la introducción de los conjuntos en la función matemática, fue una pieza clave en la explicación de conjuntos amplios y de aquellos con valores continuos e infinitos, permitiendo con ello el análisis de funciones que seguramente al inicio de los tiempos no se podían entender y

explicar. Por otro lado y como se evidencia más adelante, la notación simbólica cumple un rol importante dentro de la construcción de la noción de función matemática.

En cuanto al devenir de una nueva noción matemática, se aduce que "la evolución del concepto de función puede verse como un tira y afloje entre dos elementos, dos imágenes mentales: lo geométrico (expresado en forma de curva) y lo algebraico (expresado como una fórmula-primero finita y luego que permite infinitos términos, la llamada expresión analítica)" (Kleiner, 1989, p.1). La evolución de un concepto se dió gracias a la tensión entre estos dos elementos o a la forma dual de estudio de una función matemática.

Las representaciones geométricas y su simbología son en sí mismas piezas clave para el estudio a profundidad de funciones, lo curioso es ver cómo estas dos formas de representar terminan apuntalando y motivando su conceptualización.

Sobre algunos aportes generados en este siglo destaca el matemático Augustin Louis Cauchy, quién contribuyó a la teoría de funciones elípticas, los límites matemáticos y la noción de continuidad (Del Rosario y Ruiz, 2024, p. 2079). Contribuciones que sirven como precedente para el desarrollo, estudio y comprensión del cálculo basado en funciones.

3.7 Siglo XX

Para el siglo XX se presenta un cambio en la forma en cómo se concebía a una función. "Desde 1900 hasta 1920 se introdujeron conceptos como: espacio métrico, espacio topológico, espacio de Hilbert y espacio de Banach. Estos desarrollos condujeron a nuevas definiciones de función basadas en conjuntos arbitrarios que ya no son los números reales" (Vasquez et al., 2008, p.145). Lo peculiar radica en que ya no se piensa solo en el conjunto de los números reales, ahora se da un salto hacia números de otra complejidad.

Se afirma que "los Bourbaki formalizan el concepto de función definiéndola como una relación entre dos conjuntos" (Crespo y Ponteville, 2003, p.4). Esta noción de relación entre conjuntos implica tener en consideración su correspondencia, el concepto de relación y de par ordenado.

En esta línea, para el siglo XX, pensar en función implica analizarla como a un conjunto de elementos de partida con su correspondencia en un conjunto B de llegada. Esta interpretación de la función matemática es usada actualmente para indicar que, hay una regla de correspondencia entre conjuntos que sigue un patrón definido, a un solo elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento del conjunto de llegada.

Por otro lado, "la teoría de conjuntos no se desarrolló hasta finales del siglo XIX (con Cantor y Dedekind), luego, sin que existiese aún el concepto de conjunto, no era posible definir función entre dos conjuntos con la naturalidad que lo hacemos ahora" (Varona, 2022, p.2). Por esta razón es que el salto de la forma en que se definió función fue radical en término no solo de la notación de conjuntos que actualmente usamos, sino también en la comprensión de esta en conjuntos continuos o de valores infinitos dentro de estos.

3.8 Siglo XXI

En la actualidad la noción de función difiere de algunas definiciones y concepciones anteriores, especialmente por la notación e interpretación que se hace de esta en la notación de conjuntos. Ahora bien, ya se ha tenido la oportunidad de estudiarlas con mayor detalle gracias a las herramientas que brinda el cálculo junto a las herramientas tecnológicas que se han desarrollado.

La definición matemática reciente de una función matemática, se entiende como la correspondencia entre un conjunto de valores de un conjunto de salida y los elementos de un conjunto de llegada. Esta noción aclara que a un mismo valor de x no le pueden corresponder más de dos valores de y (Leithold, 1998, p.2). El argumento se basa en la característica que estas presentan, y es que no pueden ser cortadas por una recta vertical más de una vez. Además, esta presenta unos valores para el dominio en el conjunto de partida y unos valores del rango en el conjunto de llegada.

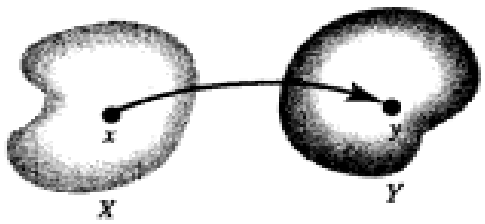


Figura 3.1: Representación gráfica conjuntista de una correspondencia que cumple con la definición de función (Leithold, 1998, p.3)

Esta comprensión del concepto de función lleva a pensar en los infinitos valores que asumen dos conjuntos en una función. Nótese que el conjunto de salida, al igual que el conjunto de llegada, puede ser finito o infinito. Sea el caso de la función y = 4. Esta función es constante y

tiene un único valor en el conjunto de llegada, mientras que el conjunto de salida posee a todos los números reales incluyendo el cero.

Actualmente las funciones matemáticas son usadas en programas computacionales y en desarrollo de software. Su uso en las empresas y en la economía por mencionar solo algunos ejemplos es relevante, pues permite analizar el comportamiento de variables, predecir e interpretar el comportamiento de fenómenos reales como la inflación, el costo de la canasta familiar, la relación costo-beneficio, entre otras.

A manera de resumen, se presenta una tabla según el momento histórico:

Época	Concepto de función	Matemático (s) de la época
Antigüedad	Correspondencia entre objetos y números	Babilonios y Egipcios (Edad antigua)
Siglo XVI	Dependencia entre incógnitas	Descartes (1596-1650)
Siglo XVII	Magnitudes variantes regulares	Leibniz (1673)
Siglo XVIII	Cantidad variable Expresión analítica	Euler (1748)
Siglo XIX	Función analítica- (Jens)	Gauss (1777-1855)
Siglo XX	Relación entre conjuntos	Los Bourbaki (Siglo XX)
Siglo XXI	Correspondencia entre conjuntos	Leithold (1998)

Figura 3.2: Definición de función según el contexto histórico.

Capítulo 4

Marco disciplinar

El concepto de función matemática recoge una serie de conceptos previos que son fundamentales dentro de la explicación y comprensión de este. Por esta razón se relacionan a continuación mediante un mapa conceptual disciplinar.

El mapa disciplinar parte del concepto de correspondencia, identificando a la función matemática desde la notación de conjuntos y representándola desde su gráfica y desde su ecuación matemática.

El concepto de par ordenado juega un papel primordial en el módulo y explicación del concepto de función; este permite entender un poco más su representación algebraica y geométrica. Los pares ordenados se asocian con el concepto de coordenada.

En lo que respecta al álgebra empleada en la representación de funciones, se denota el concepto de expresión algebraica, para denotar el uso de números, incógnitas y operaciones con números reales, dentro de los modelos matemáticos que le son propios a las ecuaciones en mención.

En lo que respecta al módulo de profundización, se sigue una ruta inductiva en cuanto al manejo de conceptos, iniciando por el par ordenado y terminando en operaciones y transformaciones de distintos tipos de funciones.

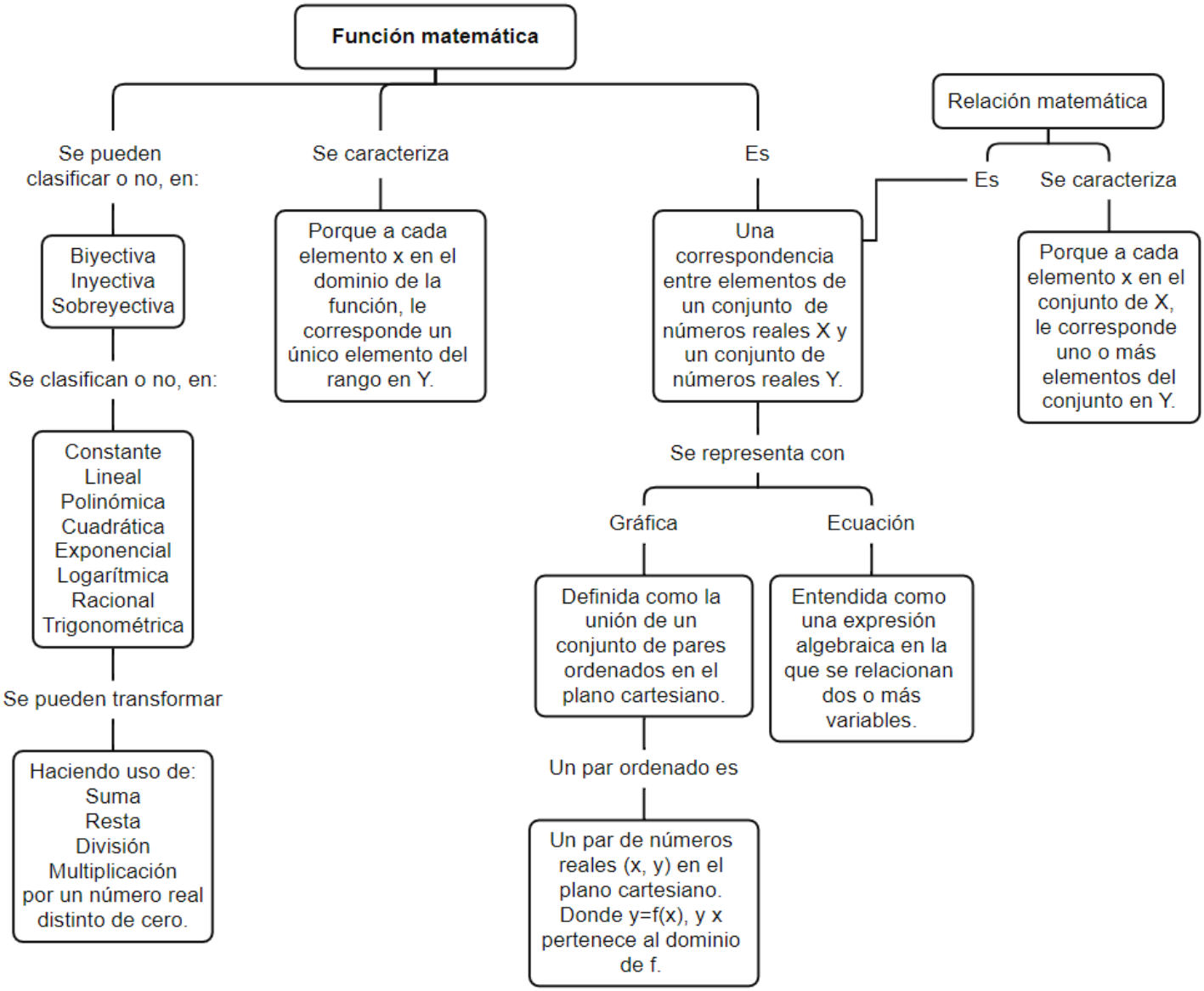


Figura 4.1: Mapa disciplinar.

Capítulo 5

Directrices de aprendizaje

En lógica con el trabajo de revisión a la literatura se ha querido seguir una ruta inductiva en cuanto al aprendizaje de la función matemática, por esa razón se busca complementar el trabajo con el módulo de profundización, el cual apunta al desarrollo lógico y coherente de conceptos e ideas previas que sustentan el desarrollo conceptual esperado. Los conceptos que aparecen en el módulo de profundización aparecen de manera más matemática pues, ante todo, se busca no perder el rigor en el mismo. Para efectos prácticos, se proponen en el anterior mapa definiciones más sencillas pero no por eso menos rigurosas.

A continuación se relacionan los estándares y derechos básicos de aprendizaje a tener en cuenta para el proyecto de profundización. Estos son extraídos del MEN (ministerio de educación nacional).

Estándares básicos de aprendizaje 9°.

Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Derechos básicos de aprendizaje 9°.

Propone y desarrolla expresiones algebraicas en el conjunto de los números reales y utiliza las propiedades de la igualdad y de orden para determinar el conjunto solución de relaciones entre tales expresiones.

Evidencias de aprendizaje.

Identifica y utiliza múltiples representaciones de números reales para realizar transformaciones y comparaciones entre expresiones algebraicas.

Establece conjeturas al resolver una situación problema, apoyado en propiedades y relaciones entre números reales.

Determina y describe relaciones al comparar características de gráficas y expresiones algebraicas o funciones.

Los competencias incluidas en este capítulo, a las cuales se apunta desde el trabajo con el módulo, recogen el trabajo de representación, análisis e interpretación de un grupo de funciones y sus transformaciones en el plano cartesiano, aspectos que son abordados de forma paulatina a través de ejercicios prácticos con el plano cartesiano y sus gráficas.

Capítulo 6

Módulo de Profundización

6.0.1. Nota histórica sobre funciones matemáticas

El concepto de función matemática se ha enriquecido con el tiempo. En sus inicios se hacía referencia a palabras clave como: conteo, correspondencia y dependencia. Fue solo hasta el siglo XVIII que se pudo definir de forma explícita. En la actualidad es entendida como una correspondencia entre elementos de dos o más conjuntos.

Con respecto al avance en cuanto a la matemática, "la evolución del concepto de función se remonta a 4.000 años; 3.700 de estos consisten en anticipaciones. La idea evolucionó durante cerca de 300 años en conexión íntima con problemas de cálculo y análisis"(Kleiner, 1989, p.1).

Tiempo atrás, se hacía uso de estrategias para la distribución de tierras como en el caso de los Egipcios cuando el rio Nilo inundaba sus terrenos. Estos usaron el triángulo rectángulo para redistribuir sus tierras cuando la inundación hacía desaparecer las fronteras de sus propiedades; evidencia de la correspondencia entre el tamaño del triángulo usado y el área encerrada.

Se concibe que "la noción de función aparece en el siglo XIV, cuando la matemática empieza a considerarse como la principal herramienta para estudiar los fenómenos naturales" (Cf. Youschkevitch, Dhombres, como se cita en Herrera, 2013, p.2). Ya para la época era necesario explicar la naturaleza con algún modelo o representación matemática. De aquí que, el avance de la matemática esté vinculado con avances en otras ramas de la ciencia, y específicamente con la explicación de fenómenos naturales.

"Fue Leibniz (1646-1716) quien primero usó el término función en 1673". Además, se aduce que "se pueden encontrar ejemplos particulares de funciones en épocas antiguas; por ejemplo, contar, que implica una correspondencia entre un conjunto de objetos dados y una secuencia

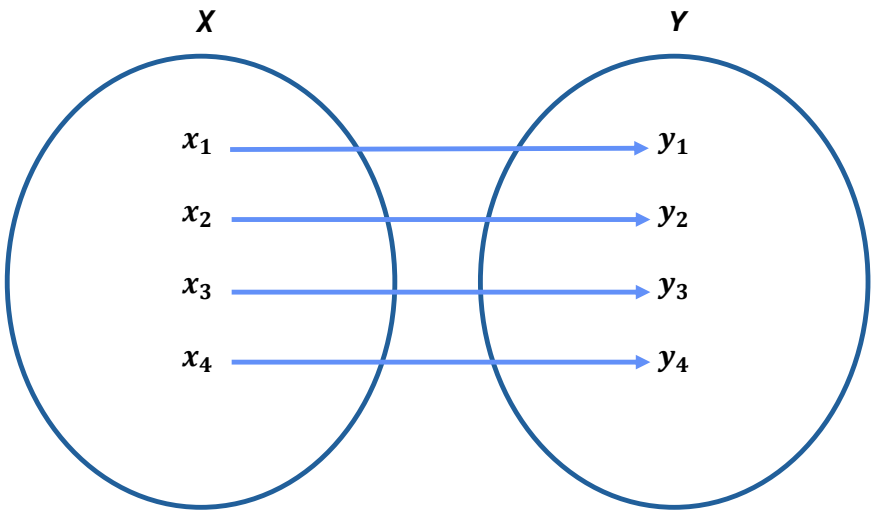


Figura 6.1: Representación conjuntista de una función biyectiva.

de números para contar" (Ponte, 1992, p.1).

En los siglos XVI y XVII, se producen los primeros acercamientos a una definición formal de función matemática. Ya se estaban acuñando los argumentos y herramientas matemáticas necesarias para fundar el cálculo tal como lo conocemos hoy, en cuya intervención directa aparecen Newton y Leibniz y por supuesto, la función matemática.

En los albores del nacimiento del cálculo, aparece Leibniz (1646-1716), usando por primera vez en la historia la palabra "función" (Ponte, 1992, p1.). Bien se sabe que fue Leibniz, junto a Newton, quienes consolidaron las bases del cálculo. Para el siglo XX se presenta un cambio en la forma en cómo se concebía a una función. "Desde 1900 hasta 1920 se introdujeron conceptos como: espacio métrico, espacio topológico, espacio de Hilbert y espacio de Banach. Estos desarrollos condujeron a nuevas definiciones de función basadas en conjuntos arbitrarios que ya no son los números reales" (Vasquez et al., 2008, p.145).

La definición matemática reciente, de una función matemática, se entiende como la correspondencia entre un conjunto de valores de un conjunto de salida y los elementos de un conjunto de llegada. Esta noción aclara que a un mismo valor de x no le puede corresponder más de un valor de y (Leithold, 1998, p.2). El argumento se basa en la característica que estas presentan, y es que su gráfica no puede ser cortada por cada recta vertical más de una vez. Además, esta presenta unos valores para el dominio en el conjunto de partida y unos valores del rango en el conjunto de llegada.

Las funciones matemáticas son usadas en numerosos campos, como en la economía, la contabilidad, la ingeniería, arquitectura, medicina, entre otros. Su aplicación es amplia y permite mejorar la calidad de vida de muchas personas mediante su estudio y aportes matemáticos invaluables. Tanto así que, para la pandemia del covid-19 permitió hacer proyecciones epidemiológicas del número de contagiados en el tiempo y de aquellos momentos en los que se empezaba a normalizar el comportamiento de la pandemia dadas las condiciones geográficas, de salud y condiciones de vida en general.

Objetivo del módulo de profundización

Este módulo se propone como una herramienta para el aprendizaje del concepto de función matemática a través de situaciones problema, ejercicios y ejemplos relacionados.

Se relacionan algunas áreas del conocimiento, como la biología, la matemática y la física. Se encuentran y desarrollan algunos ejemplos de funciones relacionadas con crecimiento poblacional, enfermedades, infracciones en el tránsito vehicular, entre otros. Se hace uso de un lenguaje matemático e intuitivo para fomentar el aprendizaje.

En este se encuentran algunas definiciones acompañadas de sus gráficas. Es importante que al estudiarlas, se pueda comparar la definición con su gráfico. Esto ayuda a reforzar aún más el conocimiento sobre funciones.

Su diseño tiene una estructura inductiva, rigurosa e interactiva. Ofrece ejercicios y situaciones resueltas como guía al alumno. Se propone el uso de herramientas computacionales en algunos apartados para apoyar su desarrollo.

Éxitos en el proceso de aprendizaje.

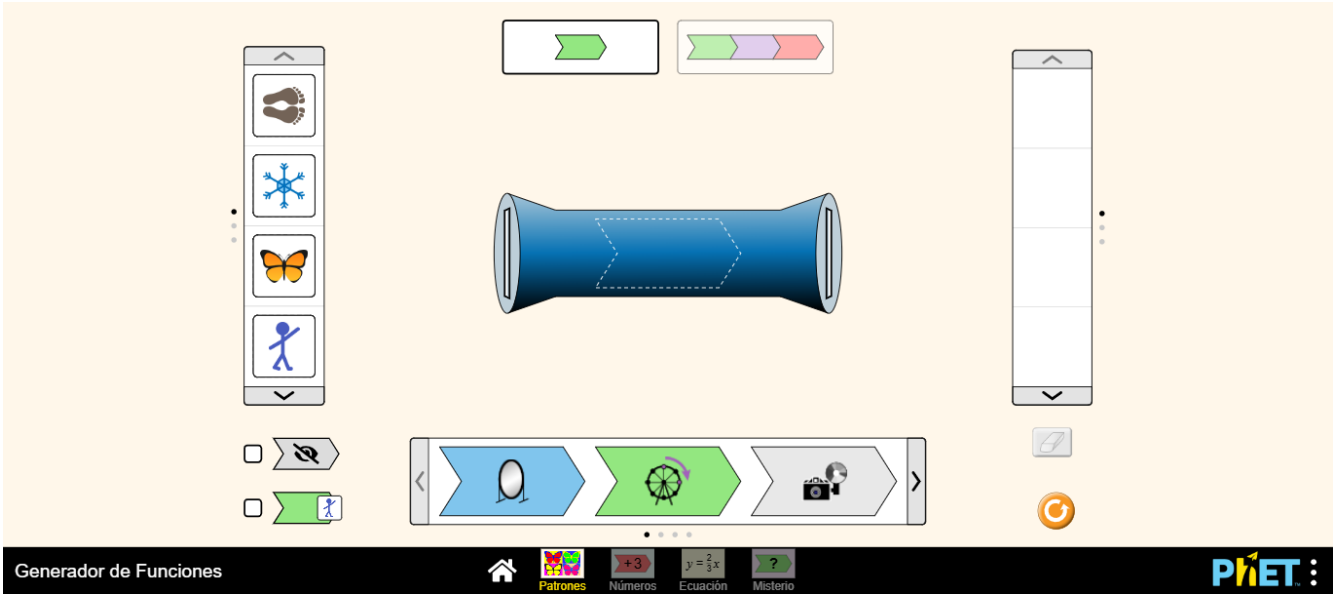


Figura 6.2: Interfaz de phet simulations. PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, https://phet.colorado.edu.

6.0.2. Actividad con Phet Simulations

¡A jugar!

Para iniciar este recorrido por las matemáticas, se propone la siguiente actividad:

1. Ingresa a phet colorado en tu navegador de preferencia.

2. Busca y accede a la actividad llamada generador de funciones.

3. Da click sobre la actividad y selecciona la opción patrones.

4. Interactúa con la página y empieza a generar patrones. La interfaz del simulador virtual que dispone de algunas actividades de acceso libre, debe verse como se indica en la imagen anterior (Fig. 6.2).

5. Explora todas las opciones y aprende cómo se construye un patrón de correspondencia con las imágenes indicadas.

6. Concluye la actividad indicando con 3 conclusiones lo que se puede deducir del juego.

Taller sobre simulación con Phet

De acuerdo a lo observado y teniendo en cuenta los elementos que ofrece la simulación:

1. Predice la posición de la mariposa cuando se le aplica doble giro a la derecha de 45° y la función espejo. Representa a continuación de manera gráfica la solución.

2. Predice la posición de la silueta de hombre cuando se le aplica un giro a la derecha de 45°, la función reflejo y luego la función espejo. Representa a continuación de manera gráfica la solución.

3. Predice la posición del copo de nieve cuando se le aplica un giro a la derecha de 45°, la función espejo y luego la función de giro a la derecha de 45°. Representa a continuación de manera gráfica la solución.

Corrobora las soluciones con la simulación. Esta se encarga de inducir a los estudiantes a la comprensión de funciones mediante el uso de rotaciones, reflexiones y traslaciones de figuras, ilustrando con ello el funcionamiento del concepto de estudio en este módulo e incentivando a su aprendizaje y profundización.

6.0.3. Taller diagnóstico

¡Ponte a prueba!

Se propone para iniciar este módulo, desarrollar la siguiente lista de ejercicios y situaciones a manera de taller diagnóstico. Antes de abordar el concepto de función matemática, se sugiere tener buenas bases en álgebra y matemáticas básicas. Esto permite entender de mejor manera el nuevo lenguaje que se incorpora en este módulo de profundización.

1. Si 20 = $\frac{5}{2}x$ - $\frac{2}{4}x$, el valor de x es:

2. Un repartidor de pizza usa $\frac{5}{12}$ de su tiempo para repartir pizza en un lugar A, el resto para repartir pizza en un lugar B. Indique mediante fracciones la razón del tiempo usado en el lugar A con respecto al tiempo usado en el lugar B.

3. Resuelva la operación $(-3 + 2/6{,}5 - 34/17)$.

4. Simplifique la expresión (x^2 - 1)/($x - 1$).

5. Aplicando logaritmación despeje una expresión para x en la ecuación $y = 3^x$.

6. Si A = {1,2,3} y B = {2,3,4,6}, la intersección de A y B está dada por el conjunto:

7. Un velocista recorre 1,2 metros cada segundo en una hora completa. ¿Durante los primeros 49 segundos su velocidad es la misma?

8. Elabore una tabla comparativa para los primeros casos de factorización, dando un ejemplo y su definición.

9. Un grifo suelta agua de manera inconstante mediante la expresión x^2 - 1. Donde x es el tiempo en segundos. Para los primeros 5 segundos indique la cantidad de agua que sale del grifo.

10. Racionalice la expresión $\frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

6.0.4. Definición de par ordenado

Par ordenado

Un par ordenado consta de dos elementos. Un elemento x, que pertenece a un conjunto X de números reales y un elemento y perteneciente a un conjunto Y de números reales, en donde x es el primer elemento y y el segundo. El par ordenado se define por el par de valores

$$(x, y)$$

Los pares ordenados son resultado del producto cartesiano de X y Y, $X \times Y$. Este producto cartesiano se define a continuación:

"Dados dos conjuntos X y Y, se llama conjunto producto de X y Y al conjunto de todos los pares ordenados (x,y) con $x \in X \wedge y \in Y$. Se le denota por $X \times Y$, que se lee «X cruz Y». Más brevemente $X \times Y = \{(x, y) / x \in X, y \in Y\}$" (Lipschutz, 1970, p.66).

Ejemplo 1: $(1, 2)$. ¿Cómo representar el anterior par ordenado? Para ubicar el par ordenado se debe hacer un desplazamiento desde el origen $(0, 0)$ una unidad hacia la derecha y luego dos unidades hacia arriba. El par ordenado $(1, 2)$ corresponde al punto que se logra obtener con estos dos movimientos.

Nota: Los pares ordenados se representan con un punto en el plano cartesiano. Se pueden representar de forma gráfica usando el eje x y el eje y.

Situación problema 1

Un juego de Xbox implementa un conjunto de códigos para mover a un jugador de un punto dado a otro en el juego. Este requiere del uso de las siguientes indicaciones:

a. Para desplazarse hacia abajo una vez se resta 1 al segundo valor del par (x, y).
b. Para desplazarse hacia la derecha una vez se suma 1 al primer valor del par (x, y).
c. Para desplazarse hacia la izquierda 1 vez se resta 1 al primer valor del par (x, y).
d. Para desplazarse hacia arriba una vez se suma 1 al segundo valor del par (x, y).

Si un jugador se mueve a la derecha dos veces desde la posición (1,1) y luego se mueve hacia arriba 1 vez, ¿cuál es el par ordenado que representa la posición del jugador?

Solución

1. Como la posición inicial es (1,1), moverse hacia la derecha dos veces significa sumar dos veces 1 al primer valor de (x, y); que es $x = 1$. Luego $x_1 = 1 + 2.(1) = 3$.

2. La posición actual es $(x_1, y) = (3, 1)$. Luego se debe avanzar hacia arriba una vez. Se suma 1 al valor $y = 1$. Esto arroja el valor $y_1 = y + 1 = 1 + 1 = 2$.

3. La posición final del jugador está representado por el par ordenado $(x_1, y_1) = (3, 2)$.

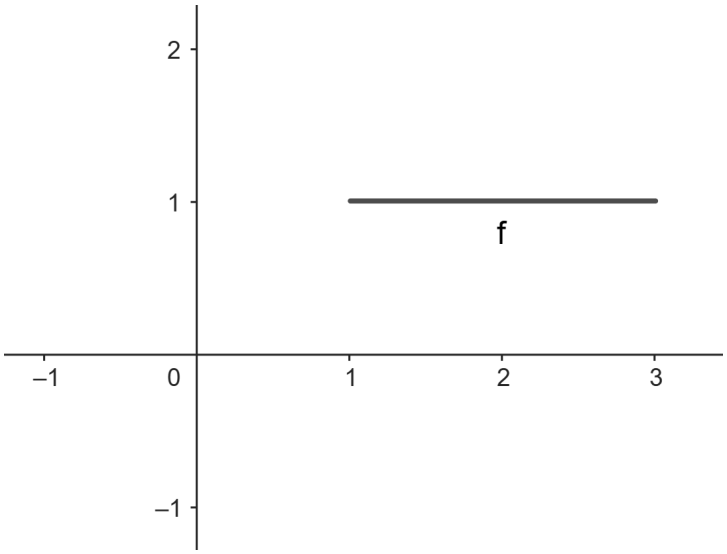


Figura 6.3: Camino f código xbox.

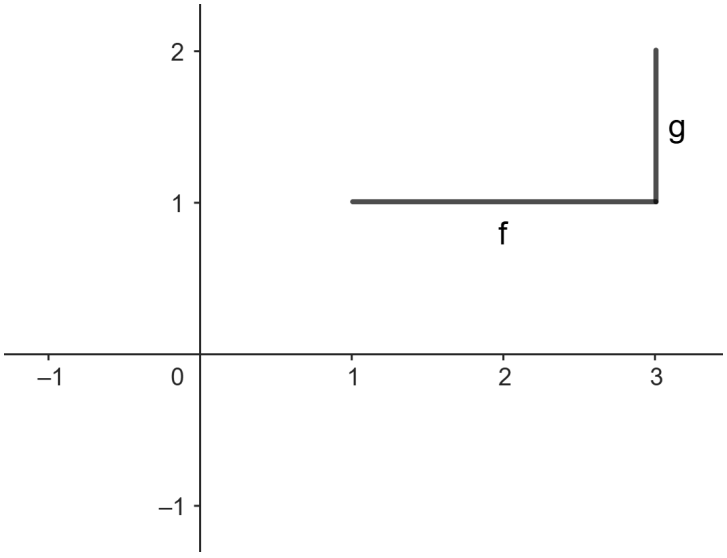


Figura 6.4: Camino f-g código xbox.

6.0.5. Situaciones problema pares ordenados

Situación problema 1

Un jugador de batalla naval, requiere conocer la ubicación exacta de uno de los barcos de su oponente. El jugador ya ha impactado al barco en la posición (1,4). Si el barco ocupa 4 casillas del tablero y está ubicado en posición vertical desde la posición (1,4) hacia abajo, ¿cuáles son los pares ordenados restantes?

Nota: batalla naval es un juego en el que se hace uso de pares ordenados para ubicar y atacar barcos. Su uso fortalece el manejo del concepto mencionado en el plano cartesiano. Cada jugador ubica sus barcos a espaldas de su contrincante; el oponente ataca adivinando las coordenadas en los que se ubican los barcos del contrincante.

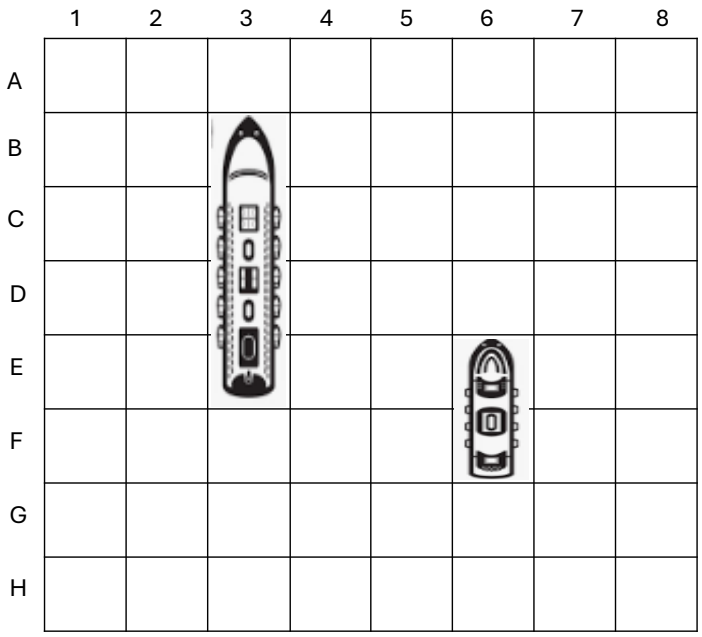


Figura 6.5: Gráfico de un tablero de batalla naval.

Explicación gráfico de un tablero de batalla naval

En el anterior ejemplo, el barco de la izquierda ocupa las casillas (3,B), (3,C); (3,D); (3,E) y el de la derecha las casillas (6,E); (6,F).

Cada jugador dispone de dos tableros iguales, en uno registra las coordenadas de los ataques y en el otro ubica sus barcos.

Es un juego de azar y de estrategia, lo importante es saber jugar con los ataques realizados al oponente. Usualmente se juega con más de dos barcos. Cada jugador tiene un turno en cada ronda. Gana quien primero derribe los barcos del oponente.

Nota curiosa

Sabías que.... El juego de batalla naval tiene que ver con la probabilidad. Cuánto más avance el juego, más fácil es hacer predicciones de la ubicación exacta de los barcos del oponente.

Solución situación problema 1

En este espacio se debe diseñar un tablero de batalla naval, para encontrar las coordenadas restantes, según las indicaciones dadas.

Situación problema 2

Una colonia de bacterias cambia de manera creciente en el tiempo . Un estudiante intenta representar este crecimiento mediante una gráfica, pero está algo confundido. El sabe que para representar este crecimiento necesita ubicar unos puntos en el plano cartesiano y después de esto, unir los puntos para formar una gráfica. Se sabe que el eje y representa la población de bacterias y que el eje x representa el tiempo transcurrido en días. Este crecimiento de bacterias expuesto está representado por los siguientes valores en el plano cartesiano:

x **(tiempo (días))**	y **(población(miles))**
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

1. ¿Cuál es la gráfica de este crecimiento poblacional? **Completa los datos del gráfico de crecimiento poblacional de bacterias en la siguiente página, haciendo uso de la herramienta Desmos; ingresa en google a dicha herramienta y en la pestaña de búsqueda ingresa la expresión $y = x^2$, (esta expresión para valores enteros positivos representa la anterior tabla desde el valor $x = 1$ hasta el valor $x = 5$. Asigna los valores de los pares ordenados donde correspondan en la gráfica y ubica adecuadamente los títulos a los ejes x y y. El eje x para este módulo se ubica en el eje horizontal y el eje y será el eje vertical en cualquiera de las gráficas mostradas.**

2. Según la gráfica y los datos de la tabla anterior, el número de bacterias del día x está dado por x^2 para x mayores a 0. Dar una explicación del por qué esta es una expresión válida para encontrar la población en el día x, usando los datos suministrados.

Solución situación problema 2 (pregunta 2)

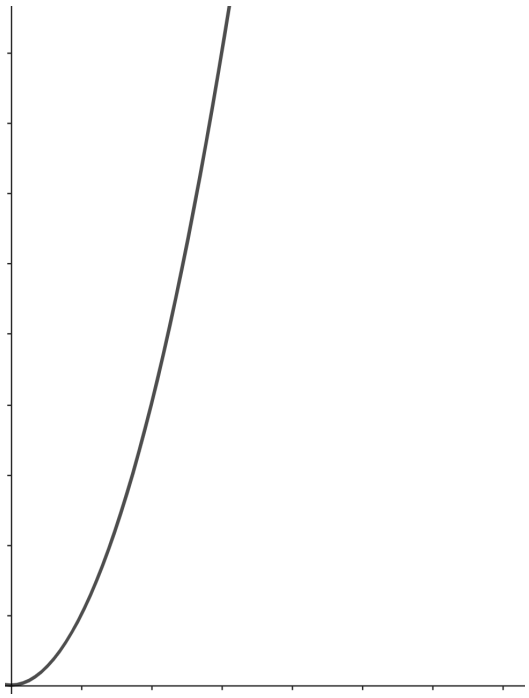


Figura 6.6: Función de crecimiento poblacional de bacterias.

Situación problema 3

Los siguientes datos representan el crecimiento poblacional de un grupo de hongos.
Se tiene una tabla con el tiempo en días y la población en miles:

x **(tiempo (días))**	y **(población (miles))**
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243

1. Por medio de pares ordenados representa los anteriores datos, basado en la definición de par ordenado. El primer par ordenado es $(1, 3)$.

2. Elabora una gráfica que represente el crecimiento poblacional de hongos basado en los datos suministrados. Interpreta y explica el comportamiento de la gráfica.

Solución situación problema 3

1.

2.

Situación problema 4

Un explorador desea conocer la ruta secreta a un bosque. En el mapa del bosque aparecen las siguientes coordenadas: (-2,3); (-3,4); (-4,5) y (-5,6).

1. ¿Cuál sería la ruta a seguir, si la coordenada 1 es el punto de salida y la coordenada 4 es el punto de llegada?

2. Al unir los puntos ¿qué gráfico se forma? Representar con un gráfico en el plano cartesiano.

Solución situación problema 4

1.

2.

Nota curiosa

Sabías que.... Los pares ordenados son fundamentales en la explicación de fenómenos naturales que relacionen dos variables, como el tiempo y la intensidad de un sismo. De hecho se usan en múltiples áreas, como en la Biología, Química y Geología. En Biología, solo por ilustrar, se hacen predicciones probabilísticas de poblaciones reales de distintas especies con pares ordenados para comparar el crecimiento o decrecimiento de una u otra especie.

Situación problema 5

Un diseñador gráfico debe elaborar un círculo en un programa llamado Geogebra. Debe costruirlo usando el plano cartesiano y la opción para diseñar un círculo.

1. Si el círculo es de radio 1, ¿cuál sería su gráfico? Adjunte la solución gráfica ingresando a Geogebra en línea, asignando por lo menos cuatro pares ordenados contenidos en dicha figura. La solución gráfica debe ser similar al círculo que se representa en esta página.

2. Según el gráfico, dar 2 valores de x que se repitan más de una vez en los pares ordenados contenidos en dicho círculo.

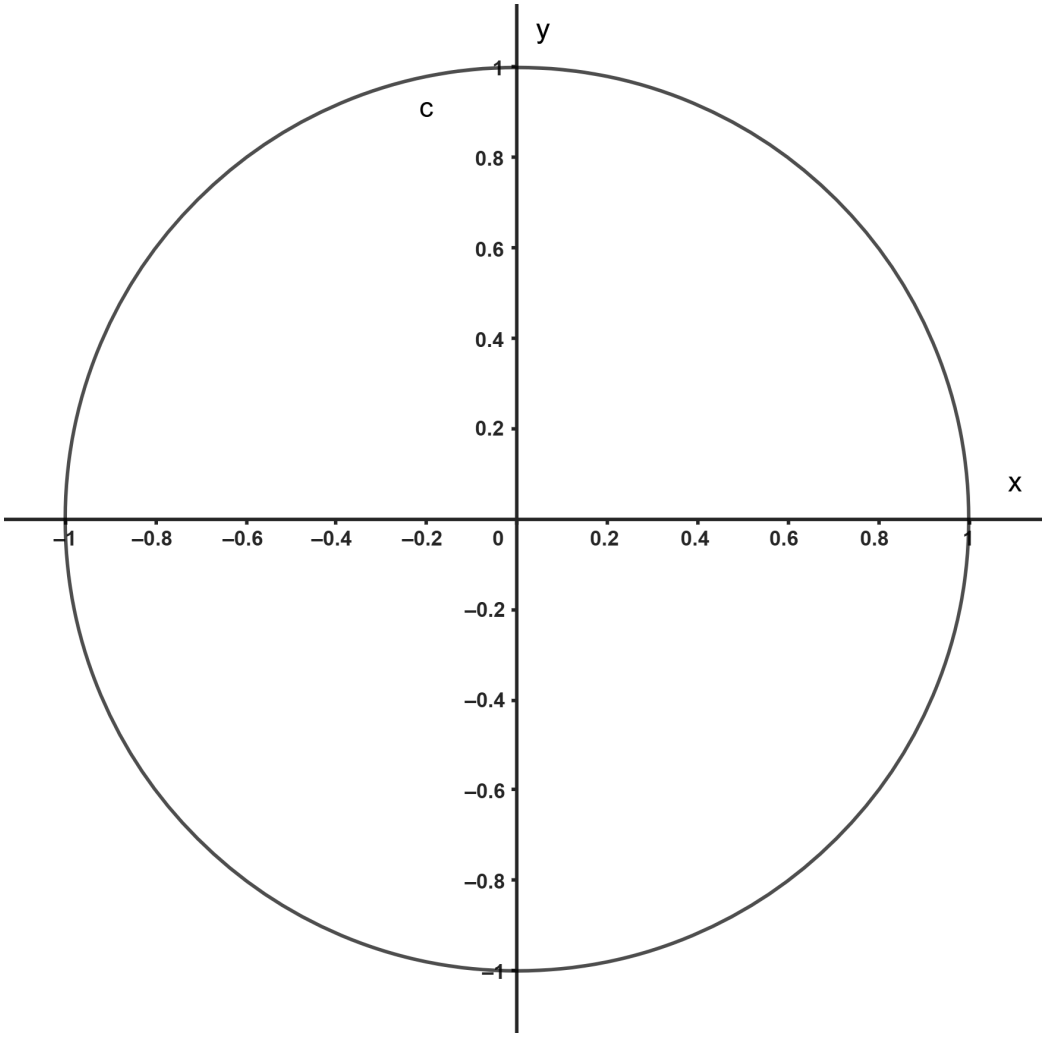


Figura 6.7: Gráfico de una círculo de radio 1.

Solución situación problema 5

1.

2.

Nota curiosa

Sabías que.... En la actualidad se pueden estudiar pares ordenados de la mano de la programación y robótica, dos campos interesantes por explorar, comprender y aplicar. El diseño de programas computacionales y de videojuegos, por mencionar algunos, son dos claros ejemplos que permiten comprender qué tan pertinente y aplicada puede ser la matemática expuesta hasta ahora en entornos digitales.

6.0.6. Definición- Relación Matemática.

Relación Matemática

Relación matemática:

"Una relación R consiste en lo siguiente: un conjunto X, un conjunto Y, un enunciado formal $P(a,b)$ tal que $P(x,y)$ es verdadero o falso para todo par ordenado (x,y) de $X \times Y$ " (Lipschutz, 1970, p.81).

Una relación matemática es una correspondencia entre dos conjuntos. Su representación es mediante pares ordenados, formando de esta manera un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos iniciales. Es el caso de la relación para un semicírculo de radio 1 con centro en (0,0) y con valores de x no negativos; se puede clasificar como una relación matemática puesto que se puede representar con un subconjunto del producto cartesiano de los conjuntos iniciales y con pares ordenados de números reales.

Ejemplo 1: Se tienen algunos valores (x,y) para una círculo de radio 0,5, se desconocen los demás pares ordenados y su gráfica.

x	y
0,5	0
0	0,5
-0,5	0
0	-0,5

La relación matemática obtenida para los anteriores pares ordenados estaría definida por:

$$B = \{(0,5;0), (0;0,5), (-0,5;0), (0;-0,5)\}$$

Nota: En una relación matemática x puede tener más de un valor en y.

6.0.7. Situaciones problema- Relaciones Matemáticas

Situación problema 1

Se tienen los primeros números primos y sus cubos escritos en la siguiente tabla:

x **(número primo p)**	y **(cubo de p)**
2	8
3	27
5	125
7	343
11	1331

La relación matemática obtenida para los números primos y sus cubos (un número primo es un número natural divisible únicamente por sí mismo y por el número natural 1) estaría definida por: $A = \{(2,8),(3,27),(5,125),(7,343),(11,1331)\}$ con $p \in \{2,3,5,7,11\}$. Justifique por qué los anteriores son pares ordenados de la relación matemática mostrada.

Solución situación problema 1

1. **Respuesta:** los anteriores son pares ordenados de la relación matemática, puesto que son los valores (x,y) que se corresponden con la regla de que x sea el número primo p y y el cubo del número primo p.

2. Represente gráficamente la relación matemática anterior usando los pares ordenados que se indican.

Situación problema 2

Una máquina procesadora de papel selecciona y desecha una cantidad de papel cada hora dependiendo de los errores que detecte en las impresiones de una publicidad. Cada hora se registra la información de papel defectuoso de la siguiente manera:

x **(tiempo (horas))**	y **(hojas defectuosas (miles))**
1	0,04
2	0,03
3	0,032
4	0,04
5	0,09
6	0,08
7	0,04

Se debe elaborar una gráfica que muestre si la anterior información corresponde o no a una relación matemática.

Nota curiosa

Sabías que.... Las empresas usan relaciones matemáticas a diario para comparar y analizar sus procesos. La eficiencia de sus servicios está en juego todos los días con el uso de estas.

Solución situación problema 2

1. Representar gráficamente la anterior relación, explicando con pares ordenados por qué la anterior es una relación matemática.

Situación problema 3

En el barrio Belén, en la ciudad de Medellín, se ubica una cámara en una de sus calles. El número de infractores de las normas de tránsito aumentan con el tiempo, de manera que a las 5 pm es la hora en la que más se presentan infracciones, decayendo ya con la tarde-noche.

x **(tiempo (horas))**	y **(número de infracciones)**
07:00 am	10
08:00 am	11
09:00 am	12
10:00 am	14
11:00 am	15
12:00 pm	23
01:00 pm	24
02:00 pm	25
03:00 pm	27
04:00 pm	27
05:00 pm	28
06:00 pm	21
07:00 pm	18

Solución situación problema 3

1. La anterior es una relación matemática que describe un comportamiento variable, dependiente de la accidentalidad, el clima, la hora del día y la época del año. ¿Por qué es posible comparar tiempo y el número de infracciones si hay más de dos variables en esta situación?

2. Haga predicciones para el número de infracciones basado en los datos a las 5:30 pm y las 6:20 pm.

Situación problema 4

Una colonia de abejas se encuentra ubicada en lo alto de un árbol. Una campaña ambiental ha decidido estudiarlas durante un rango de tiempo de 10 días mediante análisis computacional y con sensores, encontrando que, a mayor número de días menor número de individuos. El estudio lanzó los siguientes resultados para cada uno de los días.

x **(tiempo (días))**	y **(número de individuos (miles))**
1	1,9
2	1,87
3	1,865
4	1,85
5	1,8
6	1,75
7	1,70
8	1,689
9	1,58
10	1,52

Se requiere hacer algunas predicciones a futuro sobre el comportamiento de dicha población.

Solución situación problema 4

1. Hacer dos predicciones a futuro sobre el número de abejas según el número de días, usando una gráfica.

Ejercicio gráfico 1 de relaciones matemáticas

Observe con atención las siguientes gráficas:

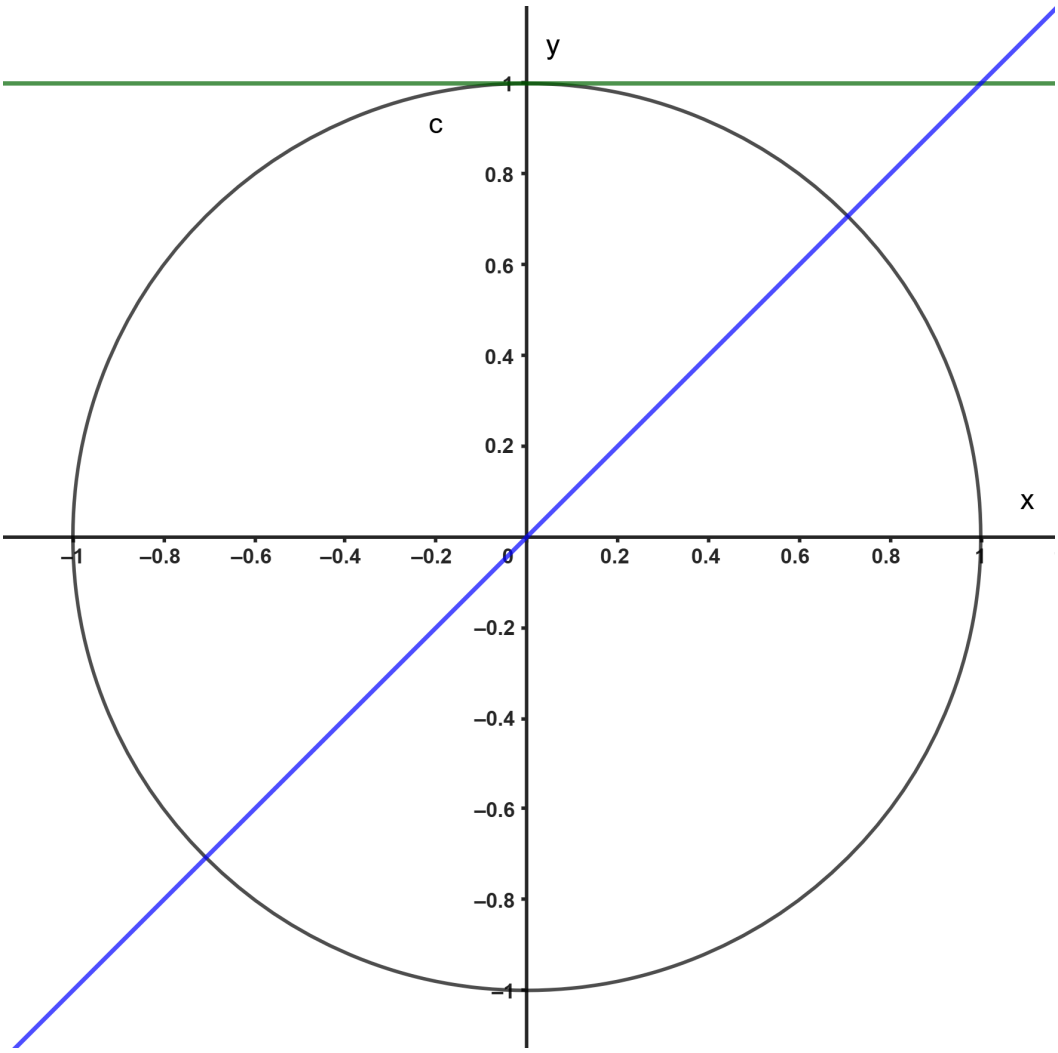


Figura 6.8: Gráficas de relaciones matemáticas.

Solución

1. De las gráficas anteriores, ¿cuáles representan una relación matemática? Justifique.

Respuesta: al analizar las gráficas, se puede concluir lo siguiente:

Todas son relaciones matemáticas. En el caso del círculo, se encuentra más de un valor en y para un mismo valor x, cosa que no ocurrirá nunca en funciones matemáticas, (más adelante se explica). Las dos líneas rectas, con sus gráficas azul y verde, tienen valores (x, y) que se corresponden de forma exclusiva, como ocurre en algunas relaciones matemáticas y como se verá que sucede en las funciones matemáticas; a x le corresponde a lo sumo un único valor en y.

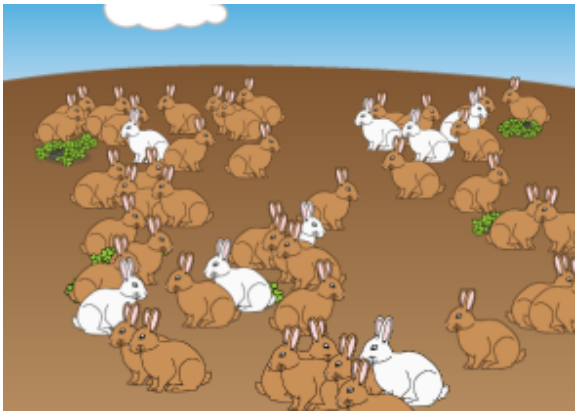


Figura 6.9: Interfaz de phet simulations-selección natural. PhET Interactive Simulations, University of Colorado Boulder, https://phet.colorado.edu.

¡A crear!

Para continuar este recorrido por las matemáticas, se propone la siguiente actividad:

1. En la gráfica anterior se evidencia el crecimiento poblacional de un conjunto de conejos.

2. Este comportamiento de crecimiento poblacional es muy común en poblaciones; en algunas es mucho más notorio dicho crecimiento, dependiendo de condiciones ambientales, geográficas y de accesibilidad a recursos básicos para la supervivencia.

3. Para una población de 987 conejos que se duplica cada 15 días durante un trimestre: elaborar una tabla de valores que contenga la población inicial y las poblaciones siguientes con su tiempo respectivo.

4. Representa con un gráfico la anterior situación asignando al eje x el tiempo y al eje y la cantidad de conejos que hay en un tiempo dado.

5. Extrae 3 conclusiones de la situación anterior.

6.0.8. Definición-Función Matemática.

Función matemática

Definición de función:

"Una función f puede considerarse como una correspondencia de un conjunto X de números reales x a un conjunto Y de números reales y, donde el número y es único para cada valor específico de x " (Leithold, 1998, p.2). En otras palabras "una función es un conjunto de pares ordenados de números (x, y) en los que no existen dos pares ordenados diferentes con el mismo primer número" (Leithold, 1998, p.4).

Nota aclaratoria: en una función matemática a cada valor x en X le corresponde un único valor y en Y.

Dominio de una función: "para cualquier función $f : X \to Y$ el conjunto de todos los valores de $x \in X$ para los cuales existe un $y \in Y$ tal que $y = f(x)$ se denomina el dominio de f y se denotará por: $dom(f)$ " (Stewart, s.f, p.214).
Ejemplo: para la función $f(x) = 3.x$, el dominio está compuesto por todos los números reales; todos los valores posibles del conjunto X contenidos en R se pueden evaluar en f haciendo que la función exista y esté definida en todos los valores.

Rango de una función: "para cualquier función $f : X \to Y$ el conjunto de todos los valores que se obtienen por medio de la función se denomina rango, imagen o recorrido de f y se denota por: $ran(f)$ " (Stewart, s.f, p.214).
Ejemplo: para la función $f(x) = 5$, el rango está compuesto por el número 5; al evaluar la función el único valor posible de $f(x)$ es el número 5.

Ejemplo 1: Se tienen los primeros números naturales y sus cuadrados escritos en una tabla, de la siguiente forma:

x **(número natural)**	y **(cuadrado del número natural)**
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

Función Matemática

La anterior tabla muestra mediante los pares ordenados:

$$A = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16),(5,25)\}$$

la función matemática de los primeros 5 números naturales (siendo los números naturales un subconjunto de números reales, compuesto por números enteros positivos) y sus cuadrados.

Nota: En esta función, los valores de x corresponden a los primeros 5 números naturales; los valores de y corresponden a los cuadrados de dichos números naturales. Los elementos de X solo tienen un valor en Y. La función anterior se puede escribir como

$$y = f(x) = x^2$$

$$x \in \{1,2,3,4,5\}$$

A continuación se ilustra mediante una tabla, la función "los primeros 5 cuadrados de los números naturales", acompañada de sus pares ordenados. Se hace reemplazo directo de los valores de x en la función para arrojar con esto los valores de $y = f(x)$.

x	$f(x)$	x^2	y	(x,y)
1	f(1)	1^2	1	(1,1)
2	f(2)	2^2	4	(2,4)
3	f(3)	3^2	9	(3,9)
4	f(4)	4^2	16	(4,16)
5	f(5)	5^2	25	(5,25)

Cada valor de x se ingresa a f; $f(x)$ es el cuadrado de x o x^2. Este ejemplo ilustra que, una función matemática es una (especie de máquina), en la que ingresas un valor y esta arroja un resultado.

El dominio de esta función está compuesto por

$$dom(f) = \{1,2,3,4,5\}$$

y **el rango** es

$$ran(f) = \{1,4,9,16,25\}$$

6.0.9. Rango y dominio de funciones.

¿Cómo se halla el rango y dominio de una función?

Para hallar el rango y dominio de una función f, se aclaran en esta sección dos maneras de hacerlo: una gráfica y otra analítica.

Forma gráfica: consiste en analizar los puntos de la gráfica de la función f en los que esta existe, es decir, aquellos valores que toma del conjunto X y del conjunto Y. Con esto se declaran los valores del dominio en X y del rango en Y.

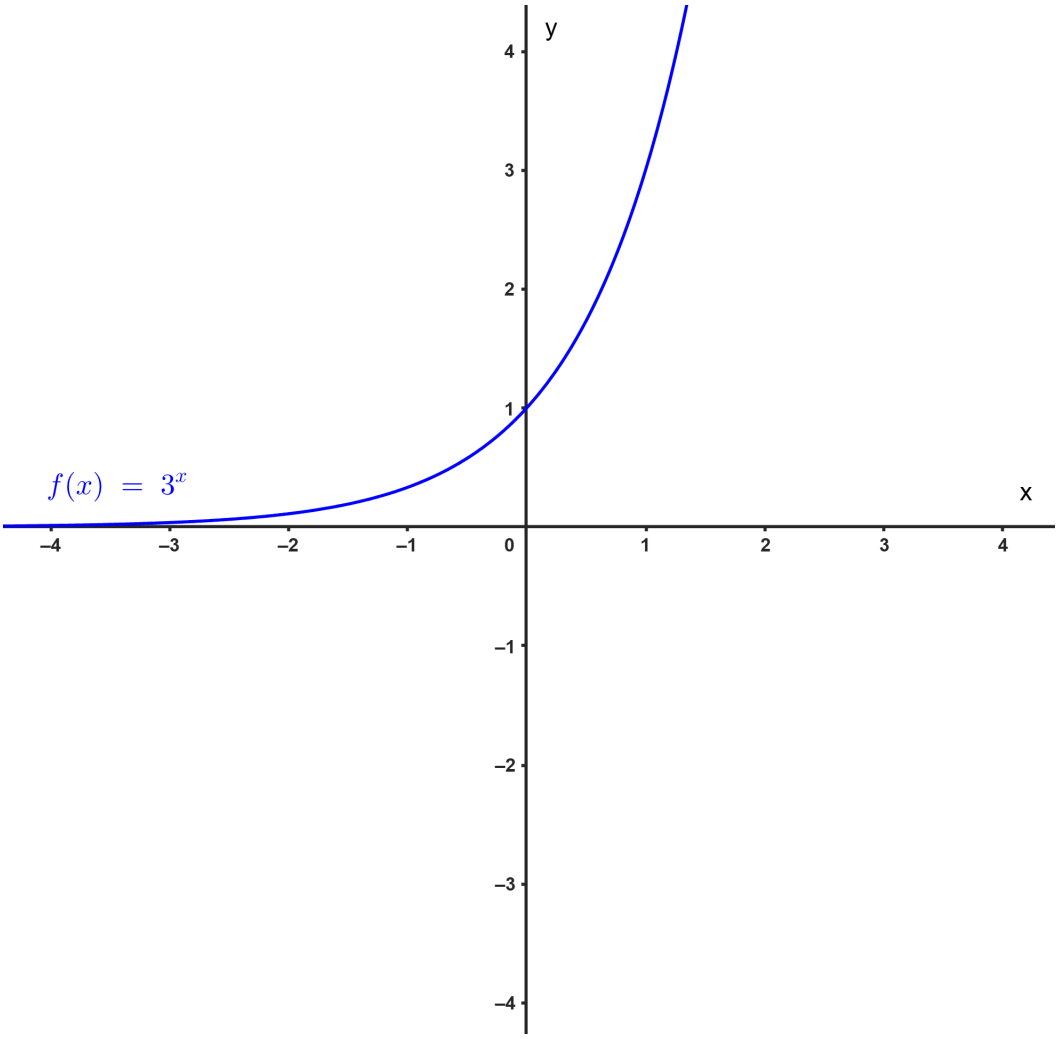


Figura 6.10: Gráfico de una función exponencial 3^x.

Forma gráfica

En la anterior gráfica de la función $f(x) = 3^x$, se deben analizar los valores que esta toma en cuenta de X para hallar su dominio y de Y para hallar su rango.

Puesto que el eje x en este módulo se representa con el eje horizontal, se puede mostrar de forma gráfica que los valores del **dominio** de la función son aquellos valores que van desde $-\infty$ hacia $+\infty$. El dominio es $dom(f) = (-\infty,+\infty)$. Los paréntesis significan que $-\infty$ y $+\infty$ no se toman para el dominio de la función.

Para hallar el **rango** se observan los valores que se toman de Y y se demuestra que existen unos valores que la función (f) toma del eje vertical, estos son los valores que van desde el 0 en adelante tendiendo a $+\infty$. El rango es $ran(f) = (0,+\infty)$.

¿Cómo hallar el rango y dominio de una función?

Forma analítica: para hallar el rango y dominio de una función f de forma analítica se debe trabajar con operaciones algebraicas y operaciones matemáticas básicas, garantizando que la función esté definida en ciertos puntos y que esta exista.

Para el **dominio** de la función se comprueba qué valores se pueden tomar del subconjunto X, garantizando que la función exista con los valores de x en R.

Hay una lista de operaciones prohibidas que se deben tener en consideración cuando se busque el dominio. Ejemplos:

$6/0$. Dividir por cero.
$0/0$. Cero dividido cero.
$\sqrt{-7}$. Raíces negativas.
$\log -3$. Logaritmo de números negativos.

Para el **rango** de la función se determinan qué valores $f(x)$ toma la función del conjunto Y. Se puede realizar mediante procedimientos matemáticos despejando el valor de x de la función f, buscando los valores que se pueden tomar en la nueva expresión matemática obtenida. Al hacer esto se debe evitar llegar a las operaciones prohibidas enunciadas hace un momento.

Ejercicio práctico

Indique en cada una de las gráficas presentadas a continuación el dominio y rango, de acuerdo a lo indicado anteriormente. Se debe realizar de forma gráfica el análisis de rango y dominio. Para las gráficas que tienen una tendencia a crecer o decrecer de forma indefinida, notar que aunque parezca que sus gráficas no se extiendan más, estas si lo hacen. Sea el caso de la funciones representadas con f y p respectivamente.

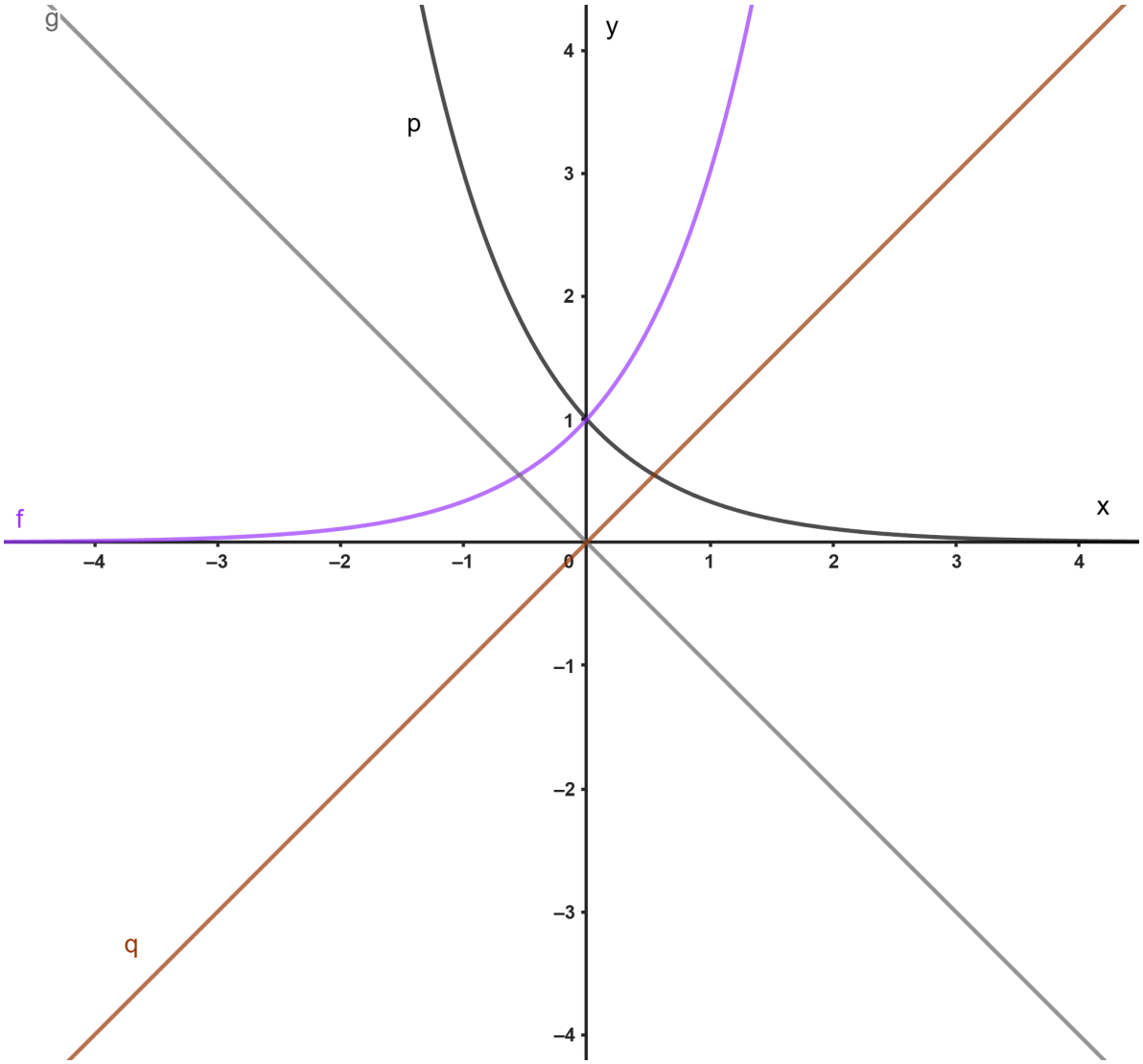


Figura 6.11: Múltiples funciones.

6.0.10. Funciones matemáticas.

Clasificación de funciones

Una forma diferente de definir función sería: "si a cada elemento de un conjunto X se le hace corresponder de algún modo un elemento único de un conjunto Y, se dice que esa correspondencia es una función. Denotando esta correspondencia por f, se escribe $f : X \to Y$ que se lee f es una función de X en Y" (Lipschutz, 1970, p.45). A continuación se presenta una clasificación de las funciones de forma matemática y gráfica.

Función inyectiva

"Una función $f : X \to Y$ se dice inyectiva ó 1 a 1 si para cada $x_1, x_2 \in Dom(f)$ se tiene que $f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$" (Stewart, s.f, p.241).

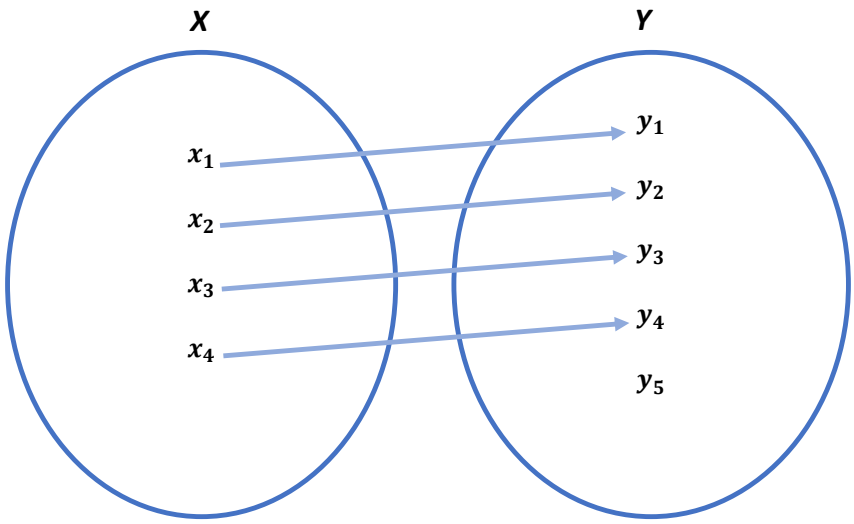


Figura 6.12: Gráfico conjuntista de una función inyectiva.

Función sobreyectiva

"Una función $f : X \to Y$ se dice sobreyectiva si $Ran(f) = Y$. Esto significa que todo elemento y del conjunto Y es la imagen de al menos un elemento x de X " (Stewart, s.f, p.242).

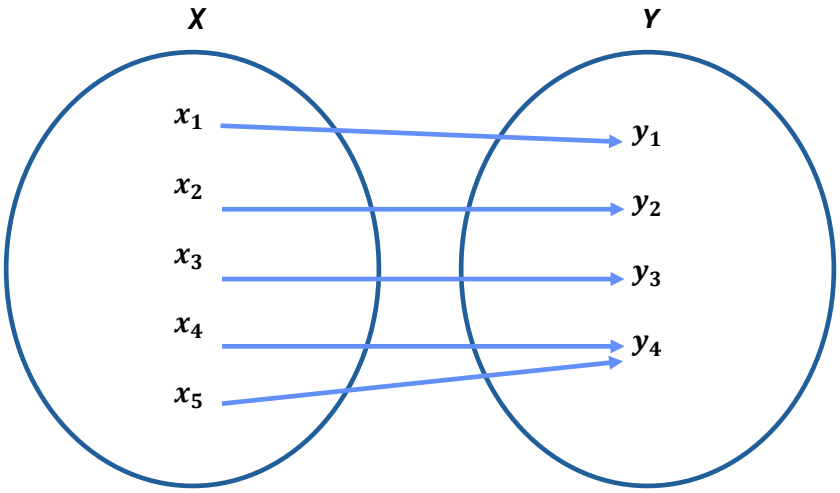


Figura 6.13: Gráfico conjuntista de una función sobreyectiva.

Función biyectiva

Una función $f : X \to Y$ es biyectiva, si es a la vez inyectiva y sobreyectiva.

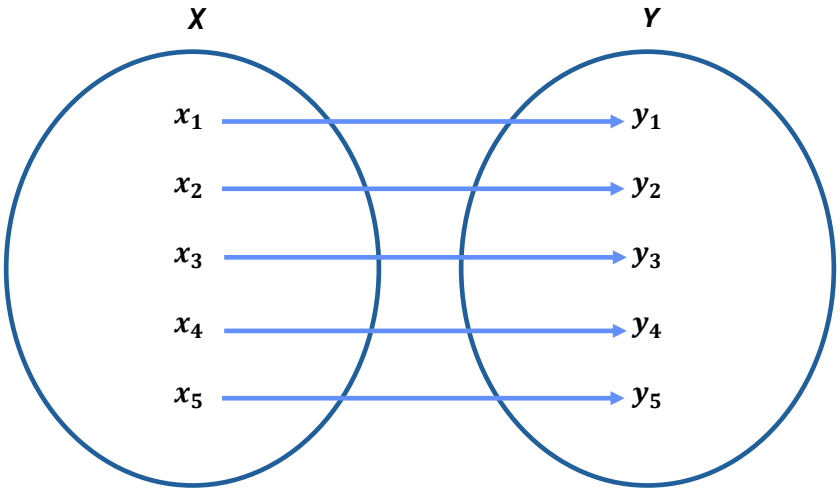


Figura 6.14: Gráfico conjuntista de una función biyectiva.

Ejercicios de clasificación de funciones

A continuación se presentan algunos ejercicios resueltos y sin resolver para repaso de temas.

1. ¿La función $y = 3.x$ es biyectiva? Se toman como rango y dominio todos los números reales.
Respuesta: para que una función sea biyectiva, cada elemento del conjunto de salida debe tener su respectivo elemento del conjunto de llegada, con todos los elementos de Y en R como rango de la función. Al tratarse de una función lineal, como lo es $y = 3.x$, se garantiza que: el rango de la función es el conjunto de llegada, y a cada elemento distinto en X de R le corresponde un elemento diferente de Y. Por lo tanto la función mencionada es biyectiva.

2. ¿La función matemática $y = x/2$ es biyectiva?
Respuesta: la función lineal $y = x/2$ es también biyectiva, por las razones expuestas en el ejercicio número 1.

3. ¿En qué se diferencia una función inyectiva de una sobreyectiva?
Respuesta: se diferencian en algo fundamental, en que la función inyectiva requiere que a cada elemento del conjunto de salida le corresponda un único elemento del conjunto de llegada; pero eso no implica que tenga que tenerse en cuenta todo el conjunto Y como rango de la función. En el caso de la función sobreyectiva el rango es el conjunto Y de números reales.

4. Representar una función inyectiva, una sobreyectiva y una biyectiva diferentes a las vistas, usando gráfico de conjuntos, como se hizo en los ejemplos dados.

5. Una población de habitantes mantiene la misma cantidad de individuos durante un mes. Si la población es de 2.000 habitantes, con $f(t)$ = 2.000 , donde t es número de días, dado que el $dom(f)$ corresponde a los números reales mayores a cero y el $ran(f)$= { 2.000}, ¿esta es una función biyectiva?

Tipos de funciones

Sea $f : X \to Y$, X y Y conjuntos de números reales y $x \in X; y \in Y$. Con estas condiciones se definen las funciones a continuación:

Función constante

Es una función que admite un único valor para f, $f(x) = c$, con c un número real fijo.

Ejemplo: h(x) = 5.

Su gráfica se representa con la letra h.

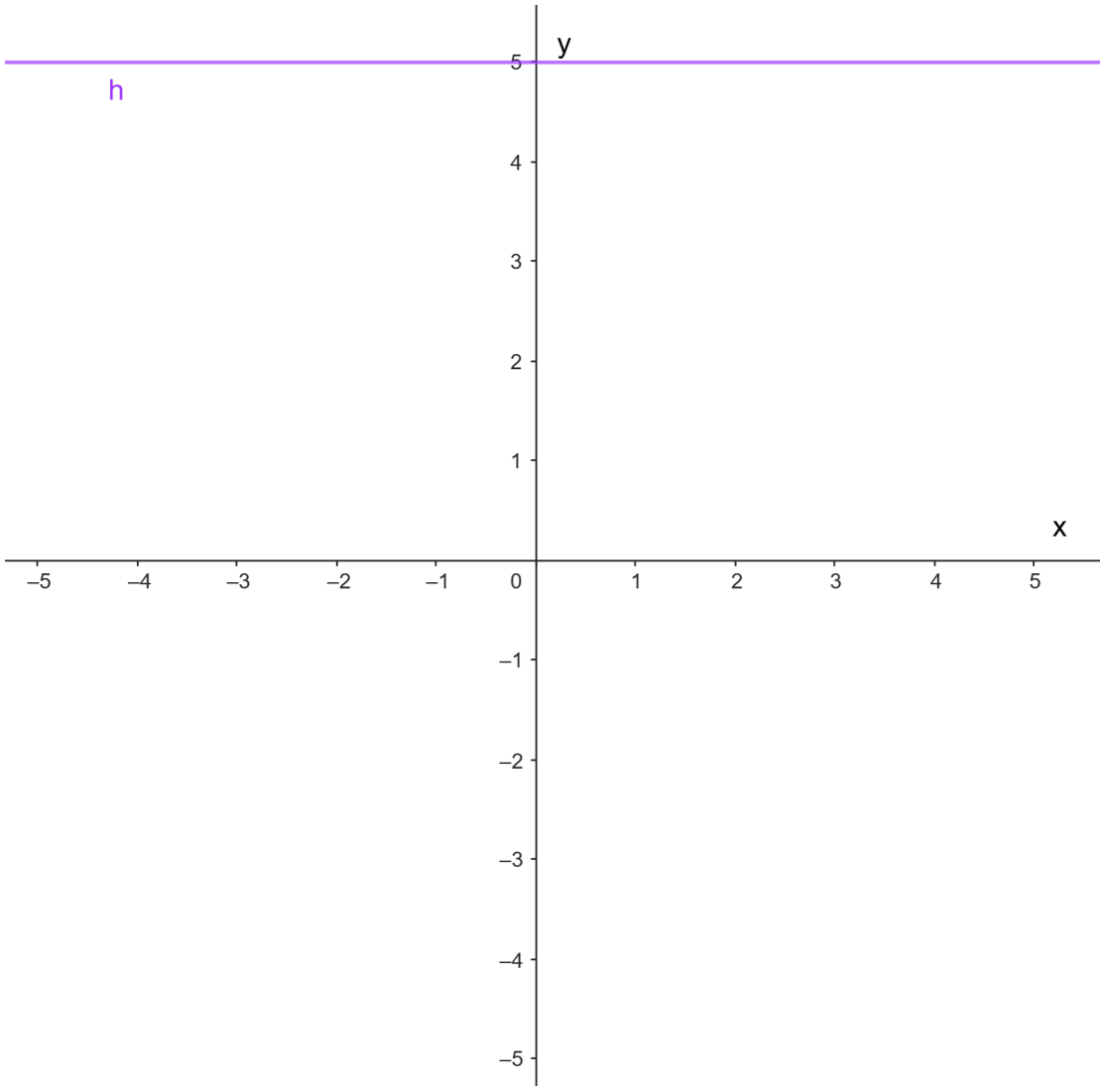


Figura 6.15: Gráfico de una función constante.

Función lineal

Es una función f de la forma $f(x) = a.x + b$ con a perteneciente a los números reales y diferente de cero, b es un número real cualquiera.

Ejemplo: f(x) = $3.x + 4$

Su gráfica se representa con la letra f.

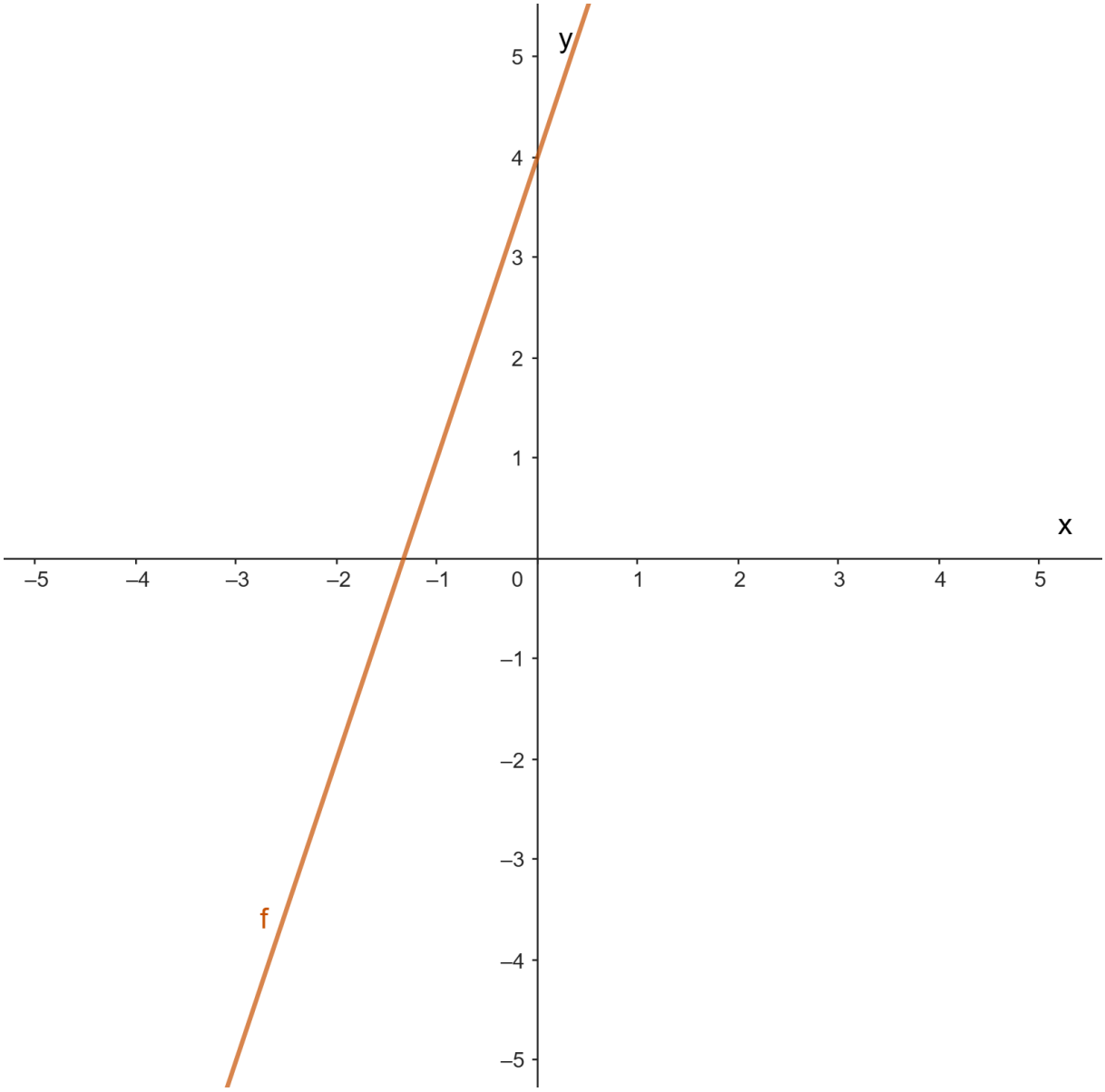


Figura 6.16: Gráfico de una función lineal.

Función cuadrática

Se define a una función cuadrática como una función f de la forma $a.x^2 + b.x + c$, con a un número real diferente de cero y con b y c números reales.

Ejemplo: g(x) = $x^2 + 6.x + 9$

Su gráfica se representa con la letra g.

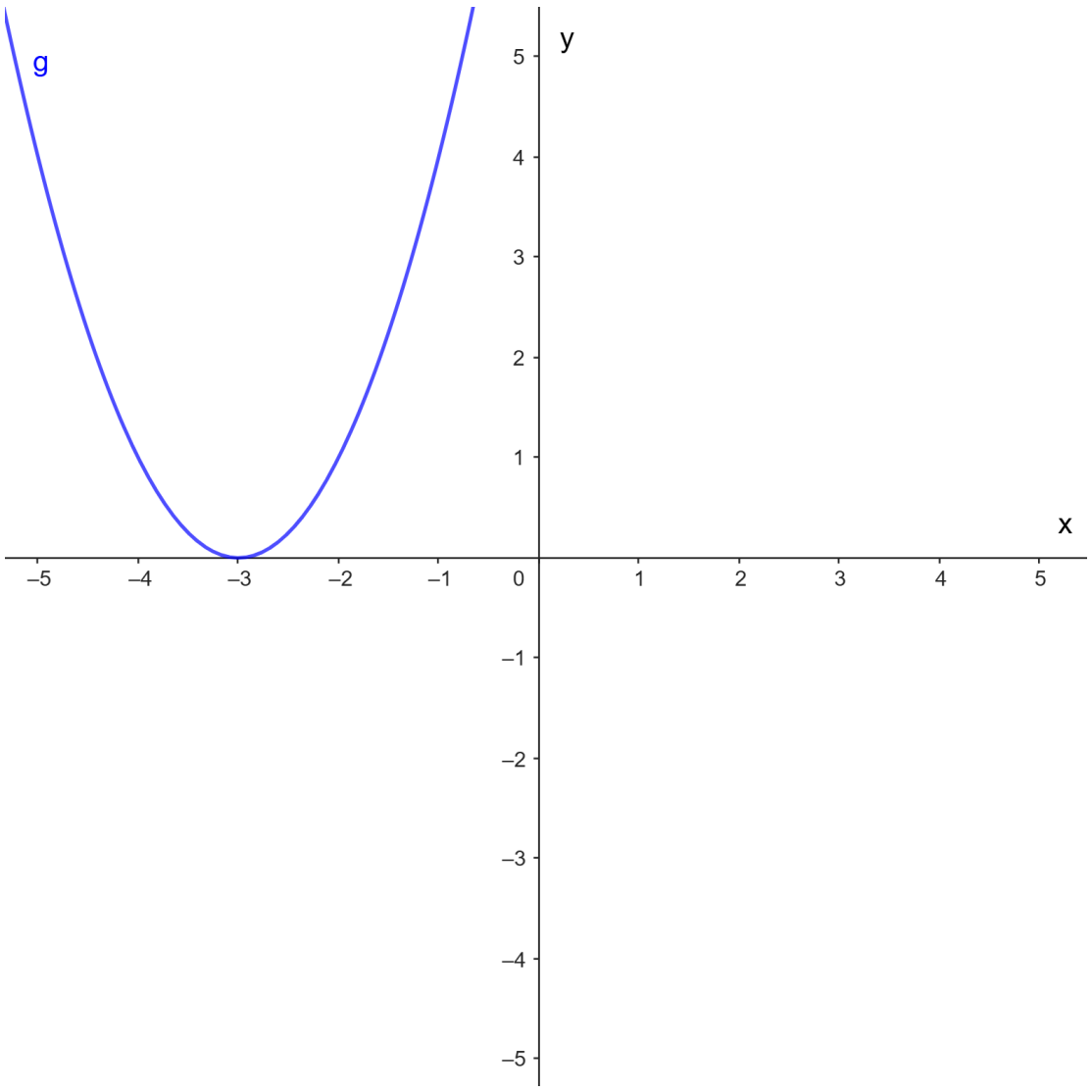


Figura 6.17: Gráfico de una función cuadrática.

Función polinómica

"Una función f es un polinomio si $f(x) = a_n.x^n + a_{n-1}.x^{n-1} + ... + a_1.x + a_0$.
Donde los coeficientes $a_0, a_1...a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos" (Swokowski, 1988, p.44). Nota: a_n es distinto de cero.

Ejemplo: si n =3 entonces r (x) = $3.x^3 + 2.x^2 + x + 2$.
Su gráfica se representa con la letra r.

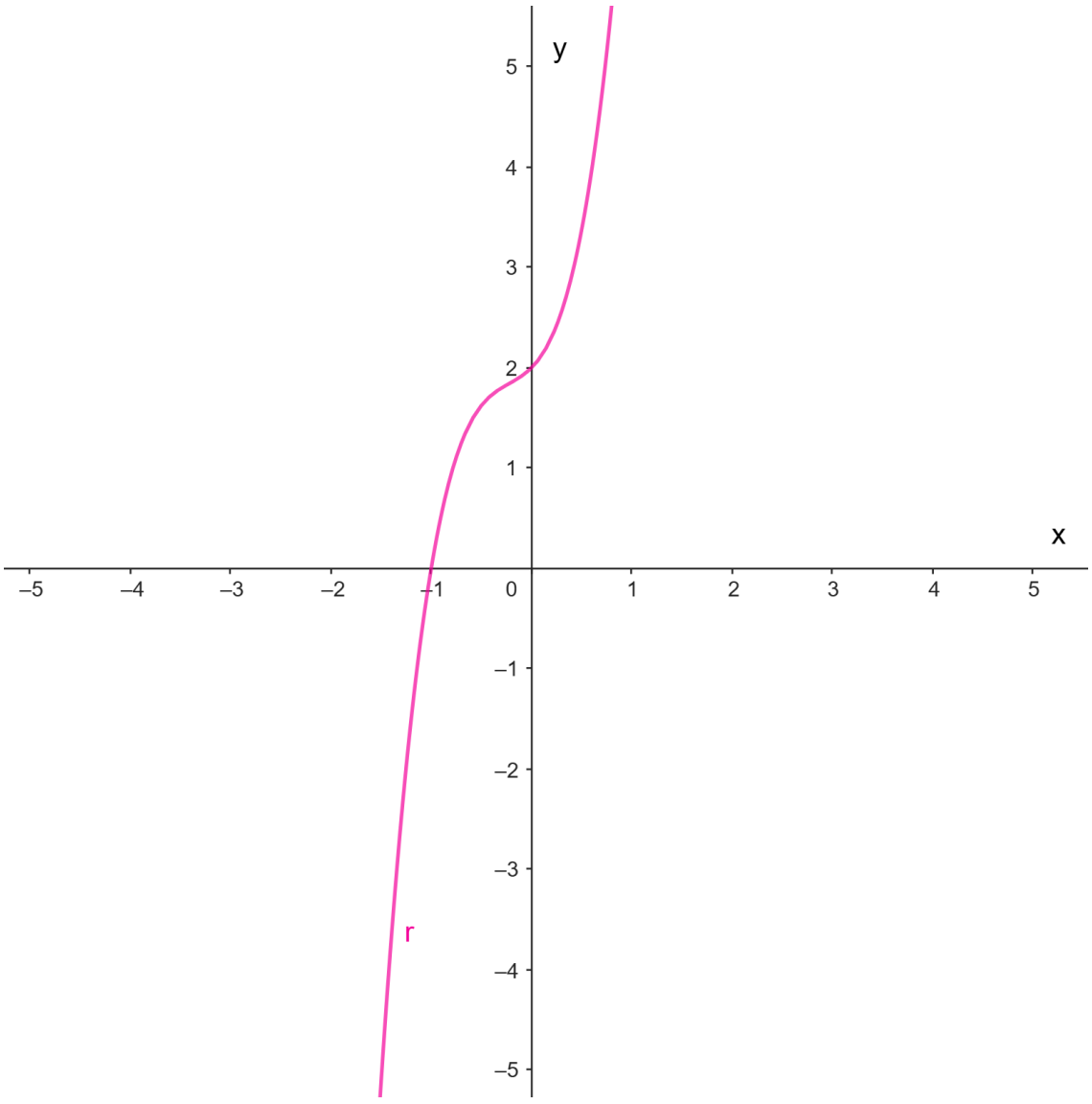


Figura 6.18: Gráfico de una función polinómica.

Función exponencial

"Para $a > 0$, la función exponencial con base a está definida por $f(x) = a^x$. Para $a \neq 1$, el dominio de f es R, el rango es $(0, \infty)$" (Stewart, s.f, p.263).

Si $a > 1$ la función crece.
Ejemplo: $h_1(x) = 3^x$. (Su gráfica se representa con el símbolo h_1).

Si $0 < a < 1$ la función exponencial decrece.
Ejemplo: $h_2(x) = (1/3)^x$. (Su gráfica se representa con el símbolo h_2).

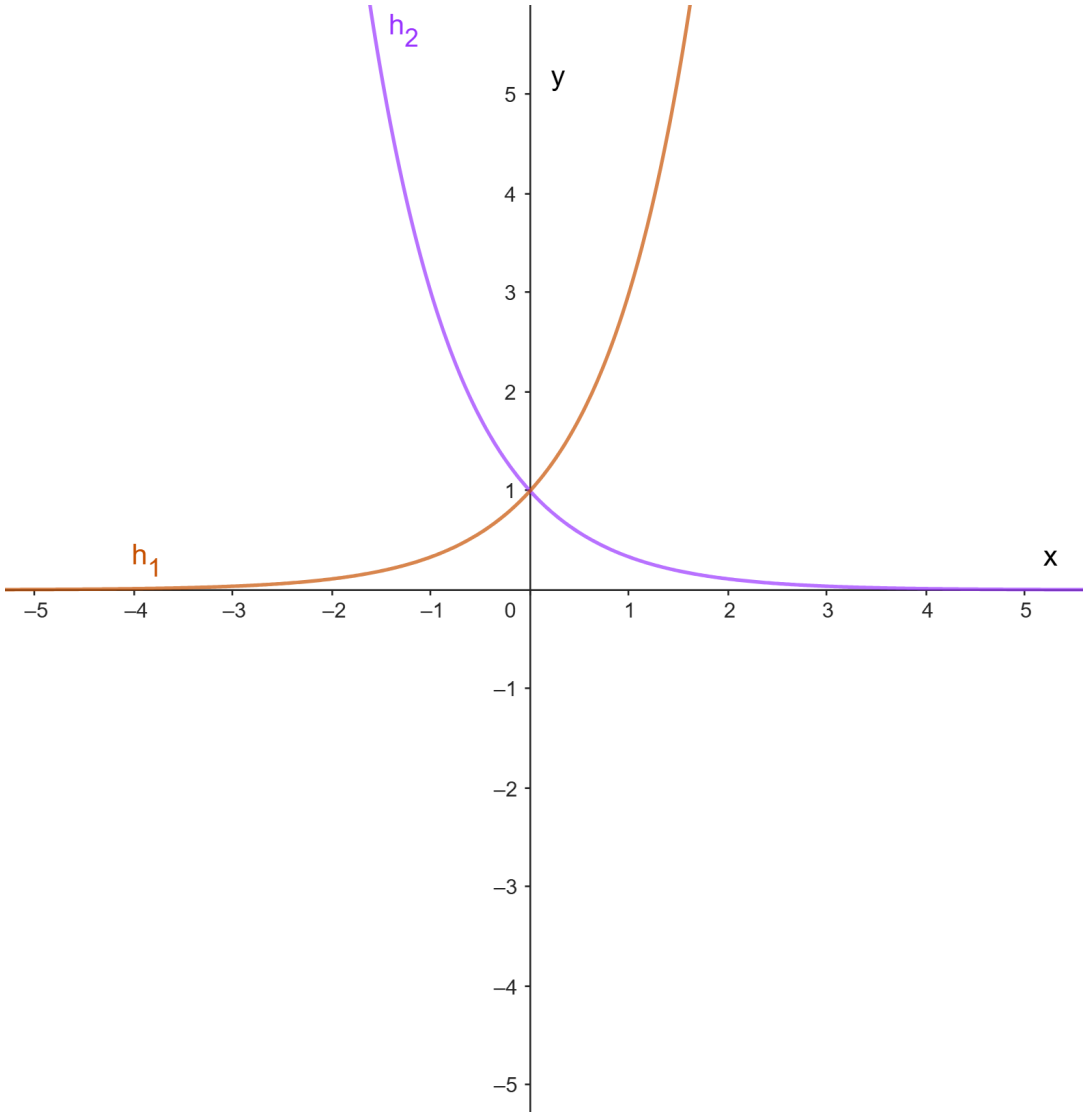


Figura 6.19: Gráfico de una función exponencial creciente y decreciente.

Función logarítmica

"Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La función logaritmo con base a, denotada por $log_a(x)$, se define como $log_a(x) = y \leftrightarrow a^y = x$. Es decir que $log_a(x)$, es el exponente al cual debe elevarse la base a para obtener x" (Stewart, s.f, p.278).

Ejemplo: p (x) = $log_3(x)$. (Su gráfica se representa con el símbolo p).

Ejemplo: q (x) = $log_{1/3}(x)$. (Su gráfica se representa con el símbolo q).

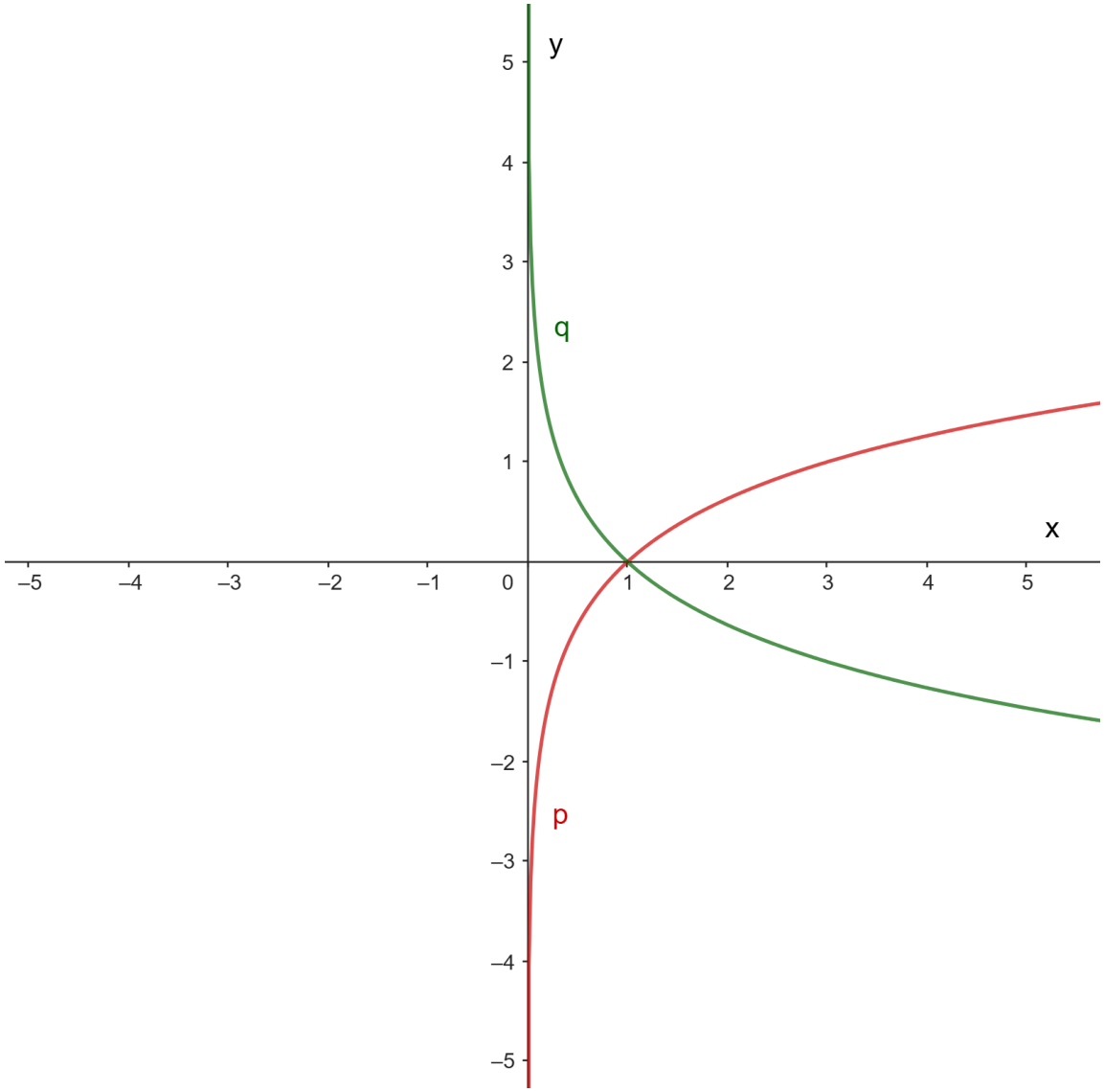


Figura 6.20: Gráfico de una función logarítmica creciente y decreciente.

Función racional

"Una función racional es el cociente de dos polinomios. Entonces q es racional si, para todo x en su dominio, $q(x) = f(x)/h(x)$. En donde $f(x)$ y $h(x)$ son polinomios. El dominio de un polinomio es R, pero el dominio de una función racional consta de todos los números reales excepto los ceros del polinomio que está en el denominador" (Swokowski, 1988, p.44).
Ejemplo: r (x) = $(3x-1)/x$. (Su gráfica se representa con el símbolo r y el $dom(f) = \mathrm{R}\backslash\{0\}$.

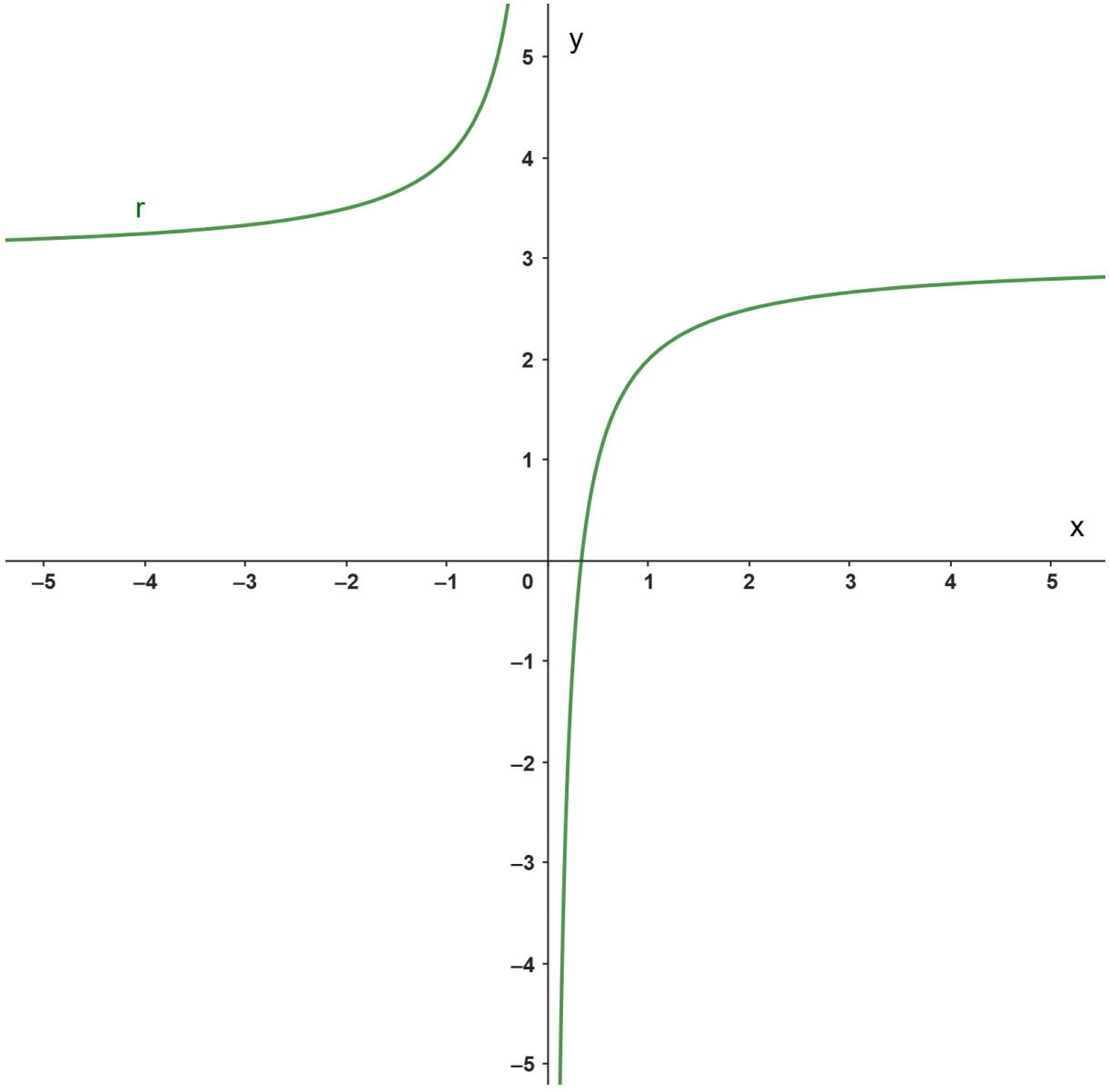


Figura 6.21: Gráfico de una función racional.

Función seno y coseno

"Supongamos que t es cualquier número real y que $P(x,y)$ es el punto terminal en el círculo unitario determinado por t. Definimos $sen(t) = y$ y $cos(t) = x$ " (Stewart, s.f, p.402).

Ejemplo: s (t) = $sen(t)$. (Su gráfica se representa con el símbolo s).

Ejemplo: r (t) = $cos(t)$. (Su gráfica se representa con el símbolo r).

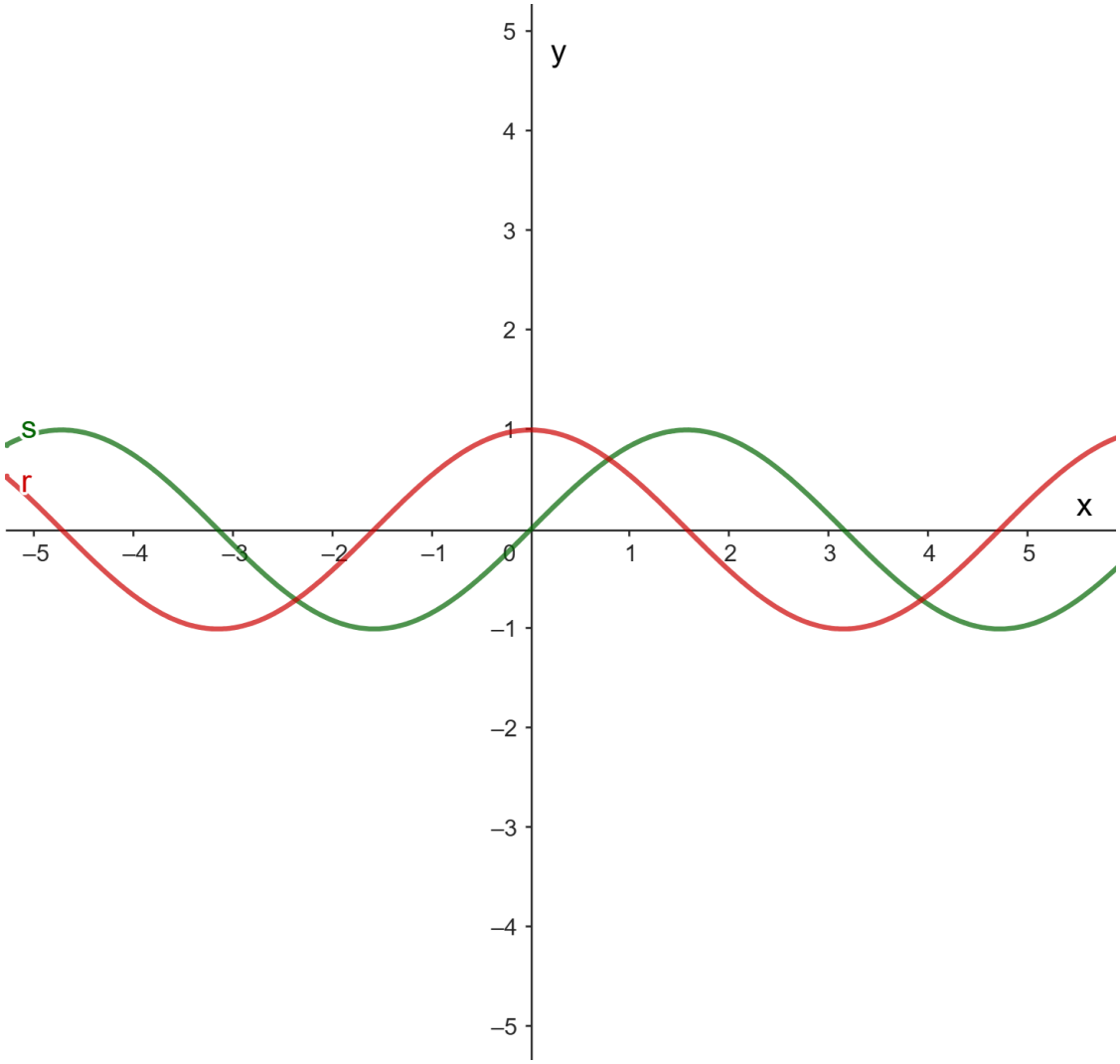


Figura 6.22: Gráfico funciones seno y coseno.

Actividad sobre gráficas de funciones matemáticas

A continuación se representan algunas funciones matemáticas.

1. Clasifíquelas de acuerdo al tipo de función matemática, rotulándola con un color y asignándole el nombre que le corresponda a cada una.

2. Señale los valores del rango y dominio en cada función de acuerdo a los ejemplos dados anteriormente.

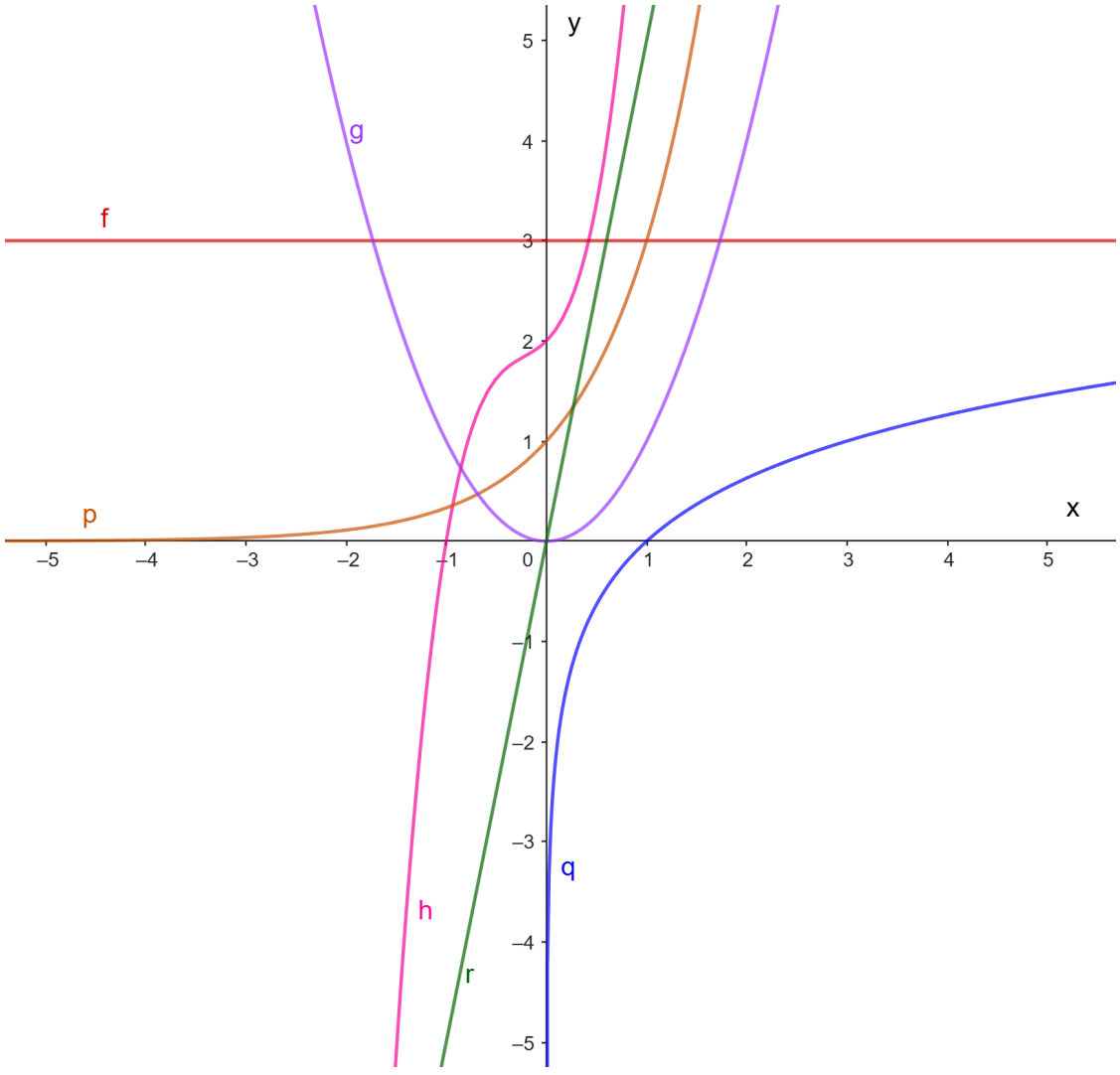


Figura 6.23: Gráficos de funciones matemáticas.

6.0.11. Ejercicios-Funciones Matemáticas

¡Ponte a prueba!

A continuación se presentan algunos ejercicios para repaso de temas.

1. ¿La función $y = 3.x$ es inyectiva?

2. ¿La función $y = x/2$ es lineal?

3. Representar la función $y = 4.x$ en el plano cartesiano.

4. Si una población crece con el cubo de los números positivos, la tabla de valores de x, $f(x)$ es:

5. ¿En qué se diferencia la relación matemática de la función matemática?

6. Bosquejar una función inyectiva, una sobreyectiva y una biyectiva, indicando dominio y rango.

7. Una población de habitantes mantiene la misma cantidad de individuos durante un mes. Si la población es de 2.000 habitantes, la gráfica que representa esta situación es:

8. Se tienen 4 pares ordenados de una circunferencia, todas en los ejes coordenados, con centro en el origen (0,0) y radio 2. Estos pares ordenados son:

9. La relación matemática de los primeros 5 números primos impares y sus cuadrados está definida por la expresión:

10. Del ejercicio anterior ¿se puede afirmar que también es una función matemática?

Soluciones

Nota curiosa

Sabías que... Para aprender sobre funciones se puede hacer uso de diferentes herramientas, como Geogebra, Phet Simulations, Desmos, entre otras. Las funciones explican y modelan la vida real, están presentes en procesos de distintos campos, como en la medicina, la agronomía y la psicología. Estas pueden ser analizadas con herramientas computacionales y simuladores.

6.0.12. Situaciones problema-Funciones Matemáticas

Nota curiosa

Sabías que... Las funciones matemáticas son llamativas por su forma, además, brindan explicaciones e información de la realidad mediante modelos llamados ecuaciones. Estas ecuaciones son diversas y dependen de qué tipo de situación describan.
Algunas tienen que ver con crecimientos poblacionales, otras con la caída de la bolsa de valores, la transitabilidad en una autopista, la inflación, etc.

Su uso en el campo de la medicina destaca, por permitir la aplicación de modelos lineales o de regresión a descripción de situaciones reales en términos biológicos.

Situación problema 1

Un ciclista recorre distancias iguales en el tiempo mediante la expresión $f(x) = x$, donde x es tiempo en horas y $f(x)$ es distancia en metros. Después de 5 horas recorre distancias diferentes en el tiempo mediante la expresión $g(x) = 3.x(x-1)$, donde x es tiempo en horas y $g(x)$ distancia en metros.

Solución situación problema 1

1. Determinar si el desplazamiento del ciclista es o no una función matemática. Note que la función de desplazamiento del ciclista está en función del tiempo y se compone de un trozo de una función lineal y de un trozo de función cuadrática.

Respuesta: en efecto, la anterior situación representa una función matemática. Aunque hayan incrementos constantes para la distancia y luego se dé una variación en la distancia recorrida en el tiempo, la anterior función, compuesta por dos funciones, una lineal y una cuadrática, cumple con los parámetros de definición de función matemática expuestos en este módulo.

2. Si el comportamiento del desplazamiento del ciclista es lineal, y luego cambia. ¿Una función del tipo $f(x) = a.x + b$ sería correcta para describir y explicar dicho comportamiento?

Respuesta: no, solo describiría una parte de la función, las parte lineal. El trozo de función cuadrática no se estaría teniendo en cuenta, lo cual representa pérdida de rigor matemático.

Situación problema 2

La función matemática $y = 3.x$ representa el crecimiento lineal de ventas en una empresa del sector textil, y representa el valor en billones de pesos y x representa el mes del año. De acuerdo al ejemplo 1 de la definición de función matemática de este módulo, completar los datos restantes de la siguiente tabla.

$f(x)$	x	y	(x,y)
f(1)		3	(1,3)
f( )		6	(2,6)
f(3)	3		(3,)
f( )			(4,)
f(5)		15	(5,15)

Situación problema 3

La función matemática $y = 2.x$ representa el crecimiento lineal de la temperatura en un yacimiento de petróleo. x representa el tiempo en horas y y representa la temperatura en grados Celcius. De acuerdo al ejemplo 1 de la definición de función matemática de este módulo, completar los datos restantes de la siguiente tabla.

$f(x)$	x	y	(x,y)
f(1)		2	(1,2)
f( )		4	(2,4)
f(3)	3		(3,)
f( )			(4,)
f(5)		10	(5,10)

Situación problema 4

Un estudio sobre la forma en que se aleja un bus de su paradero se modela mediante la expresión $f(x) = 2^x - 1$.

Solución situación problema 4

1. Determine mediante reemplazo directo los valores de distancia en la expresión $f(x) = 2^x - 1$ para los primeros 5 segundos, donde x es tiempo en segundos y en donde $f(x)$ es distancia. Haga uso de una tabla de pares ordenados con $f(x)$ para hallar la solución solicitada, como se ilustró en el ejemplo 1 de la definición de función y en las situaciones problema 2 y 3.

2. Empezando por $x = 1$, hasta el valor $x = 5$, determinar el rango y el dominio de la función $f(x) = 2^x - 1$.

Situación problema 5

Un estudio sobre la forma en que se mueve una persona en una competencia de atletismo se modela mediante la expresión $f(x) = x^3 + 1$, con x en segundos y $f(x)$ la distancia recorrida.

[title=Solución situación problema 5, colframe=blue!73!] 1. Determine mediante reemplazo directo en la expresión $f(x) = x^3 + 1$ para los primeros 5 segundos. Haga uso de una tabla de pares ordenados con $f(x)$ para hallar la solución solicitada, como se ilustró en el ejemplo 1 de la definición de función y en las situaciones problema 2 y 3.

2. Empezando por $x = 1$, hasta el valor $x = 5$, determinar el rango y el dominio de la función $f(x) = x^3 + 1$.

Situación problema 6

A medida que transcurren las horas, en una vía pública, la cantidad de automóviles que circulan por esta aumentan. La anterior situación se modela mediante la función $f(x) = 120.x$, donde $f(x)$ es el número de autos y x el tiempo en horas. (El tiempo se mide en valores enteros).

Solución situación problema 6

1.Encuentre la cantidad de carros y en la hora $x = 24$ y $x = 12$. Compare los resultados obtenidos y extraiga conclusiones.

2. Empezando por $x = 1$, hasta el valor $x = 5$, determinar el rango y el dominio de la función.

6.0.13. Examen sobre funciones matemáticas

¡Ponte a prueba!

A continuación se presentan algunas situaciones problema como complemento al módulo. Resuelva con procedimiento adjuntando el procedimiento seguido.

1. Una fábrica experimentó un crecimiento en sus ventas durante un período de tiempo de 12 meses. Este crecimiento se modela con la expresión 5^x, la cual representa las ventas de la empresa por mes en millones de pesos. Para los valores $x = 1$ y $x = 3$, el total de ventas mensuales son iguales respectivamente a:

2. Un estudio sobre la forma en que se mueve un transeúnte en una calle, se modela mediante la expresión $f(x) = x^2 + 1$. Donde $f(x)$ es distancia en metros y x es tiempo en segundos. Determine el tiempo que debe transcurrir para que el transeúnte recorra 101 metros.

3. Sea la función $q(x) = log_2(x)$. Complete una tabla de valores para los primeros 5 números enteros x positivos y prediga el comportamiento de la función.

4. Una comunidad experimenta vientos huracanados mediante la expresión $f(x) = x^3 + 1$, donde $f(x)$ representa la velocidad del viento en m/s y x el tiempo en horas, desde las 08:00 am hasta las 12:00 pm. Para un tiempo de 9 horas y 30 minutos en la mañana, encuentre la velocidad del viento.

5. Construya una gráfica de velocidad versus tiempo que represente la siguiente situación: una persona se mueve desde un punto $x = 0$ hacia adelante en línea recta con velocidad constante, luego acelera de manera constante y finalmente desacelera de forma constante hasta llegar a una estación de bus, en la cual se detiene.

6.0.14. Actividad de funciones matemáticas - Globos como funciones

Indicaciones

Implementos: dos globos resistentes, 7 cordones delgados, marcador y cinta.

1. Tomar un globo inflado y adherir a este siete cordones. En cada punta adherida a el primer globo, colocar las letras de la a hasta la letra g en orden alfabético. Marcar este globo en la parte superior con la letra X.

2. Se debe numerar del 1 al 7, y en ese mismo orden, 7 puntos distintos en el globo 2, marcándolo en la parte superior con la letra Y.

3. Contar con los cordones, el número de formas posibles de acercarse a Y partiendo de las letras que van desde la a hasta la g.

4. El ejercicio de los globos y los cordones, hacen alusión a una función en matemáticas, o a una máquina, que lanza valores distintos cuando se le ingresa un elemento de

$$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un elemento del conjunto de llegada, pero no ocurre eso en caso contrario. Puede ser que a, b y c tengan un mismo valor en el conjunto de llegada, osea en el globo 2, correspondiendo a una función lineal en el tramo de los puntos (a, c).

5. Del primer globo solo se puede buscar un elemento de llegada en el segundo globo, no obstante, en los elementos de llegada

$$Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

puede haber más de un elemento del conjunto de salida X.

6. Se debe comprender que la función tiene una característica y regla general, esta se forma con dos o más conjuntos y requiere siempre respetar la definición de función, en caso contrario lo que se analiza no es una función, si no una relación matemática de dos o más conjuntos.

Nota: no siempre se usan todos los elementos del conjunto de llegada, lo cual indica que se puede usar un subconjunto del conjunto de llegada, llamado rango.

Operaciones con funciones

Para funciones matemáticas $f(x)$ y $g(x)$ se definen las operaciones siguientes:

Suma de funciones: se define como $(f+g) := f(x) + g(x)$

Ejemplo: sean $f(x) = 3.x + 1$ y $g(x) = 2.x + 2$. Su suma sería $(f+g) := (3.x+1) + (2.x+2) = 5.x + 3$.

Resta de funciones: se define como $(f-g) := f(x)$ - $g(x)$

Ejemplo: sean $f(x) = 3.x + 1$ y $g(x) = 2.x + 2$. Su resta sería $(f-g) := (3.x+1)$ - $(2.x+2) = x - 1$.

Multiplicación de funciones: se define como $(f.g) := f(x).g(x)$

Ejemplo: sean $f(x) = 3.x + 1$ y $g(x) = 2.x + 2$. Su multiplicación sería $(f.g) := (3.x + 1).(2.x+2) = 6.x^2 + 6.x + 2.x + 2 = 6.x^2 + 8.x + 2$.

División de funciones: se define como $(f/g) := f(x)/g(x)$. Un requisito es que $g(x)$ sea diferente de 0.

Ejemplo: sean $f(x) = 3.x + 1$ y $g(x) = 2.x + 2$. Su división sería $(f/g) := (3.x + 1)/(2.x+2)$. Con x diferente de -1.

El dominio de las funciones resultantes es el dominio en común de las funciones; excepto para el caso de la división de funciones, en donde el dominio de $g(x)$ debe ser distinto de 0.

6.0.15. Operaciones y transformaciones con funciones.

Indicaciones

Para funciones matemáticas distintas, encuentre la suma, resta, multiplicación y división de estas, como se indica en los ejercicios. Grafique en Geogebra las funciones resultantes.

1. $log_2 x$ - 3.x

2. $log_3 x$/ 2.x

3. (x^2 + 3.x^2)/(2.x-1)

4. 2$log_2 x$-$log_2 x$/$log_2 x$

5. (x^2 - 1)/($x - 1$)

6. ((x^2 - 1).($x - 1$))/($x + 1$)

7. ($log_3 x$.$log_3 x$)/$log_3 x$

8. (x^3 - 1)/($x - 1$)

9. $(1/3)^x/(1/3)^x$

10. (x^4 - 2)/($x - 2$)

¡A transformar!

A una función matemática $f(x)$, se le puede atribuir una forma gráfica y ecuación diferente, tomando como base una función original. Esto significa que la función sufre una transformación en su forma y ecuación. Sea el caso de la función $f(x) = x^2$, que se representa con f.

Las gráficas de las funciones mencionadas en esta sección aparecen en las próximas páginas en dos planos cartesianos distintos.

Esta función puede transformarse de la siguiente manera:

1. **Sumándole una constante** c**.**

Ejemplo: para una función $f(x) = x^2$ con constante $c = -2$; en donde c es un número real, $f(x) + c = x^2 + (-2) = x^2$ - 2. Si $c = 2$, $f(x) + c = x^2 + 2$.

Cuando el valor que acompaña a la función queda con signo positivo, esta mueve la gráfica c unidades hacia arriba, cuando aparece un signo negativo, esta mueve c unidades hacia abajo la gráfica de la función. La gráfica r y q representan respectivamente estas dos posibles transformaciones sobre $f(x) = x^2$.

2. **Sumándole una constante** c **a** x**, tal que** $f(x)$ **sea transforme en** $f(x + c)$**.**

Ejemplo: para una función $f(x) = x^2$ con constante $c = -2$; en donde c es un número real, $f(x + c) = (x + (-2))^2 = (x - 2)^2$. Si $c = 2$, $f(x + c) = (x + 2)^2$. La suma del valor c a x hace que la función se mueva a la derecha si dicho valor le resta a x, y hace que esta se mueva a la izquierda si esta añade valor a x.
La gráfica t y w representan respectivamente estas dos posibles transformaciones sobre $f(x) = x^2$.

3. **Multiplicándola por una constante** c**.**
La multiplicación por c alarga o aplana la gráfica de la función, dado un número real c. Esta constante c debe ser distinta de cero.

Ejemplo 1: para una función $f(x) = x^2$ con constante $c = 2$; $c.f(x) = 2.x^2$. La gráfica l representa la multiplicación por c.

Ejemplo 2: para una función $f(x) = x^2$ con constante $c = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}.f(x) = \frac{x^2}{2}$.La constante debe ser distinta de cero.
La gráfica m representa la multiplicación por c.

Ejemplo 3: si el valor es negativo, esto hace que se invierta la gráfica con respecto al eje x. Para una función $f(x) = x^2$ con constante $c = -1$, $c.f(x) = (-1).x^2$, $f(x) = -x^2$. La gráfica i representa la multiplicación por c.

A continuación el primer plano cartesiano con las gráficas de f y sus transformaciones.

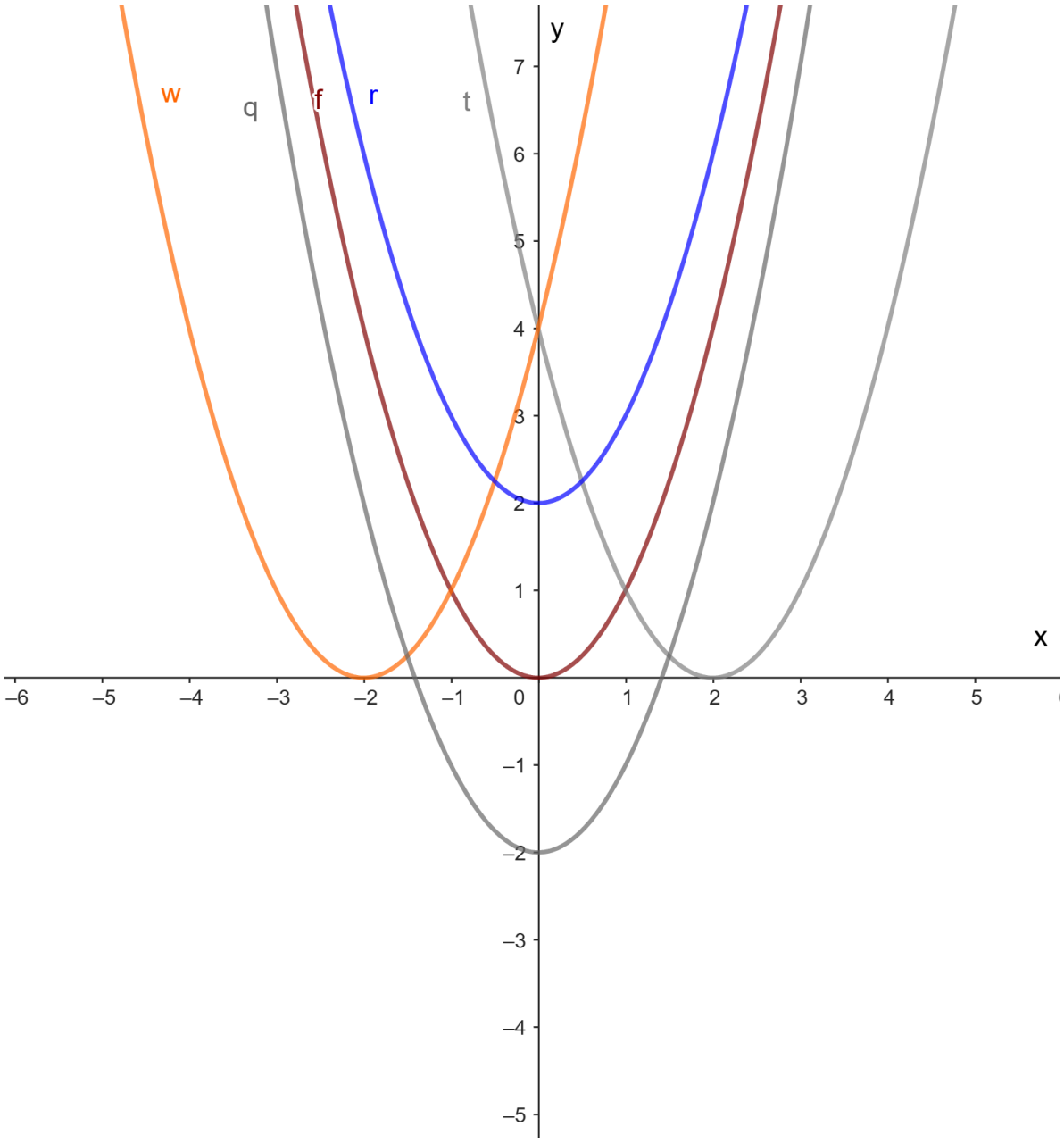


Figura 6.24: Gráficos de transformación de funciones matemáticas.

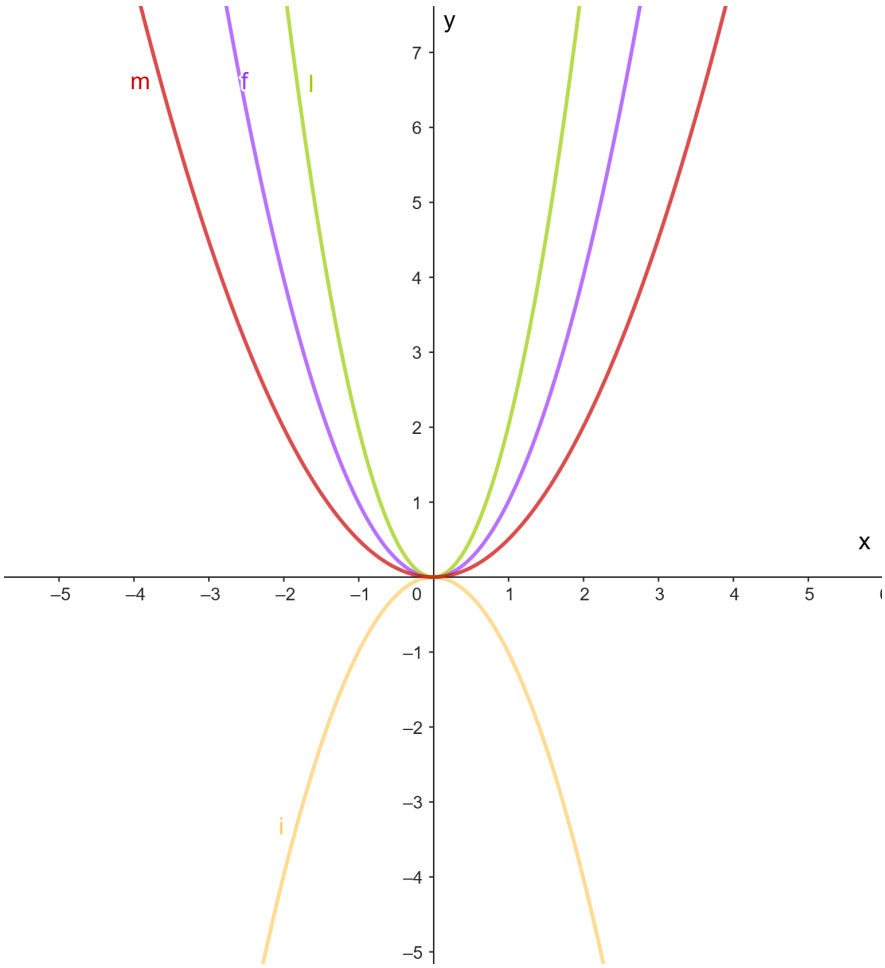


Figura 6.25: Gráficos de transformación de funciones matemáticas.

Ejercicio final

A continuación se plantea un reto.

Para finalizar, se debe asignar a cada gráfica que aparece la transformación que le corresponda, señalando a la función original e identificando a la constante c.

Importante: señalar con un color diferente cada función representando con la forma matemática la transformación ocurrida.

Preferible no usar herramientas tecnológicas para ello. Posterior a la solución brindada, se puede hacer verificación con Geogebra o Desmos.

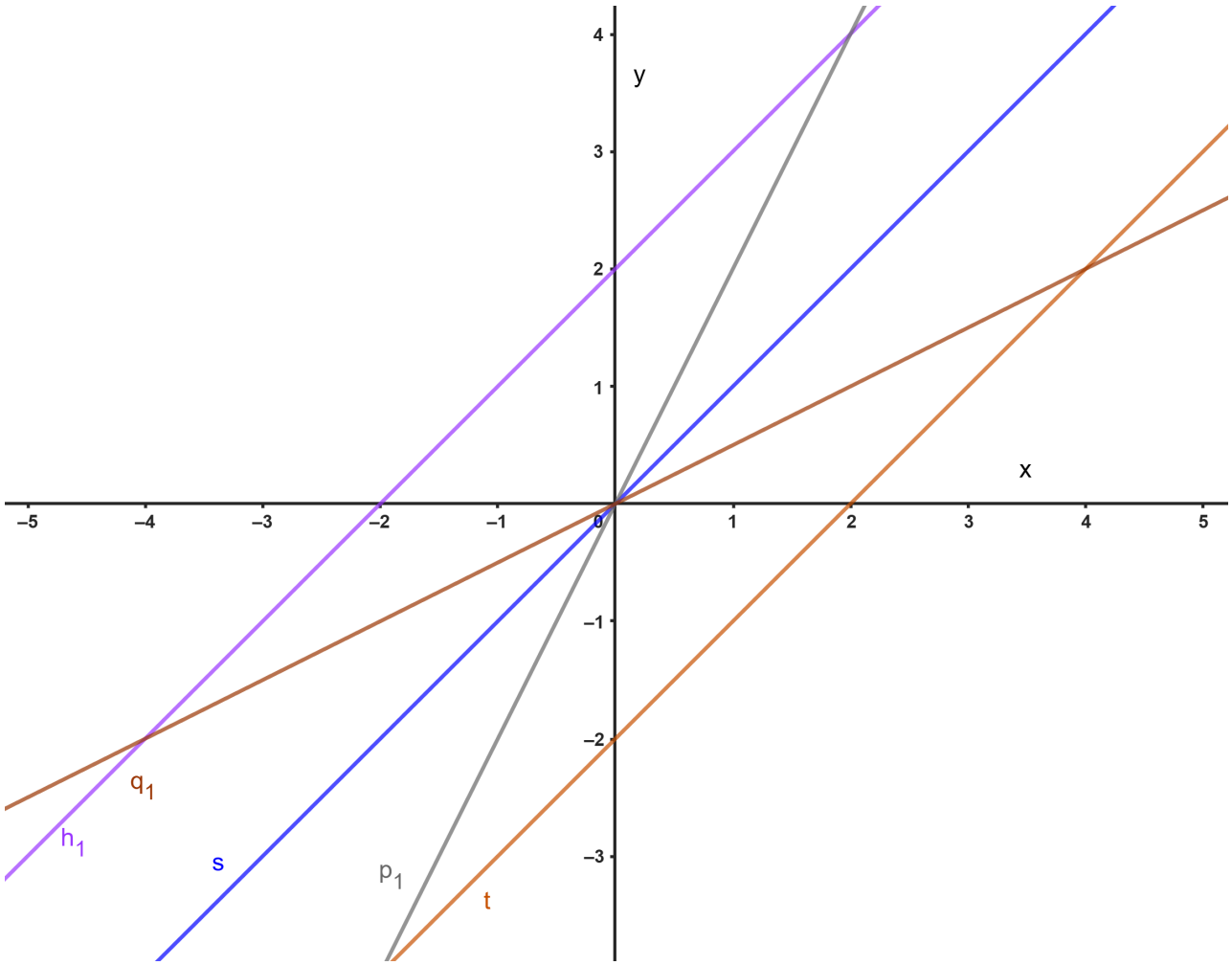


Figura 6.26: Gráficos de transformación de funciones matemáticas.

Cierre del módulo

A continuación se deja un espacio para que el lector haga retroalimentación de las actividades planteadas.

6.0.16. Recomendaciones generales

Para la aplicación del módulo de profundización en enseñanza de la función matemática, se recomienda sea aplicado en el grado 9° de bachillerato. Para la intervención en clase con este instrumento, se sugiere realizar un diagnóstico del grupo en cuanto a las bases y prerrequisitos aritméticos y algebraicos necesarios para superar con éxito el grado 8°. Esto permite relacionar de una manera más armoniosa el contenido ofrecido y por ende su comprensión. En caso de que el grupo a intervenir con el módulo requiera de algunas clases para fortalecer las bases matemáticas mencionadas, se sugiere hacer uso de un par de sesiones complementarias. En el módulo se incluye un taller diagnóstico de temas de grados anteriores.

En cuanto al módulo, se debe orientar al estudiante en el desarrollo del mismo para hacer uso de los espacios vacíos y consignar allí las soluciones de cada sección. Para preservar un orden en su realización se recomienda además conservar el módulo en una carpeta a manera de archivo, así se preserva el material y se tiene un orden para la aplicación y evaluación del mismo.

En cuanto al contenido del mismo, se han expuesto ideas, gráficos, actividades, ejercicios, situaciones problema resueltos, conceptos y algunos ejemplos de referencia de tal forma que, el alumno pueda ir avanzando de forma autónoma en las subsecciones. Si el estudiante requiere apoyo en la comprensión de algún concepto el profesor tiene allí el objetivo de complementar el módulo y de apoyarse en su contenido para promover el aprendizaje matemático.

6.0.17. Referencias bibliográficas:

Arellano, M., Guadalupe, C., Mena, M., Torres, J., y Murillo, P. (2017). Electrónico "Funcimat" Como Herramienta Didáctica Para El Estudio De Funciones Matemáticas Y Su Incidencia En El Rendimiento Académico Estudio De Caso: Escuela De Agronomía, Facultad De Recursos Naturales Espoch.

Belloch, C. (2017). Diseño instruccional. Universidad de Valencia. https://www.uv.es/bellochc/pedagogia/EVA4.pdf

Bravo, J. (2010). Neurociencias y Enseñanza de la Matemática. Prólogo de algunos retos educativos. Revista Iberoamericana de educación, 51(3), 1-12.

Bravo, L. (2014). Psicología cognitiva y neurociencias de la educación en el aprendizaje del lenguaje escrito y de las matemáticas.

Cantillana, P. (2015). Propuesta didáctica de enseñanza y aprendizaje módulo de funciones para la unidad de función lineal y afín del programa de matemática primer año de enseñanza media: PRODIENAF.

Ceron, A., Reyes, R., e Islas, H. (2020). La Importancia de la investigación. Boletín Científico De Las Ciencias Económico Administrativas Del ICEA, 9(17), 49-50.

Crespo, C., y Ponteville, C. (2003). El concepto de función: su comprensión y análisis. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16 (1), 235-241.

Del Rosario, A., y Ruíz, N. (2024). Augustin Cauchy: Un genio matemático que revolucionó la ciencia. LUMEN ET VIRTUS, 15(39), 2078-2084.

Delgado, G. (2010). Conceptos y metodología de la investigación histórica. Revista Cubana de Salud Pública, 36(1), 9-18. Recuperado en 18 de noviembre de 2024.

Enciclopedia Unversalis. https://www.encyclopaedia-universalis.fr/. Francia.

Espinoza, G., Zakaryan, D., y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21(3), 301-324.

Fabián, G. (2013). Efectividad de un módulo de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de secundaria del Callao. Propósitos y Representaciones, 1(1), 87-106.

Farfán, R., y García, M. (2005). El concepto de función: un breve recorrido epistemológico. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18, 489-494.

Fernández, I., Riveros, V., y Montiel, G. (2017). Software educativo y las funciones matemáticas. Una estrategia de apropiación. Omnia, 23(1), 9-19.

Fundación Empresarios por la Educación y observatorio de gestión educativa. (2024). Análisis de resultados examen Saber 11° 2023 .
https://fundacionexe.org.co/wp-content/uploads/2024/07/Ana

García, G. (2010). Conceptos y metodología de la investigación histórica. Revista cubana de salud pública, 36(1), 9-18.

Herrera, L. (2013). El concepto leibniziano matemático de función en 1673. Una presentación en el contexto de su surgimiento. Cultura. Revista de História e Teoria das Ideias, 32, 127-144.

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación [ICFES]. (2022). Niveles de desempeño sociales y ciudadanas - Saber 11 2022. http://surl.li/qzovkz

Kleiner, I. (1989). Evolution of the function concept: A brief survey. The College Mathematics Journal, 20(4), 282-300.

Leibniz, G. (2017). Nuevos ensayos sobre el entendimiento. Ediciones Akal.

Leithold, E. (1998). Cálculo y geometría analítica . Universidad Autónoma Metropolitana.
$https://kali.azc.uam.mx/clc/03_docencia/leithold.pdf$.

Lindström, J. (2008). On the origin and early history of functional analysis. DiVA portal.

Lipschutz, S. (1970). Teoría y problemas de teoría de conjuntos y temas afines. México: McGraw-Hill.

Llanos, V., Bilbao, M., y Otero, M. (2011). Implementación de una AEI relativa al campo conceptual de las funciones polinómicas en la escuela secundaria: perspectiva didáctica y cognitiva. In Actas del I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática (II ENEM). NIECyT, F. de Cs. Exactas, UNCPBA. Tandil, del (Vol. 8, pp. 486-492).

López, J. y Sosa, L. (2008). Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato . Universidad de los Andes.
$https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1212926./L25$.

Ministerio de Educación Nacional. (2016). Derechos básicos de aprendizaje.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares básicos de aprendizaje.

Ministerio de Educación Nacional. (2024). Pruebas PISA 2022: Colombia, un sistema educa-

tivo resiliente que requiere cambios estructurales para mejorar su calidad. http://surl.li/tzfumn.

Ponce, J. (2015). Breve historia del concepto de derivada. Obtenido de: https://bestiarioto pologico. blogspot. com/2018/01/breve-historia-de-la-derivada. html.

Pla i Carrera, J. (n.d.). Descartes y la geometría analítica. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Ponte, J. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. The Mathematics Educator, 3-8.

Radford, L., y André, M. (2009). Cerebro, cognición y matemáticas. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 12(2), 215-250.

Rivera-Rivera, E. (2019). El neuroaprendizaje en la enseñanza de las matemáticas: la nueva propuesta educativa. Entorno, (67), 157-168.

Sampieri, R. (2018). Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta. McGraw Hill México.

Santaló, L. (1990). Conferencia inaugural: Matemática para no matemáticos. In Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática.

Stewart, J. (s.f). Introducción al cálculo. Recuperado de https://skat.ihmc.us/rid=1HRJLT1Y5-1F9KTXZ-16CM/Introduccion al Calculo (James Stewart).pdf

Sureda, P., y Otero, M. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. Educación matemática, 25(2), 89-118.

Swokowski, E. W. (1988). Cálculo con geometría analítica (Capítulos 1 al 4). Recuperado de https://bit.ly/4bCQqfX.

Ugalde, W. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. Revista Digital: Matemática, Educación e Internet, 14(1), 1-48. Recuperado de https://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/docs/autores/pag/mat/Descartes3.asp.htm.

Vargas, R. (2013). Matemáticas y neurociencias: una aproximación al desarrollo del pensamiento matemático desde una perspectiva biológica. UNIÓN-REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 9(36).

Varona, J. (2022). La función peine de Dirichlet y algunas funciones patológicas similares: propiedades analíticas y diofánticas. Materials matemàtics.

Vázquez, P., Rey, G., y Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la historia. Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 4(16).

Vilchez, A. (2017). Modelo de enseñanza modular personalizada de las funciones matemáticas. VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1171969/Vilchez2017Modelo.pdf.

6.0.18. Anexos



Figura 6.27: Socialización módulo de profundización en la Institución Educativa de María, 1.



Figura 6.28: Socialización módulo de profundización en la Institución Educativa de María, 2.